Clase Práctica 7

Maite Angel

2022-06-07

Repaso

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a de una distribución que depende de un parámetro θ y sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ basado en la muestra.

- Sesgo: $b(\hat{\theta}) = (\hat{\theta} - \theta)$

Si el sesgo es 0 entonces $\hat{\theta}$ es insesgado, si converge a 0 cuando $n \to \infty$ es asint. insesgado.

- Consistencia: $\hat{\theta}$ es consistente si $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$

Propiedad Si:

(1) $\hat{\theta}$ es asintóticamente insesgado.

(2) $V(\hat{\theta}) \to 0$

entonces $\hat{\theta}$ es consistente.

- ECM: El error cuadratico medio de $\hat{\theta}$ se define como $ECM(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2)$.

Propiedad

$$ECM(\hat{\theta}) = \text{Sesgo}^2 + \text{Var} = E(\hat{\theta} - \theta)^2 + Var(\hat{\theta})$$

Ejercicio 1

Sean $X_1, X_2, .., X_n$ m. a. con densidad $f_X(x) = (\theta - 1)2^{\theta-1}x^{-\theta}I_{[2,+\infty)}(x)$.

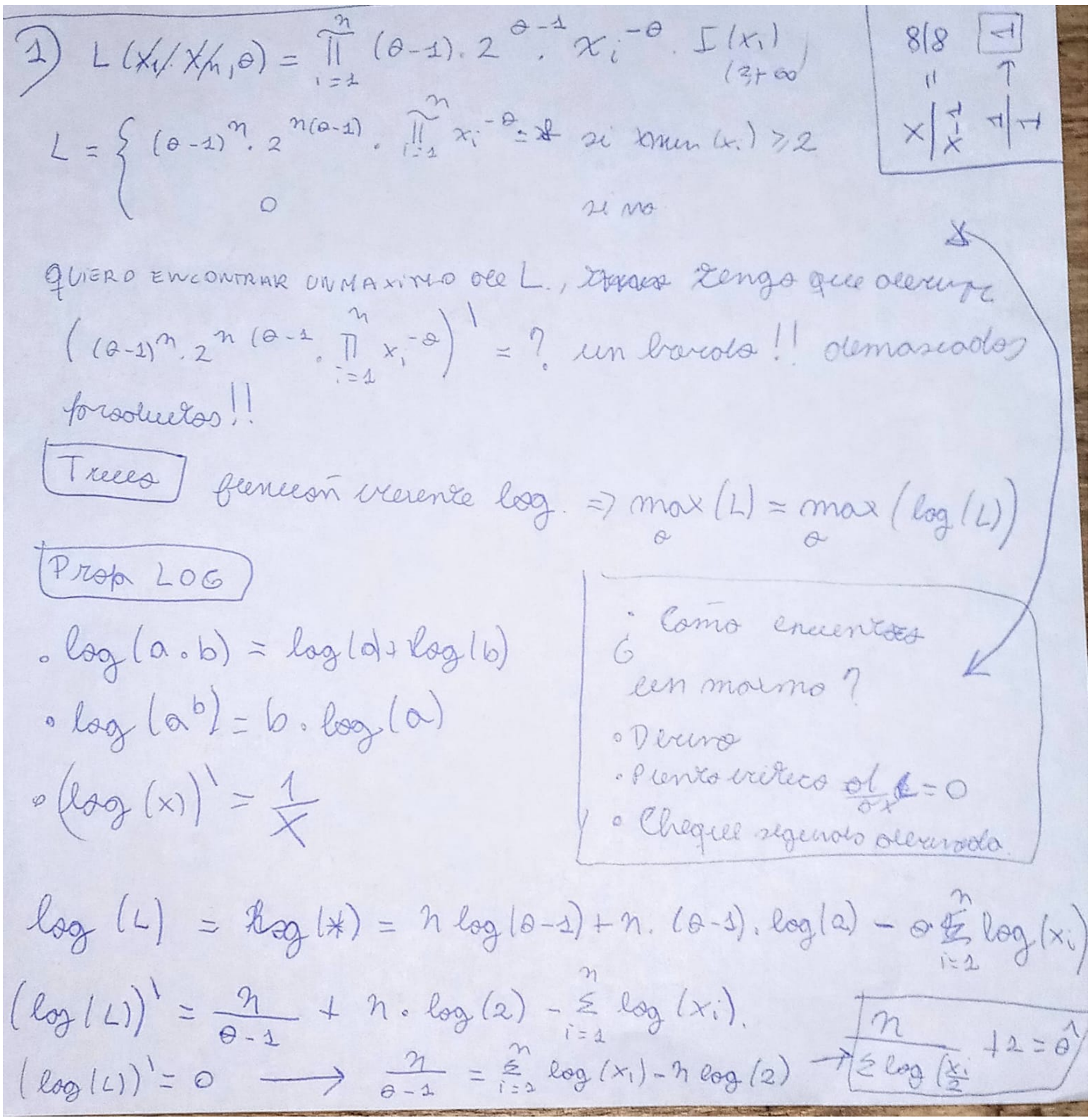
Item 1: Hallar el estimador de maxima verisimilitud

Item 2: Encontrar el sesgo y analizarlo ¿Qué nos dice del estimador?

Item 3: Analizar su consistencia.

Solución

(Va con fotitos)



1) $L(X_1/X_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} (\theta-1) \cdot 2^{\theta-1} \cdot x_i^{-\theta} \cdot I_{(2,+\infty)}(x_i)$

$8|8 \quad \boxed{\triangleleft}$

$L = \begin{cases} (\theta-1)^n \cdot 2^{n(\theta-1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\theta} \doteq (*) & \text{si } \min(x_i) \geq 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

QUIERO ENCONTRAR UN MAXIMO DE L., tengo que derivar

$\left((\theta-1)^n \cdot 2^{n(\theta-1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\theta}\right)' = ?$ un bardo!! demasiados productos!!

$\boxed{\text{Truco}}$ función creciente log. $\Rightarrow \max_\theta(L) = \max_\theta(\log(L))$

$\boxed{\text{Prop LOG}}$

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$
- $(\log(x))' = \frac{1}{x}$

¿Cómo encuentro un máximo?

- Derivo
- Punto crítico $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$
- Chequeo segunda derivada.

$\log(L) = \log(*) = n\log(\theta-1) + n \cdot (\theta-1) \cdot \log(2) - \theta \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$

$(\log(L))' = \frac{n}{\theta-1} + n \cdot \log(2) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$.

$(\log(L))' = 0 \longrightarrow \frac{n}{\theta-1} = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - n\log(2) \rightarrow \boxed{\frac{n}{\sum \log(\frac{x_i}{2})} + 1 = \hat{\theta}}$

Chequeo que sea máximo $\rightarrow \left(\log(L)\right)''(\hat{\theta}) < 0$

$$\left(\log(L)\right)'' = \frac{-n}{(\theta-1)^2} < 0 \quad \forall\, \theta \neq 1$$

luego $\left(\log(L)\right)''(\hat{\theta}_n) < 0 \Rightarrow \hat{\theta}$ es EMV.

b) Busco el sesgo.

$$E(\hat{\theta}-\theta) = n \cdot E\left(\frac{1}{\sum \log\left(\frac{X_i}{2}\right)}\right) + 1$$

(*)

Busquemos la distribución de $\log\left(\frac{X_i}{2}\right)$

$$P\left(\log\left(\frac{X_i}{2}\right) \leq k\right) = \underbrace{P\left(X_i \leq 2e^k\right)}_{=F_X(2e^k)} = F_{\log\left(\frac{X_i}{2}\right)}(k)$$

$$\Rightarrow f_{\log\left(\frac{X_i}{2}\right)}(k) = f_{X_i}(2e^k) \cdot 2 \cdot e^k$$

$$= (\theta-1) \cdot \cancel{2^{\theta-1}} \cdot \cancel{2^{-\theta}} \cdot e^{-\theta k} \cdot \cancel{2} \cdot e^k \cdot I_{(2,+\infty)}(2e^k)$$

$$= (\theta-1) \cdot e^{-k(\theta-1)} \cdot I_{(0,+\infty)}(k)$$

$\downarrow$

$2 \leq 2e^k$

$1 \leq e^k$

$0 \leq k$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{X_i}{2}\right) \sim \mathcal{E}(\theta-1)!$$

Luego $Y = \sum_n \log\left(\frac{X_i}{2}\right) \sim \Gamma(n, \theta-1)!$ $\quad \boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$

(*)

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{(\theta-1)^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-(\theta-1)x} I_{(0,+\infty)}(x)$$

$$= \frac{(\theta-1)}{n-1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\theta-1)^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \cdot x^{n-1} e^{-(\theta-1)x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)}_{=1} = f_Z \sim \Gamma(n-1, \theta-1)$$

$$= \frac{\theta-1}{n-1}$$

Luego el sesgo

$$E(\hat{\theta}-\theta) = n \cdot \frac{\theta-1}{n-1} + 1 - \theta .$$

- El sesgo $\boxed{\text{NO}}$ es 0, luego $\boxed{\text{NO}}$ es insesgado
- $E(\hat{\theta}) = \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\to 1} (\theta-1) + 1 \xrightarrow{n\to\infty} \theta \Rightarrow$ ES $\boxed{\text{ASINT. INSESGADO}}$

i.e $E(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

c) Consistencia

Por LGN $\dfrac{\sum_n \log\left(\frac{x_i}{2}\right)}{n} \xrightarrow{P} E\left(\log\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{\theta-1}$

luego,

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum \log\left(\frac{x_i}{2}\right)} + 1 = \frac{1}{\frac{\sum \log\left(\frac{x_i}{2}\right)}{n}} + 1 \xrightarrow{P} \frac{1}{\frac{1}{\theta-1}} + 1 = \theta$$

ES CONSISTENTE.

Ejercicio 2

Ana está en una competencia mundial de proba que implica encontrar el mejor estimador, en terminos de ECM, para $X_1, .., X_n$ con $f_X(x) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty]}(x)$. Ana, fundamentalista de la verosimilitud, decide calcular el EMV, le da $\hat{\theta}_A = min_i X_i$. Manuel, su competidor elige ir por momentos, le da $\hat{\theta}_M = \bar{X} - 1$.

Item 1: Decidir si son consistentes los indicadores.

Item 2: ¿ Quién es el ganador entre Ana y Manuel?

Tarea: Chequear si los estimadores que calcularon Ana y Manuel son correctos.

Solución

(Va con fotitos)

) $\boxed{\text{Consistencia } \hat{\theta}_M}$

Observemos $E(X_1)$

$$E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-(x-\theta)}}_{dv} dx = u \cdot v \Big|_{\theta}^{+\infty} - \int_{\theta}^{+\infty} du\, v$$

$$= -x \cdot e^{-(x-\theta)} \Big|_{\theta}^{+\infty} + \int_{\theta}^{+\infty} e^{-(x-\theta)} dx$$

$$= -0 + \theta + (-e^{-(x-\theta)}) \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \theta + (-0 + 1$$

$$= \theta + 1.$$

Luego por LGN.

$\hat{\theta}_M = \bar{X} - 1 \longrightarrow \theta + 1 - 1 = \theta$ ✓

$\hat{\theta}_M$ es consistente

- <u>$\hat{\theta}_A$ consistencia</u>

Acá no hay LGN que me salve. Veamos si la prop. me ayuda (RECORDAR que que no valga la prop no implica que no sea solo vale la ida $\Rightarrow$)

En primer lugar

(Necesitamos hallar del sesgo por lo que veamos la distr. $\hat{\theta}_A = \min(X_i)$

$$P(\min(x_i) \leq k) = 1 - P(\min(x_i) \geq k) = 1 - P(x_1 \geq k, \ldots, x_n \geq k)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq k)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - P(X_i \leq k)$$

$$\overset{k \in (\theta, +\infty)}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - \int_{\theta}^{k} e^{-(x-\theta)} dt$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - \left(- e^{-(x-\theta)} \Big|_{\theta}^{k} \right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \cancel{1} + e^{-(k-\theta)} \cancel{-1}$$

$$= 1 - e^{-n(k-\theta)}$$

$$f_{\min(x_i)}(k) = n \cdot e^{-n(k-\theta)} \cdot 1_{(\theta,+\infty)}(k)$$

$$E(\min(x_i)) = \int_{\theta}^{+\infty} \underset{u}{\underset{\sim}{x}} \cdot n \cdot \underbrace{e^{-n(x-\theta)}}_{dv} dx = n \cdot \left(\underbrace{x \cdot \frac{e^{-n(k-\theta)}}{-n}}_{u \cdot v} \Big|_{\theta}^{+\infty} - \int_{\theta}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-n(x-\theta)}}{-n}}_{du \cdot v} \right)$$

$$= n \cdot \left(0 + \frac{\theta}{n} - \frac{e^{-n(x-\theta)}}{n^2} \Bigg|_{\theta}^{+\infty} \right)$$

$$= n \cdot \left(\frac{\theta}{n} - \left(0 - \frac{1}{n^2} \right) \right)$$

$$= \theta + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \theta$$

$\Rightarrow$ ASINT. INSESGADO

$$\mathrm{Var}(\min(X_i)) = E(\min(x_i)^2) - \left(E(\min(x_i))\right)^2$$

$$= \underbrace{E(\min(x_i, \theta)^2)}_{(*)} - \left(\theta + \frac{1}{n}\right)^2$$

θ

$$(*) \doteq E(\min(x_i)^2)$$

$$= \int_{\theta}^{+\infty} \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{n \cdot e^{-n(x-\theta)}}_{dv} \, dx$$

$$= n \cdot \left(x^2 \cdot \frac{e^{-n(x-\theta)}}{-n} \Big|_{\theta}^{+\infty} - \int_{\theta}^{+\infty} \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{e^{-n(x-\theta)}}{-n}}_{dv} \right)$$

$$= n \cdot \left(0 + \frac{\theta^2}{n} + \frac{2}{n} \cdot \left(x \cdot \frac{e^{-n(x-\theta)}}{-n} \Big|_{\theta}^{+\infty} - \int_{\theta}^{+\infty} \frac{e^{-n(x-\theta)}}{-n} \right) \right)$$

$$= \cancel{n} \cdot \left(\frac{\theta^2}{\cancel{n}} + \frac{2}{\cancel{n}} \cdot \left(0 + \frac{\theta}{n} - \left(0 + \frac{1}{-n^2} \right) \right) \right)$$

$$= \theta^2 + 2\left(\frac{\theta}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$^1/_{n^2}$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(\min(x_i)) = \underbrace{\theta^2}_{\to \theta^2} + \underbrace{2\left(\frac{\theta}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}_{\to 0} - \underbrace{\left(\theta + \frac{1}{n} \right)^2}_{\to \theta^2} \longrightarrow \theta^2 + 0 - \theta^2 = 0$$

$\Rightarrow$ Es consistente!!

b) Ahora se por fin quien ganó!!

$$ECM(\hat{\theta}_M) = \mathbb{E}(\hat{\theta}-\theta)^2 + Var(\hat{\theta}), \quad \hat{\theta}_M = \bar{X}-1$$

$$= (E(\bar{x}-1)-\theta)^2 + Var(\bar{X}-1)$$

insesgado! $= (\theta+1-1-\theta)^2 + Var(\bar{X})$

$$= 0 + \frac{Var(X)}{n} \; (*)$$

$$\boxed{= \frac{1}{n}}$$

$* \; Var(X) = E(x^2) - E(x)^2 = E(x^2) - (\theta+1)^2$

$$= \int_{\theta}^{+\infty} \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^{-(x-\theta)}}_{dv}\, dx - (\theta-1)^2$$

$$= x^2 \cdot \frac{e^{-(x-\theta)}}{-1}\Big|_{\theta}^{+\infty} - \int_{\theta}^{+\infty} \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{e^{-(x-\theta)}}{-1}}_{V}\, dx - (\theta-1)^2$$

$$= 0 + \theta^2 + 2\left(x \cdot \frac{e^{-(x-\theta)}}{-1}\Big|_{\theta}^{+\infty} - \int_{\theta}^{+\infty} \frac{e^{-(x-\theta)}}{-1}\right) - (\theta-1)^2$$

$$= \theta^2 + 2 \cdot \left(0 + \theta + \frac{e^{-(x-\theta)}}{-1}\Big|_{\theta}^{+\infty}\right) - (\theta-1)^2$$

$$= \theta^2 + 2 \cdot (\theta + (0+1))$$

$$= \underbrace{\theta^2 + 2\theta + 1}_{}+1 - \underbrace{(\theta-1)^2}_{}$$

$$= 1$$

$$ECM\left(\hat{\theta}_A\right) = (\text{SESGO})^2 + \text{Var}$$

$$= \left(\cancel{\theta} + \frac{1}{n} - \cancel{\theta}\right)^2 + \theta^2 + 2\left(\frac{\theta}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(\theta + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{n^2}} + \cancel{\theta^2} + \cancel{\frac{2\theta}{n}} + \frac{2}{n^2} - \cancel{\theta^2} - \cancel{\frac{1}{n^2}} - \cancel{\frac{2\theta}{n}}$$

$$\boxed{= \frac{2}{n^2}}$$

Luego $\forall n \geq 2 \quad \frac{2}{n^2} < \frac{1}{n}$

$$ECM\left(\hat{\theta}_A\right) < ECM\left(\hat{\theta}_M\right)$$

GANA ANA!!!!