Una ruleta tiene números del 0 al 39. Un inspector de casinos sospecha que los números bajos ocurren con mayor frecuencia. Para ponerlo a prueba tira en forma independiente 108 veces una bolita y cuenta la cantidad de resultados que caen entre 0 y 9.

a) De los 108 tiros se observan 40 resultados menores o iguales que 9. Plantear el test de hipótesis para verificar si es cierta la sospecha del inspector y decidir si hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula a nivel asintótico 6 %.

b) ¿Cuál es la potencia del test hallado en a) cuando el valor verdadero de la proporción de veces que sale un número entre 0 y 9 es 0,36?

c) Hallar el tamaño de muestra (aproximado) para que la potencia sea menor a 0.01, cuando el valor verdadero de la proporción de veces que sale un número entre 0 y 9 es 0.36; manteniendo el nivel asitnótico del ítem a).

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el i-ésimo tiro } \underbrace{\text{sale } \leq 9}_{\text{éxito}} \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

Si no hay trampa $X_i \sim \text{Bernoulli}\left(p = \frac{10}{40}\right) = B\left(p = \frac{1}{4}\right)$

si hay trampa $p > \frac{1}{4}$

$\hat{p}_n = \overline{X}_n = \frac{40}{108}$ proporción muestral de los nº ≤ 9.

$H_0: p = \frac{1}{4}$ (no hay trampa) $H_1: \overline{p > \frac{1}{4}}$ (hay trampa)

H_0; en gral es la hipótesis conservadora (no cambia).

H_1, " que implica un cambio.

juicio

H_0: ♀ es inocente

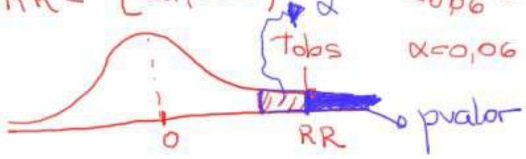
H_1: ♀ es culpable

	aceptar H_0	rechazar H_0
H_0: V	✓	error tipo I
H_0 F	error de tipo II	✓

$\alpha = P(\text{error de tipo I})$ queremos controlar.

Estadístico $T = \sqrt{n}\,\dfrac{(\overline{X}_n - 1/4)}{\sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}} \overset{(a)}{\approx} N(0,1)$ bajo H_0 $p = \frac{1}{4} = p_0$

$RR = [z_\alpha, +\infty)$ $z_{0,06} = 1{,}55$ $\alpha = 0{,}06$



$RR = [1{,}55; +\infty)$

$T_{obs} = \sqrt{108}\,\dfrac{\left(\frac{40}{108} - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}} = \boxed{2{,}88 \in RR}$

$\Rightarrow$ Hay evidencia suf para rechazar H_0 en favor de H_1.

2º forma de decidir en un test

$\text{pvalor} = P(T \geq \underline{T_{obs}}) = P(T \geq 2{,}88) = 1 - \Phi(2{,}88)$

$T \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$

$= 1 - \text{pnorm}(2{,}88)$

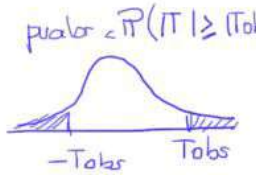
$= \underline{0{,}001988} < 0{,}06$

$\Rightarrow$ pvalor $< \alpha$

$\Rightarrow$ Rechazamos H_0

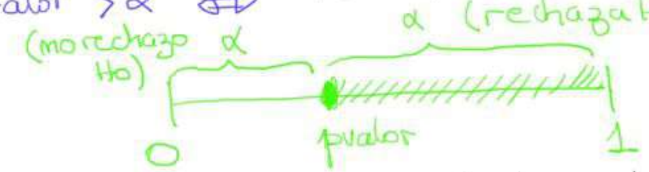
$H_1: p \neq p_0$

$\text{pvalor} = P(|T| \geq |T_{obs}|)$



pvalor $\leq \alpha \iff T_{obs} \in RR \iff$ rechazar H_0

pvalor $> \alpha \iff T_{obs} \notin RR \iff$ no rechazo H_0



Si $H_0: p \neq \frac{1}{4}$

$\text{pvalor} = P(|T| \geq |2{,}88|)$

$= 2\,P(T < -2{,}88)$

$= 2\,\Phi(-|T_{obs}|)$

b) $\pi(p_0) = P(\text{rechazar } H_0 \text{ cuando } p_0 \text{ es el verdadero})$

$\pi\left(p_0 = \frac{1}{4}\right) = \alpha$

$\pi(p_0 = 0{,}36) = P(\text{rechazar } H_0 \text{ cuando } p_0 = 0{,}36) = P_{p_0 = 0{,}36}(\overbrace{T \geq 1{,}55}^{RR}) =$

$0{,}36 > \frac{1}{4} = 0{,}25$

$= P_{p = 0{,}36}\left(\underbrace{\sqrt{108}\,\frac{(\overline{X}_n - 1/4)}{\sqrt{1/4\ 3/4}}}_{\overset{(a)}{\not\sim} N(0,1)} \geq 1{,}55\right) =$

sabemos que

$\sqrt{108}\,\dfrac{(\overline{X}_n - 0{,}36)}{\sqrt{0{,}36\ 0{,}64}} \overset{(a)}{\approx} N(0,1)$ TCL

$$P\left(\sqrt{108}\ \frac{\bar{X}_m - 1/4}{\sqrt{1/4\ 3/4}} \geq 1{,}55 \text{ cuando } p = 0{,}36 \text{ es el V} \right) =$$

$$= \underset{p=0{,}36}{P}\left(\bar{X}_m \geq \frac{1{,}55\sqrt{1/4\ 3/4}}{\sqrt{108}} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= 1 - P\Bigg(\underbrace{\sqrt{108}\ \frac{(\bar{X}_m - 0{,}36)}{\sqrt{0{,}36\ 0{,}64}}}_{\underset{(a)}{\sim} N(0,1)} < \underbrace{\frac{\left(\frac{1{,}55\sqrt{1/4\ 3/4}}{\sqrt{108}} + \frac{1}{4} - 0{,}36 \right)\sqrt{108}}{\sqrt{0{,}36\ 0{,}64}}}_{-0{,}98} \Bigg) \overset{(a)}{\cong} 1 - \Phi(-0{,}98) =$$

$$= \Phi(0{,}98) = \boxed{0{,}8365}$$

c) Hallar n para que $\pi(0{,}36) > 0{,}90$ $\qquad \alpha = 0{,}06$

$$\underset{p=0{,}36}{P}\left(\sqrt{n}\ \frac{\bar{X}_n - 1/4}{\sqrt{1/4\ 3/4}} \geq 1{,}55 \right) = P\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/4) \geq 1{,}55 \cdot \sqrt{1/4\ 3/4} \right) =$$

$$= P\left(\sqrt{n}\ (\bar{X}_n - 0{,}36 + 0{,}36 - 1/4) \geq 1{,}55\sqrt{1/4\ 3/4} \right) =$$

$$= \underset{p=0{,}36}{P}\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{n}\ (\bar{X}_n - 0{,}36)}{\sqrt{0{,}36\ 0{,}64}}}_{\overset{(a)}{\sim} N(0,1)} \geq \frac{1{,}55\sqrt{1/4\ 3/4} - \sqrt{n}\,(0{,}36 - 1/4)}{\sqrt{0{,}36\ 0{,}64}} \Bigg)$$

$$\cong 1 - \Phi\Bigg(\underbrace{\frac{1{,}55\sqrt{1/4\ 3/4}}{\sqrt{0{,}36\ 0{,}64}}}_{a} - \sqrt{n}\ \underbrace{\frac{(0{,}36 - 0{,}25)}{\sqrt{0{,}36\ 0{,}64}}}_{b} \Bigg) = 1 - \Phi(a - b\sqrt{n}) > 0{,}9$$

$$\underbrace{1 - 0{,}9}_{0{,}1} > \Phi(a - b\sqrt{n})$$

$$\Phi(a - b\sqrt{n}) < 0{,}1$$

qnorm(0,1) o tabla $\quad a - b\sqrt{n} < -c$

$$a + c < b\sqrt{n}$$

$$\left(\frac{a+c}{b}\right)^2 < n$$

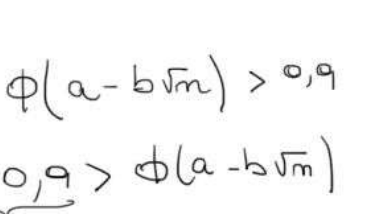
. Para medir la concentración de una sustancia en una solución se conoce un método cuyo error es una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2 = 1)$. Se supone un nuevo método cuyo error también es normal con la misma media que antes y varianza desconocida. Se adoptará este nuevo método si es más preciso que el anterior. Se tomaron 21 mediciones y se obtuvo $s^2 = 0{,}6$.

a) Se quiere que la probabilidad de cambiar de método si el nuevo en realidad es menos preciso sea a lo sumo 1 %. ¿Adoptaría o no el nuevo método?

b) Acotar el p valor usando la tabla y luego calculando usando R.

c) Caluclar la probabilidad de quedarse con el viejo método de medición cuando la varianza del nuevo es en realidad 0.8.

d) ¿Cómo sería el test si se supiera que $\mu = 0$? ¿Adoptaría o no el nuevo método? De la conclusión para un nivel de 1 % y suponga que $\bar{x}_n = 0{,}38$.



$H_0: \sigma^2 = 1 \qquad H_1: \sigma^2 < 1 \qquad n = 21 \qquad s^2 = 0{,}6$

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{20\,S^2}{1} = 20S^2 \sim \chi^2_{20} \qquad \chi^2_{20,\,0{,}01} = 8{,}2604$$

$$RR = (0,\ 8{,}2604) \qquad U_{obs} = 20 \cdot 0{,}6 = 12 > 8{,}2604$$

$U_{obs} \notin RR \Rightarrow$ No rechazamos H_0.

No hay evidencia suf para ~~probar~~ probar que el nuevo es mejor.

b) $\text{pvalor} = P(U < U_{obs}) = P(U < 12) = \text{pchisq}(12, 20)$

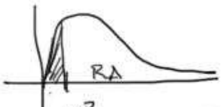
(mirar H_1) $\qquad U \sim \chi^2_{20} \qquad n = 20$

tabla

c) P(quedarse con el viejo método cuando la varianza del nuevo es 0,8)

$= P(\text{no rechazar Ho cuando } \sigma^2 = 0,8) = P_{\sigma^2=0,8}(U > \chi^2_{20,0.01}) =$

$U \sim \chi^2_{20}$ bajo Ho: $\sigma^2 = 1$



$\chi^2_{20,0.01} = 8,2604$

$= P_{\sigma^2=0,8}(20 s^2 > 8,2604) =$

$\frac{20 s^2}{0,8} \sim \chi^2_{20}$

$= P\left(\underbrace{\frac{20 s^2}{0,8}}_{\sim \chi^2_{20}} > \frac{8,2604}{0,8}\right) =$

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

$= P(\tilde{U} > 10,3255) = 1 - P(\tilde{U} < \quad)$

$\tilde{U} \sim \chi^2_{20}$

pchisq(10,3255 ; 20)

n=21 datos

a) b) c) $\chi^2_{n-1} = \chi^2_{20}$

d) $\chi^2_n = \chi^2_{21}$

d) $\mu = 0$ sabemos $\alpha = 0,01$ $\underline{\bar{x}_n = 0,38}$

Test para σ^2 con μ conocido

$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

Ho: $\sigma^2 = 1$ H1: $\sigma^2 < 1$

$RR = (0, \chi^2_{21,0.01}) = \underline{(0, 8,8972)}$

bajo Ho $U = \sum_{i=1}^{21} \frac{(x_i - 0)^2}{1} = \sum_{i=1}^{n=21} x_i^2$

Uobs =

$\underline{s^2 = 0,6}$

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \stackrel{*}{=} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - \bar{x}^2) \Rightarrow$

$(n-1) s^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{21} x_i^2}_{U} - n\bar{x}^2$

$\Rightarrow U = \sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 20 \cdot 0,6 + 21 (0,38)^2 = 15,0324 \notin RR$

No rechazamos Ho.

$*$ $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{n\bar{x}_n} + n\bar{x}^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}_n^2 + n\bar{x}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - \bar{x}_n^2)$