Variables aleatorias continuas

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computación)

12 de mayo de 2020

Ejercicio 1: Alcohol en gel

La proporción de alcohol en el alcohol en gel es una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f_X(x) = c(1-x)\mathrm{I}_{[0,1]}(x).$$

(a) Determinar el valor de c. Hallar F_X y $E(X)$.

Solución

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(1-x)\mathrm{I}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 c(1-x)$$

$$= c\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = c\left[\left(1-\frac{1^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right)\right] = c\frac{1}{2} = 1$$

Luego, $c = 2$

Sabemos además que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Entonces,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 2(1-t)dt = \int_{-\infty}^{x} 2(1-t)I_{[0,1]}(t)dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \int_0^x 2(1-t)dt = 2x - x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Por último,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot x dx$$

Entonces

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2(1-x)\mathrm{I}_{[0,1]}(x) \cdot x dx = \int_0^1 2(1-x)x dx$$

$$= \int_0^1 2x - 2x^2 dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 1: Alcohol en gel

La proporción de alcohol en el alcohol en gel es una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f_X(x) = c(1-x)I_{[0,1]}(x).$$

(b) Me compré un alcohol en gel al azar. Hallar la probabilidad de que la proporción de alcohol esté entre 0,25 y 0,5.

Solución

$P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(\frac{1}{4}) = \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^2\right) - \left(2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}^2\right) = \frac{1}{4}$

Ejercicio 1: Alcohol en Gel

La proporción de alcohol en el alcohol en gel es una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f_X(x) = c(1-x)I_{[0,1]}(x).$$

(c) Hallar la mediana, el primer cuantil y el percentil 0.9.

Solución

Mediana: El valor de x que verifica

$$F_X(x) = \frac{1}{2}$$

En nuestro caso, $x \in [0, 1]$ y $F_X(x) = 2x - x^2 = \frac{1}{2}$. Pero lo último ocurre si y sólo si $2x - x^2 - \frac{1}{2} = 0$. Las raíces de la fórmula cuadrática son $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, pero dado que $x \in [0, 1]$, debe ser $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Primer cuartil: El valor de x que verifica

$$F_X(x) = \frac{1}{4}$$

De nuevo, $x \in [0, 1]$ y $F_X(x) = 2x - x^2 = \frac{1}{4}$. Lo último ocurre si y sólo si $2x - x^2 - \frac{1}{4} = 0$. La única raíz de la fórmula cuadrática $x \in [0, 1]$, es $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Percentil p: El valor de x que verifica

$$F_X(x) = p$$

Entonces, 0.9-ésimo percentil es el valor de $x \in [0, 1]$ que satisface $F_X(x) = 2x - x^2 = 0.9$. Entonces $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{10}}$

Ejercicio 1: Alcohol en gel

La proporción de alcohol en el alcohol en gel compuesto es una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f_X(x) = c(1-x)I_{[0,1]}(x).$$

(d) Supón que el precio de venta (esto leáse cantando) del frasquito de alcohol en gel depende del contenido de alcohol:

- si $X < 0{,}30$ el precio es 60 pesos,
- $0.30 \leq X \leq 0.50$ el precio es 80
- y si $X > 0.50$ el precio es 120 pesos.

Hallar la función de distribución del precio de venta de un frasco de alcohol en gel. ¿Es una variable aleatoria discreta o continua? Hallar la esperanza del precio de venta.

Solución

$Y =$ 'precio de venta de un frasco del alcohol en gel' Y es una vaiable aleatoria discreta.

$rg(Y) = \{60; 80; 120\}$

$p_Y(60) = P(X < 0.30) = F_X(0.3) = 2 \cdot 0.3 - 0.3^2 = 0.51$

$p_Y(80) = P(0.30 \leq X \leq 0.50) = F_X(0.5) - F_X(0.3) =$
$(2 \cdot 0.5 - 0.5^2) - (2 \cdot 0.3 - 0.3^2) = 0.75 - 0.51 = 0.24$

$p_Y(120) = P(X > 0.50) = 1 - F_X(0.5) = 1 - 0.75 = 0.25$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} x < 60 \\ 0.51 & \text{si } 60 \leq x < 80 \\ 0.75 & \text{si } 80 \leq x < 120 \\ 1 & \text{si } x \geq 120 \end{cases}$$

$E(Y) = 60 \cdot 0.51 + 80 \cdot 0.24 + 120 \cdot 0.25 = 79.8$

Ejercicio 2: El bolsón orgánico

El nivel X de pesticida (en mg) de una manzana tiene la siguiente función de distribución.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{c} & \text{si } 0 \leq x \leq 0.2 \\ 1 & \text{si } x \geq 0.2 \end{cases}$$

Se considera tóxico un nivel de 0.14 mg o más.

(a) Hallar el valor de c, la función de densidad de X y su esperanza.

Solución

Sabemos que F_X es continua. Luego, $F_X(0.2) = 1$, de donde $\dfrac{0.2^2}{c} = 1$.
Despejando, se obtiene $c = 0.04$

Por otra parte,

$$f_X(x) = F'_X(x).$$

Se obtiene

$$f_X(x) = 50x \cdot I_{[0,0.2]}(x)$$

Por último,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot 50x \cdot I_{[0,0.2]}(x) dx = \int_0^{0.2} 50x^2 dx = 50 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0.2} = \frac{2}{15}$$

Ejercicio 2: El bolsón orgánico

(b)¿Cuál es la probabilidad de que Blancanieves se intoxique comiendo una manzana?

Solución

Blancanieves se intoxica si $X \geq 0.14$

$$P(X \geq 0.14) = 1 - F_X(0.14) = 1 - \frac{0.14^2}{0.04} = 0.51$$

Ejercicio 2: El bolsón orgánico

(c) Hallar la probabilidad de que el nivel de pesticida sea exactamente de 0.14 mg.

Solución

$P(X = 0.14) = 0$

Ejercicio 2: El bolsón orgánico

(d) Blancanieves prueba manzanas hasta obtener 5 que no sean tóxicas ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra en la séptima manzana?

Solución
La probabilidad de no intoxicarse al comer cada manzana es $P(X < 0.14) = 0.49$.

Sea
$Y =$ 'cant. de manzanas que come Blancanieves hasta hallar 5 no tóxicas'

$$Y \sim BN(0.49, 5)$$

$P(Y = 7) = \binom{6}{4} 0.49^5 0.51^2 \simeq 0.11$

Ejercicio 2: El bolsón orgánico

(e) La cantidad de tiempo T (en min) que debo lavar una manzana en función la cantidad de pesticida que tiene está dada por $T = \frac{3}{10}X + 1$. Hallar $E(T)$. Y si $T = \frac{\sqrt{X}+1}{10}$?

Solución

Si $T = \frac{3}{10}X + 1$, $E(T) = \frac{3}{10}E(X) + 1 = \frac{3}{10}\frac{2}{15} + 1 = \frac{26}{26}$

Si $T = \frac{\sqrt{X}+1}{10}$,

$$E(T) = \frac{E(\sqrt{X})}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x} f_X(x)dx + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{10}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x} \cdot 50x \cdot I_{[0,0.2]}(x)dx + \frac{1}{10}$$

$$= 5\int_{0}^{0.2} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{10} = 5\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_{0}^{0.2} + \frac{1}{10} \simeq 0.13578$$