RESOLUCIÓN DEL SEGUNDO PARCIAL 4/7/19

Ejercicio 1. Andrey colecciona figuritas de un álbum compuesto por N figuritas distintas. Consigue sus figuritas comprando una por día. Cada vez que adquiere una, ésta tiene igual probabilidad de ser cualquiera de las N que componen el álbum. Sea X el número de figuritas distintas que tiene después de comprar k figuritas. Hallar $\mathbb{E}(X)$ y $\operatorname{Var}(X)$.

Solución. Tenemos

$$X = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\text{Markov tiene la figurita } i\}}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[1_{\{\text{Markov tiene la figurita } i\}}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\text{Markov tiene la figurita } i).\end{aligned}$$

Considerando el complemento podemos calcular la probabilidad de que tenga cierta figurita

$$\mathbb{P}(\text{Markov tiene la figurita } i) = 1 - \mathbb{P}(\text{Markov no tiene la figurita } i) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

aquí hemos usado que la probablidad de que no la tenga, es que las k que tiene sean de las otras $n-1$. Entonces

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$

Para la varianza empleamos la misma idea.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{\text{Markov tiene la figurita } i\}}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[1^2_{\{\text{Markov tiene la figurita } i\}}] + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{E}[1_{\{\text{Markov tiene la figurita } i\}} \times 1_{\{\text{Markov tiene la figurita } j\}}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\text{Markov tiene la figurita } i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(\text{Markov tiene la figurita } i \text{ y } j) \\ &= n\mathbb{P}(\text{Markov tiene la figurita } 1) + n(n-1)\mathbb{P}(\text{Markov tiene la figurita } 1 \text{ y } 2)\end{aligned}$$

Utilizando inclusion exclusion,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Markov tiene la figurita } i \text{ y } j) &= 1 - \mathbb{P}(\text{Markov no tiene la figurita } i) \\ &\quad - \mathbb{P}(\text{Markov no tiene la figurita } j) \\ &\quad + \mathbb{P}(\text{Markov no tiene la figurita } i \text{ ni la } j) \\ &= 1 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^k + \left(\frac{n-2}{n}\right)^k\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[X^2] = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right) + n(n-1)\left(1 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^k + \left(\frac{n-2}{n}\right)^k\right)$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right) + n(n-1)\left(1-2\left(\frac{n-1}{n}\right)^k + \left(\frac{n-2}{n}\right)^k\right) - n^2\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2. Sea $U \sim \mathcal{U}(0,6)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos las variables aleatorias X_n tales que $X_n|_{U=u} \sim N\left(\frac{u^2}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $\mathbb{E}(X_n)$ y $\mathrm{Var}(X_n)$.

Sugerencia: use que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\big[\mathbb{E}(X|Y)\big] + \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}(X|Y)\big]$ y no haga demasiadas cuentas.

(b) Probar que $X_n \xrightarrow{p} 0$.

(c) Hallar $n \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\mathbb{P}\left(\frac{12-\sqrt{n}}{n} < X_n < \frac{12+\sqrt{n}}{n}\right) \geq 0.99$$

Solución. (a) Como $X_n|_{U=u} \sim N\left(\frac{u^2}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, tenemos $E(X_n|U) = \frac{U^2}{n}$. Entonces

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[E(X_n|U)] = \mathbb{E}\left[\frac{U^2}{n}\right] = \frac{1}{n}\int_0^6 \frac{1}{6}u^2\,du = \frac{1}{n}\frac{1}{6}\left.\frac{u^3}{3}\right|_0^6 = \frac{6^3}{6n3} = \frac{12}{n}.$$

Para calcular la varianza observemos que $\mathrm{Var}(X_n|U) = \mathbb{E}\Big(\big(X_n - \mathbb{E}(X_n|U)\big)^2\Big|U\Big) = \frac{1}{n^2}$. Y por lo tanto

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}[\mathbb{E}(X|Y)] + \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}(X|Y)\big] = \mathrm{Var}\left(\frac{U^2}{n}\right) + \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\right]$$

Y tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\frac{U^2}{n}\right) &= \int_0^6 \frac{1}{6}\left(\frac{u^2}{n} - \frac{12}{n}\right)^2 du = \frac{1}{6n^2}\int_0^6 \left(u^2-12\right)^2 du \\
&= \frac{1}{6n^2}\int_0^6 u^4 + 144 - 24u^2\,du = \frac{1}{6n^2}\left.\frac{u^5}{5} + 144u - 8u^3\right|_0^6 \\
&= \frac{1}{6n^2}\left(\frac{6^5}{5} + 144.6 - 8.6^3\right) = \frac{576}{5n^2}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\mathrm{Var}(X_n) = \frac{576}{5n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{581}{5n^2}$$

(b) Tenemos $\mathbb{E}(X_n) \to 0$ y $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$, y queremos ver que $X_n \xrightarrow{p} 0$. Esto se deduce de que

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2}{\varepsilon^2}$$

donde hemos usado la desigualdad de Markov.

(c) Queremos

$$\mathbb{P}\left(\frac{12-\sqrt{n}}{n} < X_n < \frac{12+\sqrt{n}}{n}\right) = \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{12}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{12}{n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.99.$$

Debemos verificar

$$\mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{12}{n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq 0.01.$$

Por Chebyshev,

$$\mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{12}{n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = n\mathrm{Var}(X_n) = n\frac{581}{5n^2} = \frac{581}{5n} \leq \frac{1}{100}.$$

Entonces debemos verificar que $\frac{581}{5n} \leq \frac{1}{100}$ lo cual se cumple para $n \geq 11620$.

Ejercicio 3. Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $U_n \sim \mathcal{U}[0,1]$. Definimos $X_n = n^{-U_n}$.

(a) Probar que $X_n \xrightarrow{p} 0$.

(b) Probar que $\mathbb{P}(\liminf_n X_n = 0) = 1$.

(c) Probar que $\mathbb{P}(\limsup_n X_n = 1) = 1$.

(d) Concluir que X_n no converge casi seguro.

Solución. (a) Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(n^{-U_n} \geq \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(-U_n\ln(n) \geq \ln(\varepsilon)) \\
&= \mathbb{P}(-\ln(\varepsilon) \geq U_n\ln(n)) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(n)} \geq U_n\right) \\
&= -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(n)} \to 0
\end{aligned}$$

donde la ultima igualdad vale para n suficientemente grande. Hemos probado que converge en probabilidad a 0.

(b) Como X_n converge en probabilidad a 0 tiene una subsuseción que converge casi seguro a 0. Además $X_n \geq 0$ por lo que $\liminf_n X_n = 0$ con probabilidad 1.

(c) Como $X_n \leq 1$ para ver que $\mathbb{P}(\limsup_n X_n = 1) = 1$ resta verificar que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $X_n \geq 1-\varepsilon$. Esto es equilavente a que $X_n \geq 1-\varepsilon$ para infinitos n. Como los U_n son independientes entre si, resulta que los X_n son independientes entre si y por lo tanto los eventos $\{X_n \geq 1-\varepsilon\}$ lo son. Luego si verificamos que $\sum_n \mathbb{P}(X_n \geq 1-\varepsilon) = +\infty$ por Borel-Cantelli podemos concluir que ocurren infinitos de estos eventos. Tenemos

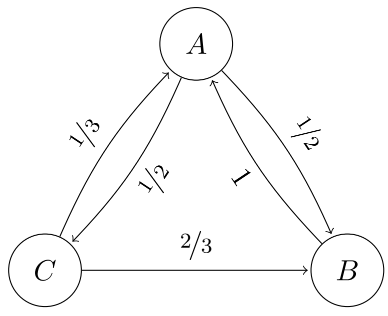
$$\mathbb{P}(X_n \geq 1-\varepsilon) = \mathbb{P}(n^{-U_n} \geq 1-\varepsilon) = \mathbb{P}(-U_n\ln(n) \geq \ln(1-\varepsilon)) = \mathbb{P}\left(\frac{-\ln(1-\varepsilon)}{\ln(n)} \geq U_n\right).$$

Nuevamente esto es igual a $\frac{-\ln(1-\varepsilon)}{\ln(n)}$ para n grande y su suma es divergente ya que es más grande que la serie armonica. Finalmente concluimos que ocurren infinitos de los eventos y por lo tanto $\limsup_n X_n = 1$ con probabilidad 1.

(d) Como los límites superior e inferior no coinciden la sucesión no converge casi seguro.

Ejercicio 4.

(a) Para la siguiente cadena explicitar la matriz asociada Q y hallar la distribución estacionaria π.



(b) Definimos $N_B = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = B\}$. Hallar $\mathbb{E}[N_B|X_0 = B]$.

Sugerencia: Calcule $\mathbb{P}(N_B = k|X_0 = B)$, o considere $\mathbb{E}[N_B|X_0 = A]$ y $\mathbb{E}[N_B|X_0 = C]$.

Observación: notar que $\mathbb{E}[N_B|X_0 = B] = \frac{1}{\pi_B}$. Esto vale en general, la idea no es que usen este resultado si no que lo verifiquen en este caso particular.

Solución. (a) Considerando los estados en orden A, B y C, la matriz asociada esta dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

La distribución estacionaria está dada por la solución de $\pi Q = \pi$. Esto es $\pi = \left(\frac{3}{7}, \frac{5}{14}, \frac{3}{14}\right)$.

(b) Partiendo de B se puede volver a B en dos pasos pasando por A. En general para volver al cabo de $2t+2$ pasos, debemos ir a A, movernos de A a C de ida y vuelta t veces, y finalmente desde A volver a B. Mirando la probabilidad de que esto ocurra obtenemos

$$\mathbb{P}(N_B = 2t+2|X_0 = B) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^t \times \left(\frac{1}{3}\right)^t \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \times 6^t}$$

para $t \in \mathbb{N}_0$.

Para volver en 3 pasos debemos ir de B a A, de allí a C y finalmente volver. De manera análoga a lo anterior para volver en una cantidad impar de pasos, $2t+3$, debemos hacer el camino recien descripto con t idas y vueltas entre A y C. Tenemos

$$\mathbb{P}(N_B = 2t+3|X_0 = B) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^t \times \left(\frac{1}{3}\right)^t \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3 \times 6^t}$$

para $t \in \mathbb{N}_0$.

Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_B|X_0 = B] &= \sum_{k \geq 1} k\mathbb{P}(N_B = k|X_0 = B) \\
&= \sum_{t \geq 0} (2t+2)\mathbb{P}(N_B = 2t+2|X_0 = B) + \sum_{t \geq 0} (2t+3)\mathbb{P}(N_B = 2t+3|X_0 = B) \\
&= \sum_{t \geq 0} \frac{2t+2}{2 \times 6^t} + \sum_{t \geq 0} \frac{2t+3}{3 \times 6^t} \\
&= \sum_{t \geq 0} \frac{t}{6^t} + \sum_{t \geq 0} \frac{1}{6^t} + \frac{2}{3} \sum_{t \geq 0} \frac{t}{6^t} + \sum_{t \geq 0} \frac{1}{6^t} \\
&= \frac{5}{3} \sum_{t \geq 0} \frac{t}{6^t} + 2 \sum_{t \geq 0} \frac{1}{6^t} \\
&= \frac{5}{3} \frac{6}{25} + 2\frac{6}{5} = \frac{14}{5}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$$

(a) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud $\overline{\theta}$ de θ basado en tal muestra.

(b) Probar que el EMV hallado es fuertemente consistente, es decir $\overline{\theta} \xrightarrow{cs} \theta$

Solución. (a) Tenemos

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,+\infty)}(x_i).$$

Esta función es no nula para $\theta \in (-\infty, \min_{i=1}^n x_i]$. Además allí es positiva, por lo que buscamos su máximo allí. Para hallar su máximo, tomamos logaritmo y derivamos. Tenemos

$$\ln \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} -(x_i - \theta) = n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Luego

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = n.$$

Por lo tanto la función es creciente y su máximo se alcanza en el extremo derecho del intervalo. Tenemos

$$\hat{\theta} = \min_{i=1}^{n} X_i$$

(b) Dado $\varepsilon > 0$, queremos ver que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq m} \left\{\left|\min_{i=1}^{n} X_i - \theta\right| > \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow{m} 0.$$

Pero $\min_{i=1}^n X_i \geq \theta$ y $\min_{i=1}^n X_i$ es decreciente en n, es decir

$$\min_{i=1}^{n} X_i \geq \min_{i=1}^{n+1} X_i.$$

Por lo que

$$\bigcup_{n \geq m} \left\{\left|\min_{i=1}^{n} X_i - \theta\right| > \varepsilon\right\} = \left\{\min_{i=1}^{m} X_i - \theta > \varepsilon\right\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{X_i - \theta > \varepsilon\}$$

Como los X_i son independientes entre si y

$$\mathbb{P}(X_i - \theta > \varepsilon) = \int_{\theta+\varepsilon}^{\infty} e^{-(x-\theta)}\,dx = -e^{-(x-\theta)}\Big|_{\theta+\varepsilon}^{\infty} = e^{-\varepsilon},$$

obtenemos

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq m} \left\{\left|\min_{i=1}^{n} X_i - \theta\right| > \varepsilon\right\}\right) = e^{-m\varepsilon} \xrightarrow{m} 0.$$

Por lo que hemos probado la convergencia casi segura.