Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad

$$f_{X_1}(x;\theta) = (\theta-1)\, 2^{\theta-1} x^{-\theta} I_{(2,+\infty)}(x), \qquad \theta > 1. \text{ fijo}$$

a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

b) Decir si el estimador obtenido es consistente. Justificar.
(SUGERENCIA: Hallar la distribución de la v.a. $Y = \ln(X) - \ln(2) = \ln\left(\frac{X}{2}\right)$.) .

c) Decir si el estimador obtenido es insesgado o asintóticamente insesgado. Justificar.

a) $L(\theta) = f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n,\theta) \underset{X_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} (\theta-1)\, 2^{\theta-1} x_i^{-\theta} I_{(2,+\infty)}(x_i)$

$= (\theta-1)^n \, 2^{n(\theta-1)} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-\theta}$ $\qquad x_i > 2 \quad \forall i=1,\ldots,n$

función de verosimilitud

$\hat{\theta}_n(X_1,\ldots,X_n) = \arg\max_\theta L(\theta)$

Si a maximiza $L(\theta)$ $\Leftrightarrow$ a maximiza $\ln L(\theta)$

$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = n \ln(\theta-1) + n(\theta-1)\ln 2 - \theta \underbrace{\ln \prod_{i=1}^{n} x_i}_{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$

$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta-1} + n \ln 2 - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$

$\frac{n}{\theta-1} = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln 2$

$\frac{n}{\theta-1} = \sum_{i=1}^{n} [\ln(x_i) - \ln 2] = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{2}\right)$

$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{2}\right)} = \theta - 1 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_n = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{2}\right)}{n}} + 1}$

$\ell''(\theta) = \frac{-n}{(\theta-1)^2} < 0 \quad \forall\theta \Rightarrow \ell''(\hat{\theta}_n) < 0 \Rightarrow \hat{\theta}_n$ es un máximo

b) $\hat{\theta}_n(x_1,\ldots,x_n)$ Si $\hat{\theta}_n(X_1,\ldots,X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$ entonces $\hat{\theta}_n$ se dice consistente

Recordar que si $Y_1,\ldots,Y_n$ iid tq $E(Y_i)=\mu$, $V(Y_i)=\sigma^2<\infty$ entonces (sale de cheby) $\overline{Y}_n \xrightarrow{P} E(Y_1)$

Sean $Y_i = \ln\left(\frac{X_i}{2}\right)$ hallar $E(Y_1)$

$F_{Y_1}(t) = P(Y_1 \le t) = P\left(\ln\left(\frac{X_1}{2}\right) \le t\right) = P(X_1 \le 2e^t) = F_{X_1}(2e^t)$

derivamos

$f_{Y_1}(t) = f_{X_1}(2e^t) \cdot 2e^t = (\theta-1)\, 2^{\theta-1} (2e^t)^{-\theta} I_{(2,+\infty)}(2e^t) \cdot 2e^t =$

$= (\overset{\lambda}{\theta-1})\, e^{-(\theta-1)t} I_{(0,+\infty)}(t)$ $\qquad 2 < 2e^t$, $1 < e^t$, $0 < t$

$\Rightarrow Y_1 \sim \mathcal{E}(\theta-1) \Rightarrow E(Y_1) = \frac{1}{\theta-1}$ $\qquad V(Y_1) = \frac{1}{(\theta-1)^2} < \infty$

$\Rightarrow \overline{Y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} E(Y_1) = \frac{1}{\theta-1}$

LGN

$Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si $f_Y(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $t>0$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{Y}_n} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{\frac{1}{\theta-1}} + 1 = \theta - 1 + 1 = \boxed{\theta}$

Luego $\hat{\theta}_n$ es consistente.

c) Otra propiedad deseable es que $\overline{E(\hat{\theta}_n) = \theta}$ o sea $\hat{\theta}_n$ es insesgado

y si $\underset{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{\underline{E(\hat{\theta}_n)}}$ suces de nº reales $\xrightarrow{n\to\infty} \theta$ decimos que $\hat{\theta}_n$ es asintóticamente consistente.

c) $E(\hat{\theta}_n) = E\left(\frac{1}{\bar{Y}_n}+1\right) = E\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}\right)+1 = E\left(\frac{n}{Z}\right)+1$

$Y_i \sim \mathcal{E}(\theta-1) \underset{Y_i \text{ ind}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma(n,\theta-1)$, $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ $\qquad \Gamma(n) = (n-1)!$

No vale $E\left(\frac{1}{Z}\right) \neq \frac{1}{E(Z)}$

$$E\Big(\underbrace{\tfrac{n}{Z}}_{g(Z)}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{n}{z} f_Z(z)\,dz = \int_0^{+\infty} \frac{n}{z}\frac{(\theta-1)^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-(\theta-1)z}\,dz$$

$$= \int_0^{+\infty} n(\theta-1)\frac{(\theta-1)^{n-1} z^{n-2} e^{-(\theta-1)z}}{(n-1)!}\,dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{n}{n-1}(\theta-1)\underbrace{\frac{(\theta-1)^{n-1} z^{n-2} e^{-(\theta-1)z}}{(n-2)!}}_{\text{f.d de gamma}}\,dz = \frac{n}{n-1}(\theta-1)$$

$$\Rightarrow E(\hat{\theta}_n) = \underbrace{\frac{n}{n-1}(\theta-1)}_{=a_n\in\mathbb{R}}+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta-1+1=\theta \Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ es asint. insesgado.}$$

$E(\hat{\theta}_n) \neq \theta$

Consideremos una m.a. de $X_1, \dots, X_n$ de v.a.i.i.d. con función de densidad dada por

$$f_X(x,\theta) = \frac{3\theta^3}{x^4} I_{[\theta,+\infty)}(x)$$

Con $\theta > 0$.

a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.
b) Hallar el estimador de momentos de θ.
c) Compara los dos estimadores con el ECM. ¿Cuál de ellos es mejor estimador en términos de este error?
d) Analiza la consistencia de estos estimadores.

a) $$L(\theta) \underset{\text{indep}}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \underbrace{\frac{3^n\theta^{3n}}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^4}}_{K(x_1,\dots,x_n)\,\theta^{3n}} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,+\infty)}(x_i)}_{x_i \geq \theta\ \forall i \Leftrightarrow \min\{X_i\} \geq \theta}$$

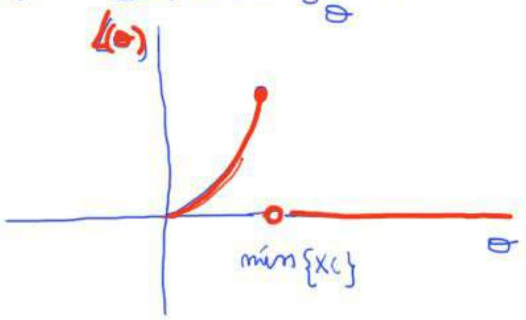
$= 1 \Leftrightarrow \min\{x_i\} \geq \theta$

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{3^n\theta^{3n}}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^4} & \min\{X_i\} \geq \theta \\ 0 & cc \end{cases}$$

¿Como derivamos esto?

$$L(\theta) = \begin{cases} K(x_1,\dots,x_n)\,\theta^{3n} & \min\{X_i\} \geq \theta \\ 0 & cc \end{cases}$$

EMV $\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta} L(\theta)$ $\qquad x^n$



$L(\theta)$ es est crec si $\theta \leq \min\{X_i\}$
$L(\theta) = 0$ si si $\theta > \min\{X_i\}$
$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \min\{X_i\}$ es EMV

b) Hallar el estimador de momentos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = E_{\hat{\theta}_n}(X_1)$$ la solución de esta ecuación es EM $\left(\overline{X_n} \longrightarrow E_\theta(X_1) \right)$

$$E_\theta(X_1) = \int_\theta^{+\infty} x \, \frac{3\theta^3}{x^4} dx = \int_\theta^{+\infty} \frac{3\theta^3}{x^3} dx \; \overline{X_n} = E_\theta(X_1) \ldots\ldots = \frac{3\theta}{2} \quad (\text{ej})$$

$$\overline{X_n} = \frac{3\theta}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_n = \frac{2}{3}\overline{X_n}} \quad \text{EM}$$

d) $E(X_1) = \boxed{\frac{3\theta}{2}}$ $\quad V(X_1) = E(X_1^2) - \left(\frac{3}{2}\theta\right)^2 = \boxed{\frac{3}{4}\theta^2} < \infty$

$$E(X_1^2) = \int_0^{+\infty} \frac{3\theta^3}{x^2} dx = \ldots = 3\theta^2$$

$$\underset{\text{LGN}}{\Rightarrow} \overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{3\theta}{2} \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{2}{3}\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{2}{3}\frac{3}{2}\theta = \theta \; \checkmark \quad \hat{\theta}_n \text{ es consist.}$$

Veamos si el EMV es consistente

$$\hat{\theta}_n = \min\{X_1, .., X_n\}$$

Teórica Si $\begin{cases} E(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta \\ V(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$ o sea $\hat{\theta}_n$ consistente.

sucesiones de nº reales

Debemos estudiar la distribución del $\min\{X_1, .., X_n\} = \hat{\theta}_n$

Sea $Y = \hat{\theta}_n$ $\quad F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\min\{X_1, .., X_n\} \leq t) =$

$= 1 - P(\min\{X_1, .., X_n\} > t) = 1 - P(X_1 > t, .., X_n > t) =$

$\underset{X_i \text{ indep}}{=} 1 - P(X_1 > t) \ldots P(X_n > t) = 1 - \left[1 - \underbrace{F_{X_1}(t)}\right]^n$

$f_{X_1}(t)$ dato $\Rightarrow F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{X_1}(t)\,dt = \int_\theta^t \frac{3\theta^3}{x^4} dx \overset{(\text{ej})}{=} \underbrace{1 - \frac{\theta^3}{t^3}}$ $\quad t > \theta$

$$\Rightarrow F_Y(t) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta^3}{t^3}\right)^n & t \geq \theta \\ 0 & t < \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(t) = \ldots = \frac{3n\theta^{3n}}{t^{3n+1}} I_{[\theta, +\infty)}(t) \Rightarrow E(Y) = \int_\theta^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy \underset{(\text{ej})}{=} \frac{3n\theta}{3n-1}$$

$Y = \hat{\theta}_n = \min\{X_i\}$

$$\text{y } E(Y^2) = \int_\theta^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy \underset{(\text{ej})}{=} \frac{3n\theta^2}{(3n-2)} \Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$\Rightarrow V(Y) = \frac{3n\theta^2}{(3n-2)(3n-1)^2} =: \circledast_n$$

$\left(V(Y) \approx \frac{1}{n^2}\right)$

$Y = \hat{\theta}_n$ $\quad E(\hat{\theta}_n) = \frac{3n\theta}{3n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ y $V(\hat{\theta}_n) = \circledast_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\underset{(\text{Teórica})}{\Rightarrow} \hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \quad \therefore \hat{\theta}_n$ es un consistente.

c)

c) $ECM(\hat{\theta}_n) = E\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right]$ nº real (no dep $X_1, .., X_n$)

Interesa $\hat{\theta}_n - \theta$ pero es una v.a. (dep de $X_1, .., X_n$)

Teórica: $ECM(\hat{\theta}_n) = V(\hat{\theta}_n) + (\underbrace{E(\hat{\theta}_n) - \theta}_{\text{sesgo}})^2$

(observar que $ECM(\hat{\theta}_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} V(\hat{\theta}_n) \to 0 \\ E(\hat{\theta}_n) \longrightarrow \theta \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$)

Si $\hat{\theta}_n \overset{EM}{=} \frac{2}{3}\bar{X}_n \qquad \hat{\theta}_n \overset{EMV}{=} \min\{X_i\}$

$$ECM(\hat{\theta}_n^{MV}) = \frac{3n\theta^2}{(3n-2)(3n-1)} + \left[\frac{3n\theta}{3n-1} - \theta\right]^2 = \text{ejercicio}$$

$$ECM(\hat{\theta}^M) = V\left(\frac{2}{3}\bar{X}_n\right) + \left[E\left(\frac{2}{3}\bar{X}_n\right) - \theta\right]^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{V(X_1)}{n} + \underbrace{\left[\frac{2}{3}\underbrace{E(X_1)}_{\frac{3}{2}\theta} - \theta\right]^2}_{=0}$$

$$= \frac{4}{9}\,\frac{3}{4}\frac{\theta^2}{n} + 0$$

$$ECM(\hat{\theta}^M) = \frac{\theta^2}{3n}$$

Ejercicio $ECM(\hat{\theta}^M) \overset{?}{<} ECM(\hat{\theta}^{MV})$ o al revés ??