Espacios equiprobables

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computación)

21 de abril de 2020

Receta: Espacio de probabilidad

Ingredientes:

- Experimento aleatorio

Receta: Espacio de probabilidad

Ingredientes:

- Experimento aleatorio
- Espacio muestral Ω asociado a un experimento

Receta: Espacio de probabilidad

Ingredientes:

- Experimento aleatorio
- Espacio muestral Ω asociado a un experimento
- Evento o suceso E

Receta: Espacio de probabilidad

Ingredientes:

- Experimento aleatorio
- Espacio muestral Ω asociado a un experimento
- Evento o suceso E
- Medida de probabilidad $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$

Receta: Espacio de probabilidad

Ingredientes:

- Experimento aleatorio
- Espacio muestral Ω asociado a un experimento
- Evento o suceso E
- Medida de probabilidad $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

  Algunas propiedades de P:
  - $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
  - $P(A^c) = 1 - P(A)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Espacios equiprobables

Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, entonces $P(e_i) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\#\Omega}$.

Espacios equiprobables

Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, entonces $P(e_i) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\#\Omega}$.

En general, si $A \subset \Omega$, entonces $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$.

Espacios equiprobables

Ejemplo: Tenemos 10 pares de zapatos distintos en el armario. El experimento es sacar de a uno dos zapatos al azar. Queremos medir la probabilidad del evento son del mismo par (y lo puedo usar :)).

Espacios equiprobables

Ejemplo: Tenemos 10 pares de zapatos distintos en el armario. El experimento es sacar de a uno dos zapatos al azar. Queremos medir la probabilidad del evento son del mismo par (y lo puedo usar :)).

- $\Omega = \{(z_1, z_2) : z_1 \neq z_2 \in \{I_1, I_2, \cdots, I_{10}, D_1, D_2, \cdots, D_{10}\}\}$

Espacios equiprobables

Ejemplo: Tenemos 10 pares de zapatos distintos en el armario. El experimento es sacar de a uno dos zapatos al azar. Queremos medir la probabilidad del evento son del mismo par (y lo puedo usar :)).

- $\Omega = \{(z_1, z_2) : z_1 \neq z_2 \in \{I_1, I_2, \cdots, I_{10}, D_1, D_2, \cdots, D_{10}\}\}$
- $A = \{(z_1, z_2) \in \Omega : \exists 1 \leq i \leq 10$ tq $\{z_1, z_2\} = \{I_i, D_i\}\}$

Espacios equiprobables

Ejemplo: Tenemos 10 pares de zapatos distintos en el armario. El experimento es sacar de a uno dos zapatos al azar. Queremos medir la probabilidad del evento son del mismo par (y lo puedo usar :)).

- $\Omega = \{(z_1, z_2) : z_1 \neq z_2 \in \{I_1, I_2, \cdots, I_{10}, D_1, D_2, \cdots, D_{10}\}\}$
- $A = \{(z_1, z_2) \in \Omega : \exists 1 \leq i \leq 10$ tq $\{z_1, z_2\} = \{I_i, D_i\}\}$
- $P(\{(z_1, z_2)\}) = \frac{1}{20.19}$

Espacios equiprobables

Ejemplo: Tenemos 10 pares de zapatos distintos en el armario. El experimento es sacar de a uno dos zapatos al azar. Queremos medir la probabilidad del evento son del mismo par (y lo puedo usar :)).

- $\Omega = \{(z_1, z_2) : z_1 \neq z_2 \in \{I_1, I_2, \cdots, I_{10}, D_1, D_2, \cdots, D_{10}\}\}$
- $A = \{(z_1, z_2) \in \Omega : \exists 1 \leq i \leq 10 \text{ tq } \{z_1, z_2\} = \{I_i, D_i\}\}$
- $P(\{(z_1, z_2)\}) = \frac{1}{20.19}$
- $P(A) = \frac{20.1}{20.19}$

Ejercicio 1: Ingame

Participamos de Ingame, un juego de preguntas y respuestas multiple choice: hay 12 preguntas de 3 opciones cada una, y ganamos sólo si contestamos bien las 12. Perdemos si respondemos alguna pregunta mal. Participamos adivinando las respuestas al azar.

- Definir un espacio muestral apropiado para este experimento y calcular las probabilidades de ganar y perder.

Solución.

$$\Omega = \{(r_1, r_2, \cdots, r_{12}) : r_i \in \{B, M_1, M_2\}\}$$

$$A = \text{'Ganar'} = \{(B, B, \cdots, B)\}$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1}{3^{12}} \sim 0,000001882$$

$$C = \text{'perder'} = A^c$$

$$P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3^{12}} \sim 0,999998118$$

- Si en vez de registrar si ganamos o perdimos, registramos si ganamos y, en caso de perder, el turno en el que perdimos. ¿Cuál es la probabilidad de perder en un turno divisible por 4? ¿Cuál es la probabilidad de llegar al menos hasta el turno 8?

Solución.

$D =$ 'perder en turno múltiplo de 4' $=$
'perder en turno 4, 8 o 12' $= P_4 \cup P_8 \cup P_{12}$

$P_i =$ 'perder en turno i' $=$
$\{(r_1, r_2, \cdots, r_{12}) \in \Omega : r_i \neq B, r_j = B \ \forall j < i\}$

$$P(P_i) = \frac{2.3^{12-i}}{3^{12}}$$

$$P(D) = \frac{2.3^8}{3^{12}} + \frac{2.3^4}{3^{12}} + \frac{2}{3^{12}}$$

$E =$ 'llegar a la pregunta 8' $=$
'no perder en turnos menores que 8' $=$
$\{(r_1, r_2, \cdots, r_{12}) \in \Omega : r_1 = r_2 = \cdots = r_7 = B\}$

$$P(E) = \frac{3^5}{3^{12}}$$

Ejercicio 2: La maldición de la pasa de uva

En una caja de 24 bombones hay bombones que pueden tener pasas de uva, avellanas y/o frambuesa, pero no sabemos qué combinación (surprise!).

Se puede deducir de la lista de ingredientes que hay 15 bombones con avellanas, 12 con pasas de uva y 8 con frambuesa. Pero hay 5 que tienen pasas de uva y avellana, 4 con pasas de uva y frambuesa, y hay 6 que tienen relleno sin pasa de uva ni frambuesa. Hay solo 1 que tiene los 3 rellenos.

Si sacamos un bombón al azar, cuál es a la probabilidad de que:

- no tenga pasas de uva?

- no tenga relleno?

- tenga solo frambuesa?

- tenga exactamente dos gustos el relleno?

Solución.

$$P(\text{'sin pasas de uva'}) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{'sin relleno'}) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{'solo relleno de frambuesa'}) = \frac{0}{24} = 0$$

$$P(\text{'dos gustos de relleno'}) = \frac{11}{24}$$

Ejercicio 3: Un clásico

¿Cuál es la probabilidad de que al distribuir al azar 20 bolitas rojas indistinguibles y 11 bolitas verdes numeradas en 5 cajas distintas, haya a lo sumo una caja sin bolitas rojas?

Solución.

$\Omega =$ 'Posibles distribuciones de las bolitas'

$\#\Omega = \binom{20+4}{20}.5^{11}$

$A =$ 'A lo sumo una caja no tiene bolitas rojas'

$B =$ 'Exactamente una caja no tiene bolitas rojas'

$C =$ 'Ninguna caja no tiene bolitas rojas'

$A = B \sqcup C$

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{5\binom{16+3}{16}.5^{11}}{\binom{20+4}{20}.5^{11}} + \frac{\binom{15+4}{15}.5^{11}}{\binom{20+4}{20}.5^{11}}$$

Ejercicio 4: Tinder vintage

En el programa de televisión 'Yo me quiero casar, y usted?', conducido por Roberto Galán, se presentan 4 varones y 4 mujeres. Cada varón elige en secreto a una mujer (ignorando lo que eligen los/las demás) y viceversa. Si un varón y una mujer se eligen mutuamente, se forma una pareja.

Si las elecciones fueran completamente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se formen 4 parejas? ¿Y que no se forme ninguna? Si voy yo y participo, cuál es la probabilidad de que me case?

Solución.

$A =$ 'se forman 4 parejas'

$$P(A) = \frac{4^4}{4^8}$$

$B =$ 'no se forma ninguna pareja'

$$P(B) = \frac{4^4 3^4}{4^8}$$

$C =$ 'me caso'

$$P(C) = \frac{4.4^6}{4^8} = \frac{1}{4}$$

Challenge: I choo-choose you

Un grupo de 30 personas juega al amigo invisible: se colocan los nombres de cada integrante en papeles y se sortea a cada integrante un papel. ¿Cuál es la probabilidad de que nadie haya recibido el papel con su propio nombre?