

Ejercicios de Final de Probabilidades y Estadística Resueltos

Federico Yulita

Verano, 2020

Esta materia la cursé el primer cuatrimestre del 2019 con Matthieu Jonckheere como docente de las clases teóricas y Pablo Groisman como JTP. Estas son las soluciones a las preguntas de final que da Matthieu, las pueden encontrar en la [página de la materia](#). Si querés ver el resto de mis apuntes los podés encontrar en [mi blog](#).

Índice

1. Probabilidad. Definición y Enunciados	3
1.1. Ejercicio 1	3
1.2. Ejercicio 2	3
1.3. Ejercicio 3	4
1.4. Ejercicio 4	4
1.5. Ejercicio 5	4
2. Probabilidad Condicional e Independencia	5
2.1. Ejercicio 6	5
2.2. Ejercicio 7	5
2.3. Ejercicio 8	5
2.4. Ejercicio 9	6
2.5. Ejercicio 10	6
2.6. Ejercicio 11	7
2.7. Ejercicio 12	7
2.8. Ejercicio 13	7
2.9. Ejercicio 14	8
3. Variables Aleatorias	10
3.1. Ejercicio 15	10
3.2. Ejercicio 16	12
3.3. Ejercicio 17	12
3.4. Ejercicio 18	13
3.5. Ejercicio 19	13
3.6. Ejercicio 20	14
3.7. Ejercicio 21	15
3.8. Ejercicio 22	16
3.9. Ejercicio 23	17
3.10. Ejercicio 24	17
4. Convergencia en Distribución	19
4.1. Ejercicio 25	19
4.2. Ejercicio 26	20
4.3. Ejercicio 27	21
4.4. Ejercicio 28	21

5. Vectores Aleatorios	21
5.1. Ejercicio 29	21
5.2. Ejercicio 30	22
5.3. Ejercicio 31	23
5.4. Ejercicio 32	23
5.5. Ejercicio 33	24
5.6. Ejercicio 34	25
5.7. Ejercicio 35	26
5.8. Ejercicio 36	27
5.9. Ejercicio 37	27
5.10. Ejercicio 38	28
5.11. Ejercicio 39	28
5.12. Ejercicio 40	29
5.13. Ejercicio 41	30
5.14. Ejercicio 42	30
5.15. Ejercicio 43	31
6. Esperanza	32
6.1. Ejercicio 44	32
6.2. Ejercicio 45	32
6.3. Ejercicio 46	34
6.4. Ejercicio 47	34
6.5. Ejercicio 48	35
6.6. Ejercicio 49	35
7. Esperanza Condicional	35
8. Generación de Variables Aleatorias	35
9. Convergencia de Variables Aleatorias	35
10. Funciones Generadora de Momentos FGM	35
11. Ley de Grandes Números y Teorema Central del Límite	35
12. Estimadores	36
13. Intervalos de Confianza	36
14. Test de Hipótesis	36
15. Tests No Paramétricos	36

1. Probabilidad. Definición y Enunciados

1.1. Ejercicio 1

Ejercicio 1. Enuncie los axiomas de probabilidad. Demuestre a partir de los axiomas que $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ y que si $B \subseteq A$ entonces $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

Solución. Los axiomas de la probabilidad definen tres espacios: el **Espacio Muestral** \mathcal{S} , el **Espacio de Eventos** \mathcal{F} y la **Probabilidad** \mathbb{P} . En el espacio muestral existen todos los posibles resultados de un experimento de interés (tirar un dado, la nota de una materia, que Chernobyl explote, etc.). En el espacio de eventos existen los **Eventos**, que son subconjuntos del espacio de eventos (tirar un dado dos veces y sacar un 2 y un 3, sacarse un 6 en Proba, que Chernobyl explote 4 veces, etc.). Si \mathcal{S} es un espacio numerable entonces $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathcal{S})$. La probabilidad, según la interpretación frecuentista, define la probabilidad de la siguiente manera. Si consideramos un experimento que se repite N veces y ocurre cierto evento A n veces entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$$

Definición. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] / \mathcal{P}(\mathcal{S}) = 1$. Sea $\{A_n\} : A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \in \mathbb{N} \implies \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Demostración. Entonces, consideremos dos eventos A y A^c . Ya que A^c es el complemento de A entonces $A \cap A^c = \emptyset$. Por lo tanto, por la definición de probabilidad sabemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) &= \mathbb{P}(A \cup A^c) \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{S}) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Ahora consideremos dos eventos A y B , donde $B \subset A$. Sabemos de álgebra que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ y que $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ B \subseteq A &\rightarrow = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$

□

1.2. Ejercicio 2

Ejercicio 2. Demuestre usando los axiomas de probabilidad que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Demostración. Consideremos dos eventos A y B cuya intersección no es necesariamente vacío. Entonces, consideremos dos eventos A y $C = B \setminus A \cap B$. Ahora, $A \cap C = \emptyset$, $A \cup C = A \cup B$ y $A \cap B \subset B$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\end{aligned}$$

□

1.3. Ejercicio 3

Ejercicio 3. Demuestre usando los axiomas de probabilidad que $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Demostración. Este es muy simple, sabemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &\leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

Entonces, es fácil generalizar a la intersección de muchos conjuntos y ver que:

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

□

1.4. Ejercicio 4

Ejercicio 4. Demuestre usando los axiomas de probabilidad que si $A_{n-1} \subseteq A_n$ y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Demostración. Consideremos la sucesión $\{B_i\} \in \mathcal{S}$ tal que $B_i = A_i \setminus A_{i-1} \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $B_1 = A_1$. Entonces, $A_n = \cup_{i=1}^n B_i$ y $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$. Además:

$$\begin{aligned}A &= \cup_{i=1}^{\infty} A_i \\ &= \cup_{i=1}^{\infty} B_i\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n B_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

□

1.5. Ejercicio 5

Ejercicio 5. Demuestre usando los axiomas de probabilidad que si $A_n \subseteq A_{n-1}$ y $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Demostración. Consideremos la sucesión $\{B_i\} \in \mathcal{S}$ tal que $B_i = A_i^c \forall i \in \mathbb{N}$ y tomemos al evento $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces, $A^c = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n^c) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

□

2. Probabilidad Condicional e Independencia

2.1. Ejercicio 6

Ejercicio 6. En una muestra de 100 personas hay 13 personas enfermas y no vacunadas, 2 enfermas y vacunadas, 75 sanas y vacunadas y 10 sanas y no vacunadas. Elegimos una persona al azar y vemos que está enferma. ¿Cuál es la probabilidad de que no se haya vacunado?

Solución. Hagamos una tabla con la información:

	Vacunado	No Vacunado	Suma
Enfermo	2	13	15
Sano	75	10	85
Suma	77	23	100

Entonces, la probabilidad de que una persona enferma al azar esté vacunada es:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(V|E) &= \frac{\mathbb{P}(V \cap E)}{\mathbb{P}(E)} \\
 &= \frac{\frac{2}{100}}{\frac{15}{100}} \\
 &= \frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

2.2. Ejercicio 7

Ejercicio 7. Una familia tiene dos hijos. Sabemos que el primer hijo es varón. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo hijo sea también varón?

Solución. Supongamos que la probabilidad de que un bebé recién nacido sea varón (mejor dicho “de sexo masculino”) es 0.5. Asumamos también que el sexo de dos hermanos son eventos independientes. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(V|V) &= \frac{\mathbb{P}(V \cap V)}{\mathbb{P}(V)} \\
 &= \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.5} \\
 &= 0.5
 \end{aligned}$$

2.3. Ejercicio 8

Ejercicio 8. Sabemos que una familia con dos hijos tiene por lo menos un hijo varón. ¿Cuál es la probabilidad que los dos sean varones?

Solución. Supongamos las mismas cosas que las del ejercicio anterior. Consideremos V como la variable aleatoria que cuenta la cantidad de hijos varones de la familia. $V \in \{0, 1, 2\}$. El espacio de eventos es:

$$\mathcal{F} = \{vv, vm, mv, mm\}$$

donde v representa un varón, m una mujer y el orden en el que se escriben denota el orden en que nacieron. Entonces, la distribución de V es:

$$\mathbb{P}(V = v) = \begin{cases} 0.25 & v = 0 \\ 0.5 & v = 1 \\ 0.25 & v = 2 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V = 2 | V \geq 1) &= \frac{\mathbb{P}(V = 2 \cap V \geq 1)}{\mathbb{P}(V \geq 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(V = 2)}{\mathbb{P}(V = 1 \cup V = 2)} \\ &= \frac{0.25}{0.5 + 0.25} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.4. Ejercicio 9

Ejercicio 9. Visitamos una familia con dos hijos. Tocamos el timbre y un chico varón abre la puerta. ¿Cuál es la probabilidad que el otro chico sea varón?

Solución. Consideremos las mismas cosas que las del ejercicio anterior. Ahora, el espacio de eventos es:

$$\mathcal{F} = \{v^*v, vv^*, v^*m, vm^*, m^*v, mv^*, m^*m, mm^*\}$$

donde ahora el asterisco denota quién abrió la puerta. Como sabemos que la puerta la abrió un varón entonces nos restringimos a trabajar en el subespacio:

$$\{v^*v, vv^*, v^*m, mv^*\}$$

Notemos que en 2 de los 4 posibles eventos el segundo hijo es varón. Entonces:

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{2}$$

2.5. Ejercicio 10

Ejercicio 10. Demuestre la regla de multiplicación de las probabilidades condicionales:

$$\mathbb{P}(A_1 \dots A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_3 | A_1 A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$$

Demostración. Esta demostración es más fácil de hacer desde la “otra dirección”. Notemos:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i | \cap_{j=1}^{i-1} A_j) &= \prod_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(\cap_{j=1}^i A_j)}{\mathbb{P}(\cap_{j=1}^{i-1} A_j)} \\ &= \cancel{\mathbb{P}(A_1)} \cdot \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1)}} \dots \frac{\mathbb{P}(\cap_{j=1}^n A_j)}{\cancel{\mathbb{P}(\cap_{j=1}^{n-1} A_j)}} \\ &= \mathbb{P}(\cap_{j=1}^n A_j) \end{aligned}$$

□

2.6. Ejercicio 11

Ejercicio 11. Una urna tiene 4 bolas negras y 3 rojas. Sacamos tres bolas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad que la primera bola salga negra y la tercera salga roja?

Solución.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B_1 = N \cap B_3 = R) &= \mathbb{P}((B_1 = N \cap B_2 = N \cap B_3 = R) \cup (B_1 = N \cap B_2 = R \cap B_3 = R)) \\
 &= \mathbb{P}(B_1 = N \cap B_2 = N \cap B_3 = R) + \mathbb{P}(B_1 = N \cap B_2 = R \cap B_3 = R) \\
 &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \\
 &= \frac{12}{35}
 \end{aligned}$$

2.7. Ejercicio 12

Ejercicio 12. Enuncie y demuestre la fórmula de la probabilidad total y el Teorema de Bayes.

Proposición. Fórmula de Probabilidad Total: Sea $\{B_i\}$ una partición de \mathcal{S} , $i \leq N \subseteq \mathbb{N}$, y $A \in \mathcal{S} \implies \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \mathcal{S}) \\
 &= \mathbb{P}(A \cap (\cup_{i=1}^N B_i)) \\
 &= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^N (A \cap B_i)) \\
 (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) &= \emptyset \rightarrow \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A \cap B_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)
 \end{aligned}$$

□

Proposición. Fórmula de Bayes: Sea $\{B_i\}$ una partición de \mathcal{S} , $i \leq N \subseteq \mathbb{N}$, y $A \in \mathcal{S} \implies \mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^N \mathbb{P}(A|B_j) \mathbb{P}(B_j)}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B_i|A) &= \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)}
 \end{aligned}$$

Usando la fórmula de probabilidad total:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^N \mathbb{P}(A|B_j) \mathbb{P}(B_j)}$$

□

2.8. Ejercicio 13

Ejercicio 13. Hay tres puertas cerradas y un premio detrás de una de las puertas. Elijo una puerta y el presentador abre una de las otras dos que no tiene premio. Me da la opción de cambiar de puerta. ¿Conviene cambiar? Justifique.

Demostración. Este problema se conoce como el **Problema de Monty Hall** por el famoso presentador de programas de televisión. Al principio uno elige una puerta al azar (o con algún motivo posiblemente vinculado a la superstición) y Monty Hall revela otra puerta que no contiene al premio. Hasta este punto las probabilidades de haber elegido la puerta con el premio detrás es de $\frac{1}{3}$. Sin embargo, ya que una puerta fue revelada entonces queda sólo otra puerta además de la que uno eligió. Ya que las chances de que el premio esté detrás de la puerta elegida es $\frac{1}{3}$, y cómo sabemos que el premio no está detrás de la puerta revelada, entonces hay una probabilidad de $\frac{2}{3}$ de que el premio esté detrás de la otra puerta. Por lo tanto, siempre conviene cambiar de puerta.

Sin pérdida de generalidad consideremos que elegimos la puerta 1. Tomemos los eventos:

$$\begin{cases} A : \text{El presentador abre la puerta 3.} \\ B_i : \text{El premio está detrás de la puerta } i \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

$$\implies \mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3} \forall i$$

Notemos:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A|B_1) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A|B_2) = 1 \\ \mathbb{P}(A|B_3) = 0 \end{cases}$$

Usando la fórmula de probabilidad total obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + 1 + 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_i|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{2}{3} \mathbb{P}(A|B_i) \\ \implies &\begin{cases} \mathbb{P}(B_1|A) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(B_2|A) = \frac{2}{3} \\ \mathbb{P}(B_3|A) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que la probabilidad de que el premio esté detrás de la puerta 2 es el doble que la probabilidad de que esté detrás de la puerta 1. Ya que elegimos la puerta 1, nos conviene cambiar. \square

2.9. Ejercicio 14

Ejercicio 14. Defina independencia para una familia $\{A_i\}$, $i \in I$, donde A_i son eventos e I es un conjunto de índices. Dé un ejemplo de tres eventos independientes dos a dos pero no independientes.

Definición. Sea $\{A_i\} \in \mathcal{S}$, $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ donde I es un conjunto de índices, llamamos al conjunto una **Familia de Eventos Independientes** si $\mathbb{P}(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i) \forall J \subseteq I$.

Ejemplo. Consideremos que se tiran dos monedas y definamos tres eventos:

$$\begin{cases} A : \text{La primera moneda sale cara.} \\ B : \text{La segunda moneda sale cara.} \\ C : \text{Ambas monedas salen igual (cara o cruz).} \end{cases}$$

El espacio de eventos es:

$$\mathcal{F} = \{HH, HT, TH, TT\}$$

donde H denota cara, T denota cruz y el orden denota cómo salió la primera moneda y luego la segunda. Notemos:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$

$$\implies A \perp B$$

Consideremos X como el evento A o el evento B (cualquiera de los dos). Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \cap C) &= \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{P}(X) \mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}(X \cap C) = \mathbb{P}(X) \mathbb{P}(C)$$

$$\implies X \perp C$$

Entonces, demostramos que los eventos son independientes dos a dos. Es decir, mostramos que $A \perp B$, que $A \perp C$ y que $B \perp C$.

Veamos cuáles son las probabilidades de que se cumplan los tres eventos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B | C) \mathbb{P}(C) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Sin embargo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} \\ &\neq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Esto demuestra que aunque los eventos sean todos independientes entre sí no necesariamente forman una familia de eventos independientes.

3. Variables Aleatorias

3.1. Ejercicio 15

Ejercicio 15. Defina la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X y enuncie y demuestre sus propiedades.

Definición. Llamamos a $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ una **Variable Aleatoria**. La llamamos **Discreta** si toma una numerable cantidad de valores y **Continua** si no.

Definición. Sea X una variable aleatoria llamamos a $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ su **Distribución Acumulada** y llamamos $f(x) = F'(x)$ su **Distribución Puntual**. En el caso de una distribución puntual $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

Proposición. Sea X una variable aleatoria y F su distribución acumulada entonces:

1. $F(x) \leq F(y) \forall x \leq y$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Demostración. (1)

$$\begin{aligned}F(y) &= \mathbb{P}(X \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x + (y - x)) \\ &= \mathbb{P}((X \leq x) \cup (x < X \leq y - x)) \\ (X \leq x) \cap (x < X \leq (y - x)) &= \emptyset \rightarrow = \mathbb{P}(X \leq x) + \underbrace{\mathbb{P}(x < X \leq y - x)}_{\geq 0} \\ &\geq \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= F(x)\end{aligned}$$

$$\implies F(x) \leq F(y)$$

□

Demostración. (2)

Veamos que $\exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \implies |F(x) - F(x_0)| < \epsilon \forall \epsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 |F(x) - F(x_0)| &= |\mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x_0)| \\
 x > x_0 &\rightarrow = |\mathbb{P}((X \leq x_0) \cup (x_0 < X \leq x)) - \mathbb{P}(X \leq x_0)| \\
 (X \leq x_0) \cap (x_0 < X \leq x) &= \emptyset \rightarrow = |\mathbb{P}(X \leq x_0) + \mathbb{P}(x_0 < X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x_0)| \\
 &= |\mathbb{P}(x_0 < X \leq x)| \\
 &= \mathbb{P}(x_0 < X \leq x)
 \end{aligned}$$

Consideremos el límite por sucesión usando $x = x_0 + \frac{1}{n}$. Notemos que esta sucesión es válida ya que $x > x_0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x = x_0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \left| F\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - F(x_0) \right| &= \mathbb{P}\left(x_0 < X \leq x_0 + \frac{1}{n}\right) \\
 &< \epsilon
 \end{aligned}$$

Entonces, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \mathbb{P}(x_0 < X \leq x_0 + \frac{1}{n}) < \epsilon \forall n > n_0$. Entonces:

$$\delta = \frac{1}{n_0}$$

□

Demostración. (3)

Consideremos una sucesión de eventos $\{A_n\} \in \mathcal{S}$ donde $A_n = X \leq -n$. Notemos que $A_n \subset A_{n-1}$ y que $X \notin \mathbb{R} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \notin \mathbb{R}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq -n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(-n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow -\infty} F(n) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

□

Demostración. (4)

Consideremos una sucesión de eventos $\{A_n\} \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$, donde $A_n = X \leq n$. Notemos que $A_{n-1} \subset A_n$ y que $X \in \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

□

3.2. Ejercicio 16

Ejercicio 16. Demuestre que para una variable aleatoria X discreta, $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t)$.

Demostración. Lo que esto esencialmente pide que demostremos es que, dada una variable aleatoria X , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = F(x_0) - \mathbb{P}(X = x_0)$$

Queremos ver que $\exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \implies |F(x) - (F(x_0) - \mathbb{P}(X = x_0))| < \epsilon \forall \epsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$. Notemos:

$$\begin{aligned} |F(x) - (F(x_0) - \mathbb{P}(X = x_0))| &= |\mathbb{P}(X \leq x) - (\mathbb{P}(X \leq x_0) - \mathbb{P}(X = x_0))| \\ x < x_0 \rightarrow &= |\mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}((X \leq x) \cup (x < X \leq x_0)) + \mathbb{P}(X = x_0)| \\ (X \leq x) \cap (x < X \leq x_0) = \emptyset \rightarrow &= |\mathbb{P}(X \leq x) - (\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(x < X \leq x_0)) + \mathbb{P}(X = x_0)| \\ &= |\mathbb{P}(x < X \leq x_0) - \mathbb{P}(X = x_0)| \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(x < X \leq x_0)}_{\geq 0} - \underbrace{\mathbb{P}(X = x_0)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Consideremos el límite por sucesión usando $x = x_0 - \frac{1}{n}$. Notemos que esta sucesión es válida ya que $x < x_0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x = x_0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left| F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) - (F(x_0) - \mathbb{P}(X = x_0)) \right| &= \mathbb{P}\left(x_0 - \frac{1}{n} < X \leq x_0\right) - \mathbb{P}(X = x_0) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Entonces, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \mathbb{P}(x_0 - \frac{1}{n} < X \leq x_0) - \mathbb{P}(X = x_0) < \epsilon \forall n > n_0$. Entonces:

$$\delta = \frac{1}{n_0}$$

□

3.3. Ejercicio 17

Ejercicio 17. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una función continua, estrictamente creciente y tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Demuestre que existe una variable aleatoria X que tiene a F como función de distribución acumulada.

Demostración. Ya que $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es estrictamente creciente entonces es biyectiva. Por lo tanto, tiene inversa F^{-1} . Consideremos una variable aleatoria uniforme $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$ y otra $X = F^{-1}(U)$ con distribución acumulada G . Notemos:

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(U \leq F(x)) \\ &= \mathcal{U}(F(x)) \end{aligned}$$

La distribución acumulada de U es:

$$U(x) = x$$

Entonces:

$$G(x) = F(x)$$

Entonces, F es la distribución acumulada de X .

□

3.4. Ejercicio 18

Ejercicio 18. Sean F_X y F_Y las funciones de distribución acumulada de las variables discretas X e Y respectivamente, demuestre que $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x) \forall x \iff F_X = F_Y$.

Demostración. (\implies) Tomemos $f_X = f_Y$ y mostremos que entonces $F_X = F_Y$. Notemos:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^x f_Y(x) dx \\ &= \mathbb{P}(Y \leq x) \\ &= F_Y(x) \end{aligned}$$

$$\implies F_X = F_Y$$

(\impliedby) Tomemos $F_X = F_Y$ y mostremos que $f_X = f_Y$. Notemos:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F_X(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t) \\ &= F_Y(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F_Y(t) \\ &= f_Y(x) \end{aligned}$$

$$\implies f_X = f_Y$$

□

3.5. Ejercicio 19

Ejercicio 19. Demuestre que $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t), Y_n \sim \Gamma(n, \lambda) \implies \mathbb{P}(N(t) \geq n) = \mathbb{P}(Y_n \leq t) \forall n \in \mathbb{Z}_0, t > 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) \geq n) &= 1 - \mathbb{P}(N(t) \leq n) \\ &= 1 - \sum_{m=0}^n \frac{(\lambda t)^m}{m!} \exp(-\lambda t) \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \exp(-\lambda t) \end{aligned}$$

Queremos ver que esto es la distribución acumulada de una variable aleatoria $Y_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Entonces, derivemos por t y veamos si obtenemos la distribución puntual $\Gamma(n, \lambda)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbb{P}(N(t) \geq n) &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m\lambda^m}{m!} t^{m-1} \exp(-\lambda t) - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1}}{m!} t^m \exp(-\lambda t) \\
&= \sum_{m=n-1}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1}}{m!} t^m \exp(-\lambda t) - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1}}{m!} t^m \exp(-\lambda t) \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \exp(-\lambda t) \\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} \exp(-\lambda t) \\
&= \Gamma(n, \lambda)
\end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}(N(t) \geq n) = \mathbb{P}(Y_n \leq t)$$

□

3.6. Ejercicio 20

Ejercicio 20. Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ la densidad de la distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Demostración. Como f es la distribución puntual de una variable aleatoria entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= F(x)|_{-\infty}^{\infty} \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Sin embargo, este ejercicio probablemente lo que espera es que haga la integración explícita. Entonces, resolvamos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Tomemos:

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\implies x = \mu + \sigma t$$

$$\implies dx = \sigma dt$$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right) dy dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) d\theta dr \\
&= \int_0^{\infty} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr \\
&= \int_0^{\infty} -\frac{d \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)}{dr} dr \\
&= -\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \Big|_0^{\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= \sqrt{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

3.7. Ejercicio 21

Ejercicio 21. Demuestre que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Demostración. (\implies) Supongamos que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y demostremos que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Tomemos F_X la distribución acumulada de X , $F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}$ la distribución acumulada de $\frac{X-\mu}{\sigma}$, f_X la distribución puntual de X y $f_{\frac{X-\mu}{\sigma}}$ la distribución puntual de $\frac{X-\mu}{\sigma}$. Notemos:

$$\begin{aligned}
F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(x) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}(X \leq \mu + \sigma x) \\
&= F_X(\mu + \sigma x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(x) \\
&= \frac{d}{dx} F_X(\mu + \sigma x) \\
&= \sigma f_X(\mu + \sigma x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

(\Leftarrow) Supongamos que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y demostremos que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Tomemos F_X la distribución acumulada de X , $F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}$ la distribución acumulada de $\frac{X-\mu}{\sigma}$, f_X la distribución puntual de X y $f_{\frac{X-\mu}{\sigma}}$ la distribución puntual de $\frac{X-\mu}{\sigma}$. Notemos:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) \\
&= \frac{d}{dx} F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma} f_{\frac{X-\mu}{\sigma}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
\Rightarrow X &\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)
\end{aligned}$$

□

3.8. Ejercicio 22

Ejercicio 22. Demuestre que si X es una variable exponencial, entonces X no tiene memoria.

Proposición. Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq x+k | X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq x+k) \forall x, k > 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq x+k | X \geq k) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq x+k \cap X \geq k)}{\mathbb{P}(X \geq k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \geq x+k)}{\mathbb{P}(X \geq k)} \\
&= \frac{\int_{x+k}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t) dt}{\int_k^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t) dt} \\
&= \frac{\exp(-\lambda(x+k))}{\exp(-\lambda k)} \\
&= \exp(-\lambda x) \\
&= \int_x^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t) dt \\
&= \mathbb{P}(X \geq x)
\end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}(X \geq x+k | X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq x+k)$$

□

3.9. Ejercicio 23

Ejercicio 23. Sea X una variable aleatoria con densidad $f_X(x)$ tal que $\mathbb{P}(X \in (a, b)) = 1$, sea $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente y sea $Y = g(X)$, demuestre que para $y \in \{g(x) / x \in (a, b)\}$:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| (g^{-1}(y))' \right|$$

Demostración. Ya que $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y estrictamente creciente entonces g es biyectiva y tiene una inversa g^{-1} . Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(g(X) \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) \\
&= F_X(g^{-1}(y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies f_Y(y) &= \frac{d}{dy} \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) \\
&= f_X(g^{-1}(y)) \left| (g^{-1}(y))' \right|
\end{aligned}$$

$$\implies f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| (g^{-1}(y))' \right|$$

□

3.10. Ejercicio 24

Ejercicio 24. Sea U una variable uniforme en $[0, 1]$. Para $u \in [0, 1]$ defina $h(u) = \max\{u, 1-u\}$. Calcule la distribución acumulada de la variable $X = h(U)$. Calcule $E(X)$ y $V(X)$.

Solución. Notemos:

$$\begin{aligned} X &= h(U) \\ &= \max\{U, 1 - U\} \end{aligned}$$

$$\implies X \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Demostremos que $X \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(\max\{U, 1 - U\} \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(U \leq \frac{1}{2} \cap 1 - U \leq x\right) \cup \left(U \geq \frac{1}{2} \cap U \leq x\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(1 - x \leq U \leq \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} \leq U \leq x\right)\right) \\ \left(1 - x \leq U \leq \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{2} \leq U \leq x\right) &= \emptyset \rightarrow = \mathbb{P}\left(1 - x \leq U \leq \frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq U \leq x\right) \\ &= \int_{1-x}^{\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^x dt \\ &= \int_{1-x}^x dt \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies f_X(x) &= \frac{d}{dx} \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \frac{d}{dx} (2x - 1) \\ &= 2 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\implies X \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 2x dx \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 2x^2 dx \\
&= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{8}\right) \\
&= \frac{14}{24} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{7}{12} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\
&= \frac{7}{12} - \frac{9}{16} \\
&= \frac{28 - 27}{48} \\
&= \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

4. Convergencia en Distribución

4.1. Ejercicio 25

Ejercicio 25. Sea $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} (n-k)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^k (n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=n-k+1}^n \frac{i}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{\left(-\frac{n}{\lambda}\right)}\right)^{\left(\frac{n}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda k}{n} - \lambda\right)} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)
\end{aligned}$$

(*) Notemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=n-k+1}^n \frac{i}{n} \right) &> \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=n-k+1}^n \frac{n-k}{n} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Además, como la expresión está acotada por 1 entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=n-k+1}^n \frac{i}{n} \right) = 1$$

□

4.2. Ejercicio 26

Ejercicio 26. Sea $U_n \sim \mathcal{U} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}$, demuestre que U_n converge en distribución a $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Demostración. Tomemos $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Entonces, la distribución acumulada de cada U_n es:

$$\begin{aligned} F_{U_n}(k) &= \mathbb{P}(U_n \leq k) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} \\ &= \frac{k}{n} \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \mathbb{P}(U \leq x) \\ &= \int_0^x dt \\ &= x \end{aligned}$$

donde $x \in [0, 1]$. Queremos ver que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(x) = F_U(x)$$

Tomemos k como el mayor número entero tal que $\frac{k}{n} \leq x$. Entonces:

$$0 \leq x - \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n}$$

La primera parte de la desigualdad es trivial de comprobar. La segunda parte viene del hecho de que si la resta fuera mayor que $\frac{1}{n}$ entonces se debe tomar $k+1$ en vez de k (ya que hay que tomar el mayor k) y así hasta que se cumpla la desigualdad (espero que se entienda). Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{k}{n} \right) = 0$$

por el Gran Teorema del Sánduche. Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} &= x \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(x) &= F_U(x) \end{aligned}$$

□

Lo curioso de esta propiedad es el hecho de que la sucesión de variables aleatorias U_n siempre toma valores racionales (por definición) mientras que U puede tomar valores irracionales. Que increíble como funcionan los límites.

4.3. Ejercicio 27

Ejercicio 27. Sea $Y_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$, calcule el límite en distribución de $\frac{Y_n}{n}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Solución. Tomemos $k/nk \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq k\right) &= \mathbb{P}(Y_n \leq nk) \\ &= \sum_{m=1}^{nk} \frac{\lambda}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{m-1} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nk} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{\left(-\frac{n}{\lambda}\right)}\right)^{\left(-\frac{n}{\lambda}\right)(-\lambda k)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq k\right) &= 1 - \exp(-\lambda k) \\ &= F_{\frac{Y_n}{n}}(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_{\frac{Y_n}{n}}(x) &= F'(x) \\ &= \lambda \exp(-\lambda x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{n} \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

4.4. Ejercicio 28

Ejercicio 28. Dé un ejemplo de una sucesión de variables aleatorias X_n que convergen en distribución a la constante c pero que $F_{X_n}(c)$ no converge a 1.

Solución. Tomemos una sucesión de variables aleatorias $X_n = c + \frac{1}{n}$. Notemos que como $X_n > c$ entonces $\mathbb{P}(X_n \leq c) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, es claro que X_n converge a c .

5. Vectores Aleatorios

5.1. Ejercicio 29

Ejercicio 29. Enuncie y demuestre las propiedades de la función acumulada de un vector aleatorio (X, Y) . ¿Qué condiciones debe satisfacer una función $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ para que sea la función acumulada de un vector aleatorio?

Definición. Sea $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ un vector aleatorio entonces definimos su **Distribución Puntual** como $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathbb{P}(\mathbf{x} \in \Xi) = \int_{\Xi} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Definición. Sea $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ un vector aleatorio entonces definimos su **Distribución Acumulada** como $F = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^d X_i \leq x_i)$.

La distribución acumulada de un vector debe cumplir que:

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\Xi} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

donde $\Xi = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d / t_i \leq x_i \forall i \in [1, d]\}$. En otras palabras:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_d} F(\mathbf{x})$$

Las propiedades que debe cumplir la distribución acumulada son las mismas que para la variable aleatoria:

1. $F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_d) \leq F(x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_d) \forall x_i \leq y_i$.
2. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0^+} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0)$.
3. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow -\infty} F(\mathbf{x}) = 0$.
4. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} F(\mathbf{x}) = 1$.

La demostración es análoga a la del Ejercicio 15 (3.1).

5.2. Ejercicio 30

Ejercicio 30. Sean X e Y variables aleatorias discretas, demuestre que son equivalentes: **(1)** X e Y son independientes. **(2)** Existen funciones g y h tales que $p_{X,Y}(x, y) = g(x)h(y)$. **(3)** Existen funciones G y H tales que $F_{X,Y}(x, y) = G(x)H(y)$.

Demostración. **(1) \implies (2)**

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= \mathbb{P}(X = x \cap Y = y) \\ X \perp Y &\rightarrow \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y) \\ &= p_X(x) p_Y(y) \\ &= g(x) h(y) \end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} g = p_X \\ h = p_Y \end{cases}$$

(2) \implies (3)

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x \cap Y \leq y) \\ &= \sum_{n=0}^x \sum_{m=0}^y p_{X,Y}(n, m) \\ &= \sum_{n=0}^x \sum_{m=0}^y g(n) h(m) \\ &= \sum_{n=0}^x g(n) \sum_{m=0}^y h(m) \\ &= G(x) H(y) \end{aligned}$$

(3) \implies (1)

$$F_{X,Y}(x, y) = G(x) H(y)$$

$$\begin{aligned}\implies F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) \\ &= G(x) \underbrace{\lim_{y \rightarrow \infty} H(y)}_{= \frac{1}{C_x}, C_x \in \mathbb{R}}\end{aligned}$$

$$\implies G(x) = C_x F_X(x)$$

Análogamente:

$$H(y) = C_y F_Y(y)$$

$$\begin{aligned}\implies F_{X,Y}(x, y) &= G(x) H(y) \\ &= C_x C_y F_X(x) F_Y(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} F_{X,Y}(x, y) &= C_x C_y \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} F_X(x) F_Y(y) \\ &= C_x C_y \left(\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) \right) \left(\lim_{y \rightarrow \infty} F_Y(y) \right) \\ &= C_x C_y \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\implies F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$\implies X \perp Y$$

□

5.3. Ejercicio 31

Ejercicio 31. Suponga que las variables enteras X e Y satisfacen $\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = C a^{x+y}$, $x, y \geq 1$, para alguna constante C , donde $a \in (0, 1)$. Demuestre que X e Y son independientes.

Demostración. Tomemos $C_x, C_y \in \mathbb{R} / C = C_x C_y$. Entonces:

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(x, y) &= C a^{x+y} \\ &= C_x a^x C_y a^y\end{aligned}$$

Tomemos $G(x) = C_x a^x$ y $H(y) = C_y a^y$. Entonces:

$$F_{X,Y}(x, y) = G(x) H(y)$$

Por la propiedad que resolvimos en el problema anterior entonces se deduce que $X \perp Y$.

□

5.4. Ejercicio 32

Ejercicio 32. Sea $a \in (0, 1)$ y suponga que las variables continuas no negativas X e Y satisfacen $\mathbb{P}(X \geq x \cap Y \geq y) = \exp(-\lambda(x+y))$ para $x, y \in \mathbb{R}_+$. Calcule C y demuestre que son independientes y calcule sus marginales.

Solución. Está mal planteado el problema, no se entiende el enunciado :(

5.5. Ejercicio 33

Ejercicio 33. Sean X e Y variables aleatorias continuas, demuestre que son equivalentes: **(1)** X e Y son independientes. **(2)** Existen funciones g y h tales que $f_{X,Y}(x, y) = g(x)h(y)$. **(3)** Existen funciones G y H tales que $F_{X,Y}(x, y) = G(x)H(y)$.

Demostración. **(1) \implies (3)**

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x \cap Y \leq y) \\ X \perp Y &\rightarrow = \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= F_X(x) F_Y(y) \\ &= G(x) H(y) \end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} G = F_X \\ H = F_Y \end{cases}$$

(3) \implies (2)

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} F_{X,Y}(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (G(x) H(y)) \\ &= G'(x) H'(y) \\ &= g(x) h(y) \end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} g = G' \\ h = H' \end{cases}$$

(2) \implies (1)

$$f_{X,Y}(x, y) = g(x) h(y)$$

$$\begin{aligned} \implies f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \\ &= g(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(y) dy}_{= \frac{1}{C_x}, C_x \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$\implies g(x) = C_x f_X(x)$$

Análogamente:

$$h(y) = C_y f_Y(y)$$

$$\begin{aligned} \implies f_{X,Y}(x, y) &= g(x) h(y) \\ &= C_x C_y f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) \, dx dy &= C_x C_y \int_{\mathbb{R}^2} f_X(x) f_Y(y) \, dx dy \\
&= C_x C_y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \, dy \right) \\
&= C_x C_y \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\implies f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$\implies X \perp Y$$

□

5.6. Ejercicio 34

Ejercicio 34. Sea (X, Y) un vector aleatorio con $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independientes: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$. Calcule la distribución de $X^2 + Y^2$ y de $\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Solución. Tomemos:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} R^2 = X^2 + Y^2 \\ \Theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \end{cases} \\
\implies &\begin{cases} X = R \cos(\Theta) \\ Y = R \sin(\Theta) \end{cases}
\end{aligned}$$

Notemos:

$$\begin{aligned}
F_{R^2}(r^2) &= \mathbb{P}(R^2 \leq r^2) \\
&= \mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq r^2) \\
&= \int_{D_r(0,0)} f_{X,Y}(x,y) \, dx dy \\
&= \int_{D_r(0,0)} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \, dx dy \\
&= \int_0^r \int_0^{2\pi} r \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \, d\theta dr \\
&= \int_0^r r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \, dr \\
&= -\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \Big|_0^r \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_{R^2}(r^2) &= \frac{d}{dr^2} F_{R^2}(r^2) \\
&= \frac{d}{dr^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \\
\Rightarrow R^2 &\sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Theta}(\theta) &= \mathbb{P}(\Theta \leq \theta) \\
&= \mathbb{P}\left(\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \leq \theta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} \leq \tan(\theta)\right) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\theta r \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) d\theta dr \\
&= \frac{\theta}{2\pi} \left(-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right) \Big|_0^\infty \\
&= \frac{\theta}{2\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_{\Theta}(\theta) &= \frac{d}{d\theta} F_{\Theta}(\theta) \\
&= \frac{d}{d\theta} \frac{\theta}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$$

5.7. Ejercicio 35

Ejercicio 35. Sean X_i variables aleatorias positivas e independientes con la misma esperanza finita, $i \in [1, k] \subseteq \mathbb{N}$ y $N \in [1, k]$ una variable aleatoria equiprobable e independiente de los X_i , calcule $E\left(\prod_{i=1}^N X_i\right)$.

Solución. Tomemos $\mu = E(X_i) \forall i$. Ya que la distribución de N es euiprobable entonces:

$$\begin{aligned}
E\left(\prod_{i=1}^N X_i\right) &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} E\left(\prod_{j=1}^i X_j\right) \\
X_i \perp X_j \forall i \neq j &\rightarrow = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^i E(X_j) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^i \mu \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu^i \\
&= \frac{\mu^{k+1} - \mu}{(\mu - 1)k}
\end{aligned}$$

5.8. Ejercicio 36

Ejercicio 36. Sean $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independientes y sea $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, calcule $\mathbb{P}(R \leq r)$ para $R \geq 0$.

Solución. Este ejercicio se parece un montón al ejercicio 34 (5.6). En ese ejercicio hallamos que $R^2 \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R \leq r) &= \mathbb{P}(R^2 \leq r^2) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

5.9. Ejercicio 37

Ejercicio 37. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad $f_{X,Y}$, calcule la distribución de $X + Y$.

Solución. Notemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + Y \leq t) &= \mathbb{P}(Y \leq t - X) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} f_{X,Y}(x, y) dy dx
\end{aligned}$$

Tomemos un cambio de coordenadas y usemos:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x = u \\ y = v - u \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces, usamos dos funciones $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \varphi_1(u, v) = u \\ \varphi_2(u, v) = v - u \end{cases}$$

El Jacobiano de este cambio de coordenadas es:

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1 \\ \nabla \varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\implies \det(J) &= 1
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(t) &= \int_{\varphi_1^{-1}(-\infty)}^{\varphi_1^{-1}(\infty)} \int_{\varphi_2^{-1}(-\infty)}^{\varphi_2^{-1}(t-x)} f_{X,Y}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) |\det(J)| \, dv \, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t f_{X,Y}(u, v-u) \, dv \, du \\
\text{Fubini} \rightarrow &= \int_{-\infty}^t \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v-u) \, du \right)}_{=f_{X+Y}(v)} \, dv \\
&= \int_{-\infty}^t f_{X+Y}(v) \, dv \\
\implies f_{X+Y}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v-u) \, du
\end{aligned}$$

5.10. Ejercicio 38

Ejercicio 38. Sean X e Y variables aleatorias continuas independientes con densidades marginales f_X y f_Y respectivamente, calcule la densidad de $X + Y$.

Solución. Este ejercicio es una versión particular del ejercicio anterior. Sabemos que:

$$f_{X+Y}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v-u) \, du$$

Como las variables son independientes y conocemos sus distribuciones marginales entonces podemos usar que $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. Entonces:

$$f_{X+Y}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(v-u) \, du$$

5.11. Ejercicio 39

Ejercicio 39. Sean X e Y variables aleatorias independientes y $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, demuestre que $g(X) \perp h(Y)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(g(X) \in A \cap h(Y) \in B) &= \mathbb{P}(X \in \{u / g(u) \in A\} \cap Y \in \{v / h(v) \in B\}) \\ X \perp Y &\rightarrow = \mathbb{P}(X \in \{u / g(u) \in A\}) \mathbb{P}(Y \in \{v / h(v) \in B\}) \\ &= \mathbb{P}(g(X) \in A) \mathbb{P}(h(Y) \in B)\end{aligned}$$

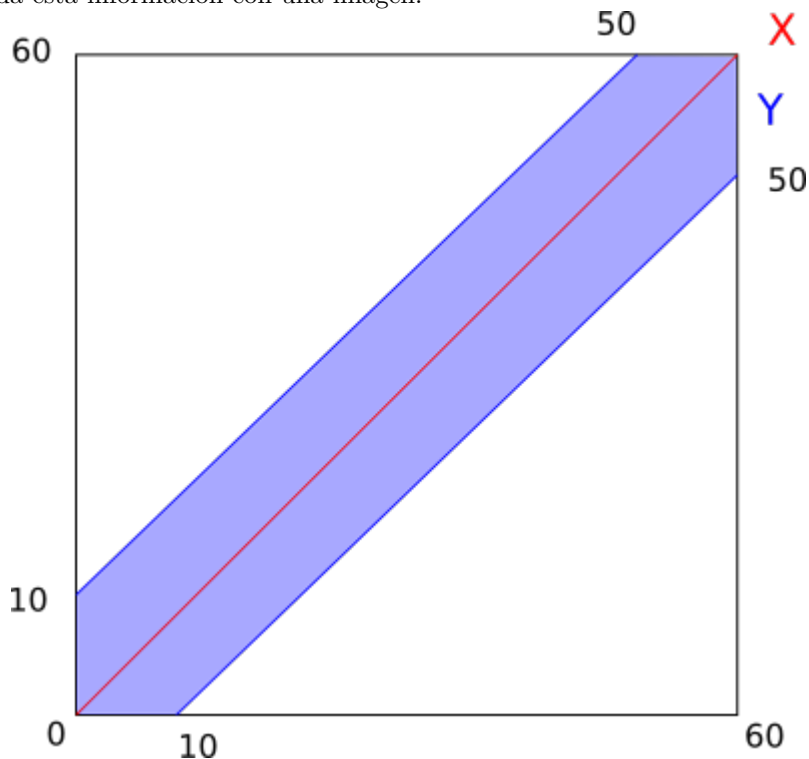
$$\Rightarrow g(X) \perp h(Y)$$

□

5.12. Ejercicio 40

Ejercicio 40. Alicia y José acordaron encontrarse a las 8 de la noche para ir al cine. Como no son puntuales, se puede suponer que los tiempos X e Y en que cada uno de ellos llega son variables aleatorias con distribución uniforme entre las 8 y las 9. Además, se supondrá que estos tiempos son independientes. Si ambos están dispuestos a esperar no más de 10 minutos al otro a partir del instante en que llegan, ¿cuál es la probabilidad de que no se encuentren?

Solución. Tenemos que $X, Y \sim \mathcal{U}(0, 60)$ i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas), donde el número representa en qué minuto entre las 8 y 9 PM llegan al cine. Ya que cada uno va a esperar 10 minutos como máximo entonces hay dos posibilidades para que se encuentren: Alicia llega primero y José llega después no más de 10 minutos más tarde, o José llega primero y Alicia llega después no más de 10 minutos más tarde. Representemos toda esta información con una imagen:



Centramos los posibles tiempos de la variable X y nos fijamos en los tiempos de la variable Y que nos interesan (los tiempos en donde se encuentran). Entonces, la probabilidad de que se encuentren es el área de la región azul dividido por el área total del cuadrado. Como nos interesa la probabilidad de que no se encuentren, entonces hallemos el área de la región externa a la región azul. Estos son dos triángulos rectángulos isósceles de lados 50. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{No se encuentran}) &= \left(2 \cdot \frac{50 \cdot 50}{2}\right) \cdot \frac{1}{60 \cdot 60} \\
&= \left(\frac{50}{60}\right)^2 \\
&= \frac{25}{36}
\end{aligned}$$

5.13. Ejercicio 41

Ejercicio 41. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, demostrar que $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(aX + b \leq t) &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
x = \frac{u-b}{a} \rightarrow &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} \exp\left(-\frac{\left(\frac{u-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) du \\
&= \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)} \exp\left(-\frac{(u-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}\right) du \\
&\implies aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)
\end{aligned}$$

□

5.14. Ejercicio 42

Ejercicio 42. Demostrar de dos maneras distintas que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, $X \perp Y \implies X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Demostración. (1) Sabemos del ejercicio 38 (5.10) que:

$$f_{X+Y}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(v-u) du$$

Entonces, usemos esta fórmula en la forma discreta:

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(m) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1^n}{n!} \exp(-\lambda_1)\right) \left(\frac{\lambda_2^{m-n}}{(m-n)!} \exp(-\lambda_2)\right) \\
&= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} \frac{\lambda_2^{m-n}}{(m-n)!} \\
&= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)) \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \lambda_1^n \lambda_2^{m-n} \\
&= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^m}{m!} \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2))
\end{aligned}$$

$$\implies X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

□

Demostración. (2) Usemos la función generadora de momentos. Como $X \perp Y$ entonces:

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t) M_Y(t) \\ &= \exp(\lambda_1 (\exp(t) - 1)) \exp(\lambda_2 (\exp(t) - 1)) \\ &= \exp((\lambda_1 + \lambda_2) (\exp(t) - 1)) \end{aligned}$$

$$\implies X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

□

5.15. Ejercicio 43

Ejercicio 43. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y) = k(x^2 + y^2) \mathbf{1}_{\{20 \leq x \leq 30 \cap 20 \leq y \leq 30\}}$. ¿Cuál es la probabilidad de que $\max(X, Y) \leq 26$?

Solución.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max(X, Y) \leq 26) &= \mathbb{P}(Y \leq X \leq 26 \cup X \leq Y \leq 26) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq X \leq 26) + \mathbb{P}(X \leq Y \leq 26) \\ &= \int_{20}^{26} \int_{20}^x k(x^2 + y^2) dy dx + \int_{20}^{26} \int_{20}^y k(x^2 + y^2) dx dy \\ &= 2k \int_{20}^{26} \int_{20}^x (x^2 + y^2) dy dx \\ &= 2k \left(\int_{20}^{26} \int_{20}^x x^2 dy dx + \int_{20}^{26} \int_{20}^x y^2 dy dx \right) \\ &= 2k \left(\int_{20}^{26} x^2 (x - 20) dx + \int_{20}^{26} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{20^3}{3} \right) dx \right) \\ &= 2k \left(\frac{26^4}{4} - \frac{20^4}{4} - \frac{20 \cdot 26^3}{3} + \frac{20^4}{3} + \frac{26^4}{12} - \frac{20^4}{12} - \frac{26 \cdot 20^3}{3} + \frac{20^4}{3} \right) \\ &= 2k(1656) \\ &= 3312k \end{aligned}$$

Hallemos la constante de normalización k :

$$\begin{aligned}
k \int_{20}^{30} \int_{20}^{30} (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= k \left(\int_{20}^{30} \int_{20}^{30} x^2 \, dx \, dy + \int_{20}^{30} \int_{20}^{30} y^2 \, dx \, dy \right) \\
&= 20k \left(\int_{20}^{30} x^2 \, dx \right) \\
&= 20k \left(\frac{30^3}{3} - \frac{20^3}{3} \right) \\
&= 20k \left(\frac{19000}{3} \right) \\
&= \frac{380000}{3} k \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\implies k = \frac{3}{380000}$$

$$\implies \mathbb{P}(\text{máx}(X, Y) \leq 26) \approx 0.02$$

6. Esperanza

6.1. Ejercicio 44

Ejercicio 44. Para un vector aleatorio discreto X y una función g demuestre que $E(g(X)) = \sum_x g(x) \mathbb{P}(X = x)$.

Demostración. Tomemos una variable aleatoria $Y = g(X)$. Entonces, por definición de la esperanza:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(g(X)) \\
&= \sum_y y \mathbb{P}(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_{\{x/g(x)=y\}} y \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_y \sum_{\{x/g(x)=y\}} g(x) \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_x g(x) \mathbb{P}(X = x)
\end{aligned}$$

□

6.2. Ejercicio 45

Ejercicio 45. Demuestre que si $X \geq 0$ entonces $E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) \, dx$ para el caso continuo y para el discreto.

Demostración. **(Caso Continuo)** Por definición de la esperanza tenemos que:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{=u} \underbrace{f_X(x)}_{=dv} dx \\
(*) &= \underbrace{(x(F_X(x) - 1))|_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} (F_X(x) - 1) dx \\
&= \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx
\end{aligned}$$

(*) Notemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq x(1 - F_X(x)) \\
&= x \left(\int_0^{\infty} f_X(t) dt - \int_0^x f_X(t) dt \right) \\
&= x \int_x^{\infty} f_X(t) dt \\
x \geq 0 &\rightarrow \leq \int_x^{\infty} t f_X(t) dt \\
&\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \\
&\implies \lim_{x \rightarrow \infty} x(F_X(x) - 1) = 0
\end{aligned}$$

□

Demostración. (Caso Discreto) Tomemos los x posibles como x_i donde $x_i > x_j \forall i > j$. Tomemos también $x_0 = 0$. Por definición de la esperanza tenemos que:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_x x p_X(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i (F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})) \sum_{j=1}^i (x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) \sum_{i=j}^{\infty} (F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) (1 - F_X(x_{j-1}))
\end{aligned}$$

□

6.3. Ejercicio 46

Ejercicio 46. Demuestre que si $X \geq 0$ y $E(X) = 0$ entonces $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

Demostración. Supongamos que $\exists x_0, \varepsilon > 0 / f_X(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Entonces:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x f_X(x) dx \\ &\geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} x f_X(x) dx \\ &> 0 \end{aligned}$$

Pero $E(X) = 0$. Por lo tanto, no puede existir este entorno. Sin embargo, podría existir $x_0 > 0 / f_X(x_0) > 0$. Esto es equivalente a considerar una distribución puntual $p_X(x)$ donde $p_X(x_0) > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} E(X) &= x_0 p_X(x_0) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Pero $E(X) = x_0$. Entonces, tampoco puede existir este punto. La única opción posible es que $p_X(0) = 1$. Entonces:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1$$

□

6.4. Ejercicio 47

Ejercicio 47. Demuestre que $E(X) = \operatorname{argmin} \left(E((X - c)^2) \right)$.

Demostración. Lo que queremos hacer es hallar c tal que $E((X - c)^2)$ sea mínimo. Notemos que como $E(X^2)$ no depende de c entonces $\min \left(E((X - c)^2) \right) = \min \left(E((X - c)^2) - E(X^2) \right)$. Usemos la linealidad de la esperanza:

$$\begin{aligned} E((X - c)^2) - E(X^2) &= E((X - c)^2 - X^2) \\ &= E((X - c - X)(X - c + X)) \\ &= E(c^2 - 2cX) \\ &= E(c^2) - 2cE(X) \\ &= c^2 - 2cE(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c} \left(E((X - c)^2) - E(X^2) \right) &= 2c - 2E(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\implies c = E(X)$$

$$\implies E(X) = \operatorname{argmin} \left(E((X - c)^2) \right)$$

□

6.5. Ejercicio 48

Ejercicio 48. Sea $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ calcule $E(X)$.

Solución.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \exp(-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\ &= \lambda \exp(-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda \exp(-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \lambda \exp(-\lambda) (\exp(\lambda)) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

6.6. Ejercicio 49

Ejercicio 49. Sea $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ calcule $E(X)$.

Solución.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{m=1}^n m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^n m \frac{n!}{m! (n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{n!}{(m-1)! (n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= np \sum_{m=1}^n \frac{(n-1)!}{(m-1)! (n-1-m+1)!} p^{m-1} (1-p)^{n-m} \\ &= np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m (1-p)^{n-1-m} \\ &= np (p + 1-p)^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

7. Esperanza Condicional

8. Generación de Variables Aleatorias

9. Convergencia de Variables Aleatorias

10. Funciones Generadora de Momentos FGM

11. Ley de Grandes Números y Teorema Central del Límite

- 12. Estimadores
- 13. Intervalos de Confianza
- 14. Test de Hipótesis
- 15. Tests No Paramétricos

Índice alfabético

Distribución Acumulada, 10

Distribución Puntual, 10

Espacio de Eventos, 3

Espacio Muestral, 3

Evento, 3

Fórmula de Bayes, 7

Fórmula de Probabilidad Total, 7

Familia de Eventos Independientes, 8

Probabilidad, 3

Problema de Monty Hall, 8