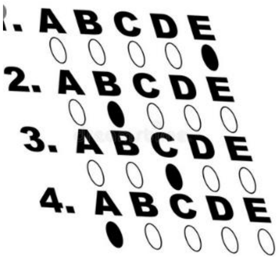
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (C) - Turno noche -

Ejercicio 1. Un examen de elección múltiple está compuesto de 15 preguntas, cada pregunta con 5 respuestas posibles de las cuales sólo una es correcta. El examen se aprueba si se contestan correctamente al menos el 40% de las preguntas. Suponga que uno de los estudiantes que realiza el examen contesta las preguntas al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen? Verificar con los comandos de R `pbinom` y `dbinom`. Simular dicha probabilidad y la función de probabilidad puntual.



Son 15 ensayos de Bernoulli independientes

El éxito es "acertar la respuesta.

La probabilidad de éxito es p=1/5=0,2.

Sea X = cantidad de aciertos en la 15 preguntas.

X tiene distribución B(n=15, p=0,2) cuya función de probabilidad puntual está dada por

$$p_X(k) = P(X=k) = \binom{15}{k} 0.2^k \, 0.8^{15-k}$$

siendo k un número entero entre 0 y 15 (o sea el rango de X).

El 40% de 15 es 6. Luego la probabilidad de aprobar es equivalente a calcular

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X<6) = 1 - [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)].$$

Dejo de ejercicio hacer las cuentas "a mano". Resolvemos en R usando las funciones

```
1-pbinom(5,15,0.2)   # acá usamos la función de distribución acumulada
0.06105143

sum(dbinom(6:15,15,0.2)) #sumamos las probabilidades puntuales
0.06105143
```

Para simular esta probabilidad podemos hacer:

```
set.seed(7)
mean(rbinom(10000,15,0.2)>=6)
0.0643

set.seed(7) #simulamos la función de probabilidad puntual de una binomial
table(rbinom(10000,15,0.2))/10000 # simula la función de probabilidad puntual
     0      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
0.0363 0.1314 0.2271 0.2517 0.1919 0.0973 0.0454 0.0131 0.0050 0.0007 0.0001

dbinom(0:15,15,0.2) #función de probabilidad puntual
3.518437e-02 1.319414e-01 2.308974e-01 2.501389e-01 1.876042e-01 1.031823e-01
4.299262e-02 1.381906e-02 3.454764e-03 6.717597e-04 1.007640e-04 1.145045e-05
9.542042e-07 5.505024e-08 1.966080e-09 3.276800e-11
```

b) ¿Cuál es el número esperado de respuestas correctas? Dar alguna interpretación de este resultado. Hacer una simulación en R para aproximar este resultado.

$$E(X)= n.p =3$$

O sea que si nos presentamos a muchos exámenes como este sin estudiar y respondemos todas las preguntas al azar, en promedio estaremos acertando 3 preguntas. Simulamos esta esperanza en R.

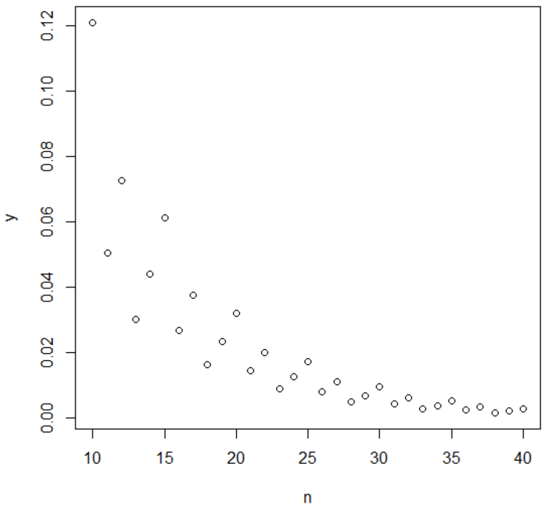
```
set.seed(7)
mean(rbinom(10000,15,0.2))
3.0062
```

c) Construir una función que de la probabilidad de aprobar para distintos valores de preguntas y opciones, si se rinde un examen de elección múltiple y se responden las preguntas al azar. Realizar gráficos para comparar las diferentes situaciones. Utilizar la misma escala en todos, para que sean gráficos comparables.

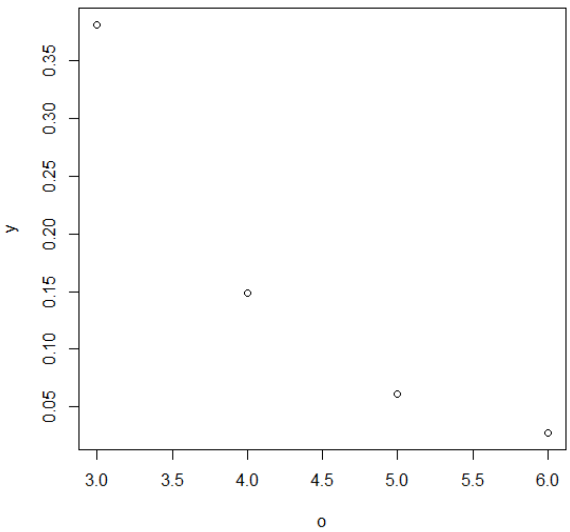
```
aprobar<-function(n,o)
{
  p<-1/o
  k<-ceiling(0.4*n)
  probabilidad_aprobar<-1-pbinom(k-1,n,p)
  return(probabilidad_aprobar)
}
 seq(6,7,0.1) #veamos qué hace la función ceiling
 6.0 6.1 6.2 6.3 6.4 6.5 6.6 6.7 6.8 6.9 7.0
 ceiling(seq(6,7,0.1))
 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7

 aprobar(15,5) #verificamos
 0.06105143

 n<-10:40
 y<-aprobar(n,5)  # notar que entiende si ingresamos vectores
 plot(n,y) # ¿qué comportamiento observa en el gráfico?
```



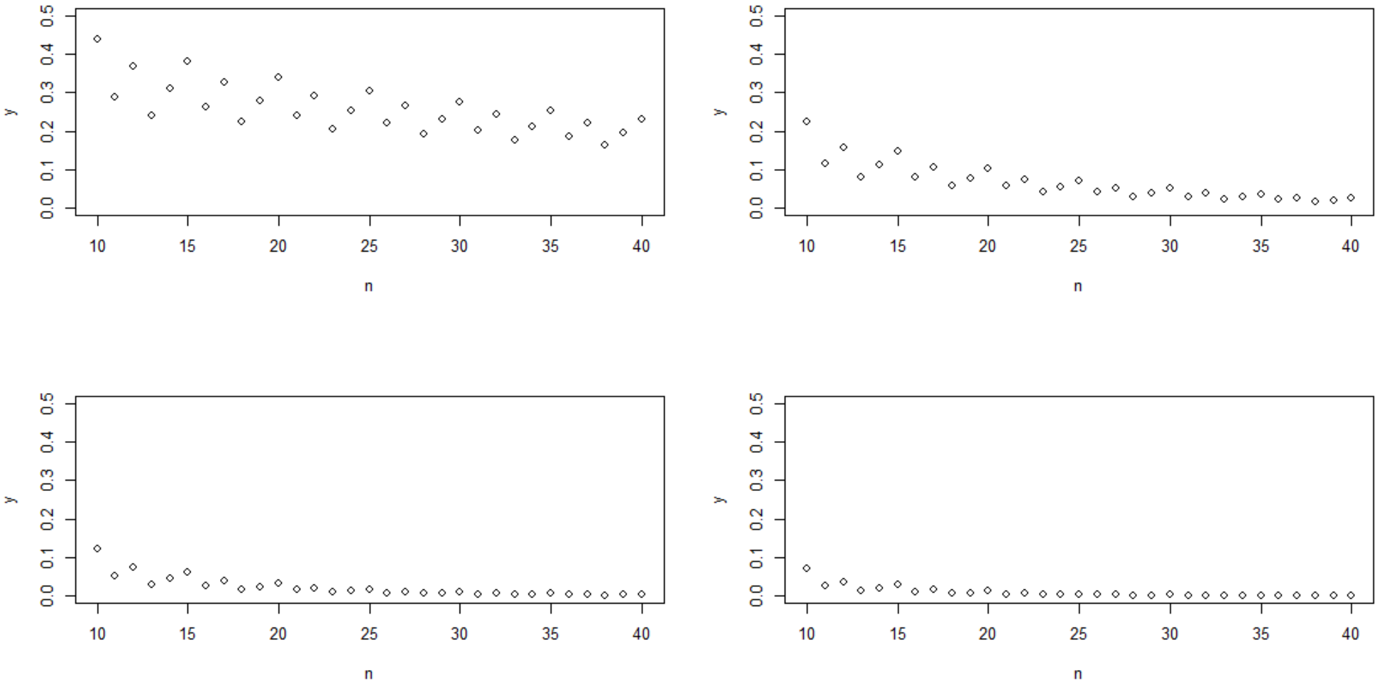

```
o<-3:6
y<-aprobar(15,o)
plot(o,y)
```




```
par(mfrow=c(2,2))

y<-aprobar(n,3)
plot(n,y,ylim=c(0,0.5))
y<-aprobar(n,4)
plot(n,y,ylim=c(0,0.5))
y<-aprobar(n,5)
plot(n,y,ylim=c(0,0.5))
y<-aprobar(n,6)
plot(n,y,ylim=c(0,0.5))

par(mfrow=c(1,1))
```



Ejercicio 2. Un juego consiste en lo siguiente: se tiene una moneda tal que la probabilidad de cara es 1/3. Se lanza la moneda hasta que aparece la primer cara. Si la primera cara aparece hasta el cuarto lanzamiento inclusive se gana \$1, si la cara aparece en el quinto o sexto lanzamiento no se gana ni se pierde y si aparece después se pierde \$2.

a) Hallar la función de probabilidad puntual de la variable aleatoria G: "ganancia (o perdida) del juego".

El rango de G es -2, 0 y 1. Nos piden hallar P(G=-2), P(G=0) y P(G=1).

$G = 1 \Leftrightarrow$ la primer cara sale en el 1°, 2°. 3° o 4° lanzamiento
$G = 0 \Leftrightarrow$ la primer cara sale en el 5° o 6° lanzamiento
$G = -2 \Leftrightarrow$ la primer cara aparece luego del 6° lanzamiento.

Acá tenemos otra variable aleatoria "con nombre".

Y=cantidad de lanzamientos hasta que aparece la primer cara.
Y es geométrica de parámetro p=1/3 y su distribución puntual está dada por

$$P(Y=k)=1/3.\ (2/3)^{k-1}$$

siendo k un número natural cualquiera que son los que corresponden al rango de Y. Luego

$G = 1 \Leftrightarrow Y= 1, 2, 3$ ó 4.
$G = 0 \Leftrightarrow Y= 5$ ó 6.
$G = -2 \Leftrightarrow Y>6$

$P(G=1)=P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)=$
$P(G=0)=P(Y=5)+P(Y=6)=$
$P(G=-2)=1-P(G=1)-P(G=0)$ si estamos seguros que los dos cálculos anteriores con correctos.

Si no, usar una serie geométrica para resolver porque el rango de Y es infinito numerable.
P(G=-2)= P(Y≥7) y para ello recordar que si |r|<1 entonces

$$\sum_{i=a}^{+\infty} r^i = \frac{r^a}{1-r}$$

Resolvemos en R los cálculos

```
help(geom) # ojo como está definida la probabilidad puntual !!!!!!

p1<-sum(dgeom(0:3,1/3)) #el rango de la geométrica arranca en 1 pero debo correrla a 0
p0<-sum(dgeom(4:5,1/3))
p_2<-1-p1-p0

probas<-c(p_2,p0,p1) #función de probabilidad puntual

probas
0.0877915 0.1097394 0.8024691
```

b) Calcular la esperanza y varianza de G. Interpretar el resultado de la esperanza.

E(G)=-2.P(G=-2)+0P(G=0)+1.P(G=1) lo resuelven "a mano" o usando R.

```
EG<-sum(c(-2,0,1)*probas) #esperanza
EG
0.6268861
```

A largo plazo, si jugamos a este juego una gran cantidad de veces, estaremos ganando en promedio 0.62 pesos aproximadamente.

Para la varianza usamos la regla práctica:

$V(G)= E(G^2)-(E(G))^2$ siendo
$E(G^2)= (-2)^2 P(G=-2)+ 0^2 P(G=0)+ 1^2 P(G=1)$ y hacemos los cálculos en R.

```
EG2<-sum(c(-2,0,1)^2*probas)
VG<-EG2-EG^2 #varianza
VG
0.7606489
```

c) Simular la función de probabilidad puntual de G.

```
set.seed(7)
G<-sample(c(-2,0,1),10000,replace=TRUE,probas)
table(G)
  -2    0    1
 881 1066 8053

table(G)/10000 #estimación de la función de probabilidad puntual
    -2      0      1
0.0881 0.1066 0.8053

probas
0.0877915 0.1097394 0.8024691
```