Consultas - práctica 3

Sugerencia: para el martes 29, apuntamos al 3.9 (def. de va's continuas + normal), el 3.10 es difícil.
Para el jueves 1/10: tendríamos que ir terminando la práctica.

---

2. Sea X una v.a. continua con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{\theta} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de θ?

b) Calcular, usando $F_X(x)$,

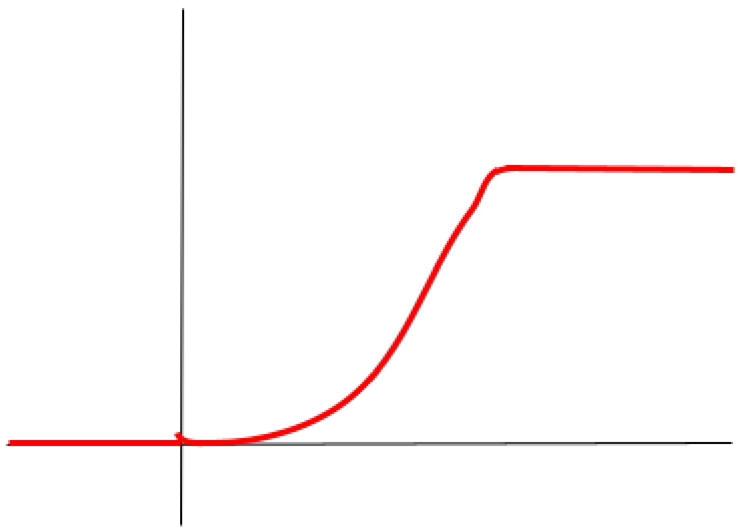
$$P(X \leq 1) \qquad P(0{,}5 \leq X \leq 1) \qquad P(0{,}5 < X \leq 1 | X < 1)$$

c) Hallar la mediana $\tilde{\mu}$ de esta distribución.

d) Encontrar la función de densidad $f_X(x)$.

d) Graficar f_X y F_X. Agregar la recta vertical $x = \tilde{\mu}$.

Puedo pedir que la F_X esté acotada entre 0 y 1, y además que como X es v.a. continua, la F_X también es continua. O sea, $\lim_{x \to 2} F_X(x) = 1$. Como $F_X(2) = 2^3/\theta = 1$.



Ej. 3.3)

3. Sea U una v.a. con distribución $\mathcal{U}[0,\theta]$, para $\theta > 0$.

   a) Hallar la función de distribución acumulada de U.

   b) Si $P(1 \leq U \leq 3) = 0{,}5$, ¿qué valores puede tomar θ? para

   c) Para θ hallados en el item b) estimar la $P(U^2 < 2)$.

a) U es una variable aleatoria uniforme.

Función de densidad: $f_U(x) = 1/\theta \,.\, 1_{[o,\theta]}(x)$.
Recuerden poner la indicadora (el rango de la v.a. U es el intervalo [0,θ]. Esa información sale de la indicadora. Si no la ponemos, la densidad no está definida para todo x real).

Función de distribución acumulada: La calculamos por partes integrando la función de densidad, separando en casos.
Si t es menor a 0, $F_U(t) = 0$; si t es mayor a θ, vale 1. Tomamos t entre 0 y θ:

$$F_U(t) = P(U \leq t) = \int_{-\infty}^{t} 1/\theta \,.\, 1_{[o,\theta]}(x)\, dx \,.$$

Mi variable de integración es x. La indicadora vale 0 para x < 0, y 1 para 0 ≤ x ≤ t.

$$= \int_{0}^{t} 1/\theta \, dx = t/\theta.$$

Entonces:

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & si\, t < 0 \\ t/\theta & si\, t \in [0,\theta] \\ 1 & si\, t > 1 \end{cases}$$

b) No lo resolvimos, pero hay que pensar que U está uniformemente distribuida sobre el intervalo en el que está definida, y la longitud de ese intervalo vale θ. Si entre 1 y 3 “acumulo” la mitad de la probabilidad disponible, siendo el intervalo [1,3] de longitud 2, la longitud total del intervalo [0,θ] debería ser el doble, o sea, θ=4 (se puede hacer la cuenta, pero el argumento va por ese lado).

c) f_U toma valores positivos en el rango [0,θ], y fuera de eso es cero (matemáticamente diríamos que el soporte de la función f_U es [0,θ]. En proba decimos que ese es el rango de la v.a.). De ahí sale que la probabilidad de que U tome valores negativos es 0.

$$P(U^2 < 2) = P(|U| < \sqrt{2}) = P(-\sqrt{2} < U < \sqrt{2}) = P(-\sqrt{2} < U < 0) + P(0 \leq U < \sqrt{2})$$

$P(-\sqrt{2} < U < 0)$ tiene probabilidad 0, por lo dicho antes.

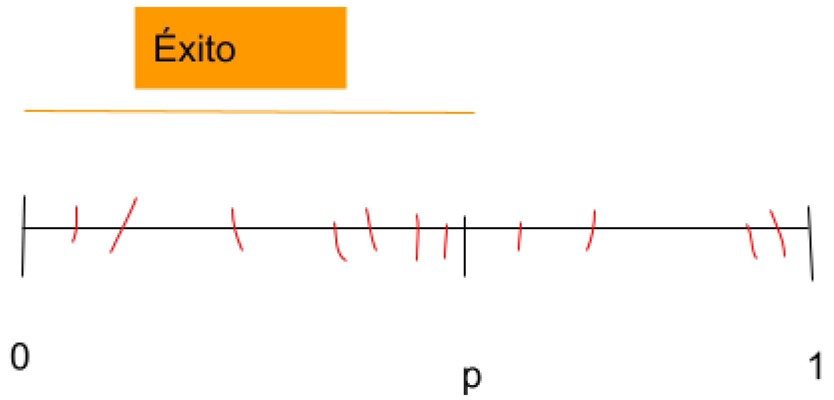
$P(0 \le U < \sqrt{2}\,) = P(0 \le U \le \sqrt{2}) = P(U \le \sqrt{2}) = F_U(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/\theta = \sqrt{2}/4.$

(convierto el < en menor o igual porque es v.a. continua y le añado el intervalo de -∞ a 0, que es de probabilidad 0. Uso que θ=4 como dijimos antes para el b), aunque podía llegar al anteúltimo paso y dejarlo así si no conocíamos θ).

Ej. 3.5)

5. Se eligen n puntos al azar en el intervalo $[0,1]$ de forma independiente (con distribución uniforme). Sea X = Cantidad de puntos que caen en el intervalo $[0,p]$ $(0 < p < 1)$. ¿Qué distribución tiene X?

Digamos que X_1 = si el primer punto elegido al azar cae en el intervalo [0,p].



P(éxito) = P(caer en el [0,p]) = $\int_0^p 1_{[0,1]}(x)\,dx = x|_0^p = p$

X_1 tiene distribución Bernoulli(p). Veámoslo:

P(X_1 = “éxito”) = P(el punto caiga en el intervalo [0,p])

Estoy seleccionando estos puntos de acuerdo a una va. uniforme U con función de densidad $f_U(x) = 1\,.\,1_{[0,1]}(x)$. P($X_1$ = “éxito”) = $P(0 \le U \le p) = p$.

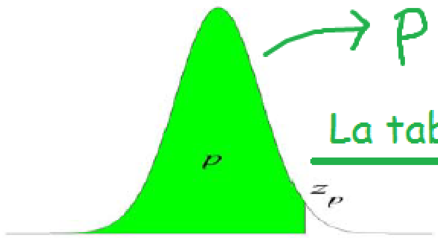
X = lo mismo que X_1 pero hago el experimento n veces. Las n veces son independientes, cada una con probabilidad de éxito p. Entonces, X es binomial(n,p).

Tabla de la normal:

Uso la tabla de la normal que representa para un valor dado de z_p (el primer decimal lo busco en los indicadores de las filas, y el segundo decimal, entre las columnas) la probabilidad de que Z sea menor o igual que z_p.

Tabla: $P(Z \le z_p) = F_Z(z_p)$ -----> sólo para los valores de z_p mayores a 0 y menores a 3,49 (por eso arranca en $P(Z \le z_p) = 0,5$, que corresponde a z_p=0).

Súper esquema en Paint y Comic Sans:



$\rightarrow P(Z \le z_p) = F_Z(z_p)$

La tabla de valores de proba acumulada

Si buscamos a tal que P(Z<a) = 0,75...

Si buscamos P(Z<0,75)...

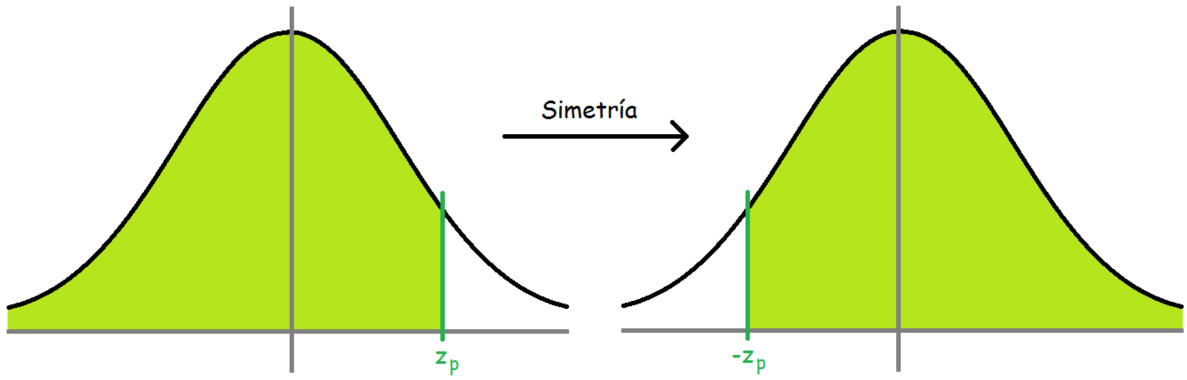
Z_p	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133

Busco primer decimal .7
y segundo decimal .05

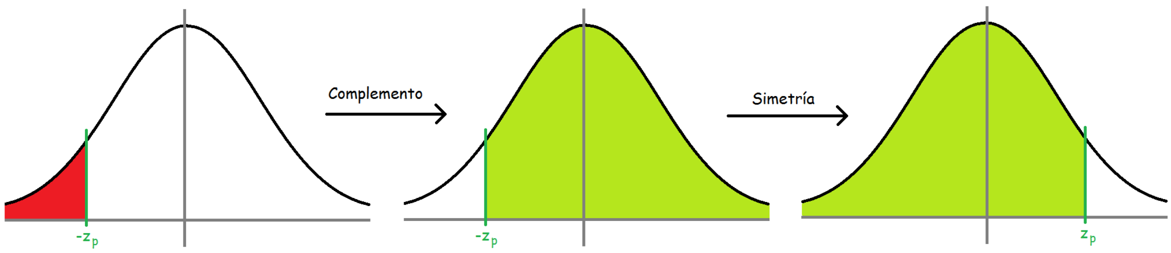
=> P(Z<0,75) = 0,7734.

Busco 0,75 entre los valores de proba acumulada.
(uso los valores más cercanos disponibles)
Leo el valor aproximado de a de las filas y columnas
=> a = 0,67 o 0,68 (o 0,675, puedo decir).

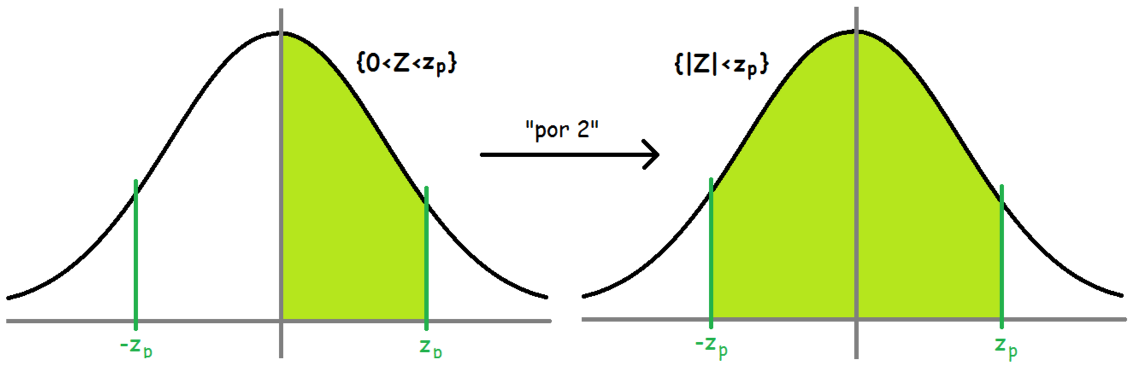
Trucazos (para llevar todo a la proba acumulada):
Simetría: $P(Z \le z_p) = P(Z \ge - z_p)$ (me ahorro de tabular valores negativos).
Para valores negativos: $P(Z \le -z_p) = 1 - P(Z > -z_p) = 1 - P(Z \le z_p)$ (por lo anterior).
Complemento: si quiero proba de ser mayor a algo, $P(Z > z_p) = 1 - P(Z \le z_p)$.
Módulo: $P(|Z| \le z_p) = 2\,(P(Z \le z_p) - 0,5)$.



$$P(Z \leq z_p) \ = \ P(Z \geq - z_p)$$



$$P(Z \leq - z_p) \ = \ 1 \ - \ P(Z \leq z_p)$$



$$P(|Z| \leq z_p) \ = \ 2\ (P(Z \leq z_p) \ - \ 0,5)$$

Deducción del último:

$P(|Z| \leq z_p) \ = \ P(- z_p \leq Z \leq z_p) \ = \ P(- z_p \leq Z \leq 0) \ + \ P(0 \leq Z \leq z_p) \ = \ 2\, P(0 \leq Z \leq z_p)$

ya que por simetría, $P(- z_p \leq Z \leq 0) \ = \ P(0 \leq Z \leq z_p)$.

Además, como 0 es la mediana de la normal,

$P(Z \leq 0) \ = \ 0,5 \Rightarrow P(0 \leq Z \leq z_p) \ = \ P(Z \leq z_p) \ - \ P(Z \leq 0) \ = \ P(Z \leq z_p) \ - \ 0,5$

$\Rightarrow P(|Z| \leq z_p) \ = \ 2\ (P(Z \leq z_p) \ - \ 0,5)$

Ej. 3.6)

6. Sea Z una v.a. con distribución $N(0,1)$. Calcular:

a) $P(0 \leq Z \leq 2)$
b) $P(|Z| \leq 2{,}5)$
c) $P(Z \geq -1{,}37)$
d) c tal que $P(Z < c) = 0{,}98$
e) c tal que $P(|Z| \leq c) = 0{,}90$
f) el valor z_α para $\alpha = 0{,}1, 0{,}05, 0{,}025, 0{,}01$, donde z_α se define como el valor tal que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$

a) $P(0 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z < 0) = 0,9772 - 0,5$
b) $P(|Z| \leq 2,5) = P(-2,5 \leq Z \leq 2,5) = P(-2,5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2,5)$
Estas dos probas son iguales por la simetría de la va. Z.
$P(|Z| \leq 2,5) = 2\,P(0 \leq Z \leq 2,5) = 2\,(P(Z \leq 2,5) - P(Z < 0))$

Otra forma:
$P(-2,5 \leq Z \leq 2,5) = P(Z \leq 2,5) - P(Z < -2,5) =$
Como $P(Z < -2,5)$ no está en la tabla,
$P(Z < -2,5) = P(Z \geq 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5)$ que sí está en la tabla.

$P(-2,5 \leq Z \leq 2,5) = P(Z \leq 2,5) - P(Z < -2,5) = P(Z \leq 2,5) - (1 - P(Z \leq 2,5))$
$= 2\,P(Z \leq 2,5) - 1.$

d) Quiero hallar c tal que la P(Z < c) = 0,98 = $P(Z \leq c)$ (que es la proba acumulada para c)

Tabla: 0.9798 0.9803 para 2,05 o 2,06.

Opciones: decimos que c es 2,05; c es 2,06; o c = 2,055 (que sería mejor aproximación pero no sabemos cuánto vale su función de proba acumulada).
Dependiendo de la aplicación es más correcto un valor o el otro, acá no hay mucha diferencia.

f) Similar al anterior, tenemos que buscar para esos cuatro valores. Ojo que acá es la $P(Z > z_\alpha) = \alpha$, o sea, estamos buscando las probabilidades en la cola derecha de la distribución. Pero $\alpha = P(Z > z_\alpha) = 1 - P(Z \leq z_\alpha) \Rightarrow P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$, y esto sí está en la tabla.

Ej. 3.7)

7. Sea X una v.a. con distribución $N(5, 0{,}25)$. Calcular:

   a) $P(4{,}75 \leq X \leq 5{,}50)$
   b) $P(|X| > 5{,}25)$
   c) c tal que $P(|X-5| \leq c) = 0{,}90$
   d) el 90-percentil de X.

Estandarización de la normal:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow (X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$$

b) Calculo por el complemento $P(|X| > 5,25) = 1 - P(|X| \leq 5,25)$
$P(|X| \leq 5,25) = P(-5,25 \leq X \leq 5,25)$.
$= P(-5,25 - \mu \leq X - \mu \leq 5,25 - \mu)$
$= P((-5,25 - \mu)/\sigma \leq (X - \mu)/\sigma \leq (5,25 - \mu)/\sigma)$
$= P((-5,25 - \mu)/\sigma \leq N \leq (5,25 - \mu)/\sigma)$
Uso que $\mu = 5$, $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$. Llamo N a la v.a. dada por $(X - \mu)/\sigma$.
$= P((-5,25 - 5)/0,5 \leq N \leq (5,25 - 5)/0,5)$
$= P(-10,25/0,5 \leq N \leq 0,25/0,5)$
$= P(N \leq 0,25/0,5) - P(N < -10,25/0,5)$
Divido en dos partes y busco en la tabla. Puedo aproximar esto por$P(N \leq 0,25/0,5)$ porque la probabilidad de $P(N < -10,25/0,5) = P(N < -20,5)$ es prácticamente 0. (si buscan la acumulada de un número que es menor a -3,5 en la tabla, pueden tomar que vale 0. Y si buscan de uno mayor a 3,5 pueden asumir que es aproximadamente 1)

También se puede hacer sin el complemento, pero en vez de estandarizar en una desigualdad tengo que hacerlo en dos por separado:
$P(|X| > 5,25) = P(X < -5,25) + P(X > 5,25)$
$= P(X - \mu < -5,25 - \mu) + P(X - \mu > 5,25 - \mu)$
$= P((X - \mu)/\sigma < (-5,25 - \mu)/\sigma) + P((X - \mu)/\sigma > (5,25 - \mu)/\sigma)$.
Uso que $\mu = 5$, $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$. Llamo N a la v.a. dada por $(X - \mu)/\sigma$.
$= P(N < (-5,25 - 5)/0,5) + P(N > (5,25 - 5)/0,5)$
$= P(N < -20,5) + P(N > 0,5)$.
Por lo anterior, $P(N < -20,5)$ es prácticamente 0. $P(N > 0,5) = 1 - P(N \leq 0,5)$ y de la tabla, $P(N \leq 0,5) = 0,6915 \Rightarrow P(N > 0,5)$ =0,3085.

(no ganamos mucho haciendo lo del complemento en este caso. Pero para mí fue más rápido de tipear en el documento.)

Ej. 3.9 y 3.10)

9. La distancia intercuartil (IQR) de una v.a. se define como la diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil. Hallar la IQR de Z, una v.a. con distribución $N(0,1)$.

10. (*) La mediana de desviaciones absolutas (MAD) de una v.a. se define como la mediana del valor absoluto de la diferencia entre la variable aleatoria y su mediana. Hallar la MAD de Z, una v.a. con distribución $N(0,1)$. *Sugerencia:* Hallar la f.d.a de $|Z|$.

Vale para variables aleatorias continuas o discretas esto:
IQR es una medida de "centralidad" (qué tan dispersa está la v.a. respecto a un valor central). Dar los cuartiles/mediana/deciles caracterizan la distribución de una forma cualitativa.

Mediana: corresponde al punto donde se acumuló el 50% de la probabilidad que hay.
P(x =< mediana) = 0,5 = P(x > mediana)
Y si X es v.a. continua, esto es igual a P(x < mediana).

Cuartil: son los puntos donde se alcanza el 25%, 50%, 75%. El cuartil de 50% (o segundo cuartil) sería la mediana.
Primer cuartil: valor x_1 tal que P(x =< x_1) = 0,25.
Tercer cuartil: valor x_3 tal que P(x =< x_3) = 0,75.

Tabla normal: Da x_3=0,685, x_1=-0,685, IQR = 1,37.

IQR = Inter Quantile Range - distancia intercuartil: diferencia entre x_3-x_1

Decil: lo mismo pero con 10%, 20%, …, 90%.
Percentil P%: es t tal que $F_X(t)$ vale P/100.

MAD: tomo el módulo de la diferencia entre una variable aleatoria X y su mediana. A esa función de X le tomo mediana, eso me da la MAD.

$$MAD = mediana(| X - mediana(X)|)$$

Notar que mediana(X) es un número, fijo, que puedo calcular conociendo la distribución de la v.a. X. Es como la fórmula de la varianza, cuando digo que es la esperanza de X^2 (que hay que calcular) menos la esperanza de X al cuadrado (que es un número fijo que ya conoceríamos, al cuadrado).

La MAD es como el desvío (la raíz de la varianza): una medida de cuán dispersa está X en torno a un valor central (usando mediana en lugar de esperanza, que a veces es más fácil de calcular). Esto va a quedar más claro cuando veamos estadística.

Z: normal(0,1) ---> mediana: 0 (buscando en la tabla, o pensando en que por simetría cuando llegamos al 0 llegamos “a la mitad” de la v.a., y la proba de ser mayor a 0 es igual a la de ser menor a 0). En la fórmula de la MAD:

MAD = mediana(| Z - mediana(Z)|) = mediana(| Z |)

No sabemos la distribución de |Z|, pero podemos expresarla en términos de Z:

$$P(|Z| \leq t) = P(-t \leq Z \leq t) = P(-t \leq Z < 0) + P(0 \leq Z \leq t)$$
$$= 2.(P(Z \leq t) - 0,5) = 2.P(Z \leq t) - 1$$

Entonces, $F_Z(t) = 2.P(Z \leq t) - 1 \; si\, t \geq 0$. Para t<0, $P(|Z| \leq t) = F_Z(t) = 0$,porque un módulo nunca puede ser negativo.

Si queremos la mediana de |Z|, queremos m tal que $F_Z(m) = 0,5$ (por definición de la mediana, es cuando acumulé el 50% de la probabilidad). Usando la fórmula que calculamos:
$2.P(Z \leq m) - 1 = 0,5 \Rightarrow 2.P(Z \leq m) = 1,5 \Rightarrow P(Z \leq m) = 0,75$
De la tabla sale que m es aproximadamente 0,675. Wikipedia dice que da 0,67449.

|Z| no tiene una distribución que haya aparecido hasta ahora, se llama distribución medio normal (*half normal* en inglés), es como una normal pero los valores negativos están anulados. Se usa en algunas cosas en física, por ejemplo, para construir modelos para la velocidad del viento o de las moléculas de un gas.

Ej. 3.12)

12. El diámetro D (expresado en dm) del tronco de cierta especie de árboles es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_D(x) = k\,x\,I_{(0,10)}(x).$$

a) Hallar el valor de la constante k.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?

c) Idem b) sabiendo que el diámetro mide más de 5 dm.

d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan el diámetro entre 4 y 6 dm.

e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm, sea mayor o igual que 0.99?

V. a. D (continua); D = “diámetro del tronco de un árbol en dm”. D está definida a partir de la función de densidad ---> la indicadora me dice que el rango de D es (0,10).

k = 1/50.

Si quiero calcular la P(4≤D≤6), integro D entre 4 y 6. Me da ⅕ = p. p es la probabilidad de que un árbol dado tenga un diámetro entre 4 y 6.

d) Definimos una v.a. Y = “número de árboles que tienen troncos entre 4 y 6 dm de los 3 que ensayamos”. Y tiene dist. binomial(3,p). Éxito = “diámetro entre 4 y 6 dm”.

e) Queremos ensayar n árboles. Queremos que de esos n, al menos 1 tenga éxito (“diámetro entre 4 y 6 dm”). Y_n = “número de éxitos al ensayar n árboles”, Y_n tiene distribución binomial (n, p). p=⅕, n=?

Queremos que $P(Y_n \geq 1) \geq 0{,}99 \Rightarrow P(Y_n = 0) \leq 0{,}01$. Vamos por el complemento. El complemento de tener 1, 2, … o n éxitos es tener 0. Si quiero que la probabilidad de tener al menos 1 éxito sea mayor o igual a 0,99, entonces la probar de tener 0 éxitos tiene que ser menor a 0,01.

$P(Y_n = 0) = (n\ 0)\ p^0\ (1-p)^n = (1-p)^n = (⅘)^n \leq 0{,}01$. Usando logaritmo despejamos n = 20,64.
$log((4/5)^n) = n.log(4/5) \Rightarrow n.log(4/5) \leq log(0,01) \Rightarrow n \geq log(0,01)\ /\ log(4/5) = 20,64.$

(el logaritmo de ⅘ es negativo porque ⅘ < 1, entonces doy vuelta el ≤)
Respuesta: 21 árboles.

Ej. 3.14)

14. La porción de memoria ocupada en un servidor de un sistema de terminales en red es una variable aleatoria continua X que toma valores entre 0 (sin carga) y 1 (carga completa). La densidad de X está dada por

$$f_X(x) = 4x^3 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1$$

a) Halle la mediana de la porción ocupada de memoria.

b) Deduzca la densidad de la variable que mide la porción de memoria que falta ocupar, es decir $Z = 1 - X$.

La densidad de X es $f_X(x) = 4x^3 . 1_{(0,1)}(x)$ (recordar la indicadora, que acá está implícita).

a) La mediana es m tal que $P(X \leq m) = 0,5$.

Integramos para calcular la función de distribución acumulada:

$F_X(t) \; = \; 0 \, si \, t \; \leq \, 0, \; t^4 \, si \, t \; \in \, (0, 1), \; 1 \, si \, t \, \geq \, 1$

Si tomo t entre 0 y 1:

$F_X(t) \; = \int_{-\infty}^{t} 4x^3 . 1_{(0,1)}(x) \, dx \; = \; \int_{0}^{t} 4x^3 dx \; = t^4$

Busco la mediana m: $P(X \leq m) \; = \; F_X(m) \; = \; 0,5$, y $F_X(m) \; = m^4 \Rightarrow m \; = \sqrt[4]{0,5}$.

b) Defino una va. Z=1-X. Obs.: Z también tiene rango (0,1) (importante para la indicadora).

$F_Z(t) \; = \; P(Z \leq t) \; = \; P(1 - X \; \leq t) \; = \; P(- X \; \leq t - 1) \; = P(X \; \geq 1 - t)$

$F_Z(t) \; = \; P(Z \leq t) \; = 1 - \; P(X \; < \; 1 - t) \; = \; 1 \; - \; P(X \leq 1 - t) \; = \; 1 - F_X(1 - t)$

Lo que usamos ahora es que **la función de densidad es la derivada de la función de distribución acumulada**.

$$f_Z(t) \; = \; F'_Z(t) \; = \; (1 - F_X(1 - t))' \; = \; - f_X(1 - t) . (- 1)$$

Usé la regla de la cadena: la derivada de 1-F_X(1-t) es la derivada de F_x (o sea, la f de densidad) evaluada en 1-t por la derivada de 1-t (que es -1)

Entonces,

$f_Z(t) \; = \; F'_Z(t) \; = \; - f_X(1 - t) . (- 1) \; = f_X(1 - t) \Rightarrow f_Z(t) \; = \; 4(1 - t)^3 . 1_{(0,1)}(t)$

Revisar que el dominio de la indicadora sea el correcto. En este caso no cambia (porque Z y X tienen como rango al (0,1)), entonces $1_{(0,1)}$(t) = $1_{(0,1)}$(1-t) valen igual.
Considerar que teníamos al prinicipio 0<x<1. Entonces, para la variable cambiada reemplazo x por 1-t y despejo de la inecuación 0<1-t<1 => 1>t>0 (o sea, 0<t<1).

Ej. 3.15)

15. El tiempo de caída de un sistema se define como la fracción de tiempo que el sistema no está operativo debido a una falla del hardware o del software. Supongamos que $T=$ tiempo de caída de un sistema en horas es una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$te^{-\frac{t^2}{2}} \quad I_{(0,\infty)(x)}$$

a) Deduzca la función de distribución acumulada de T.

b) Cuando el sistema está caído por más de una hora, todos los archivos de trabajo abiertos en el momento de la caída se pierden. Si un usuario está trabajando en un archivo mientras el sistema cae, ¿cuál es la probabilidad de que el archivo no se pierda?

c) Supongamos que al caer el sistema, el tiempo que tarda un usuario en recuperar su trabajo es una función creciente del tiempo de caída, digamos T^2. Deduzca la función de densidad de T^2

a) Fijamos x (mayor a cero) y calculamos la probabilidad P(T≤x) integrando entre menos infinito y x (con la indicadora, integramos entre 0 y x).

$F_T(x) = 1 - e^{-x^2/2}$ si x>0, si no, da 0.

b) Sale fácil calculando con la distribución o con la densidad P(T<1).

c) Tenemos T^2 que me dice el tiempo que tarda en recuperarse el sistema. Hallamos la acumulada de T^2 y después derivamos para hallar la densidad. Tomamos un x>0, si x<0 la f. de dist. acumulada daría 0 (porque T^2 no puede ser negativa).

$F_{T^2}(x) = P(T^2 \le x) = P(|T| \le \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \le T \le \sqrt{x})$

Desarmo en dos intervalos disjuntos:

$= P(-\sqrt{x} \le T \le 0) + P(0 < T \le \sqrt{x})$

$P(-\sqrt{x} \le T \le 0)$ es 0 porque T tampoco toma valores negativos.

$= P(0 < T \le \sqrt{x}) = P(T \le \sqrt{x}) = F_T(\sqrt{x}) \Rightarrow F_{T^2}(x) = F_T(\sqrt{x})$

Derivamos usando regla de la cadena:

$(F_{T^2}(x))' \ = \ f_{T^2}(x)$

$(F_T(\sqrt{x}))' \ = f_T(\sqrt{x}) \, . \, (\sqrt{x})' \ = f_T(\sqrt{x}) \ . \ 1/2\sqrt{x}$

$f_T(\sqrt{x}) \ . \ 1/2\sqrt{x} \ = \sqrt{x}. \ e^{-(\sqrt{x})^2/2} \, 1_{(0,+\infty)}(x) \, . \ 1/2\sqrt{x} \ = 1/2 \, e^{-x/2} \, 1_{(0,+\infty)}(x)$

Tengo que corregir la indicadora: 0<x => 0<$\sqrt{x}$ (los límites de la indicadora no cambian).
La densidad de T^2 está dada por esta fórmula:

$f_{T^2}(x) \ = \ 1/2 \, e^{-x/2} \, 1_{(0,+\infty)}(x)$

T^2 tiene distribución exponencial de parámetro ½.
Con el teo. de cambio de variables sale directo la fórmula.

Ej. 3.17)

17. Las tareas llegan a una cola de un sistema de computación con un solo servidor de acuerdo con un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 4$ tareas por minuto. Llamemos a dicho proceso X_t. Sea T el tiempo de espera hasta que llegue la primera tarea medido en minutos. Calcule la probabilidad de que a lo sumo haya que esperar 15 segundos hasta que arribe la primera tarea.

X_t es un proceso de Poisson que indica cuántas tareas llegaron después de un período t de tiempo (t va en minutos). Recordemos que un proceso de Poisson me da una familia de variables aleatorias tales que a cada momento t, X_t tiene distribución Poisson de parámetro λ.t.

Decimos que T es el tiempo de espera hasta que llegó la primera tarea. Queremos saber la probabilidad de que T valga a lo sumo un cuarto de minuto (15 segundos). Lo más fácil de calcular es la probabilidad de que T valga más que eso, yendo por el complemento.
No tenemos idea de la distribución de T (no es Poisson), pero depende de alguna forma de X_t.

$$P(T \leq 0,25) \ = \ 1 \ - \ P(T \ > 0,25) \, .$$

El evento {T > 0,25} sucede sólo si no llegó ninguna tarea durante esos primeros 15 segundos. O sea, queremos que el número de tareas que llegaron en los 15 segundos sea 0. Pero si fijamos el valor de t en 0,25, sabemos que esto está gobernado por la variable aleatoria $X_{0,25}$, que tiene distribucion Poisson(0,25.4), o sea, Poisson(1). Usando la proba puntual:

$P(T \ > 0,25) \ = \ P(X_{0,25} = 0) \ = (t.\lambda)^0 e^{-t.\lambda}/0! \ = \ 1^0 \, e^{-1}/1 \ = 1/e.$

$\Rightarrow P(T \leq 0,25) \ = \ 1 - 1/e$

Ya terminó el ejercicio. Pero esto lo podemos generalizar a un tiempo genérico t (que acá sólo podría adoptar valores positivos, t menor o igual a 0 no tiene sentido). Entonces:

$P(T \le t) = 1 - P(T > t)$ y $P(T > t) = P(X_t = 0) = (t.\lambda)^0 e^{-t.\lambda}/0! = e^{-t.\lambda}$.

$\Rightarrow P(T \le t) = F_T(t) = 1 - e^{-t.\lambda}$ $si\, t > 0;\ 0\, si\, no.$

Esta función de distribución acumulada es la de una variable aleatoria exponencial de parámetro λ. O sea, el tiempo de espera antes de la llegada del primer pedido tiene distribución exponencial (y en realidad se puede calcular de la misma forma que el tiempo de espera entre los pedidos 1 y 2, 2 y 3, etc., son todos exponenciales de parámetro λ).

Ej. 3.18)

18. Un sistema consta de 5 componentes electrónicos como los del Ejercicio 14, conectados en serie. Al fallar uno cualquiera de éstos, automáticamente se desconecta el sistema. Se supone que los tiempos de vida de los componentes son independientes. Es decir, si se definen los eventos

$$A_i = \{\text{el i-ésimo componente dura por lo menos hasta el instante } t\},$$

con $i = 1, \ldots, 5$, estos eventos son independientes.

Sea X el momento en el cual el sistema se desconecta.

a) Escribir el evento $\{X \ge t\}$ en función de los A_i.

b) Usar la independencia de los A_i para calcular $P(X \ge t)$.

c) Hallar las funciones de distribución y de densidad de X. ¿A qué familia pertenece esta distribución?

Tengo cinco componentes con vida útil exponencial (ver ej. 3.16; llamamos X_i a lo que el ej. 16 llamaba V). El sistema falla si falla al menos uno de los cinco. El sistema se desconecta a tiempo t si algún componente vive t o menos tiempo.

Si X (tiempo de desconexión del sistema) es mayor o igual a t, es porque todos sobrevivieron hasta tiempo t (al menos).

$$\{X \ge t\} = \bigcap_{i=1}^{5} A_i \quad \Rightarrow P(\{X \ge t\}) = P(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) = \prod_{i=1}^{5} P(A_i).$$

X_i es el tiempo de vida de un componente

$P(A_i) = P(X_i \ge t) = 1 - P(X_i < t) = 1 - P(X_i \le t) = 1 - F_{X_i}(t) = e^{-\lambda.t}$

Uso que lambda era 0,04.

Calculo $P(\{X \geq t\}) = \prod_{i=1}^{5} P(A_i). = (e^{-0,04.t})^5 = e^{-0,2t}$

Para averiguar la distribución de X, calculo

$P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = 1 - P(X \geq t) = 1 - e^{-0,2t}$.

Esto es la distribución de una exponencial de parámetro 0,2 = 5 . 0,04

Si quiero la densidad, derivo (teniendo en cuenta que sólo la calculamos para t positivo):

$F_X(t)' = f_X(t) = 0,2.e^{-0,2t}.\ 1_{(0,+\infty)}(t)$.

Ej. 3.19)

19. Un programa tiene tres bloques. El tiempo de compilación en segundos de cada bloque es una variables aleatoria exponencial λ =1 y es independiente del tiempo de compilación de los otros bloques.

15

a) Calcule la probabilidad de que alguno de los tres bloques tenga un tiempo de compilación superior a los 2 segundos.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos bloques tengan un tiempo de compilación superior a los 2 segundos?

T_i = tiempo de compilación del bloque i, i=1,2,3.

X = cantidad de bloques que compilan en más de 2 segundos.

T_i tiene distribución exponencial(1). Los bloques son independientes.

$P(T_i > 2) = \int_2^{+\infty} e^{-x} 1_{(0,+\infty)}(x)\, dx = \int_2^{+\infty} e^{-x}\, dx = - e^{-x}\Big|_2^{+\infty} = 0 - (- e^{-2}) = e^{-2}$.

Probabilidad de éxito ("un bloque compile en más de 2 segundos"): e^{-2}.

X tiene distribución binomial (3, e^{-2}): 3 experimentos en total, proba de éxito es e^{-2}.

a) Pido que X sea mayor o igual a 1, voy por complemento 1-P(X=0).
b) P(X=2) = ?

Ej. 3.20)

20. Definir una función en R que, dada una función de densidad f y su soporte S, calcule la esperanza y la varianza de la variable aleatoria continua que tiene densidad f (con soporte S). Probar que funciona para la variables aleatoria X del ejercicio 1 de esta práctica. *Sugerencia:* Usar el comando `integrate`.

Armo un vector S que da un intervalo de a a b con saltos de 0,01. Ahí es donde está definida f. Después calculamos la esperanza integrando x.f(x), con x los valores en S (uso el comando integrate(S, f)).

Ej. 3.21)

21. Sea X una v.a. con función de densidad $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x), \quad \text{con } \alpha > 0, \lambda > 0.$$

a) Hallar $E(X)$ y $V(X)$.
(Nota: Usar que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ para $\alpha > 0$.)

b) Probar que si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ y $c > 0$ entonces $cX \sim \Gamma(\alpha, \lambda/c)$.

Calculamos E(X) y V(X) integrando. No vamos a resolver la integral explícitamente, si no, ajustar los parámetros para que nos quede una densidad de otra gamma y sabemos que eso tiene que integrar a 1:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\ \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha)\ .\ x^{\alpha-1}.\ e^{-\lambda x}.\ 1_{[0,+\infty)}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha)\ .\ x^{\alpha}.\ e^{-\lambda x}.\ 1_{[0,+\infty)}(x)\ dx$$

Le sumo 1 al exponente de la x en la integral. Que quede con exponente α es lo mismo que decir exponente (α+1)-1, o sea, buscaremos llegar a la densidad de una v.a. con distribución Γ(α+1,λ). Uso la propiedad de la función gamma que sugiere el ejercicio: Γ(α+1) = α.Γ(α).

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha)\ .\ x^{\alpha}.\ e^{-\lambda x}.\ 1_{[0,+\infty)}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda/\lambda\ .\ \alpha/\alpha\ .\ \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha)\ .\ x^{(\alpha+1)-1}.\ e^{-\lambda x}.\ 1_{[0,+\infty)}(x)\ dx$$

Multiplico por λ/λ para que me quede $\lambda^{\alpha+1}$ (el λ dividiendo sale para afuera de la integral), y por α/α para que abajo quede α.Γ(α), que es Γ(α+1).

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha/\lambda\ .\ \lambda^{\alpha+1}/\alpha\Gamma(\alpha)\ .\ x^{(\alpha+1)-1}.\ e^{-\lambda x}.\ 1_{[0,+\infty)}(x)\ dx$$

$$= \alpha/\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{\alpha+1}/\Gamma(\alpha+1)\ .\ x^{(\alpha+1)-1}.\ e^{-\lambda x}.\ 1_{[0,+\infty)}(x)\ dx = \alpha/\lambda$$

En el último paso usé que dentro de la integral queda la densidad de una v.a. Γ(α+1,λ) y su integral sobre todo el espacio vale 1. Observemos que con las operaciones que hicimos no fue necesario alterar el término exponencial ni la indicadora.

Para V(X), calculamos E(X²):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha) . x^{\alpha-1} . e^{-\lambda x} . 1_{[0,+\infty)}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha) . x^{\alpha+1} . e^{-\lambda x} . 1_{[0,+\infty)}(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2/\lambda^2 . \alpha(\alpha+1)/\alpha(\alpha+1) . \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha) . x^{(\alpha+2)-1} . e^{-\lambda x} . 1_{[0,+\infty)}(x)\, dx$$

(donde uso que Γ(α+2) = (α+1).Γ(α+1) = (α+1).α.Γ(α)).

$$= \alpha(\alpha+1)/\lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{\alpha+2}/\Gamma(\alpha+2) . x^{(\alpha+2)-1} . e^{-\lambda x} . 1_{[0,+\infty)}(x)\, dx = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2$$

Finalmente, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2 - (\alpha/\lambda)^2 = \alpha/\lambda^2$.

El b) es similar al a), sólo que ahora cambiamos el parámetro λ.
Y = cX. Calculo $F_Y(x) = P(cX \le x) = P(X \le x/c) = F_X(x/c)$. Derivando:

$$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (F_X(x/c))' = f_X(x/c) . 1/c = \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha) . (x/c)^{\alpha-1} . e^{-\lambda x/c} . 1_{[0,+\infty)}(x) . 1/c$$

La indicadora no cambió porque $0 \le x/c \Leftrightarrow 0 \le x$. Reacomodamos la f de densidad:

$$f_Y(x) = \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha) . (x/c)^{\alpha-1} . e^{-\lambda x/c} . 1_{[0,+\infty)}(x) . 1/c = \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha) . x^{\alpha-1}/c^{\alpha-1} . e^{-(\lambda/c)x} . 1_{[0,+\infty)}(x) . 1/c$$

$$= \lambda^\alpha/\Gamma(\alpha) . x^{\alpha-1}/c^\alpha . e^{-(\lambda/c)x} . 1_{[0,+\infty)}(x) = (\lambda/c)^\alpha/\Gamma(\alpha) . x^{\alpha-1} . e^{-(\lambda/c)\,x} . 1_{[0,+\infty)}(x)$$

que coincide con la f de densidad de una v.a. de distribución Γ(α,λ/c).

Ej. 3.22)

22. Sea X una v.a. con distribución $U(0,1)$. Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias.

a) $cX + d$

b) X^α, para $\alpha = 2$ y $\alpha = 3$

c) $\ln X$

d) $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$, siendo $\lambda > 0$.

Hacemos el mismo procedimiento. Sabemos que como X tiene distribución uniforme (0,1):

$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x)$ $\qquad$ $F_X(x) = 0 \; si \; x < 0; \; x \; si \; x \in [0,1]; \; 1 \; si \; x > 1$

Para cada Y (la v.a. que nos definen en cada inciso) calculamos $F_Y(x)$ en función de $F_X(x)$ y derivamos.

a) Y = cX+d (asumo que c no es 0). Sea x un número real.

Si c>0:

$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(cX + d \le x) = P(cX \le x - d) = P(X \le (x - d)/c) = F_X((x - d)/c)$

Si c<0:

$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(cX + d \le x) = P(cX \le x - d) = P(X \ge (x - d)/c)$

$= 1 - P(X < (x - d)/c) = 1 - P(X \le (x - d)/c) = 1 - F_X((x - d)/c)$

Derivando de los dos lados queda:

Si c>0:

$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (F_X((x - d)/c))' = f_X((x - d)/c) . ((x - d)/c)' = f_X((x - d)/c) . 1/c$

Si c<0:

$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (1 - F_X((x - d)/c))' = - f_X((x - d)/c) . ((x - d)/c)' = - f_X((x - d)/c) . 1/c$

Podemos simplificar ambos casos diciendo que queda

$f_Y(x) = f_X((x - d)/c) . 1/|c|$

(porque -1/c en el caso negativo queda igual a 1/c. Notemos que siempre tiene que quedar positiva la f de densidad, así que está bien esto)

A la hora de evaluar f_x en esta nueva variable (x-d)/c, tengo que considerar que la indicadora $1_{[0,1]}$ vale 1 si y sólo si esta variable está entre 0 y 1:

$0 \le (x - d)/c \le 1 \iff 0 \le x - d \le c \iff d \le x \le c + d$ (si c>0)

$0 \le (x - d)/c \le 1 \iff 0 \ge x - d \ge c \iff d \ge x \ge c + d$ (si c<0)

Cambiamos los límites de la indicadora a d y c+d (en el orden que correspondan). Queda:

$f_Y(x) = f_X((x - d)/c) . 1/|c| = 1/|c| \, 1_{[d, c+d]}(x)$ (si c>0)

$f_Y(x) = f_X((x - d)/c) . 1/|c| = 1/|c| \, 1_{[c+d, d]}(x)$ (si c<0)

En ambos casos la idea fue la misma. c lo que hizo fue agrandar o achicar el rango de la v.a. X, y d lo trasladó. Y es una v.a. uniforme sobre el intervalo [d, c+d] o [c+d, d].

Si c=0 queda una v.a. que es constante, ahí simplemente es $p_x(X=d)=1$ (no es continua).

b) Y = X^α, α = 2 (caso 1) o 3 (caso 2). Sea x un número real.

Caso 1: si x<0, $P(Y \le x) = 0$. Considero $x \ge 0$:

$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(X^2 \le x) = P(|X| \le \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x})$

$= P(-\sqrt{x} \le X < 0) + P(0 \le X \le \sqrt{x}) = P(0 \le X \le \sqrt{x}) = P(X \le \sqrt{x})$

(uso que $P(-\sqrt{x} \le X < 0) = 0 = P(X < 0)$, porque X es uniforme(0,1)).

$= F_X(\sqrt{x})$

Derivando:

$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (F_X(\sqrt{x}))' = f_X(\sqrt{x})\,.\,1/2\sqrt{x} = 1/2\sqrt{x}\,.\,1_{[0,1]}(x)$

Indicadora de f_X: $0 \le \sqrt{x} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

Caso 2:

$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(X^3 \le x) = P(X \le \sqrt[3]{x}) = F_X(\sqrt[3]{x})$

Derivando:

$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (F_X(\sqrt[3]{x}))' = f_X(\sqrt[3]{x})\,.\,1/3\,x^{-2/3} = 1/3\,x^{-2/3}\,.\,1_{[0,1]}(x)$

Indicadora de f_X: $0 \le \sqrt[3]{x} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

c) Y = ln(X). Sea x un número real.

$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(ln(X) \le x) = P(X \le e^x) = F_X(e^x)$.

Derivando:

$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (F_X(e^x))' = f_X(e^x)\,.\,e^x = e^x.\,1_{(-\infty,0]}(x)$

Indicadora de f_X: $0 \le e^x \le 1$ ---> no puedo sacar logaritmo a ambos lados porque tendría ln(0). La desigualdad de la derecha queda: $ln(e^x) = x \le ln(1) = 0$. Del lado de la derecha, como e^x es una función que es positiva para todo valor de x, queda que se satisface la desigualdad $0 \le e^x$para todo valor de x. Entonces la única restricción sobre x es $x \le 0$, es decir, la indicadora que tenemos que usar es la del intervalo $(-\infty, 0]$. Observemos que e^x es una función que es integrable en este intervalo (si nos diera con x positivos no estaría bien, pero con x negativos, da).

d) Y = -1/λ ln(1-X), λ>0. Sea x un número real.

$F_Y(x) = P(-1/\lambda\,ln(1-X) \le x) = P(ln(1-X) \ge -\lambda x) = P(1 - X \ge e^{-\lambda x})$

(porque multiplico por -λ que es negativo, y hacer "e a la" no cambia la desigualdad)

$= P(1 \ge e^{-\lambda x} + X) = P(1 - e^{-\lambda x} \ge X) = P(X \le 1 - e^{-\lambda x}) = F_X(1 - e^{-\lambda x})$

Derivando:

$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (F_X(1 - e^{-\lambda x}))' = f_X(1 - e^{-\lambda x})\,.\,\lambda\,e^{-\lambda x} = \lambda\,e^{-\lambda x}\,.\,1_{[0,+\infty)}(x)$

(el menos de adelante de la exponencial se cancela con el menos del exponente que baja al derivar. Chequear siempre que la densidad quede positiva, si no, hay error de cuentas)

Indicadora de f_X: $0 \le 1 - e^{-\lambda x} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -e^{-\lambda x} \le 0 \Leftrightarrow 1 \ge e^{-\lambda x} \ge 0$

---> como antes, no puedo sacar logaritmo a ambos lados porque tendría ln(0). La desigualdad de la derecha queda satisfecha para todo valor de x real (porque la exponencial es una función siempre positiva). Aplicamos ln en la de la izquierda:

$1 \ge e^{-\lambda x} \Leftrightarrow ln(1) = 0 \ge ln(e^{-\lambda x}) = -\lambda x \Leftrightarrow 0 \ge -\lambda x \Leftrightarrow 0 \le x$.

Entonces, los límites de la indicadora pasan a ser 0 y $+\infty$.

En este caso, Y tiene distribución conocida: exponencial de parámetro λ.

Ej. 3.25)

25. **Generación de números al azar**

   a) Usando el Ejercicio 22 parte a), generar, a partir de una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$, una variable aleatoria con distribución $U(3,8)$.

   b) Usando el Ejercicio 19 parte d), generar, a partir de una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$, una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 10.

Quiero Y que sea definida en función de X, que tiene dist. uniforme (0,1).

a) Uso el 22a) con valores c y d adecuados.
b) Uso el 22d).

   c) Generar, a partir de una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$, una variable aleatoria con la siguiente distribución uniforme discreta:

$$p_X(k) = \frac{1}{100} \qquad \text{si} \;\; k = 0, 1, ..., 99.$$

16

[redacted]

   d) Generar, a partir de una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$, una variable aleatoria con distribución $Bi(1, 1/3)$.

   e) Generar, a partir de una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$, una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro 5.

Para definir una v.a. Y discreta a partir de una uniforme(0,1) ---> X.
“Corto” el intervalo [0,1] en pedazos y asigno esos pedacitos a los valores del rango de la v.a. Y.

c) Y es una v.a. uniforma discreta. Adopta los valores 0, 1, …, 99 con probabilidad 1/100.

Divido el [0,1] en 100 partes iguales.

[0, 1/100)	--------->	Y=0
[1/100, 2/100)	--------->	Y=1

[2/100, 3/100) ---------> Y=2
…
[98/100, 99/100) ---------> Y=98
[99/100, 1] ---------> Y=99

Y = f(X) donde f es la función partida dada por esta asignación.

d) Y es una binomial(1,⅓) (o sea, es Bernoulli(⅓)). Rango de Y es 0,1:
[0, 2/3) ---------> Y=0 "fracaso"
[2/3, 1) ---------> Y=1 "éxito"

e) Y tiene dist. Poisson(5). Rango de Y es 0, 1, 2, ...
Sabiendo cómo es la proba puntual de la Y: $p_Y(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$
$p_Y(0) = e^{-5}$. Busco asignar un intervalo de longitud e^{-5} al valor Y=0.

$[0, e^{-5})$ ---------> Y=0

$p_Y(1) = 5e^{-5}$. Le asigno un intervalo de longitud $5e^{-5}$.

$[e^{-5}, e^{-5}+5e^{-5})$ ---------> Y=1

$p_Y(2) = 5^2e^{-5}/2$.

$[6e^{-5}, 6e^{-5}+5^2e^{-5}/2)$ ---------> Y=2

…

Voy asignando
$[p_Y(0) + … + p_Y(k-1), p_Y(0) + … + p_Y(k-1) + p_Y(k)]$ ---------> Y=k
Este intervalo tiene longitud $p_Y(k)$.
Por inducción, hacemos esta construcción para todo k=0, 1, 2, ….

Sabemos que eso nos da una asignación válida porque

$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k e^{-\lambda}/k! = 1$, y cada uno de los términos es la longitud del intervalo que asignamos a Y=k.