Consultas conteo - práctica 0 - práctica 1

Cronograma

Práctica 1 (+ej. de conteo): Ej. 8: jueves 3/9, termina martes 8/9.
Práctica 2: termina 17/9.
Práctica 3: termina 29/9.
Práctica 4: termina 13/10.
Práctica 5: termina 22/10.
Primer parcialito: 24/9.
Primer parcial: 27/10.

Para usar R online

https://rdrr.io/snippets/
https://rstudio.cloud/ (requiere abrir una cuenta)

Ejercicios 1/9/20

(eran para resolver en la clase, pueden usarlos para practicar)

1) 7 amigos quieren sentarse a comer en la barra de un bar. ¿Cuántas formas hay de acomodarlos? ¿Y si hay una pareja dentro del grupo que quiere sentarse junta? ¿Y si se sientan a comer en una mesa redonda?

   Rta.: 7!; 2!6!; 6!

2) ¿Cuántos anagramas posibles hay de la palabra DESOXIRRIBONUCLEICO donde las letras O estén separadas por exactamente una letra?

   Rta.: 15.16!/(3!2!2!2!)

3) Para reorganizar la currícula de la carrera de computación, se desea armar un comité con 10 miembros, siendo 1 de ellos presidente, de entre 35 candidatos. ¿Cuántas formas hay de armar este comité? Resolver el problema contando de dos manera diferentes.
   Con esta idea podemos argumentar, generalizando para un comité de k miembros elegidos de n personas, que

   $$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

   Rta.: 10.(35 10) o 35.(34 9)); (n k) es el combinatorio n,k

---

¿De cuántas formas se pueden ordenar 5 libros distintos?

Como los libros son distintos, los puedo distinguir, entonces, me interesa el orden en el que están ordenados.
Tengo 5 lugares para distribuirlos, entonces al primero le asigno un lugar, quedan 4, le asigno uno de estos 4 al segundo, quedan 3,...

La cantidad de formas de ordenarlos es 5.4.3.2.1=5!
_ _ _ _ _ -> _ _ A _ _ -> _ B A _ _ -> C B A _ _ -> C B A _ E -> C B A D E
5 lugares disp.-> 4 lugares -> 3 lugares -> 2 lugares -> 1 lugar

¿Qué pasa si hay sólo 3 lugares disponibles?

Asigno libros a los lugares:
1: _ 2: _ 3: _ -> 1: C 2: _ 3: _ -> 1: C 2: D 3: _ -> 1: C 2: D 3: A

Tengo que distribuir 3 lugares para 5 libros, hay 5 opciones para el lugar 1, 4 para el lugar 2 y quedan 3 para el lugar 3.

El número de variaciones es la forma de distribuir k objetos tomados de un total de n *considerando el orden*: n!/(n-k)!

En este caso, son 5 libros en 3 lugares, 5!/(5-3)! = 5.4.3.2.1 / 2.1 = 5.4.3.

Si tengo libros repetidos:

Digamos que tengo dos libros iguales de los 5 para ordenar:
A, A, B, C, D
Puedo pensar que los libros son distinguibles. Les pongo un apodo A_1 y A_2. Ordeno A_1, A_2, B, C, D. Ya sabemos que hay 5! formas de ordenarlos.

A_1 A_2 B C D y A_2 A_1 B C D serían, en realidad, el mismo orden. Lo mismo vale si considero D A_1 B A_2 C y D A_2 B A_1 C. Entonces, puedo armar pares de ordenamientos donde A_1 y A_2 están intercambiados. Para no contarlos dos veces, divido el total por la cantidad de permutaciones de A_1 y A_2, que son 2!.
El total sería 5!/2! (formas de ordenar 5 libros con 2 repetidos).

Si no me importa el orden/los libros son indistinguibles:

Si sólo quiero tomar k objetos de entre n, sin importarme el orden, entonces uso el combinatorio (n k)=n!/(n-k)!.k!
Si por ejemplo tenía 3 libros de entre 5 para ordenar:
Variaciones: yo ordeno a esos 3 en los 3 lugares disponibles.
Combinatorio: sólo elijo 3 libros para ordenar.

Ej. 1.4

4. De un bolillero que contiene 5 bolillas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 se extrae una al azar, sea la número k. Se eliminan las bolillas cuyo número es mayor que k de la urna y se hace una segunda extracción al azar entre las bolillas 1 a k, sea la número j. Se eliminan las bolillas cuyo número es mayor que j de la urna y se hace una tercera extracción al azar entre las bolillas 1 a j.

   a) Describir un espacio muestral adecuado para este experimento y determinar el número de elementos que posee.

   b) ¿Es razonable suponer equiprobabilidad en este espacio? ¿Qué probabilidad le asignaría al (3,2,1)?

Espacio muestral:
E={ (x_1, x_2, x_3): x_i =1,2,3,4,5, x_3 menor o igual que x_2, x_2 menor o igual que x_1}
Caso 1) x_1=1. Entonces, x_2=x_3=1.
Caso 2) x_1=2. Entonces, subcasos x_2=1 o x_2=2.
…
Trabajamos con casos para calcular el cardinal.

(Rta.: 35)

No suponemos que es equiprobable.
Lo que podemos hacer es tomar el espacio muestral E'={(x_1, x_2, x_3): x_i =1,2,3,4,5}.
Este espacio sí es equiprobable pero hay que restringir al evento A = {x_3 menor o igual que x_2, x_2 menor o igual que x_1} (con lo que no ganamos mucho).

Proba asignada al (3 2 1): Voy seleccionando en cada paso la bolita que sale de entre las posibles.
Elijo el 3 de entre 5 posibles: ⅕
Elijo el 2 de entre 3 posibles: ⅓.
Elijo el 1 de entre 2 posibles: ½.
Asigno proba: ⅕*⅓*½.
(esta proba que calculamos es una proba condicional: estamos condicionando los resultados de las extracciones 2 y 3 al de la extracción anterior).

En la tabla siguiente se pueden ver los resultados de simular este experimento 10000 veces en R. Están indexadas las ternas de resultados posibles, y al lado la estimación de la probabilidad obtenida por simulación, y la probabilidad que le asignamos teóricamente.

La fila 6 corresponde al caso (3,2,1), y ⅕*⅓*½, su proba teórica, es aproximadamente 0,0333.

```
> probasteor
      1ra ext. 2da ext. 3ra ext. Proba sim Proba teor.
 [1,]        1        1        1    0.2043  0.20000000
 [2,]        2        1        1    0.1002  0.10000000
 [3,]        2        2        1    0.0505  0.05000000
 [4,]        2        2        2    0.0517  0.05000000
 [5,]        3        1        1    0.0622  0.06666667
 [6,]        3        2        1    0.0339  0.03333333
 [7,]        3        2        2    0.0300  0.03333333
 [8,]        3        3        1    0.0216  0.02222222
 [9,]        3        3        2    0.0238  0.02222222
[10,]        3        3        3    0.0221  0.02222222
[11,]        4        1        1    0.0529  0.05000000
[12,]        4        2        1    0.0233  0.02500000
[13,]        4        2        2    0.0246  0.02500000
[14,]        4        3        1    0.0154  0.01666667
[15,]        4        3        2    0.0192  0.01666667
[16,]        4        3        3    0.0152  0.01666667
[17,]        4        4        1    0.0125  0.01250000
[18,]        4        4        2    0.0095  0.01250000
[19,]        4        4        3    0.0150  0.01250000
[20,]        4        4        4    0.0105  0.01250000
[21,]        5        1        1    0.0424  0.04000000
[22,]        5        2        1    0.0200  0.02000000
[23,]        5        2        2    0.0176  0.02000000
[24,]        5        3        1    0.0151  0.01333333
[25,]        5        3        2    0.0151  0.01333333
[26,]        5        3        3    0.0129  0.01333333
[27,]        5        4        1    0.0101  0.01000000
[28,]        5        4        2    0.0072  0.01000000
[29,]        5        4        3    0.0098  0.01000000
[30,]        5        4        4    0.0129  0.01000000
[31,]        5        5        1    0.0079  0.00800000
[32,]        5        5        2    0.0077  0.00800000
[33,]        5        5        3    0.0085  0.00800000
[34,]        5        5        4    0.0067  0.00800000
[35,]        5        5        5    0.0077  0.00800000
```

Ejercicio 1.5)v)

A_i={compra de software de la empresa i}, i=1, 2, 3.

Escribimos el evento

$A_1 \cup A_2$---> La firma compra a la empresa 1 o a la empresa 2 (puede comprarle a ambas, pero por lo menos a una de ellas)

$A_1 \cap A_2$---> La firma compra a la empresa 1 y a la empresa 2 (a ambas a la vez)

A_1^c---> No le compra a la empresa 1.

Para calcular probabilidades de una unión de eventos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A y B son disjuntos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidad del complemento de un evento:

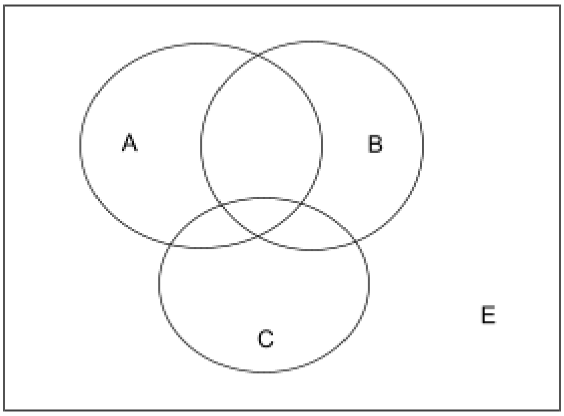
$P(A^c) = 1 - P(A)$

Leyes de de Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Probabilidad de la diferencia de eventos:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



Para calcular

$P((A_1^c \cap A_2^c) \cup A_3) = P(A_1^c \cap A_2^c) + P(A_3) - P((A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3)$

Usé la prop. de la proba de una unión con

$A = A_1^c \cap A_2^c\, y\, B = A_3$

$P(A_3) = 0,28.$ *Por ítem anterior,* $P(A_1^c \cap A_2^c) = 0,64.$

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_3 - A_1 - A_2)$ (igualdad de conjuntos)

$P(A_3) = 0,28$. Le resto $A_1 \cap A_3$ y $A_2 \cap A_3$, cuidando que estaría restando dos veces $A_1 \cap A_2 \cap A_3$:

$P(A_3 - A_1 - A_2) = P(A_3) - (P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3))$

(Uso la propiedad de la unión para calcular

$P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) =$

$P((A_1 \cup A_3)) + P(A_2 \cup A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3))$

y con eso calcular $P((A_1 \cup A_2)^c \cap A_3) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3))$

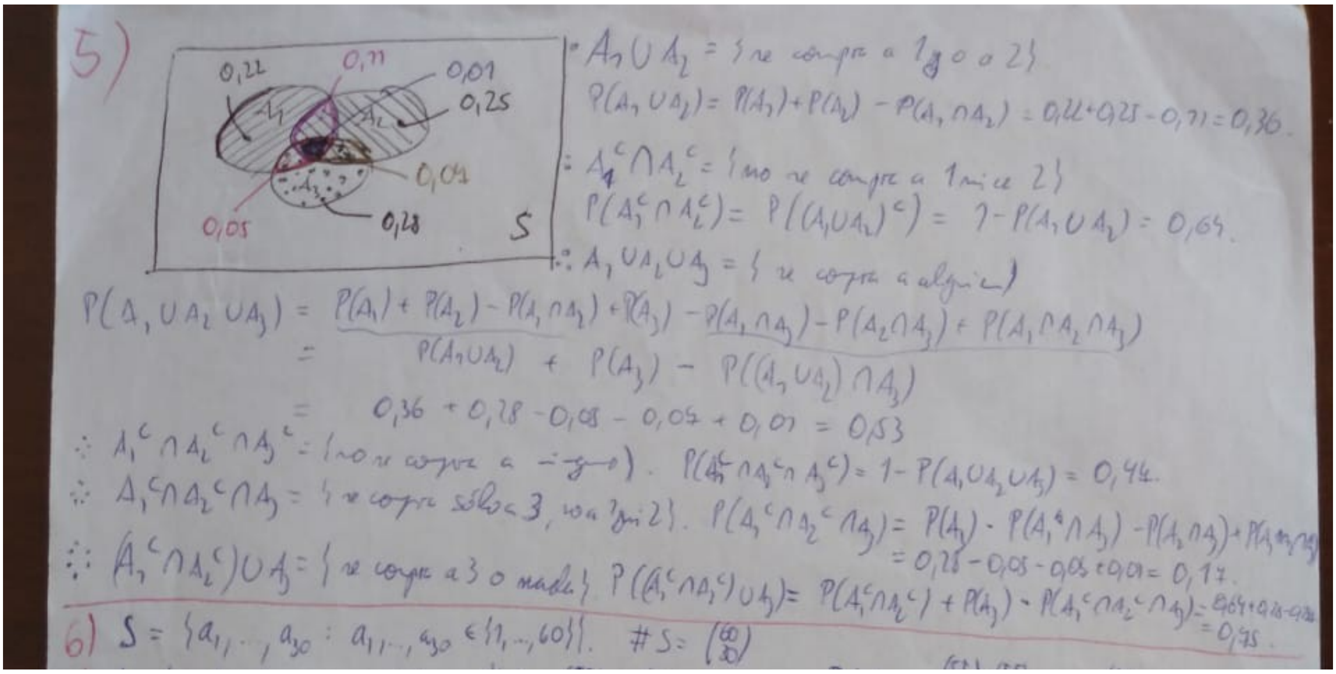
$P(A_3 - A_1 - A_2) = 0,28 - 0,05 - 0,07 + 0,01 = 0,17$

Reemplazo este dato:

$P((A_1^c \cap A_2^c) \cup A_3) = P(A_1^c \cap A_2^c) + P(A_3) - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$

$P((A_1^c \cap A_2^c) \cup A_3) = 0,64 + 0,28 - 0,17 = 0,75.$

Soluciones 1.5)


5)

• $A_1 \cup A_2$ = {se compra a 1 y/o a 2}
$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,22 + 0,25 - 0,11 = 0,36.$
• $A_1^c \cap A_2^c$ = {no se compra a 1 ni a 2}
$P(A_1^c \cap A_2^c) = P((A_1 \cup A_2)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 0,64.$
• $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ = {se compra alguno}
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \underline{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)} + P(A_3) - \underline{P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$
$= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3)$
$= 0,36 + 0,28 - 0,05 - 0,07 + 0,01 = 0,53$
• $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ = {no se compra a ninguno}. $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 0,47.$
• $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$ = {se compra sólo a 3, no a 1 ni 2}. $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
$= 0,28 - 0,05 - 0,07 + 0,01 = 0,17.$
• $(A_1^c \cap A_2^c) \cup A_3$ = {se compra a 3 o nada} $P((A_1^c \cap A_2^c) \cup A_3) = P(A_1^c \cap A_2^c) + P(A_3) - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = 0,64 + 0,28 - 0,17 = 0,75.$

6) $S = \{a_1, \ldots, a_{30} : a_1, \ldots, a_{30} \in \{1, \ldots, 60\}\}$. $\#S = \binom{60}{30}$

Ej 1.7

7. De un grupo de 6 mujeres y 4 hombres se deben elegir 3 personas para que los representen en tres congresos a desarrollarse en mayo, junio y septiembre.

   a) Suponiendo que una persona puede ir a más de un congreso, calcular la probabilidad de que

      i. a los dos primeros congresos vayan mujeres.

      ii. a los dos primeros congresos vayan mujeres y al tercero un hombre.

      iii. haya por lo menos una mujer entre las 3 personas elegidas.

   b) Si a cada congreso debe ir una persona diferente, calcular las mismas probabilidades que en (a) y además la probabilidad de que haya exactamente una mujer entre las 3 personas elegidas.

Espacio muestral: $\{(x_1, x_2, x_3) : x_i$ vale 1, …, 10; 1,..., 6 mujeres, 7,...,10 hombres$\}$ (con repetición, 1000 elementos en total).

M_i = donde una mujer va al congreso i-ésimo.

$P(M_i) = 6/10$.

$P(M_1 \cap M_2) = (6/10)^2$ (porque las dos elecciones son con reposición, y entonces, son independientes).

$P(M_1 \cap M_2 \cap M_3^c) = (6/10)^2 . (4/10)$

P(al menos una mujer) = 1 - P(no haya mujeres)

$P(M_1^c \cap M_2^c \cap M_3^c) = (4/10)^3 \Rightarrow P(al\, menos\, una\, mujer) = 1 - (4/10)^3$.

Sin reposición, redefino el espacio muestral: $\{(x_1, x_2, x_3) : x_i$ vale 1, …, 10, x_i distinto de x_j, 1,..., 6 mujeres, 7,...,10 hombres$\}$ => su cardinal es 10.9.8.

Trabajo con los mismos eventos pero voy a tener que usar proba condicional (porque las elecciones subsiguientes dependen de las anteriores)

$P(M_1 \cap M_2) = P(M_2 | M_1)\ P(M_1) = 5/9 . 6/10$

($P(M_1)$ es 6 de 10 porque elijo 1 mujer de entre 6, y hay personas en total. $P(M_2|M_1)$ es 5 de 9 porque elijo 1 de entre 5 que quedan, y hay 9 personas disponibles).

$P(M_1 \cap M_2 \cap M_3^c) = P(M_3^c | M_1 \cap M_2)\, P(M_1 \cap M_2) = 4/8 . (5/9 . 6/10)$

Si no: $= P(M_3^c | M_1 \cap M_2)\, P(M_2 | M_1)\ P(M_1) = (4/8) . (5/9) . (6/10)$

Calculo $P(M_1^c \cap M_2^c \cap M_3^c) = P(M_3^c | M_1^c \cap M_2^c)\, P(M_1^c \cap M_2^c)$

$= P(M_3^c | M_1^c \cap M_2^c)\, P(M_2^c | M_1^c)\, P(M_1^c) = (2/8).(3/9).(4/10)$

$P(al\, menos\, una\, mujer) = 1 - (2/8).(3/9).(4/10)$

Ej. 1.9

9. a) Enunciar y probar una fórmula para $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

   b) Cuatro matrimonios deciden bailar un tango, eligiendo las mujeres a sus compañeros al azar.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que la mujer i (fijo) elija a su esposo como pareja de baile; i=1,2,3,4?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 mujer elija a su esposo?

a) Estimar las probabilidades del item b) por medio de una simulación. Compare con los resultados obtenidos en b).

a) Fórmulas de inclusión-exclusión:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cup B \cup C \cup D) =$
$P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$
$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D)$
$+ P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D)$
$- P(A \cap B \cap C \cap D)$

b) Qué pasa si cada una de cuatro mujeres elige a su esposo como pareja de baile?
El evento A_i={la mujer i elige a su esposo}, i=1,2,3,4.
Primera pregunta: Probabilidad de que suceda A_i. Por ejemplo, calculamos $P(A_1)$=#casos favorables/#casos totales.
Casos favorables: su esposo (1)
Casos totales: todos los hombres (4) (equiprobables). => $P(A_1)$=¼.

Segunda pregunta: La probabilidad de que al menos una elija a su esposo es la probabilidad de la unión de A_i.

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =$
$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$
$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4)$
$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$
$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

Ya conocemos $P(A_i) = 1/4$. Calculamos la proba de la intersección de a 2 eventos:

$P(A_1 \cap A_2) = \#casos\, favorables/\#casos\, totales = 1/12$

Único caso favorable: 1 va con su esposo, 2 va con su esposo.
Casos totales: pares de parejas para 1 y 2, hay 4.3=12.

Otra forma: Primero elijo al esposo de 1 de entre los 4 posibles: probabilidad ¼. Luego elijo al esposo de 2 de entre los 3 que quedan: probabilidad ⅓. La probabilidad de A_1 y A_2 es el producto de estas dos.

Otra forma: Con probabilidad condicional.

$P(A_2|A_1) = P(A_1 \cap A_2)/P(A_1) \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1).P(A_1)\ (P(A_1) \neq 0)$

$P(A_2|A_1)$ =la probabilidad de que 2 elija a su esposo sabiendo que 1 ya eligió al suyo. Calculo como #casos favorables/#casos totales.

Caso favorable: 1 (2 elige a su esposo)

Casos totales: 3 (los 3 que quedan, 1 ya se llevó a su esposo. Acá redefiní el espacio muestral porque saco fuera de consideración al esposo de 1, paso de 4 esposos a sólo 3)

$P(A_2|A_1)$ =1/3

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1).P(A_1) = 1/3.1/4 = 1/12.$

Lo que podemos pensar es que $P(A_i \cap A_j) = 1/12$ para todos i,j. Hacemos un ejemplo para la proba de la intersección de a 3, y valdrá lo mismo para las demás.

Condicionando: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2)\, P(A_1 \cap A_2) = 1/24.$

$P(A_3|A_1 \cap A_2)$ = ½ porque es la probabilidad de elegir al esposo de 3 de entre los 2 hombres que quedan (ya se fueron los esposos de 1 y 2, quedan sólo los de 3 y 4).

Y para la intersección de a 4:

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)\, P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/24.$

$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ = 1 porque sólo queda disponible el esposo de 4.

Al final, reemplazo en la fórmula para $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ y queda ⅝.

Ej. 1.12

12. Se lanzan 3 dados. Si ninguno muestra la misma cara, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido exactamente un as?

Espacio muestral: E={ (x,y,z) : x,y,z =1,..., 6} ----> $\#E_1=6^3=216$.

E_1 = “resultado para dado 1, dado 2, dado 3”

(no estoy considerando que los dados fueron distintos)

Espacio muestral 2: { {x,y,z} : x,y,z =1,..., 6} ----> $\#E_2$=(6 3)=20.

En E_2 sólo tomo tres resultados de los seis posibles, sin orden

E_2 = “cuáles de los 6 resultados de un dado salieron en estas tiradas”

Espacio muestral 3: { (x,y,z) : x,y,z =1,..., 6 } ----> $\#E_3$=120=6.5.4=6!/3!.

E_3 = “tiradas ordenadas (resultados para dado 1, dado 2, dado 3) donde los tres resultados son distintos”

Cada uno de estos es equiprobable.
A={salió exactamente un 1}.
A_i={salió un 1 en el dado i-ésimo}, i=1,2,3. Observo que $A_i \cap A_j$ es vacío si i no es igual a j.

Si trabajamos con E_3: Elijo un dado para que salga 1, sale otro de los 5 números en otro dado, y 4 en el tercero: #casos favorables=3(1.5.4)=60.
Casos totales: $\#E_2$=120.
P(A)=#casos fav./#casos tot.=60/120=½.
Pensando en términos de tiradas:
$P(A_1)$=#casos favorables/#casos totales =⅙.
#casos fav.=tengo un 1 en el primer dado, y cualquier cosa en los demás (sin repetir) = 1.5.4=20.
$P(A_2) = P(A_3)$ = ⅙.
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1/2.$

Plantearlo también en términos de espacios muestrales E_1 y E_2 (para usar E_1 hay que considerar un evento C={no se repite ninguna tirada} y hacer proba condicional).

Ej. 1.14

14. Una caja contiene tres monedas, una de las cuales tiene dos caras, otra tiene dos cruces (o cecas) y la tercera es una moneda normal. Se extrae de la caja una moneda al azar y se arroja, obteniéndose una cara.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de haber elegido la moneda con dos caras?

    b) Si se arroja nuevamente la moneda extraída, ¿cuál es la probabilidad de obtener otra vez cara?

Moneda 1: la de dos caras
Moneda 2: la de dos cecas
Moneda 3: la de una y una
A_i={elijo la moneda i}, i=1,2,3. $P(A_i)$=⅓ porque se elige al azar.
C_1={sale cara en la tirada que se hace habiendo sacado una moneda extra}.
C_2={sale cara si tiro la moneda extraída de vuelta}.

a) $P(A_1|C_1)$=⅔.
b) $P(C_2|C_1)$=?

Si veo una cara con cara (sucede C_1) entonces no puede haber pasado A_2 (no puedo haber elegido la moneda con dos cecas). El lado de la moneda que puedo estar viendo después de la tirada es:

1. La cara 1 de la moneda 1.
2. La cara 2 de la moneda 1.
3. La cara 1 de la moneda 3.

Dos de estos casos me llevan a que salió la moneda 1, por eso $P(A_1)=⅔$.

$P(A_1|C_1)=?$
$P(A_1|C_1) = P(A_1 \cap C_1)/P(C_1)$
$P(A_1 \cap C_1) = 1/3$(lo calculamos abajo).

$P(C_1)$ = ? => Probabilidad total.
Tomo partición: A_1, A_2, A_3.
$P(A_1 \cap C_1) = P(A_1|C_1)P(C_1) = P(C_1|A_1)\, P(A_1)$
Y $P(C_1) = P(A_1 \cap C_1) + P(A_2 \cap C_1) + P(A_3 \cap C_1)$
$= P(C_1|A_1)\, P(A_1) + P(C_1|A_2)\, P(A_2) + P(C_1|A_3)\, P(A_3)$
$= 1.\ 1/3 + 0.\ 1/3 + 1/2. 1/3 = 1/2$
(de las 6 caras disponibles, 3 caras y 3 cecas, sale 1. Es cara con proba ½, por eso, $P(C_1)=½$).
$P(A_1|C_1) = 1/3 \,/\, 1/2 = 2/3.$

b) $P(C_2|C_1) = P(C_2 \cap C_1)/P(C_1)$
Conozco $P(C_1)$.
Usamos proba total para $C_2 \cap C_1$ con la misma partición.
$P(C_2 \cap C_1 \cap A_1) = P(A_1|C_2 \cap C_1)P(C_2 \cap C_1) = P(C_2 \cap C_1|A_1)\, P(A_1)$

$P(C_2 \cap C_1) = P(C_2 \cap C_1 \cap A_1) + P(C_2 \cap C_1 \cap A_2) + P(C_2 \cap C_1 \cap A_3)$

$= P(C_2 \cap C_1|A_1)\, P(A_1)+P(C_2 \cap C_1|A_2)\, P(A_2)+P(C_2 \cap C_1|A_3)\, P(A_3)$
$= 1.\ 1/3 + 0. 1/3 + 1/2. 1/2 . 1/3 = 5/12.$

$P(C_2 \cap C_1|A_3) = P(C_2|A_3).\ P(C_1|A_3)$
O sea, una vez que fijé una moneda, las tiradas de esa moneda son independientes.

Finalmente,
$P(C_2|C_1) = P(C_2 \cap C_1)/P(C_1) = 5/12 \,/\, 1/2 = 5/6.$

Ej. 1.16

16. Hay tres cajas A, B y C con 20 piezas cada una, conteniendo 20, 15 y 10 piezas buenas respectivamente. La probabilidad de elegir la caja A es igual a la de elegir la caja B, y la de elegir la caja C es igual a la suma de esas dos probabilidades. Eligiendo al azar una caja se extraen con reposición dos piezas que resultan ser buenas. Hallar la probabilidad condicional de que provengan de la caja A.

En este problema:

Primero, elegimos una caja.
Luego, extraemos una pieza de esa caja. Vemos si es buena y la reponemos.
Sacamos una segunda, vemos si es buena.

Sean los eventos A, B, C, "se elige a la caja A, B o C para las extracciones, respectivamente", y B_i "se elige una pieza buena de la caja en la extracción i-ésima, i=1 o 2". Queremos hallar $P(A|B_1 \cap B_2)$.

Sabemos que P(A)+P(B)+P(C)=1 (porque sí o sí elijo una de las cajas; A, B y C son una partición), y P(A)=P(B)=½ P(C). Resolviendo esto queda que P(A)=P(B)=0,25; P(C)=0,5.

Para cada una de las cajas podemos calcular la probabilidad de extraer una pieza buena, pensando en casos favorables/casos totales. Entonces,

$P(B_i|A) = 20/20 = 1$ (proba de sacar una pieza buena de la caja A)

$P(B_i|B) = 15/20 = 0,75$

$P(B_i|C) = 10/20 = 0,5$

(son probas condicionales en el lenguaje de nuestros eventos porque yo ya estoy asumiendo que sé de qué caja estoy sacando las piezas buenas)
Además, como las extracciones son con reposición, son independientes una de la otra. Es decir, $P(B_1 \cap B_2|A) = P(B_1|A)\, P(B_2|A)$.

Queremos calcular:

$P(A|B_1 \cap B_2) = P(A \cap B_1 \cap B_2) / P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2|A)\, P(A) / P(B_1 \cap B_2)$

De estas, ya conocemos todas las de arriba. Podemos calcular la probabilidad de la intersección de B_1 y B_2 usando la fórmula de probabilidad total:

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2|A)\, P(A) + P(B_1 \cap B_2|B)\, P(B) + P(B_1 \cap B_2|C)\, P(C)$

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1|A)\, P(B_2|A) P(A) + P(B_1|B)\, P(B_2|B)\, P(B) + P(B_1|C)\, P(B_2|C)\, P(C)$

$P(B_1 \cap B_2) = 1 \,.\, 1 .\, 0,25 + 0,75 \,.\, 0,75 \,.\, 0,25 + 0,5 \,.\, 0,5 \,.\, 0,5 = 0,516.$

$\Rightarrow P(A|B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2|A)\, P(A) / P(B_1 \cap B_2) = 1.1.0,25 / 0,516 = 0,485.$

Ej. 1.18

18. Se tienen $(n+1)$ urnas numeradas $0, 1, \ldots, n$. La urna i contiene i bolitas blancas y $(n-i)$ bolitas negras. Se elige al azar una urna y de ella se extrae una bolita al azar. Sugerencua

    a) Calcular la probabilidad de que la bolita extraída sea blanca.

    b) Si la bolita extraída es blanca, calcular la probabilidad de que provenga de la urna i, $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Sugerencia: usar que $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.

Defino los eventos:

U_i = elijo la urna i-ésima para extraer la bolita, i=0,1, …, n.

B = sale una bolita blanca.

En a) me preguntan la probabilidad de que suceda B. En b) me preguntan la probabilidad de U_i dado B (que salió de la urna i-ésima dado que salió blanca). Los sucesos U_i constituyen una partición del espacio muestral (porque seguro elegí una urna para sacar una bolita, y son disjuntos porque la bolita vino de una urna o de otra).
Usamos la fórmula de probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=0}^{n} P(B \cap U_i) = \sum_{i=0}^{n} P(B|U_i)\, P(U_i)$$

Condiciono de esta forma porque las probas en la sumatoria son fáciles de hallar (condicionar al revés no me llevaría a nada porque no conozco P(B)):

$P(U_i)$ es la probabilidad de elegir una urna dada. Como esta elección es al azar, y hay n+1 urnas, $P(U_i)=1/(n+1)$

$P(B|U_i)$ es la probabilidad de elegir una bolita blanca de la urna i-ésima. Esta urna tiene n bolitas en total, de las cuales i son blancas. O sea, $P(B|U_i)=i/n$ (casos favorables/casos totales).

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{i=0}^{n} P(B|U_i)\, P(U_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = 1/2$$

En estos pasos reemplacé con lo que calculamos antes y saqué para afuera de la sumatoria el 1/n(n+1) que es igual para todos los términos y no depende de i. Después, el primer término de la sumatoria es i=0, y suma 0, por lo que lo puedo ignorar, para empezar la sumatoria en 1 y usar la sugerencia. Queda que P(B)=½.

Eso tiene sentido si pensamos que de todas las n(n+1) que había, la mitad eran blancas y la mitad eran negras. Estaban distribuidas en urnas, pero el resultado del experimento no cambia si yo por ejemplo las distribuyo en una mesa, dibujo una marca alrededor de grupitos de a n y elijo una bolita de todas. O me olvido de las urnas y elijo una bolita de entre n(n+1).

Una cosa distinta es sabiendo que salió blanca ver de qué urna vino, porque había diferente proporción de blancas en cada urna, que es la segunda parte del ejercicio. Entonces:

$$P(U_i|B) = P(U_i \cap B) \,/\, P(B)$$

Ya conocemos P(B), y condicionó "de la otra forma" para sacar la probabilidad de la intersección:

$$P(U_i|B) = P(U_i \cap B) \,/\, P(B) = P(B|U_i)\, P(U_i) \,/\, P(B)$$

Reemplazando con lo anterior ($P(B|U_i) = i/n$, $P(U_i) = 1/(n+1)$, $P(B) = ½$), queda:

$$P(U_i|B) = \frac{i}{n}\,\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{1/2} = \frac{2\,i}{n\,(n+1)}.$$

Ej. 1.22

22. (∗) Sean A y B dos eventos de un espacio muestral Ω.

   a) Probar que el suceso A es independiente de cualquier suceso B si y sólo si P(A)=0 ó P(A)=1.

   b) Probar que si A ⊂ B y A y B son independientes, entonces P(A)=0 ó P(B)=1.

Para probar un si y sólo si probamos las dos implicaciones

1) Asumimos que A es independiente de cualquier otro evento B en el espacio muestral, y probamos que A tiene probabilidad 0 o 1.
   La idea de esto es que si es independiente de otros eventos, no puede haber otro evento del que "dependa", y la única forma de que esto suceda es que o pase siempre, sin importar nada más, o que no pase nunca.

   Entonces, como A es independiente de cualquier otro evento, podemos probar qué pasa si lo comparamos con otros. Los únicos eventos que sabemos que están en el espacio muestral son el vacío, el espacio completo o A mismo. Entonces, probemos qué pasa si consideramos que A es independiente de sí mismo:

   $P(A \cap A) = P(A).P(A)$ porque A es independiente de sí mismo.
   $P(A \cap A) = P(A)$ porque $A \cap A = A$.
   Entonces, $P(A) = P(A)^2$. Si $P(A) = x$, queda $x = x^2$ y las únicas soluciones son $x = 0, 1$. Entonces, $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$.

2) Ahora probamos la vuelta. Suponemos que P(A)=0 o P(A)=1 y vemos que A es independiente de cualquier otro evento B. Sea, entonces, un evento B.
   Primer caso: P(A) = 0. Entonces, como $A \cap B \subseteq A$, por propiedades de la probabilidad vale que

   $$0 \le P(A \cap B) \le P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.$$

   Pero $P(A).P(B) = 0.\ P(B) = 0$, sin importar quién sea B o cuánto valga P(B).
   Entonces, $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$, y por definición, A y B son independientes.

Segundo caso: P(A) = 1. Entonces, $P(A^c)=1-P(A)=0$. Con el mismo argumento de antes, A^c resulta ser independiente de cualquier B, y uso la propiedad de que A y B son independientes si y sólo si A^c y B lo son.

Si no queremos usar esa propiedad, A y A^c son una partición del espacio muestral. Entonces, por proba total:

$$P(B) = P(B \cap A)P(A) + P(B \cap A^c)P(A^c)$$

Pero P(A)=1 y $P(A^c)=1$, entonces

$$P(B) = P(B \cap A) = P(A \cap B)$$

La independencia sale de considerar que P(A)=1 y entonces P(B)=1.P(B)=1.P(A).

(Ojo que decir P(A)=0 no es lo mismo que decir que A es el evento vacío, y P(A)=1 no es lo mismo que decir que es todo el espacio muestral. En algún sentido A es casi nada o casi todo, lo veremos más adelante cuando veamos variables aleatorias continuas)

Para la segunda parte del ejercicio, observamos que $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$, porque todos los elementos de A son elementos de B también. Con eso, como A y B son independientes:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)$$

$\Rightarrow P(A) = P(A).P(B) \Rightarrow P(A)(1 - P(B)) = 0$ (o divido por P(A) si asumo que no es 0 y veo ese caso aparte).

$\Rightarrow P(A) = 0 \ o \ P(B) = 1$son las únicas soluciones, listo.