1. (Esquema de Polya simplificado) Supongamos que tenemos una urna con R=7 bolas rojas y B=5 bolas blancas. De dicha urna extraemos una bola y miramos su color, devolvemos la bola extraída junto con C=2 bolas más del mismo color y nuevamente extraemos una bola. Repetimos el experimento una vez más (extraemos una bola, miramos su color, devolvemos la bola extraída junto con C=2 bolas más del mismo color y nuevamente extraemos una bola). Sean los eventos R_i :"la i-ésima bola extraída es roja" con $1 \leq i \leq 3$. Calcular:

   i) $P(R_1 \cap R_2)$,
   ii) $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$,
   iii) $P(R_2 \cap R_3)$,
   iv) $P(R_2)$. ¿Se anima a conjeturar el valor de $P(R_3)$?
   v) $P(R_1|R_2)$.
   vi) ¿Son los eventos R_1, R_2, R_3 independientes?
   vii) Construir una rutina en R para simular $P(R_3)$.

   Plantear (queda de ejercicio resolver) las siguientes dos probabilidades:

   viii) Exactamente una de las tres bolillas extraídas es roja,
   ix) Al menos una de las tres bolillas extraídas es roja.

2. (Test bioquímico para detectar enfermedades) Se sabe que uno de cada 100 adultos son diabéticos. Para detectar esta enfermedad se usa un test que da resultado positivo en el 99,5% de los casos de las personas enfermas, en tanto que da positivo sólo en el 0,7% de los casos de las personas que no tienen diabetes (¿cómo sería un test perfecto?). Si tomamos un adulto al azar, le realizamos el test y da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que padezca diabetes? ¿Qué pasaría si consiguiéramos un test bioquímico tal que las probabilidades anteriores fueran 0.999 y 0.001 respectivamente?

Sean A y B eventos tal que $P(B)>0$

Def

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \underset{\uparrow}{=} \frac{\frac{\# A\cap B}{\# \Omega}}{\frac{\# B}{\# \Omega}} = \frac{\# A\cap B}{\# B}$$

Esp equip finito

<u>Regla del producto para dos eventos</u>

Si $P(B)>0$ $\quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B) = P(A|B)P(B)}$

Si $P(A)>0$ $\quad P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B) = P(B|A)P(A)}$

<u>Regla del producto para tres eventos</u>

$$\left.\begin{aligned} P(A\cap B\cap C) = \; & P(C|A\cap B)P(B|A)P(A) \\ & P(B|A\cap C)P(C|A)P(A) \\ & \vdots \end{aligned}\right\} \text{¿cuántos posibilidades hay?}$$

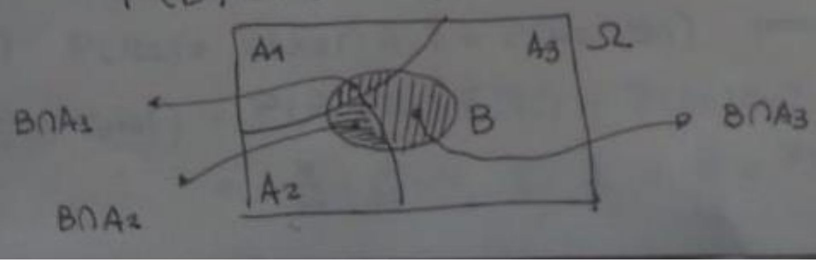
Vamos a usar todo el tiempo que si:

$A_1 \quad A_2 \quad A_3$ forman una partición de Ω entonces

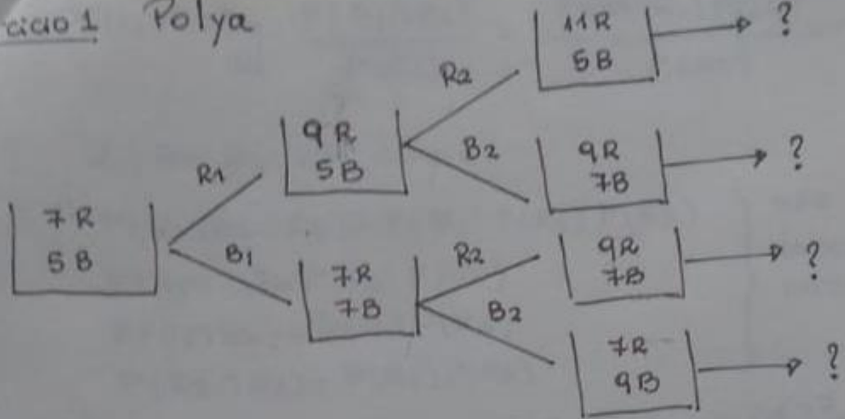
$B = (B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3)$ y la unión es disjunta

(vale en realidad para cualquier partición de cualquier tamaño). Luego

$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3)$$



...cicio 1 Polya



i) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_2 | R_1)\, P(R_1)$ por regla del producto

$$= \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{12} = \frac{3}{8}$$

ii) $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_3 | R_1 \cap R_2)\, P(R_2 | R_1)\, P(R_1)$

$$= \frac{11}{16} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{3}{8} = \frac{297}{1792}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 11R \\ 5B \end{matrix}}$$

iii) $P(R_2 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) =$

consideremos una partición dada por $R_1, R_1^c = B_1$

$\Omega = R_1 \uplus B_1$ $\quad$ • significa disjuntos

$$A = \Omega \cap A = (R_1 \cup B_1) \cap A = (R_1 \cap A) \uplus (B_1 \cap A)$$

$$= P(R_3 | R_2 \cap R_1)\, P(R_2 | R_1)\, P(R_1) +$$

$$+ P(R_3 | R_2 \cap B_1)\, P(R_2 | B_1)\, P(B_1)$$

terminar como en ii)

IV) $P(R_2) = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap B_1)$ como antes

(TPTotal) $= P(R_2 | R_1)\, P(R_1) + P(R_2 | B_1)\, P(B_1)$

$$= \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{12} + \frac{7}{14} \cdot \frac{5}{12} = \frac{7}{12} = P(R_1) \; !!!$$

$$P(R_1 | R_2) \underset{\text{def}}{=} \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_2 | R_1)\, P(R_1)}{P(R_2)} = \frac{9}{14}$$

VI) R_1, R_2, R_3 son indep si

$$\left.\begin{array}{l} P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\,P(R_2)\,P(R_3) \\ P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\,P(R_2) \\ P(R_1 \cap R_3) = P(R_1)\,P(R_3) \\ P(R_2 \cap R_3) = P(R_2)\,P(R_3) \end{array}\right\}$$

ojo deben satisfacerse los 4 !!

pero $P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{8}$ y $P(R_1)P(R_2) = \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}$

Luego $P(R_1 \cap R_2) \neq P(R_1)\,P(R_2)$

$\therefore$ No son independientes.

VII) $(R_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap R_3)$

Como la unión es disjunta entonces

$P(R_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$

$= P(B_3 | R_1 \cap B_2)\, P(B_2 | R_1)\, P(R_1) + \dots$ seguir

VIII) P("al menos una es roja") = son muchos casos

$= 1 -$ P("ninguna es roja") $=$

$= 1 - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 1 - P(B_3 | B_1 \cap B_2)\, P(B_2 | B_1)\, P(B_1)$

ciclo 2

D: "un adulto es diabético"

P(D) = 0,01

+ : " el test da resultado positivo"

− : " negativo"

$P(+|D) = 0.995 \Rightarrow P(-|D) = 1-0.995 = 0.005$

$P(+|D^c) = 0.007$

$$P(D|+) = \frac{P(D\cap +)}{P(+)} = \frac{P(+|D)\,P(D)}{P(+|D)\,P(D) + P(+|D^c)\,P(D^c)}$$

$$= \frac{0.995 \cdot 0.01}{0.995 \cdot 0.01 + 0,007 \cdot 0.99} = 0,589455$$

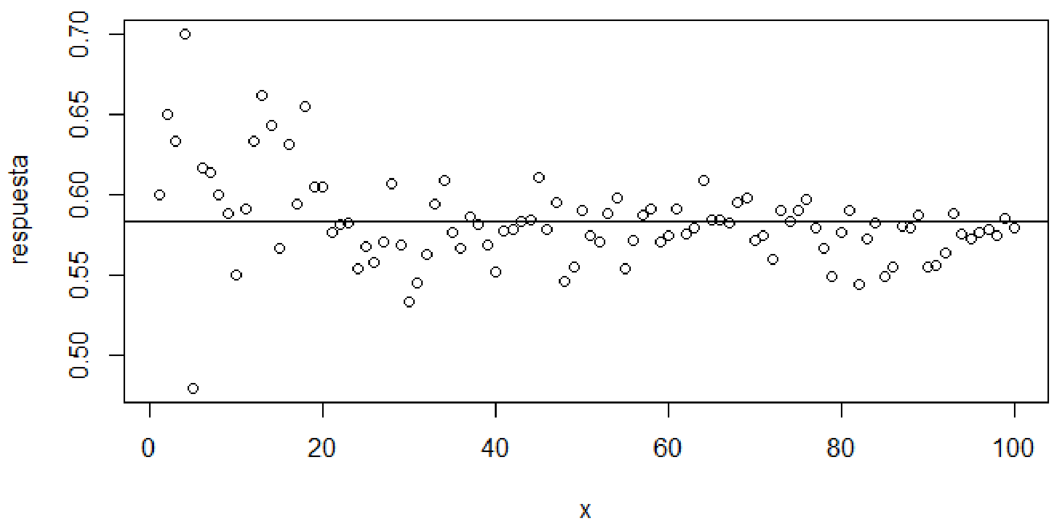
Aprox 60 % de las veces que da + la persona está enferma. Qué mal !!

Si $P(+|D) = 0.999$
$P(+|D^c) = 0.001$ } Mejoramos el test

$$P(D|+) = \frac{0.999 \cdot 0.01}{0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 0.99} = 0.9098$$

Aprox 90% de las veces que da + la persona es diabética.

```
rm(list=ls(all=TRUE))

# Simular la probabilidad de P("sale roja en la tercera extracción")
# para el esquema de Polya simplificado

juego<-function()
{
  urna1 <- c(1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0)  #roja=1(éxito) blanca=0
  bolita1 <- sample(urna1,1)
  if (bolita1==1)
  {urna2<-c(urna1,rep(1,2))}else{urna2<-c(urna1,rep(0,2))}
  bolita2 <- sample(urna2,1)
  if (bolita2==1)
  {urna3<-c(urna2,rep(1,2))}else{urna3<-c(urna2,rep(0,2))}
  bolita3 <- sample(urna3,1)
  return(bolita3)
}

juego()
mean(replicate(10,juego()))

set.seed(7)
mean(replicate(10000,juego()))

# la proba es 7/12

juego<-function(R,B,C)
{
  urna1 <- c(rep(1,R),rep(0,B))  #roja=1(éxito) blanca=0
  bolita1 <- sample(urna1,1)
  if (bolita1==1)
  {urna2<-c(urna1,rep(1,C))}else{urna2<-c(urna1,rep(0,C))}
  bolita2 <- sample(urna2,1)
  if (bolita2==1)
  {urna3<-c(urna2,rep(1,C))}else{urna3<-c(urna2,rep(0,C))}
  bolita3 <- sample(urna3,1)
  return(bolita3)
}

set.seed(7)
mean(replicate(10000,juego(7,5,2)))

mean(replicate(10000,juego(7,5,3))) # cambiamos C, R o B
mean(replicate(10000,juego(9,3,4)))

set.seed(2)
x<-1:100
respuesta<-NA
for (i in x)
{
  respuesta[i] <- mean(replicate(i*10,juego(7,5,2)))
}
plot(x,respuesta)
abline(h=7/12)
```



respuesta
0.50
0.55
0.60
0.65
0.70
0
20
40
60
80
100
x