Clase práctica - 28/5

1. Sean $X_1 \dots X_n$ v.a. con distribución $U[0,1]$ independientes. Hallar la densidad de

$$\begin{aligned} T &= \max(X_1, \dots, X_n) \\ U &= \min(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Resolución

$$\begin{aligned} F_T(t) = P(T \le t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \le t) &= P(X_1 \le t, X_2 \le t, \dots, X_n \le t) \\ &= P(X_1 \le t) \dots P(X_n \le t) \\ &= P(X_1 \le t)^n = F_{X_1}(t)^n \end{aligned}$$

$$f_T(t) = nF_{X_1}(t)^{n-1} f_{X_1}(t)$$

Como $f_{X_1}(t) = I_{[0,1]}(t)$,

$$f_T(t) = nF_{X_1}(t)^{n-1} I_{[0,1]}(t)$$

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ t \text{ si } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

$$f_T(t) = nt^{n-1} I_{[0,1]}(t)$$

Hallemos ahora la densidad de U

$$\begin{aligned} F_U(u) = P(U \le u) = P(\min(X_1, \dots, X_n) \le u) &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > u) \\ 1 - P(X_1 > u, \dots, X_n > u) &= 1 - P(X_1 > u) \dots P(X_n > u) \\ &= 1 - P(X_1 > u)^n = 1 - (1 - F_{X_1}(u))^n \end{aligned}$$

$$f_U(u) = n(1 - F_{X_1}(u))^{n-1} f_{X_1}(u)$$

$$f_U(u) = n(1-u)^{n-1} I_{[0,1]}(u)$$

2. Cinco amigos deciden reunirse a cenar en un restaurant y reservan una mesa para las 21 hs. La hora en que cada uno de ellos arriba al restaurant es una v.a uniforme entra leas 21 y las 22 hs y los tiempos de cada uno son independientes. Si ninguno llega antes de las 21:30, pierden la reserva. Hallar la probabilidad de que pierdan la reserva.

Resolución

X_i=tiempo (en horas) que se demora el i-ésimo amigo

$$X_i \sim U(0,1)$$

$$P(\text{pierdan la reserva}) = P(\min\{X_1, \dots X_5\} > 0.5) = P(U \le u)$$

donde $U = \min\{X_1, \ldots X_5\}$

$$= \int_{0.5}^{+\infty} f_U(u)du = \int_{0.5}^{1} 5(1-u)^4 du = -(1-u)^5|_{0.5}^{1} = 1/32.$$

También se puede hacer evaluando en la acumulada de U.

3. Dos amigas, Ana y Sofía, comparten un departamento que posee un teléfono fijo. La cantidad de llamadas al teléfono fijo que recibe Ana por semana es una v.a. con distribución $\mathcal{P}(2)$ y la cantidad de llamadas al teléfono fijo que recibe Sofía por semana es una v.a. con distribución $\mathcal{P}(1)$. La cantidad de llamadas que reciben ambas amigas son v.a. independientes.

   (a) Hallar la probabilidad de que en una semana se reciban más de 4 llamadas desde el teléfono fijo.

   (b) Si una determinada semana se reciben 2 llamadas, ¿Cuál es la probabilidad de que una sea para Ana y una para Sofía?

   Resolución

   a) Sea X = la cantidad de llamadas que recibe Ana en esa semana

   Y = la cantidad de llamadas que recibe Sofía en esa semana

   $X + Y$ = cantidad de llamadas que se reciben en el teléfono fijo.

   $X + Y \sim \mathcal{P}(3)$

   $P(X + Y > 4) = 1 - P(X + Y \leq 4) = 1 - ppois(4, 3) = 1 - 0.8153 = 0.18$

   b) Por ejercicio de la práctica 4 sabemos que

   La distribución de X condicional a $X + Y = k$ es $Bi\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

   La distribución de X condicional a $X + Y = 2$ es

$$X|X + Y = 2 \sim Bi\left(2, \frac{2}{3}\right)$$

$$Y|X + Y = 2 \sim Bi\left(2, \frac{1}{3}\right)$$

$$P(X = 1, Y = 1|X + Y = 2) = P(X = 1|X + Y = 2) = \binom{2}{1}\frac{2}{3}\frac{1}{3} = 0.67$$

   En R

$$dbinom(1, size = 1, prob = 2/3)$$

   Observar que X e Y no son independientes condicional a que $X + Y = k$

4. En cierta empresa de informática el 20% de las ventas se realizan al contado, el 30% con tarjeta de débito y el 50% restante con tarjeta de crédito en cuotas. Si se eligen 20 ventas al azar (como la cantidad de ventas es muy grande puede suponer que elegir con o sin reposición es cas¡ lo mismo), calcular la probabilidad de que:

   (a) 8 sean al contado, 1 sea con débito y 11 con crédito,

   (b) 4 sean al contado y 5 con débito,

   (c) 13 sean con crédito,

(d) 10 sean con débito o crédito.

Resolución

Es un experimento multinomial

$X_1 =$ la cantidad de ventas al contado

$X_2 =$ la cantidad de ventas con débito

$X_3 =$ la cantidad de ventas con crédito

$$(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{M}(20, 0.2, 0.3, 0.5)$$

$$P(X_1 = 8, X_2 = 1, X_3 = 11) = \frac{20!}{8!1!11!} 0.2^8 0.3^1 0.5^{11} = 0.00057$$

En R

$$dmultinom(c(8, 1, 11), size = 20, prob = c(0.2, 0.3, 0.4)$$

b)

$$P(X_1 = 4, X_2 = 5, X_3 = 11) = 0.04017$$

c)

$$X_3 \sim Bi(20, 0.5)$$

$$P(X_3 = 13) = dbinom(13, size = 20, prob = 0.5) = 0.074$$

5. Supongamos que las notas que saca un alumno en el primero y segundo parcial son v.a. X e Y con media 6 y 7 respectivamente y desvios 2 y 1.5 respectivamente. Supongamos además que la covarianza entre X e Y es 2.48.

   (a) ¿Cómo podría predecir la nota del segundo parcial antes de que comience el cuatrimestre?¿Cuál es su error cuadrático medio de predicción?

   (b) Hallar el mejor predictor lineal de Y basado en X para un alumno que sacó 8 en el primer parcial y su error cuadrático medio de predicción.

   a) El mejor predictor de la nota del segundo parcial con el criterio del ECM es la esperanza, que es 7.

   El ECM de esta predicción es $V(Y) = 1.5^5 = 2.25$

   b) Dadas dos v.a X e Y, el mejor predictor lineal de Y basado en X es

$$\hat{Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(X - \mu_X) + \mu_Y$$

   donde

   $\sigma_{XY} = \text{cov}(X, Y)$

   Entonces, nos queda

$$\hat{Y} = \frac{2.48}{4}(X - 6) + 7$$

$$\hat{Y} = \frac{2.48}{4}(8 - 6) + 7 = 8.24$$

$$ECM(\hat{Y}, Y) = \sigma_Y^2(1-\rho^2) = 1.5^2(1-0.83^2) = 0.3825$$

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} = \frac{2.48}{2 * 1.5} = 0.83$$