Clase Practica 1

Maite Angel

2022-03-29

Mini repaso

Objetivo: Quiero medir la frecuencia (probabilidad) con que ocurren ciertos resultados en mi experimento.

Ejemplos experimentos

- Tirar 5 dados y observar con qué frecuencia sacamos generala
- Sacar una carta de una baraja de cartas españolas y observar con qué frecuencia sale un número/palo.

Receta

Paso 0 Pienso en mi problema, ¿Cómo puedo representarlo? ¿Cuál es la probabilidad que quiero calcular? Diseño ejemplos donde ocurre y donde no ocurre.

Paso 1 Definir el universo compuesto solo por elementos relevantes a mi experimento describiendo todos mis posibles resultados (muestras). Es lo que llamamos ESPACIO MUESTRAL.

Ejemplos:

- Tirar 5 dados y observar con qué frecuencia sacamos generala

$S = \{(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) : d_i \in \{1, .., 6\} \forall i\}$

- Sacar una carta de una baraja de cartas españolas y observar con qué frecuencia sale un número/palo.

$S =$ {Cartas del mazo}

Paso 2 Quiero hablar de frecuencia/probabilidad (medir) de cualquier subconjunto de experimentos posibles (eventos). Voy a querer definir entonces una función de probabilidad en el espacio COHERENTE, es decir que cumpla los axiomas:

1. $P(E) \geq 0 \forall E$ evento
2. $P(S) = 1$
3. Si $E_1, ..., E_n$ eventos disjuntos dos a dos entonces $P(UE_n) = \sum P(E_n)$

Propiedades

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Espacios Equiprobables

Decimos que un espacio S es equiprobable si todos los elementos en él ocurren con la misma frecuencia, es decir tienen la misma probabilidad. En estos espacios tendremos definida la siguiente funcion de probilidad:

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} \forall\ E \subseteq S \text{ evento.}$$

Ejercicio 1

Empecemos con los clásicos: tengo 3 cajas numeradas y 4 bolitas blancas que se distribuyen todas al azar. Calcular:

Item 1. La probabilidad de que la caja 1 tenga exactamente 2 bolitas.

Item 2. La probabilidad de que la caja 2 no tenga bolitas

Item 3. La probabilidad de que todas las cajas tengan al menos 1 bolita.

Item 4. Bonus Track: Viene dios y agrega una cuarta caja al problema y 5 bolitas azules, luego se procede a realizar el experimento de distribuir AL AZAR TODAS las bolitas. Calcular la probabilidad de que a lo sumo solo quede una caja sin bolitas azules.

Solución

Receta

Paso 0: Arrancamos a dibujar y nos damos cuenta que el problema puede estar relacionado con los anagramas de la clase pasada, una permutación de BBBBCC representa un posible resultado del experimento.

Paso 1: S = {todas las posibles permutaciones de BBBBCC}

$\#S = \frac{6!}{4!2!}$

Paso 2: La repartición de las bolitas es al azar cualquier permutación de ellas tiene la misma chance de salir, luego estamos en vistas de un espacio equiprobable. Luegp usamos P como la definimos anteriormente.

Item 1

Defino mi evento E= " La caja 1 tiene exactamente 2 bolitas."

Analizemos cuales son los posibles casos que caen dentro de E

- BBCBCB es un posible caso
- BCCBBB NO es un posible caso

Es decir debo dejar fijo al principio BBC y el resto lo puedo permutar!!

Luego la cantidad de casos favorables es igual al número de permutaciones posibles del anagrama BBC.

$$P(E) = \frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{6!}{4!2!}}$$

Item 2

Defino mi evento E= " La caja 2 no tenga bolitas."

Analizemos cuales son los posibles casos que caen dentro de E

- BBBCCB es un posible caso
- BCBCBB NO es un posible caso

Es decir, debe contemplar las permutaciones posibles en solo dos cajas. La cantidad de casos favorables serán las permutaciones de BBBBC.

$$P(E) = \frac{\frac{5!}{4!}}{\frac{6!}{4!2!}}$$

Item 3

Defino mi evento E= "Todas las cajas tienen al menos 1 bolita."

Analizemos cuales son los posibles casos que caen dentro de E

- BBCBCB es un posible caso
- CBCBBB NO es un posible caso

Lo que debe pasar es que si o si debo tener 3 bolitas fijas, una en cada caja. Luego la cantidad de casos favorables serán las permutaciones de BCC.

$$P(E) = \frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{6!}{4!2!}}$$

Item 4 Bonus track

Me agregaron cajas y bolitas de distinto color, cambio el experimento. Ahora el espacio muestral debe contemplar la distribución en las cajas de las bolitas blancas y de las azules, puedo plantear entonces mi nuevo S como:

$S = \{$(X,Y): X una permutación de BBBBCCC ; Y una permutación de AAAAACCC$\}$

$\#S = \frac{7!}{4!3!} * \frac{8!}{5!3!}$

El experimento de ahora en mas es igual se distribuyen TODAS las bolitas AL AZAR. La probabilidad de cualquier elemento de S será $\frac{1}{\#permutacionesBBBBCCC} * \frac{1}{\#permutacionesAAAAACCC}$.

Ahora sí, igual que antes, defino mi evento E= "A lo sumo solo queda una caja sin bolitas azules."

Analizemos cuales son los posibles casos que caen dentro de E

- BBBBCCC y AACACACA es un posible caso, no hay cajas sin azules
- BBBBCCC y CAAACACA es un posible caso, solo hay una caja sin azules
- BBBBCCC y AAAAACCC NO es un posible caso

Es decir: 1. No me importa cómo se distribuyen las bolitas blancas. 2. Al evento lo puedo pensar como la unión de los eventos dijuntos E_1= “No hay cajas sin bolitas azules” y E_2= “Hay exactamente una caja sin bolitas azules”.

Luego para E_1 , como en el item anterior, solo considero, en el caso de las azules, las permutaciones de ACCC y para las blancas todas las posibilidades:

$$\#E_1 = \frac{7!}{4!3!} * \frac{4!}{3!}$$

Para E_2 lo que puedo hacer es elegir una caja para que quede sin azules (hay 4 formas de hacer esto) y luego contar las permutaciones de AACC

$$\#E_2 = \frac{7!}{4!3!} * 4 * \frac{4!}{2!2!}$$

Con todo esto:

$$P(E) = P(E_1 U_d E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{\#E_1}{\#S} + \frac{\#E_2}{\#S}$$

Ejercicio 2

Todos los años se celebran 2 seminarios de criptografía en Argentina. En esta edición se seleccionará un estudiante de Exactas para que asista a cada evento. Se postularon 2 personas del DM y 4 del DC. La selección será al azar y no podrá ir la misma persona a los 2 seminarios.

Ítem 1. Calcular la probabilidad de que al primer seminario va alguien del DM y al segundo alguien del DC

Item 2. Calcular la probabilidad de que exactamente 1 persona del DM sea seleccionada.

Item 3. Por la gran convocatoria se añaden 4 seminarios más. Calcular la probabilidad de que luego de exactamente el 3er seminario todos los estudiantes del DM ya hayan sido seleccionados.

Solución

S = {(x,y) con x,y cualquiera de los postulantes}

Item 1 E= “Al primer seminario va alguien del DM y al segundo alguien del DC.”

$P(E) = \frac{2}{6} * \frac{4}{5}$

Item 2 E= “Exactamente 1 persona del DM es seleccionada.”

Podemos pensarlo como unión disjunta de eventos o fue al primer seminario (como arriba) ó fue al segundo.
$P(E) = \frac{2}{6} * \frac{4}{5} + \frac{4}{6} * \frac{2}{5}$

Item 3 De vuelta cambia S, siempre que se alteren los elementos, mi experimento CAMBIA.

$S = \{(p_1, ..., p_6)$ con p_i cualquiera de los postulantes$\}$

Mi evento ahora es: E= " Luego de exactamente el 3er seminario todos los estudiantes del DM ya ´han sido seleccionados".

Tengo 2 postulantes del DM luego necesito que si o si ambos de ellos sean seleccionados en los primeros 3 seminarios y que uno sea seleccionado en el tercero (para cumplir el exactamente). Entonces puedo pensarlo como la unión disjunta de que se los elijan para el primero y el tercer seminarios o el segundo y tercer seminarios

$$P(E) = \frac{2}{6} * \frac{4}{5} * \frac{1}{4} + \frac{4}{6} * \frac{2}{5} * \frac{1}{4}$$

Probabilidad condicional

Sean A y B eventos tales que $P(B) > 0$, la probabilidad del evento A condicional a la ocurrencia del evento B es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Coloquialmente diremos que nos referimos a la probabilidad de A DADO el evento B.

Propiedades

Sea S un espacio muestral, A,B,C eventos tales que $P(B) > 0$,

1. $P(S|E) = 1$
2. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
3. $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$

Ejercicio 3

Dado un experimento se definen los eventos A, B y C. Se sabe que:

$$P(A) = 0.4 \; P(B) = 0.5 \; P(A \cap B) = 0.1$$

Item 1. Calcular la proba de que no ocurre A y ocurra B.

Item 2. Calcular la proba de que no ocurra A dado que ocurre B

(*) Sugerencia: Siempre que se pueda dibujar a través de diagramas de Venn para entenderlo mejor.

Solución

Item 1. $P(\text{no ocurra A y si B}) = P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.1 = 0.4$

Item 2. $P(\text{no ocurra A dado que si B}) = P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{0.1}{0.5} = 0.8$