Espacios equiprobables

Ximena Fernández

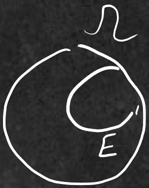
Probabilidades y Estadística (Computació n)

3 de septiembre de 2020

Receta: Espacio de probabilidad

Ingredientes:

- Experimento aleatorio
- Espacio muestral Ω asociado a un experimento
- Evento o suceso $E \subseteq \Omega$
- Medida de probabilidad
  $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \cancel{[0,1]}\ \mathbb{R}$
  $E \to P(E)$



Función de probabilidad

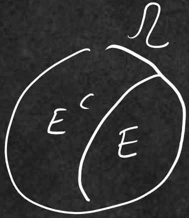
Axiomas de P:

- $P(\Omega) = 1$
- $P(E) \geq 0$
- $P(\bigcup E_i) = \sum P(E_i)$ si E_i son disjuntos.

$1 = \dot{P}(\Omega) = P(E \overset{D}{\cup} E) = P(E) + P(E^c)$

Propiedades de P:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(E) \leq 1$
- $P(E^c) = 1 - P(E)$
- $E \subseteq F$, entonces $P(E) \leq P(F)$
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$



Ejercicio 1: Kokomo

$\# J = 22$

$\# A = 25$

$\# K = 28$

$\# J \cap A = 11$ $\quad \# J \cap K = 5$

$\# A \cap K = 7$

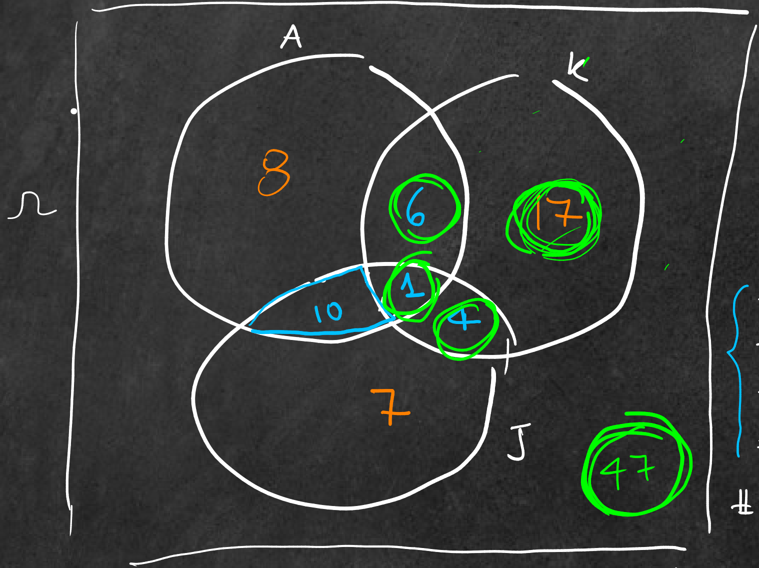
Se realiza una encuesta sobre los posibles destinos de sus vacaciones a un conjunto de personas en Florida (EEUU). El 22% de personas que elegirían como destino a Jamaica, el 25% de personas irían a Aruba y 28% elegirían Kokomo. De todas maneras, entre los encuestados había varios indecisos. Hubo 11% a los que les gusta Jamaica y Aruba, el 5% que tiene entre sus opciones a Jamaica y Kokomo y el 7% les gusta Aruba y Kokomo. Só lo el 1% tiene entre sus opciones a los tres destinos.

$\rightsquigarrow \# A \cap K \cap J = 1$

Calcular la probabilidad de que una persona de la población:

- le gusten los destinos Aruba y Jamaica. $P(A \cap J) = 0.11$
- no le gusten los destinos Aruba ni Jamaica. $P((A \cup J)^c) = 0.64$
- le guste alguno de los tres destinos. $P(A \cup J \cup K) = 0.53$
- no le guste ninguno de los tres destinos (o no tenga plata para vacaciones). $P((A \cup J \cup K)^c) = 0.47$
- le guste sólo Kokomo. $P(K - (A \cup J)) = 0.17$
- no le gusten los destinos Aruba ni Jamaica o le guste Kokomo. $P((A \cup J)^c \cup K) = 0.75$

Sugerencia: Se entiende mejor todo después de ver video



$\#\Omega = 100$

$\#J = 22$

$\#K = 28$

$\#A = 25$

$\#J \cap A = 11$

$\#J \cap K = 5$

$\#A \cap K = 7$

$\#A \cap K \cap J = 1$

$\#A \cup K \cup J = 53$

$E \subset \Omega$

$P(E) = \dfrac{\#E}{\#\Omega}$

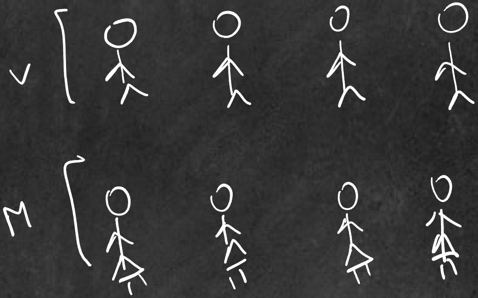
Espacios equiprobables

Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, entonces $P(e_i) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\#\Omega}$.

En general, si, $A \subset \Omega$, entonces $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$.

Ejercicio 2: Tinder vintage

En el programa de televisión 'Yo me quiero casar, y usted?', conducido por Roberto Galán, se presentan 4 varones y 4 mujeres. Cada varón elige en secreto a una mujer (ignorando lo que eligen los/las demás) y viceversa. Si un varón y una mujer se eligen mutuamente, se forma una pareja.

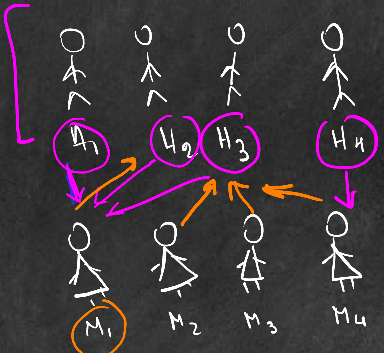


Definir un espacio muestral para este experimiento.

Si las elecciones fueran completamente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se formen 4 parejas? ¿Y que no se forme ninguna? Si voy yo y participo, cuál es la probabilidad de que me case?

4 posibilidades

$$\Omega = \Big\{ \big(\underset{H_1}{e_1}\ \underset{H_2}{e_2}\ \underset{H_3}{e_3}\ \underset{H_4}{e_4}\ \underset{M_1}{e_5}\ \underset{M_2}{e_6}\ \underset{M_3}{e_7}\ \underset{M_4}{e_8} \big) \quad e_i \in \{M_1, M_2, M_3, M_4\}\ 1 \leq i \leq 4, \quad e_j \in \{H_1, H_2, H_3, H_4\}\ 5 \leq j \leq 8 \Big\}$$



Ejemplo de elemento

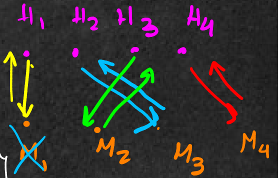
$$(M_1\ M_1\ M_1\ M_4,\ H_2\ H_3\ H_3\ H_3)$$

$$\#\Omega = 4^8$$

$E_1 = \{\text{se forman 4 parejas}\}$

4	3	2	1	1	1	1	1
H_1	H_2	H_3	H_4	M_1	M_2	M_3	M_4

$$P(E_1) = \frac{\# E_1}{\# \Omega} = \frac{4!}{48}$$



$E_2 = \{\text{no se forma ninguna pareja}\}$

$$P(E_2) = \frac{\# E_2}{\# \Omega} = 1 - P(\text{se forma alguna pareja})$$

????

ver último ejercicio

$E_3 = \{\text{me caso}\}$

$$P(E_3) = \frac{\# E_3}{\# \Omega} = \frac{4 \cdot 4^3 \cdot 4^3}{4^8}$$

$M_1 = \text{yo}$

		1		4			
H_1	H_2	H_3	H_4	M_1	M_2	M_3	M_4

Ejercicio 3: Ingame

Participamos de Ingame, un juego de preguntas y respuestas multiple choice que solía conducir Santiago Maratea (#influencer). En el juego hay 12 preguntas de 3 opciones cada una, y ganamos só lo si contestamos bien las 12. Perdemos si respondemos alguna pregunta mal. Tenemos un bot que participa adivinando las respuestas al azar.

$\underline{\ \ }_{P_1}\ \underline{\ \ }_{P_2}\ \underline{\ \ }_{P_3}\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }^{P_{12}}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pregunta} \\ a)\ B \\ b)\ M_2 \\ c)\ M_3\end{array}}$

- Definir un espacio muestral apropiado para este experimento y calcular las probabilidades de ganar y perder.

$$\Omega = \{ (r_1 r_2 r_3 \ \ldots \ r_{12}) \quad r_i \in \{B, M_1, M_2\} \}$$

$\underline{B}$ $\underline{B}$ $\underline{M_1}$ $\underline{M_1}$ $\underline{B}$ $\underline{B}$ $\underline{M_2}$ $\underline{B}$ $\underline{B}$ $\underline{B}$ $\underline{M_2}$ $\underline{M_1}$

$\uparrow$ perdí

$$\# \Omega = 3^{12}$$

$E_1 = \{ \text{gano} \}$ $\qquad$ $E_2 = \{ \text{perder} \}$

$$P(E) = \frac{\# E}{\# \Omega} = \frac{1}{3^{12}} \cong \text{muy pequeño}$$

$$P(E_2) = P(E_1^c) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{3^{12}}$$

- Si en vez de registrar si ganamos o perdimos, registramos si ganamos y, en caso de perder, el turno en el que perdimos. ¿Cuál es la probabilidad de perder en un turno divisible por 4? ¿Cuál es la probabilidad de llegar al menos hasta el turno 8?

$$\underset{1}{\underline{B}}\ \underset{2}{\underline{B}}\ \underset{3}{\underline{B}}\ \underset{4}{\underline{M_1\ M_2}}\ \underset{5}{\underline{?}}\ \underset{6}{\underline{?}}\ \underset{7}{\underline{?}}\ \underset{8}{\underline{?}}\ \underset{9}{\underline{?}}\ \underset{10}{\underline{?}}\ \underset{11}{\underline{?}}\ \underset{12}{\underline{?}}$$

$$E = \{\text{pierde en turno } 4\} = E_4 \overset{d}{\cup} E_8 \overset{d}{\cup} E_{12}$$

$$E_i = \{\text{pierde en turno } i\}$$

$$P(E) = P(E_4) + P(E_8) + P(E_{12})$$

$$= \frac{\# E_4}{\# \Omega} + \frac{\# E_8}{\# \Omega} + \frac{\# E_{12}}{\# \Omega} = \frac{2 \cdot 3^8}{3^{12}} + \frac{2 \cdot 3^4}{3^{12}} + \frac{2}{3^{12}}$$

Ejercicio 4: Cajas en bolas, digo, al revés

¿Cuál es la probabilidad de que al distribuir al azar 20 bolitas rojas indistinguibles y 11 bolitas verdes numeradas en 5 cajas distintas, haya a lo sumo una caja sin bolitas rojas?

$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5$

$\underbrace{V_1\, V_2\, V_3, \ldots, V_{11}}_{\text{11 bolitas verdes}} \qquad \underbrace{R\, R\, R\, R \ldots R}_{\text{20 bolitas rojas}}$

$E = \{\text{a lo sumo una caja sin rojas}\} \qquad P(E) = \dfrac{\#E}{\#\Omega}$

$$\#\Omega = \underbrace{\binom{24}{20}}_{\text{distribuyo rojas}} \cdot \underbrace{5^{11}}_{\text{distribuyo verdes}}$$

$$\# \text{Permutaciones de } \{ \underbrace{R\,R\,R \ldots R}_{20 \text{ rojas}} \; \underbrace{|\;|\;|\;|}_{4 \text{ divisores de cajas}} \} = \frac{(20+4)!}{20!\,4!} = \binom{24}{20}$$

$E = \{$a lo sumo una caja sin bolitas rojas$\}$

$= \{$todas las cajas tienen rojas$\} \,\dot{\cup}\, \{$una caja exact no tiene rojas$\}$

Idea: pongo 1R en cada caja

$$\#E = \frac{(15+4)!}{15!\,4!} \cdot 5^{11} + \underset{\text{elijo caja sin R}}{5} \cdot \frac{(16+3)!}{16!\,3!} \cdot 5^{11}$$

Challenge: I choo-choose you

Un grupo de 30 personas juega al amigo invisible: se colocan los nombres de cada integrante en papeles y se sortea a cada integrante un papel. ¿Cuál es la probabilidad de que nadie haya recibido el papel con su propio nombre?[1]

$\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ ... $\underline{\quad}$

P_1 P_2 P_{30}

→ Probá si te sale :)

→ Sino, ver video de simulaciones en R

[1] *Sugerencia:* $\boxed{\text{Simular en R.}}$ No confundir con disimular.
Un spoiler de la solución exacta se puede ver en video1 y en video2.