Consultas - práctica 4

Cronograma: práctica 4 hasta 15/10.

Ej. 4.2)

2. De un grupo de tres profesores, dos graduados y un alumno debe seleccionarse al azar una comisión de dos personas. Sean X el número de profesores e Y el número de graduados en la comisión.

   a) Hallar la función de probabilidad conjunta del par (X, Y) y las marginales de X e Y.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno no forme parte de la comisión?

3 profesores, 2 graduados, 1 alumno, X = número de profesores, Y = número de graduados.
El rango de X, Y es 0, 1, 2.

	X=0	X=1	X=2	Marginales de Y
Y=0	0	3 / (6 2) = 1/5	(3 2) / (6 2) = 1/5	2/5
Y=1	2/15	2/5	0	8/15
Y=2	1/15	0	0	1/15
Marginal de X	3/15 = 1/5	3/5	1/5	1

P(X=1, Y=0) = P("un profesor y cero graduados") = P("un alumno y un profesor")
= 1.3 / (6 2) = 3 / (6 2).
(6 2) = 6!/4!2! = 15.

Si yo digo probabilidad conjunta, $p_{X,Y}(k, l) = P(X=k, Y=l)$.
Si yo digo probabilidad marginal, $p_X(k) = P(X=k)$
$P(X = k) = P(X = k, Y = 0) + P(X = k, Y = 1), + P(X = k, Y = 2).$

b) "el alumno no forma parte de la comisión" ---> sólo hay profesores o graduados.
Casos: X=2, Y=0; X=1, Y=1; X=0, Y=2.
Podemos resumir estos casos diciendo que X+Y=2
P("el alumno no forma parte de la comisión") = P(X+Y=2) = P(X=2, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=0, Y=2) = $p_{XY}((2,0)) + p_{XY}((1,1)) + p_{XY}((0,2))$ = ⅕+⅖+1/15 = ⅔.
Observar que esto es lo mismo que calcular (5 2) / (6 2).

Ej. 4.3)

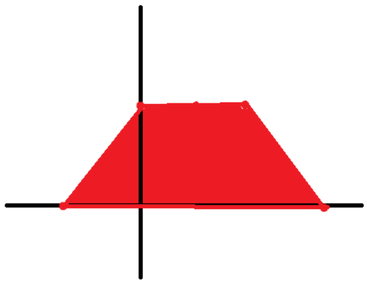
3. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional continua con distribución uniforme en el trapecio de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.

   a) Hallar la función de densidad conjunta de (X, Y).

   b) Calcular $P(Y \leq X)$.

   c) Hallar las funciones de densidad marginales f_X y f_Y.

a) Me dicen que (X,Y) es una v.a. uniforme en el trapecio.



Para describir los límites de esta región, elijo un valor de y y me fijo qué valores de x posibles tengo.

Las ecuaciones para las rectas de la izquierda y de la derecha son y=x+1 y= -x+2

Si no fórmula de la recta: y=mx+b, reemplazo con los puntos por donde pasan ((-1,0) y (0,1)) y resuelvo para m, b.

Entonces: y va entre 0 y 1 ⇒ $0 \leq y \leq 1$.

x va entre las rectas y=x+1 y y= -x+2. Tengo que despejar x de estas ecuaciones.

x = y - 1 (valor mínimo para x); x = -y + 2 (valor máximo para x).

$$\Rightarrow y - 1 \leq x \leq 2 - y$$

Rango de (X,Y) es la región dada por estas desigualdades, indicadora:

$1_{[0,1]}(y) \,.\, 1_{[y-1,\, 2-y]}(x)$

$f_{XY}(x, y) = k \,.\, 1_{[0,1]}(y) \,.\, 1_{[y-1,\, 2-y]}(x)$ ---> k es una constante porque (X,Y) es una v.a. uniforme. Para hallar su valor, integramos:

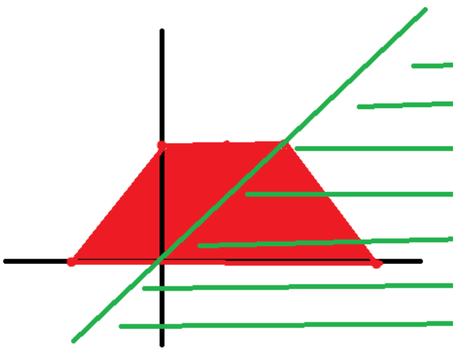
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k\ 1_{[0,1]}(y) \,.\, 1_{[y-1,\, 2-y]}(x)\, dx\, dy = k\int_0^1\int_{y-1}^{2-y} dx\, dy = k\int_0^1 (2-y) - (y-1)\, dy = k\int_0^1 3 - 2y\, dy$$

$= k\,(3y - y^2)|$

Queda 1=2k, o sea, k=½.

(observación: el área del trapecio es 2).

b) $P(Y \leq X)$. Primero, armo la región del espacio que corresponde a este evento.



La línea verde diagonal es y=x. Pedir el evento $Y \leq X$ es pedir que la coordenada y del punto (x,y) sea menor a la x, o sea, que el punto esté por debajo de la línea.

Describimos la región roja y verde (interseco el rango con este evento):
$\Rightarrow 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2 - y$

$P(Y \le X) = \int\int_{Y \le X} f_{XY}(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_y^{2-y} 1/2 \,.\, 1_{[0,1]}(y) \,.\, 1_{[y-1,\, 2-y]}(x)\, dx\, dy = 1/2 \int_0^1 \int_y^{2-y} dx\, dy$

Las indicadoras valen 1 en esta región de integración porque intersecamos el evento con el rango de (X, Y).

$1/2 \int_0^1 \int_y^{2-y} dx\, dy = 1/2 \int_0^1 (2 - y) - y\, dy = 1/2\, (2y - y^2)$ evaluado en 0 y 1 queda ½.

c) Marginal de Y: integrando $f_{XY}(x,y)$ respecto a x

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1/2\, 1_{[0,1]}(y) \,.\, 1_{[y-1,\, 2-y]}(x)\, dx = 1/2.\ 1_{[0,1]}(y) \int_{y-1}^{2-y} dx = 1/2.\ 1_{[0,1]}(y).\ ((2 - y) - (y - 1))$
$= 1/2.\ (3 - 2y)\, 1_{[0,1]}(y).$

Para calcular la marginal f_X hay que cambiar la descripción del rango de (X,Y):
I) $-1 \le x < 0,\ 0 \le y \le x + 1$
II) $0 \le x < 1,\ 0 \le y \le 1$
III) $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le -x + 2$

$f_{XY}(x, y) = 1/2\, (1_{[-1,0)}(x) \,.\, 1_{[0,x+1]}(y) + 1_{[0,1)}(x) \,.\, 1_{[0,1]}(y) + 1_{[1,2]}(x) \,.\, 1_{[0,-x+2]}(y))$

Integramos sobre y para obtener $f_X(x)$:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1/2\, (1_{[-1,0)}(x) \,.\, 1_{[0,x+1]}(y) + 1_{[0,1)}(x) \,.\, 1_{[0,1]}(y) + 1_{[1,2]}(x) \,.\, 1_{[0,-x+2]}(y))\, dy$
$= 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[-1,0)}(x) \,.\, 1_{[0,x+1]}(y)\, dy + 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,1)}(x) \,.\, 1_{[0,1]}(y)\, dy + 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[1,2]}(x) \,.\, 1_{[0,-x+2]}(y)\, dy$
$= 1/2\, 1_{[-1,0)}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,x+1]}(y)\, dy + 1/2\, 1_{[0,1)}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,1]}(y)\, dy + 1/2\, 1_{[1,2]}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,-x+2]}(y)\, dy$
$= 1/2\, 1_{[-1,0)}(x) \int_0^{x+1} dy + 1/2\, 1_{[0,1)}(x) \int_0^1 dy + 1/2\, 1_{[1,2]}(x) \int_0^{-x+2} dy$
$= 1/2\, 1_{[-1,0)}(x)\, (x + 1) + 1/2\, 1_{[0,1)}(x) \,.\, 1 + 1/2\, 1_{[1,2]}(x)\, (-x + 2)\, dy$
$= 1/2\, (\, (x + 1)\, 1_{[-1,0)}(x) + 1_{[0,1)}(x) + (-x + 2)\, 1/2\, 1_{[1,2]}(x)\,)$

4b,5,6,7a1, 7a3, 8.

Ej. 4.4)

4. Para iluminar sin interrupción una sala (de computadoras!) se cuenta con dos lamparitas; cuando se quema una, se coloca la otra. Sean X e Y los tiempos de vida de cada lamparita (en 10^3 horas) y supóngase que esos tiempos son independientes y tienen distribución $\mathcal{E}(1)$.

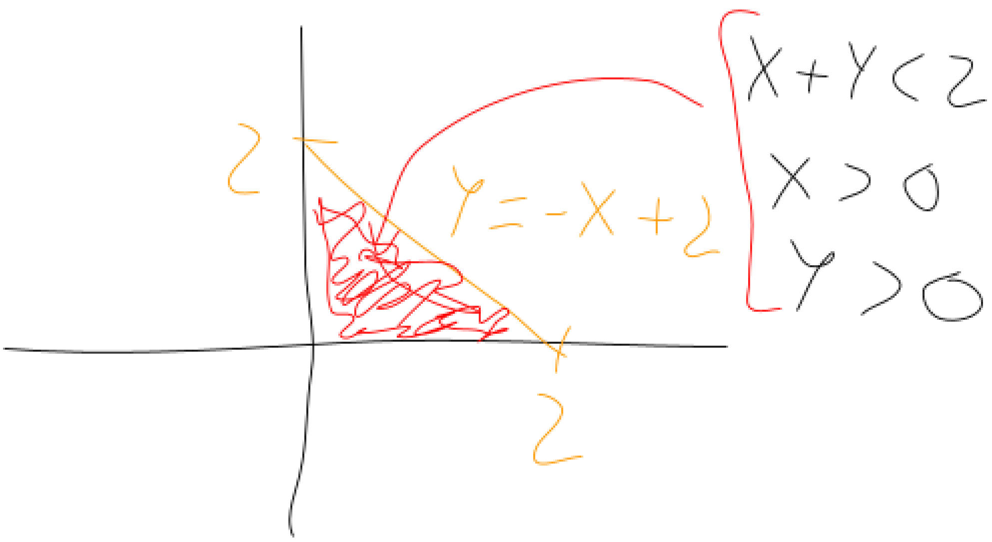
a) Hallar la densidad conjunta de (X, Y).

b) Hallar la probabilidad de que la sala permanezca iluminada al menos 2000 horas.

Nos dicen que podemos pensar que los tiempos de vida de las lamparitas son independientes uno del otro. Que la segunda lamparita sea puesta después de que se queme la primera no influye en eso. Entonces, la densidad conjunta de (X,Y) se puede obtener multiplicando las densidades para las v.a.s X e Y:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) = e^{-x} \cdot 1_{(0,+\infty)}(x) \cdot e^{-y} \cdot 1_{(0,+\infty)}(y) = e^{-(x+y)} \cdot 1_{(0,+\infty)}(x) \cdot 1_{(0,+\infty)}(y)$$

Que la sala permanezca iluminada al menos 2000 horas quiere decir que entre la lamparita 1 y la 2 el tiempo total de vida sea mayor o igual a 2 (medido en 10^3 horas). Es decir, estamos pidiendo $P(X + Y \geq 2)$. En este caso usamos el complemento $P(X + Y \geq 2) = 1 - P(X + Y < 2)$ y calculamos $P(X + Y < 2)$ para no tener que integrar hasta infinito. La región donde X+Y< 2, X>0, Y>0 es el triángulo de vértices (0,2), (2,0) y (0,0), y podemos describirlo por las desigualdades $0 < x < 2,\ 0 < y < 2 - x$.



$$P(X + Y < 2) = \int_0^2 \int_0^{2-x} e^{-(x+y)} \cdot 1_{(0,+\infty)}(x) \cdot 1_{(0,+\infty)}(y)\, dy\, dx = \int_0^2 e^{-x} \int_0^{2-x} e^{-y} dy\, dx$$

(porque las indicadoras valen 1 en el interior de esta región)

$$= \int_0^2 e^{-x} \int_0^{2-x} e^{-y} dy\, dx = \int_0^2 e^{-x} (-e^{-y})\Big|_0^{2-x} dx = \int_0^2 e^{-x} (-e^{-2+x} + 1)\, dx = \int_0^2 -e^{-2} + e^{-x} dx$$

$$= (-xe^{-2} - e^{-x})\Big|_0^2 = (-2e^{-2} - e^{-2}) + 1 = 1 - 3e^{-2}$$

Entonces, $P(X + Y \geq 2) = 1 - P(X + Y < 2) = 1 - (1 - 3e^{-2}) = 3e^{-2}$.

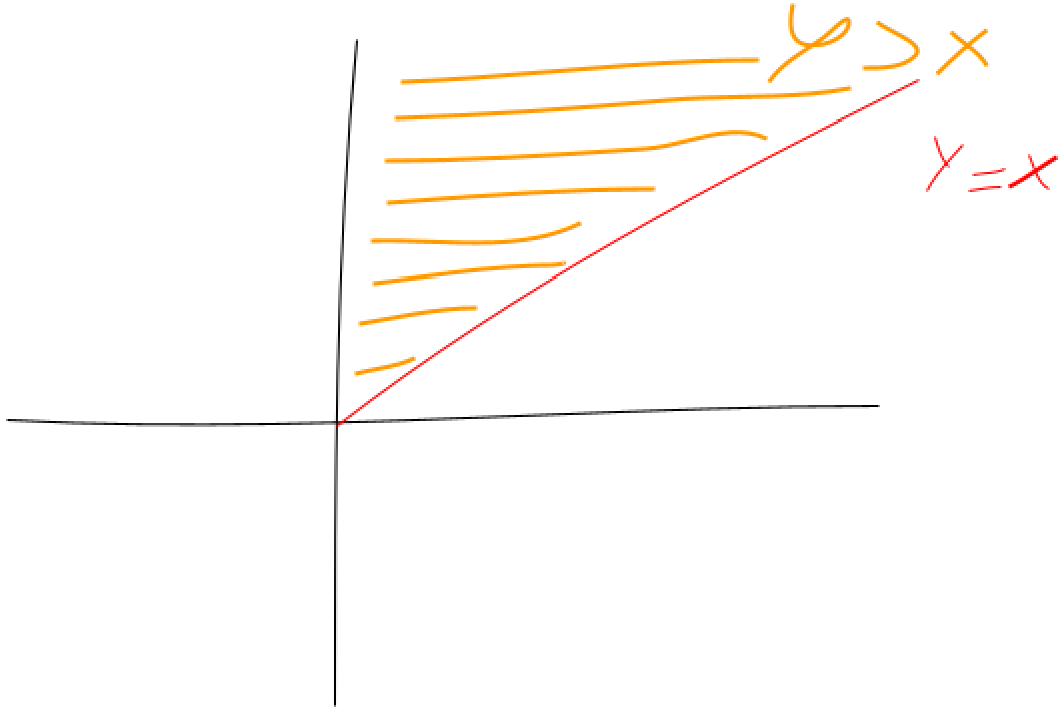
Ej. 4.5) y 4.6)

5. Dos servidores A y B procesan trabajos a medida que van llegando. El tiempo que tarda el servidor A en procesar un trabajo es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, mientras que el tiempo que tarda el servidor B es una variable aleatoria $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$. Ambos servidores actúan en forma independiente. Dos trabajos llegan simultáneamente y son atendidos uno por A y otro B. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor A termine con su trabajo antes que B?

6. (*) Retomemos el problema anterior y supongamos que tres trabajos llegan simultáneamente. Uno es atendido por A, otro por B y el tercero queda esperando a que uno de los servidores se libere. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, pruebe que la probabilidad de que el último trabajo en ser atendido sea el último en ser completado es 0.5.

Como en el ejercicio anterior, $f_{XY}(x.y) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} 1_{(0,+\infty)}(x)\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} 1_{(0,+\infty)}(y)$.

Quiero calcular P(X<Y).



Región sobre la que vamos a integrar (naranja): es la intersección de {X<Y} con la región $(0, +\infty)\ x\ (0, +\infty)$ (la dada por las indicadoras de la f de densidad). Esta región se puede describir con las desigualdades $0 < x,\ x < y$ o $0 < y,\ 0 < x < y$.

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \dots \quad \text{o}$$

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} 1_{(0,+\infty)}(x)\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} 1_{(0,+\infty)}(y)\, dx\, dy$$

Como la descripción de la región naranja ya está considerando que intersecamos con la región donde las indicadoras valen 1, podemos decir que valen 1 en toda la región a integrar.

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dx\, dy = \lambda_1\lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y} \int_0^{y} e^{-\lambda_1 x}\, dx\, dy$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y} (-1/\lambda_1\, e^{-\lambda_1 x}\,|_0^y)\, dy = -1/\lambda_1 \,.\, \lambda_1\lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y} (e^{-\lambda_1 y} - 1)\, dy$$

$$= -\lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_2+\lambda_1)y} - e^{-\lambda_2 y}\, dy = -\lambda_2 (-1/(\lambda_1+\lambda_2)\, e^{-(\lambda_2+\lambda_1)y} + 1/\lambda_2 e^{-\lambda_2 y})\,|_0^{+\infty}$$

$$= -\lambda_2 (1/(\lambda_1+\lambda_2) - 1/\lambda_2) = 1 - \lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2) = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$$

(probar hacerlo con la otra integral, da lo mismo).

Para el 6, tengo una tercera tarea que entra al sistema. Digamos que Z es el tiempo que tarda en ser completada esa tercera tarea. Hay dos casos: el servidor A terminó antes que el B con la primera tarea, y entonces el A agarra la tercera tarea. Lo que nos pide el ejercicio se cumpliría entonces si suceden los eventos {X<Y} (el primero termina primero) y {X+Z > Y} (el tercer trabajo termine después de haber terminado el segundo). La distribución de Z, *sujeta a que sucedió {X<Y},* es exponencial(λ_1).

El otro caso es que suceda {X>Y}, y entonces el segundo servidor toma al tercer trabajo. La distribución de $Z|_{\{X>Y\}}$ es exponencial(λ_2).

Acá, como $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, los dos casos son simétricos y deberían tener idéntica probabilidad, por lo que puedo calcular la proba de uno solo de ellos. Defino un v.a. (X, Y, Z) con función de densidad:

$$f_{XYZ}(x.y,z) = \lambda\, e^{-\lambda x} 1_{(0,+\infty)}(x)\, \lambda\, e^{-\lambda y} 1_{(0,+\infty)}(y)\, \lambda\, e^{-\lambda y} 1_{(0,+\infty)}(z)$$

E integro sobre la región 0 < x, x < y, y-x < z. Con eso saldría.

Otra posibilidad es pensar en que

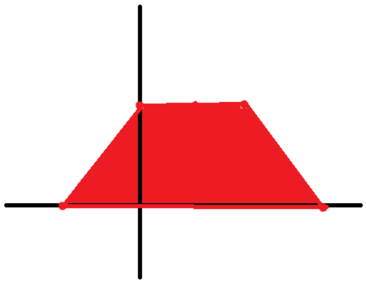
P({X<Y}, {Y<X+Z}) = P({Y<X+Z} | {X<Y}) P({X<Y}) = P({Z>X-Y} | {X<Y}) P({X<Y})
(escribo la intersección en función de la proba condicional. P(X<Y) ya la conozco del 5).
Z, en este caso, condicionada a {X<Y}, tenía una distribución exponencial. Estoy pensando que llegué hasta un momento t donde se completó la primera tarea, y ahora vuelvo a empezar el cronómetro con la tercera. Saber que la segunda tarea, Y, llegó a tiempo t, no me da conocimiento sobre cuándo va a terminar (por la propiedad de falta de memoria de la exponencial). Entonces, la probabilidad de que a partir de t, Y termine antes que Z sería la dada por el ejercicio 5, que para los valores de λ iguales es ½.

Ej. 4.7)

Si tengo un v.a. (X,Y)

- discreto, X e Y son independientes si y sólo si $p_{XY}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$.
- continuas: si $f_{XY}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$ entonces son independientes.

Para probar que no es independiente, busco un punto donde $p_{XY}(x,y)$ o $f_{XY}(x,y)$ den 0, pero $p_X(x)$ y $p_Y(y)$ (o $f_X(x)$ y $f_Y(y)$) no den 0.
Si es continua, buscar un punto donde el dominio de (X,Y) estaría como adentro del rectángulo pero por fuera del soporte/rango. Por ejemplo, en 4.3, tomar (-½, ¾).



Ej. 4.8)

8. Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a + 1$ bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una roja. Sea Y el número de bolillas rojas extraídas.

   a) Hallar la distribución de Y dado $X = a$, para $a = 0, 1, 2, 3$.

   b) Obtener una tabla con la distribución conjunta del par (X, Y) y hallar la función de probabilidad puntual marginal p_Y.

   c) ¿Son X e Y independientes?

   d) Si se extrajeron 2 bolillas blancas, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?

X = "número de caras de una moneda" ---> Bi(3, ½), rango = {0,1,2,3}
Y = "número de bolillas rojas extraídas" ---> $Y|_{X=a}$ hipergeométrica con 5 bolitas, 1 buena, a+1 intentos, rango = {0,1}.

8. $X \sim Bi(3, \frac{1}{2})$

$Y | X=a \sim \mathcal{H}(5, 1, a+1) \qquad a \in R_X$

a)

y	0	1
$P_{Y\|X=0}(y)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$P_{Y\|X=1}(y)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
$P_{Y\|X=2}(y)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$P_{Y\|X=3}(y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

$$P_{Y|X=a}(y) = \frac{\binom{1}{y}\binom{4}{a+1-y}}{\binom{5}{a+1}}$$

Y \ X	0	1	2	3	$P_Y(y)$
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
$P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Primera tabla me las probabilidad condicionales de Y = 0, 1 dado que X=a
Segunda tabla: P(X=a, Y=b) = P(Y=b | X=a) P(X=a) (conozco P(X=a) porque X es binomial(3,½), y de la primera tabla sale P(Y=b | X=a)).

X e Y son independientes? Busco (a,b) tal que P(X=a, Y=b) no sea igual a $p_X(a)$ por $p_Y(b)$.
Por ejemplo, $p_{XY}(0,0) = 1/10$, pero $p_X(0) \cdot p_Y(0) = 1/8 \cdot 1/2 = 1/16$.

Podría definir Z v.a., Z = "número de bolillas blancas extraídas". Si quiero obtener 2 bolillas blancas, necesito haber hecho al menos 2 extracciones. Como yo hacía a+1 extracciones, donde a es el número de caras que salieron, pido que
$a \geq 1 \Leftrightarrow numero\ de\ extracciones \geq 2.$
Entonces, pido que $X \geq 1$. Número de extracciones: X+1.
Si quiero mirar sólo bolillas blancas, tengo que restar las extracciones donde salieron rojas. Pueden haber sido 0 o 1, dependen del valor de Y.
Número de extracciones blancas: X+1 - Y = Z.

$$P(hayan\ salido\ al\ menos\ 2\ blancas) = P(Z \geq 2) = P(X + 1 - Y \geq 2) = P(X - Y \geq 1)$$

Esto era si nos pedían al menos 2 blancas. Para exactamente 2 blancas, busco

$P(X + 1 - Y = 2) = P(X - Y = 1) = P(Y = X - 1) = p_{XY}(1, 0) + p_{XY}(2, 1) = 18/40$ (dos casos: caso 1, 2 extracciones, 0 rojas, 2 blancas; caso 2, 3 extracciones, 1 roja, 2 blancas).

Calculé la proba del evento “salieron 2 blancas”. Quiero calcular la probabilidad de que hayan salido 2 caras, es decir, que X=2.

$P(X = 2 \,|\, X - Y = 1) = P(X = 2 , X - Y = 1) / P(X - Y = 1) = 9/40 / 18/40 = 1/2.$

Observo que $P(X = 2 , X - Y = 1) = P(X = 2, Y = 1) = 9/40.$

Ej. 4.9)

9. (*) Alicia y José acordaron encontrarse a las 8 de la noche para ir al cine. Como no son puntuales, se puede suponer que los tiempos X e Y en que cada uno de ellos llega son variables aleatorias con distribución uniforme entre las 8 y las 9. Además se supondrá que estos tiempos son independientes.

    a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?

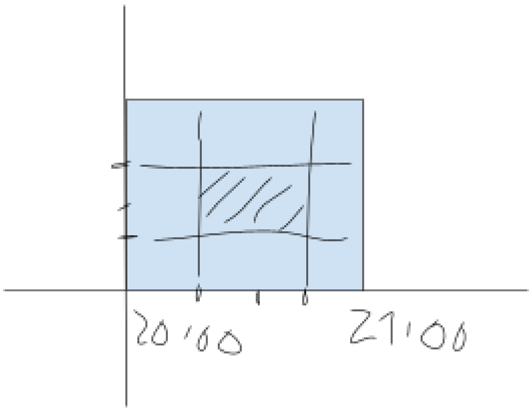
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen entre las 20:15 y las 20:45?

    c) Si ambos están dispuestos a esperar no más de 10 minutos al otro a partir del instante en que llegan, ¿cuál es la probabilidad de que se desencuentren?

X, Y tienen distribución uniforme(0,1) ---> 0 corresponde a las 20:00, 1 corresponde a 21:00, el tiempo va medido en horas.

X e Y son independientes, entonces, la f de densidad conjunta es $f_{XY}(x, y) = 1_{[0,1]}(x) \,.\, 1_{[0,1]}(y)$.

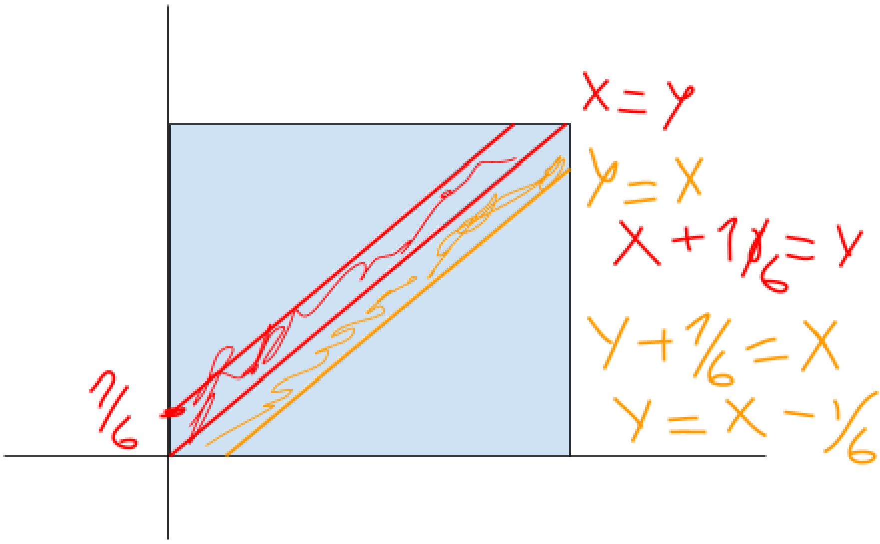
$P(0,25 < X < 0,75,\ 0,25 < Y < 0,75) = 1/4.$



Si no van a esperar más de 10 minutos. Se encuentran si:

- Caso 1: llega primero Alicia (X), y Juan llega entre X y X+10
  X < Y < X+1/6
- Caso 2: al revés, llega Juan (Y) y Alicia entre Y y Y+10
  Y < X < Y+⅙

Pido que se encuentran si hago unión de estos dos casos:



Naranja: caso 2
Rojo: caso 1

Encuentro: caso 1 + caso 2. Podemos calcular P("encuentro") = P("caso 1") + P("caso 2")
Pero, por simetría, P("caso 1") = P("caso 2").

Podemos ir por el complemento: P("desencuentro") = P(Y > X+⅙) + P(Y < X - ⅙).

Por simetría, P(Y > X + ⅙) = P(Y < X - ⅙) = área (porque lo planteé como uniforme(0,1)).
Si quieren integrar, tomo esta región: Y > X+⅙, la describo como
$0 \leq x < 5/6,\ x + 1/6 < y \leq 1$ e integro.

Área de {Y > X+⅙} es el área del triángulo de catetos ⅚ que es $(5/6)^2/2$.
O sea, P("desencuentro") = P(Y > X+⅙) + P(Y < X - ⅙) = 2 . P(Y > X+⅙) = $(5/6)^2$.

Ej. 4.10)

10. En los ejercicios 1 a 3, calcular:

    a) $\operatorname{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.
    b) $E(X+Y)$ y $V(X+Y)$.

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k\left(x^2+y^2\right) & 2 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    a) ¿Cuál es el valor de k?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto X como Y sean menores que 2,6?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de que $\max(X, Y) < 2{,}6$?
    d) Hallar f_X y f_Y, las funciones de densidad marginales.

2. De un grupo de tres profesores, dos graduados y un alumno debe seleccionarse al azar una comisión de dos personas. Sean X el número de profesores e Y el número de graduados en la comisión.

    a) Hallar la función de probabilidad conjunta del par (X, Y) y las marginales de X e Y.
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno no forme parte de la comisión?

La covarianza:
$cov(X,\ Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$
El coeficiente de correlación:
$\varrho(X, Y) = cov(X, Y)/(\sigma(X)\sigma(Y))$

Para calcular esperanzas a mano:
- discreta, sumo los valores del rango multiplicados por el valor de la puntual.
- continua, integro sobre x multiplicado por la densidad.

En general, si quiero la esperanza de f(X):
- discreta, sumo los valores de f(x) por la puntual
- continua, integro f(x) por la densidad.

Si quiero $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 .\ f_X(x)\, dx$ o $E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 . p_X(x)$

Para el 2)

	X=0	X=1	X=2	Marginales de Y
Y=0	0	3 / (6 2) = 1/5	(3 2) / (6 2) = 1/5	2/5
Y=1	2/15	2/5	0	8/15
Y=2	1/15	0	0	1/15
Marginal de X	3/15 = 1/5	3/5	1/5	1

Conocemos las marginales de X y de Y. Calculamos sus esperanzas a mano:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{2} i.p_X(i) = 0.(2/5) + 1.(8/15) + 2.(1/15) = 2/3$$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{2} i^2.p_X(i) = 0^2.(2/5) + 1^2.(8/15) + 2^2.(1/15) = 4/5$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4/5 - (2/3)^2 = 36/45 - 20/45 = 16/45.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{16/45} = 4\sqrt{5}/15.$$

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{2} i.p_Y(i) = 0.(1/5) + 1.(3/5) + 2.(1/5) = 1$$

$$E(Y^2) = \sum_{i=0}^{2} i^2.p_Y(i) = 0^2.(1/5) + 1^2.(3/5) + 2^2.(1/5) = 7/5$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 7/5 - 1^2 = 2/5$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{2/5}$$

Con esto calculé las esperanzas de X e Y por separado.

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Tengo que calcular una esperanza que involucra dos variables aleatorias, X-E(X), Y-E(Y). Para calcular la esperanza de dos variables aleatorias juntas, tengo que hacer una suma doble (si son discretas) o una integral doble (si son continuas).

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(Y\,E(X)) - E(X\,E(Y)) + E(E(X)\,E(Y))$$

Hice distributiva dentro del corchete de la esperanza y uso la linealidad de la esperanza. Uso que la esperanza de una constante es esa constante, y que la esperanza saca constantes para afuera.

$$= E(XY) - E(X)\,E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)\,E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

(uso que E(X) y E(Y) son números que conocemos)

Lo que tenemos que calcular es E(XY):

$$E(XY) = \sum_{x,y} xy.p_{X,Y}((x,y))$$

En la fórmula tengo que poner la densidad conjunta del vector (X,Y), no puedo poner $p_X p_Y$ por separado (a menos que sepa que son independientes). Hacemos la cuenta a mano (sumo adentro respecto a y y afuera respecto a x)

$$E(XY) = \sum_{x,y} xy.p_{X,Y}((x,y)) = 0.0\,p(0,0) + 0.1\,p(0,1) + 0.2\,p(0,2) + 1.0\,p(1,0) + 1.1\,.\,p(1,1)$$
$$+ 1.2\,.\,p(1,2) + 2.0\,.\,p(2,0) + 2.1\,p(2,1) + 2.2\,p\,(2,2)$$
$$= 1.1\,.\,p(1,1) + 1.2\,.\,p(1,2) + 2.1\,p(2,1) + 2.2\,p\,(2,2) = 1.1.p(1,1) = 1.1.2/5 = 2/5.$$

$$cov(X,Y) = 2/5 - E(X)E(Y) = 2/5 - 2/5.4\sqrt{5}/15 = 2/5 - 8\sqrt{5}/75 \neq 0$$
(por lo que X e Y no pueden ser independientes)

Propiedad: si X, Y son independientes, cov(X,Y) = 0.

$$\varrho(X,Y) = cov(X,Y)/(\sigma(X)\sigma(Y)) = (2/5 - 8\sqrt{5}/75)/(2/5\,.\,4\sqrt{5}/15)$$

Para la parte b), tengo que calcular una esperanza de una función de (X,Y). La idea es la misma que para la esperanza de una función de X o de Y, pero ahora iría la densidad conjunta (si el vector es continuo) o la puntual conjunta (si es discreto):

$$E(X+Y) = \sum_{x,y} (x+y)\,p_{XY}((x,y)) = \sum_{k=0}^{4} k\,p_{XY}((x,k-x))$$
Estoy como transformando mis variables aleatorias X,Y a una nueva variable aleatoria Z = X+Y donde esta puede adoptar ciertos valores k, con probabilidades dadas por todos los puntos tales que x+y=k.

k=0) $p_Z(0) = 0$
k=1) $p_Z(1) = 1/3$
k=2) $p_Z(2) = 2/3$
k=3) $p_Z(3) = 0$
k=4) $p_Z(4) = 0$

$$E(X+Y) = E(Z) = 1.1/3 + 2.2/3 = 5/3.$$

Si las v.a.s X e Y son continuas, tengo que hacer algo parecido con la integral:

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$
Puedo definir una variable aleatoria Z = X+Y

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\,f_Z(z)\,dz$$
Como X e Y están vinculadas a Z porque su suma da Z, una vez que elegimos un valor para z , y eligiendo uno para x, el valor de y queda fijado.

$Z = X + Y \Rightarrow z = x + y \Rightarrow y = z - x$

$E(X + Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z\, f_{XZ}(x, z - x)\, dz\, dx$

Ej. 4.12)

12. (*) Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en la región: $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq x + h$ para todo $0 < h < 1$.

(a) Calcular $E(X), E(Y), E(XY)$.

(b) Hallar ρ_{XY}.

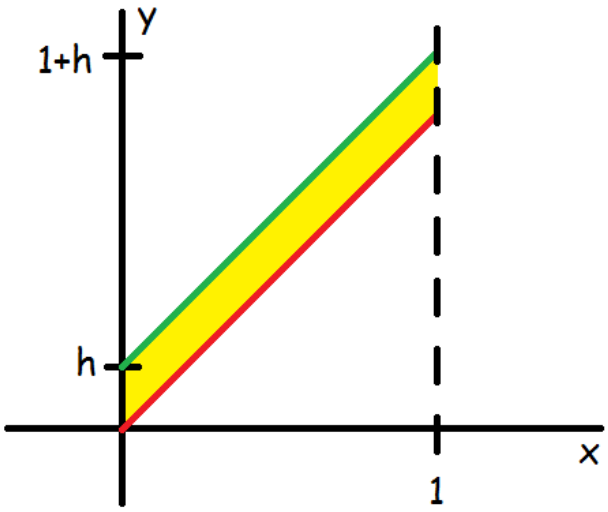
(c) ¿A qué tiende ρ_{XY} cuando h tiende a cero? ¿Por qué?

La región está definida por $0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq x + h$.

La densidad de (X,Y) es $k.\ 1_{[0,1]}(x)\ .\ 1_{[x, x+h]}(y)$

~~El área de la región es~~ $1 - 1/2 - (1 - h)^2/2 = 1/2 - (1 - h)^2/2 = (1 - (1 - h)^2)/2$~~.~~

~~Entonces,~~ $k = 2/(1 - (1 - h)^2)$~~.~~ El dibujo está mal, es un paralelogramo.



$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k.\ 1_{[0,1]}(x)\ .\ 1_{[x, x+h]}(y)\, dx\, dy = \int_{0}^{1}\int_{x}^{x+h} k\, dy\, dx = k\int_{0}^{1}(x + h - x)\, dx = k\int_{0}^{1} h\, dx = k.h = 1.$

k=1/h.

Calcular las esperanzas E(X), E(Y), E(XY).

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\ .\ k.\ 1_{[0,1]}(x)\ .\ 1_{[x, x+h]}(y)\, dx\, dy = \int_{0}^{1}\int_{x}^{x+h} xy\ .\ k\, dy\, dx$

$= k \int_0^1 x \int_x^{x+h} y\, dy\, dx = k \int_0^1 x\, (y^2/2) |_x^{x+h} dx = k/2 \int_0^1 x\, ((x+h)^2 - x^2)\, dx = k/2 \int_0^1 x\, (2hx + h^2)$
dx

$= k/2 \int_0^1 2hx^2 + h^2 x\, dx = k/2\, (2/3\, hx^3 + 1/2\, h^2 x^2) |_0^1 = k/2\, (2/3\, h + 1/2\, h^2) = 1/3 + h/4.$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, .\, k.\, 1_{[0,1]}(x)\, .\, 1_{[x,\, x+h]}(y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_x^{x+h} x\, .\, k\, dy\, dx = k \int_0^1 xh\, dx = hk/2 = 1/2$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, .\, k.\, 1_{[0,1]}(x)\, .\, 1_{[x,\, x+h]}(y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_x^{x+h} y\, .\, k\, dy\, dx = k/2 \int_0^1 2hx + h^2 dx$$

$E(Y) = k/2\, (h + h^2) = (1 + h)/2.$

$cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/3 + h/4 - (1 + h)/4 = 1/12$

Para calcular el $\rho(X, Y)$ tenemos que calcular los desvíos $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$.

Podemos usar que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, .\, k.\, 1_{[0,1]}(x)\, .\, 1_{[x,\, x+h]}(y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_x^{x+h} x^2\, .\, k\, dy\, dx = k \int_0^1 x^2 h\, dx = hk/3 = 1/3$$

$V(X) = 1/3 - 1/2 * 1/2 = 1/12.$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, .\, k.\, 1_{[0,1]}(x)\, .\, 1_{[x,\, x+h]}(y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_x^{x+h} y^2\, .\, k\, dy\, dx = k/3 \int_0^1 ((x + h)^3 - x^3)\, dx$$

$= k/3 \int_0^1 3x^2 h + 3xh^2 + h^3\, dx = k/3\, (h + 3/2 h^2 + h^3) = 1/3\, (1 + 3h/2 + h^2) = 1/3 + h/2 + h^2/3$

$V(Y) = 1/3 + h/2 + h^2/3 - (1 + h)^2/4 = (1 + h^2)/12$

$$\rho(X, Y) = cov(X, Y) / (\sqrt{V(X)}\, \sqrt{V(Y)}) = 1/12 / (\sqrt{1/12} * \sqrt{(1 + h^2)/12}\,) = 1/\sqrt{1 + h^2}$$

Qué pasa si h tiende a 0? Esperamos que la correlación entre X y Y sea lo mayor posible y entonces $\rho(X, Y)$ tienda a 1.

$$\lim_{h \to 0} \rho(X, Y) = \lim_{h \to 0} 1/\sqrt{1 + h^2} = 1$$

Observación: Si calculan las marginales f_X, f_Y, calcular las esperanzas E(X), E(Y) se puede hacer con una integral simple sobre esa f de densidad. En particular, X tiene distribución uniforme(0,1).

Ej. 4.16)

16. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas) con función de distribución F_X. Se definen las variables aleatorias

$$\begin{aligned} T &= \text{máx}\,(X_1, \ldots, X_n) \\ U &= \text{mín}\,(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

a) Probar que $F_T(t) = [F_X(t)]^n$.

b) Probar que $F_U(t) = 1 - [1 - F_X(t)]^n$.

c) Si las variables X_i tienen densidad $f_X(x)$, hallar las densidades de U y T en fución de $f_X(x)$ y $F_X(x)$.

Definimos las v.a.s de máximo y mínimo T y U. Tomo t real:

$F_T(t) = F_{máx\,(X_1, ..., X_n)}(t) = P(T \le t) = P(máx(X_1, ..., X_n) \le t)$

$\{máx(X_1, ..., X_n) \le t\} = \{X_1 \le t\} \cap \{X_2 \le t\} \cap ... \cap \{X_n \le t\}$

$= P(máx(X_1, ..., X_n) \le t) = P(\{X_1 \le t\} \cap \{X_2 \le t\} \cap ... \cap \{X_n \le t\})$

Como las X_i son independientes, la probabilidad de una intersección de eventos es el producto de las probabilidades.

$= P(\{X_1 \le t\} \cap \{X_2 \le t\} \cap ... \cap \{X_n \le t\}) = P(X_1 \le t).\, P(X_2 \le t)\, .\, ...\, .\, P(X_n \le t)$

$= F_{X_1}(t).\, F_{X_2}(t)\, .\, ...\, .\, F_{X_n}(t) = F_X(t)\, .\, F_X(t)\, .\, ...\, .\, F_X(t) = (F_X(t))^n$

donde usamos que las X_i son idénticamente distribuidas para poder decir que todas las $F_{X_i}(t)$ valen $F_X(t)$.

U es el mínimo de las v.a.s X_i

$F_U(t) = F_{mín\,(X_1, ..., X_n)}(t) = P(U \le t) = P(mín(X_1, ..., X_n) \le t)$

$\{mín(X_1, ..., X_n) \le t\} = al\ menos\ uno\ de\ los\ eventos\ \{X_i \le t\}\ valgan$

$=\{X_1 \le t\} \cup \{X_2 \le t\} \cup ... \cup \{X_n \le t\}$

En este caso, tomamos complemento.

$P(mín(X_1, ..., X_n) \le t) = 1 - P(mín(X_1, ..., X_n) > t)$

$\{mín(X_1, ..., X_n) > t\} = todos\ los\ X_i\ valen\ más\ que\ t,\ o\ sea\ \{X_i > t\}\ vale\ para\ todo\ i$

$=\{X_1 > t\} \cap \{X_2 > t\} \cap ... \cap \{X_n > t\}$

Por leyes de de Morgan: complemento de una unión es la intersección de los complementos.

$F_U(t) = 1 - P(mín(X_1, ..., X_n) > t) = 1 - P(\{X_1 > t\} \cap \{X_2 > t\} \cap ... \cap \{X_n > t\})$

Por independencia:

$= 1 - P(\{X_1 > t\}). P(\{X_2 > t\}). ... P(\{X_n > t\})$

Cada uno de estos eventos $\{X_1 > t\}$ tiene probabilidad:

$P(X_1 > t) = 1 - P(X_1 \leq t) = 1 - F_{X_1}(t).$

$= 1 - (1 - F_{X_1}(t)). (1 - F_{X_2}(t)). ... (1 - F_{X_n}(t)) = 1 - (1 - F_X(t))^n$

En el último paso usé que las X_i son idénticamente distribuidas.

Ya sabemos que $F_T(t) = (F_X(t))^n$, ahora asumimos que las X_i tienen densidad f_X.

Derivamos usando regla de la cadena:

$f_T(t) = (F_T(t))' = ((F_X(t))^n)' = n\,.(F_X(t))^{n-1}.f_X(t)$

$f_U(t) = (F_U(t))' = (1 - (1 - F_X(t))^n)' = - n\,(1 - F_X(t))^{n-1}(-1)\,f_X(t) = n\,(1 - F_X(t))^{n-1}\,f_X(t)$

---

17. En un concurso de salto, cada atleta salta 3 veces, siendo su puntaje la máxima altura alcanzada. Si la altura en cada salto (en metros) es una v.a. con distribución $\mathcal{U}[2, 2{,}5]$ y considerando que las tres alturas alcanzadas son independientes:

a) Hallar la función de distribución del puntaje.

b) Hallar el valor esperado del puntaje.

Cada atleta tiene 3 saltos, la altura alcanzada es X_1, X_2, X_3 en cada uno, que tienen distribución uniforme(2, 2,5).

El puntaje de este atleta: T = máx(X_1, X_2, X_3). Usando el ejercicio 16, como cada X_i tiene distribución acumulada: $F_{Xi}(t) = 2(t-2)$ si $2<t<2{,}5$.

$F_T(t) = (F_X(t))^3 = 2^3(t - 2)^3 = 8\,(t - 2)^3\ (si\,2 \leq t \leq 2{,}5).$

b) Valor esperado del puntaje? E(T)=?

Derivo para calcular $f_T(t)$, la densidad, y después integro para calcular E(T):

$$(F_T(t))' = 8.3(t-2)^2 . 1_{[2,2{,}5]}(t)$$

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t . 8.3(t-2)^2 . 1_{[2,2{,}5]}(t)\, dt = 24\int_2^{2{,}5} t\,(t-2)^2\, dt = 24\int_2^{2{,}5} t^3 - 4t^2 + 4t\, dt$$

$$= 24(t^4/4 - 4t^3/3 + 2t^2)\Big|_2^{2{,}5}.$$

---

21. (*) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d.. Se define $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Calcular $E(S)$ y $V(S)$ para los siguientes casos:
   i. $X_i \sim Bi(1,p)$.
   ii. $X_i \sim \mathcal{G}(p)$.

b) Usando los Ejercicios 18 y 20, hallar la distribución de S para los dos casos anteriores.

c) Deducir de (a) y (b) la esperanza y la varianza de variables aleatorias con distribución $Bi(n,p)$ y $BN(r,p)$.

Esperamos que la suma de Bernoullis(p) (o binomiales(1,p)) nos dé una binomial(n,p). Y la suma de geométricas(p) nos dé BN(n,p).

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.s i.i.d con distribución binomial(1,p). S es la suma de X_i.

$$E(S) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Pasos:

- sacar la suma para afuera usando la linealidad de la esperanza ("la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas")
- $E(X_i)$ = p porque son Bernoulli(p).

$V(S) = E(S^2) - E(S)^2$

$$S^2 = (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \mathit{queda\ una\ suma\ complicada.}$$

$$V(S) = V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(p-1) = np(p-1).$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = p - p^2 = p(p-1).$$

La propiedad que usamos fue que la varianza es lineal si las variables aleatorias sobre las que sumo son independientes.

Con la geométrica es lo mismo, usando la esperanza y la varianza conocidas.

---

22. (*) Sean X e Y v.a. independientes tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Probar que:

    a) $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

    b) La distribución de X condicional a $X + Y = k$ es $Bi\left(k, \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

    c) Sean X e Y v.a. tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y|_{X=k} \sim Bi\,(k, p)$. Probar que $Y \sim \mathcal{P}\,(\lambda p)$.

a) Escribir la proba puntual P(X+Y = k) y partir en casos donde X vale j, Y vale k-j.
b) Partiendo de p_{XY} para el vector aleatorio (X,Y), condicionar haciendo P(X = l, X+Y=k) / P(X+Y=k).
c) X tiene distribución Poisson(lambda), $Y|_{X=k}$ tiene distribución binomial(k,p). Calculamos $p_Y(n)$ y vemos que da la puntual de una Poisson.

$P(\,Y = n\,|X = k\,) = (k\,n)\,p^n\,(1-p)^{k-n}$, $P(X = k) = \lambda^k\,e^{-\lambda}/k!$ (condición: $k \geq n$)

Quiero ver que $P(Y = n) = (\lambda p)^n\,e^{-\lambda p}/n!$

k= 0, 1, 2, …. Hago proba total sobre el rango de la v.a. X.

$$p_Y(n) = P(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\,Y = n\,|X = k\,)\,P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k\,n)\,p^n\,(1-p)^{k-n}\,\lambda^k\,e^{-\lambda}/k!$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k\,n)\,p^n\,(1-p)^{k-n}\,\lambda^k\,e^{-\lambda}/k! = \sum_{k=0}^{+\infty} k!\,/((k-n)!\;n!)\;p^n\,(1-p)^{k-n}\,\lambda^k\,e^{-\lambda}/k!$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\; p^n\,(1-p)^{k-n}\,\lambda^k\,e^{-\lambda}/((k-n)!\;n!) = \sum_{k=0}^{+\infty}\;(\lambda p)^n\,e^{-\lambda p}/n!\;(1-p)^{k-n}\,\lambda^{k-n}\,e^{-\lambda}/e^{-\lambda p}(k-n)!$$

$$= (\lambda p)^n\,e^{-\lambda p}/n!\;\sum_{k=n}^{+\infty}\;((1-p)\lambda)^{k-n}e^{-\lambda(1-p)}/(k-n)! = (\lambda p)^n\,e^{-\lambda p}/n!$$

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\;((1-p)\lambda)^{k-n}e^{-\lambda(1-p)}/(k-n)! = \sum_{k-n=0}^{+\infty}\;((1-p)\lambda)^{k-n}e^{-\lambda(1-p)}/(k-n)! = 1$$

En realidad, en la sumatoria, tenía que empezar en k=n.

---

23. Dos terminales A y B están conectadas a un servidor. La cantidad de requerimientos que realiza la terminal A en el lapso de un segundo sigue una distribución $\mathcal{P}(2)$ mientras que para la terminal B sigue una distribución $\mathcal{P}(3)$. Ambas terminales actúan en forma independiente.

a) Hallar la probabilidad de que en un segundo haya más de 3 requerimientos al servidor.

b) Si en un determinado segundo hubo dos requerimientos al servidor, ¿cuál es la probabilidad de que haya provenido uno de cada terminal?

c) (*) Si el 30 % de los requerimientos necesita grabar en disco (y el 70 % restante no), hallar el valor esperado para la cantidad de requerimientos de disco en el lapso de 15 segundos.

a) X = "número de requerimientos en A", X tiene dist. Poisson(2)
Y = "número de requerimientos en B", X tiene dist. Poisson(3)
S = "número de requerimientos totales", S = X + Y. Por el 4.22)a), S tiene dist. Poisson(2+3 = 5).

$P(S > 3) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) - P(S = 2) - P(S = 3)$.

b) $P(X = 1, Y = 1 \mid S = 2) = P(X = 1, Y = 1, S = 2) / P(S = 2) = P(X = 1) P(Y = 1) / P(S = 2$
$= P(X = 1, Y = 1) / P(S = 2) = P(X = 1) P(Y = 1) / P(S = 2)$
P(S=2) la conozco, porque tengo la puntual de S. Puedo usar que X e Y son independientes. P(X=1) y P(Y=1) también las conozco.
Obs.: $P(X = 1, Y = 1, S = 2) = P(X = 1, Y = 1)$. Una vez fijado el valor de X e Y, S queda determinado (es 2 con probabilidad 1).

Puedo pensarlo con el 4.22)b) diciendo que la distribución de X dado X+Y = 2 es binomial(2, ⅖).

P(X=1 | X+Y=2) = (2 1) $(⅖)^1(⅗)^1$ = ...

c) Digamos que el número de eventos en 1 segundo determinado es S_i, i=1, …, 15. Sé que por la parte a), S_i tiene distribución Poisson(5). Asumo que cada una de las S_i son independientes (y aplicando la parte a), son idénticamente distribuidas).

Prop.: (sin demostrar pero es la misma idea que en 22a))

Si $T = \sum_{i=1}^{15} S_i$, T tiene distribución Poisson(5.15=75).

Quiero calcular la cantidad de grabaciones esperadas en disco, si suceden cada una con probabilidad 0,3.

G = "número de requerimientos que fueron grabados en disco".

Sé que si hubo k requerimientos, entonces G sortea esos k requerimientos con probabilidad de éxito 0,3 para escribirlos en disco.

La distribución de G sujeta a T = k es una binomial(k, 0,3).
$G|_{T=k} \sim Bi(k,\ 0,3)$

Por la propiedad del 4.22)c), con X=T, Y=G, p=0,3, lambda=75 puedo concluir que G tiene distribución Poisson(75.0,3). Su esperanza será 75.0,3 = 22,5.
