<u>Distribución multinomial:</u> Es una generalización de la distribución Binomial. Supongamos que se repite n veces en forma independiente una experiencia, que en cada repetición hay k resultados posibles ($k \geq 2$), cada uno de los cuales ocurre con probabilidad p_i ($1 \leq i \leq k$) y que estas probabilidades se mantienen constantes en todas las repeticiones. Este experimento se denomina experimento multinomial. Si definimos

X_i: número de veces que ocurre el resultado i ($1 \leq i \leq k$)

la distribución conjunta de $(X_1,...,X_k)$ se denomina distribución multinomial de parámetros n, $p_1,...p_k$.

<u>Notación</u>: $(X_1,...,X_k) \sim M(n, p_1,...p_k)$

La correspondiente función de probabilidad conjunta está dada por

$$p_{X_1,...,X_k}(x_1,...,x_k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1!x_2!...x_k!} p_1^{x_2} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k} & \text{si } 0 \leq x_i \leq n \ \forall\, i, \ \sum_{i=1}^{k} x_i = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (1)$$

En efecto, en primer lugar hay que notar que si $x_1 + x_2 + ... + x_k \neq n$, la función de probabilidad puntual es cero. Sean ahora $0 \leq x_i \leq n$, tales que $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$.

¿Cuántas configuraciones diferentes hay?

$$\binom{n}{x_1} \cdot \binom{n - x_1}{x_2} \cdot \binom{n - x_1 - x_2}{x_3} \ldots\ldots \binom{x_k}{x_k} = \frac{n!}{x_1!(n - x_1)!} \cdot \frac{(n - x_1)!}{x_2!(n - x_1 - x_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{x_k!}{x_k!0!} =$$

$$= \frac{n!}{x_1!x_2!....x_k!}$$

<u>Observación</u>: La distribución marginal de X_i es binomial de parámetros n y p_i para todo $1 \leq i \leq k$. En general, las marginales de una distribución multinomial son binomiales o multinomiales.

<u>Ejemplo</u>: De una urna que contiene 3 bolillas rojas, 2 negras, 4 azules y 1 blanca se extraen 12 bolillas *con reposición*. Definiendo

X_1: número de bolillas rojas
X_2: número de bolillas negras
X_3: número de bolillas azules
X_4: número de bolillas blancas

el vector (X_1, X_2, X_3, X_4) tiene distribución multinomial, es decir

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) \sim M\left(12, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan 3 bolillas rojas, 5 negras, 4 azules y ninguna blanca?

$$p_{X_1,X_2,X_3,X_4}\big|(3,5,4,0) = \frac{12!}{3!\,5!\,4!\,0!}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{2}{10}\right)^5\left(\frac{4}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right)^0 = 0.006$$

b) Calcular la probabilidad de obtener a lo sumo dos bolillas rojas.

Como $X_1 \sim \mathrm{Bi}\left(12, \frac{3}{10}\right)$, entonces

$$P(X_1 \le 2) = \sum_{i=0}^{2} p_{X_1}(i) = \sum_{i=0}^{2} \binom{12}{i}\left(\frac{3}{10}\right)^i\left(\frac{7}{10}\right)^{12-i} = 0.25$$

c) Calcular la probabilidad de obtener 3 bolillas rojas y 2 blancas.

Como las v.a. que nos interesan son X_1 y X_4, defino una nueva v.a. $Y = X_2 + X_3$. El vector aleatorio (X_1 , X_4 , Y) también tendrá distribución multinomial.

$$(X_1, X_4, Y) \sim M\left(12, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{6}{10}\right)$$

y, por lo tanto, la probabilidad pedida será

$$p_{X_1,X_4,Y}(3,2,7) = \frac{12!}{3!\,2!\,7!}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{6}{10}\right)^7 = 0.06$$