

## Probabilidades y Estadística (M)

---

Funciones de densidad o probabilidad puntual, esperanzas, varianzas y funciones características de las variables aleatorias más frecuentes

### I. Distribuciones discretas

#### Distribución Binomial $Bi(n, p)$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ \text{var}(X) &= np(1-p) \\ \varphi_X(t) &= (1 + p(e^{it} - 1))^n \end{aligned}$$

Un caso particular de la distribución binomial es cuando  $n = 1$ . Esta distribución suele denominarse *Bernoulli* de parámetro  $p$ ,  $Be(p) = Bi(1, p)$ .

#### Distribución Geométrica $Ge(p)$

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{si } k = 1, 2, \dots \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ \text{var}(X) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

#### Distribución Binomial Negativa (o de Pascal) $BN(r, p)$

$$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, r+1, \dots \text{ y } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{r}{p} \\ \text{var}(X) &= \frac{r(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

La distribución geométrica es un caso particular de la distribución binomial negativa:  $Ge(p) = BN(1, p)$ .

#### Distribución Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{si } k = 0, 1, 2, \dots \text{ y } \lambda > 0$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ \text{var}(X) &= \lambda \\ \varphi_X(t) &= e^{\lambda(\exp(it)-1)} \end{aligned}$$

## Distribución Hipergeométrica $\mathcal{H}(N, r, m)$

$N$  : total poblacional

$r$  : cantidad de “buenos” en la población

$m$  : cantidad de elementos extraídos (tamaño de la muestra)

$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{m-k}}{\binom{N}{m}} \quad \text{si } k \text{ es entero con } \max(r+m-N, 0) \leq k \leq \min(r, m)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= m \frac{r}{N} \\ \text{var}(X) &= m \frac{r}{N} \frac{(N-r)}{N} \frac{(N-m)}{(N-1)} \end{aligned}$$

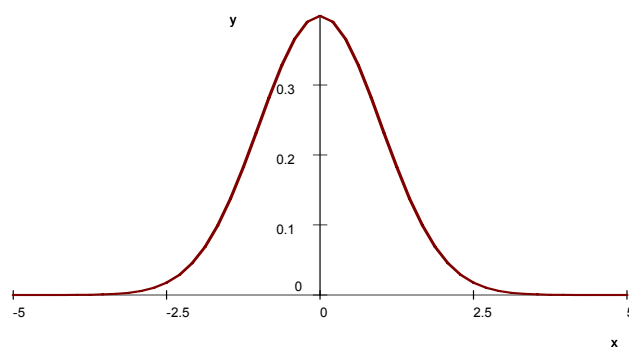
## II. Distribuciones continuas

### Distribución Normal $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{con } \sigma > 0$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ \text{var}(X) &= \sigma^2 \\ \varphi_X(t) &= e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2} \end{aligned}$$

La distribución Normal estándar corresponde a la elección de parámetros  $N(0, 1)$ .



Densidad de la normal estándar

### Distribución Gama $\Gamma(\alpha, \lambda)$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \quad \text{con } \lambda > 0, \alpha > 0$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{\alpha}{\lambda} \\
\text{var}(X) &= \frac{\alpha}{\lambda^2} \\
\varphi_X(t) &= \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^\alpha}
\end{aligned}$$

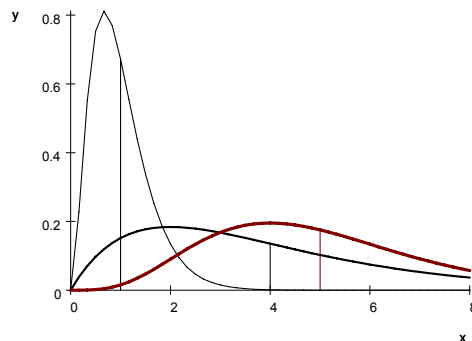
Recordemos que el símbolo  $\Gamma(\alpha)$  representa a la *función gama* que se define por

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx \quad \text{si } y > 0$$

Satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 1 \\
\Gamma(\alpha) &= (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1) \\
\Gamma(n) &= (n - 1)! \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

En el gráfico siguiente figuran las funciones de densidad de la gama para distintos valores de los parámetros: la función de la línea fina corresponde a  $\alpha = 3$ ,  $\lambda = 3$ , la de la línea sólida de grosor intermedio corresponde a  $\alpha = 2$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$ , y la de la línea punteada corresponde a  $\alpha = 5$ ,  $\lambda = 1$ . Con la línea punteada están las esperanzas en cada caso.

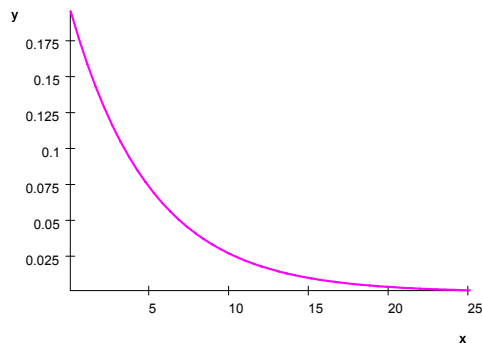


Densidad de la gama

### Distribución Exponencial $Exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \quad \text{con } \lambda > 0$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\
\text{var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \\
\varphi_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - it}
\end{aligned}$$



Densidad Exponencial con  $\lambda = 1/5$

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gama:  $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$ .

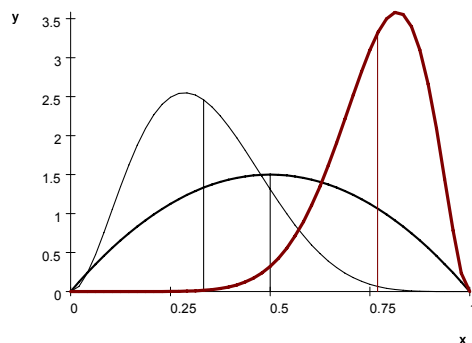
### Distribución Beta $\beta(a, b)$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) \quad \text{con } a, b > 0$$

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

En el gráfico siguiente figuran las funciones de densidad de la beta para distintos valores de los parámetros: la función de la línea fina corresponde a  $a = 3$ ,  $b = 6$ , la de la línea sólida de grosor intermedio corresponde a  $a = 2$ ,  $b = 2$ , y la de la línea punteada corresponde a  $a = 10$ ,  $b = 3$ . Con la línea punteada están las esperanzas en cada caso.



Densidad de la beta

### Distribución Uniforme $\mathcal{U}[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{a+b}{2} \\
\text{var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \\
\varphi_X(t) &= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{i(b-a)t}
\end{aligned}$$

La distribución uniforme en el  $(0, 1)$  es un caso particular de la distribución beta:  $\mathcal{U}[0, 1] = \beta(1, 1)$ .

**Distribución  $T$  de Student con  $n$  grados de libertad  $t_n$**

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \quad n \geq 2 \\
\text{var}(X) &= \frac{n}{n-2} \quad n > 2
\end{aligned}$$

**Distribución  $\chi^2$  cuadrado con  $n$  grados de libertad  $\chi_n^2 = \chi^2(n)$**  La distribución Chi cuadrado con  $n$  grados de libertad es un caso particular de la distribución gama:  $\chi_n^2 = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$$\begin{aligned}
E(X) &= n \\
\text{var}(X) &= 2n
\end{aligned}$$

**Distribución  $F$  de Snedecor con  $n$  y  $m$  grados de libertad  $F_{n,m}$**

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} x^{(n/2)-1} \left(1 + \frac{n}{m}x\right)^{-(n+m)/2} I_{(0,\infty)}(x).$$

**Distribución de Cauchy  $\mathcal{C}(0, \lambda)$**

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \quad \lambda > 0 \\
\varphi_X(t) &= e^{-\lambda|t|}
\end{aligned}$$

La esperanza de esta distribución no está definida pues  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx = +\infty$ . La distribución Cauchy  $\mathcal{C}(0, 1)$  coincide con la distribución  $T$  de Student de un grado de libertad,  $\mathcal{C}(0, 1) = t_1$ .