Variables aleatorias continuas famosas

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computació n)

24 de septiembre de 2020

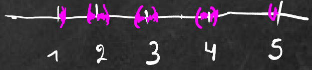
Ejercicio 1: Netflix gratis para todes

En un juego, se sortean 5 números al azar en el intervalo [1,5]. Se gana un mes gratis de Netflix por cada numero que quede a menos de 0.02 de un número natural.

a) Cuál es la probabilidad de gane (exactamente) dos meses gratis en Netflix?

b) Si ahora se sortean 50 números al azar en el intervalo [1,5]. Cuál es la probabilidad de gane (exactamente) dos meses gratis en Netflix? Comparar con su versió n aproximada.

a)

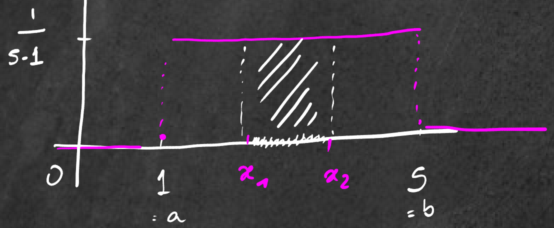


X = número sorteado

Éxito = número sorteado pertenece a

$$\underbrace{[1, 1.02) \cup (1.98, 2.02) \cup (2.98, 3.02) \cup (3.98, 4.02) \cup (4.98, 5]}_{A}$$

$P(X \in A)$



$1 < x_1 < x_2 < 5$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{b-a}\, dt$$

$X \sim \mathcal{U}[1, 5]$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{5 - 1}$$

$$P(X \in A) = \frac{2 \cdot 0.02 + 3 \cdot 0.04}{4} = \boxed{0.04}$$

'éxito'

$Y =$ # números sorteados que caen en A

$Y \sim Bi(n = 5,\ p = 0.04)$

$$P(Y = 2) = \binom{5}{2} (0.04)^2 (0.96)^3 \cong 0.013$$

b) $Y \sim Bi(n = 50,\ p = 0.04)$

$$P(Y = 2) = \binom{50}{2}(0.04)^2(0.96)^{48} \simeq \boxed{0.2762}$$

Si n grande, $\tilde{Y} \sim \mathcal{P}(\overbrace{n \cdot p}^{\lambda})$

aproximo

$$\boxed{P(\tilde{Y} = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}}$$

En este caso, $\tilde{Y} \sim \mathcal{P}(\underbrace{50 \cdot 0.04}_{=2})$

$$P(Y = 2) \simeq P(\tilde{Y} = 2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} \simeq \boxed{0.2706}$$

$P(X\leq x) = \underbrace{F_X(x)} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \left(1-e^{-\lambda x}\right) I_{(0,+\infty)}(x)$ $\quad f_X(t)\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

Ejercicio 2: La maldició n del 160

La cantidad de tiempo, en minutos, que una persona debe esperar el colectivo 160 los días de semana por la mañana es una variable aleatoria con distribució n exponencial $\mathcal{E}(0.05)$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que espere entre 5 y 15 minutos?

b) ¿Cuál es la media del tiempo de espera?

c) Aproximadamente el 80% de las veces espera menos de ??? minutos. Completar y justificar.

X = tiempo de espera hasta el primer 160.

$X \sim \mathcal{E}(\underbrace{1/20}_{\lambda})$ $\qquad f_X(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot I_{[0,+\infty)}(t)$

a) $P(5 < X < 15) = \int_{5}^{15} f_X(t)\,dt$

o $= P(X<15) - P(X\leq 5) = F_X(15) - F_X(5)$

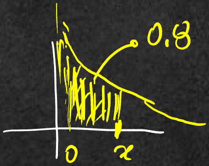
5   15

$$P(5 < X < 15) = F_X(\underset{x}{15}) - F_X(\underset{x}{5})$$

$$= \left(1 - e^{-\overset{\lambda}{1/20} \cdot \overset{x}{15}}\right) - \left(1 - e^{-\overset{\lambda}{1/20} \cdot \overset{x}{5}}\right)$$

$$\cong 0.3064$$

b) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0.05} = 20$ minutos



c) $P(X \leq x) = \boxed{0.8}$???

$$P(X \leq x) = \int_0^{x} f_X(t)\,dt = F_X(x)$$

$$\boxed{= 1 - e^{-1/20 \cdot x}}$$

Despejo x $\rightsquigarrow$ $x \cong 32.189$ min

Ejercicio 2: La maldición del 160 (parte 2)

Se sabe que los colectiveros del 160 no paran en las paradas. Se estima que deben pasar 3 colectivos hasta que el tercero se digna a parar.

(d) Cuánto tiempo debo esperar en promedio hasta poder tomar el 160? Cuál es la probabilidad de que lo tome antes de la hora de estar en la parada!?

d) Y = # tiempo hasta que llega el 3^{er} 160

$Y \sim \Gamma(k=3, \theta=20)$ $\quad \theta = 1/\lambda$

$\rightsquigarrow E(Y) = k \cdot \theta = 3 \cdot 20 = 60$ minutos

$\rightsquigarrow P(Y < 60) = \int_{-\infty}^{60} f_Y(t)\,dt$

$\quad = F_Y(60)$

$Y \sim \text{Gamma}(k ; \theta)$

$$P(Y < 60) = \int_0^{60} \frac{\frac{1}{20} \cdot \overbrace{e^{-\frac{1}{20}t}} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^{2} \cdot t^{\overbrace{2}^{k-1}}}{\Gamma(3)} \, dt =$$

$k \in \mathbb{N}$

$\Gamma(k) = (k-1)!$

reemplazo en la fórmula

(Partes) $\cong 0.5768$

$P(\text{impostor}) = 2/8 = 1/4$

$P(\text{tripulante}) = 6/8 = 3/4$

Ejercicio 3: Among us

~~Ximena~~ Nehuén juega al Among us en un grupo de 8 personas. Hay 2 impostores y 6 tripulantes. La probabilidad de ser impostor es la misma para todos antes de iniciar la partida. ~~Ximena~~ Nehuén es muy buena jugadora (?. Si es impostora, en general es la primera que mata a un tripulante. La cantidad de tiempo (en segundos) que tarda ~~Ximena~~ Nehuén en matar a un tripulante (si es impostora) es una variable aleatoria normal $\mathcal{N}(10, 1)$, cuando lo que tardan los demás es una variable aleatoria normal $\mathcal{N}(15, 4)$.

a) Cuál es la probabilidad de que maten a alguien antes de los 10 segundos? 0.12965 $P(T<10)$

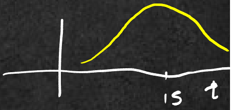
b) Si mataron a alguien antes de los 10 segundos, cuál es la probabilidad de que Nehuén sea impostor? $P(\text{Nehuen import} \mid T<10)$

0.964

a) T = # tiempo hasta muerte del primer tripulante

$X = T \mid_{\text{Nehen impostor}} \sim N(10, 1)$

$Y = T \mid_{\text{Nehuén impostor}} \sim N(15, 4)$

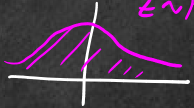


$$P(T<10) = \overbrace{P(T<10 \mid \text{Nehuen impostor})}^{0.5}\ \overbrace{P(\text{Nehuen impostor})}^{0.25}$$

$$+ \underbrace{P(T<10 \mid \text{Nehuen no impostor})}_{0.0062}\ \underbrace{P(\text{Nehuen no impostor})}_{0.75}$$

Proba tot

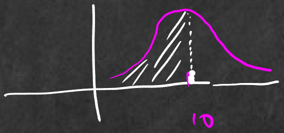
$Z \sim N(0,1)$

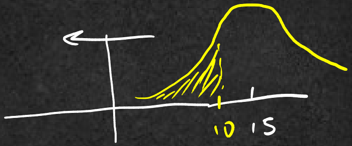


$P(\text{Nehuen impostor}) = 2/8$

$P(\text{Nehuén no impostor}) = 6/8$

$P(T < 10 \mid \text{Nehuén impostor}) = P(X < 10) = 0.5$





$P(T < 10 \mid \text{Nehuen no impostor}) = P(Y < 10)$

$$= P\Big(\overbrace{\frac{Y - 15}{\sqrt{4}}}^{Z} < \frac{\overbrace{15 - 10}^{-5/2}}{\sqrt{4}} \Big) \cong 0.0062$$

b) $P(\text{Nehuen impost} \mid T < 10) \overset{\text{Bayes}}{=} \underbrace{P(T < 10 \mid \text{Nehuen imp})}_{0.5} \cdot \underbrace{P(\text{Nehuen impost})}_{2/8} \Big/ \underbrace{P(T < 10)}_{0.12965}$