Test de Hipótesis - Definiciones importantes

Test - Ingredientes

- H_0: Hipótesis nula. $H_0 : \theta \in \Theta_0$
- H_1: Hipótesis Alternativa. $H_1 : \theta \in \Theta_1$
- $\mathcal{R}$: Región que indica cómo deben ser las observaciones para rechazar H_0 en favor de H_1.

Test de Hipótesis - Ejemplo:
De Pollos y Arsénico

p-valor - *con el vermouth - en la entrada*

- p-valor se calcula una vez realizado el experimento.
- Depende de los valores $(x_1, \ldots, x_n)$ observados.
- Indica *cuán probable es observar valores extremos como el obtenido, en la dirección de* H_1*, con* $(x_1, \ldots, x_n)$ *cuando* H_0 *es verdadero.*

  p-valor chico da evidencia contra H_0*, en favor de* H_1

Test de Hipótesis - Ejemplo

- $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 9)$

$$H_0 : \mu = 80 \qquad H_1 : \mu > 80$$

- Región de rechazo de H_0

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 80}{\sqrt{9/n}} \; \geq \; 1.64 \right\} = \left\{ \overline{X}_n \; \geq \; 80 + 1.64\,\sqrt{9/n} \right\}$$

Test de Hipótesis - Ejemplo

- Región de rechazo de H_0 (de nivel de significatividad α):

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 80}{\sqrt{9/n}} \ \geq \ 1.64 \right\} = \left\{ \overline{X}_n \ \geq \ 80 + 1.64\,\sqrt{9/n} \right\}$$

- Función de potencia:

$$\begin{aligned}
\pi(\mu) &= \mathbb{P}_\mu(\mathcal{R}) = \mathbb{P}_\mu(\overline{X}_n \ \geq \ 80 + 1.64\,\sqrt{9/n}) = \\
&= \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{9/n}} \ \geq \ \frac{80 - \mu}{\sqrt{9/n}} + 1.64 \right) = \\
&= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{80 - \mu}{\sqrt{9/n}} + 1.64 \right) = \\
&= 1 - \text{pnorm}\left(\frac{80 - \mu}{\sqrt{9/n}} + 1.64 \right) = \\
&= 1 - \text{pnorm}\left(\frac{\sqrt{n}(80 - \mu)}{\sqrt{9}} + 1.64 \right)
\end{aligned}$$

Test de Hipótesis - Ejemplo

- $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 9)$, $H_0 : \mu = 80$, $H_1 : \mu > 80$.
- Región de rechazo de H_0 (de nivel de significatividad α):

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{n,\alpha} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 80}{\sqrt{9/n}} \ \geq \ z_\alpha \right\} = \left\{ \overline{X}_n \ \geq \ 80 + z_\alpha \sqrt{9/n} \right\}$$

- Función de potencia:

$$\pi(\mu) = \pi_n(\mu) = 1 - \text{pnorm}\left(\frac{\sqrt{n}(80 - \mu)}{\sqrt{9}} + z_\alpha \right)$$

- Propiedades:
  1. π es creciente: $\mu_a \leq \mu_b$, entonces $\pi(\mu_a) \leq \pi(\mu_b)$
  2. $\lim_{n \to \infty} \pi_n(\mu_1) = 1$, para todo $\mu_1 > 80$

Test

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad H_1 = \theta \in \Theta_1$$

Un test es una regla de decisión que, en función de H_0 y H_1, determina cómo deben ser la muestra (o los datos) para que H_0 sea rechazada en favor de H_1.

La región de rechazo $\mathcal{R}$ indica en qué casos rechazamos H_0 en favor de H_1.

La región de rechazo $\mathcal{R}$ es el conjunto de valores que llevan a la decisión de rechazar H_0.

Test: Regla de decisión- posibles errores

$\mathcal{R}$: Región de rechazo. Determina cómo deben ser los datos para rechazar H_0 en favor de H_1.

	No Rechazamos H_0	Rechazamos H_0
H_0 es cierta	no hay error	**error Tipo I**
H_0 es falsa	**error Tipo II**	no hay error

- Error (es) tipo I: rechazar H_0 cuando es verdadera:
- Error (es) tipo II: NO rechazar H_0 cuando es falsa.

Test: Regla de decisión- posibles errores

$\mathcal{R}$: Región de rechazo. Determina cómo deben ser los datos para rechazar H_0 en favor de H_1.

	No Rechazamos H_0	Rechazamos H_0
H_0 es cierta	no hay error	**error Tipo I**
H_0 es falsa	**error Tipo II**	no hay error

- Error (es) tipo I: rechazar H_0 cuando es verdadera.

  Probabilidad (ERROR TIPO I) $= \mathbb{P}_\theta(\mathcal{R})$, con θ satisfaciendo H_0

- Error (es) tipo II: NO rechazar H_0 cuando es falsa.

  $$\text{Probabilidad (ERROR TIPO II)} = \mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}^c) = 1 - \mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}),$$

  con θ satisfaciendo H_1

$\pi(\theta)$: Función de Potencia (del Test)

$\pi(\theta)$ es la probabilidad de rechazar H_0 cuando el valor verdadero del parámetro es θ.

$$\pi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\mathcal{R})$$

- si θ satisface H_0, $\mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}) = \pi(\theta)$ es la probabilidad de un error tipo I.
- si θ satisface H_1, $\mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}^c) = 1 - \pi(\theta)$ es la probabilidad de un error tipo II.

$\pi(\theta)$: Función de Potencia (del Test) y Errores

- Función de potencia: probabilidad de rechazar H_0 cuando el valor verdadero del parámetro es θ:

$$\pi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\mathcal{R})$$

- si θ satisface H_0, $\mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}) = \pi(\theta)$ es la probabilidad de un error tipo I.

  Queremos $\pi(\theta)$ chico cuando θ satisface H_0.

- si θ satisface H_1, $\mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}^c) = 1 - \pi(\theta)$ es la probabilidad de un error tipo II.

  Queremos $\pi(\theta)$ GRANDE cuando θ satisface H_1. *Potencia grande en las alternativas*

Nivel de significatividad del Test cuando $H_0 : \theta = \theta_0$

Dados $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta \in \Theta_1$ y $\mathcal{R}$, decimos que el test es de nivel α si

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{R}) \leq \alpha$$

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{R}) = \pi(\theta_0) \leq \alpha$$

Controlamos la probabilidad de Error Tipo I: está acotada por α (en nuestros ejemplos, conseguimos que sea igual a α)

Nivel de significatividad del Test - caso general

Dados $H_0 : \theta \in \Theta_0$, $H_1 : \theta \in \Theta_1$ y $\mathcal{R}$, decimos que el test es de nivel α si

$$\mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}) \leq \alpha \quad \forall\, \theta \text{ satisfaciendo } H_0$$

Casos de probabilidad de Error tipo I: $\mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}) = \pi(\theta) \leq \alpha\ , \quad \forall\, \theta \in \Theta_0$

Peor probabilidad de Error tipo I: $\sup_{\theta \in \Theta_0} \pi(\theta) \leq \alpha$

Controlamos la probabilidad de **todo posible** Error Tipo I: está acotada por α,

Test de Hipótesis - Ejemplo

- $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 9)$, $H_0 : \mu = 80$, $H_1 : \mu > 80$.
- Región de rechazo de H_0 (de nivel de significatividad α):

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{n,\alpha} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 80}{\sqrt{9/n}} \ \geq \ z_\alpha \right\} = \left\{ \overline{X}_n \ \geq \ 80 + z_\alpha \sqrt{9/n} \right\}$$

Estadístico del test

$$Z = Z(X_1, \ldots, X_n) := \frac{\overline{X}_n - 80}{\sqrt{\frac{9}{n}}} \quad \underset{\text{bajo } H_0}{\underset{\uparrow}{\sim}} \quad \mathcal{N}(0, 1)$$

- Región de rechazo de H_0 (de nivel de significatividad α):

$$\mathcal{R} = \{Z \geq z_\alpha\}$$

Test de Hipótesis - Ejemplo

- Región de rechazo de H_0 (de nivel de significatividad α):

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{n,\alpha} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 80}{\sqrt{9/n}} \ \geq \ z_\alpha \right\} = \left\{ \overline{X}_n \ \geq \ 80 + z_\alpha \sqrt{9/n} \right\}$$

- Función de potencia:
$\pi(\mu) = \pi_n(\mu) = 1 - \text{pnorm}\left(\frac{\sqrt{n}(80-\mu)}{\sqrt{9}} + z_\alpha \right)$
- Propiedades:
  1. π es creciente: $\mu_a \leq \mu_b$, entonces $\pi(\mu_a) \leq \pi(\mu_b)$

$$\sup_{\mu \leq 80} \pi(\mu) \leq \pi(80) = \alpha \quad \rightarrow \quad \text{Nivel } \alpha \text{ para } H_0 : \mu \leq 80$$

  2. $\lim_{n\to\infty} \pi_n(\mu_1) = 1$, para todo $\mu_1 > 80$

$$1 - \pi_n(\mu_1) \leq \beta \quad \equiv \quad n \geq \left\{ \sqrt{9}\ (\text{qnorm}\ (\beta) - z_\alpha)/(80 - \mu_1) \right\}^2$$

En síntesis, cuando $H_0 : \theta = \theta_0$

- Dado n, y α, se puede construir un test mediante una región de rechazo $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{n,\alpha}$ de nivel α:

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{R}_{n,\alpha}) = \alpha$$

- Para armar la región de rechazo se usa un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ cuya distribución es CONOCIDA bajo H_0.
- La potencia del test está definida por

$$\pi(\theta) = \pi_{n,\alpha}(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}_{n,\alpha})$$

- Dado un valor θ_1 en H_1 y β, se puede encontrar n para que el error tipo II en θ_1 sea menor o igual a β.

$$\beta \geq \mathbb{P}_{\theta_1}(\mathcal{R}_n^c) = 1 - \pi_n(\theta_1) \quad \equiv \quad \pi_n(\theta_1) \geq 1 - \beta$$

Una muestra normal, varianza conocida

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma_0^2\right)$ i.i.d., con σ_0^2 conocida.
Se quiere testear

$H_0 : \mu = \mu_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estadístico del test

$$Z = Z(X_1, \ldots, X_n) := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Región de rechazo de nivel α

Estadístico del test $Z := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, cuando $\mu = \mu_0$.

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \geq z_\alpha \right\} = \{Z \geq z_\alpha\}$$

2. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} < -z_\alpha \right\} = \{Z \leq -z_\alpha\}$$

3. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \left| \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \right| > z_{\alpha/2} \right\} = \{|Z| \geq z_{\alpha/2}\}$$

p-valor - Una muestra normal, varianza conocida

Estadístico del test $Z := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}}$

Estadístico OBSERVADO:

$$z_{\text{obs}} = \frac{\overline{X}_{n,\text{obs}} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}}$$

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

$$\text{p-valor} = \mathbb{P}(Z \geq z_{\text{obs}})$$

2. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$

$$\text{p-valor} = \mathbb{P}(Z \leq z_{\text{obs}})$$

3. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\text{p-valor} = 2\mathbb{P}(Z \geq |z_{\text{obs}}|)$$

p- valores: Primer plato

- p-valor se calcula una vez realizado el experimento.
- Depende de los valores $(x_1, \ldots, x_n)$ observados.
- Indica *cuan probable es observar valores extremos como el obtenido con* $(x_1, \ldots, x_n)$ *cuando* H_0 *es verdadero.*

  p-valor chico da evidencia contra H_0*, en favor de* H_1

- Con los datos rechazo H_0 a nivel α si y solo si p-valor $\leq \alpha$.