Variables aleatorias discretas famosas

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computación)

5 de mayo de 2020

Variables discretas famosas

Bernoulli

Supongamos un experimento aleatorio con sólo dos posibles resultados: un suceso A que llamaremos éxito y un suceso A^c que llamaremos fracaso.

La probabilidad de éxito es p y la de fracaso es $1-p$.

Variables discretas famosas

Binomial

Si repito el experimento n veces (de manera independiente), ¿cuantos éxitos obtengo?

$X =$ 'cantidad de éxitos en n repeticiones

$$X \sim Bi(n, p)$$

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$E(X) = np$

$V(X) = np(1-p)$

Variables discretas famosas

Geométrica

¿Cuántas veces debo repetir el experimento hasta obtener el primer éxito?

$X =$ 'cantidad de repeticiones hasta el primer éxito

$$X \sim Ge(p)$$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Variables discretas famosas

Binomial Negativa

¿Cuántas veces debo repetir el experimento hasta obtener el r-ésimo éxito?

$X =$ 'cantidad de repeticiones hasta el r-ésimo éxito

$$X \sim BN(r, p)$$

$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Ejercicio 1: Manu

La efectividad en tiros libres de Manu Ginóbili es de $0,827$ (es información real).

(a) Si en un partido tira 6 veces, ¿calcular la probabilidad de que meta al menos 2 tiros libres?

Solución

$X =$ 'cantidad de conversiones en 6 tiros libres'

$$X \sim Bi(6, 0.827)$$

$P(X = k) = \binom{6}{k} 0.827^k (1 - 0.827)^{6-k}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
$= 1 - \binom{6}{0}(1 - 0.827)^6 - \binom{6}{1} 0.827 (1 - 0.827)^5 \simeq 0.999$

Ejercicio 1: Manu

La efectividad en tiros libres de Manu Ginóbili es de $0,827$.

(b) ¿Cuál es la probabilidad que la primera vez que la emboca sea luego del tiro 4?

Solución

$Y =$ 'cantidad de tiros libres hasta la primera conversión'

$$Y \sim Ge(0.827)$$

$$P(Y = k) = 0.827(1 - 0.827)^{k-1}$$

$$P(Y > 4) = \sum_{k=5}^{+\infty} 0.827(1 - 0.827)^{k-1}$$

$$= 0.827 \sum_{j=4}^{+\infty} (1 - 0.827)^{j} = 0.827 \frac{(1 - 0.827)^4}{0.827} \simeq 0.00089$$

Ejercicio 1: Manu

La efectividad en tiros libres de Manu Ginóbili es de $0,827$

(c) Si Manu juega hasta que emboca al aro 5 veces, ¿cuál es la probabilidad de que deje de jugar luego de hacer 11 tiros?

Solución

$Y =$ 'cantidad de tiros libres hasta la quinta conversión'

$$Z \sim BN(5, 0.827)$$

$$P(Z = k) = \binom{k-1}{5-1} 0.827^5 (1 - 0.827)^{k-5}$$

$$P(Z = 11) = \binom{11-1}{5-1} 0.827^5 (1 - 0.827)^{11-5} \simeq 0.00109$$

Ejercicio 2: El tongo de las aerolíneas

El mercado aéreo estima que el 5% de las personas que hacen reservas en un cierto vuelo no viajan. Por ello, la política de ventas de la aerolíneas es sobrevender según esa estimación. Se tiene un vuelo de 50 pasajeros y se vendieron 52 pasajes (y esto es legal!).

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya un asiento disponible para cada pasajero que se presente de un vuelo?

Solución

$X =$ 'cantidad de pasajeros que se presentan al vuelo'

$$X \sim Bi(52, 0.95)$$

$P(X \leq 50) = 1 - P(X = 51) - P(X = 52)$

$= 1 - \binom{52}{51} 0.95^{51} 0.05 - \binom{52}{52} 0.95^{52}$

$\simeq 1 - 0.19 - 0.069 \simeq 0.741$

Ejercicio 2: El tongo de las aerolíneas

El mercado aéreo estima que el 5% de las personas que hacen reservas en un cierto vuelo no viajan. Por ello, la política de ventas de la aerolíneas es sobrevender según esa estimación. Se tiene un vuelo de 50 pasajeros y se vendieron 52 pasajes (y esto es legal!).

(b) ¿Cuál es la esperanza del número de pasajeros que se queda sin viajar? ¿Y la varianza?

Solución

Y = 'cantidad de pasajeros que se queda sin viajar', $R_Y = \{0, 1, 2\}$

$$P(Y = 0) = P(X \leq 50) = 0.741$$

$$P(Y = 1) = P(X = 51) \simeq 0.19$$

$$P(Y = 2) = P(X = 52) \simeq 0.069$$

$$E(Y) \simeq 0 \cdot 0.741 + 1 \cdot 0.19 + 2 \cdot 0.069 \simeq 0.328$$

$$E(Y^2) \simeq 0^2 \cdot 0.741 + 1^2 \cdot 0.19 + 2^2 \cdot 0.069 \simeq 0.466$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 \simeq 0.466 - 0.328^2 \simeq 0.3584$$

Ejercicio 2: El tongo de las aerolíneas

(c) Cuando se presentan más de 50 pasajeros al vuelo, las aerolíneas deben solventar el daño, y ofrecen a todos los pasajeros del vuelo cambiarlo por otro a cambio de cierta recompensa. Ximena viaja(ba) una vez por año. ¿Cuál es la probabilidad de que le ofrezcan recompensa antes del quinto año? ¿Y de que le ofrezcan por segunda vez recompensa en el cuarto año?

Solución

$Y =$ 'cantidad de vuelos hasta la primer sobreventa'

La probabilidad de sobreventa es
$P(X > 50) \simeq 1 - 0.741 = 0.259$

$$Y \sim Ge(0.259)$$

$P(Y < 5) = 1 - P(Y \geq 5) = 1 - 0.741^4 \simeq 0.6985$

$Z =$ 'cantidad de vuelos hasta la segunda sobreventa'

$$Z \sim BN(2, 0.259)$$

$P(Z = 4) = \binom{3}{1} 0.259^2 0.741^2 \simeq 0.11$

Variables discretas famosas

Hipergeométrica

Tenemos una población de tamaño N, con B individuos buenos. Extraemos m elementos de la población (muestra).

$X =$ 'cantidad de elementos buenos de la muestra

$$X \sim H(N, B, m)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{B}{k}\binom{N-B}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

$$E(X) = m\frac{B}{N}$$

$$V(X) = m\frac{B(N-B)(N-m)}{N^2(N-1)}$$

Ejercicio 3: El final de Análisis I

Para el final de Análisis I, Ximena tiene que estudiar la demostración de 20 teoremas. Decide que sólo va a estudiar la mitad. Si en el final le toman 4 teorema, y para aprobar tiene que saber hacer 2 bien, ¿cuál es la probabilidad de que Ximena apruebe?

Solución

$X =$ 'cantidad de teoremas que sabe demostrar del examen'

$$X \sim H(20, 10, 4)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{10}{4-k}}{\binom{20}{4}}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} - \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{3}}{\binom{20}{4}}$$

$$\simeq 1 - 0.0433 - 0.247 \simeq 0.7097$$

Ejercicio 3: El final de Análisis I

Si cambian el programa de la materia y ahora hay que estudiar 100 teoremas para el final (!!!) De nuevo, decide que sólo va a estudiar la mitad. Si en el final le toman 4 teoremas, y para aprobar tiene que saber hacer 2 bien, ¿cuál es la probabilidad de que Ximena apruebe? Calcularlo de manera exacta y por aproximación por una binomial.

Solución

$Y =$ 'cantidad de teoremas que sabe demostrar del examen'

$$Y \sim H(100, 50, 4)$$

$$P(Y = k) = \frac{\binom{50}{k}\binom{50}{4-k}}{\binom{100}{4}}$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - \frac{\binom{50}{0}\binom{50}{4}}{\binom{100}{4}} - \frac{\binom{50}{1}\binom{50}{3}}{\binom{100}{4}}$$

$$\simeq 1 - 0.0587 - 0.2499 \simeq 0.6914$$

Como la cantidad de teoremas que Ximena sabe demostrar es la mitad de la lista completa, cada vez que le muestran un teorema, la probabilidad de saberlo es $p = \dfrac{50}{100} = 0.5$.
Dado que $100 >> 4$, odemos pensar que la cantidad de problemas que sabe es

$$\tilde{Y} \sim Bi(4, 0.5)$$

Luego,
$P(\tilde{Y} \geq 2) = 1 - P(\tilde{Y} < 2) = 1 - P(\tilde{Y} = 0) - P(\tilde{Y} = 1) =$
$1 - 0.5^4 - 4 \cdot 0.5^4 = 0.6875$

Variables discretas famosas

Hipergeométrica

Tenemos una población de tamaño N, con B individuos buenos. Extraemos m elementos de la población (muestra).

$X =$ 'cantidad de elementos buenos de la muestra¿

$$X \sim H(N, B, m)$$

Si $N >> m$, entonces podemos aproximar X por

$$\tilde{X} = Bi\left(m, \frac{B}{N}\right)$$