Variables aleatorias continuas

Kevin Piterman

12 de Mayo, 2020

Resumen.

X es variable aleatoria continua si existe una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (la densidad de X) de manera que

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)ds$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Más en general, lo que vale es que si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$P(X \in A) = \int_A f_X(s)ds.$$

Propiedades.

1. $P(X = t) = 0$.
2. $F'_X = f_X$ (por TFCI).
3. $\mathbb{E}(X) = \int x f_X(x)dx$.
4. $\mathbb{E}(g(X)) = \int g(x)f_X(x)dx$.
5. $\mathbb{E}$ es lineal.
6. Las propiedades de la varianza, desvío estándar, etc. que valían para discretas.

La f_X no es cualquier cosa, sino que es una función que satisface las siguiente propiedades:

1. $f_X \geq 0$.
2. $\int f_X(x)dx = 1$.

Cuando no ponemos límites en la integral, asumimos que integramos en todo $\mathbb{R}$. Es decir, en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Propiedad útil. Si X es una variable continua con densidad f de manera que X toma valores en un intervalo I con probabilidad 1 (o sea, $P(X \in I) = 1$), entonces podemos suponer que $\text{Im}(X) \subseteq I$ y que $f(x) = 0$ para todo $x \notin I$.

Ejemplo 1. Sea X una variable continua con densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 10 \\ \frac{\alpha}{x^3} & x > 10 \end{cases}.$$

1. Determinar α.
2. Calcular F_X.
3. Calcular $\mathbb{E}(X)$.

Solución.
1. Como f_X es una función de densidad, su integral debe dar 1. A partir de esto, podemos despejar α.

$$\begin{aligned} 1 &= \int f_X(x)dx \\ &= \int_{10}^{+\infty} f_X(x)dx && \text{(pues } f_X \text{ es nula fuera de } (10, +\infty)) \\ &= \int_{10}^{+\infty} \frac{\alpha}{x^3}dx \\ &= \frac{-\alpha}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_{10}^{+\infty} \\ &= 0 - \left(\frac{-\alpha}{2}\frac{1}{100}\right) \\ &= \frac{\alpha}{200}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha = 200$.

2. Notemos que si $t \leq 10$, $F_X(t) = 0$ pues esto corresponde a integrar a f_X en el intervalo $(-\infty, t)$. Por lo tanto basta considerar valores de t mayores o iguales a 10. Si $t \geq 10$:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_X(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{10} f_X(s)ds + \int_{10}^{t} f_X(s)ds && \text{(pues } t \geq 10) \\ &= 0 + \frac{-200}{2s^2}\Big|_{10}^{t} \\ &= -100\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 1 - \frac{100}{t^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 10 \\ 1 - \frac{100}{t^2} & t \geq 10 \end{cases}.$$

3. Por definición,

$$\mathbb{E}(X) = \int x f_X(x)dx = \int_{10}^{+\infty} x\frac{200}{x^3}dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{200}{x^2}dx = -\frac{200}{x}\bigg|_{10}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{200}{10}\right) = 20.$$

Ejemplo 2. Supongamos que X es una variable aleatoria continua con densidad

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Determinar a, b de manera que $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{5}$.

Solución.

Utilizamos que la f es una densidad y por lo tanto integra 1:

$$1 = \int f(x)dx = \int_0^1 a + bx^2 dx = \left(ax + \frac{b}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = a + \frac{b}{3}.$$

Luego $a = 1 - \frac{b}{3}$.

Como la esperanza es $\frac{3}{5}$, utilizando la fórmula para calcularla, deducimos que:

$$\frac{3}{5} = \mathbb{E}(X) = \int xf(x)dx = \int_0^1 x(a + bx^2)dx = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}.$$

Reemplazando:

$$\frac{3}{5} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{6}\right) + \frac{b}{4} = \frac{1}{2} + \frac{b}{12}$$

Despejando,

$$b = 12(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}) = \frac{6}{5}.$$

Reemplazando para a,

$$a = 1 - \frac{b}{3} = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Ejemplo 3. Queremos minimizar el costo de viaje para una cita. Si llegamos s minutos antes, entonces tenemos un costo de cs, $c > 0$. Si llegamos s minutos tarde, entonces tenemos un costo de ks, $k > 0$. Además sabemos que el tiempo de viaje X es una variable aleatoria continua con función de densidad f. Determinar cuántos minutos antes deberíamos partir para minimizar el costo esperado.

Solución.
Construimos la función de costo:

$$g_t(X) = \begin{cases} c(t-X) & X \leq t \\ k(X-t) & X \geq t. \end{cases}$$

Calculo la esperanza de $g_t(X)$, es decir, el costo esperado si salí t minutos antes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g_t(X)) &= \int g_t(x) f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{t} c(t-x) f(x) dx + \int_{t}^{+\infty} k(x-t) f(x) dx \\
&= ct \int_{-\infty}^{t} f(x) dx - c \int_{-\infty}^{t} x f(x) dx + k \int_{t}^{+\infty} x f(x) dx - kt \int_{t}^{+\infty} f(x) dx \\
&= ct F_X(t) - c \int_{-\infty}^{t} x f(x) dx + k \int_{t}^{+\infty} x f(x) dx - kt(1 - F_X(t)) \\
&= h(t).
\end{aligned}$$

Como queremos minimizar el costo esperando (en función de t), minimizamos la función $h(t)$. O sea, buscamos ceros en su derivada.

$$\begin{aligned}
0 &= h'(t) \\
&= c(F_X(t) + tf(t)) - ctf(t) + k(-tf(t)) - k(1 - F_X(t) + t(-f(t))) \\
&= cF_X(t) - k + kF_X(t).
\end{aligned}$$

Despejando en la expresión anterior,

$$k = (c+k) F_X(t)$$

y pasando dividiendo

$$F_X(t) = \frac{k}{c+k}.$$

El tiempo que debemos salir antes es el tiempo t^* tal que $F_X(t^*) = \frac{k}{c+k}$. Notar que como $0 < \frac{k}{c+k} < 1$, y además F_X es continua y su imagen contiene al $(0,1)$, este valor es alcanzado por (al menos) un t (teorema de valor medio, o Bolzano).

Ejemplo 4: Teorema del cambio de variable en funciones continuas.
(TAREA) Sea X una variable aleatoria continua con densidad f. Supongamos que $g: I \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^1$ y estrictamente monótona (en particular biyectiva en su imagen con inversa $\mathcal{C}^1$), donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ (puede ser todo $\mathbb{R}$) e $\mathrm{Im}(X) \subseteq I$. Hallar la densidad de $g(X)$.
Sugerencia: separar en los casos g creciente y g decreciente.

Solución. Supongamos que g es creciente, por lo que su inversa g^{-1} también lo es. Si $t \in I$, entonces

$$F_{g(X)}(t) = P(g(X) \leq t) = P(g^{-1}(g(X)) \leq g^{-1}(t)) = P(X \leq g^{-1}(t)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(t)} f(s)ds.$$

Notemos que como X solo toma valores en I, su densidad f debe anularse fuera de I (recordar la Propiedad útil del principio).
Proponemos el siguiente cambio de variable:

$$u = g(s) \quad (\text{o bien } s = g^{-1}(u)),$$

$$du = g'(s)ds = g'(g^{-1}(u))ds.$$

Esto da lugar:

$$F_{g(X)}(t) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(t)} f(s)ds = \int_{-\infty}^{t} f(g^{-1}(u))\frac{1}{g'(g^{-1}(u))}du.$$

Por lo tanto, la densidad de $g(X)$ es:

$$f_{g(X)}(u) = \begin{cases} f(g^{-1}(u))\frac{1}{g'(g^{-1}(u))} & u \in g(I) \\ 0 & u \notin g(I) \end{cases}.$$

(Completar el otro caso y los detalles como ejercicio).