Intervalos de confianza- Ejemplos del método del pivot

Método general para construir un intervalo de confianza

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución F_θ.

- Un **intervalo de confianza** para θ de nivel $1-\alpha$ es un intervalo de extremos aleatorios, que dependen de la muestra,

$$[a(X_1, \ldots, X_n), b(X_1, \ldots, X_n)]$$

  tal que

$$\mathbb{P}(a(X_1, \ldots, X_n) < \theta < b(X_1, \ldots, X_n)) = 1-\alpha$$

- **Pivot**: función de la muestra y θ cuya distribución es conocida.

$$H(X_1, \ldots, X_n, \theta) \sim \text{ Distribución tabulada}$$

- **Método del pivot** encerrar al pivot entre los percentiles $1-\alpha/2$ y $\alpha/2$ de su distribución y despejar θ

Resumen bajo normalidad: $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$

Parámetro	Supuesto	Pivot
$\mu = \mathbb{E}(X_1)$	X_i Normales σ^2 conocido	$\frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
$\mu = \mathbb{E}(X_1)$	X_i Normales σ^2 DESconocido	$\frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$
$\sigma^2 = V(X_1)$	X_i Normales μ conocido	$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$
$\sigma^2 = V(X_1)$	X_i Normales μ DESconocido	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Ejemplo: Intervalo de confianza para el parámetro de la exponencial

Recordar

- Si $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d., $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, llamamos chi cuadrado con n grados de libertad a la distribución de

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

- la suma de n v.a. χ_1^2 tiene distribución χ_n^2
- **Ejercicio 23 de la práctica 3**. Sea Z una v.a. con distribución normal standard. Pruebe que $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$. (Esta variable aleatoria recibe el nombre de χ^2 con un grado de libertad)
- Una suma de n v.a. χ_1^2 es $\Gamma(n/2, 1/2)$. Por lo tanto,

$$\Gamma(n/2, 1/2) = \chi_n^2$$

Ejemplo: Intervalo de confianza para el parámetro de la exponencial

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $E(\lambda)$.
Recordar:

- La distribución de la suma de exponenciales es Gamma, es decir:
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$
- Una constante por una Gamma es Gamma:
$$V \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \text{ y } a > 0 \Rightarrow aV \sim \Gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{a}\right),$$

Ejemplo: Intervalo de confianza para el parámetro de la exponencial

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, \lambda\right)$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, 1\right)$$

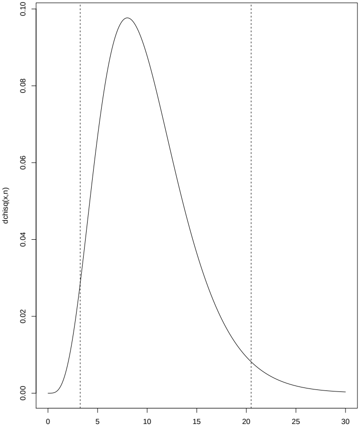
$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2n}$$

Pivot para le exponencial:

$$H\left(X_1, X_2, \ldots, X_n, \lambda\right) = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ejemplo: Intervalo de confianza para el parámetro de la exponencial

$$P\left(\chi^2_{2n,1-\alpha/2} \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \chi^2_{2n,a/2}\right) = 1 - \alpha$$



Ejemplo: Intervalo de confianza para el parámetro de la exponencial

$$P\left(\chi^2_{2n,1-\alpha/2} \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \chi^2_{2n,a/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\chi_{2n,1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \leq \lambda \leq \frac{\chi_{2n,a/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = 1-\alpha$$

Entonces el intervalo de confianza para λ es

$$\left[\frac{\chi_{2n,1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}, \frac{\chi_{2n,a/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$$

Ejemplo: Intervalo de confianza para θ en la $U[0,\theta]$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\cup(0,\theta)$.
Recordar

- el EMV de θ es $\hat{\theta} = \max(X_1, \ldots, X_n)$
- la distribución de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ es $(F_{X_1}(u))^n$
- La fda de $\hat{\theta}$ es

$$F_{\hat{\theta}}(u) = (F_{X_1}(u))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ \left(\frac{u}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 < u < \theta \\ 1 & \text{si } u \geq \theta \end{cases}$$

- La densidad de $\hat{\theta}$ es

$$f_{\hat{\theta}}(u) = n\left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(u)$$

Veamos que la distribución de $\hat{\theta}/\theta$ no depende de θ

Ejemplo: Intervalo de confianza para θ en la $U[0,\theta]$

Queremos demostrar que la distribución de $\hat{\theta}/\theta$ no depende de θ

$$F_{\hat{\theta}/\theta}(u) = P\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \le u\right) = P(\hat{\theta} \le \theta u) = F_{\hat{\theta}}(\theta u) = (F_{X_1}(\theta u))^n$$

Como $X_i \sim U(0,\theta)$

$$F_{\hat{\theta}/\theta}(u) = (F_{X_1}(\theta u))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta u \le 0 \\ \left(\frac{\theta u}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 < \theta u < \theta \\ 1 & \text{si } \theta u \ge \theta \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } u \le 0 \\ u^n & \text{si } 0 < u < 1 \\ 1 & \text{si } u \ge 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, la distribución de $\hat{\theta}/\theta$ no depende de θ. Derivando, se obtiene la densidad de $\hat{\theta}/\theta$

$$f_{\hat{\theta}/\theta}(u) = n u^{n-1} I_{(0,1)}(u)$$

Ejemplo: Intervalo de confianza para θ en la $U[0,\theta]$

Pivot:

$$H\left(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta\right) = \frac{\max\left(X_1, \ldots, X_n\right)}{\theta}$$

Buscamos a y b tales que

$$P\left(a \leq \frac{\max\left(X_1, \ldots, X_n\right)}{\theta} \leq b\right) = 1 - \alpha$$

y, obtenemos el siguiente intervalo

$$\left[\frac{\max\left(X_1, \ldots, X_n\right)}{b}, \frac{\max\left(X_1, \ldots, X_n\right)}{a}\right]$$

¿Cómo elegimos a y b ?. Debemos hallar a y $b, 0 < a < b < 1$, tales que

$$\int_a^b n w^{n-1} dw = \left. w^n \right|_a^b = b^n - a^n = 1 - \alpha$$

Ejemplo: Intervalo de confianza para θ en la $U[0,\theta]$

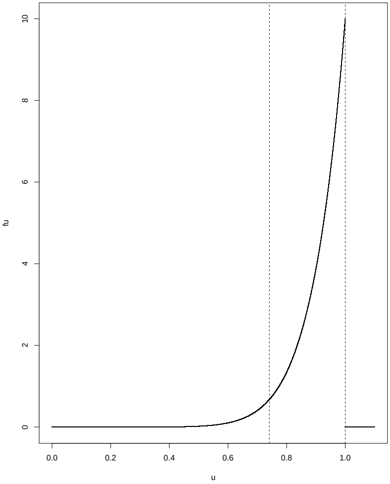


Figure: Densidad del pivot y percentiles α y $1-\alpha$

Ejemplo: Intervalo de confianza para θ en la $U[0, \theta]$

Conviene elegir la solución que produce el intervalo de menor longitud esperada, es decir, buscar a y b que minimicen $E(L)$ siendo

$$L = \max(X_1, \dots, X_n) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

sujeto a la condición $b^n - a^n = 1 - \alpha$.

Como ya hemos demostrado que $E(\max(X_1, \dots, X_n)) = \frac{n}{n+1}\theta$, debemos minimizar

$$\frac{n}{n+1}\theta \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

sujeto a la condición $b^n - a^n = 1 - \alpha$

El intervalo de mínima longitud esperada es

$$\left(\frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{1}, \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt[n]{\alpha}} \right)$$

Dem: Ejercicio opcional