Variables aleatorias discretas

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computación)

28 de abril de 2020

Variables aleatorias

Dado un experimento aleatorio, una variable aleatoria es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Variables aleatorias

Dado un experimento aleatorio, una

variable aleatoria es una función $X : \Omega \to \mathrm{R}$

X se dice discreta si toma un número finito o infinito numerable de valores.

Variables aleatorias discretas

Ejemplo: Tengo una caja con 3 bolitas azules y 5 rojas. El experimento es sacar 3 bolitas sin reposición. X mide la cantidad de bolitas azules que sacamos.

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

Variables aleatorias discretas

Ejemplo: Tengo una caja con 3 bolitas azules y 5 rojas. El experimento es sacar 3 bolitas sin reposición. X mide la cantidad de bolitas azules que sacamos.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = P(\text{'saco todas R'}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56}$$

$$P(X = 1) = P(\text{'saco una B y dos R'}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56}$$

$$P(X = 2) = P(\text{'saco una R y dos B'}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$$

$$P(X = 3) = P(\text{'saco todas B'}) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$$

Variables aleatorias discretas

Ejemplo: Tengo una caja con 3 bolitas azules y 5 rojas. El experimento es sacar 3 bolitas sin reposición. X mide la cantidad de bolitas azules que sacamos.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X = 0) = p_X(0) = \frac{10}{56}$
$P(X = 1) = p_X(1) = \frac{30}{56}$
$P(X = 2) = p_X(2) = \frac{15}{56}$
$P(X = 3) = p_X(3) = \frac{1}{56}$

$$p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

es la función de probabilidad puntual

Variables aleatorias discretas

La función de distribución acumulada

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

se define como

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

En el ejemplo:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{10}{56} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{40}{56} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{55}{56} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Variables aleatorias discretas

De función de probabilidad puntual a función de distribución acumulada:

TRUCO:

$$F(X \leq x) = \sum_{\substack{x_i \in R_x \\ x_i \leq x}} p_X(x_i)$$

Hay un salto en cada $x_i \in R_X$ de altura $p_X(x_i)$.

Variables aleatorias discretas

De función de distribución acumulada a función de probabilidad puntual:

TRUCO

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

La función de probabilidad puntual vale cero salvo en los saltos, donde vale el tamaño del salto.

Esperanza o valor esperado

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_x} p_X(x_i) x_i$$

Ojo que no necesariamente será un valor de R_X.

En el ejemplo:

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(X) = 0.\frac{10}{56} + 1.\frac{30}{56} + 2.\frac{15}{56} + 3.\frac{1}{56} = \frac{63}{56}$$

Ejercicio: Cuarentena

Ximena está cumpliendo la cuarentena. Si X es a variable aleatoria que cuenta la cantidad de días que sale Ximena por semana, su función de distribución está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.9 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0.94 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0.97 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0.99 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

(a) Calcular la función de probabilidad puntual.

Solución

$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (los saltos)

Para calcular la función de probabilidad puntual usamos la fórmula: $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$.

La probabilidad de que salga x días en la semana está dada por la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_X(x)$	0.1	0.4	0.3	0.1	0.04	0.03	0.02	0.01

(b) Por cada vez que sale, la probabilidad de contagiarse Covid19 es de 0.2.

- ¿Cuál es la probabilidad de que Ximena se contagie si sale 7 veces?
- En general, cuál es la probabilidad de que Ximena se contagie.
- Si no se contagió en esta semana, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido 7 veces?

Solución

Si $C_i = \begin{cases} 1 & \text{si se contagia el } i\text{-ésimo día que sale} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

$P(\text{'se contagia'}|X = 7) =$
$P(C_1 = 1 \vee C_2 = 1 \vee C_3 = 1 \vee \cdots \vee C_7 = 1) =$
$1 - P(C_1 = 0 \wedge C_2 = 0 \wedge C_3 = 0 \wedge \cdots \wedge C_7 = 0) =$
$1 - P(C_1 = 0)P(C_2 = 0)P(C_3 = 0)\cdots P(C_7 = 0) =$
$1 - 0.8^7 \simeq 0.79$

Usando la fórmula de probabilidad total:

$P(\text{'se contagia'}) =$

$P(\text{'se contagia'}|X=0).P(X=0)+$ $P(\text{'se contagia'}|X=1).P(X=1)+$
$P(\text{'se contagia'}|X=2).P(X=2)+$ $P(\text{'se contagia'}|X=3).P(X=3)+$
$P(\text{'se contagia'}|X=4).P(X=4)+$ $P(\text{'se contagia'}|X=5).P(X=5)+$
$P(\text{'se contagia'}|X=6).P(X=6)+$ $P(\text{'se contagia'}|X=7).P(X=7)+$

Las probabilidades $P(X=i)$ con $1 \leq i \leq 7$ están dadas por la función de probabilidade puntual.

Ahora, $P(\text{'se contagia'}|X=i)$ se resuelve similar al item anterior. Usando el complemento,

$P(\text{'se contagia'}|X=i) = 1 - P(\text{'no se contagia'}|X=i) =$
$1 - P(C_1 = 0 \wedge C_2 \wedge C_i) = 1 - 0.8^i$

Luego, $P(\text{'se contagia'}) = \sum_{i=0}^{7} P(\text{'se contagia'}|X=i)P(X=i) =$
$0 \cdot 0.1 + (1-0.8) \cdot 0.4 + (1-0.8^2) \cdot 0.3 + (1-0.8^3)0.1 + (1-0.8^4) \cdot 0.04 +$
$(1-0.8^5) \cdot 0.03 + (1-0.8^6) \cdot 0.02 + (1-0.8^7) \cdot 0.01 \simeq 0.289$

Por Bayes,
$P(X=7|\text{'no se contagia'}) = \frac{P(\text{'no se contagia'}|X=7)\cdot P(X=7)}{P(\text{'no se contagia'})}$

$P(\text{'no se contagia'}) = 1 - P(\text{'se contagia'}) \simeq 1 - 0.289 = 0.711$

$P(\text{'no se contagia'}|X=7) = 1 - P(\text{'se contagia'}|X=7) \simeq 1 - 0.79 = 0.21$

$P(X=7) = P_X(7) = 0.01$

Luego, $P(X=7|\text{'no se contagia'}) \simeq \frac{0.21\cdot 0.01}{0.711} \simeq 0.0029$