Clase Práctica 2

Maite Angel

2022-04-07

Mini repaso

Distribución discretas (ver formulas en el resumen de distribuciones)

Intuiciones:

¿En qué pensamos cuando escuchamos el nombre de las siguientes distribuciones?

- Binomial

Tenemos una población de tamaño n, con p probabilidad de éxito. Llamamos $X =$ "cantidad de elementos exitosos de la muestra de tamaño n" y su distribución es $X \sim B(n, p)$.

- Geométrica

Tenemos p probabilidad de éxito de un experimento. Llamamos $X =$ "cantidad de veces que repito el experimento hasta obtener el primer éxito", su distribución es $X \sim Ge(p)$.

Obs: Nosotros contamos k-1 de que no ocurran y en el k ocurre, R cuenta k de que no ocurran y en el k + 1 ocurre.

- Binomial negativa

Tenemos p probabilidad de éxito de un experimento. Llamamos $X =$ "cantidad de veces que repito el experimento hasta obtener el k éxito", su distribución es $X \sim BN(p, k)$.

- Hipergeométrica

Tenemos una población de tamaño N, con B elementos exitosos y extraemos m elementos de la población sin reposición. Llamamos $X =$ "cantidad de elementos exitosos de la muestra de tamaño m" y su distribución es $X \sim H(N, B, m)$.

- Poisson

Dada una unidad de tiempo y λ la intensidad con la que ocurre un evento. Llamamos $X =$ "cantidad de veces que ocurre un evento en una unidad de tiempo", su distribución es $X \sim P(\lambda)$.

Proceso de Poisson: Si llamamos $X =$ "cantidad de veces que ocurre un evento en una unidad de tiempo", $X \sim P(\lambda)$ y $X_t =$ "cantidad de ocurriencia en t unidades de tiempo" luego $X_t \sim P(\lambda * t)$

Propiedades

1) **Hiper con binom**

Si tenemos una población de tamaño N, con B elementos exitosos y extraemos m elementos de la población (muestra). Llamamos $X =$ "cantidad de elementos exitosos de la muestra" $X \sim H(N, B, m)$, luego:

sii N » m, entonces podemos aproximar X por $Y \sim Bi(m, \frac{B}{N})$

2) **Binom con Pois**

Si tenemos una población de tamaño n, donde la probabilidad de éxito es p y definimos $X =$ "cantidad de elementos exitosos de la población", $X \sim Bi(n, p)$, supongamos que $n \to \infty$ y $p \to 0$ (n»0 y p«0) de manera que $n * p$ es fijo entonces para podemos aproximar X por $Y \sim P(n * p)$

Ejercicio 1

Ana mira videos de gatitos en Youtube todo el tiempo. El 40 % de las veces se aburre y saltea el video sin terminar de verlo. Terminar o no los videos se suponen eventos independientes.

Item 1

Si sabemos que vio 10 videos. ¿Cual es la proba que haya terminado de ver 8? ¿Y de que haya terminado de ver como mucho 8?

Item 2

¿Cual es la proba que termine el primer video después de haber visto 5 sin terminar? Ana cierra Youtube después de haber terminado de ver 6 videos, ¿Cuál es la proba de que cierre youtube luego de reproducir **exactamente** 20 videos de gatitos?

Item 3

Ana termina de mirar siempre los videos de su gato y nunca termina los de su vecino. En la playlist que tiene seleccionada para hoy, tiene solamente 15 videos de su gato y 5 del vecino. Si mira 6 videos ¿ cuál es la proba de que termine 3? Y si en la playlist hay en total 1500 de su gato y 500 de su vecino, ¿Puedo decir facil cuanto da aproximadamente?

Solución

Item 1

Definamos la variable aleatoria V= "la cantidad de video que Ana termino de ver de los 10"

Tenemos definida cierta noción de éxito dada por el evento E, E=" Ana efectivamente vio el video entero".

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P(\text{"Ana no termine de ver el video"}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

Luego V cuenta la cantidad de "éxitos" en estos 10 videos, su distribución es entonces $V \sim Bi(10, 0.6)$

Tenemos que

$$P(\text{“Ana termine de ver 8 de los 10 videos”}) = P(V = 8) = dbinom(8, 10, 0.6)$$

$$P(\text{“Ana termine de ver como mucho 8 de los 10 videos”}) = P(V \leq 8) = pbinom(8, 10, 0.6)$$

Item 2

Ahora ya no puedo suponer que se cuántos vídeo vio en total pero también parece que lo deje necesitar... Definamos la variable aleatoria A=”cantidad de videos que ve a Ana hasta terminar 1.”

Como en el ítem anterior tenemos la noción de “éxito” tal que $P(E) = P(\text{"Ana termine de ver el video"}) = 0.6$.

A esta contando la cantidad de intentos hasta conseguir el primer éxito; luego $A \sim Ge(0.6)$

Por lo tanto,

$$P(\text{“Ana termine de ver el primer video despues de 5 sin terminar”}) = P(A > 5) = 1-P(A \leq 5) = 1-pgeom(5-1, 0.6)$$

Para la otra proba se complicó, ahora mi noción de éxito es terminar 6, pero el experimento sigue siendo parecido, lo que necesito es extender mi geométrica anterior.

Sea la v. a. $B =$”cantidad de videos que ve a Ana hasta terminar 6”, $B \sim BN(6, 0.6)$.

Luego,

$$P(\text{“Ana cierra youtube despues de ver exactamente 20 videos”}) = P(B = 20) = dnbinom(20-6, 6, 0.6)$$

Item 3

Ahora el problema es mucho más detallado, sabemos cuántos videos tiene en la playlist y tenemos bien definidos cuales termina y cuáles no. Además sabemos cuantos videos ve Ana de ellos.

Definimos $X =$”cantidad de videos que termina de ver de los 6 que ve.”, $X \sim H(20, 15, 6)$

$P(X = 3) = dhyper(3, 15, 5, 6)$

En el segundo caso, tenemos muchos videos (N) y una muestra chica (m) podemos aproximar la cuenta con el simple cálculo de la puntual de una binomial (ver prop.)

$P(X = 3) \approx dbinom(3, 6, 1500/2000)$ (ver cuanto da, con R, $dhyper(3, 1500, 500, 6)$)

Ejercicio 2

Dos amigos, Juan y Manuel, están mirando videos graciosos. **Manuel es un tipo raro e incorruptible, dice que no se rie con estas cosas.**

Juan le dice a Manuel que le va a pagar $1000 por cada video en el que se ría pero que tiene un tope: después de 2 videos en los que se ría no le paga más.

Supuestos:

- Las risas en cada video de Manuel son independientes de las de otro.
- Los videos en los que se rie Manuel siguen una distribución de Poisson de parámetro 2.

Item 1

Calcular la proba puntual de la plata que le paga Juan a Manuel.

Item 2

Calcular esperanza y varianza de la plata que le paga Juan a Manuel.

Solución

Item 1

Queremos analizar la variable $X =$ “Cantidad de plata que le paga Juan a Manuel”. X es discreta y su rango es $R(X) = \{0, 1000, 2000\}$.

Luego con definir la proba para cada valor del rango tendremos definida la función de probabilidad puntual.

Definamos otra variable más $Y =$ “Cantidad de videos en los que Manuel se rie”, $Y \sim P(2)$.

Ahora si,

$P(X = 0) = P($“Manuel no se rie en ningun video”$) = P(Y = 0) = dpois(0, 2)$

$P(X = 1000) = P($“Manuel se rie en un solo video”$) = P(Y = 1) = dpois(1, 2)$

$P(X = 2000) = P($“Manuel se rie en dos o mas videos”$) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 0) = 1 - dpois(1, 2) - dpois(0, 2)$

$$P_X(k) = \begin{cases} dpois(0,2) & si \;\; k = 0 \\ \\ dpois(1,2) & si \;\; k = 1000 \\ \\ 1 - dpois(1,2) - dpois(0,2) & si \;\; k = 2000 \\ 0 & en \;\; otro \;\; caso \end{cases}$$

Item 2

Con la probabilidad puntual ya definida, este item sale facil:

$E(X) = 0 * P(X = 0) + 1000 * P(X = 1000) + 2000 * P(X = 2000)$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (0^2 * P(X = 0) + 1000^2 * P(X = 1000) + 2000^2 * P(X = 2000)) - E(X)^2$