

1	2	3	4	Calificación

## Probabilidad y Estadística (C)

Segundo parcial - 28/11/2019

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. **Realizar cada ejercicio en hoja separada.** Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.

APELLIDO Y NOMBRES:..... Nº DE LIBRETA:.....

mail:.....@..... FIRMA:.....

Turno: 

Tarde: 14 a 17 hs	Noche: 19 a 22 hs
-------------------	-------------------

Nº de hojas entregadas:
-------------------------

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos.

Recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. **Justifique claramente sus afirmaciones.**

- (20 puntos) Una fábrica produce lámparas. Se observa la duración (en meses) de 35 lámparas elegidas al azar producidas por dicha fábrica, obteniéndose los siguientes valores, ordenados de menor a mayor,

0.89 , 1.43 , 2.55 , 3.36 , 3.50 , 3.53 , 4.42 , 4.88 , 7.06 , 7.78 ,  
8.09 , 10.47 , 12.95 , 13.58 , 13.89 , 14.12 , 15.41 , 15.71 , 18.29 , 22.96  
23.92 , 24.55 , 24.85 , 25.31 , 28.16 , 29.51 , 29.70 , 31.69 , 33.38 , 34.45 ,  
45.02 , 56.75 , 69.48 , 95.01 , 106.17 ,

cuyo promedio es 24.08057.

- (4 p) Estime la probabilidad de que una lámpara producida por esta fábrica dure más de 10 meses.
  - (4 p) Estime la mediana de la distribución de la duración de una lámpara.
  - (4 p) Dibuje un histograma de 6 barras.
  - (4 p) Asuma ahora que la duración de una lámpara tiene una distribución exponencial. Estime en este nuevo escenario la probabilidad de que una lámpara producida por esta fábrica dure más de 10 meses.
  - (4 p) Asumiendo que la duración de una lámpara tiene una distribución exponencial, obtenga en este nuevo escenario una estimación de la mediana de la distribución de la duración de una lámpara.
- (25 puntos) Se sabe que la longitud de los ejes que fabrica un establecimiento siderúrgico tiene densidad

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} x^{(\frac{1}{\theta}-1)} I_{(0,1)}(x), \quad \theta \in \Theta = \mathbb{R}_{>0}.$$

- (9 p) Hallar el estimador de MV,  $\hat{\theta}_{MV}$ , y el estimador de momentos,  $\hat{\theta}_M$ , de  $\theta$ .
- (8 p) Decidir si  $\hat{\theta}_{MV}$  es insesgado o asintóticamente insesgado.
- (8 p) Estudiar la consistencia de ambos estimadores.

3. (25 puntos) Sean  $X_1, \dots, X_{n_1}$  v.a.i.i.d. con distribución normal  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, 9)$ , y sean  $Y_1, \dots, Y_{n_2}$  v.a.i.i.d. independientes de las anteriores con distribución normal  $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, 9)$ . Considere los promedios

$$\bar{X}_{n_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad \bar{Y}_{n_2} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i.$$

- (a) (6 p) Indique cuál es la distribución de cada una de las siguientes variables aleatorias:

$$\bar{X}_{n_1}, \quad \bar{Y}_{n_2}, \quad \bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}.$$

- (b) (9 p) Encuentre un intervalo de confianza de nivel exacto  $1 - \alpha$  para  $\theta = \mu_1 - \mu_2$ , la diferencia de las medias, indicando cuál es el pivot y qué distribución tiene.

- (c) (3 p) Considere las siguientes  $n_1 = 7$  realizaciones para  $X$ :

$$8.31, \quad 5.66, \quad 8.64, \quad 7.19, \quad 4.16, \quad 7.02, \quad 2.61,$$

y  $n_2 = 8$  realizaciones para  $Y$ :

$$13.30, \quad 14.94, \quad 7.90, \quad 5.87, \quad 10.71, \quad 8.59, \quad 16.20, \quad 8.88.$$

Obtenga una estimación por intervalos para  $\theta$  utilizando un procedimiento de nivel 0.95.

- (d) (7 p) ¿Indican los datos del ítem anterior, a nivel 0.05, una diferencia de las medias?

4. (30 puntos) Un individuo afirma tener poderes extrasensoriales. Para demostrar su habilidad, se somete a una prueba que consiste en adivinar el palo (copa - espada - bastos - oro) de una serie de  $n$  cartas elegidas al azar. Sea  $p$  la probabilidad de que el individuo acierte el palo de una carta elegida al azar.

- (a) (2 p) Indique cuál es el valor  $p_0$  de  $p$  si el individuo no posee poderes extrasensoriales y responde al azar.

En adelante, basta con que  $p$  sea mayor que  $p_0$  para considerar que nuestro amigo tiene poderes.

- (b) (8 p) Plantee  $H_0$ ,  $H_1$  y una región de rechazo  $\mathcal{R}$  de nivel asintótico 0.05 que le permita concluir que el individuo tiene poderes. Caso contrario, será declarado un chanta.

- (c) (8 p) Utilizando  $n = 50$ , calcule la probabilidad aproximada de que el individuo sea declarado un chanta cuando la probabilidad verdadera de que acierte el palo de una carta elegida al azar es  $p = 0.4$ .

- (d) (3 p) Si el individuo acierta el 30% de las  $n = 50$  veces en las que se repite el experimento, ¿puede concluir a nivel aproximado 0.05 que tiene poderes?

- (e) (4 p) Calcular de manera aproximada el p-valor correspondiente a los resultados del ítem anterior.

- (f) (5 p) Calcular de manera aproximada el p-valor pero asumiendo ahora que el individuo acertó 90 de las 300 cartas que se le mostraron. ¿Puede concluir en este nuevo escenario, a nivel aproximado 0.05, que tiene poderes? ¿Cambia la proporción muestral de aciertos? ¿Cambian las conclusiones?