

# Clase práctica - 21 de mayo

Marina Valdora

21 de mayo de 2020 - Vectores discretos

## Repaso

### Vectores discretos

**Definición. Función de probabilidad conjunta de un vector aleatorio discreto (X,Y)**

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

---

**Definición. Rango de un vector aleatorio discreto (X,Y)**

$$R_{XY} = \{(x, y) / x \in R_X, y \in R_Y\}$$

---

### Propiedades

- Una función de probabilidad conjunta satisface:
- (a)  $p_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y)$
  - (b)  $\sum_x \sum_y p_{XY}(x, y) = 1$
- 

### Funciones de probabilidad marginal

- $p_X(x) = \sum_{y \in R_Y} p_{XY}(x, y)$  función de probabilidad marginal de  $X$
  - $p_Y(y) = \sum_{x \in R_X} p_{XY}(x, y)$  función de probabilidad marginal de  $Y$
- 

### Función de probabilidad condicional

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}$$

Observar que  $p_{XY}(x, y) = p_{Y|X=x}(y)p_X(x)$

## Ejercicios

- 1) La cantidad  $X$  de huevos que pone una pájara tiene la siguiente función de probabilidad puntual

|          |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|
| $x$      | 0   | 1   | 2   |
| $p_X(x)$ | 0.3 | 0.5 | 0.2 |

Si la probabilidad de que un huevo se desarrolle es  $p = 0.6$  y suponemos que hay independencia entre los desarrollos de los distintos huevos, sea  $Y =$  número de huevos que se desarrollan.

- a) hallar la función de probabilidad condicional de  $Y|X = 2$ .  
 b) hallar la función de probabilidad conjunta del vector  $(X, Y)$ ,  
 c) hallar la función de probabilidad puntual de la variable  $Y = \text{número de huevos que se desarrollan}$ .  
 d) calcular la  $P(X < 2|Y = 1)$ .

### Resolución

a)

| $y$            | 0    | 1    | 2    |
|----------------|------|------|------|
| $p_{Y X=2}(y)$ | 0.16 | 0.48 | 0.36 |

$$Y|X = 2 \sim B(2, 0.6)$$

$$p_{Y|X=2}(0) = P(Y = 0|X = 2) = 0.4^2$$

$$p_{Y|X=2}(1) = P(Y = 1|X = 2) = 2 * 0.6 * 0.4$$

$$p_{Y|X=2}(2) = P(Y = 2|X = 2) = 0.6^2$$

b)

| $y x$ | 0   | 1   | 2     | $p_Y(y)$ |
|-------|-----|-----|-------|----------|
| 0     | 0.3 | 0.2 | 0.032 | 0.532    |
| 1     | 0   | 0.3 | 0.096 | 0.396    |
| 2     | 0   | 0   | 0.072 | 0.072    |

$$p_{XY}(0, 0) = p_{Y|X=0}(0)p_X(0) = P(Y = 0|X = 0)P(X = 0) = 1 * 0.3 = 0.3$$

$$p_{XY}(0, 1) = p_{Y|X=0}(1)p_X(0) = 0$$

$$p_{XY}(0, 2) = p_{Y|X=0}(2)p_X(0) = 0$$

$$p_{XY}(1, 0) = p_{Y|X=1}(0)p_X(1) = 0.4 * 0.5 = 0.2$$

c)

| $y$      | 0     | 1     | 2     |
|----------|-------|-------|-------|
| $p_Y(y)$ | 0.532 | 0.396 | 0.072 |

d)

$$\begin{aligned}
 P(X < 2|Y = 1) &= P(X = 0|Y = 1) + P(X = 1|Y = 1) \\
 &= \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} + \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\
 &= 0 + 0.3/0.396 = 0.76
 \end{aligned}$$