Parcial AAAAHHHHHHHHHHH

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computación)

2 de junio de 2020

Ejercicio 1

Se tiene un dado con la siguiente propiedad: el número 1 y el 6 tienen probabilidad 1/4 de salir y la probabilidad de que salga cada uno de los números del 2 al 5 es 1/8.
Se tienen además dos urnas: la urna A tiene 3 bolitas blancas y 4 bolitas negras; la urna B tiene 4 bolitas blancas y 4 bolitas negras.
Se tira una vez el dado. Si el resultado es un múltiplo de 2, se extraen dos bolitas con reposición de la urna A. Si el resultado es un múltiplo de 3, se extraen dos bolitas sin reposición de la urna B. Observar que si el número que sale no es múltiplo de 2 ni de 3 entonces no se extrae ninguna bolita de ninguna urna y si el número que sale es múltiplo de 2 y de 3 entonces de hacen las extracciones en ambas urnas.

a) Si se hicieron extracciones de ambas urnas, ¿cuál es la probabilidad de haber extraído en total exactamente una bolita blanca?
b) ¿Cuál es la probabilidad de haber extraído en total exactamente una bolita blanca?
c) Sabiendo que se obtuvo exactamente una bolita blanca, hallar la probabilidad de que en el dado haya salido el número 4.
d) Decidir si son independientes los eventos "salió el número 4 en el dado" y "en total se extrajo exactamente una bolita blanca".

Solución

$X =$ "cantidad de bolitas blancas extraidas"
$X_A =$ "cantidad de bolitas blancas extraidas de la urna A"
$X_B =$ "cantidad de bolitas blancas extraidas de la urna B"
$Y =$ "resultado del dado"

a) $P(X = 1|Y = 6) = P(X_A = 1 \wedge X_B = 0|Y = 6) + P(X_A = 0 \wedge X_B = 1|Y = 6) =$
$2\frac{3}{7}\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8}\frac{3}{7} + (\frac{4}{7})^2 \cdot 2\frac{4}{8}\frac{4}{7} = \frac{100}{343} \simeq 0.2915$

b) Usamos la fórmula de probabilidad total.

$$P(X = 1) = \sum_{i=1}^{6} P(X = 1|Y = i) \cdot P(Y = i)$$

- Si $Y = i$ con $i = 1, 5$, entonces $P(X = 1|Y = i) = 0$ pues no se sacan bolitas.
- Si $Y = i$ con $i = 2, 4$, se sacan 2 bolitas de la urna A, y luego $P(X = 1|Y = i) = 2\frac{3}{7}\frac{4}{7} = \frac{24}{49}$
- Si $Y = 3$, se sacan 2 bolitas de la urna B, y luego $P(X = 1|Y = 3) = 2\frac{4}{8}\frac{4}{7} = \frac{4}{7}$.
- Si $Y = 6$, se sacan 2 bolitas de la urna A y 2 bolitas de la urna B, y luego $P(X = 1|Y = 6) = \frac{100}{343}$ por item a)

Luego, $P(X = 1) = 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{24}{49} \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{8} + \frac{24}{49} \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} + \frac{100}{343}\frac{1}{4} = \frac{183}{686} \simeq 0.26676$

c) Por el Teorema de Bayes,

$$P(Y=4|X=1)=\frac{P(X=1|Y=4)P(Y=4)}{P(X=1)}.$$

Por las cuentas del item b)

$$P(Y=4|X=1)=\frac{\frac{24}{49}\frac{1}{8}}{\frac{183}{686}}=\frac{14}{61}\simeq 0.2295$$

d) $P(X=1)=\frac{183}{686}$. Pero $P(X=1|Y=4)=\frac{24}{49}$
Luego, no son independientes.

Ejercicio 2

Una empresa de transporte envía camiones cargados de mercadería. La probabilidad de que envíe exactamente dos camiones en un día es 0.4 y se sabe que puede enviar como máximo dos camiones en un día (es decir, puede enviar 0, 1 ó 2 por día). Se conoce además, que la varianza del número de camiones enviados en un día es 0.41.

a) Hallar la función de probabilidad puntual de la cantidad de camiones enviados en un día.

b) Una semana (5 días) se dice curiosa si hubo exactamente tres días en los cuales se enviaron dos camiones. Sabiendo que la cantidad de camiones enviados en distintos días es independiente, determinar la probabilidad de que una semana sea curiosa.

c) Hallar la probabilidad de que en el transcurso de cinco semanas hayan habido exactamente dos semanas curiosas.

d) Hallar la probabilidad de que la segunda semana curiosa haya ocurrido recién en la quinta semana.

Solución

a) $X =$ " cantidad de camiones enviados", $r_X = \{0, 1, 2\}$

- $p_X(2) = 0.4$
- $V(X) = 0.41 = E(X^2) - E(X)^2$
  $= (0^2 P_X(0) + 1^2 p_X(0) + 2^2 p_X(2)) - (0p_X(0) + 1p_X(1) + 2p_X(2))^2$
  $= (p_X(1) + 4 \cdot 0.4) - (p_X(1) + 2 \cdot 0.4)^2$
  Despejamos $p_X(1)$. La única solución positiva es $p_X(1) = 0.5$.
- Finalmente, $p_X(0) = 1 - p_X(1) - p_X(2) = 0.1$

b) $Y =$ "cantidad de días en una semana que se envían dos camiones"
$Y \sim Bi(5, 0.4)$
$P(Y = 3) = \binom{5}{3} 0.4^3 0.6^2 = 0.2304$

c) $Z =$ "cantidad de semanas curiosas en 5 semanas"
$Z \sim Bi(5, 0.2304)$
$P(Z = 2) = \binom{5}{2} 0.2304^2 0.7696^3 \simeq 0.24197$

d) $W =$ "cantidad de semanas hasta la segunda semana curiosa"
$W \sim BN(2, 0.2304)$
$P(W = 5) = \binom{4}{1} 0.2304^2 0.7696^3 \simeq 0.09678$

Ejercicio 3

Santi va a la escuela todas las mañanas. Cuando su mamá lo lleva en auto, el tiempo que tarda en llegar (en min) es una variable aleatoria con distribución $U[1,4]$. Cuando su mamá no lo lleva se va caminando y el tiempo que tarda (en min) es una variable aleatoria continua con densidad

$$g(x) = (a + bx) I_{[1,4]}(x).$$

La probabilidad de que la madre lo lleve a la escuela en auto es 1/2. Se sabe, además, que la probabilidad de que Santi tarde 2 minutos o menos en llegar a la escuela es 3/10.

a) Probar que $a = 1/6$ y $b = 1/15$.

b) Si X es la variable aleatoria que indica el tiempo que tarda Santi en llegar a la escuela, hallar la función de densidad de X.

c) Si la elección del medio de transporte de Santi cada día es independiente ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana escolar (5 días) haya habido al menos un día en el que Santi tarde 2 minutos o menos en llegar a la escuela?

Solución

a) $X =$ "tiempo que tarda Santi en llegar a al escuela".
$Y =$ "la mamá lo lleva en auto", $Y \sim Be(0.5)$.

Por la fórmula de probabilidad total,
$P(X \leq 2) = P(X \leq 2|Y=1)P(Y=1) + P(X \leq 2|Y=0)P(Y=0)$.

- $X|_{Y=1} \sim U[1,4]$, luego $P(X \leq 2|Y=1) = P(X|_{Y=1} \leq 2) = \frac{1}{3}$
- $X|_{Y=0}$ tiene función de densidad g. Luego, $P(X \leq 2|Y=1) = \int_{-\infty}^{2}(a+bx)I[1,4](x)dx = \int_{1}^{2}(a+bx)dx = a + \frac{3}{2}b = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b$

Poniendo todo junto,

$$\frac{3}{10} = P(X \leq 2) = 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot (a + \frac{3}{2}b).$$

Por otra parte, por ser función de densidad,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(a+bx)I[1,4](x)dx = \int_{1}^{4}(a+bx)dx = 3a + 7.5b$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en a y b obtenemos como única solución $a = 1/6$ y $b = 1/15$.

b) $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x|Y=1)P(Y=1) + P(X \leq x|Y=0)P(Y=0) =$
$0.5F_{X|_{Y=0}}(x) + 0.5F_{X|_{Y=1}}(x)$.

Entonces,

$$f_X(x) = F_X(x)' = 0.5\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{15}x\right) I_{[1,4]}(x) + 0.5\frac{1}{3} I_{[1,4]}(x) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{30}x\right) I_{[1,4]}(x)$$

c) $Z =$ " cantidad de días en los que Santi tarda 2 min o menos"
$Z \sim Bi(5, 0.3)$

$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0) = 1 - 0.7^5 = 0.83193$

Ejercicio 4

Se sabe que la distribución condicional de Y dado que $X = x$ tiene densidad

$$f_{Y|X=x}(y) = e^{-y+x} I_{(x,+\infty)}(y)$$

y que X tiene distribución exponencial de parámetro 3.

a) Hallar la función de densidad conjunta de (X, Y).
b) Calcular $P(2X \geq Y)$.

c) Calcular $f_Y(y)$.

Solución

a) $f_{XY}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) f_X(x) = e^{-y+x} I_{(x,+\infty)}(y) \cdot 3e^{-3x} I_{[0,+\infty)}(x)$.
Reescribiendo,

$$f_{XY}(x,y) = 3e^{-2x-y} I_B(x,y),$$

donde $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > x\}$.

b) $P(2X \geq Y) = \int_A f_{XY}(x,y)dxdy$, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \geq y\}$. Entonces,

$$P(2X \geq Y) = \int_{A \cap B} 3e^{-2x-y} dxdy.$$

$A \cap B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x < y \leq 2x\}$. Luego,

$$P(2X \geq Y) = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{2x} 3e^{-2x} e^{-y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} 3e^{-2x} (-e^{-y}) \Big|_x^{2x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} 3e^{-2x}(-e^{-2x} + e^{-x})dx = -\frac{3}{4} \int_0^{+\infty} 4e^{-4x} dx + \int_0^{+\infty} 3e^{-3x} dx = \frac{1}{4}$$

c)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 3e^{-2x-y} I_B(x,y)dx$$

Podemos reescribir $I_B(x,y) = I_{[0,+\infty)}(y) I_{(0,y)}(x)$. Luego,

$$f_Y(y) = 3e^{-y} I_{[0,+\infty]}(y) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} I_{(0,y)}(x)dx = 3e^{-y} I_{[0,+\infty]}(y) \int_0^y e^{-2x} dx$$

$$= 3e^{-y} I_{[0,+\infty]}(y) \frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^y = \frac{3}{2} e^{-y}(1 - e^{-2y}) I_{[0,+\infty)}(y).$$