Clase Práctica 3

Maite Angel

2022-04-19

Distribuciones continuas famosas

Mini repaso, intuiciones de las distribuciones famosas continuas:

- **Uniforme**: La notamos $U(a, b)$. Un clásico expermiento es: *seleccionar un número al azar de un intervalo [a,b].*
- **Exponencial**: La notamos $Exp(\lambda)$. Un clásico expermiento es: *tiempo de espera hasta que ocurra el primer evento.*
- **Gamma**: La notamos $\Gamma(k, \lambda)$. Un clásico expermiento es: *tiempo hasta que ocurre el k-ésimo evento.*
- **Normal**: La notamos $N(\mu, \sigma^2)$. Un clásico expermiento donde se asume normalidad es: *errores de medición de alguna magnitud física*

Ejercicio 1

En Silicon Valley están de festejo, van a sortear un número al azar en el $[0, 10]$ y si este dista menos que 0.05 de 5, van a regalar una acción a todos los presentes.

Item 1: ¿Cuál es la probabilidad de que regalen una acción a cada persona presente?

Item 2: Si ahora se sortean 10 números al azar en el $[0, 10]$ y se procede a realizar la misma dinámica, ¿Cuál es la proba de que regalen exactamente 5 acciones a todos los presentes?

Solución

Item 1

Definimos el evento

$E =$ "Se regala una acción a cada persona presente" = "El número sorteado cae en [4.95,5.05]"

y la v.a. $X =$ numero sorteado al azar en el $[0, 10]$, $X \sim U(0, 10)$.

Luego, $P(E) = P(X \in [4.95, 5.05]) = \int_{4.95}^{5.05} \frac{1}{10} = \frac{1}{10}(5.05 - 4.95) = \frac{1}{10}0.1 = 0.01$

En R: $P(X \in [4.95, 5.05]) = punif(5.05, 0, 10) - punif(4.95, 0, 10) = 0.505 - 0.495 = 0.01$

Item 2

Definamos otra variable aleatoria que sea $Y =$ la cantidad de acciones que se regalan por persona presente. Si tomamos el evento E como noción de éxito tenemos que $Y \sim Bi(10, 0.01)$. Luego,

$P(Y = 5) = dbinom(5, 10, 0.01) = 2.396495e - 08$ (Tarea: pensar deducir la puntual de la binomial sin machetearse con el resumen!)

Ejercicio 2

Los lunes Juan trabaja solo en el Ticketek de la rural, se estima que el tiempo en minutos que tarda en atender a un cliente sigue una distribución exponencial de esperanza 20.

Item 1: ¿Cuál es la probabilidad de que la atención a un cliente dure más de 60 segundos un lunes?

Item 2: Es Lunes, Maria está esperando por ser atendida y tiene 5 personas adelante ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que comiencen a atenderla?

Solución

Item 1

Planteamos la v.a. $X =$ tiempo en minutos que tarda Juan en atender a un cliente tenemos que $X \sim Exp(\frac{1}{20})$ (ojo ahí que el enunciado nos da la esperanza, no el parámetro).

Luego, $P($"La atención a un cliente el lunes dure más de 60 segundos"$) =$

$P($"La atención de un cliente por Juan dure más de 1 minuto"$) =$

$$P(X > 1) = 1 - \int_0^1 \frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}dx = 1 - \frac{1}{20}(\frac{e^{-\frac{1}{20}} - e^0}{-\frac{1}{20}}) = 0.9512294$$

En R, $P(X > 1) = 1 - pexp(1, \frac{1}{20}) = 0.9512294$

Item 2

Planteemos ahora la v.a. $Y =$ tiempo en minutos que tarda Juan en atender a 5 clientes, $Y \sim \Gamma(5, \frac{1}{20})$

Con esto sale fácil, usando el resumen distribuciones, sabemos la esperanza de Y:

tiempo esperado para que atiendan a María =tiempo esperado que Juan atienda a 5 clientes $= E(Y) = \frac{5}{1/20} = 100$

Para calcular la esperanza sin usar el resumen de distribuciones hacemos el truquito de fabricarnos la densidad de una nueva variable aleatoria Z tal que $Z \sim \Gamma(6, \frac{1}{20})$:

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_Y(x)dx = \int_0^{+\infty} x\frac{\frac{1}{20}^5}{\Gamma(5)}x^{5-1}e^{-\frac{1}{20}x}dx$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{20}^5}{\Gamma(5)}x^{6-1}e^{-\frac{1}{20}x}dx = \frac{5}{\frac{1}{20}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{20}^6}{\Gamma(6)}x^{6-1}e^{-\frac{1}{20}x}dx$

$= \frac{5}{\frac{1}{20}} \int_0^{+\infty} f_Z(x)dx = \frac{5}{\frac{1}{20}} = 100$

Obs: Esperemos que María recapacite y se haya ido a su casa a comprarlas online.

Ejercicio 3

En una fábrica de micrófonos, hay dos máquinas que producen una determinada pieza de los aparatos cuyo diámetro, en milímetros, puede variar. El 90% de las veces lo produce la máquina 1, en este caso el diámetro, sigue una distribución normal de media 5 y varianza 2. Si es producido por la máquina 2 entonces sigue una distribución normal también de media 5 y varianza 5.

Item 1: ¿Cual es la probabilidad de que una pieza mida menos de 6 mm.?

Item 2: Si definimos $P_1 =$ diámetro en mm. de la pieza producido por la máquina 1 . y armamos la variable $X = 5P_1 + 3$. ¿Cuál es la esperanza y varianza de X?

Bonus (próximamente): Si ahora definimos $P_2 =$ diámetro en mm. de la pieza producido por la máquina 2 y armamos $X = 5P_1 + 3 + 4P_2$. ¿Cuál es la esperanza y varianza de X?

Solución

Item 1

Necesitamos saber qué máquina hizo la pieza, por lo tanto estamos en vistas de un clásico problema de prueba total.

Denotemos los siguientes eventos:

- $M_1 =$ "La pieza fue producida por la máquina 1"
- $M_2 =$ "La pieza fue producida por la máquina 2"

y la variable aleatoria:

- $X =$ diametro en milimetros de una pieza.

Luego si llamamos $X_1 = X|M_1$ y $X_2 = X|M_2$,

$P(X \leq 6) = P(X \leq 6|M_1)P(M_1) + P(X \leq 6|M_2)P(M_2) =$

$= P(X_1 \leq 6)0.9 + P(X_2 \leq 6)0.1 = P(\frac{X_1-5}{\sqrt{2}} \leq \frac{6-5}{\sqrt{2}})0.9 + P(\frac{X_2-5}{\sqrt{5}} \leq \frac{6-5}{\sqrt{5}})0.1$

$= ...$ Ahora que estandarizamos nos vamos a la tabla.

En R, $pnorm(6, 5, \sqrt{2}) * 0.9 + pnorm(6, 5, \sqrt{5}) * 0.1 \approx 0.7515$

Item 2

Usando las propiedades de esperanza y varianza

- $E(X) = 5 * E(P1) + 3 = 5 * 5 + 3 = 28$
- $V(X) = 5^2 * V(P1) + 3 = 5^2 * 2 = 50$