Problemas para resolver en clase

Kevin Piterman

28 de Abril, 2020

Ejercicio 1. Tiramos un dado de 6 caras equilibrado dos veces. Sea X = cantidad de veces que salió 1. Calcular la probabilidad puntual y la FDA de X. Graficar la FDA.

Resolución. Función de probabilidad puntual. El rango de X es $\mathrm{Rk}(X) = \{0, 1, 2\}$.

$$p_X(0) = \frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{36},$$
$$p_X(1) = 2\frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{5}{18},$$
$$p_X(2) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Función de distribución acumulada.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{25}{36} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{25}{36} + \frac{5}{18} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{25}{36} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{35}{36} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \end{cases}.$$

Ejercicio 2. Supongamos que hay una urna con 3 bolitas blancas, 3 rojas y 5 negras. Metemos la mano y sacamos dos bolitas (sin reposición). Supongamos que cada vez que sale una blanca ganamos \$1 y cada vez que sale roja perdemos \$1. Las negras no tienen valor. Sea X = ganancia obtenida. Calcular la probabilidad puntual de X, la FDA y su gráfico. Cuál es la probabilidad de tener ganancia en este juego?

Resolución. Función de probabilidad puntual. El rango de X es $\mathrm{Rk}(X) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$p_X(-2) = P(\mathrm{RR}) = \frac{3}{11}\frac{2}{10} = \frac{3}{55},$$
$$p_X(-1) = P(\mathrm{RN\ o\ NR}) = 2\frac{3}{11}\frac{5}{10} = \frac{3}{11},$$
$$p_X(0) = P(\mathrm{NN\ o\ RB\ o\ BR}) = \frac{5}{11}\frac{4}{10} + 2\frac{3}{11}\frac{3}{10} = \frac{19}{55},$$
$$p_X(1) = P(\mathrm{BN\ o\ NB}) = 2\frac{3}{11}\frac{5}{10} = \frac{3}{11} = p_X(-1),$$
$$p_X(2) = P(\mathrm{BB})(= p_X(-2)) = \frac{3}{55}.$$

Función de distribución acumulada.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ \frac{3}{55} & -2 \leq t < -1 \\ \frac{3}{55} + \frac{3}{11} & -1 \leq t < 0 \\ \frac{3}{55} + \frac{3}{11} + \frac{19}{55} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{55} + \frac{3}{11} + \frac{19}{55} + \frac{3}{11} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ \frac{3}{55} & -2 \leq t < -1 \\ \frac{18}{55} & -1 \leq t < 0 \\ \frac{37}{55} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{52}{55} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \end{cases}.$$

La probabilidad de tener ganancia en este juego es

$$P(X>0) = 1 - P(X \le 0) = 1 - F_X(0) = 1 - \frac{37}{55} = \frac{18}{55}.$$

Ejercicio 3. Sea $N \ge 6$. Tenemos $N+1$ urnas, numeradas $0,1,2,\dots,N$ de manera que la urna i contiene i bolitas blancas y $N-i$ bolitas negras. Se elige una urna al azar y se realizan dos extracciones de tal urna con reposición. Sea X la cantidad de bolitas blancas extraídas. Calcular:

i. Probabilidad puntual de X.

ii. La probabilidad de que ambas bolitas extraídas sean negras si se eligió una urna par.

iii. Haber elegido una urna ≥ 6 (o sea entre la 6 y la N) si salieron 2 blancas.

Fórmulas útiles:

$$\sum_{i=0}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \tag{0.1}$$

$$\sum_{i=0}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \tag{0.2}$$

Resolución. i. Función de probabilidad puntual. El rango de X es $\mathrm{Rk}(X) = \{0,1,2\}$. Para conocer la probabilidad puntual de X aplicamos al fórmula de probabilidad total porque lo que sí sabemos son las probabilidades puntuales de X cuando nos restringimos a una urna en particular. Notemos por U_i al evento "elegir la urna i-ésima". Como elegir las urnas es equiprobable, $P(U_i) = \frac{1}{N+1}$. Aplicando probabilidad total, tenemos que

$$p_X(n) = P(X=n) = \sum_{i=0}^{N} P(X=n|U_i)P(U_i) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} P(X=n|U_i)$$

donde $n \in \mathrm{Rk}(X)$. A partir de esto, calculamos las puntuales dentro de las urnas:

$$P(X=n|U_i) = \begin{cases} \left(\frac{(N-i)}{N}\right)^2 & n=0 \\ 2\frac{i}{N}\frac{N-i}{N} & n=1 \\ \left(\frac{i}{N}\right)^2 & n=2 \end{cases}.$$

Para cada valor posible de n, resolvemos la sumatoria correspondiente. Notar que por una cuestión de los colores y cantidad de bolitas en cada urna, $p_X(0) = p_X(2)$ (a quien no le convenza, lo invito a hacer la cuenta). Utilizaremos las fórmulas de las sumatorias.

$$\begin{aligned} p_X(0) &= \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} P(X=0|U_i) \\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{(N-i)}{N}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(N+1)N^2}\sum_{i=0}^{N}(N^2 - 2Ni + i^2) \\ &= \frac{1}{(N+1)N^2}\left(\left(\sum_{i=0}^{N} N^2\right) + \left(\sum_{i=0}^{N} -2Ni\right) + \left(\sum_{i=0}^{N} i^2\right)\right) && \text{(separo en tres sumas)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(N+1)N^2}\left(N^2(N+1)+(-2N)\frac{N(N+1)}{2}+\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) && \text{(uso (0.1) y (0.2))}\\
&= \frac{1}{(N+1)N^2}\left(N^3+N^2-N^3-N^2+\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{(N+1)N^2}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{N}\frac{(2N+1)}{6}\\
&= \frac{(2N+1)}{6N}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_X(1) &= \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} P(X=1|U_i)\\
&= \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} 2\frac{i}{N}\frac{N-i}{N}\\
&= \frac{2}{(N+1)N^2}\sum_{i=0}^{N} i(N-i)\\
&= \frac{2}{(N+1)N^2}\sum_{i=0}^{N}(Ni-i^2)\\
&= \frac{2}{(N+1)N^2}\left(\left(N\sum_{i=0}^{N} i\right)-\left(\sum_{i=0}^{N} i^2\right)\right)\\
&= \frac{2}{(N+1)N^2}\left(N\frac{N(N+1)}{2}-\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) && \text{(uso (0.1) y (0.2))}\\
&= \frac{2}{(N+1)N^2}\frac{N(N+1)}{2}\left(N-\frac{(2N+1)}{3}\right) && \text{(factor común } \frac{N(N+1)}{2}\text{)}\\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{3N}{3}-\frac{2N+1}{3}\right)\\
&= \frac{1}{N}\frac{N-1}{3}\\
&= \frac{N-1}{3N}.
\end{aligned}
$$

Luego $p_X(0) = \frac{2N+1}{6N} = p_X(2)$ y $p_X(1) = \frac{N-1}{3N}$.

ii. Para calcular la probabilidad de haber sacado ambas negras si la urna elegida fue par, podemos pensar que en realidad nuestro universo se restringe solo a urnas pares, y que debemos elegir una de ellas al azar y realizar las extracciones. De esta forma, tenemos que hacer la misma cuenta que antes pero solo teniendo en cuenta que elegimos equiprobablemente entre las urnas pares, y que luego realizamos las dos extracciones. Sea Y la variable aleatoria que cuenta la cantidad de bolitas blancas que extraemos si realizamos el experimento con urnas pares. Entonces la probabilidad puntual de Y se puede calcular de manera análoga a la de X. Más aún, la probabilidad que nos interesa es $P(Y=0) = p_Y(0)$. Procedemos de manera análoga entonces al caso anterior teniendo en cuenta ahora que, si E es el evento “sacamos de una urna par”, entonces estaremos haciendo las cuentas bajo la probabilidad condicional $P(.|E)$. Notar que $P(Y=0) = P(X=0|E) = \tilde{P}(X=0)$.

Para contar urnas pares usamos la notación $i = 2j$, y por lo tanto j recorre los enteros de 0 a $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Notar que $P(U_{2j}|E) = \frac{1}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ pues la cantidad de urnas pares es $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$ y son todas equiprobables. Sea $M = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

$$
\begin{aligned}
p_Y(0) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} P(Y = 0|U_{2j}) P(U_{2j}|E) && \text{(proba total)} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} P(Y = 0|U_{2j}) \frac{1}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} \\
&= \frac{1}{M+1} \sum_{j=0}^{M} \left(\frac{(N-2j)}{N} \right)^2 && (M = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor) \\
&= \frac{1}{(M+1)N^2} \sum_{j=0}^{M} (N-2j)^2 \\
&= \frac{1}{(M+1)N^2} \sum_{j=0}^{M} (N^2 - 4Nj + 4j^2) \\
&= \frac{1}{(M+1)N^2} \left(\left(\sum_{j=0}^{M} N^2 \right) + \left(\sum_{j=0}^{M} (-4Nj) \right) + \left(\sum_{j=0}^{M} (4j^2) \right) \right) \\
&= \frac{1}{(M+1)N^2} \left((M+1)N^2 + (-4N) \frac{M(M+1)}{2} + 4 \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} \right) \\
&= \frac{1}{(M+1)N^2} (M+1) \left(N^2 - 2NM + 2 \frac{M(2M+1)}{3} \right) \\
&= \frac{1}{N^2} \left(\frac{3N^2 - 6NM}{3} + \frac{4M^2 + 2M}{3} \right) \\
&= \frac{1}{N^2} \frac{3N^2 - 6NM + 4M^2 + 2M}{3}.
\end{aligned}
$$

iii. Tenemos que calcular una probabilidad de un evento pasado conociendo el resultado a futuro. Este tipo de probabilidades las calculamos mejor "al revés". Concretamente, tenemos que calcular $P(U_i \text{ para } i \geq 6|X = 2)$, y lo que sabemos calcular es la probabilidad de $X = 2$ sujeto a estar en alguna urna U_i con $i \geq 6$. Por lo tanto, procedemos con Bayes:

$$P(U_i \text{ para } i \geq 6|X = 2) = P(X = 2|U_i \text{ para } i \geq 6) \frac{P(U_i \text{ para } i \geq 6)}{P(X = 2)}.$$

Por ser eventos disjuntos tenemos que

$$P(U_i \text{ para } i \geq 6) = \sum_{i=6}^{N} P(U_i) = (N-5)P(U_i) = (N-5)\frac{1}{N+1}.$$

Además $P(X = 2) = \frac{2N+1}{6N}$ por el inciso i.

Luego resta calcular $q = P(X = 2|U_i \text{ para } i \geq 6)$. Análogamente al item ii., podemos pensar que estamos trabajando solo en las urnas 6 a la N, y hacer la misma cuenta que en el caso general. Notemos que esto es lo mismo que haber estar trabajando con $N-5$ urnas que en vez de numerarlas $0, 1, \ldots, N-6$, las numeramos $6, 7, \ldots, N$. Entonces la probabilidad q que queremos calcular es la misma que $p_X(2)$ pero reemplazando N por $N-6$. En consecuencia $q = \frac{2(N-6)+1}{6(N-6)}$ y la probabilidad que queremos calcular es

$$q \frac{P(U_i \text{ para } i \geq 6)}{P(X=2)} = \left(\frac{2(N-6)+1}{6(N-6)} \right) \frac{(N-5)}{N+1} \frac{1}{\frac{2N+1}{6N}}.$$