Vectores aleatorios (capítulo 2)

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computació n)

26 de mayo de 2020

Ejercicio 1:

En el programa de Guido Kaczka, un concursante participa del siguiente juego para ganar el premio final. Elige una de las tres puertas disponibles y gana, si hay, el premio que hay detrás. Antes de elegir una puerta, el participante debe tirar un dado 3 veces. La producció n colocará premios de manera aleatoria en tantas puertas como ases haya conseguido.

Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de ases en ~~el~~ la tirada de 3 dados e Y la variable aleatoria que determina si ganó premio (es decir, $Y = 1$ si gana e $Y = 0$ si no).

(a) Calcular p_{XY}, p_X y p_Y.

(b) Hallar $\mathrm{Cov}(X, Y)$ y $Corr(X, Y)$. ¿Son independientes?

$X \sim B(3, 1/6)$

$p_X(x) = \binom{3}{x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}$

$Y|_{X=x} \sim Be\left(\frac{x}{3}\right)$

P_{XY}

$x \backslash y$	0	1	
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	0	$\}P_X(0)$
1	$\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	$\}P_X(1)$
2	$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\frac{2}{3}\cdot 3\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\}P_X(2)$
3	0	$1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\}P_X(3)$
	$P_Y(0)$	$P_Y(1)$	

$$P_Y(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 2\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{6}$$

$$P_Y(1) = \frac{1}{6}$$

$$P_{XY}(\underset{x}{\uparrow}0,\underset{y}{\uparrow}0) = P(X=0, Y=0)$$

$$= \underbrace{P(Y=0\mid X=0)}_{1}\cdot \underbrace{P(X=0)}_{\left(\frac{5}{6}\right)^3}$$

$$P_{XY}(0,1) = P(X=0, Y=1)$$

$$= \underbrace{P(Y=1\mid X=0)}_{=0} P(X=0)$$

$$P_{XY}(1,0) = P(X=1, Y=0)$$

$$= \underbrace{P(Y=0\mid X=1)}_{2/3} \underbrace{P(X=1)}_{\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

$$P_{XY}(1,1) = P(X=1, Y=1)$$

$$= \underbrace{P(X=1\mid Y=1)}_{1/3} \underbrace{P(Y=1)}_{\binom{3}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \underbrace{E(X\cdot Y)}_{\rightsquigarrow} - \underbrace{E(X)}_{3\cdot 1/6}\ \underbrace{E(Y)}_{1/6} = 5/36 - 3/6 \cdot \frac{1}{6} = 2/36 \neq 0$$

$$E(X\cdot Y) = \sum_{y\in r_Y} \sum_{x\in r_X} x\cdot y \cdot p_{XY}(x,y)$$

$$= \sum_{x=1}^{3} x\cdot y \ p_{XY}(x,y) = 1\cdot p_{XY}(1,1) + 2\, p_{XY}(2,1) + 3\, p_{XY}(3,1)$$

$y=1$

si $y=0$ o $x=0$ los sumandos dan 0

$$= 5/36$$

$\rightsquigarrow$ $\text{Corr}(X,Y) \neq 0 \Rightarrow X, Y$ dependientes

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{2/36}{\sqrt{15/36}\cdot\sqrt{5/36}} \cong 0.23$$

$\rightsquigarrow$ $\text{Var}(X) = n\,p(1-p) = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{15}{36}$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1/6 - (1/6)^2 = 1/6 - \frac{1}{36} = 5/36$$

Ejercicio 2: El karma del 160

Julieta estudia en Ciudad Universitaria. Tiene tres alternativas para llegar a la facultad desde su casa: el 37 (A), el 34 (B) y el 160 (C). Se sabe que los porcentajes de veces que usa estos medios son respectivamente: 50%, 30% y 20%.

El tiempo de viaje con el transporte i es una variable aleatoria T_i (en horas). El tiempo que tarda el 37 sigue la ley $f_{T_{37}}(t) = 2t \ I_{[0,1]}(t)$, el 34, $f_{T_{34}}(t) = 0.5t \ I_{[0,2]}(t)$, y el 160, $f_{T_{160}}(t) = 0.125t \ I_{[0,4]}(t)$.

Si ha transcurrido media hora de viaje y aún no ha llegado a la clase, hallar la probabilidad de que se haya tomado el 37.

$$X = \begin{cases} 37 \\ 160 \\ 34 \end{cases}$$

discreta

$P(37) = 0.5$

$P(34) = 0.3$

$p_X(160) = 0.2$

$$\left.\begin{array}{l} T_{37} \\ T_{34} \\ T_{160} \end{array}\right\} \text{continuas}$$

T tiempo que tarda en llegar a clase

$P(X = 37 \mid T > 0.5) = ?$

$$P(X=37 \mid T>0.5) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(T>0.5 \mid X=37)\cdot P(X=37)}{P(T>0.5)}$$

$\rightsquigarrow T\big|_{X=37}$ tiene función de densidad $f_{T_{37}}$

- $P(X=37) = 0.5$
- $P(T>0.5 \mid X=37) = \int_{0.5}^{+\infty} f_{T_{37}}(t)\,dt = \int_{0.5}^{+\infty} 2t\, I_{[0,1]}(t)\,dt =$

$$= \int_{0.5}^{1} 2t\,dt = t^2\Big|_{0.5}^{1} = 1^2-(0.5)^2 = 3/4$$

- $P(T>0.5) \underset{\text{Prob total}}{=} \overbrace{P(T>0.5 \mid X=37)}^{3/5}\,\overbrace{P(X=37)}^{0.5} + \overbrace{P(T>0.5 \mid X=34)}^{?}\,\overbrace{P(X=34)}^{0.3}$

$$+\ \underbrace{P(T>0.5 \mid X=160)}_{?}\cdot \underbrace{P(X=160)}_{0.2}$$

$$P(T>0.5 \mid X=34) = \int_{0.5}^{+\infty} f_{T_{34}}(t)\,dt = \int_{0.5}^{+\infty} 0.5t\, I_{[0,2]}(t)\,dt =$$

$$= \int_{0.5}^{2} 0.5t\,dt = 0.5\,\frac{t^2}{2}\Big|_{0.5}^{2} = 0.25\left[2^2 - 0.5^2\right] = 0.25\cdot[4-0.25] =$$

$$= 0.25\cdot 3.75 = \boxed{\frac{15}{16}}$$

$$P(T>0.5 \mid X=160) = \int_{0.5}^{+\infty} \underbrace{0.125\, I_{[0,4]}}_{f_{T_{160}}}(t)\,dt = \int_{0.5}^{4} 0.125\,t\,dt =$$

$$= 0.125\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{0.5}^{4} = \frac{1}{16}\cdot\left[4^2 - 0.5^2\right] = \boxed{\frac{63}{64}}$$

Luego, $P(T>0.5) = \frac{3}{5}\cdot 0.5 + \frac{15}{16}\cdot 0.3 + \frac{63}{64}\cdot 0.2 \cong 0.778$

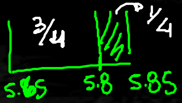
Volviendo al principio, $P(X=37 \mid T>0.5) = \frac{P(T>0.5 \mid X=37)\,P(X=37)}{P(T>0.5)}$

$$\cong \frac{0.75\times 0.5}{0.778} \cong 0.48$$

Ejercicio 3: Tokio 2020 (ex)

Germán Chiaraviglio está participando de un campeonato selectivo para los Juegos Olímpicos Tokio 2020. Para clasificar (en salto con garrocha), debe lograr una marca mínima de 5.80 metros. Si dispone de 3 intentos y la altura de sus saltos son una variables aleatorias independientes de distribució n

$$H \sim U(5.65, 5.85),$$



calcular la probabilidad de que clasifique a los Juegos Olimpicos Tokio 2020 (2021?).

$H_2, H_3, H_1 \sim U(5.65, 5.85)$

$P(\underbrace{\text{máx}\{H_1\ H_2\ H_3\}}_{X} \geq 5.8\,m) \Leftrightarrow P(Y \geq 1)$

Otra manera

$Y \sim Bi(3, 1/4)$

$\boxed{P(H \in [5.80, 5.85])}$

$H_1\ H_2\ H_3$ va iid

$X = \max\{H_1, H_2, H_3\}$

$\rightsquigarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P(H_1 \leq x,\ H_2 \leq x,\ H_3 \leq x) =$

$= P(H_1 \leq x) \cdot P(H_2 \leq x) \cdot P(H_3 \leq x) \underset{\text{i.d.}}{\overset{\uparrow}{=}} P(H_1 \leq x)^3 =$

$\downarrow$

indeptes

$= F_H(x)^3$

En este caso,

$P(X \leq 5.8) = P(H \leq 5.8)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$P(X \geq 5.8) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$