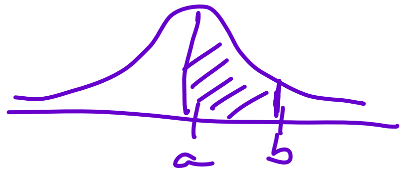
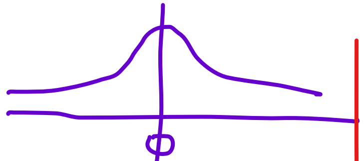
Distribución normal

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \qquad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0 \qquad \text{densidad } N(\mu, \sigma^2)$$



Em particular

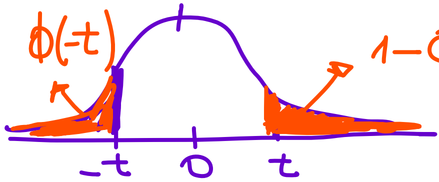
- $X \sim N(0,1)$ $\quad f_X(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ tabla



$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$

- $F_X(t) = \Phi(t) = P(X \leq t) =$

- Notar que $\boxed{\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)}$ $\quad t > 0$



- $\boxed{Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \dfrac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)}$
- $E(Y) = \mu, \quad V(Y) = \sigma^2$

TABLA $X \sim N(0,1)$

- $P(X \leq 2{,}23) = 0{,}9871 = \Phi(2{,}23)$
- $P(X \leq 3{,}49) = 0{,}9998$
- $\Phi(4{,}24) \simeq 1$
- $P(X \leq -1{,}45) = \Phi(-1.45) = 1 - \Phi(1.45) = 1 - 0{,}9265$
- $P(X > 2{,}07) = 1 - \underline{\Phi(2{,}07)} =$

$X \sim N(2,3)$

$P(X < 2{,}5) =$

$P\Big(\underbrace{\dfrac{X-2}{\sqrt{3}}}_{Y \sim N(0,1)} < \dfrac{2{,}5-2}{\sqrt{3}}\Big) =$

$= P\Big(Y \leq \underbrace{\dfrac{2{,}5-2}{\sqrt{3}}}_{b}\Big) = \Phi(b)$

$P(X > a) = 0{,}17$ Hallar a

$1 - P(X \leq a) = 0{,}17$

$P(X \leq a) = 0{,}83$

$P\Big(\underbrace{\dfrac{X-2}{\sqrt{3}}}_{Y \sim N(0,1)} \leq \dfrac{a-2}{\sqrt{3}}\Big) = 0{,}83$

$\Phi\Big(\dfrac{a-2}{\sqrt{3}}\Big) = 0{,}83$

$\dfrac{a-2}{\sqrt{3}} \approx 0{,}95$ tabla

$a \approx 0{,}95\sqrt{3} + 2$

$Z < 2 \Leftrightarrow 3Z \leq 6$

$\{X \leq a\} \equiv \Big\{Y \leq \dfrac{a-2}{\sqrt{3}}\Big\}$

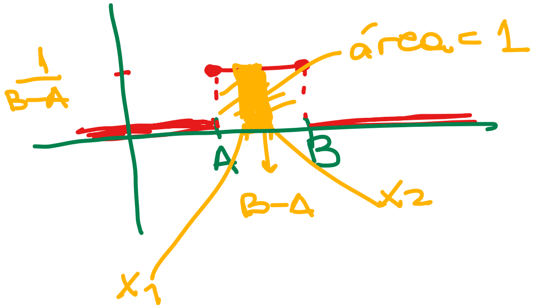
Ejercicio 1.

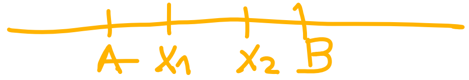
a) Se eligen 5 números al azar en el intervalo [1,5]. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos disten de un número natural en menos de 0.02.

"éxito"

b) Se eligen 50 números al azar en el intervalo [1,5]. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos disten de un número natural en menos de 0.02. Comparar con su versión aproximada.

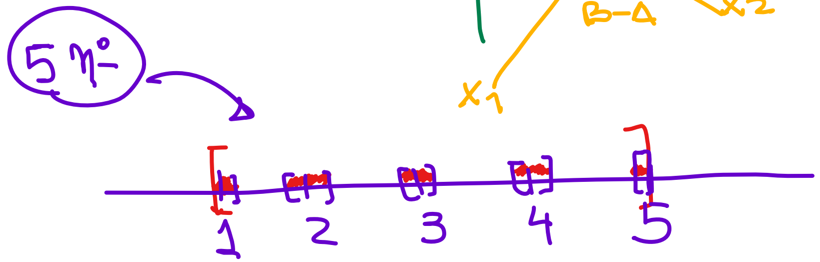
$X \sim \mathcal{U}[A,B]$





$x_1 < x_2$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{(x_2-x_1)}{(B-A)} = \frac{\text{long}[x_1,x_2]}{\text{long}[A,B]}$$



$X \sim \mathcal{U}[1,5]$

X = nº elegido

Y = # de nº elegidos que distan de un natural en menos de 0,02

$\underline{\text{éxito}}$

$$Y \sim B(n=5,\ p=P(X\in A))$$

$$A=[1,1.02)\cup(1.98,2.02)\cup(2.98,3.02)\cup(3.98,4.02)\cup(4.98,5]$$

éxito $\doteq \{X \in A\}$ $\qquad p = P(X\in A)$

$$P(Y=2)=\binom{5}{2}p^2(1-p)^3=\dots$$

$$\boxed{1.98 < X < 2.02}$$

$$p = P(X\in A) = P(X\in[1,1.02]) + P(\overbrace{X\in[1.98,2.02]}) + \dots$$

$X \sim \mathcal{U}[1,5]$

$$= 3\times\frac{0.04}{4} + \underbrace{2\times\frac{0,02}{4}}_{\frac{0,04}{4}} = \frac{\cancel{4}\cdot 0,04}{\cancel{4}} = \boxed{0,04}$$

Ejercicio 2. La vida útil (en meses) de un componente eléctrico es una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro λ, tal que $P(X>20) = 0.449$.

a) Hallar el parámetro λ.

b) Hallar la probabilidad de que la vida útil de uno de estos componentes sea mayor que 10 meses.

c) Si se sabe que uno de estos componentes dura más de 20 meses, calcular la probabilidad de que dure más de 30 meses.

d) Se define una nueva variable aleatoria $Y = X^2-2$. Calcular la función de densidad de Y.

X= duración en meses de un comp electrónico

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ Recordar $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ $\quad F(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = P(X \leq t)$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{t>0}{P(X>t)}} = 1-(1-e^{-\lambda t}) = \boxed{e^{-\lambda t}}$$

a) $e^{-\lambda 20} = 0{,}449 \Leftrightarrow -\lambda 20 = \ln 0{,}449 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0{,}04}$

b) $P(X>10) = e^{-0.04 \cdot 10}$ ✓

c) $P(X>30 \mid X>20) = P(X>10)$

Falta de memoria

d) $X \sim \mathcal{E}(\lambda = 0{,}04)$ $\quad Y = X^2-2$ $\quad F_X'(t) = f_X(t)$ $\quad F_Y'(t) = f_Y(t)$

$$\boxed{F_Y(t)} = P(Y \leq t) = P(X^2-2 \leq t) = P(X^2 \leq t+2) = P(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{t+2}) = P(|X| \leq \sqrt{t+2}) =$$

$t+2 \geq 0$

$$= P(-\sqrt{t+2} \leq X \leq \sqrt{t+2}) = F_X(\sqrt{t+2}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{t+2})}_{=0} = \boxed{F_X(\sqrt{t+2})}$$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

derivamos

$$\underline{f_Y(t)} = f_X(\sqrt{t+2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t+2}} = \begin{cases} \dfrac{0{,}04\, e^{-0{,}04\sqrt{t+2}}}{2\sqrt{t+2}} \\ 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{t+2} \geq 0 = \begin{cases} \text{Idem} & t \geq -2 \\ 0 & t<-2 \end{cases}$$

Ejercicio 3. La medida en centímetros del perímetro de la cintura de los hombres en Buenos Aires sigue una distribución normal con esperanza 75cm y varianza $25cm^2$. Se sabe que todos los hombres de menos de 70cm usan cinturón de talle 1, mientras que los de cintura entre 70cm y 81cm usan talle 2 y los restantes talle 3.

a) ¿Qué porcentajes de hombres usan cinturones de talle 2?
b) Hallar la distribución del talle asignado a un cinturón.
c) ¿Cuál debería ser el perímetro máximo de cintura del talle 1 si se quiere que el 30% de los hombres use talle 1?
d) En una tienda un hombre acaba de comprar un cinturón de talle 2. Sabiendo esto, ¿cuál es la probabilidad de que su cintura mida más de 75cm?
e) Si en una tienda entran hombres azarosamente y de a uno por vez a comprar cinturones, calcular la probabilidad de que:
   i) los primeros tres cinturones que se vendan sean del mismo talle,
   ii) se venda a lo sumo un cinturón de talle 1 en las primeras cinco ventas,
   iii) se necesiten hacer exactamente 8 ventas para entregar el quinto cinturón que no sea de talle 1.
f) Sea la variable aleatoria X: medida en centímetros del perímetro de la cintura de un hombre elegido al azar en Buenos Aires. Calcular la densidad de la variable aleatoria $Y=2X+1$.

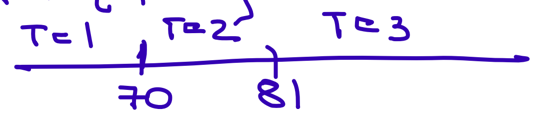
X= perímetro de la cintura de un hombre de BsAs

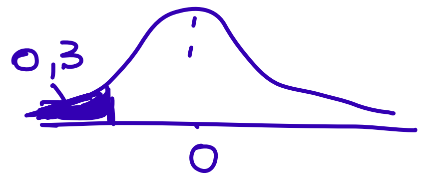
$X \sim N(75, 25)$ $\sigma = 5$

a) $P(\text{"un hombre use talle 2"}) = P(70 < X \leq 81) = P\Big(\underbrace{\frac{70-75}{5}}_{-1} \leq \underbrace{\frac{X-75}{5}}_{N(0,1)} \leq \underbrace{\frac{81-75}{5}}_{6}\Big) =$

$= \Phi\left(\frac{6}{5}\right) - \Phi(-1) = 0{,}8849 - [1 - \underbrace{\Phi(1)}_{0{,}8413}] = 0{,}7262$ 72,62%

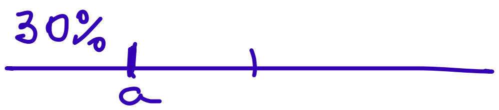
b) T = talle del cinturón $R_T = \{1, 2, 3\}$





$P(T=1) = P(X < 70) =$
$P(T=2) = 0{,}7262$
$P(T=3) = P(X > 81)$

c) $P(X < a) = 0{,}30$



$P\Big(\underbrace{\frac{X-75}{5}}_{Y \sim N(0,1)} < \frac{a-75}{5}\Big) = 0{,}30$

$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t) \Leftrightarrow \Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$

$\Phi\left(\frac{a-75}{5}\right) = 0{,}30 \Leftrightarrow$

$1 - \Phi\left(-\frac{a-75}{5}\right) = 0{,}30$

$\Phi\left(-\frac{a-75}{5}\right) = 0{,}7 \rightarrow -\frac{a-75}{5} \cong 0{,}52$

despejar a

d) $P(X > 75 \mid 70 < X < 81) = \dfrac{P(75 < X < 81)}{P(70 < X < 81)} = \dots$

Ejercicio 4. Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^1 e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}dx$$

μ pedazo de la densidad de $N(1,4)$

$8 = 2\sigma^2 \quad 4 = \sigma^2 \Rightarrow \sigma = 2$

No tenemos una primitiva para $\int e^{-x^2}dx$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad \text{densidad de } N(1,4)$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}}{\sqrt{2\pi\cdot 4}}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 4}\,dx = \sqrt{8\pi}\int_0^1 f_X(x)\,dx =$$

$$= \sqrt{8\pi}\,P(0\le X\le 1) = \sqrt{8\pi}\,P\Big(\frac{0-1}{2}\le \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Y\sim N(0,1)}\le\frac{1-1}{2}\Big) =$$

$$= \sqrt{8\pi}\,\Big[\underbrace{\Phi(0)}_{0,5}-\underbrace{\Phi(-0.5)}_{(1-\Phi(0.5))}\Big] = \dots$$

Ejercicio 5. El tiempo semanal en horas durante el cual cierta máquina industrial no funciona tiene una distribución gamma con $\boldsymbol{\alpha} = 2$ y $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}5$. La pérdida semanal en cientos de pesos para la industria debido a esta baja está dada por L=30Y+8 (3000$ por hora en que la máquina no funciona más 800$ de costo fijo mensual). Calcular la probabilidad de que se pierdan más de 18800$ por semana.