Vectores aleatorios:

esperanza, covarianza y correlación, multinomial

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computación)

8 de octubre de 2020

Covarianza

X, Y v.a

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

$$\boxed{Corr(X,Y) \neq 0 \Downarrow X,Y \text{ dependientes.}}$$

Props:

- $Cov(X, \underset{\downarrow}{\overset{cte}{c}}) = 0$
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(aX + bY, Z) = a\,Cov(X,Z) + b\,Cov(Y,Z)$
- $\sqrt{Cov(X,X)} = \sqrt{Var(X)} = \sigma_X$ ← 'norma de X'

Ejercicio 0: Entrada en calor

Sean X, Y independientes tales que $V(X) = 4$ y $V(Y) = 1$. Calcular:

(a) $\mathrm{Cov}(2X - 4Y, Y + X)$.

(b) $\rho(X, Z)$ si $Z = 2X - Y$.

(c) $V(XY)$ si $E(X^2) = 1$ y $E(Y^2) = 2$.

a) $\mathrm{Cov}(2X - 4Y, X + Y) =$

$2\,\mathrm{Cov}(X, X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) - 4\,\mathrm{Cov}(Y, X) - 4\,\mathrm{Cov}(Y, Y)$

$2\underbrace{V(X)}_{4} - 2\underbrace{\mathrm{Cov}(X, Y)}_{=0} - 4\underbrace{V(Y)}_{1} = 4$

b) $\rho(\underbrace{X, Z}_{2X-Y}) = \dfrac{Cov(X,Z)}{\sigma(X)\,\sigma(Z)} = \dfrac{8}{2\sqrt{17}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

• $Cov(X,Z) = Cov(X, 2X-Y) = 2\underbrace{Cov(X,X)}_{V(X)} - \underbrace{Cov(X,Y)}_{=0}$

$= 8$

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2$

• $\sigma(Z)^2 = V(Z) = V(2X-Y) = Cov(2X-Y, 2X-Y)$

$= 2^2 \underbrace{V(X)}_{4} + \underbrace{V(Y)}_{1} - 2\,\cancel{\underbrace{Cov(X,Y)}_{=0}} = 17$

$\Rightarrow \sigma(Z) = \sqrt{17}$

c) EJERCICIO Sug: $V(X \cdot Y) = Cov(XY, XY)$ Rta: 5

Ejercicio 1: Café. Cerveza, sale. No, Café. Cerveza?

La cantidad de cerveza artesanal, en cientos de litros, en un barril al principio del día es una variable aleatoria X, de la cual una cantidad aleatoria Y se vende durante el día. Suponga que el barril no se rellena durante el día, de tal forma que $Y \leq X$, y que la función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x,y) = 2 \; I_{[0,x]}(y) I_{[0,1]}(x).$$

(a) Calcular $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(b) Qué puede decirse respecto a la independencia de X e Y?

$$f_{XY}(x,y) = 2\, I_{[0,x]}(y)\, I_{[0,1]}(x)$$

no son indptes

$\Uparrow$ b)

a) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq 0$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \underbrace{f_X(x)}_{?}\, dx \longrightarrow f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\, dy$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y\, \underbrace{f_Y(y)}_{?}\, dy \longrightarrow f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\, dx$$

$$E(\underbrace{X\cdot Y}_{h(X,Y)}) = \iint_{\mathbb{R}^2} x\cdot y \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$$E(X\cdot Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} x\cdot y \cdot 2\, I_{[0,x]}(y)\, I_{[0,1]}(x)\, dx\,dy$$

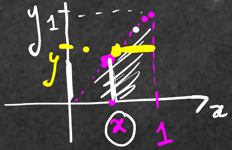
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\underbrace{2x\, I_{[0,1]}(x)}_{\text{no depende de } y}\; y\, I_{[0,x]}(y)\, dy \Big) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 2x\, I_{[0,1]}(x) \Big(\int_{\mathbb{R}} y\, I_{[0,x]}(y)\, dy \Big) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 2x\, I_{[0,1]}(x) \Big(\int_0^x y\, dy \Big) dx = \int_0^1 2x \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^x \right) dx$$

$$= \int_0^1 \cancel{2}\, x \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}}\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y \cdot \underbrace{f_Y(y)}_{*} \, dy = \boxed{2/3}$$



$$* \; f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\, dx = \int_{\mathbb{R}} 2\, \underbrace{I_{[0,x]}(y)}\, \underbrace{I_{[0,1]}(x)}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 2\, \underbrace{I_{[0,1]}(y)}_{cte}\, I_{[y,1]}(x)\, dx = 2\, I_{[0,1]}(y) \int_y^1 1 \, dx$$

$$= \boxed{2 I_{[0,1]}(1-y)}$$

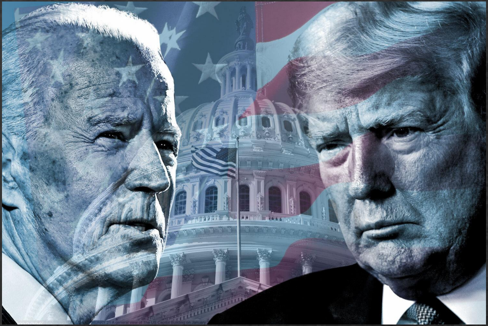
$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \underbrace{f_X(x)}_{**} \, dx = \boxed{\frac{2}{3}}$$

más fácil ☺

$$** \; f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} 2\, \underset{cte!}{I_{[0,x]}(y)}\, \overbrace{I_{[0,1]}(x)}^{cte}\, dy = \boxed{2x\, I_{[0,1]}(x)}$$

fijo

Ejercicio 2: Make America great again



Según las encuestas sobre las elecciones 2020 en EEUU, se obtienen las siguientes probabilidades de voto a los candidatos presidenciales:

D. Trump	J. Biden	H. Hawkins	J. Jorgensen	K. West
0.42	0.53	0.010	0.015	0.025

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5

Se les pregunta a 10 ciudadanos estadounidenses a quién votarán. Se ~~sume~~ supone que sus decisiones son independientes. Cuál es la probabilidad de que:

(a) 3 de ellos voten a Donald Trump, 3 de ellos voten a Joe Biden, 1 a Howie Hawkins, 1 a Jo Jorgensen y 2 de ellos a Kenie West?

(b) 5 de ellos voten a Donald Trump y 5 de ellos voten a Joe Biden?

(c) 9 de ellos voten a Donald Trump?

X_1 = # votos a trump

X_2 = # votos a Biden

X_3 = # votos a Hawkins

X_4 = # votos a Jorgensen

X_5 = # votos a West

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \sim$

$$\mathcal{M}(\underset{\uparrow \\ \text{n rep}}{10}, \underbrace{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5}_{\text{5 resultados}})$$

multinomial

$$P_{(X_1 X_2 X_3 X_4 X_5)}(k_1 k_2 k_3 k_4 k_5) = \frac{10!}{k_1!\, k_2!\, k_3!\, k_4!\, k_5!} \cdot p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4} p_5^{k_5}$$

$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 10$ (n rep)

$0 \leq k_i \leq 10$

las marginales $X_i \sim Bi(n, p_i)$

a) $P(X_1 = 3, X_2 = 3, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = 2)$

$$= P_{X_1 X_2 X_3 X_4 X_5}(3,3,1,1,2) = \frac{10!}{3!\,3!\,1!\,1!\,2!} p_1^3 p_2^3 p_3^1 p_4^1 p_5^2 \simeq \boxed{0.0052}$$

b) $$P_{X_1 X_2 X_3 X_4 X_5}(5,5,0,0,0) = \frac{10!}{5!\,5!\,0!\,0!\,0!} p_1^5 p_2^5 p_3^0 p_4^0 p_5^0 \simeq \boxed{0.1377}$$

c) X_1 = # votos a Donal Trump $\quad X_1 \sim Bi(10, p_1)$

$$P(X_1 = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0.42^9 \cdot 0.58^1 \simeq \boxed{0.002358}$$