Intervalos de confianza

Clase práctica 12/11/20

Daniela Parada

Departamento de Matemática
Universidad de Buenos Aires

Probabilidad y Estadística (C)

Plan de trabajo de hoy

Repaso
Definición

Reflexión
Ganar intuición

IC para parámetros de la normal
Obtención de algunos habituales

Práctica
Ejercicios de la guía 8
Ejercicios extra

Intervalo de confianza

Sea una muestra aleatoria $X_1, \cdots, X_n$ de una distribución F de parámetro θ desconocido. En muchos casos, conocemos estimadores de θ a partir de la muestra. De este modo, a partir de una realización de la muestra de observaciones $x_1, \cdots, x_n$, podemos obtener una estimación puntual $\hat{\theta}_n$. Ahora queremos extender la noción de estimación puntual a ¿otra cosa?

Definición

Un intervalo de confianza $[a, b]$ *de nivel exacto* $(1-\alpha)$ *para* θ *es aquel que cumple que* $P(a \leq \theta \leq b) = 1 - \alpha$, *donde* $a = a(X_1, \cdots, X_n)$ *y* $b = b(X_1, \cdots, X_n)$ *son los extremos del intervalo... ¡y son aleatorios! Dependen de la muestra aleatoria.*

Intervalo de confianza

Sea una muestra aleatoria $X_1, \cdots, X_n$ de una distribución F de parámetro θ desconocido. En muchos casos, conocemos estimadores de θ a partir de la muestra. De este modo, a partir de una realización de la muestra de observaciones $x_1, \cdots, x_n$, podemos obtener una estimación puntual $\hat{\theta}_n$. Ahora queremos extender la noción de estimación puntual a ¿otra cosa?

Definición

Un intervalo de confianza $[a, b]$ *de nivel exacto* $(1-\alpha)$ *para* θ *es aquel que cumple que* $P(a \leq \theta \leq b) = 1 - \alpha$, *donde* $a = a(X_1, \cdots, X_n)$ *y* $b = b(X_1, \cdots, X_n)$ *son los extremos del intervalo... ¡y son aleatorios! Dependen de la muestra aleatoria.*

De a poco, hay que intentar ir ganando “intuición” sobre qué son los intervalos y, en general, sobre qué son las muestras aleatorias (variables aleatorias, tienen distribución) y su enorme diferencia respecto de los datos observados.

A veces, la notación de la que abusamos por comodidad, esconde estas sutilezas que no son nada triviales.

Recomendación: pausa para detenernos a pensar cuando estamos frente a un ejercicio/resultado/situación. Tener resumen de resultados de teóricas y guías anteriores porque, eventualmente, ¡todo lo usamos!

Por ejemplo: no es correcto decir *"la probabilidad de que* θ *pertenezca al intervalo* $[a, b]$ *es* $1 - \alpha$*"* porque θ NO es una variable aleatoria. El intervalo es aleatorio ya que sus extremos son funciones de la muestra y por lo tanto, deberíamos decir algo así como *"la probabilidad de que el intervalo* $[a, b]$ *contenga al parámetro* θ *es* $1 - \alpha$*"*.

Además, una vez construido el intervalo a partir de una muestra dada, ya no tiene sentido hablar de probabilidad. En todo caso, tenemos "confianza" de que el intervalo contenga a θ.

Por ejemplo: no es correcto decir *"la probabilidad de que* θ *pertenezca al intervalo* $[a, b]$ *es* $1 - \alpha$*"* porque θ NO es una variable aleatoria. El intervalo es aleatorio ya que sus extremos son funciones de la muestra y por lo tanto, deberíamos decir algo así como *"la probabilidad de que el intervalo* $[a, b]$ *contenga al parámetro* θ *es* $1 - \alpha$*"*.

Además, una vez construido el intervalo a partir de una muestra dada, ya no tiene sentido hablar de probabilidad. En todo caso, tenemos "confianza" de que el intervalo contenga a θ.

Simulación para ganar intuición

La confianza está puesta en el método de construcción de los intervalos, que nos asegura que $(1-\alpha)100\,\%$ de las muestras producirán intervalos que contienen a θ.

Simulación

Sea una distribución aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$. Tomemos muchas muestras de tamaño n y veamos qué estimaciones de μ con σ^2 conocido obtenemos.

¿Qué estimador de μ usaríamos? ¿Qué esperamos que suceda?

¿Cómo construimos un IC de nivel dado para μ en cada realización de la muestra? ¿Qué esperamos que suceda?

vamos a R

Simulación para ganar intuición

La confianza está puesta en el método de construcción de los intervalos, que nos asegura que $(1-\alpha)100\,\%$ de las muestras producirán intervalos que contienen a θ.

Simulación

Sea una distribución aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$. Tomemos muchas muestras de tamaño n y veamos qué estimaciones de μ con σ^2 conocido obtenemos.

¿Qué estimador de μ usaríamos? ¿Qué esperamos que suceda?

¿Cómo construimos un IC de nivel dado para μ en cada realización de la muestra? ¿Qué esperamos que suceda?

▸ vamos a R

Simulación para ganar intuición

La confianza está puesta en el método de construcción de los intervalos, que nos asegura que $(1-\alpha)100\,\%$ de las muestras producirán intervalos que contienen a θ.

Simulación

Sea una distribución aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$. Tomemos muchas muestras de tamaño n y veamos qué estimaciones de μ con σ^2 conocido obtenemos.

¿Qué estimador de μ usaríamos? ¿Qué esperamos que suceda?

¿Cómo construimos un IC de nivel dado para μ en cada realización de la muestra? ¿Qué esperamos que suceda?

vamos a R

Simulación para ganar intuición

La confianza está puesta en el método de construcción de los intervalos, que nos asegura que $(1-\alpha)100\,\%$ de las muestras producirán intervalos que contienen a θ.

Simulación

Sea una distribución aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$. Tomemos muchas muestras de tamaño n y veamos qué estimaciones de μ con σ^2 conocido obtenemos.

¿Qué estimador de μ usaríamos? ¿Qué esperamos que suceda?

¿Cómo construimos un IC de nivel dado para μ en cada realización de la muestra? ¿Qué esperamos que suceda?

vamos a R

Simulación para ganar intuición

La confianza está puesta en el método de construcción de los intervalos, que nos asegura que $(1-\alpha)100\,\%$ de las muestras producirán intervalos que contienen a θ.

Simulación

Sea una distribución aleatoria N(μ, σ^2). Tomemos muchas muestras de tamaño n y veamos qué estimaciones de μ con σ^2 conocido obtenemos.

¿Qué estimador de μ usaríamos? ¿Qué esperamos que suceda?

¿Cómo construimos un IC de nivel dado para μ en cada realización de la muestra? ¿Qué esperamos que suceda?

vamos a R

Algunos IC conocidos

Bajo el supuesto de distribución normal (¡que no es poco!), es posible hallar intervalos de confianza de nivel exacto para la media y la varianza poblacionales dado que conocemos la distribución de diferentes estadísticos que intervienen en la construcción del intervalo (pivot).

Teórica del martes 10/11 y jueves 12/11:

IC para ...	Supuestos requeridos	Pivot y su distribución
μ	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$
μ	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$
σ^2	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ conocido	$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2_n$
σ^2	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ desconocido	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Algunos IC conocidos

Bajo el supuesto de distribución normal (¡que no es poco!), es posible hallar intervalos de confianza de nivel exacto para la media y la varianza poblacionales dado que conocemos la distribución de diferentes estadísticos que intervienen en la construcción del intervalo (pivot).

Teórica del martes 10/11 y jueves 12/11:

IC para ...	Supuestos requeridos	Pivot y su distribución
μ	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$
μ	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$
σ^2	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ conocido	$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2_n$
σ^2	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ desconocido	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Ejercicios de la guía

Muchas de las distribuciones anteriores se piden probar (o probar parcialmente) en ejercicios de la guía. También están tratados en el apunte teórico.

Por ejemplo, en el caso de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

Ejercicio	IC para ...	Supuestos requeridos	Pivot y su distribución exacta
1.a)	μ	σ conocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$
3.a)	μ	σ desconocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$
5.a)	σ^2	μ conocido	$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2$
6.a)	σ^2	μ desconocido	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

pausa

Ejercicios de la guía

Muchas de las distribuciones anteriores se piden probar (o probar parcialmente) en ejercicios de la guía. También están tratados en el apunte teórico.

Por ejemplo, en el caso de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

Ejercicio	**IC para ...**	**Supuestos requeridos**	**Pivot y su distribución exacta**
1.a)	μ	σ conocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$
3.a)	μ	σ desconocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$
5.a)	σ^2	μ conocido	$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2_n$
6.a)	σ^2	μ desconocido	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

pausa

Ejercicios de la guía

Muchas de las distribuciones anteriores se piden probar (o probar parcialmente) en ejercicios de la guía. También están tratados en el apunte teórico.

Por ejemplo, en el caso de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

Ejercicio	**IC para ...**	**Supuestos requeridos**	**Pivot y su distribución exacta**
1.a)	μ	σ conocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$
3.a)	μ	σ desconocido	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$
5.a)	σ^2	μ conocido	$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2$
6.a)	σ^2	μ desconocido	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

pausa

Ejercicios *ao vivo*

Ejercicio

Se supone que la longitud de cierto tipo de eje tiene distribución normal con desvío $\sigma = 0{,}05$ *mm. Se toma una muestra de 20 ejes y se sabe que la longitud media es de 52.3 mm.*

Hallar un intervalo de confianza para la longitud media de nivel 0.99 .

¿Qué tamaño deberá tener la muestra para que la longitud media del intervalo sea menor que $\frac{\sigma}{10}$*?*

Resolución

Definimos a X como la variable aleatoria de la longitud de cierto tipo de eje en mm. Sabemos que tiene distribución normal con desvío $\sigma = 0{,}05$ mm, es decir: $X \sim N(\mu, 0{,}05^2)$.

Se toma una muestra de 20 ejes $(x_1, \cdots, x_{20})$ y se sabe que la longitud media es de 52.3 mm, es decir: $\bar{x} = 52{,}3$.

La "pinta" del IC pedido ya la conocemos (la probamos en 1a):

$$\begin{aligned} IC &= \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[52{,}3 - z_{0{,}01/2}\frac{0{,}05}{\sqrt{20}}; 52{,}3 + z_{0{,}01/2}\frac{0{,}05}{\sqrt{20}}\right] \\ &= [52{,}27; 52{,}33] \end{aligned}$$

¿Le acertamos al verdadero μ?

Resolución

Definimos a X como la variable aleatoria de la longitud de cierto tipo de eje en mm. Sabemos que tiene distribución normal con desvío $\sigma = 0{,}05$ mm, es decir: $X \sim N(\mu, 0{,}05^2)$.

Se toma una muestra de 20 ejes $(x_1, \cdots, x_{20})$ y se sabe que la longitud media es de 52.3 mm, es decir: $\bar{x} = 52{,}3$.

La "pinta" del IC pedido ya la conocemos (la probamos en 1a):

$$\begin{aligned} IC &= \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[52{,}3 - z_{0{,}01/2}\frac{0{,}05}{\sqrt{20}}; 52{,}3 + z_{0{,}01/2}\frac{0{,}05}{\sqrt{20}}\right] \\ &= [52{,}27; 52{,}33] \end{aligned}$$

¿Le acertamos al verdadero μ?

Resolución

Definimos a X como la variable aleatoria de la longitud de cierto tipo de eje en mm. Sabemos que tiene distribución normal con desvío $\sigma = 0{,}05$ mm, es decir: $X \sim N(\mu, 0{,}05^2)$.

Se toma una muestra de 20 ejes $(x_1, \cdots, x_{20})$ y se sabe que la longitud media es de 52.3 mm, es decir: $\bar{x} = 52{,}3$.

La "pinta" del IC pedido ya la conocemos (la probamos en 1a):

$$
\begin{aligned}
IC &= \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \left[52{,}3 - z_{0{,}01/2}\frac{0{,}05}{\sqrt{20}}; 52{,}3 + z_{0{,}01/2}\frac{0{,}05}{\sqrt{20}}\right] \\
&= [52{,}27; 52{,}33]
\end{aligned}
$$

¿Le acertamos al verdadero μ?

En la construcción del intervalo podemos controlar tres cosas:

- El tamaño de la muestra n.
- El nivel de confianza, $1 - \alpha$, esto es, la probabilidad de que el parámetro se encuentre dentro del intervalo aleatorio; o lo que es lo mismo, la probabilidad de "equivocarse", α.
- La precisión de la estimación que podemos pensarla como el desvío de las observaciones de la muestra o, similarmente, como la longitud del intervalo, L: a intervalo de mayor longitud, menor precisión.

En la construcción del intervalo podemos controlar tres cosas:

- El tamaño de la muestra n.
- El nivel de confianza, $1-\alpha$, esto es, la probabilidad de que el parámetro se encuentre dentro del intervalo aleatorio; o lo que es lo mismo, la probabilidad de "equivocarse", α.
- La precisión de la estimación que podemos pensarla como el desvío de las observaciones de la muestra o, similarmente, como la longitud del intervalo, L: a intervalo de mayor longitud, menor precisión.

En la construcción del intervalo podemos controlar tres cosas:

- El tamaño de la muestra n.
- El nivel de confianza, $1 - \alpha$, esto es, la probabilidad de que el parámetro se encuentre dentro del intervalo aleatorio; o lo que es lo mismo, la probabilidad de "equivocarse", α.
- La precisión de la estimación que podemos pensarla como el desvío de las observaciones de la muestra o, similarmente, como la longitud del intervalo, L: a intervalo de mayor longitud, menor precisión.

En la construcción del intervalo podemos controlar tres cosas:

- El tamaño de la muestra n.
- El nivel de confianza, $1-\alpha$, esto es, la probabilidad de que el parámetro se encuentre dentro del intervalo aleatorio; o lo que es lo mismo, la probabilidad de "equivocarse", α.
- La precisión de la estimación que podemos pensarla como el desvío de las observaciones de la muestra o, similarmente, como la longitud del intervalo, L: a intervalo de mayor longitud, menor precisión.

En este caso, contábamos con una muestra de tamaño 20 y para un nivel de 0.99 obtuvimos un intervalo de longitud 0.6 o, equivalentemente, con una precisión de $\pm 0{,}03$.

Fijado uno de los tres factores anteriores podemos ver cómo se relacionan los otros dos entre sí y notar que es imposible ganar precisión (un L chico), con la misma confianza (manteniendo un nivel α) sin pagar el costo de contar con una muestra más grande.

En este caso, contábamos con una muestra de tamaño 20 y para un nivel de 0.99 obtuvimos un intervalo de longitud 0.6 o, equivalentemente, con una precisión de $\pm 0{,}03$.

Fijado uno de los tres factores anteriores podemos ver cómo se relacionan los otros dos entre sí y notar que es imposible ganar precisión (un L chico), con la misma confianza (manteniendo un nivel α) sin pagar el costo de contar con una muestra más grande.

En particular, queremos un tamaño de muestra que nos garantice que la *longitud media* sea menor que un valor dado.

Quiero hallar el mínimo n tal que

$$E(L) = E\left(2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \frac{\sigma}{10}.$$

Notemos que en este caso en L solo intervienen constantes fijadas de antemano (no siempre será así). Entonces

$$n \geq (20z_{\alpha/2})^2 \geq 2654.$$

En particular, queremos un tamaño de muestra que nos garantice que la *longitud media* sea menor que un valor dado.

Quiero hallar el mínimo n tal que

$$E(L) = E\left(2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \frac{\sigma}{10}.$$

Notemos que en este caso en L solo intervienen constantes fijadas de antemano (no siempre será así). Entonces

$$n \geq (20z_{\alpha/2})^2 \geq 2654.$$

En particular, queremos un tamaño de muestra que nos garantice que la *longitud media* sea menor que un valor dado.

Quiero hallar el mínimo n tal que

$$E(L) = E\left(2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \frac{\sigma}{10}.$$

Notemos que en este caso en L solo intervienen constantes fijadas de antemano (no siempre será así). Entonces

$$n \geq (20z_{\alpha/2})^2 \geq 2654.$$

Ejercicio extra

Ejercicio

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad dada por

$$f_X(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x) \quad \theta > 0$$

Verificar que $Y_i = -4 \log \frac{X_i}{\theta}$ tiene distribución $Exp(1/2)$

Hallar la distribución de $\sum_{i=1}^n Y_i$.

Hallar un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para θ.

Hallar un intervalo de confianza de nivel 0.90 para θ, si $\prod_{i=1}^n X_i = 10$

Resolución

Buscamos la distribución de Y.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y \leq y) &= P\left(-4\log\frac{X}{\theta} \leq y\right) = P\left(\log\frac{X}{\theta} \geq \frac{-y}{4}\right) \\
&= P\left(\frac{X}{\theta} \geq e^{-y/4}\right) = P\left(X \geq \theta e^{-y/4}\right) \\
&= 1 - P\left(X \leq \theta e^{-y/4}\right) = 1 - F_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \\
f_Y(y) &= -f_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\theta)}\left(\theta e^{-y/4}\right) \\
&= -\frac{2\theta e^{-y/4}}{\theta^2} \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\infty)}(y) \\
&= \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot I_{(0,\infty)}(y)
\end{aligned}
$$

Vemos que $Y \sim Exp(1/2)$.

Resolución

Buscamos la distribución de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-4\log\frac{X}{\theta} \leq y\right) = P\left(\log\frac{X}{\theta} \geq \frac{-y}{4}\right)$$

$$= P\left(\frac{X}{\theta} \geq e^{-y/4}\right) = P\left(X \geq \theta e^{-y/4}\right)$$

$$= 1 - P\left(X \leq \theta e^{-y/4}\right) = 1 - F_X\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$f_Y(y) = -f_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\theta)}\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$= -\frac{2\theta e^{-y/4}}{\theta^2} \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

Vemos que $Y \sim Exp(1/2)$.

Resolución

Buscamos la distribución de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-4\log\frac{X}{\theta} \leq y\right) = P\left(\log\frac{X}{\theta} \geq \frac{-y}{4}\right)$$

$$= P\left(\frac{X}{\theta} \geq e^{-y/4}\right) = P\left(X \geq \theta e^{-y/4}\right)$$

$$= 1 - P\left(X \leq \theta e^{-y/4}\right) = 1 - F_X\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$f_Y(y) = -f_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\theta)}\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$= -\frac{2\theta e^{-y/4}}{\theta^2} \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

Vemos que $Y \sim Exp(1/2)$.

Resolución

Buscamos la distribución de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-4\log\frac{X}{\theta} \leq y\right) = P\left(\log\frac{X}{\theta} \geq \frac{-y}{4}\right)$$

$$= P\left(\frac{X}{\theta} \geq e^{-y/4}\right) = P\left(X \geq \theta e^{-y/4}\right)$$

$$= 1 - P\left(X \leq \theta e^{-y/4}\right) = 1 - F_X\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$f_Y(y) = -f_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\theta)}\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$= -\frac{2\theta e^{-y/4}}{\theta^2} \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

Vemos que $Y \sim Exp(1/2)$.

Resolución

Buscamos la distribución de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(-4\log\frac{X}{\theta} \le y\right) = P\left(\log\frac{X}{\theta} \ge \frac{-y}{4}\right)$$

$$= P\left(\frac{X}{\theta} \ge e^{-y/4}\right) = P\left(X \ge \theta e^{-y/4}\right)$$

$$= 1 - P\left(X \le \theta e^{-y/4}\right) = 1 - F_X\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$f_Y(y) = -f_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\theta)}\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$= -\frac{2\theta e^{-y/4}}{\theta^2} \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

Vemos que $Y \sim Exp(1/2)$.

Resolución

Buscamos la distribución de Y.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(-4\log\frac{X}{\theta} \leq y\right) = P\left(\log\frac{X}{\theta} \geq \frac{-y}{4}\right) \\
&= P\left(\frac{X}{\theta} \geq e^{-y/4}\right) = P\left(X \geq \theta e^{-y/4}\right) \\
&= 1 - P\left(X \leq \theta e^{-y/4}\right) = 1 - F_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \\
f_Y(y) &= -f_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\theta)}\left(\theta e^{-y/4}\right) \\
&= -\frac{2\theta e^{-y/4}}{\theta^2} \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\infty)}(y) \\
&= \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot I_{(0,\infty)}(y)
\end{aligned}
$$

Vemos que $Y \sim Exp(1/2)$.

Resolución

Buscamos la distribución de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-4\log\frac{X}{\theta} \leq y\right) = P\left(\log\frac{X}{\theta} \geq \frac{-y}{4}\right)$$

$$= P\left(\frac{X}{\theta} \geq e^{-y/4}\right) = P\left(X \geq \theta e^{-y/4}\right)$$

$$= 1 - P\left(X \leq \theta e^{-y/4}\right) = 1 - F_X\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$f_Y(y) = -f_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\theta)}\left(\theta e^{-y/4}\right)$$

$$= -\frac{2\theta e^{-y/4}}{\theta^2} \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

Vemos que $Y \sim Exp(1/2)$.

Resolución

Buscamos la distribución de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-4\log\frac{X}{\theta} \leq y\right) = P\left(\log\frac{X}{\theta} \geq \frac{-y}{4}\right)$$
$$= P\left(\frac{X}{\theta} \geq e^{-y/4}\right) = P\left(X \geq \theta e^{-y/4}\right)$$
$$= 1 - P\left(X \leq \theta e^{-y/4}\right) = 1 - F_X\left(\theta e^{-y/4}\right)$$
$$f_Y(y) = -f_X\left(\theta e^{-y/4}\right) \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\theta)}\left(\theta e^{-y/4}\right)$$
$$= -\frac{2\theta e^{-y/4}}{\theta^2} \cdot \left(-\frac{\theta}{4}\right) e^{-y/4} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$
$$= \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$

Vemos que $Y \sim Exp(1/2)$.

Buscamos la distribución de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Empecemos por ver la suma (p. 113 apunte). Sea $Z = X + Y$ con X e Y variables aleatorias continuas e independientes. Entonces, para cada $z \in \mathbb{R}$, $A_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq z\right\}$, la función de distribución de Z es:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \iint_{A_z} f_{X,Y}(x, y) dy dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx$$

La densidad de Z se puede obtener derivando respecto de z la función de distribución anterior:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x) dx$$

Buscamos la distribución de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Empecemos por ver la suma (p. 113 apunte). Sea $Z = X + Y$ con X e Y variables aleatorias continuas e independientes. Entonces, para cada $z \in \mathbb{R}$, $A_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq z\right\}$, la función de distribución de Z es:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \iint_{A_z} f_{X,Y}(x, y)dydx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y)dy \right) dx$$

La densidad de Z se puede obtener derivando respecto de z la función de distribución anterior:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x)dx$$

Buscamos la distribución de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Empecemos por ver la suma (p. 113 apunte). Sea $Z = X + Y$ con X e Y variables aleatorias continuas e independientes. Entonces, para cada $z \in \mathbb{R}$, $A_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq z\right\}$, la función de distribución de Z es:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \iint_{A_z} f_{X,Y}(x, y)dydx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y)dy\right) dx$$

La densidad de Z se puede obtener derivando respecto de z la función de distribución anterior:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x)dx$$

Buscamos la distribución de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Empecemos por ver la suma (p. 113 apunte). Sea $Z = X + Y$ con X e Y variables aleatorias continuas e independientes. Entonces, para cada $z \in \mathbb{R}$, $A_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq z\right\}$, la función de distribución de Z es:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \iint_{A_z} f_{X,Y}(x, y)dydx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y)dy \right) dx$$

La densidad de Z se puede obtener derivando respecto de z la función de distribución anterior:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x)dx$$

Bajo el supuesto de X e Y variables aleatorias independientes, su densidad conjunta es $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Por lo anterior, entonces, la función de densidad de Z es

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

Con X e Y iid exponencial de parámetro $\lambda > 0$, las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ están definidas en $[0,\infty)$, entonces:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx \\ &= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z}dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

Conclusión: coincide con la densidad de la distribución Gamma de parámetros $(2, \lambda)$. Es decir: $Z = X + Y \sim \Gamma(2,\lambda)$.

Bajo el supuesto de X e Y variables aleatorias independientes, su densidad conjunta es $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$. Por lo anterior, entonces, la función de densidad de Z es

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

Con X e Y iid exponencial de parámetro $\lambda > 0$, las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ están definidas en $[0,\infty)$, entonces:

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx$$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

Conclusión: coincide con la densidad de la distribución Gamma de parámetros $(2, \lambda)$. Es decir: $Z = X + Y \sim \Gamma(2,\lambda)$.

Bajo el supuesto de X e Y variables aleatorias independientes, su densidad conjunta es $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Por lo anterior, entonces, la función de densidad de Z es

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

Con X e Y iid exponencial de parámetro $\lambda > 0$, las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ están definidas en $[0,\infty)$, entonces:

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx$$
$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z}dx = \lambda^2 ze^{-\lambda z}$$

Conclusión: coincide con la densidad de la distribución Gamma de parámetros $(2, \lambda)$. Es decir: $Z = X + Y \sim \Gamma(2,\lambda)$.

Bajo el supuesto de X e Y variables aleatorias independientes, su densidad conjunta es $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Por lo anterior, entonces, la función de densidad de Z es

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

Con X e Y iid exponencial de parámetro $\lambda > 0$, las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ están definidas en $[0,\infty)$, entonces:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx \\ &= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z}dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

Conclusión: coincide con la densidad de la distribución Gamma de parámetros $(2,\ \lambda)$. Es decir: $Z = X + Y \sim \Gamma(2,\lambda)$.

Sabemos que $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} Exp(1/2)$. Luego, por lo que vimos recién, es posible extender la idea a n finitos sumandos:

$$Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(n, 1/2)$$

Para agendar: la exponencial es un caso particular de la Gamma. En particular, $Exp(\lambda)$ se distribuye como $\Gamma(1, \lambda)$. Y la suma de n exponenciales independientes e idénticamente distribuidas como $Exp(\lambda)$ se distribuye como $\Gamma(n, \lambda)$. A su vez, la Chi es también un caso especial de la Gamma. En particular, una distribución χ^2_k es equivalente a una $\Gamma(k/2, 1/2)$.

Yapa: $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(n, 1/2) \equiv \chi^2_{2n}$.

¿Para qué hicimos todo esto?

Sabemos que $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} Exp(1/2)$. Luego, por lo que vimos recién, es posible extender la idea a n finitos sumandos:

$$Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(n, 1/2)$$

Para agendar: la exponencial es un caso particular de la Gamma. En particular, $Exp(\lambda)$ se distribuye como $\Gamma(1, \lambda)$. Y la suma de n exponenciales independientes e idénticamente distribuidas como $Exp(\lambda)$ se distribuye como $\Gamma(n, \lambda)$. A su vez, la Chi es también un caso especial de la Gamma. En particular, una distribución χ^2_k es equivalente a una $\Gamma(k/2, 1/2)$.

Yapa: $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(n, 1/2) \equiv \chi^2_{2n}$.

¿Para qué hicimos todo esto?

Sabemos que $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} Exp(1/2)$. Luego, por lo que vimos recién, es posible extender la idea a n finitos sumandos:

$$Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(n, 1/2)$$

Para agendar: la exponencial es un caso particular de la Gamma. En particular, $Exp(\lambda)$ se distribuye como $\Gamma(1, \lambda)$. Y la suma de n exponenciales independientes e idénticamente distribuidas como $Exp(\lambda)$ se distribuye como $\Gamma(n, \lambda)$. A su vez, la Chi es también un caso especial de la Gamma. En particular, una distribución χ^2_k es equivalente a una $\Gamma(k/2, 1/2)$.

Yapa: $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(n, 1/2) \equiv \chi^2_{2n}$.

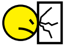
¿Para qué hicimos todo esto?

Sabemos que $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} Exp(1/2)$. Luego, por lo que vimos recién, es posible extender la idea a n finitos sumandos:

$$Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(n, 1/2)$$

Para agendar: la exponencial es un caso particular de la Gamma. En particular, $Exp(\lambda)$ se distribuye como $\Gamma(1, \lambda)$. Y la suma de n exponenciales independientes e idénticamente distribuidas como $Exp(\lambda)$ se distribuye como $\Gamma(n, \lambda)$. A su vez, la Chi es también un caso especial de la Gamma. En particular, una distribución χ^2_k es equivalente a una $\Gamma(k/2, 1/2)$.

Yapa: $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \Gamma(n, 1/2) \equiv \chi^2_{2n}$.

¿Para qué hicimos todo esto? 

Queremos un IC de nivel $(1-\alpha)$ para θ. Pero θ estaba en el soporte de X...

Con la transformación: ¡nos fabricamos un pivot! Es decir, una función de la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ cuya distribución no depende de θ y es conocida. ¡Listo!

Con a y b los percentiles correspondientes de la Gamma, tenemos:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} Y_i \leq b\right) \\ &= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n}\left(-4\log\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right) \\ &= P\left(a \leq -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right) \end{aligned}$$

Queremos un IC de nivel $(1-\alpha)$ para θ. Pero θ estaba en el soporte de X...

Con la transformación: ¡nos fabricamos un pivot! Es decir, una función de la muestra aleatoria $X_1, ..., X_n$ cuya distribución no depende de θ y es conocida. ¡Listo!

Con a y b los percentiles correspondientes de la Gamma, tenemos:

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} Y_i \leq b\right)\\ &= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n}\left(-4\log\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right)\\ &= P\left(a \leq -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right)\end{aligned}$$

Queremos un IC de nivel $(1-\alpha)$ para θ. Pero θ estaba en el soporte de X...

Con la transformación: ¡nos fabricamos un pivot! Es decir, una función de la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ cuya distribución no depende de θ y es conocida. ¡Listo!

Con a y b los percentiles correspondientes de la Gamma, tenemos:

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} Y_i \leq b\right) \\
&= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n}\left(-4\log\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right) \\
&= P\left(a \leq -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right)
\end{aligned}
$$

Queremos un IC de nivel $(1-\alpha)$ para θ. Pero θ estaba en el soporte de X...

Con la transformación: ¡nos fabricamos un pivot! Es decir, una función de la muestra aleatoria $X_1, ..., X_n$ cuya distribución no depende de θ y es conocida. ¡Listo!

Con a y b los percentiles correspondientes de la Gamma, tenemos:

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} Y_i \leq b\right) \\
&= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} \left(-4\log\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right) \\
&= P\left(a \leq -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right)
\end{aligned}
$$

Queremos un IC de nivel $(1-\alpha)$ para θ. Pero θ estaba en el soporte de X...

Con la transformación: ¡nos fabricamos un pivot! Es decir, una función de la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ cuya distribución no depende de θ y es conocida. ¡Listo!

Con a y b los percentiles correspondientes de la Gamma, tenemos:

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} Y_i \leq b\right) \\
&= P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} \left(-4 \log \frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right) \\
&= P\left(a \leq -4 \log \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \leq -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \leq b\right) \\
&= P\left(-a/4 \geq \log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \geq -b/4\right) \\
&= P\left(e^{-a/4} \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \geq e^{-b/4}\right) \\
&= P\left(e^{-a/4} \geq \frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{\theta^n} \geq e^{-b/4}\right) \\
&= P\left(e^{a/4} \leq \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n} X_i} \leq e^{b/4}\right) \\
&= P\left(e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i \leq \theta^n \leq e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \le -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \le b\right)\\
&= P\left(-a/4 \ge \log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge -b/4\right)\\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge e^{-b/4}\right)\\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{\theta^n} \ge e^{-b/4}\right)\\
&= P\left(e^{a/4} \le \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n} X_i} \le e^{b/4}\right)\\
&= P\left(e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i \le \theta^n \le e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \le -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \le b\right)\\
&= P\left(-a/4 \ge \log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge -b/4\right)\\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge e^{-b/4}\right)\\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{\theta^n} \ge e^{-b/4}\right)\\
&= P\left(e^{a/4} \le \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n} X_i} \le e^{b/4}\right)\\
&= P\left(e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i \le \theta^n \le e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \le -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \le b\right) \\
&= P\left(-a/4 \ge \log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge -b/4\right) \\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge e^{-b/4}\right) \\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{\theta^n} \ge e^{-b/4}\right) \\
&= P\left(e^{a/4} \le \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n} X_i} \le e^{b/4}\right) \\
&= P\left(e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i \le \theta^n \le e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \le -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \le b\right) \\
&= P\left(-a/4 \ge \log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge -b/4\right) \\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge e^{-b/4}\right) \\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{\theta^n} \ge e^{-b/4}\right) \\
&= P\left(e^{a/4} \le \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n} X_i} \le e^{b/4}\right) \\
&= P\left(e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i \le \theta^n \le e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(a \le -4\log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \le b\right) \\
&= P\left(-a/4 \ge \log\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge -b/4\right) \\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \ge e^{-b/4}\right) \\
&= P\left(e^{-a/4} \ge \frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{\theta^n} \ge e^{-b/4}\right) \\
&= P\left(e^{a/4} \le \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n} X_i} \le e^{b/4}\right) \\
&= P\left(e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i \le \theta^n \le e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)
\end{aligned}
$$

$$1-\alpha = P\left(\sqrt[n]{e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i} \leq \theta \leq \sqrt[n]{e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

Con lo cual, el IC de nivel 0.90 para θ, si $\prod_{i=1}^{n} X_i = 10$ es algo que se obtiene de forma directa. Ojo, sin conocer n no es posible obtener a y b ya que estos percentiles son los de la distribución $\Gamma(n, 1/2)$ que dejan área $\alpha/2$ en las colas (su obtención depende de n).

¡FIN!

$$1 - \alpha = P\left(\sqrt[n]{e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i} \le \theta \le \sqrt[n]{e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

Con lo cual, el IC de nivel 0.90 para θ, si $\prod_{i=1}^{n} X_i = 10$ es algo que se obtiene de forma directa. Ojo, sin conocer n no es posible obtener a y b ya que estos percentiles son los de la distribución $\Gamma(n, 1/2)$ que dejan área $\alpha/2$ en las colas (su obtención depende de n).

¡FIN!

$$1-\alpha = P\left(\sqrt[n]{e^{a/4}\prod_{i=1}^{n} X_i} \leq \theta \leq \sqrt[n]{e^{b/4}\prod_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

Con lo cual, el IC de nivel 0.90 para θ, si $\prod_{i=1}^{n} X_i = 10$ es algo que se obtiene de forma directa. Ojo, sin conocer n no es posible obtener a y b ya que estos percentiles son los de la distribución $\Gamma(n, 1/2)$ que dejan área $\alpha/2$ en las colas (su obtención depende de n).

¡FIN!