Principio de multiplicación

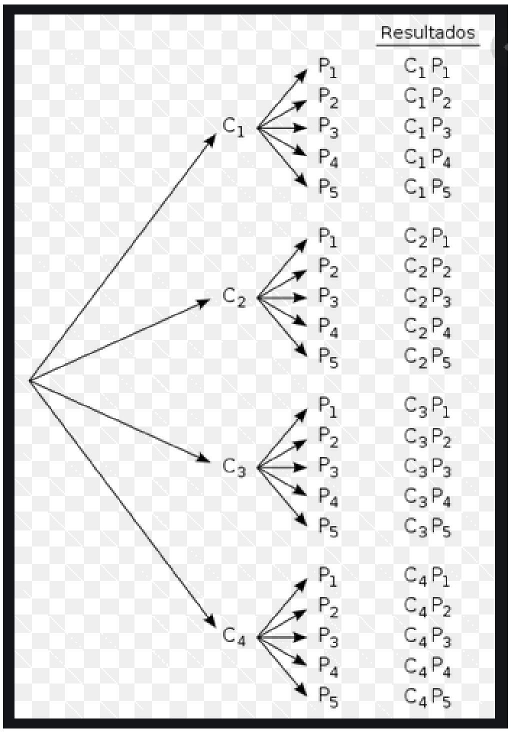
Si un proceso de selección se puede dividir en dos pasos consecutivos, de modo que hay n_1 elecciones en el primero y por cada una de ellas, hay n_2 elecciones para la segunda, entonces el número total de configuraciones es $n_1 \times n_2$.

Se generaliza a k pasos haciendo: $n_1 \times \ldots \times n_k$.

Ejemplo 1.

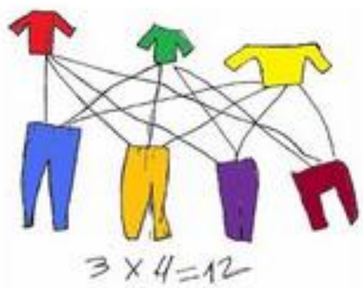
Si tenemos 4 camisas y 5 pantalones, ¿de cuántas formas puedo elegir una combinación de camisa-pantalón? Rta: 4 x 5 = 20.

Vía un diagrama de árbol se puede pensar así:



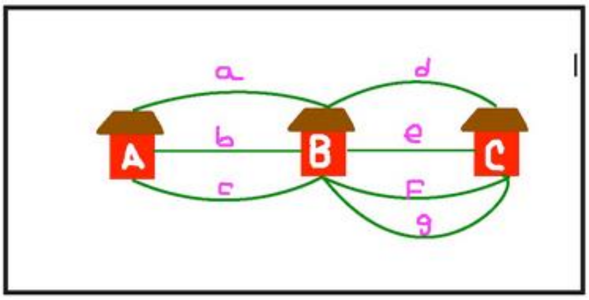
Es equivalente a contar las coordenadas de una matriz, es decir filas x columnas:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
C_1	C_1P_1				
C_2			C_2P_3		
C_3					
C_4					



Ejemplo 2.

Debemos volar de Argentina a Colombia para luego regresar a Argentina, con escala en Bolivia ida y vuelta. De Argentina a Bolivia hay 3 rutas posibles, de Bolivia a Colombia hay 4 rutas posibles. Si no podemos repetir rutas, ¿cuántas rutas posibles hay para ir y volver? Rta: 3 x 4 x 3 x 2 = 72.



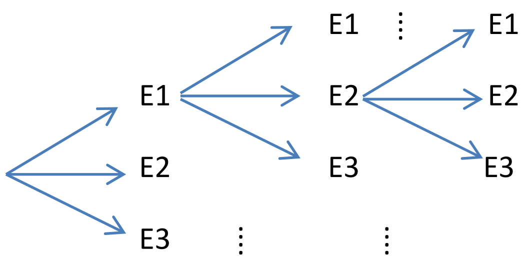
Ejemplo 3. Bolitas distinguibles en cajas numeradas.

Queremos distribuir de todas las formas posibles, 3 libros distintos en 3 estantes contiguos. ¿Cuántas configuraciones tenemos?

1. $abc\|-\|-$	10. $c\|ab\|-$	19. $-\|b\|ac$
2. $-\|abc\|-$	11. $-\|ab\|c$	20. $a\|-\|bc$
3. $-\|-\|abc\|$	12. $b\|ac\|-$	21. $-\|a\|bc$
4. $ab\|c\|-$	13. $\|ac\|b$	22. $a\|b\|c$
5. $ab\|-\|c$	14. $a\|bc\|-$	23. $a\|c\|b$
6. $ac\|b\|-$	15. $-\|bc\|a$	24. $b\|a\|c$
7. $ac\|-\|b$	16. $c\|-\|ab$	25. $b\|c\|a$
8. $bc\|a\|-$	17. $-\|c\|ab$	26. $c\|a\|b$
9. $bc\|-\|a$	18. $b\|-\|ac$	27. $c\|b\|a$

Podemos describir a las configuraciones como ternas o vectores de tres coordenadas (, ,) donde el valor de la i-ésima coordenada corresponde al número de estante que le corresponde al i-ésimo libro, es decir:

libro *a* libro *b* libro *c*



esta ruta corresponde con la configuración 14.

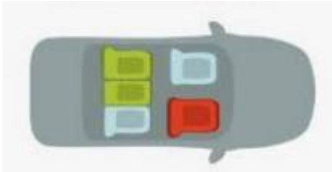
Rta: $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$.

Es un procedimiento en tres pasos donde en el paso 1 asigno el libro “a” a alguno de los tres estantes; en el paso 2, asigno el libro “b” a alguno de los tres estantes y así…

En general distribuir r bolitas distinguibles en k urnas numeradas es k^r.

Ejemplo 4. Permutaciones

¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 asientos de un auto?



Rta: 5x4x3x2x1=5!=120.

En general, todas las formas de ordenar n objetos en n lugares es

$$n! = n \times (n-1) \ldots 1$$

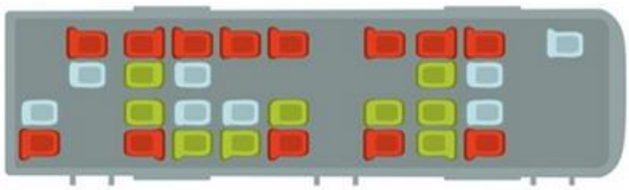
Observar que

$$n! = n \times (n-1)!$$

y definimos $0! = 1$.

Ejemplo 5. "Permutación truncada" o variación

¿De cuántas formas pueden sentarse 5 personas en este colectivo (sin considerar al conductor)?



La persona A tiene 29 posibilidades,

la persona B tiene 28 posibilidades,

la persona C tiene 27 posibilidades,

la persona D tiene 26 posibilidades,

la persona E tiene 25 posibilidades.

Luego todas las posibles "sentadas" es: 29 x 28 x 27 x 26 x 25 = $\frac{29!}{24!}$.

En general, todas las formas de ordenar n objetos distinguibles en k lugares o bien, todas las elecciones con orden de k elementos de un conjunto de n elementos es:

$$\frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}$$

Notar que en nuestro ejemplo la configuración (17,3,5,19,22) es diferente a (3,5,22,19,17).

Ejemplo 6.

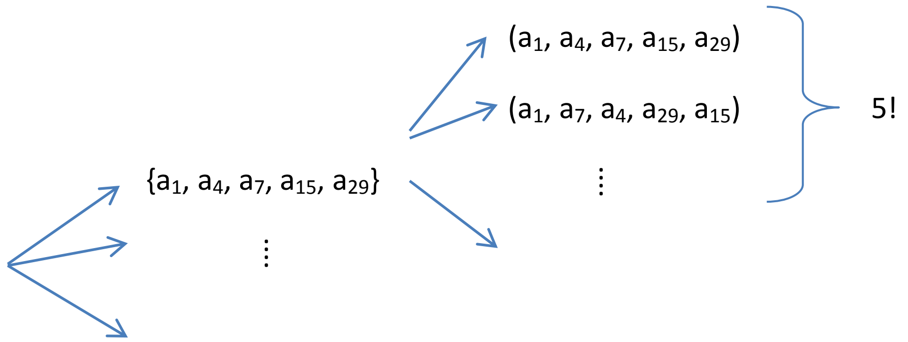
¿De cuántas formas se pueden elegir 5 asientos de un colectivo (sin considerar al conductor)?

¿Qué diferencia tiene con el ejemplo anterior? Acá no me importa el orden en el que voy eligiendo los asientos.

En este caso {17,3,5,19,22} = {3,5,22,19,17}.

Llamemos C al conjunto de tales elecciones, que son en realidad todos los subconjuntos de 5 asientos de un conjunto de 29. Es decir, lo que se quiere contar es la cantidad de subconjuntos que tiene $\{a_1,\ldots,a_{29}\}$. Y cuando hablamos de subconjuntos estamos asumiendo que NO hay orden (dentro).

Queremos calcular el #C.



#C x 5! =

da la cantidad de elecciones con orden de k=5 elementos de un conjunto de n=29 elementos, es decir:

$$\#C\ .5! = \frac{29!}{24!}$$

O sea:

$$\#C = \frac{29!}{24!5!}$$

Definición y notación:

Sean n y k enteros tales que 0≤ k ≤ n. Llamamos número combinatorio a:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Luego el número combinatorio cuenta la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n (no hay orden interno!).

Propiedades:

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Claramente por cada conjunto de k elementos tengo otro de n-k que no fue elegido. Hay una biyección entre la cantidad de subconjuntos de k elementos y la cantidad de subconjuntos de n-k elementos. En particular:

2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \mathbf{1}$ **y** $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

¿Cómo se interpreta?

Ejemplo 7.

Rehacer el ejercicio 5.

Rta: $\binom{29}{5}5!$

Ejemplo 8.

Hay 5 hombres y 4 mujeres disponibles para armar un comité de 3 miembros, ¿de cuántas formas puede hacerse, con la condición de que haya más mujeres que hombre? ¿Y si además siempre tiene que estar María? ¿Y si no quiero elegir nunca a María?

Rta: $\binom{5}{0}\binom{4}{3} + \binom{5}{1}\binom{4}{2}$= terminar

Ejemplo 9. Permutaciones con repetición

Calcular la cantidad de anagramas que se pueden formar con las letras de la palabra CATARATAS.

Rta: $\binom{9}{4}\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \cdots = \frac{9!}{4!2!}$ (hay 4 A y 2 T en la palabra)

O sea es la permutación de las 9 letras dividido algunos factoriales que se corresponden con las letras repetidas. Generalizar.

Ejemplo 10.

Idem Ejercicio 9 con la condición de que comiencen con C o terminen con S.

Vamos a usar que dados dos conjuntos finitos A y B entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Ejemplo 11.

Idem Ejercicio 9 con la condición de que aparezca siempre CS o SC (siempre juntas).

Ejemplo 12. Bolitas indistinguibles en celdas.

¿De cuántas formas se pueden distribuir 3 revistas iguales en 3 revisteros contiguos?

1. $000\|-\|-$	6. $0\|00\|-$
2. $-\|000\|-$	7. $-\|00\|0$
3. $-\|-\|000\|$	8. $0\|-\|00$
4. $00\|0\|-$	9. $-\|0\|00$
5. $00\|-\|0$	10. $0\|0\|0$

El conjunto de todas las configuraciones está en biyección con el conjunto de anagramas de la palabra 000II, por lo tanto la cantidad total de formas es

$$\frac{5!}{3!\,2!}$$

En general si tenemos n bolitas y k urnas, o sea k-1 palitos, la cantidad de distribuciones posibles es

$$\frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1})!}{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})!\,\boldsymbol{n}!}=\binom{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}=\binom{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$$

Ejemplo 13.

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ donde $x_i \in N$?

Es decir, contar la cantidad de soluciones (x_1, x_2, x_3, x_4) tales que x_i es un número natural para todo i=1,…,4.

Ejemplo 14. Conjunto de partes

La cantidad total de subconjuntos de un conjunto formado por n elementos es 2^n.

Justificación (entre otras,… ¿por ejemplo?):

$\binom{n}{0} = 1$, es la cantidad de subconjuntos de 0 elementos de un conjunto de n, o sea el conjunto vacío,

$\binom{n}{1} = n$, es la cantidad de subconjuntos de 1 elemento de un conjunto de n,

$\binom{n}{2}$ es la cantidad de subconjuntos de 1 elemento de un conjunto de n,

Y así hasta

$\binom{n}{n} = 1$, es la cantidad de subconjuntos de n elemento de un conjunto de n, o sea el conjunto original.

Luego, todos los subconjuntos se calculan haciendo

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i\,1^{n-i}=(1+1)^n=2^n.$$

Otra forma de pensarlo:

Supongamos que el conjunto es $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Hay una biyección entre el conjunto de partes (conjunto de todos los subconjuntos) y las listas ordenadas o vectores de 5 coordenadas de 0's y 1's; donde 0 en la coordenada i significa que el x_i no está en el subconjunto y 1 en la coordenada i significa que el x_i está en el subconjunto. Es decir, por ejemplo:

{a,c,d} está en correspondencia con (1,0,1,1,0),

{ } = Ø está en correspondencia con (0,0,0,0,0) y así …

Esta relación o manera de asignación es biyectiva. Cada vector de 5 coordenadas de 0's y 1's se corresponde con un único subconjunto de A. Por lo tanto los dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Contamos entonces el segundo: el de los vectores.

La cantidad de vectores de 5 coordenadas de 0's y 1's se calcula usando el principio de multiplicación o diagrama de árbol de 5 etapas da 2 x 2 x 2 x 2 x 2 $=2^5$.

Ejemplo 15.

¿Cuántas ensaladas podemos formar con los ingredientes: zanahoria, lechuga, tomate y rúcula?

Rta:

Ejemplo 16. Binomio de Newton.

Usar técnicas de conteo para mostrar que:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \, b^{n-i} = (a+b)^n$$

Rta: ejercicio

En R, los números factoriales y combinatorios se calculan haciendo:

`factorial(n)` y `choose(n,k)`

Ejemplo 17.

Se eligen al azar tres lámparas de quince, de las cuales cinco son defectuosas. Hallar la probabilidad de que:

a) Ninguna sea defectuosa. Rta : 24/91
b) Sólo una sea defectuosa. Rta : 45/91
c) Una por lo menos sea defectuosa. Rta : 67/91