Convergencia de v.a. LGN. TCL

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computació n)

16 de junio de 2020

$(*)\quad \dfrac{n\left(\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right)}{n \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Límite de variables aleatorias

Ley de los grandes números. Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con esperanza finita $E(X_i) = \mu < +\infty$. Entonces

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \mu. \qquad \bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Teorema Central del Límite. Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con esperanza finita $E(X_i) = \mu < +\infty$ y varianza finita $V(X_i) = \sigma^2 < +\infty$. Entonces

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \qquad \begin{cases} E(\bar{X}_n) = \mu \\ V(\bar{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

Obs: $Z_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} Z$

$(*)$

$|X_n - \mu| < \varepsilon$

Límite de variables aleatorias

Convergencia en probabilidad: Una sucesión de v.a. converge en probabilidad a una v.a. X, y se denota $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$, si para todo $\epsilon > 0$, (En LGN, $X = \mu$)

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{P(|X_n - X| \geq \epsilon)}_{a_n} = 0.$$

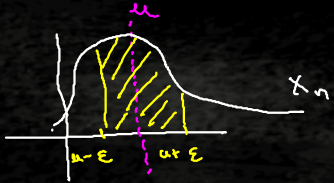
Límite de números reales

Ejemplo: Sea $X_n \sim \mathcal{E}(n)$ una sucesión de variables aleatorias. Entonces $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$.

Sea $\varepsilon > 0$.

$P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) =$

$P(X_n \geq \varepsilon) = e^{-n\varepsilon} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$



Límite de variables aleatorias

Convergencia en distribución: Una sucesión de v.a. converge <u>en distribución</u> a una v.a. X, y se denota $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, si para todo $x \in \mathbb{R}$ donde F_X es continua,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

límite puntual de funciones

Ejemplo: Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias tales que

$$F_{X_n} = \begin{cases} 1-(1-\frac{1}{n})^{nx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Entonces $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ con $X \sim \mathcal{E}(1)$.

Si $x > 0$ $\quad F_{X_n}(x) = 1 - \boxed{(1-\frac{1}{n})^n}^{x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - e^{x}$ $\quad$ e

Si $x < 0$ $\quad F_{X_n}(x) = 0 \longrightarrow 0$

Ejercicio 1: Vamos convergiendo que el n es tirano

Sean $X_1, \cdots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$ y $V(X_i^2) \leq C$ $\forall i$. Calcular el límite en probabilidad de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \overline{X_n^2}$.

$X_1^2 \; X_2^2 \cdots X_n^2$ suc. de v.a.i.

Por Tchebychev, sea $\varepsilon > 0$

$$0 \leq P(|\overline{X}_n^2 - \underbrace{E(\overline{X}_n^2)}_{\mu^2+\sigma^2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X}_n^2)}{\varepsilon^2} \underset{(*)}{\leq} \frac{C}{\varepsilon^2 \cdot n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

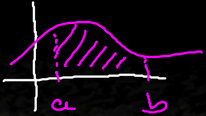
Por Sandwich, $\overline{X}_n^2 \xrightarrow{P} \mu^2+\sigma^2$

$$* \; E(\overline{X}_n^2) = E\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n}\right) = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot E(X_1^2) \cdot \cancel{n} = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\underbrace{Var(X_i)}_{\sigma^2} = E(X_i^2) - \underbrace{E(X_i)}_{\mu}{}^2 \Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$X_1^2 \cdots X_n^2$ son indep

$$* \; Var(\overline{X}_n^2) = Var\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{V(X_i^2)}_{\leq C} \leq \frac{\cancel{n} \cdot C}{n^{\cancel{2}}}$$



Ejercicio 2: Método de Montecarlo

(a) Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d., $X_i \sim U[a,b]$. Sea $h:[a,b]\to\mathbb{R}$. Probar que

$$\overline{Y}_n = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \overbrace{\int_a^b h(x)\,dx}^{\text{número}}$$

(b) Estimar numéricamente el valor de $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$. (en R)

Por LGN

a) $Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_n$ i.i.d.

$$\boxed{\overline{Y}_n \longrightarrow E(Y_1)}$$

$$\to \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\left((b-a)\sum_{i=1}^{n} h(X_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(b-a)h(X_i)}_{Y_i}$$

Y_i independientes (tarea)

$$\to E(Y_1) = E((b-a)h(X_1)) = (b-a)E(h(X_1)) = \cancel{(b-a)}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\frac{1}{\cancel{b-a}} I_{[a,b]}(x)\,dx}_{\int_a^b h(x)dx}$$

Ejercicio 3: Binomial es la nueva normalidad

Le mando a mamá un audio muy largo de Whatsapp que consiste de 1000 palabras. Mamá escucha el mensaje en la calle y hay mucho ruido. La probabilidad de que escuche cada palabra es 0.55. Si el ruido en la calle es intermitente y cada palabra en el audio se escucha o no de manera independiente a las demás.

(a) Calcular la probabilidad de que mamá haya escuchado las palabras 'Hola, ma. ¿Có mo estás?' bien.

(b) Aproximar la probabilidad de que mamá haya escuchado más de la mitad del mensaje bien.

X = 'cant de palabras que escucha bien'

$X \sim Bi(n=4, p=0.55)$

a) $P(X=4) = 0.55^4$

b) $Y \sim Bi(\overbrace{1000}^{n \text{ grande}}, 0.55)$

$$P(Y>500) = \sum_{i=501}^{1000} \binom{1000}{i} \cdot 0.55^{i} \, 0.45^{1000-i} \quad !!!$$

$$1 - \underbrace{P(Y \le 500)}_{*} \cong 1 - 0.00074 = \boxed{0.99926}$$

$$S_{1000} = Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000} \text{ con } X_i \sim B(0.55)$$

Calculamos:

$$\underbrace{P(Y \le 500)}_{F_Y(500)} = P(S_{1000} \le 500) =$$

$$= P\left(\frac{S_{1000} - \overbrace{1000 \times 0.55}^{E(S_{1000})}}{\underbrace{\sqrt{1000 \times 0.55 \times 0.45}}_{\sqrt{Var(S_{1000})}}} \le \overbrace{\frac{500 - 1000 \times 0.55}{\sqrt{1000 \cdot 0.55 \cdot 0.45}}}^{\text{número } z = -3.178} \right)$$

tabla

$$\underset{\text{TCL}}{\approx} \Phi(z) = 0.00074$$