Clase práctica - 21 de mayo

Marina Valdora

21 de mayo de 2020 - Vectores continuos

Repaso

Vectores aleatorios continuos

Definición: El vector aleatorio (X, Y) es continuo si existe una función, denominada función de densidad conjunta, $f_{XY}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x, y)dxdy \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

En particular, si $A = [a, b] \times [c, d]$

$$P((X, Y) \in A) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y)dydx.$$

Propiedades

Una función de densidad conjunta satisface:

- $f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dxdy = 1$

Definición:

Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ y marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y), y$ sea x tal que $f_X(x) > 0$, la función de densidad condicional de Y dado $X = x$ está dada por

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$

Del mismo modo, sea y tal que $f_Y(y) > 0$, la función de densidad condicional de X dado $Y = y$ está dada por

$$f_{X|X=y}(x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Observación

$$f_{XY}(x, y) = f_{X|X=y}(x)f_Y(y) \text{ y } f_{XY}(x, y) = f_{Y|X=x}(y)f_X(x)$$

Ejercicios

2) Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y)=\frac{x^2}{2y^2}\quad I_{[-1,1]}(x)I_{(x^2,+\infty)}(y)$$

(a) Hallar f_X y f_Y

(b) Calcular $P(Y\leq 1|0\leq X\leq 1)$

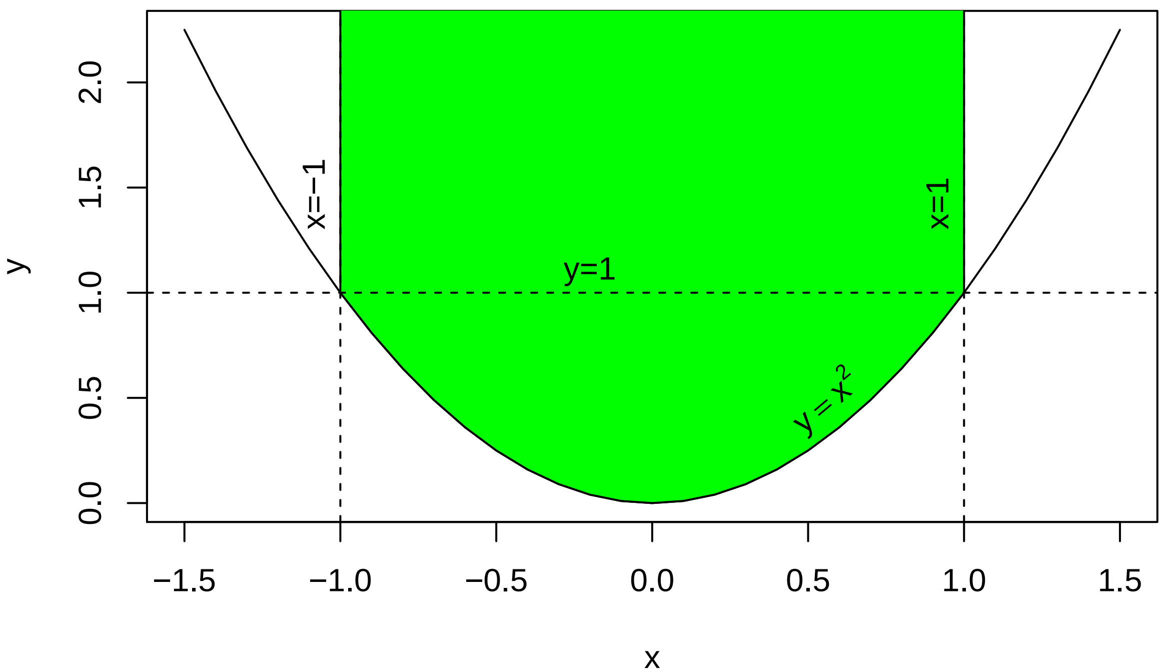
(c) Hallar $f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y)$ y $P\left(\frac{1}{10}\leq Y\leq 1|X=\frac{1}{3}\right)$

Resolución

El soporte de f_{XY} es el conjunto de (x,y) tales que $f_{XY}(x,y)>0$.

$\text{Sop}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\leq x\leq 1, y>x^2\}$

Grafico el soporte



$$f_X(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<-1 \text{ o } x>1 \\ \int_{x^2}^{+\infty}\frac{x^2}{2y^2} \text{ si } -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$\int_{x^2}^{+\infty}\frac{x^2}{2y^2}dy=\frac{x^2}{2}\int_{x^2}^{+\infty}y^{-2}dy=\frac{x^2}{2}\left[-y^{-1}\right]_{x^2}^{+\infty}$$

$$=-\frac{x^2}{2}\left[\lim_{y\to+\infty}y^{-1}-x^{-2}\right]$$

$$=-\frac{x^2}{2}(-x^{-2})=\frac{1}{2}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2}I_{[-1,1]}(x)$$

$$X \sim U[-1,1]$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{x^2}{2y^2} \text{ si } 0 < y < 1 \\ \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2y^2} \text{ si } y > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{x^2}{2y^2} dx = \frac{1}{2y^2} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 dx = \frac{1}{2y^2} \frac{x^3}{3} |_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2y^2} \left(\frac{y^{3/2}}{3} - \frac{(-\sqrt{y})^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2y^2} \left(2\frac{y^{3/2}}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{y}}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2y^2} dx = \frac{1}{2y^2} \frac{x^3}{3} |_{-1}^{1} = \frac{1}{2y^2} (\frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3}) = \frac{1}{3y^2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{y}} \text{ si } 0 < y < 1 \\ \frac{1}{3y^2} \text{ si } y > 1 \end{cases}$$

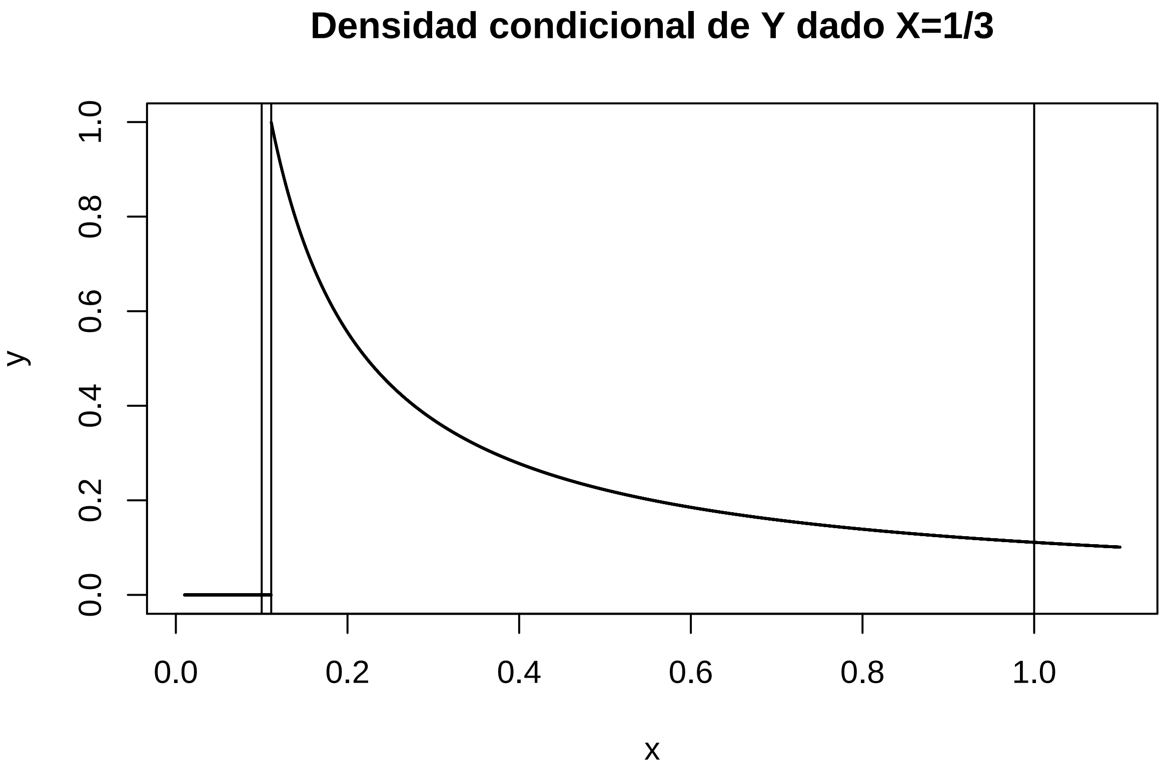
$$f_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt{y}} I_{[0,1]}(y) + \frac{1}{3y^2} I_{(1,+\infty)}(y)$$

c) Hallar $f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y)$ y $P\left(\frac{1}{10} \leq Y \leq 1 | X = \frac{1}{3}\right)$

$$f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y) = \frac{f_{XY}(1/3, y)}{f_X(1/3)} = \frac{1/9}{2y^2} I_{(1/9,+\infty)}(y) 2 = \frac{1}{9y} I_{(1/9,+\infty)}(y)$$

$$P\left(\frac{1}{10} \leq Y \leq 1 | X = \frac{1}{3}\right) = \int_{1/10}^{1} f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y) dy$$

```r
fx<- function(y){ 1/(9*y)*(y>1/9)}
x <- seq(0.01,1.1, length=10000)
y <- fx(x)
plot(x,y,pch = 16, cex = .2, main= "Densidad condicional de Y dado X=1/3")
abline(v=1/9)
abline(v=1/10)
abline(v=1)
```



$$\int_{1/10}^{1/9} 0dy + \int_{1/9}^{1} \frac{1}{9y^2} dy$$

$$= \int_{1/9}^{1} \frac{1}{9y^2} dy = \frac{1}{9}(-y^{-1})|_{1/9}^{1} = \frac{1}{9}(-1 + (\frac{1}{9})^{-1}) = \frac{8}{9}$$