**Desigualdad de Chebychev y Teorema Central del Límite**

1. Una sección de bosque de pinos tienen un número de árboles enfermos por acre $Y$, que sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 10$. Los árboles enfermos son rociados con un insecticida que cuesta \$3000 por árbol, más un costo fijo de alquiler del equipamiento de \$50000. Sea $C$ el costo del rociado de los árboles enfermos. Encuentre un intervalo que acote a $C$ con probabilidad al menos 0,75.

2. Un negocio de mascotas ofrece el siguiente servicio para sus clientes que toman vacaciones. El servicio consiste en alquilarle al dueño de la mascota un dispenser automático de raciones diarias de alimento balanceado. Cuando el animal termina de comer una ración, automáticamente, el dispenser pone a su disposición la ración siguiente. El tiempo (en días) que el gato de Felipe demora en comer una ración de alimento es una variable aleatoria exponencial con valor medio 1/2. Se puede suponer que los tiempos que tarda en comer cada ración son independientes entre sí.

   i) Felipe se va 30 días de vacaciones y contrata este servicio con 62 raciones. Si el gato no tiene comida disponible se escapa de la casa. Aproximar la probabilidad de que Felipe encuentre al gato en su hogar al volver de las vacaciones.

   ii) ¿Cuántas raciones tiene que comprar (aproximadamente) si quiere encontrar al gato en su casa al volver de las vacaciones con una probabilidad aproximadamente de 0,99?

3. El próximo examen final de Proba (C) será de opción múltiple y constará de 100 preguntas con 4 opciones cada una, de las cuales sólo una es correcta. Si la proporción de preguntas correctas es menor a 1/6, el examen está desaprobado. Si dicha proporción está entre 1/6 y 1/3 el examen pasa a revisión. En cualquier otro caso el examen se aprueba. Pepa va a rendir dicho examen sin estudiar y piensa contestar todas las preguntas al azar.

   i) Probar que la probabilidad de que el examen de Pepa vaya a revisión es mayor o igual a 0,73.

   ii) Aproximar la probabilidad anterior. (Plantearlo de dos maneras distintas).

   iii) ¿Cuántas preguntas deberá tener el examen (aproximadamente) para que la probabilidad de que Pepa responda 15 o más preguntas correctamente sea aproximadamente 0,9?

4. Para rellenar una zona del Río de la Plata se utilizan 2 camiones (A y B). La distribución de la carga diaria (en toneladas) transportada por el camión A tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{52} & 11 < x < 15 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} .$$

   El camión B lleva una carga diaria en toneladas con esperanza 18 toneladas y desvío estándar 1.3 toneladas. Aproximar la probabilidad de que la carga promedio transportada por día en 256 días esté entre 31,05 toneladas y 31,25 toneladas.

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $E(X_i) = 2$, $V(X_i) = 1$ y $E(X_i^4) = 32$. Sea

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 .$$

   Calcular el límite en probabilidad de $Y_n$.

# Teorema Central del Límite

Enunciado: Sean $X_1, X_2, \dots X_n$ iid tq $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = V(X_i)$, luego si consideramos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ entonces

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\mu} = n\mu$$

$$V(S_n) \underset{ind}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq t\right)}^{\text{acumulada}} = \Phi(t) \quad *$$

En la práctica usamos $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \overset{aprox}{\approx} N(0,1)$ n suf grande

pseuso estandarización $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \overset{a}{\approx} N(0,1)$ n suf grande

$S_n \underset{(a)}{\approx} N(n\mu, n\sigma^2)$

* $\Phi$ es la f.d.a de una v.a $N(0,1)$

## Promedio

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \quad \text{sumas de v.a}$$

$$\frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}} = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \boxed{\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \overset{(a)}{\approx} N(0,1)}$$

$$E(\overline{X_n}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} n\mu = \mu = E(X_1)$$

$$V(\overline{X_n}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$V(aZ) = a^2 V(Z)$

---

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-ésima rep es éxito} \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$\hat{p}_n = \overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{B(n,p)}{n} = \frac{\#\text{éxitos}}{n} \quad \text{proporciones muestrales}$$

$0 < \overline{X_n} < 1$ .

CHEBY $\quad \overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} E(X_1) = p = P(\text{"éxito"})$ LGN

$\mu = E(X_i) = p$

$\sigma^2 = p(1-p)$

Luego $\sqrt{n}\,.\frac{(\hat{p}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{(a)}{\approx} N(0,1)$ TCL

$p$ = proporción poblacional

2. Un negocio de mascotas ofrece el siguiente servicio para sus clientes que toman vacaciones. El servicio consiste en alquilarle al dueño de la mascota un dispenser automático de raciones diarias de alimento balanceado. Cuando el animal termina de comer una ración, automáticamente, el dispenser pone a su disposición la ración siguiente. El tiempo (en días) que el gato de Felipe demora en comer una ración de alimento es una variable aleatoria ~~exponencial~~ con valor medio 1/2. Se puede suponer que los tiempos que tarda en comer cada ración son independientes entre sí.

   i) Felipe se va 30 días de vacaciones y contrata este servicio con 62 raciones. Si el gato no tiene comida disponible se escapa de la casa. Aproximar la probabilidad de que Felipe encuentre al gato en su hogar al volver de las vacaciones.

   ii) ¿Cuántas raciones tiene que comprar (aproximadamente) si quiere encontrar al gato en su casa al volver de las vacaciones con una probabilidad aproximadamente de 0,99?

i) $X_i$ = tiempo (días) que tarda el gato en comer la i-ésima ración

$i=1,\dots,n=62$ $\qquad \mu=\frac{1}{2}\quad \sigma=\frac{1}{2}$

$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda=2)$

$E(X_i)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow \lambda=2$

$V(X_i)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4}=\sigma^2$ $\qquad X_1,\dots,X_n$ iid ✓

$S_{62}=\sum_{i=1}^{62} X_i$ sumo los tiempos que tarda en comer cada ración

$$P(S_{62}\geq 30)=P\Bigg(\underbrace{\frac{S_{62}-62\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{62}\,\frac{1}{2}}}_{=Y\underset{(a)}{\approx}N(0,1)}\geq\underbrace{\frac{30-62\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{62}\,\frac{1}{2}}}_{-0.25}\Bigg)=P(Y\geq -0.25)=$$

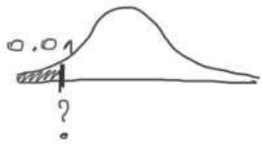
$\phi(t)=1-\phi(-t)$

$$\underset{(a)}{\approx}\underbrace{1-\phi(-0.25)}_{\phi(0.25)}=0.5987$$

Tarea: resolverlo de manera exacta usando gamma

ii) Hallar $n$ tq $P(S_n\geq 30)\approx 0{,}99$

$$P\Bigg(\underbrace{\frac{S_n-n\,1/2}{\sqrt{n}\,1/2}}_{\underset{(ap)}{\approx}N(0,1)}\geq\frac{30-n\,1/2}{\sqrt{n}\,1/2}\Bigg)=1-\phi\left(\frac{30-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}\,1/2}\right)\approx 0.99$$




$\phi(\quad)\approx 0{,}01$

$\phi(-2.33)\approx 0{,}01$

$$\frac{30-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}\,1/2}\approx -2.33$$

$0<\sqrt{n}=m$

$n=m^2$

$30-\frac{m^2}{2}\approx -2.33\cdot\frac{m}{2}$ (cuadrática)

$\approx 0 <$ $m\cong 8.99=\sqrt{n}$ ; $\cancel{m\cong -6.66}$

$n\approx 81$ raciones

3. El próximo examen final de Proba (C) será de opción múltiple y constará de 100 preguntas con 4 opciones cada una, de las cuales sólo una es correcta. Si la proporción de preguntas correctas es menor a 1/6, el examen está desaprobado. Si dicha proporción está entre 1/6 y 1/3 el examen pasa a revisión. En cualquier otro caso el examen se aprueba. Pepa va a rendir dicho examen sin estudiar y piensa contestar todas las preguntas al azar.

i) Probar que la probabilidad de que el examen de Pepa vaya a revisión es mayor o igual a 0,73.

ii) Aproximar la probabilidad anterior. (Plantearlo de dos maneras distintas).

iii) ¿Cuántas preguntas deberá tener el examen (aproximadamente) para que la probabilidad de que Pepa responda 15 o más preguntas correctamente sea aproximadamente 0,9?

i) $n = 100$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{i-ésima resp es correcta} \\ 0 \end{cases}$ $\quad p = P(\text{exito}) = \frac{1}{4}$

$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(n = 100, p = \frac{1}{4})$ (A la $B(n,p)$ le podemos aplicar TCL)

$$P\left(\frac{1}{6} < \overline{X}_n < \frac{1}{3}\right) = P\left(\overbrace{\frac{100}{6}}^{16.6} < Y < \overbrace{\frac{100}{3}}^{33,3}\right) = ⊛$$

$\mu = E(X_i) = p$

$\sigma^2 = p(1-p)$

$\overline{X}_n = \overline{X}_{100} = \hat{p}_{100}$ prop muestral

$\overline{X}_{100} = \hat{p}_{100} = \frac{Y}{100} \qquad Y \sim B(100, \frac{1}{4})$

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \underset{(a)}{\approx} N(0,1) \quad \text{TCL} \qquad\qquad \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{(a)}{\approx} N(0,1)$$

Cheby

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$E(\overline{X}_n) = \mu = p = \frac{1}{4}$

$$P\left(\frac{1}{6} < \overline{X}_n < \frac{1}{3}\right) = P\left(\underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{4}}_{-1/12} < \overline{X}_n - \frac{1}{4} < \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{1/12}\right) =$$

$$= P\Big(|\overline{X}_n - \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{= E(\overline{X}_n)}| < \underbrace{\tfrac{1}{12}}_{\varepsilon}\Big) \underset{CH}{\geq} 1 - \frac{V(\overline{X}_n)}{\left(\frac{1}{12}\right)^2} = 1 - \frac{1/4 \; 3/4}{100 \cdot \frac{1}{12^2}} = \boxed{0.73}$$

CA.

$V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$

ii) $$P\left(\frac{1}{6} < \overline{X}_n < \frac{1}{3}\right) = P\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{100}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}}}_{-1.92} < \underbrace{\frac{\sqrt{100}\left(\overline{X}_n - 1/4\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}}}_{Z \underset{(a)}{\approx} N(0,1)} < \underbrace{\frac{\sqrt{100}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}}}_{1.92}\Bigg)$$

$$\underset{(a)}{\overset{TCL}{\approx}} \Phi(1.92) - \underbrace{\Phi(-1.92)}_{-(1 - \Phi(1.92))} =$$

$$= 2\Phi(1.92) - 1 = \ldots$$

Ej: pensarlo con binomiales ⊛

iii) $P(Y \geq 15) \approx 0,9$

$Y = \#$ resp correctas

$Y \sim B(n, p = \frac{1}{4})$

$$P\Bigg(\underbrace{\frac{Y - n \cdot 1/4}{\sqrt{n \frac{1}{4}\frac{3}{4}}}}_{= W \underset{(a)}{\approx} N(0,1)} \geq \frac{15 - n\,1/4}{\sqrt{n\frac{1}{4}\frac{3}{4}}}\Bigg) \approx 0,9$$

$$1 - \Phi\left(\frac{15 - \frac{n}{4}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{3}{16}}}\right) \approx 0,9$$

Repetir lo mismo que antes.

1. Una sección de bosque de pinos tienen un número de árboles enfermos por acre $Y$, que sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 10$. Los árboles enfermos son rociados con un insecticida que cuesta \$3000 por árbol, más un costo fijo de alquiler del equipamiento de \$50000. Sea $C$ el costo del rociado de los árboles enfermos. Encuentre un intervalo que acote a $C$ con probabilidad al menos 0,75.

$Y$ = nº de árboles enf por acre

$Y \sim P(\lambda = 10)$ $\qquad C = 3000Y + 50.000$

$P(a \leq C \leq b) \geq 0.75$ $\qquad$ Hallar $a, b$

$P(C \in [a,b]) \geq 0.75$

$P(|C - E(C)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(C)}{\varepsilon^2}$ $\qquad \underline{\forall \varepsilon > 0}$

$E(C) = E(3000Y + 50.000) = 3000 \cdot 10 + 50000$

$E(C) = 80.000$

$V(C) = 3000^2 V(Y) = 3000^2 \, 10$

$P(|C - 80000| \leq \varepsilon) \geq \underbrace{1 - \frac{3000^2 \cdot 10}{\varepsilon^2} \geq 0.75}$

Despejar $\varepsilon$ $\qquad \varepsilon \geq 18973,66$

→ Tomamos cualquiera de estos valores. Cuanto menor sea el elegido más chico será el intervalo.

Tomamos $\varepsilon = 18974$

$|C - 80.000| \leq 18974$

$80.000 - 18974 \leq C \leq 80.000 + 18974$

$61026 \leq C \leq 98974$

$P(C \in I) \geq 0.75$ $\qquad \boxed{I = [61026, 98974]}$