Convenzione Yaw, Pitch, Roll (YPR)

Gli angoli Yaw, Pitch, Roll descrivono le rotazioni degli assi del sistema di riferimento immagine rispetto al sistema di riferimento oggetto:

- Yaw o heading (ψ) rotazione attorno asse z
- Pitch (θ) rotazione attorno asse y
- Roll (ϕ) rotazione attorno x

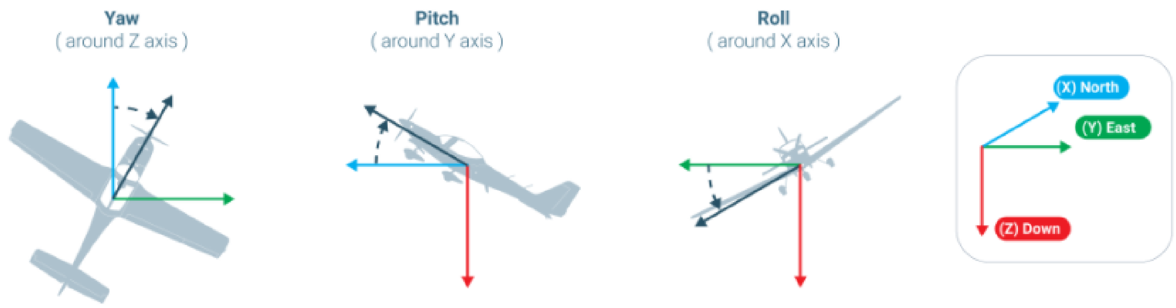

Figura 1 – Angoli di rotazione Yaw, Pitch e Roll.

La matrice di rotazione $\mathbf{C}_i^o$ che trasforma coordinate espresse nel sistema di riferimento immagine in quello oggetto è definita come segue:

$$\mathbf{C}_i^o = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Al fine di determinare la matrice di rotazione $\mathbf{R}_i^o$ tradizionalmente usata in fotogrammetria è necessario applicare una ulteriore rotazione per considerare il diverso orientamento degli assi, sia del sistema immagine che del sistema oggetto (con l'asse z che punta verso l'alto ed x verso est, implicando una rotazione di $\pi/2$ attorno a z e di π attorno a y, sia per il sistema oggetto che per il sistema immagine). In particolare:

$$\mathbf{R}_i^o = \mathbf{S}\,\mathbf{C}_i^o\,\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{C}_i^o = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R}_i^o\,\mathbf{S}$$

dove:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\pi & 0 & -\sin\pi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\pi & 0 & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota la matrice $\mathbf{C}_i^o$ è possibile ricavare gli angoli nel seguente modo:

$$\psi = \arctan \frac{\mathbf{C}_i^o(2,1)}{\mathbf{C}_i^o(1,1)}$$

$$\theta = \arcsin -\mathbf{C}_i^o(3,1) = \arctan \frac{-\mathbf{C}_i^o(3,1)}{\sqrt{\mathbf{C}_i^o(3,2)^2 + \mathbf{C}_i^o(3,3)^2}}$$

$$\phi = \arctan \frac{\mathbf{C}_i^o(3,2)}{\mathbf{C}_i^o(3,3)}$$

È possibile ricavare gli angoli anche a partire dalla matrice $\mathbf{R}_i^o$ nel seguente modo:

$$\psi = \arctan \frac{\mathbf{R}_i^o(1,2)}{\mathbf{R}_i^o(2,2)}$$

$$\theta = \arcsin \mathbf{R}_i^o(3,2) = \arctan \frac{\mathbf{R}_i^o(3,2)}{\sqrt{\mathbf{R}_i^o(3,1)^2 + \mathbf{R}_i^o(3,3)^2}}$$

$$\phi = \arctan \frac{-\mathbf{R}_i^o(3,1)}{\mathbf{R}(3,3)}$$

Convenzione Omega, Phi, Kappa (OPK)

Gli angoli Omega, Phi e Kappa descrivono la rotazione degli assi del sistema di riferimento oggetto al fine di trasformarlo nel sistema di riferimento immagine:

- Omega (ω) attorno asse x
- Phi (φ) rotazione attorno asse y
- Kappa (κ) rotazione attorno asse z

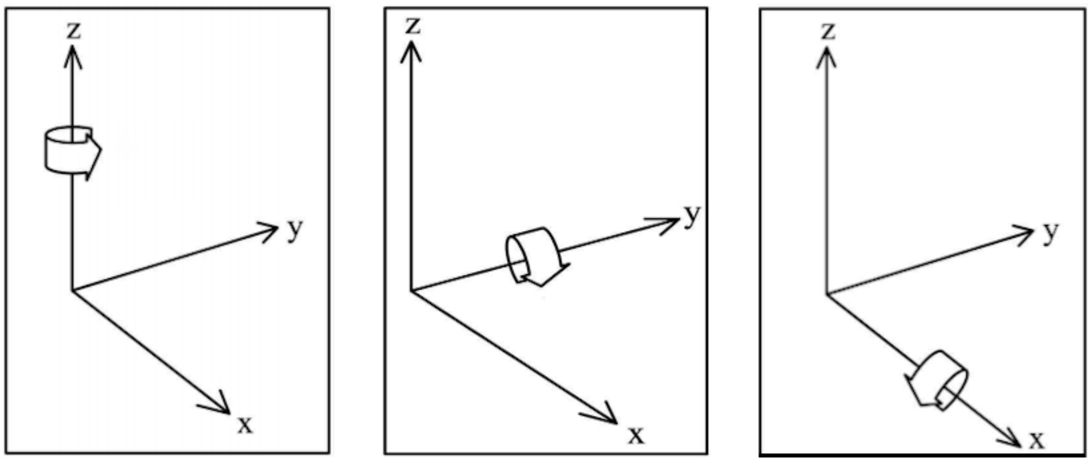

Figura 2 – Angoli di rotazione Omega, Phi, Kappa.

La matrice di rotazione $\mathbf{R}_i^o$, che trasforma le coordinate espresse nel sistema di riferimento immagine in quello oggetto, è definita come segue:

$$\mathbf{R}_i^o = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota la matrice $\mathbf{R}_i^o$ è possibile ricavare gli angoli nel seguente modo:

$$\omega = \arctan\frac{-\mathbf{R}_i^o(2,3)}{\mathbf{R}_i^o(3,3)}$$

$$\varphi = \arcsin\mathbf{R}_i^o(1,3) = \arctan\frac{\mathbf{R}_i^o(1,3)}{\sqrt{\mathbf{R}_i^o(2,3)^2 + \mathbf{R}_i^o(3,3)^2}}$$

$$\kappa = \arctan\frac{-\mathbf{R}_i^o(1,2)}{\mathbf{R}_i^o(1,1)}$$

NOTA: al fine di ottenere gli angoli nel dominio $[-\pi, \pi]$ è opportuno valutare l'arcotangente su quattro quadranti considerando i segni di numeratore e denominatore, oppure usando le varie implementazioni arctan2 predisposte nei vari linguaggi di programmazione.

Modello di distorsione di Brown

Il modello di Brown è un modello che permette di correggere le distorsioni di tipo radiale e tangenziale presenti nelle immagini, dipendenti dalla qualità delle lenti e dal loro non perfetto allineamento. Considerando il sistema di coordinate immagine ξ ed η, con origine al centro del sensore ed asse ξ rivolto a sinistra ed η verso l'alto e definendo i seguenti parametri:

- distanza principale della camera: c [mm] (delle volte confuso con la lunghezza focale f)
- coordinate del punto principale (PP): ξ_0 [mm], η_0 [mm]
- coefficienti di distorsione radiale: k_1 [mm^{-2}], k_2 [mm^{-4}], k_3 [mm^{-6}]
- coefficienti di distorsione tangenziale: p_1 [mm^{-2}], p_2[mm^{-2}]

Definendo le coordinate osservate (distorte) come ξ', η' è possibile determinare le coordinate prive di distorsioni come:

$$\xi = \xi' + d\xi$$
$$\eta = \eta' + d\eta$$

E la distanza dal punto principale:

$$r = \sqrt{(\xi' - \xi_0)^2 + (\eta' - \eta_0)^2}$$

Le correzioni per le distorsioni introdotte dalle lenti $d\xi$, $d\eta$ sono definite dalle seguenti equazioni:

$$d\xi = (\xi' - \xi_0)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + p_1(r^2 + 2(\xi' - \xi_0)^2) + 2p_2(\xi' - \xi_0)(\eta' - \eta_0)$$

$$d\eta = (\eta' - \eta_0)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + p_2(r^2 + 2(\eta' - \eta_0)^2) + 2p_1(\xi' - \xi_0)(\eta' - \eta_0)$$

Modello di distorsione di Brown applicato in Metashape

Il certificato di calibrazione usato dal software Agisoft Metashape e salvato in formato xml fornisce i seguenti parametri:

- distanza principale della camera: c [px] (identificata anche come focale f)
- coordinate del punto principale (PP): c_x [px], c_y[px]
- coefficienti di distorsione radiale adimensionali: K_1, K_2, K_3
- coefficienti di distorsione tangenziale adimensionali: P_1, P_2
- coefficienti di affinità a non ortogonalità: B_1 [px], B_2 [px]
- dimensioni del sensore: w [px], h [px]

Bisogna inoltre ricordare che per relazionare le quantità in pixel con le unità metriche usate nelle equazioni fotogrammetriche è necessario conoscere la dimensione di un pixel δ_{px} [mm]

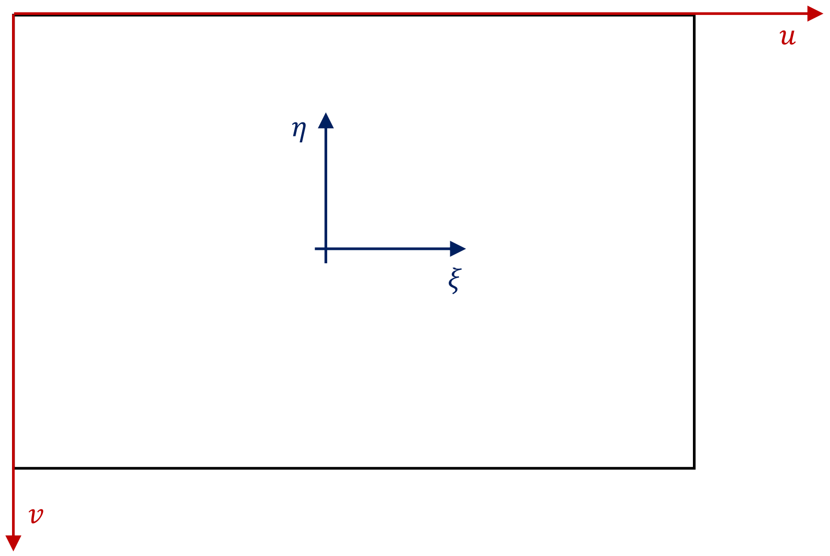

Figura 3 – Sistemi di riferimento immagine usati

Il sistema di riferimento immagine in pixel è definito dalle coordinate u e v, con l'origine nell'angolo in alto a sinistra del sensore, e con l'asse u rivolto verso destra e l'asse v verso il basso. Le coordinate del centro del primo pixel risultano essere 0.5 px, 0.5 px.

Le coordinate del punto principale fornite nel certificato di calibrazione sono riferite invece al centro dell'immagine. Al fine di determinare le coordinate del punto principale u_0, v_0 è necessario applicare la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} u_0 = c_x + \dfrac{w}{2} \\ v_0 = c_y + \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Inoltre, è utile definire la relazione tra le coordinate immagine ξ, η in unità metriche usate tradizionalmente nelle equazioni fotogrammetriche e le coordinate immagine u e v coerenti con l'ordinamento ed il numero di pixel del sensore immagine:

$$\begin{cases} \xi = \left(u - \dfrac{w}{2}\right) \delta_{\text{px}} \\ \eta = \left(\dfrac{h}{2} - v\right) \delta_{\text{px}} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{\xi}{\delta_{\text{px}}} + \dfrac{w}{2} \\ v = \dfrac{h}{2} - \dfrac{\eta}{\delta_{\text{px}}} \end{cases}$$

Partendo dalle coordinate u e v della matrice di coordinate senza distorsione, si procede secondo il seguente schema a calcolare le coordinate la posizione dello stesso punto nell'immagine distorta.

- Si passa alle coordinate normalizzate:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(u - u_0)}{c} \\ y = \dfrac{(v - v_0)}{c} \end{cases}$$

- Definendo la distanza dall'origine r delle coordinate normalizzate come:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  si calcolano le coordinate normalizzate prive di distorsione x e y:

$$\begin{cases} x' = x + x(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + (P_1(r^2 + 2x^2) + 2P_2 xy) \\ y' = y + y(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + (P_2(r^2 + 2x^2) + 2P_1 xy) \end{cases}$$

- Si convertono le coordinate normalizzate distorte x' e y' in coordinate immagine in pixel con distorsione u' e v':

$$\begin{cases} u' = u_0 + x'\,c + x'\,B_1 + y'\,B_2 \\ v' = v_0 + y'\,c \end{cases}$$

- Infine, si convertono le coordinate distorte in pixel u' e v' nelle coordinate immagine non distorte ξ' ed η', coerentemente con le convenzioni fotogrammetriche:

$$\begin{cases} \xi' = \left(u' - \frac{w}{2}\right)\delta_{\text{px}} = \left(u_0 + x'\,c + x'\,B_1 + y'\,B_2 - \frac{w}{2}\right)\,\delta_{\text{px}} \\ \eta' = \left(\frac{h}{2} - v'\right)\delta_{\text{px}} = \left(\frac{h}{2} - v_0 - y'\,c\right)\,\delta_{\text{px}} \end{cases}$$

Modello di distorsione di Brown applicato in Matlab

Il certificato di calibrazione usato dal software Agisoft Metashape e salvato in formato xml fornisce i seguenti parametri:

- distanza principale della camera lungo gli assi u e v: c_u [px], c_v [px] (identificate anche da f_x ed f_y)
- coordinate del punto principale (PP): u_0 [px], v_0[px]
- coefficienti di distorsione radiale adimensionali: K_1, K_2, K_3
- coefficienti di distorsione tangenziale adimensionali: P_1, P_2
- coefficienti di skew: s
- dimensioni del sensore: w [px], h [px]

Le convenzioni sono analoghe al caso precedente, ma l'algoritmo di conversione (da coordinate senza distorsione a coordinate distorte) risulta essere il seguente:

- Si passa alle coordinate normalizzate:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(u - u_0)}{c} \\ y = \dfrac{(v - v_0)}{c} \end{cases}$$

- Definendo la distanza dall'origine r delle coordinate normalizzate come:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

si calcolano le coordinate normalizzate prive di distorsione x e y:

$$\begin{cases} x' = x + x(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + (P_1(r^2 + 2x^2) + 2P_2 xy) \\ y' = y + y(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + (P_2(r^2 + 2x^2) + 2P_1 xy) \end{cases}$$

- Si convertono le coordinate normalizzate distorte x' e y' in coordinate immagine in pixel con distorsione u' e v':

$$\begin{cases} u' = u_0 + x' c_x + y' \, s \\ v' = v_0 + y' c_v \end{cases}$$

In altre parole, per ricondursi ai parametri del software Metashape è necessario convertire alcuni parametri nel seguente modo:

$$c = c_v$$
$$B_1 = c_u - c_v$$
$$B_2 = s$$
$$c_x = u_0 - \frac{w}{2}$$
$$c_y = u_0 - \frac{h}{2}$$

Gli altri rimangono invariati.

Calcolo dimensione del pixel a partire da dati EXIF

Al fine di calcolare la dimensione del pixel δ_{px} a partire dai dati EXIF è necessario estrarre le seguenti quantità dal file:

- lunghezza focale: f [mm]
- lunghezza focale equivalente nel formato 35 mm: f_{35} [mm]
- numero di pixel o dimensione del sensore: w [px], h [px]

Ricordando che la lunghezza focale equivalente nel formato 35 mm f_{35} si riferisce ad un sensore Full Frame di dimensioni 36 mm × 24 mm, si procede come di seguito.

- Si calcola il fattore di crop r, definito come il rapporto tra focale 35 mm e focale “reale”:

$$r = \frac{f_{35}}{f}$$

- Si determina la diagonale del sensore, riscalando la diagonale del sensore full frame:

$$d = \frac{d_{35}}{r} = \frac{\sqrt{36^2 + 24^2}}{r}$$

- Si determina l’aspect ratio del sensore a, calcolato sulla base del numero di pixel nelle due dimensioni (assumendo un pixel quadrato):

$$a = \frac{w}{h}$$

- Si determinano i due lati del sensore a partire dalla lunghezza della diagonale d e dall'aspect ratio a:

$$\begin{cases} f_w = a\, f_h \\ f_h = \sqrt{\dfrac{d^2}{1+a^2}} \end{cases}$$

- Si determina la dimensione del pixel δ_{px}:

$$\delta_{\mathrm{px}} = \frac{f_w}{w} = \frac{f_h}{h}$$