1. Ejercicios Propuestos

1. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias, estableciendo cual es en cada caso el intervalo de convergencia:

   a) $\sum_{n\geq 2} x^n \log(n)$.

   b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2 x^n}{2^n}$.

   c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} x^n$.

   d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} \left(x+\frac{1}{2}\right)^n$.

   e) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n-1}$.

   f) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!(2n-1)} x^{2n-1}$.

2. Hallar las sumas de las siguientes series, estudiando en cada caso su intervalo de convergencia:

   a) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n}$.

   b) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

   c) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n-2}}{3n}$.

3. Obtener los desarrollos en series de potencias de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = e^{-x^2}$.

   b) $f(x) = \cos^2(x)$.

   c) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$.

   d) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

   e) $f(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

   f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

4. Calcular el desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \arctan(x)$. Aplicar el resultado para hallar la suma de la serie:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

5. Calcular la serie de Fourier de la función 2π-periódica
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < \frac{-\pi}{2} \\ 1, & \text{si } \frac{-\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

6. Calcular la serie de Fourier de la función definida
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 4 < x \leq 5 \\ 2, & \text{si } 5 < x \leq 6. \end{cases}$$

7. Calcular la serie de Fourier de la función impulso rectangular
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Ecuaciones diferenciales

8. Utilice el método de separación de variables para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
$$(a)\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{1+t^2},\ x(0) = 1, \quad (b)\frac{dx}{dt} = x^2,\ x(0) = 1/10, \quad (c)\frac{dx}{dt} = 5-3x,\ x(0) = 1.$$

9. La evolución de una población celular sigue un modelo logístico dado por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}2x(5 - x),$$

con $t =$ tiempo en horas. Si inicialmente $x(0) = 1$:

a) Resuelva la ecuación diferencial cuando $x(0) = 1$, dibuje la gráfica y explique la evolución a largo plazo de la población.

b) ¿En qué momento la población alcanzará el 90 % de su capacidad máxima?

c) Resuelva la ecuación diferencial cuando $x(0) = 6$ y explique lo que observa.