Titulación: Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos
Asignatura: Álgebra Lineal
Profesores: Claudi Busqué (UMU) y Francisco Periago (UPCT)

Hoja de ejercicios tema 2: vectores, matrices y tensores

1. Determina la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: si u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3, entonces u_3 es combinación lineal de u_1 y u_2.

2. Consideremos los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$. Encuentra un vector w ortogonal a u y v. Comprueba que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v. Encuentra ahora un vector que <u>no</u> sea combinación lineal de u, v y comprueba que no es ortogonal a w.

3. Haz un dibujo de los siguientes sunconjuntos de $\mathbb{R}^2$:
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } ||(x, y)||_1 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } ||(x, y)||_2 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } ||(x, y)||_\infty = 1\}$$

4. Prueba que $||u||_2 \leq \sqrt{||u||_1 ||u||_\infty}$.

5. Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero, pero ¿qué pasa si su producto escalar es próximo a cero? Sean $x = [1, -0.75]$ e $y = [0.3, 0.3]$. Calcula el producto escalar $x \cdot y$ y el ángulo que forman. ¿Qué conclusión puedes sacar?

   Si dos vectores x, y son unitarios, entonces $-1 \leq x \cdot y \leq 1$ (¿por qué?). En este caso, ¿que podemos decir si $x \cdot y$ es aproximadamente -1, 1 o cero?

6. Sean u, v dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$ que forman un ángulo de 60°. Calcula $||2u + v||$.

7. Sean u, v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ de norma 2 y 3 respectivamente que forman un ángulo de 60°. ¿Qué ángulo forman los vectores u y $2u - v$?

8. Calcula $A + B$, $(A + B)^\top$, AB, BA, $(AB)^\top$, $A^\top B^\top$ y $B^\top A^\top$ para las matrices:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Prueba que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10. ¿Es cierta para matrices la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$?

11. ¿Existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A \cdot A^\top = 0$? ¿y si son matrices complejas?

12. Sean A, B matrices tales que $I + AB$ es invertible y sea S la inversa de $I + AB$. Prueba que $I + BA$ también es invertible y si inversa es $I - BSA$.

13. Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Si llamamos **flop** a una operación, ya sea una suma, resta, multiplicación o división, prueba que para calcular AB son necesarios $mn(2p-1)$ flops (haciendo la multiplicación de forma estándar). Si A es una matriz 10×2, B una matriz 2×10 y C una matriz 10×10 y queremos calcular ABC, ¿qué es mejor desde el punto de vista computacional, calcular $(AB)C$ o $A(BC)$? .

14. Dadas dos matrices cuadradas A, B, se define el **conmutador** de A, B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por otra parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguientes tres matrices, llamadas matrices de Pauli:

$$S_x = \frac{1}{2}\bar{h}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_y = \frac{1}{2}\bar{h}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2}\bar{h}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\bar{h} = \frac{h}{2\pi}$, con h la constante de Plank. Comprueba que

$$[S_x, S_y] = j\bar{h}S_z, \quad [S_y, S_z] = j\bar{h}S_x, \quad [S_z, S_x] = j\bar{h}S_y$$

y que

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\bar{h}^2 I_3$$

con I_3 la matriz identidad 3×3.

15. Si A es una matriz simétrica, ¿son las a matrices $B^\top AB$, $A + A^\top$ y $A - A^\top$ simétricas?

16. Prueba que si A es una matriz invertible simétrica, entonces A^{-1} es también simétrica.

17. Sean $u_1, \ldots, u_m$ vectores de $\mathbb{K}^n$ y supongamos que para ciertos escalares $x_1, \ldots, x_m$ se tiene $x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0$. Expresa esta última igualdad en forma matricial

18. Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Observa que $1 + v^\top u$ es un escalar, que suponemos no nulo. Prueba que la matriz $I + uv^\top$ es no singular y su inversa es

$$(I + uv^\top)^{-1} = I - \frac{uv^\top}{1 + v^\top u}$$

19. Sea A la matriz dada por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} invertible. Prueba que existen matrices X, Y tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ e I es la matriz identidad del tamaño adecuado (la matriz S se denomina el **complemento de Schur** de A_{11}).

20. Expresa la matriz AB como suma de matrices de rango 1, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

21. Sea $u^\top = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$, $v^\top = [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ y $w^\top = [a, b, c]$. Halla a, b, c para que la matriz $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal de determinante 1.