MATEMÁTICA DISCRETA

CONJUNTOS

Jorge Ballesta Cerezo

. . .

Nociones básicas

Un conjunto es una colección de objetos, llamados elementos.

En general denotaremos a los conjuntos por letras mayúsculas y sus elementos

$$A=\{a,b,c\} \qquad A=\{1,2,3\} \qquad A=\mathbb{N}$$

La relación de pertenencia de un elemento a un conjunto $\left\langle \begin{array}{l} 1 \in A \\ 1.2 \notin A \end{array} \right\} A=\{n\in\mathbb{N} : n<4\}$

A está contenido en B si todo elemento de A está en B $\Rightarrow A\subseteq B$ y por tanto, A es un subconjunto de B

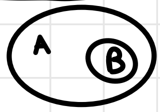
A y B son iguales si $A\subseteq B$ y $B\subseteq A \Rightarrow A=B$ Ejemplo: $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{2,3,4\}$

Negación $A\subseteq B : A\not\subseteq B$

Negación $A=B : A\neq B$

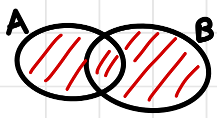
$\Big\}\ A\subsetneq B : A\subseteq B$ y $A\neq B$

$$\underbrace{A\not\subseteq B \quad B\subseteq A \quad A\neq B}_{B\subsetneq A}$$

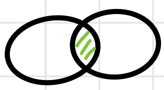


Operaciones con conjuntos

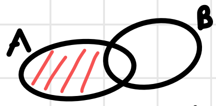
Unión $A\cup B := \{x : x\in A \text{ ó } x\in B\}$; $A\subseteq A\cup B$ y $B\subseteq A\cup B$



Intersección $A\cap B := \{x : x\in A \text{ y } x\in B\}$; $A\cap B\subseteq A$ y $A\cap B\subseteq B$

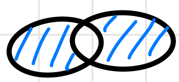


$A\cap B=\emptyset \Rightarrow$ A y B son conjuntos disjuntos

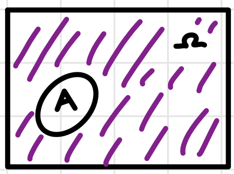


Diferencia $A\setminus B := \{x : x\in A \text{ y } x\notin B\} = A\cap B^c$; esta operación no es conmutativa

Diferencia simétrica $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$; esta operación es conmutativa



Complementario $A^c = U\setminus A$ (U: conjunto universal)



Algebra de operaciones de conjuntos

Leyes idempotentes	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Leyes asociativas	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Leyes conmutativas	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Leyes distributivas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de identidad	$A \cup \emptyset = A \quad A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = 0 \quad A \cap U = A$
Ley de involución	$(A^c)^c = A$	
Leyes de complementos	$A \cup A^c = U \quad U^c = \emptyset$	$A \cap A^c = \emptyset \quad \emptyset^c = U$
Leyes de Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ejemplo: Demostrar $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Tomemos un elemento arbitrario $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in U / (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \cup B$

$x \begin{cases} \in A^c \\ \in B^c \end{cases} x \in A^c \cap B^c$ queda demostrado que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

Debemos probar $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ para demostrar que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

Tomamos un elemento arbitrario $x \in A^c \cap B^c \begin{cases} x \in A^c \Rightarrow x \notin A \\ x \in B^c \Rightarrow x \notin B \end{cases} x \notin A \cup B$
$\Rightarrow x \in (A \cup B)^c \Rightarrow A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ ■

Principio de inducción

Si tenemos una propiedad $P(n)$ que depende de un número natural:

Si $P(1)$ es cierta y suponiendo que $P(n)$ es cierta hasta $n \rightarrow$ se verifica $P(n+1)$ demostrando que la propiedad es cierta.

Ejemplo: Verificar la siguiente propiedad

$$P(n): 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Verificamos $P(1)$ $1=1^2$

Si suponemos que $P(n)$ es cierta, verificamos $P(n+1)$:

$$P(n+1) \quad \underbrace{1+3+\cdots+(2n-1)}_{n^2}+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$$

$$n^2+(2n+1)=n^2+2n+1 \ \checkmark$$

Conjuntos finitos

Un conjunto A, se dice finito si es vacío o tiene una cantidad finita de elementos, que será un número natural.

Se denota el número de elementos de A como $|A|$

Principio de inclusión exclusión

$|A\cap B\cap C| = -A-B-C+A\cap B+A\cap C+B\cap C$?

Sean A y B dos conjuntos finitos sobre un mismo universo:

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ $\qquad |A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Demostración: Distinguiremos distintos casos

- $A\cap B=\emptyset \Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|$
- $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow A\cap(B/A)=\emptyset \Rightarrow {}^{*}|\underbrace{A\cup(B/A)}_{A\cup B}|=|A|+|B\setminus A|$

Por otra parte $B=(B/A)\cup(B\cap A)$ y $(B\setminus A)\cap(B\cap A)=\emptyset$

$$|B|=|B\setminus A|+|B\cap A| \Rightarrow |B\setminus A|=|B|-|B\cap A|$$

Sustituyendo* $|A\cup B|=|A|+|B|-|B\cap A|$ ■

Relaciones binarias

Producto cartesiano

$A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\} \Rightarrow A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

Si $A=B$ $\quad A\times A=A^2$

Si A y B son finitos, se verifica $\quad |A\times B|=|A|\cdot|B|=$ nº elementos

El conjunto $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ se denota $\prod_{i=1}^{n} A_i$

Relaciones

Dados dos conjuntos A y B se define la relación R entre ambos como un subconjunto del producto cartesiano $A\times B$

Si $(a,b)\in R$ a está relacionado con b y se denota por $a\sim b$ De lo contrario, $a\nsim b$

Dada una relación R, se define su inversa como $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$

$R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\} \Rightarrow R^{-1}=\{(2,1),(3,2),(1,3)\}$

Un ejemplo conocido de relaciones son las funciones. Dados dos conjuntos A y B, una función de A sobre B es una relación R tal que para cada $a\in A$, el conjunto $\{(a,b):b\in B\}$ tiene un único elemento (para cada a, b es único.
Usualmente, se denota como $f:A\rightarrow B$ de forma que $(a,f(a))$ con $a\in A$, $f(a)\in B$

El conjunto A denomina el dominio de f y B es el rango.

La imagen de f es: $\mathrm{Im}\, f=f(A):=\{f(a):a\in A\}\subseteq B$

Dado $B'\subseteq B:=\{a\in A: f(a)\in B'\}\subseteq A$

A y B finitos $|A|=|B|$

(Función suprayectiva $f(A)=B$ + Función inyectiva $f(a_1)=f(a_2)$) = Función biyectiva

Tipos de relaciones

Reflexiva $a \sim a$

Transitiva $a \sim b$ y $b \sim c$ entonces $a \sim c$

Simétrica $a \sim b$ y $b \sim c$

Antisimetrica si $a \sim b$ y $b \sim a$ entonces $a = b$; si $a \neq b$ y $a \sim b$ entonces $b \nsim a$

Ejemplos: $A = \{1, 2, 3\}$

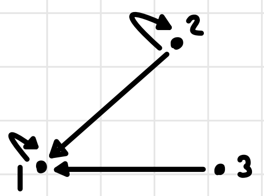
$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$ Reflexiva, Simétrica, Transitiva

$R' = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$ Reflexiva, Antisimétrica, Transitiva

$R'' = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1)\}$

Las relaciones se pueden representar gráficamente mediante un grafo dirigido donde si $a \sim b$ se representa una línea con flecha de a hasta b

R''



Relación de equivalencia (R, S, T)

Una relación R sobre A es equivalencia si es reflexiva, simetrica y transitiva. Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a como:

$$[a] := \{ b \in A : a \sim b \}$$

$a \neq \emptyset$ ya que $a \sim a$

Dada una relación de equivalencia R sobre A y $a, b \in A \Rightarrow a \cap b = \emptyset$ ó $a = b$

D- dado $b \in A <^{b \in [a]}_{b \notin [a]}$

$b \in [a] \Rightarrow a \sim b$ y $b \sim a$ al ser simétrica $\Rightarrow a \in [b]$

Sea ahora $c \in [a]$ $a \sim c$ $c \sim a$; $a \sim b \Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \in [b]$ y $[a] \subseteq [b]$
similarmente se comprueba $[b] \subseteq [a] \Rightarrow [a] = [b]$

$b \notin [a] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Supongamos que $c \in [a] \cap [b]$ es decir $a \sim c$ $c \sim b \Rightarrow a \sim b$ donde $b \in [a]$ que es una contradicción. Así $[a] \cap [b] = \emptyset$ ■

Si tenemos una relación de equivalencia sobre A, esta induce una partición sobre este conjunto formado por aquellos elementos que tienen un comportamiento similar de acuerdo con la relación de equivalencia

El conjunto $A \backslash \sim : \{[a] : a \in A\}$ es el conjunto de clases de equivalencia

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$$

es de equivalencia sobre $A = \{1,2,3\}$. Hay dos clases de equivalencia $[1] = \{1,2\}$ y $[3] = \{3\}$. Respecto R es como si tuviera dos elementos al ser 1 y 2 equivalentes $\Rightarrow$
$A \backslash \sim = \{1,3\}$

Relación de orden (R, A, T)

Una relación es de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En las relaciones de orden si $a \sim b \Rightarrow a \leq b$.

Reflexividad : $a \leq a \quad \forall a \in A$

Antisimetría : $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$

Transitividad : $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Relación de orden total: para cada par de elementos se cumple $a \leq b$ ó $b \leq a$
en otras palabras, todo elemento de A es comparable

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$$

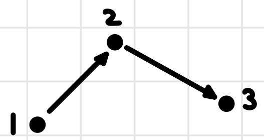
$A = \{1,2,3\}$ es de orden parcial ya que $2 \nleq$ y $3 \nleq 2$

$$R'' = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$

es de orden total. el conjunto de números naturales es de orden total

Diagramas de Hasse

Eliminan todos los elementos reflexivos y de transitividad



Dada una relación de orden R sobre A y $A' \subseteq A$, un elemento $a \in A$:

- Cota superior de A' si $a' \leq a \; \forall a' \in A'$; Cota inferior de A' si $a \leq a' \; \forall a' \in A'$
- Supremo de A' si es cota superior de A y cumple que si $b \in A$ es también cota superior, entonces $a \leq b$: Mínima cota superior

  Ínfimo de A' si es cota inferior y si $b \in A$ es cota inferior de $A' \Rightarrow b \leq a$
  mayor cota inferior
- Máximo de A' si es supremo de A' y $a \in A'$; Mínimo de A' si es ínfimo de A' y $a \in A'$

  Objetos de A que no son menores que otro elemento de A (A')
- Maximal de A' si no existe $a' \in A'$ tq $a \leq a'$ y $a \in A'$; Minimal $\nexists a' \in A'$ tq $a' \leq a$ y $a \in A'$

  Objetos de A que no son mayores que otros elementos de A (A')