

Cálculo II

Tema 3: Cálculo diferencial de funciones de varias variables I

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Decir si es o no diferenciable en el punto $(0, 0)$ la función real

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para comprobar si $f(x, y)$ es diferenciable o no en el punto $(0, 0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de no serlo directamente diríamos que es diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 \cdot r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\cancel{r^2} \cos \theta \sin \theta}{\cancel{r^2}} = 2 \cos \theta \sin \theta \longrightarrow \nexists \lim$$

Como no existe el límite, entonces $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$ y por lo tanto, podemos asegurar que tanto es diferenciable en dicho punto.

2) Comprobar que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.

Para comprobar si $f(x, y)$ es diferenciable o no en el punto $(0, 0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de serlo directamente diríamos que no diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{x} = \{\text{Teorema del Sándwich}\} = 0$$

Como el límite coincide con $f(0, 0) = 0$, la función $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$.

- Comprobar que $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$:

La función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$ si existe un plano tangente que se aproxime localmente a $f(x, y)$. Esto ocurre si:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} \sin \frac{1}{\cancel{h}} - 0}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

El término $\sin \frac{1}{x}$ oscila entre -1 y 1 de manera no convergente cuando $h \rightarrow 0$, por lo que este límite no existe. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0, 0)$.

3) Estudiar la continuidad y la diferenciability de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular su derivada direccional de cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ en el punto $(0, 0)$.

- Estudio de la continuidad en el punto $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{\cancel{3}} \cos \theta \sin^2 \theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin^2 \theta = 0$$

Como el límite coincide con $f(0,0) = 0$, la función $f(x,y)$ es continua en dicho punto.

- Comprobar que $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$:

Para verificar la diferenciabilidad en $(0,0)$, usando el criterio de que la función es diferenciable si existe un plano tangente local, lo que requiere que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Si $f(x,y)$ fuera diferenciable, se debería cumplir:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} h = r \cos \theta \\ k = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}}}{\sqrt{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{\cancel{3}} \cos \theta \sin^2 \theta}{\cancel{r^3}} \\ &= \cos \theta \sin^2 \theta \longrightarrow \nexists \lim \end{aligned}$$

El término $\cos \theta \sin^2 \theta$ depende de θ , lo que implica que el límite no existe uniformemente. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

- Derivada direccional en $(0,0)$:

La derivada direccional en la dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ está dada por:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2(v_1^2 + v_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t^3} v_1 v_2^2}{\cancel{t^2}(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

La derivada direccional no siempre es cero, ya que depende de los valores de v_1 y v_2 .

4) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comprobar que f tiene derivada direccional respecto de cualquier vector de \mathbb{R}^2 en el punto $(0,0)$, pero f no es derivable en dicho punto.

- Derivada direccional en $(0,0)$:

La derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección de un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ se define como:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^4}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t^3} v_1 v_2^2}{\cancel{t^2}(v_1^2 + t^2 v_2^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t^2}(v_1 v_2^2)}{\cancel{t^2}(v_1^2 + t^2 v_2^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + \cancel{t^2} v_2^4} = \frac{\cancel{v_1} v_2^2}{\cancel{v_1^2}} = \frac{v_2^2}{v_1} \end{aligned}$$

La derivada direccional existe para cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y está dada por

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 \text{ y } v_2 = 0 \end{cases}$$

- Diferenciabilidad de $f(x, y)$ en $(0, 0)$:

La función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$ si existe:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Si $f(x, y)$ fuera diferenciable en $(0, 0)$, las derivadas direccionales serían consistentes con las derivadas parciales. Sin embargo, observamos que

$$D_v f(0, 0) = \frac{v_2^2}{v_1}, \quad \text{si } v_1 \neq 0,$$

y esto depende de la dirección $v = (v_1, v_2)$, lo cual indica que $f(x, y)$ no puede aproximarse localmente por una aplicación lineal.

La función no es diferenciable en $(0, 0)$ porque las derivadas direccionales no son consistentes con una aproximación lineal.

5) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = x^2 \tan \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

definida para todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, y comprobar que

$$xD_1 f(x, y) + yD_2 f(x, y) = 2f(x, y)$$

Denotamos $u = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$. Entonces:

$$f(x, y) = x^2 \tan(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(-\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2y(x^2 + y^2 - y^2 \cdot 2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y + 2y^3 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xD_1 f(x, y) + yD_2 f(x, y) &= x \cdot \left[2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(-\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] + y \cdot \left[x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] \\ &= 2x^2 \tan(u) - \frac{2x^4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (\tan^2(u) + 1) + \frac{2x^4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (\tan^2(u) + 1) = 2x^2 \tan(u) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot f(x, y)$$

6) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$$

definida en el conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, y comprobar que

$$xD_1 f(x, y) + yD_2 f(x, y) = -\frac{1}{2}f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x + y)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2} \\ x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2} + y \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right) + y \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}(x+y) - x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \frac{\sqrt{y}}{2}(x+y) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)}{(x+y)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot f(x, y)$$

7) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = y \cdot \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$$

definida en el conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(1, 1)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y \cdot \frac{1}{\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{3x^2 y \cdot (x^2 + y^2) - x^3 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^3 y} \cdot \frac{3x^4 y + 3x^2 y^3 - 2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot y \\ &= y \cdot \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^3 y(x^2 + y^2)} = y \cdot \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^5 y + x^3 y^3} = \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^5 + x^3 y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \cdot \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + y \cdot \frac{x^3(x^2 + y^2) - x^3 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \frac{1^3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1^3}{1^5 + 1^3 \cdot 1^2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \log \frac{1^3 \cdot 1}{1^2 + 1^2} + \frac{1^2 - 1^2}{1^2 + 1^2} = \log \frac{1}{2}\end{aligned}$$

El diferencial en $(1, 1)$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) dy = 2 dx + \log \frac{1}{2} dy$$

8) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

definida en el conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(2, 1)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(x - \frac{y}{x^2}\right) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(2 - \frac{2}{1}\right) = 0\end{aligned}$$

El diferencial en $(2, 1)$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) dy = \frac{1}{2} dx$$

9) Dada la función $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x, y) = (x^4 + y^3, x^2 y^2 - 3y^2)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(1, 1)$. Comprobar que \vec{f} es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$f(x, y) = (x^4 + y^3, x^2y^2 - 3y^2) = \begin{cases} f_1(x, y) = x^4 + y^3 \\ f_2(x, y) = x^2y^2 - 3y^2 \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 & 3y^2 \\ 2xy^2 & 2x^2y - 6y \end{pmatrix} \longrightarrow J(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, podemos asegurar que es diferenciable.

Su diferencial, al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} df(P)(h, k) &= J(f)(P)(h, k) = df(1, 1)(h, k) = J(f)(1, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h + 3k \\ 2h - 4k \end{pmatrix} \longrightarrow df(1, 1)(h, k) = (4h + 3k, 2h - 4k) \end{aligned}$$

10) Dada la función $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y, x \cos y \sin y)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(\pi, \frac{\pi}{2})$. Comprobar que \vec{f} es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$\vec{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y, x \cos y \sin y) = \begin{cases} f_1(x, y) = x \cos y \\ f_2(x, y) = x \sin y \\ f_3(x, y) = x \cos y \sin y \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \\ \cos y \sin y & x(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \longrightarrow J(f) \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que todas las funciones coordenada son C^1 , por lo tanto la función $\vec{f}(x, y)$ es también C^1 y también es diferenciable.

$$\begin{aligned} df(P)(h, k) &= J(f)(P)(h, k) = df \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right) (h, k) = J(f) \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (-\pi k, h, -\pi k) \longrightarrow df \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right) (h, k) = (-\pi k, h, -\pi k) \end{aligned}$$

11) Comprobar que la función $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + yz - z^2, xy - xz + 2z^2, xyz)$$

es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^3 y calcularla en el punto $(3, 2, 1)$.

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + yz - z^2, xy - xz + 2z^2, xyz) = \begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + yz - z^2 \\ f_2(x, y, z) = xy - xz + 2z^2 \\ f_3(x, y, z) = xyz \end{cases}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que son diferenciables, por consecuencia, $\vec{f}(x, y, z)$ también es diferenciable.

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & z & y - 2z \\ y - z & x & -x + 4z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Su diferencial al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} df(P)(h, k, j) &= J(f)(P)(h, k, j) \longrightarrow df(3, 2, 1)(h, k, j) = J(f)(3, 2, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} = (6h + k, h + 3k + j, 2h + 3k + 6j) \\ &\longrightarrow df(3, 2, 1)(h, k, j) = (6h + k, h + 3k + j, 2h + 3k + 6j) \end{aligned}$$

12) Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = x^{y+z}$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y+z)x^{y+z-1} & x^{y+z} \cdot \ln(x) & x^{y+z} \cdot \ln(x) \end{pmatrix}$$

b) $f(x, y, z) = x^{y^z}$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^z \cdot x^{y^z-1} & x^{y^z} \cdot \ln(x) \cdot z \cdot y^{z-1} & x^{y^z} \cdot \ln(x) \cdot y^z \cdot \ln(y) \end{pmatrix}$$

c) $f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = (\cos(x \sin(y \sin z)) \cdot (\sin(y \sin z)), \cos(x \sin(y \sin z)) \cdot x \cdot \cos(y \sin z) \cdot \sin z, \cos(x \sin(y \sin z)) \cdot x \cdot \cos(y \sin z) \cdot y \cos z)$$

d) $\vec{f}(x, y) = (\sin(xy), \sin(x \sin y), x^4)$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(xy) \cdot y & \cos(x, y) \cdot x \\ \cos(x \sin y) \cdot \sin y & \cos(x \sin y) \cdot x \cdot \cos(y) \\ 4x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

13) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, y) & \text{si } (x, y) = (0, y) \end{cases}$$

Comprobar que f es diferenciable.

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y \right) & \text{si } x \neq 0 \\ (0, y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Caso $x \neq 0$:

La función es C^1 en esta región porque las funciones x^2 , $\sin \frac{1}{x}$, y y son derivables, y no hay discontinuidades cuando $x \neq 0$. Por lo tanto, f es diferenciable en esta región.

- Caso $x = 0$:

Cuando $x = 0$, la función se define como

$$f(x, y) = (0, y)$$

En este caso, debemos comprobar la diferenciabilidad en el punto $(0, y_0)$ para cualquier y_0 . Empezamos calculando las derivadas parciales.

- Primera componente $f_1(x, y)$:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, la derivada parcial respecto a x es:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x + 2x \sin \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}} \right) = 2x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

- Segunda componente $f_2(x, y)$:

$$f_2(x, y) = y$$

La derivada parcial respecto a y es constante, y vale 1 en todo \mathbb{R}^2 .

En el caso $x = 0$, el comportamiento de $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ es consistente con la definición y es continuo. Por lo tanto, todas las derivadas son continuas en $(0, y_0)$.

Dado que la función $f(x, y)$ es de clase C^1 en $x \neq 0$ y las derivadas parciales son continuas en $x = 0$, podemos concluir que $f(x, y)$ es diferenciable en \mathbb{R}^2 .

- 14) Sabiendo que $f(x, y) = \sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}$, calcular

$$xf(x, y)D_1f(x, y) + yf(x, y)D_2f(x, y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{xy} \cdot y + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{xy} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} xf(x, y)D_1f(x, y) + yf(x, y)D_2f(x, y) &= x \cdot \sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\ &\quad + y \cdot \sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} + \frac{1}{2} + \frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = 1 \end{aligned}$$

- 15) Sabiendo que $f(x, y) = \sin \frac{2x+y}{2x-y}$, calcular

$$xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{2 \cdot (2x-y) - (2x+y) \cdot 2}{(2x-y)^2} \right) = \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{4x-2y-4x-2y}{(2x-y)^2} \right) = \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{-4y}{(2x-y)^2} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{1 \cdot (2x-y) - (2x+y) \cdot (-1)}{(2x-y)^2} \right) = \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{2x-y+2x+y}{(2x-y)^2} \right) = \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{4x}{(2x-y)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y) &= x \cdot \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{-4y}{(2x-y)^2} \right) + y \cdot \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{4x}{(2x-y)^2} \right) \\ &= \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{-4xy}{(2x-y)^2} + \frac{4xy}{(2x-y)^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

- 16) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en los punto $(0, 0)$ y $(1, 2)$.

La ecuación del plano tangente, viene dada por:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

- Para el punto $(0, 0)$:

$$c = f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$z - 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \longrightarrow z = 0$$

- Para el punto $(1, 2)$

$$\begin{aligned} c &= f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5 & z - 5 &= \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2) \longrightarrow z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 & & \longrightarrow z = 2x - 2 + 4y - 8 + 5 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4 & & \longrightarrow z = 2x + 4y - 5 \end{aligned}$$

- 17)** Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \log x^2 + \log y^2$ en los puntos $(3, 1)$ y (x_0, y_0) .

La del plano tangente, viene dada por:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

- Para el punto $(3, 1)$:

$$\begin{aligned} c &= f(3, 1) = \log(3^2) + \log(1^2) = \log(9 \cdot 1) = \log(9) & z - \log(9) &= \frac{2}{3}(x - 3) + 2(y - 1) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = \frac{2}{3} & z &= \frac{2}{3}x - 2 + 2y - 2 + \log(9) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} \cdot 2y = \frac{2}{y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2 & z &= \frac{2}{3}x + 2y - 4 + \log(9) \end{aligned}$$

- Para el punto (x_0)

$$\begin{aligned} c &= f(x_0, y_0) = \log(x_0^2) + \log(y_0^2) = \log(x_0 \cdot y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2}{x_0} & z - \log(x_0 \cdot y_0) &= \frac{2}{x_0}(x - x_0) + \frac{2}{y_0}(y - y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} \cdot 2y = \frac{2}{y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2}{y_0} \end{aligned}$$

- 18)** Sea A un abierto de \mathbb{R}^3 y $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f es diferenciable en un punto $(a_1, a_2, a_3) \in A$ y que $Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Calcular $D_v f(a_1, a_2, a_3)$ siendo v el vector siguiente:

Sabemos que la derivada lineal $Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3)$ es:

$$Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Esto implica que el gradiente de f en cualquier punto (a_1, a_2, a_3) es:

$$\nabla f(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$$

La derivada direccional en la dirección del vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ se calcula como:

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = \nabla f(a_1, a_2, a_3) \cdot v = (1, 1, 1) \cdot (v_1, v_2, v_3).$$

El producto escalar es:

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

- a)** $v = (1, 2, 3)$

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = 1 + 2 + 3 = 6$$

- b)** $v = (0, 1, 1)$

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = 0 + 1 + 1 = 2$$

- c)** $v = (-1, 1, 2)$

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = -1 + 1 + 2 = 2$$

- 19)** Sea A un abierto de \mathbb{R}^3 y $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Supongamos que \vec{f} es diferenciable en un punto $(a_1, a_2, a_3) \in A$. Si $\vec{f} = (f_1, f_2)$ y $D_{v_i} f_j(a_1, a_2, a_3) = i + j$ para $j = 1, 2$ e $i = 1, 2, 3$ donde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, determinar el diferencial de \vec{f} en dicho punto.

Para determinar diferencial de la función vectorial \vec{f} en el punto (a_1, a_2, a_3) , recordemos que el diferencial es una matriz 2×3 que contiene las derivadas parciales de cada componente de \vec{f} :

$$Df(a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Dado que conocemos las derivadas direccionales de f_1 y f_2 en las direcciones de los vectores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, podemos usar la relación entre la derivada direccional y las derivadas parciales:

$$D_{v_i} f_j(a_1, a_2, a_3) = \nabla f_j(a_1, a_2, a_3) \cdot v_i,$$

$$\text{donde } \nabla f_j(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \frac{\partial f_j}{\partial x_3} \right).$$

Con esta información, determinaremos las derivadas parciales.

- Componente $f_1(j = 1)$:

1) Para $i = 1(v_1 = (1, 1, 1))$:

$$D_{v_1} f_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 1 = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2$$

2) Para $i = 2(v_2 = (0, 1, 1))$:

$$D_{v_2} f_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 3$$

3) Para $i = 3(v_3 = (0, 0, 1))$:

$$D_{v_3} f_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 3 = 4 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 4$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 4 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 3 - 4 = -1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2 - (-1) - 4 = -1 \end{aligned}$$

- Componente $f_2(j = 2)$:

1) Para $i = 1(v_1 = (1, 1, 1))$:

$$D_{v_1} f_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot 1 = 2 + 1 = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 3$$

2) Para $i = 2(v_2 = (0, 1, 1))$:

$$D_{v_2} f_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot 1 = 2 + 2 = 4 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 4$$

3) Para $i = 3(v_3 = (0, 0, 1))$:

$$D_{v_3} f_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot 1 = 2 + 3 = 5 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 5$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 5 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 4 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4 - 5 = -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 3 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3 - (-1) - 5 = -1 \end{aligned}$$

El diferencial de \vec{f} en el punto (a_1, a_2, a_3) es:

$$Df(a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

20) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comprobar que existen las derivadas parciales segundas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Primero verificamos las derivadas parciales de primer orden en $(0, 0)$. Para calcular las derivadas parciales, tomamos los límites respectivos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Ahora calculamos las derivadas parciales mixtas en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(x \cos y - \sin x)(x^2 + y^2) - (x \sin y - y \sin x) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Ahora calculamos el límite cuando $x \rightarrow 0$ para evaluar $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(0, 0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = (*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cos h - \sin h}{h^2} - 0}{h} = \left\{ \sin h \approx h - \frac{h^3}{6} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \left(h - \frac{h^3}{6} \right)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{6}}{h^3} = \frac{1}{6}$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) = \frac{(h \cos 0 - \sin h) \cdot h^2}{h^4} = \frac{h - \sin h}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(\sin y - y \cos x)(x^2 + y^2) - (x \sin y - y \sin x) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Ahora calculamos el límite cuando $y \rightarrow 0$ para evaluar $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(0, 0)$.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = (*) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin k - k \cos 0}{k^2} - 0}{k} = \left\{ \sin k \approx k - \frac{k^3}{6} \right\} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left(k - \frac{k^3}{6} \right) - k}{k^3} = \lim_{k \rightarrow 0} -\frac{\frac{k^3}{6}}{k^3} = -\frac{1}{6}$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, k) = \frac{(\sin k - k \cos 0) \cdot k^2}{k^4} = \frac{\sin k - k}{k^2}$$

21) Se consideran las funciones $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $\vec{f}(x, y) = (x^2 y^4, x^3 y^3 + 4xy^2)$ y $\vec{g}(x, y) = (x \sin y, y \sin x)$. Sea $\vec{F} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Calcular la matriz jacobiana de \vec{F} en el punto $(2, -1)$

La composición $f \circ g$ viene dada por:

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ (2, -1) & & (4, 0) & & \end{array}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^4 & 4x^2 y^3 \\ 3x^2 y^3 + 4y^2 & 3x^3 y^2 + 8xy \end{pmatrix} \rightarrow J(f)(2, -1) = \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y \\ y \cos x & \sin x \end{pmatrix} \rightarrow J(g)(4, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

$$J(F)(2, -1) = J(g)(4, 0) \cdot J(f)(2, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \sin 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 32 \\ -8 \sin 4 & 8 \sin 4 \end{pmatrix}$$

22) Se consideran las funciones $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $\vec{f}(t) = (t^2, 3t - 1, 1 - t^2)$ y $\vec{g}(x, y, z) = (x^2 - y - zx, y^2 + xy + z^2)$. Sean $\vec{F} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Calcular la matriz jacobiana de \vec{F} en el punto -1 . ¿Es posible calcular la matriz jacobiana de la función $\vec{G} = \vec{f} \circ \vec{g}$ en el punto $(1, 1, 1)$?

$$\vec{F}(t) = \vec{g}(\vec{f}(t)) = \vec{g}(t^2, 3t - 1, 1 - t^2)$$

Sustituyendo $(x, y, z) = (t^2, 3t - 1, 1 - t^2)$ en \vec{g} :

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} (t^2)^2 - (3t - 1) - (1 - t^2) \cdot t^2 \\ (3t - 1)^2 + t^2 \cdot (3t - 1) + (1 - t^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 - 3t + 1 - t^2 + t^4 \\ 9t^2 - 6t + 1 + 3t^3 - t^2 + t^4 - 2t^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^4 - t^2 - 3t + 1 \\ t^4 + 3t^3 + 6t^2 - 6t + 2 \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{F}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t^3 - 2t - 3 \\ 4t^3 + 9t^2 + 12t - 6 \end{pmatrix} \longrightarrow J_{\vec{F}}(-1) = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Composición de $\vec{G} = \vec{f} \circ \vec{g}$:

Para que la composición $\vec{f} \circ \vec{g}$ esté definida, la función \vec{g} debe producir un resultado en \mathbb{R} , pero $\vec{g}(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Esto hace que la composición $\vec{f} \circ \vec{g}$ **no sea válida**, ya que los dominios y codominios no son compatibles.

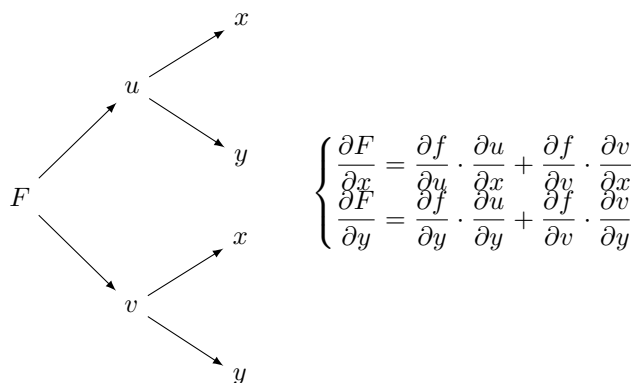
23) Hallar la expresión de las derivadas parciales de la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ y $g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase $C^1(\mathbb{R})$.

La función $f(u, v)$ depende de dos variables:

- $u = g(x)k(y)$
- $v = g(x) + h(y)$



$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= g'(x)h(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= g'(x)h'(y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= g'(x) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= h'(y) \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot g'(x)h(y) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot g'(x) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot g(x)h'(y) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot h'(y) \end{aligned}$$

24) Calcular la expresión de las derivadas parciales de la función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = f(x^y, y^z, z^x)$$

donde $f : M \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $C^1(M)$ con

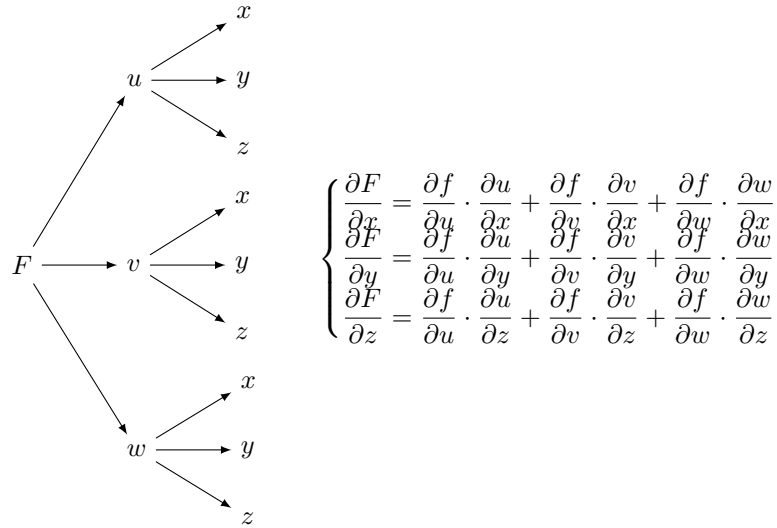
$$M = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

La función $F(x, y, z)$ puede escribirse como:

$$F(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

donde

$$u(x, y, z) = x^y, \quad v(x, y, z) = y^z, \quad w(x, y, z) = z^x$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= y \cdot x^{y-1} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial w} &= z^x \cdot \ln(z) \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y \cdot x^{y-1} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot z^x \cdot \ln(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= x^y \ln(x) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= z \cdot y^{z-1} \\ \frac{\partial y}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x^y \ln(x) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot z \cdot y^{z-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= y^z \ln(y) \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= x \cdot z^{x-1} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y^z \ln(y) + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot x \cdot z^{x-1} \end{aligned}$$

25) Calcular la expresión de las derivadas parciales de las funciones $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

a) $F(x, y, z) = \int_0^{x+y+z} \sin t \, dt$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x, y, z)$ respecto a cada variable es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} = \sin(x+y+z) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial y} = \sin(x+y+z) \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial z} = \sin(x+y+z) \end{aligned}$$

b) $F(x, y, z) = \int_0^{xyz} t \sin t \, dt$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x, y, z)$ respecto a cada variable es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial x} = \sin(xyz) \cdot yz \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial y} = \sin(xyz) \cdot xz \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = \sin(xyz) \cdot xy \end{aligned}$$

c) $F(x, y, z) = \int_{x^2+y^2}^{xyz} \sin t \, dt$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x, y, z)$ respecto a cada variable es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \sin(x^2 + y^2) \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = \sin(x + z + y) \cdot yz - \sin(x^2 + y^2) \cdot 2x \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \sin(x^2 + y^2) \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = \sin(x + z + y) \cdot xz - \sin(x^2 + y^2) \cdot 2y \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial z} - \sin(x^2 + y^2) \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial z} = \sin(x + z + y) \cdot xy\end{aligned}$$

26) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \text{ con } x, y \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las siguientes igualdades:

a) $x^2 \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y^2 \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2} \\ x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

b) $xy(x+y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) + x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{2}{x^3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{y^2} \right) = \frac{2}{y^3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{y^2} \right) = 0 \\ xy(x+y) \cdot 0 + x^2 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) + y^2 \cdot \frac{2}{y^3} &= -\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \neq 0\end{aligned}$$

27) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \text{ con } x \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

a) $x \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + F(x, y) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \right) = \frac{x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \left(\frac{y}{x}\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \right) = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \\ x \cdot \left(\frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \right) + y \cdot \left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \right) + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} &= \frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} + \frac{y \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \\ &= -\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot y}{x^2} + \frac{y \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} = 0\end{aligned}$$

b) $x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 2F(x, y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \right) = \frac{2f''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x^3}}{x^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \right) = \frac{f''\left(\frac{y}{x}\right)}{x^4} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \right) = \frac{-f''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x^3}}{x^2}\end{aligned}$$

28) Sea $f(x, y = x^2 + y^2)$ y hagamos $x = \sin t$ e $y = t$ con lo que se obtiene la función compuesta $F(t) = f(x(t), y(t))$. Calcular las tres primeras derivadas de dicha función.

Sustituimos $x = \sin t$ y $y = \sin t$ en $f(x, y) = x^2 + y^2$:

$$F(t) = f(x(t), y(t)) = (\sin t)^2 + t^2$$

- Primera derivada:

Usamos la regla de la derivada para cada término:

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\sin^2 t) + \frac{\partial}{\partial t}(t^2) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t + 2t$$

- Segunda derivada:

Usamos la regla de la derivada en cada término:

$$F''(t) = \frac{\partial}{\partial t}(2 \cdot \sin t \cdot \cos t) + \frac{\partial}{\partial t}(2t) = 2 \cdot [\cos t \cdot \cos t + \sin t \cdot (-\sin t)] + 2 = 2(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2$$

- Tercera derivada:

$$F'''(t) = \frac{\partial}{\partial t}(2(\cos^2 t - \sin^2 t)) + \frac{\partial}{\partial t}(2) = 2 \cdot (2 \cdot \cos t(-\sin t) - 2 \sin t \cos t) + 0 = -2 \cdot (-4 \cos t \sin t) = -8 \cos t \sin t$$

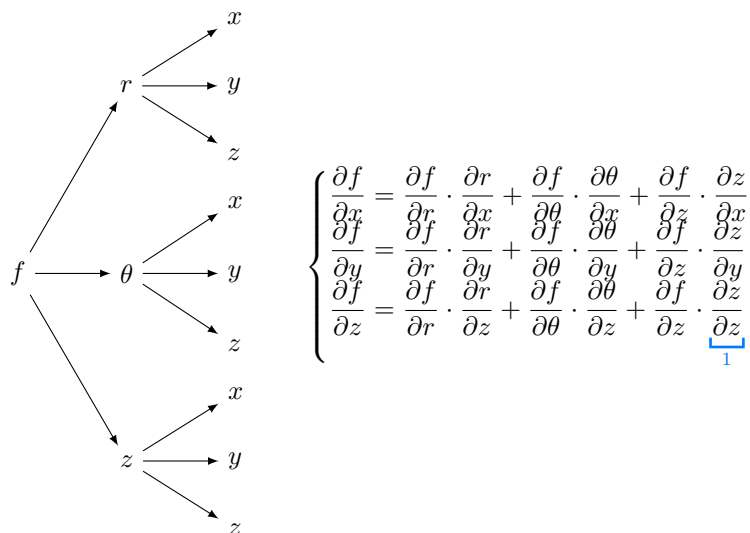
29) Dada $f(x, y, z)$ se define el gradiente de f como

$$\text{grad} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

Dadas las coorenadas cilíndricas de \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

obtener el gradiente de f en estas coordenadas.



- Relación para r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

- Relación para θ :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

- Relación para z :

$$z = z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Graiente en coordenadas cilíndricas:

El gradiente en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$\text{grad}f(r, \theta, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Derivamos cada componente de $f(x, y, z)$ respecto a (r, θ, z) :

1) Derivada respecto a r :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

2) Derivada respecto a θ :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} (r \cos \theta)$$

3) Derivada respecto a z

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

30) Si ahora tenemos las coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

obtener el gradiente de la función del ejercicio anterior en estas nuevas coordenadas.

El gradiente de f en coordenadas cartesianas es:

$$\text{grad}f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Queremos expresar este gradiente en términos de coordenadas esféricas (r, θ, φ) .

1) Relación entre derivadas parciales

Usamos la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales respecto a (x, y, z) en términos de (r, θ, φ) . Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

2) Gradiente en coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \varphi \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} (r \cos \theta \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 0 = r \sin \varphi \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} (r \cos \theta \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} (r \sin \theta \cos \varphi) + \frac{\partial f}{\partial z} (-r \sin \varphi) = r \left[\cos \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \right) - \frac{\partial f}{\partial z} \sin \varphi \right] \end{aligned}$$

31) Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$. Comprobar que

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) = 4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) \right)$$

donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$.

Supongamos que f es una función C^2 , dependiente de (u, v) , con $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Entonces, aplicamos la regla de la cadena para las derivadas parciales de f respecto a x e y :

- Derivada parcial de f respecto a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y.$$

- Derivada parcial de f respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x$$

Usamos nuevamente la regla de la cadena para calcular las segundas derivadas parciales.

- Segunda derivada parcial respecto a x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 2x \cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2x \cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot 2y \cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot 2y \cdot 2y + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \\ &= 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial u} \end{aligned}$$

- Segunda derivada parcial respecto a y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot (-2y) \cdot (-2y) + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2x \cdot (-2y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot (-2y) \cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot 2x \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-2) \\ &= 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (4x^2 + 4y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (4y^2 + 4x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Usamos que $r^2 = x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4r^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \\ \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{x^2 + y^2} &= 4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \\ \frac{1}{x^2 + y^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) &= 4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

32) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $c^2(\mathbb{R}^2)$ Comprobar que

$$(x^2 - y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v)$$

donde $u = \log(x + y)$ y $v = \log(x - y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{x + y} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{x - y} \cdot 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{x + y} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{x - y} \cdot (-1) \end{aligned}$$

Para calcular la segunda derivada respecto de x , aplicamos la regla del producto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{1}{(x + y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{1}{x - y} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{x + y} \cdot \frac{1}{x - y} + \frac{1}{x - y} \cdot \frac{1}{x + y} \right) \end{aligned}$$

33) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $c^2(\mathbb{R}^2)$. Comprobar que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2uv \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) - u \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$$

donde $u = \frac{x}{y}$ y $v = xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{x}{y^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot y^2 - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{x^2}{y^4} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{2x}{y^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot x^2$$

34) Demostrar que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ y se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

entonces también se verifica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) = 0$$

donde $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$ e $y = \frac{v}{u^2 + v^2}$

Podemos ver que esta es una transformación de las coordenadas (u, v) en (x, y) . Calculamos las derivadas parciales de x y y respecto a u y v , necesarias para usar la regla de la cadena.

Derivadas de x respecto a u y v :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{(u^2 + v^2) - 2u^2}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2}$$

Derivadas de y respecto a u y v :

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{(u^2 + v^2) - 2v^2}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

La función $f(x, y)$ se transforma en $f(u, v)$ a través de la regla de la cadena. Por lo tanto, sus derivadas parciales se relacionan mediante la matriz Jacobiana mediante la matriz Jacobiana de la transformación de (u, v) a (x, y) . En términos del gradiente, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

De manera similar, para las segundas derivadas, la matriz Hessiana de $f(u, v)$ está relacionada con la matriz Hessiana de $f(x, y)$ mediante:

$$H_f^{(u,v)} = J^T H_f^{(x,y)} J,$$

donde $H_f^{(x,y)}$ es la matriz Hessiana de f respecto a (x, y) , y J es la matriz Jacobiana de la transformación.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] \right) = \left(\frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

Dado que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, se deduce:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \cdot 0 = 0$$

Hemos demostrado que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$$

35) Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x + x^2 y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

estudiar su diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$. ¿Son continuas en $(0, 0)$?

Para que $f(x, y)$ sea diferenciable en $(0, 0)$, deben cumplirse las siguientes condiciones:

- 1) $f(x, y)$ debe ser continua en $(0, 0)$.
- 2) Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ deben existir en un entorno de $(0, 0)$.
- 3) $f(x, y)$ debe poder aproximarse linealmente cerca de $(0, 0)$:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

donde $o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ representa términos de orden superior.

Para verificar la continuidad en $(0, 0)$, evaluamos el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$f(x, y) = x + x^2 y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, analizamos cada término:

- El término x tiende a 0 cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- El término $x^2 y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ se evalúa:
 - $\left|x^2 y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right| \leq |x^2 y^2|$ (ya que $|\sin| \leq 1$).
 - Cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, tenemos $x^2 y^2 \rightarrow 0$.

Por lo tanto, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, y $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

Para $x \neq 0$, derivamos directamente usando la regla del producto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0$$

Para $y \neq 0$, derivamos directamente usando la regla del producto:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

- 1) Continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

Evaluamos $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

- El término constante 1 permanece constante.
- Los términos $2xy^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ y $-y^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ tienden a 0 porque $xy^2 \rightarrow 0$ y $y^3 \rightarrow 0$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Por lo tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \rightarrow 1$, y $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0, 0)$.

- 2) Continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

Evaluamos $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

- El término $2x^2y \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ tiende a 0 porque $x^2y \rightarrow 0$.
- El término $x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ también tiende a 0 porque $x^2 \rightarrow 0$.

Por lo tanto, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \rightarrow 0$, y $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0, 0)$.

36) Enunciado el teorema de la función recíproca o inversa.

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 (es decir, continuamente diferenciable) en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que:

- 1) $DF(a)$ (la matriz Jacobiana de F evaluada en a) es invertible, es decir, $\det(DF(a)) \neq 0$.

Entonces:

- 1) Existe un entorno U de a en \mathbb{R}^n y un entorno V de $F(a)$ en \mathbb{R}^n tales que F es una biyección de U en V , y la función inversa F^{-1} está definida en V .
- 2) La función inversa $F^{-1} : V \rightarrow U$ es de clase C^1 .
- 3) La matriz Jacobiana de F^{-1} en un punto $b \in V$ está relacionada con la matriz Jacobiana de F mediante:

$$DF^{-1}(b) = (DF(F^{-1}(b)))^{-1}.$$

37) Consideramos la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de dicha función.

Para verificar si $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$, debemos comprobar que:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Cuando $(x, y) \neq (0, 0)$, la función toma la forma:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Límites en coordenadas polares:

Usamos $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Entonces:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x^4 + y^4 = r^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta).$$

Por lo tanto:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{r^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{r^2} = r^2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta).$$

Cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, es decir, $r \rightarrow 0$:

$$f(x, y) \rightarrow 0 \cdot (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 0.$$

Por lo tanto, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, y $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$. Para estudiar la diferenciabilidad, calculamos

las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k^4}{k^2}}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^2}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} k = 0 \end{aligned}$$

En resumen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Para que $f(x, y)$ sea diferenciable en $(0, 0)$, se debe verificar que:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 0$$

Por lo tanto, el límite es 0, y $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$.

38) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = \log(g(x + yz))$ siendo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0\}$$

y g una función real positiva de clase $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Se pide:

a) Calcular $D = z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial z}$.

La función f está definida como:

$$f(x, y, z) = \log(g(x + yz)),$$

donde g es una función positiva de clase $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \log(g(x + yz)) = \frac{1}{g(x + yz)} \cdot g'(x + yz) \cdot 1 = \frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \log(g(x + yz)) = \frac{1}{g(x + yz)} \cdot g'(x + yz) \cdot z = \frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} \cdot z \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \log(g(x + yz)) = \frac{1}{g(x + yz)} \cdot g'(x + yz) \cdot y = \frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} \cdot y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} \right) = \frac{g''(x + yz)g(x + yz) - (g'(x + yz))^2}{(g(x + yz))^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} \cdot z \right) = z \cdot \frac{g''(x + yz)g(x + yz) - (g'(x + yz))^2}{(g(x + yz))^2} \cdot z = z^2 \cdot \frac{g''(x + yz)g(x + yz) - (g'(x + yz))^2}{(g(x + yz))^2} \\ D &= z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= z^2 \cdot \frac{g''(x + yz)g(x + yz) - (g'(x + yz))^2}{(g(x + yz))^2} - z^2 \cdot \frac{g''(x + yz)g(x + yz) - (g'(x + yz))^2}{(g(x + yz))^2} + \frac{1}{y} \cdot y \cdot \frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} \\ &= \frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} \end{aligned}$$

b) Hallar las funciones f definidas en A tales que verifican $D = x + yz$.

Del apartado anterior, sabemos que:

$$D = \frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)}$$

Queremos que:

$$\frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} = x + yz$$

Esto implica la ecuación diferencial:

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = \omega, \text{ donde } \omega = x + yz$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = \omega \longrightarrow g'(\omega) = \omega g(\omega).$$

Esta es una ecuación diferencial separable:

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = \omega \longrightarrow \frac{1}{g(\omega)} dg = \omega d\omega$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{1}{g(\omega)} dg = \int \omega d\omega \longrightarrow \ln |g(\omega)| = \frac{\omega^2}{2} \longrightarrow g(\omega) = e^C e^{\frac{\omega^2}{2}}$$

Renombrando e^C como una constante $k > 0$, tenemos $g(\omega) = k e^{\frac{\omega^2}{2}}$. Sustituyendo $\omega = x + yz$, se obtiene:

$$g(x + yz) = k e^{\frac{(x + yz)^2}{2}}.$$

Por lo tanto, $f(x, y, z)$ es:

$$f(x, y, z) = \log(g(x + yz)) = \log(k) + \frac{(x + yz)^2}{2}.$$

39) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcular $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

Las derivadas parciales en $(0, 0)$ están definidas como:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h^2 \cdot 0^2)}{h^4+2h^2 \cdot 0^2+0^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+0^2 \cdot k^2)}{0^4+2 \cdot 0^2 \cdot k^2+k^4} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

b) ¿Es diferenciable la función en el punto $(0, 0)$?

Para que $f(x, y)$ sea diferenciable en $(0, 0)$, se debe verificar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Como $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$, y $f_y(0, 0) = 0$, la condición se reduce a verificar:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{r^4}}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1+r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{r^5} = \{\ln(1+u) \sim u \text{ Si } u \rightarrow 0\} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^5} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r} \rightarrow \nexists \lim \end{aligned}$$

Cuando $r \rightarrow 0$, el término $\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r}$ diverge, ya que depende de $\frac{1}{r}$. Esto implica que el límite **no existe**, por lo tanto la función $f(x, y)$ **no es diferenciable** en $(0, 0)$, ya que el límite no satisface la condición de diferenciabilidad.

40) Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

con α un número natural. Estudiar para los valores de $\alpha = 3$ y 4 :

a) Existencia de derivadas parciales de f .

Para determinar si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existen, usamos la definición de derivada parcial.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\alpha-2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-3}$$

Si $\alpha = 3$: $h^{\alpha-3} = h^0 = 1$, por lo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$$

Si $\alpha = 4$: $h^{\alpha-3} = h$, por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Para $\alpha = 3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Para $\alpha = 4$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

b) Diferenciabilidad de f .

Para que f sea diferenciable en $(0,0)$, debe cumplirse:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Para $\alpha = 3$:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2}}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^3 \theta}{r} = \cos^3 \theta \longrightarrow \nexists \lim \end{aligned}$$

Este límite depende de θ , por lo que no existe el límite uniforme y $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Para $\alpha = 4$:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^4}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^4 \cos^4 \theta}{r^2}}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^4 \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^4 \theta = 0 \end{aligned}$$

Cuando $r \rightarrow 0$, el límite es 0, independientemente de θ . Por lo tanto $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

41) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con diferencial en el punto $(0,0)$, y cuyas derivadas parciales no sean continuas en dicho punto.

Un ejemplo clásico de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene diferencial en $(0,0)$, pero cuyas derivadas parciales no son continuas en dicho punto es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Continuidad en $(0,0)$:

Cuando $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Para verificar la continuidad en $(0,0)$, calculamos el límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

Cuando $r \rightarrow 0$, $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

2) Derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

3) Verificar el diferencial:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^3} = \cos^2 \theta \sin \theta$$

Como $\cos^2 \theta \sin \theta$ es acotada, el límite es 0. Por lo tanto, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

Ahora calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

Cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, evaluamos en coordenadas polares:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2r^3 \cos \theta \sin^3 \theta}{r^4} = \frac{2 \cos \theta \sin^3 \theta}{r}$$

Este valor depende de r , lo que muestra que la derivada no es continua en $(0,0)$. Por lo tanto, la función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$, pero sus derivadas parciales no son continuas en dicho punto.

42) Determinar si la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable.

43) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación diferenciable y sea $a = (a_1, a_2, a_3)$ un punto e \mathbb{R}^3 . Explica como se calcula la diferencial de f en dicho punto, enunciando aquellos resultados que permitan su cálculo.

1) Definición del diferencial

El diferencial de f en el punto a , denotado como $Df(a)$ o df_a , es una transformación lineal:

$$Df(a) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

que aproxima localmente a f cerca del punto a . Esto significa que para un pequeño incremento $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, la función f se puede escribir como:

$$f(a + \mathbf{h}) = f(a) + Df(a)(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|),$$

donde $o(\|\mathbf{h}\|)$ representa un término de orden superior que tiene a 0 más rápido que $\|\mathbf{h}\|$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow 0$.

El diferencial $Df(a)$ se puede representar en términos de la **matriz Jacobiana** de f en el punto a .

2) Matriz Jacobiana

Sea

$$f(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)),$$

donde cada componente $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

La matriz Jacobiana de f en a se define como:

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(a) \end{bmatrix}.$$

3) Cálculo del diferencial

El diferencial $Df(a)$ está completamente determinado por la matriz Jacobiana $J_f(a)$. Específicamente, para un incremento $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, el diferencial $Df(a)$ aplicado a \mathbf{h} es el producto de la matriz Jacobiana $J_f(a)$ con el vector \mathbf{h} :

$$Df(a)(\mathbf{h}) = J_f(a) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}.$$

En forma explícita:

$$Df(a)(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}.$$

4) Resultados que permiten el cálculo del diferencial

- Regla de la cadena:

Si f se puede escribir como una composición $f = g \circ h$, donde $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^4$, entonces el Jacobiano de f en a se obtiene como el producto de los Jacobianos de g y h :

$$J_f(a) = J_g(h(a)) \cdot J_h(a).$$

- Diferenciabilidad implica continuidad:

Si f es diferenciable en a , entonces f es continua en a . Además, las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ debene existir en un entorno de a .

- El diferencial $Df(a)$ proporciona una aproximación lineal a f cerca de a . Es decir:

$$f(a + \mathbf{h}) \approx f(a) + Df(a)(\mathbf{h}),$$

lo cual define la **hiperplano tangente** al gráfico de f en a .

44) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de dicha función en todo punto de \mathbb{R}^2 .

45) Sean $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables y a y b dos números reales distintos de cero. Definamos la función

$$F(x, y) = f(ax + by) + g(ax + by) + h(ax + by)$$

Demostrar que

$$b \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = a \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).$$

46) Demostrar que las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ de la aplicación

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no coinciden en el punto $(0, 0)$. ¿Coinciden en los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$? ¿Es diferenciable dicha función en el punto $(0, 0)$?

1)