Señales y Sistemas

Problemas Tema 2: Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Obtenga la convolución de las señales $x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ y $h(t) = t\prod\left(\frac{t-T}{2T}\right)$.

La convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$ se define como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Dado que $x(t)$ y $h(t)$ son funciones de duración finita, la integral se reduce al intervalo donde ambas funciones se superponen.

Paso a paso:

- **Intervalo de integración:**

  La convolución será no nula solo en el intervalo donde las funciones se superponen. Dado que $x(t)$ está definido en $[0, T]$ y $h(t)$ en $[0, 2T]$, la convolución $y(t)$ será no nula en el intervalo $[0, 3T]$.

- **Evaluación de la integral:**

  Para cada t en $[0, 3T]$, evaluamos la integral:

$$y(t) = \int_0^T \prod\left(\frac{\tau-\frac{T}{2}}{T}\right)(t-\tau)\prod\left(\frac{t-\tau-T}{2T}\right)\mathrm{d}\tau.$$

  Simplificando las funciones rectangulares, la integral se reduce a:

$$y(t) = \int_{\max(0,t-2T)}^{\min(T,t)} (t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

- **Cálculo de la integral:**

  Evaluamos la integral en los intervalos donde las funciones se superponen:

  - Para $0 \leq t < T$, la integral es:

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\mathrm{d}\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

  - Para $T \leq t < 2T$, la integral es:

$$y(t) = \int_0^T (t-\tau)\mathrm{d}\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^T = tT - \frac{T^2}{2}$$

  - Para $2T \leq t < 3T$, la integral es:

$$y(t) = \int_{t-2T}^T (t-\tau)\mathrm{d}\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{t-2T}^T = \frac{(3T-t)^2}{2}$$

La convolución $y(t)$ es:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2}, & 0 \leq t < T \\ tT - \dfrac{T^2}{2}, & T \leq t < 2T \\ \dfrac{(2T-t)^2}{2}, & 2T \leq t \leq 3T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2) Calcule $\left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right) * \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$, con $T_2 > T_1$.

Paso 1: Comprender las señales

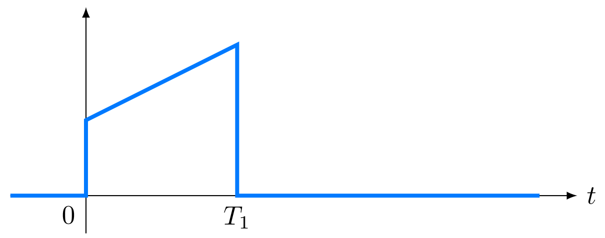
- Primera señal:

$$x(t) = \left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right)$$

  - La función $\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right)$ es una función rectangular centrada en $t = \frac{T_1}{2}$ con un ancho de T_1. Esto significa que $\prod$ es igual a 1 en el intervalo $[0, T_1]$ y 0 fuera de este intervalo.
  - Por lo tanto, $x(t)$ es una función lineal definida únicamente $[0, T_1]$, con:

$$x(t) = \frac{t}{T_1} + 1, \quad \text{para } t \in [0, T_1].$$

$$x(t) = \left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right)$$

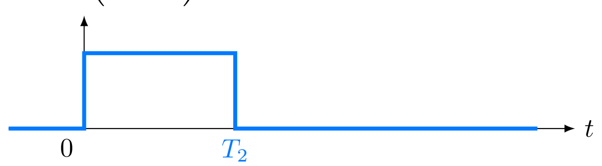


- Segunda señal:

$$h(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right).$$

  - Esta es una función rectangular centrada en $t = \frac{T_2}{2}$ con un ancho de T_2. Es igual a 1 en el intervalo $[0, T_2]$ y 0 fuera de este intervalo.

$$h(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$$



- Convolución de las señales

  La convolución de $x(t)$ y $h(t)$ se define como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

  Dado que $x(t)$ está definido en $[0, T_1]$ y $h(t)$ en $[0, T_2]$, la convolución será no nula únicamente en el intervalo donde ambas funciones se superponen. Esto ocurre en el intervalo $[0, T_1 + T_2]$.

Intervalo de integración:

- Para cada $t \in [0, T_1 + T_2]$, la integral se reduce a:

$$y(t) = \int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} x(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

ya que $h(t-\tau)$ es no nula cuando $t - \tau \in [0, T_2]$, es decir, $\tau \in [t - T_2, t]$, y $x(\tau)$ es no nula solo cuando $\tau \in (0, T_1)$.

Paso 2: Evaluar la integral

En el interalo de integración, $x(\tau) = \dfrac{\tau}{T_1} + 1$. Sustituyendo esto en la integral:

$$\begin{aligned} y(t) = \int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} \left(\frac{\tau}{T_1} + 1\right) \mathrm{d}\tau &= \int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} \frac{\tau}{T_1}\mathrm{d}\tau + \int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} 1\mathrm{d}\tau \\ &= \boxed{\frac{1}{T_1}\left(\frac{\min(T_1,t)^2}{2} - \frac{\max(0,t-T_2)^2}{2}\right) + \min(T_1,t) - \max(0,t-T_2)} \end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} \frac{\tau}{T_1}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T_1}\int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} \tau\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T_1}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} = \frac{1}{T_1}\left(\frac{\min(T_1,t)^2}{2} - \frac{\max(0,t-T_2)^2}{2}\right).$
- $\displaystyle\int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} 1\mathrm{d}\tau = [\tau]_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} = \min(T_1,t) - \max(0,t-T_2)$

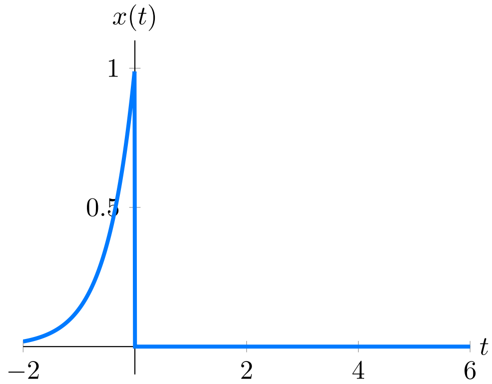
3) Calcule la convolución de $x(t) = e^{2t}u(-t)$ con $h(t) = u(t-3)$.

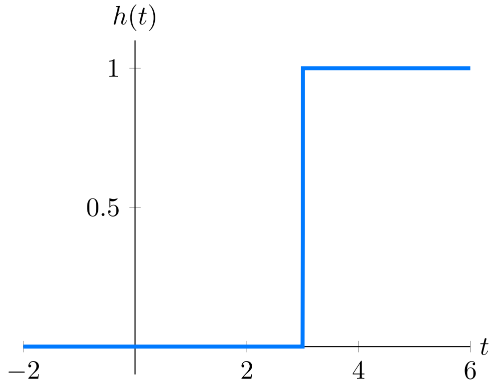
La convolució se define como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Análisis de las señales

- $x(t) = e^{2t}u(-t)$ es una señal exponencial que existe solo para $t < 0$.
- $h(t) = u(t-3)$ es un escalón unitario desplazado 3 unidades a la derecha.





Determinación de los límites de integración

Para que la integral no sea nula, necesitamos que:

- $\tau < 0$ (debido a $u(-\tau)$ en $x(\tau)$)
- $t - \tau > 3$ (debido a $u(t - \tau - 3)$ en $h(t - \tau)$)

De $t - \tau > 3$, obtenemos: $\tau < t - 3$. Por tanto, los límites de itengración son:

- Límite inferior: $-\infty$
- Límite superior: $\min(0, t-3)$

Cálculo de la convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\min(0,t-3)} e^{2\tau}(u-\tau)u(t-\tau-3)\mathrm{d}\tau$$

Debemos considerar dos casos:

Caso 1: $t < 3$

En este caso, $t-3<0$, por lo que $\min(0,t-3) = t-3$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}e^{2(t-3)} = \frac{1}{2}e^{2t-6}$$

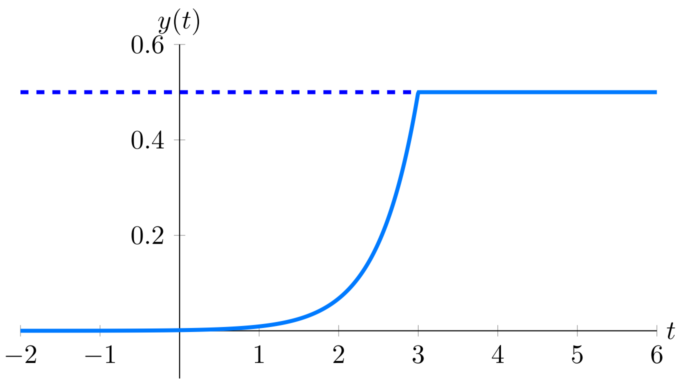
Caso 2: $t \geq 3$

En este caso, $t-3 \geq 0$, por lo que $\min(0,t-3) = 0$

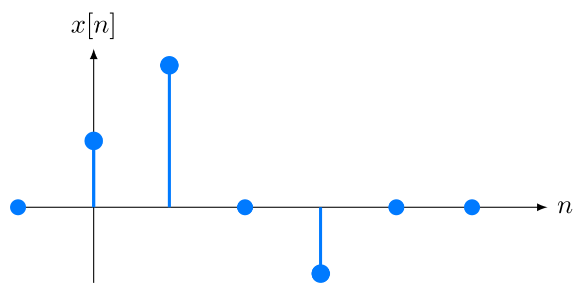
$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}$$

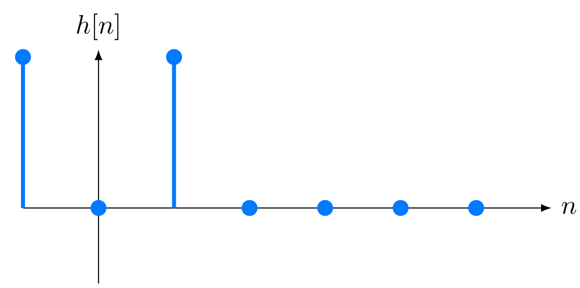
La convolución es:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2t-6}, & t<3 \\ \frac{1}{2}, & t \geq 3 \end{cases}$$



4) Sea $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ y $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$





a) $y_1 = x[n] * h[n]$

La convolución se calcula como:

$$y_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

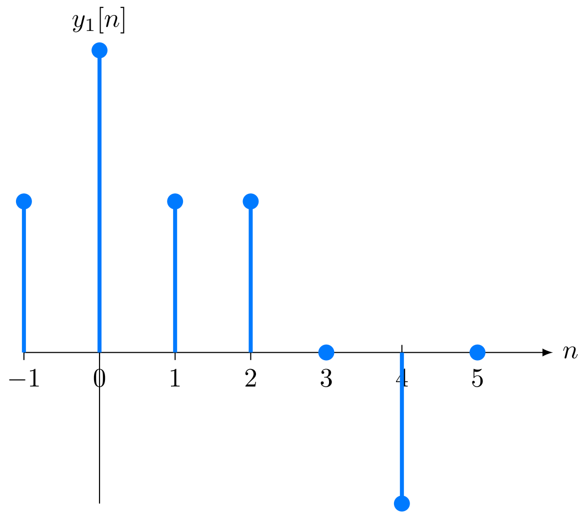
Sustituyendo $x[k]$ y $h[n-k]$, tenemos:

$$y_1[n] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[3]h[n-3]$$

- $x[0] = 1 \longrightarrow h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$
- $x[1] = 2 \longrightarrow h[n-1] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2]$
- $x[3] = -1 \longrightarrow h[n-3] = 2\delta[n-2] + 2\delta[n-4]$

Sumando todas las contribuciones:

$$y_1[n] = 2\delta[n+1]+2\delta[n-1]+4\delta[n]+4\delta[n-2]-2\delta[n-2]-2\delta[n-4] = 2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]-2\delta[n-4]$$



b) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

Señal desplazada:

$$x[n+2] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - \delta[n-1]$$

La convolución se calcula como:

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k+2]h[n-k]$$

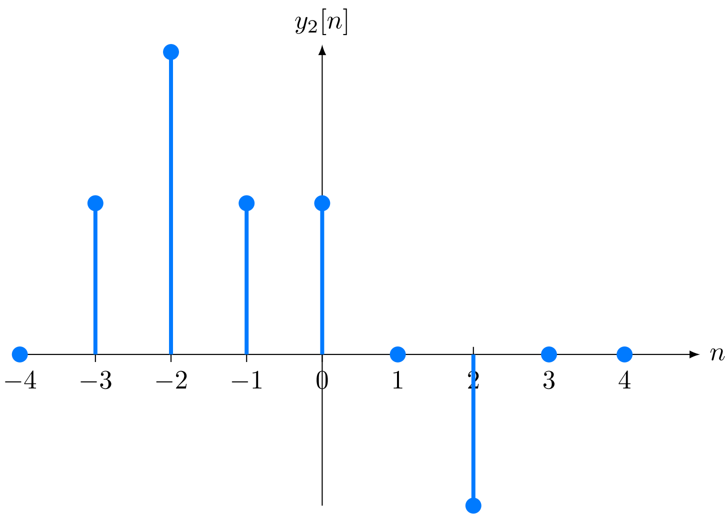
Sustituyendo $x[k+2]$ y $x[n-k]$, tenemos:

$$y_2[n] = x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] + x[1]h[n-1]$$

- $x[-2] = 1 \longrightarrow h[n+2] = 2\delta[n+3] + 2\delta[n+1]$
- $x[-1] = 2 \longrightarrow h[n+1] = 2\delta[n+2] + 2\delta[n]$
- $x[1] = -1 \longrightarrow h[n-1] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2]$

Sumando todas las contribuciones:

$$y_2[n] = 2\delta[n+3]+2\delta[n+1]+4\delta[n+2]+4\delta[n]-2\delta[n]-2\delta[n-2] = 2\delta[n+3]+4\delta[n+2]+2\delta[n+1]+2\delta[n]-2\delta[n-2]$$



c) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

Señal desplazada:

$$h[n+2] = 2\delta[n+3] + 2\delta[n+1]$$

La convolución se calcula como:

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k+2]$$

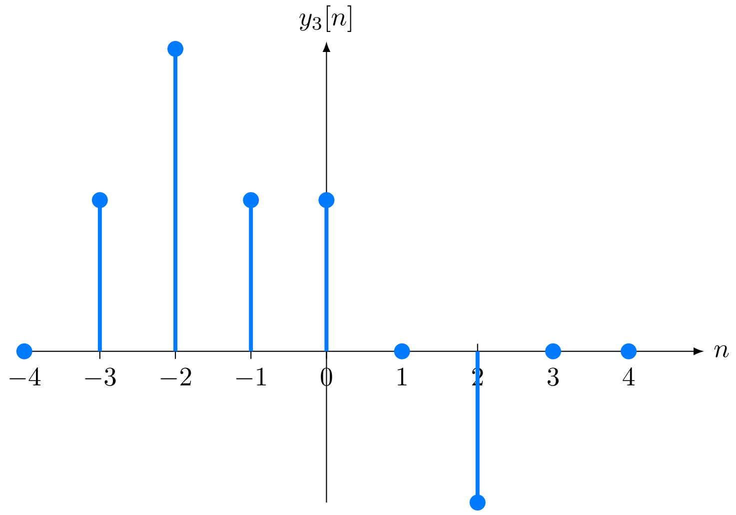
Sustituyendo $x[k]$ y $h[n-k+2]$, tenemos:

$$y_3[n] = x[0]h[n+2] + x[1]h[n+1] + x[3]h[n-1]$$

- $x[0] = 1 \longrightarrow h[n+2] = 2\delta[n+3] + 2\delta[n+1]$
- $x[1] = 2 \longrightarrow h[n+1] = 2\delta[n+2] + 2\delta[n]$
- $x[3] = -1 \longrightarrow h[n-1] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2]$

Sumando todas las contribuciones:

$$y_3[n] = 2\delta[n+3]+2\delta[n+1]+4\delta[n+2]+4\delta[n]-2\delta[n]-2\delta[n-2] = 2\delta[n+3]+4\delta[n+2]+2\delta[n+1]+2\delta[n]-2\delta[n-2]$$



5) Un sistema lineal S relaciona su entrada $x[n]$ y su salida $y[n]$ como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

donde $g[n] = u[n] - u[n-4]$.

a) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-1]$

La relación entre la entrada y la salida está dada por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

Sustituyendo $x[n] = \delta[n-1]$, sabemos que $\delta[n-1]$ es no nula cuando $n = 1$. Por lo tanto, la suma se reduce a:

$$y[n] = g[n-2(1)] = g[n-2]$$

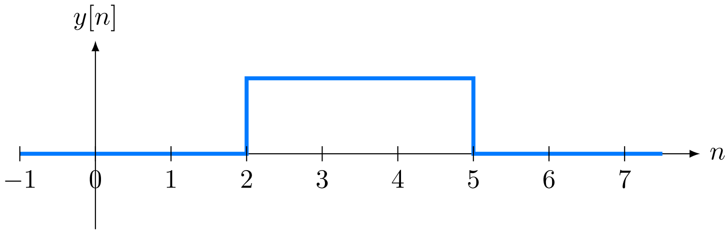
Dado que $g[n] = u[n] - u[n-4]$, tenemos:

$$g[n-2] = u[n-2] - u[n-6]$$

Por lo tanto:

$$y[n] = u[n-2] - u[n-6]$$

Esto significa que $y[n]$ es un pulso rectangular que comienza en $n = 2$ y termina en $n = 5$ (ya que $u[n-6]$) se activa en $n = 6$.



b) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-2]$

De nuevo, la relación es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

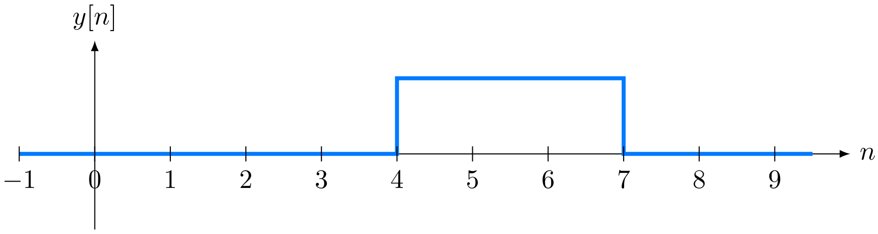
Sustituyendo $x[n] = \delta[n-2]$, sabemos que $\delta[n-2]$ es no nula solo cuando $n = 2$. Por lo tanto, la suma se reduce a:

$$y[n] = g[n-2(2)] = g[n-4]$$

Dado que $g[n] = u[n] - u[n-4]$, tenemos:

$$g[n-4] = u[n-4] - u[n-8]$$

Esto significa que $y[n]$ es un pulso rectangular que comienza en $n = 4$ y termina en $n = 7$ (ya que $u[n-8]$ se activa en $n = 8$)



c) ¿Es S un sistema LTI?

Para determinar si el sitema es **lineal** e **invariante** en el tiempo, evaluamos cada propiedad:

- **Linealidad:**

  Un sistema es lineal si satisface el principio de superposición, es decir, si para dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ con salidas $y_1[n]$ y $y_2[n]$, respectivamente, se cumple que:

  $$S\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

  En este caso, la salida está dada por una suma ponderada de $x[k]$ y $g[n-2k]$, lo cual es una operación lineal. Por lo tanto, el sistema es **lineal**.

- **Invanrianza en el tiempo:**

  Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la entrada produce el mismo desplazamiento en la salida. Es decir, si para una entrada $x[n]$ con salida $y[n]$, al desplazar la entrada $x[n-n_0]$, la salida se desplaza de manera idéntica $y[n-n_0]$.

  En este caso, la salida depende de $g[n-2k]$, que introduce un factor de escalamiento en el índice k. Esto significa que el sistema **no es invariante en el tiempo**, ya que el desplazamiento de la entrada no se traduce directamente en un desplazamiento de la salida.

d) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$

De nuevo, la relación es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

Sustituyendo $x[n] = u[n]$, sabemos que $u[n]$ es no nula para $k \geq 0$. Por lo tanto, la suma se reduce a:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} g[n-2k]$$

Dado que $g[n] = u[n] - u[n-4]$, tenemos:

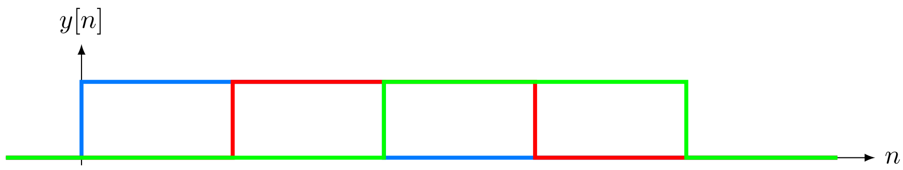
$$g[n-2k] = u[n-2k] - u[n-2k-4]$$

Sustituyendo esto en la suma:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (u[n-2k] - u[n-2k-4])$$

La suma se puede interpretar como una superposición de pulsos rectangulares desplazados. Cada término $u[n-2k] - u[n-2k-4]$ es un pulso rectangular de longitud 4, comenzando en $n = 2k$ y terminando en $n = 2k+3$.

Por lo tanto, $y[n]$ es una secuencia de pulsos rectangulares de longitud 4, comenzando en $n = 0$ y repitiéndose cada 2 unidades de tiempo.



6) Determine y esboce la convolución de las siguientes señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

La convolución de dos señales $x(t)$ y $h(t)$ está definida como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

En este caso:

- $x(t)$ es una función triangular definida por tramos:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- $h(t)$ es una combinación de deltas desplazadas:

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

Dado que $h(t)$ está compuesto por deltas, la convolución se simplifica porque las deltas actúan como "muestradoras" de $x(t)$. Específicamente, la convolución se convierte en:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t+2) + 2x(t+1)$$

Paso 1: Determinar $x(t+2)$

Para obtener $x(t+2)$, desplazamos $x(t)$ dos unidades hacia la izquierda. Esto significa que el soporte de $x(t+2)$ (el intervalo donde es cero) será:

$$-2 \leq t \leq -1$$

En este intervalo, la forma de $x(t+2)$ es:

- Para $-2 \leq t \leq -1, x(t+2) = t + 2 + 1 = t + 3$.

Por lo tanto:

$$x(t+2) = \begin{cases} t+3, & -2 \leq t \leq -1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Paso 2: Determinar $2x(t+1)$

Para obtener $2x(t+1)$, desplazamos $x(t)$ una unidad hacia la izquierda y multiplicamos por 2. Esto significa que el soporte de $2x(t+1)$ será:

$$-1 \leq t \leq 1$$

En este intervalo, la forma de $x(t+1)$ es:

- Para $-1 \leq t \leq 0, x(t+1) = t + 1 + 1 = t + 2$
- Para $0 < t \leq 1, x(t+1) = 2 - (t-1) = 1 - t$

Multiplicando por 2, obtenemos:

$$2x(t+1) = \begin{cases} 2(t+2) = 2t+4, & -1 \leq t \leq 0 \\ 2(1-t) = 2-2t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Paso 3: Sumar $x(t+2)$ y $2x(t+1)$

Ahora sumamos las dos contribuciones $x(t+2)$ y $2x(t+1)$. El soporte total de $y(t)$ será la unión de los soportes de $x(t+2)$ y $2x(t+1)$, es decir:

$$-2 \leq t \leq 1$$

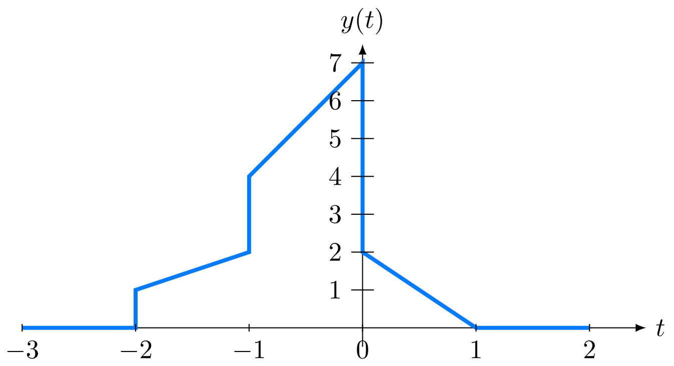
Dividimos el cálculo en intervalos:

- Para $-2 \leq t < -1$:
  - $x(t+2) = t + 3$
  - $2x(t+1) = 0$ (porque $t + 1 < -1$)
  - $y(t) = t + 3$
- Para $-1 \leq t < 0$:
  - $x(t+2) = t + 3$
  - $2x(t+1) = 2t + 4$
  - $y(t) = (t+3) + (2t+4) = 3t + 7$
- Para $0 \leq t \leq 1$:

- $x(t+2) = 0$ (porque $t+2 > 2$)
- $2x(t+1) = 2 - 2t$
- $y(t) = 0 + (2-2t) = 2 - 2t$

La salida $y(t)$ es:

$$y(t) = \begin{cases} t+3, & -2 \leq t < -1 \\ 3t+7, & -1 \leq t < 0 \\ 2-2t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



7) Sean

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases} \qquad h(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right), \text{ donde } 0 < \alpha \leq 1$$

a) Determine y esboce $y(t) = x(t) * h(t)$.

La convolución de $x(t)$ y $h(t)$ está definida como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

Dado que $x(t)$ es una función rectangular definida como:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y que $h(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, podemos escribir $h(t)$ como:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \frac{t}{\alpha} \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \longrightarrow 0 \leq t \leq \alpha$$

Por lo tanto:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \alpha \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ambas señales son rectángulos, y la convolución de dos rectángulos es un triángulo. El soporte de $y(t)$ será la suma de los soporte de $x(t)$ y $h(t)$, es decir:

$$\text{Soporte de } y(t): \quad [0, 1+\alpha]$$

Cálculo de $y(t)$:

La convolución se calcula como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Dado que $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$, son no nula en los intervalos $[0,1]$ y $[t-\alpha,t]$, respectivamente, la integral se reduce al intervalo donde ambos se solapan. Esto depende del valor de t:

- **Para $0 \leq t \leq \alpha$:**

  En este caso, el solapamiento ocurre en $[0,t]$. Por lo tanto:

  $$y(t) = \int_0^t 1 \cdot 1\mathrm{d}\tau = [\tau]_0^t = t$$

- **Para $\alpha \leq t \leq 1$:**

  En este caso, el solapamiento ocurre en $[t-\alpha,t]$. Por lo tanto:

  $$y(t) = \int_{t-\alpha}^t 1 \cdot 1\mathrm{d}\tau = [\tau]_{t-\alpha}^t = t-(t-\alpha) = \alpha$$

- **Para $1 < t \leq 1+\alpha$:**

  En este caso, el solapamiento ocurre en $[t-\alpha,1]$. Por lo tanto:

  $$y(t) = \int_{t-\alpha}^1 1 \cdot 1\mathrm{d}\tau = [\tau]_{t-\alpha}^1 = 1-(t-\alpha) = 1+\alpha-t$$

- **Para $t > 1+\alpha$:**

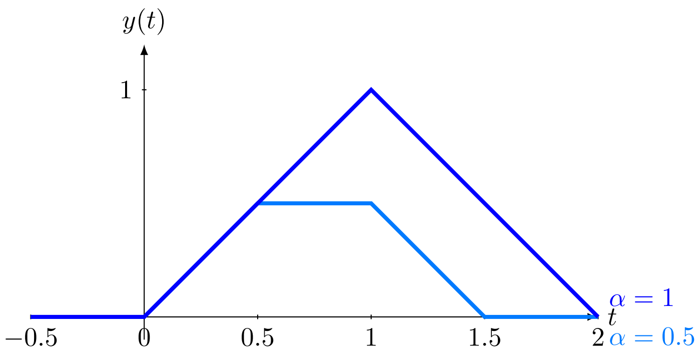
  No hay solapamiento, por lo que:

  $$y(t) = 0$$

La salida $y(t)$ es:

$$y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \alpha \\ \alpha, & \alpha < t \leq 1 \\ 1+\alpha-t, & 1 < t \leq 1+\alpha \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto corresponde a un triángulo con base en $[0,1+\alpha]$, que crece linealmente en $[0,\alpha]$, se mantiene constante en $[\alpha,1]$, y decrece linealmente en $[1,1+\alpha]$.



b) Si $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de α?

La derivada de $y(t)$ seá:

- Para $0 \leq t \leq \alpha$, $y(t) = t$, por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 1$$

- Para $\alpha < t \leq 1, y(t) = \alpha$, por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

- Para $1 < t \leq 1 + \alpha, y(t) = 1 + \alpha - t$, por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -1$$

- Para $t > 1 + \alpha, y(t) = 0$, por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Las discontinuidades en $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ ocurren en los puntos donde $y(t)$ cambia de pendiente. Estos puntos son:

- En $t = \alpha$, donde la pendiente cambia de 1 a 0.
- En $t = 1$, donde la pendiente cambia de 0 a -1.
- En $t = 1 + \alpha$, donde la pendiente cambia de -1 a 0.

Para que haya **solo tres discontinuidades**, los puntos α y $1 + \alpha$ deben coincidir, es decir:

$$\alpha = 1 + \alpha \longrightarrow \alpha = 1.$$

8) Sean

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \qquad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

a) Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$

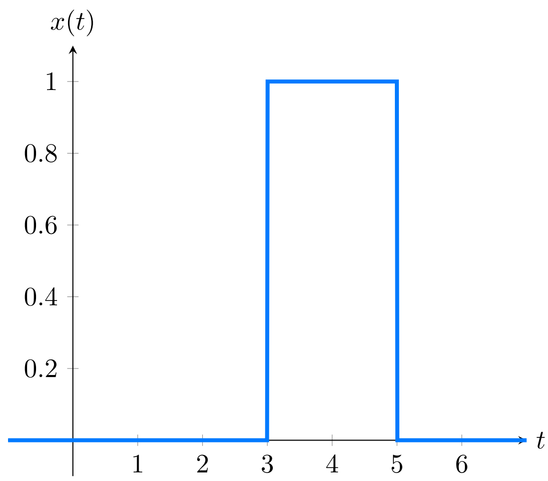
Planteamiento

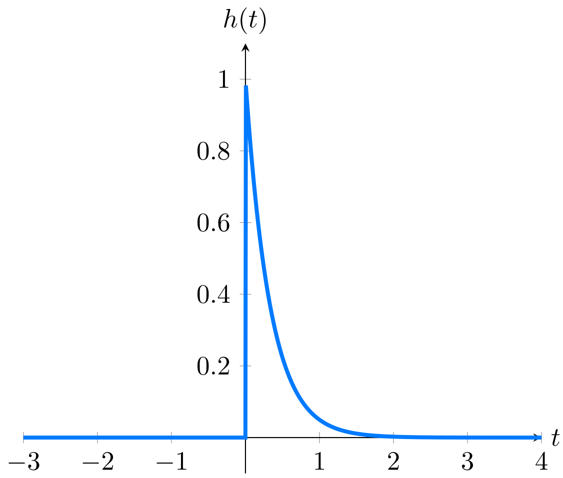
La convolución de $x(t)$ y $h(t)$ está definida como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Dado que:

- $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$, es un pulso rectangular definido en el intervalo $[3, 5]$.
- $h(t) = e^{-3t}u(t)$, es una función exponencial decreciente que comienza en $t = 0$





El soporte de $x(t)$ es $[3,5]$, y el soporte de $h(t)$ es $[0,\infty)$. Por lo tanto, el soporte de $y(t)$ será:

$$\text{Soporte de } y(t)\text{:}\quad [3, 5+\infty) = [3,\infty).$$

Cálculo de $y(t)$

La convolución se evalúa en diferentes intervalos dependiendo del valor de t. Para $t \geq 3$, el solapamiento entre $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ ocurre en el intervalo $[3,5]$. Por lo tanto, la integral se reduce a:

$$y(t) = \int_3^5 h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_3^5 e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

El término $u(t-\tau)$ asegura que $t-\tau \geq 0$, es decir, $\tau \leq t$. Esto implica que el interalo de integración es:

$$\tau \in [3, \min(5,t)]$$

Por lo tanto, el resultado depende de t:

- **Para** $3 \leq t < 5$**:**

  En este caso, $\min(5,t) = t$, y la integral se evalúa en $[3,t]$:

  $$y(t) = \int_3^t e^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

  Hacemos el cambio de variable $x = t-\tau$, lo que implica que $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tau$. Los límites cambia de $\tau = 3$ a $\tau = t$, lo que da $x = t-3$ a $x = 0$. La integral se convierte en:

  $$y(t) = \int_{t-3}^0 e^{-3x}(-\,\mathrm{d}x) = \int_0^{t-3} e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-3x}}{-3x}\right]_0^{t-3} = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-3)}\right).$$

- **Para** $t \geq 5$**:**

  En este caso, $\min(5,t) = 5$, y la integral se evalúa en $[3,5]$:

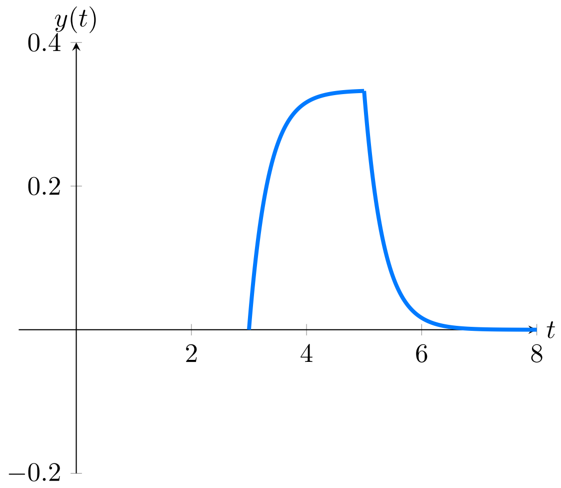
  $$y(t) = \int_3^5 e^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

  Usando el mismo cambio de variable $x = t-\tau$, con límites $\tau = 3$ a $\tau = 5$, obtenemos $x = t-3$ a $x = t-5$. La integral se convierte en:

  $$y(t) = \int_{t-5}^{t-3} e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{t-5}^{t-3} = \frac{1}{3}\left(e^{-3(t-5)} - e^{-3(t-3)}\right).$$

Resultado final para $y(t)$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-3)}), & 3 \leq t < 5 \\ \frac{1}{3}\left(e^{-3(t-5)} - e^{-3(t-3)}\right) & t \geq 5 \end{cases}$$



b) Calcule $g(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} * h(t)$

Derivada de $x(t)$

La derivada de $x(t)$ es:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t-3) - \delta(t-5).$$

Por lo tanto, la convolución $g(t)$ es:

$$g(t) = (\delta(t-3) - \delta(t-5)) * h(t).$$

Usando la propiedad de desplazamiento de la convolución, sabemos que:

$$\delta(t-t_0) * h(t) = h(t-t_0).$$

Por lo tanto:

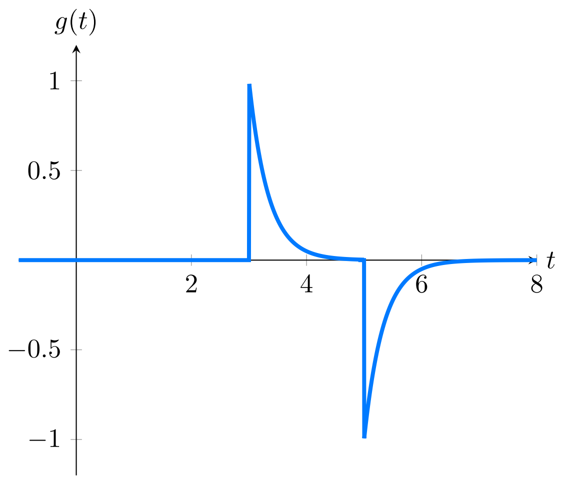
$$g(t) = h(t-3) - h(t-5).$$

Sustituyendo $h(t) = e^{-2t}u(t)$, tenemos:

$$h(t-3) = e^{-3(t-3)}u(t-3), \quad h(t-5) = e^{-3(t-5)}u(t-5)$$

Por lo tanto:

$$g(t) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5).$$



c) Establece una relación entre $g(t)$ e $y(t)$

Sabemos que $x(t)$ está relacionado con su derivada por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau.$$

Por la propiedad de la convolución, esto implica que:

$$y(t) = (x(t) * h(t)) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

En otras palabras, $y(t)$ **es la integral acumulativa de** $g(t)$**:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

9) Calcule la convolución de los siguientes pares de señales:

a) $x[n] = \alpha^n u[n], \quad h[n] = \beta^n u[n], \quad \alpha \neq \beta$

Ambas señales están definidas para $n \geq 0$ debido a la presencia de $u[n]$. La convolución es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k}$$

Factorizamos los términos comunes:

$$y[n] = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

La suma es una serie geométrica finita, cuya fórmula es:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \text{si } r \neq 1$$

Aquí, $r = \frac{\alpha}{\beta}$. Sustituyendo:

$$y[n] = \beta^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}, \quad \alpha \neq \beta$$

b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

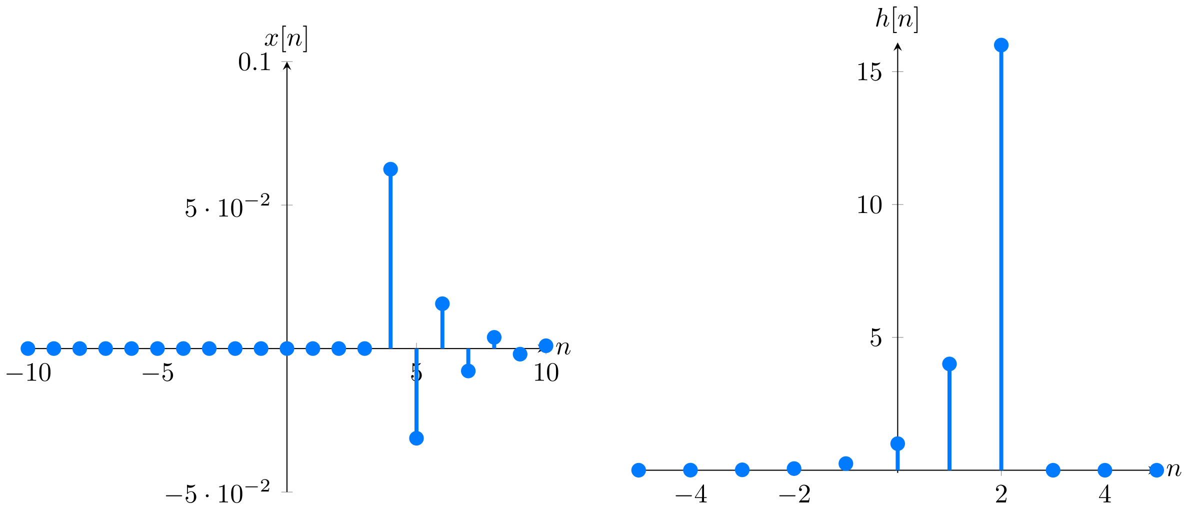
En este caso, ambas señales son iguales. La convolución es:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^n = \alpha^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \alpha^n (n+1)$$

c) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4], \quad h[n] = 4^n u[2-n]$

Primero, analizamos los soportes de la señales:

- $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$ está definida para $n \geq 4$.
- $h[n] = 4^n u[2-n]$ está definida para $n \leq 2$.



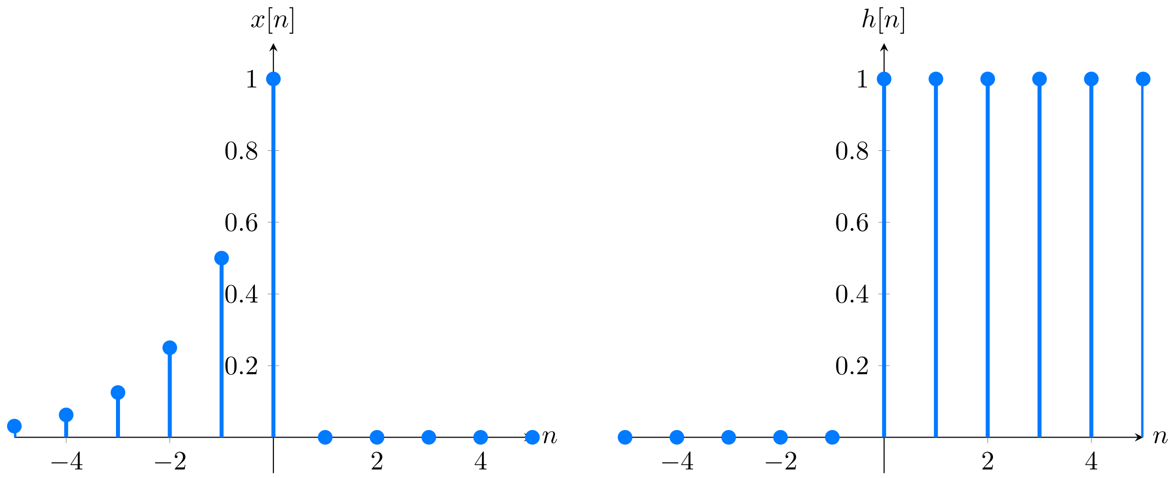
Por lo tanto, no hay traslape entre las señales, ya que $x[k]$ y $h[n-k]$ no son simultáneamente no nulas para ningún n. Esto implica que:

$$y[n] = 0, \quad \forall n.$$

d) $x[n] = 2^n u[-n], \quad h[n] = u[n]$

Primero, analizamos los soportes de las señales:

- $x[n] = 2^n u[-n]$ está definida para $n \leq 0$.
- $h[n] = u[n]$ está definida para $n \geq 0$.



La convolución es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Debido a los soportes de $x[k]$ y $h[n-k]$, la suma solo es no nula cuando $k \leq 0$ y $n-k \geq 0$, es decir, $k \leq 0$ y $k \geq n$. Esto implica que $n \leq k \leq 0$. Por lo tanto, la suma se reduce a:

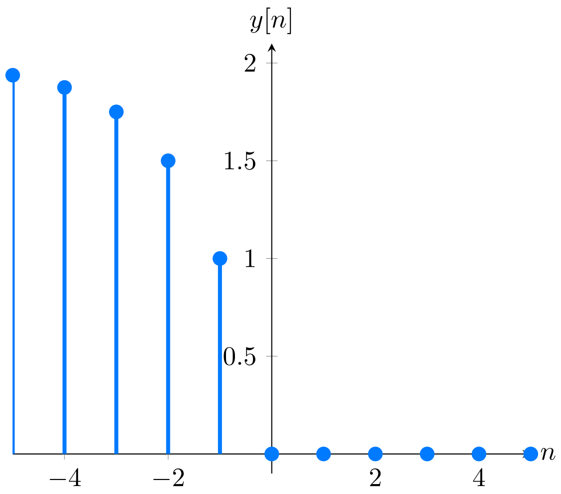
$$y[n] = \sum_{k=n}^{0} 2^k$$

Esta es una serie geométrica finita con razón $r = 2$, y su suma es:

$$\sum_{k=n}^{0} 2^k = \frac{2^{0+1} - 2^n}{1-2} = 2 \cdot (1 - 2^n)$$

Por lo tanto:

$$y[n] = \begin{cases} 2(1-2^n), & n \leq 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$



10) ¿Cuál/es de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas LTI estables?

a) $h(t) = e^{-(1-2j)t}u(t)$

Primeros, descomponemos el exponente complejo:

$$e^{-(1-2j)t} = e^{-t}e^{2jt}$$

Aquí, e^{-t} es una exponencial decreciente (para $t \geq 0$), y e^{2jt} es una oscilación compleja de magnitud unitaria. Por lo tanto:

$$|h(t)| = \left|e^{-t}e^{2jt}\right| = |e^{-t}| = e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

La integral de $|h(t)|$ es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^{\infty} = (0-(-1)) = 1.$$

Por lo tanto, el sistema es **estable**.

b) $h(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$

La función $\cos(2t)$ es una oscilación de magnitud unitaria, y e^{-t} es una exponencial decreciente (para $t \geq 0$). Por lo tanto:

$$|h(t)| = |e^{-t}\cos(2t)| \leq e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

La integral de $|h(t)|$ está acotada por la integral de e^{-t}, que ya sabemos que converge:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(2t)| \, \mathrm{d}t \leq \int_{0}^{\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$$

Por lo tanto, esta integral también converge, y el sistema es **estable**.

11) ¿Cuál/es de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas LTI estables?

a) $h[n] = n\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $h[n] = 3^n u[-n+10]$

12) Para las siguientes respuestas al impulso de sistemas LTI, determine si cada sistema es causal y/o estable, justificando la respuesta.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

- **Causalidad:** El término $u[n]$ asegura que $h[n] = 0$ para $n < 0$. Por lo tanto, el sistema es causal.
- **Escalabilidad:** Para $n \geq 0, |h[n]| = \left(\frac{1}{5}\right)^n$. La suma de esta serie geométrica es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} < \infty$$

Por lo tanto, el sistema es estable

b) $h[n] = 0.8^n u[n+2]$

- **Causalidad:** El término $u[n+2]$ implica que $h[n] \neq 0$ para $n \geq -2$. Como $h[n] \neq 0$ para $n < 0$, el sistema no es causal.
- **Estabilidad:** Para $n \geq -2, |h[n]| = 0.8^n$. Cambiando el índice de la suma $(m = n+2)$, tenemos:

$$\sum_{n=-2}^{\infty} 0.8^n = 0.8^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} 0.8^m = \frac{1}{0.8^2} \cdot \frac{1}{1-0.8} = \frac{1}{0.64} \cdot 5 = 7.8125 < \infty$$

Por lo tanto, el sistema es estable.

c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

- **Causalidad:** El término $u[-n]$ implica que $h[n] \neq 0$ solo para $n \leq 0$. Esto significa que el sistema depende de valores futuros de la entrada, por lo que no es causal.
- **Estabilidad:** Para $n \leq 0, |h[n]| = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n}$. Cambiando el índice $(m = -n)$, tenemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{0} 2^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m$$

Esta serie geométrica diverge, por lo que el sistema no es estable.

d) $h[n] = 5^n u[3-n]$

- **Causalidad:** El término $u[3-n]$ implica que $h[n] \neq 0$ solo para $n \leq 3$. Esto significa que el sistema depende de valores futuros de la entrada, por lo que no es causal.
- **Estabilidad:** Para $n \leq 3, |h[n]| = 5^n$. Esta serie incluye términos crecientes (por ejemplo, 5^3), por lo que no es absolutamente sumable. El sistema no es estable.

e) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1.01^n u[n-1]$

- **Causalidad:** Ambos términos incluyen $u[n]$ o $u[n-1]$, lo que asegura que $h[n] = 0$ para $n < 0$. Por lo tanto, el sistema es causal.
- **Estabilidad:** EL primer término $\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ es absolutamente sumable, ya que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Sin embargo, el segundo término $1.01^n u[n-1]$ crece exponencialmente y no es absolutamente sumable. Por lo tanto, el sistema no es estable.

f) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1.01^n u[1-n]$

- **Causalidad:** El primer término $\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ es causal, pero el segundo término $1.01^n u[1-n]$ implica que $h[n] \neq 0$ para $n > 1$. Por lo tanto, el sistema no es causal.

- **Estabilidad:** El primer término es aboslutamente sumable, pero el segundo término $1.01^n u[1-n]$ no lo es, ya que incluye términos crecientes. Por lo tanto, el sistema no es estable.

g) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

- **Causalidad:** El término $u[n-1]$ asegura que $h[n]=0$ para $n<1$. Por lo tanto el sistema es causal.
- Para $n \geq 1, |h[n]| = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ decrece exponencialmente, el factor n hace que la serie no sea absolutamente sumable. Por ejemplo, usando el criterio de comparación, la serie diverge. Por lo tanto, el sistema no es estable.

13) Considere un sistema LTI que se encuentra incialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

La ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 4y(t) = x(t).$$

Para encontrar la **respuesta al impulso** $h(t)$, consideramos la entrada $x(t)=\delta(t)$. En este caso, la ecuación difernecial se convierte en:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 4h(t) = \delta(t).$$

Resolviendo la ecuación diferencial

- **Ecuación homogénea:** Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada ($x(t)=0$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_h(t) + 4h_h(t) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es:

$$h_h(t) = Ce^{-4t},$$

donde C es una constante que se determinará con las condiciones iniciales.

- **Solución particular:** Dado que la entrada es un impulso $\delta(t)$, la solución particular se encuentra considerando la propiedad de causalidad del sistema LTI. La respuesta al impulso $h(t)$ debe ser cero para $t<0$. Además, integramos ambos lados de la ecuación diferencial en un intervalo infinitesimal alrededor de $t=0$ para determinar la discontinuidad en $h(t)$:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) + 4h(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

El primer término se evalúa como:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)\,\mathrm{d}t = h(\epsilon) - h(-\epsilon).$$

Para un sistema causal, $h(t)=0$ para $t<0$, por lo que $h(-\epsilon)=0$. Esto implica:

$$h(\epsilon) - 0 + \int_{-\epsilon}^{\epsilon}4h(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

En el límite $\epsilon \to 0$, el término $\int_{-\epsilon}^{\epsilon}4h(t)\,\mathrm{d}t$ desaparece, y obtenemos:

$$h(0^+) = 1.$$

- **Solución completa:** La solución completa es:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la **respuesta al impulso** del sistema es:

$$h(t) = e^{-4t}u(t),$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario.

b) Si $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$, calcule $y(t)$

La salida de un sistema LTI se obitnee mediante la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Sustituyendo $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$ y $h(t) = e^{-4t}u(t)$, tenemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1+3j)\tau}u(\tau)e^{-4(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Debido a las funciones escalón $u(\tau)$ y $u(t-\tau)$, los límites de integración se restringen a $0 \leq \tau \leq t$. Por lo tanto:

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{(-1+4j)\tau}e^{-4(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

Simplificamos el exponente:

$$e^{(-1+3j)\tau}e^{-4(t-\tau)} = e^{-4t}e^{(3j-1+4)\tau} = e^{-4t}e^{(3j+3)\tau}.$$

Entonces:

$$y(t) = e^{-4t}\int_{0}^{t} e^{(3j+3)\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Resolvemos la integral:

$$\int_{0}^{t} e^{(3j+3)\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3j+3}\left[e^{(3j+3)\tau}\right]_0^t = \frac{1}{3j+3}\left(e^{(3j+3)t} - 1\right).$$

Por lo tanto:

$$y(t) = e^{-4t} \cdot \frac{1}{3j+3}\left(e^{(3j+3)t} - 1\right) = \frac{1}{3j+3}\left(e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}\right).$$

14) Considere un sistema LTI que se encuentra inicialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

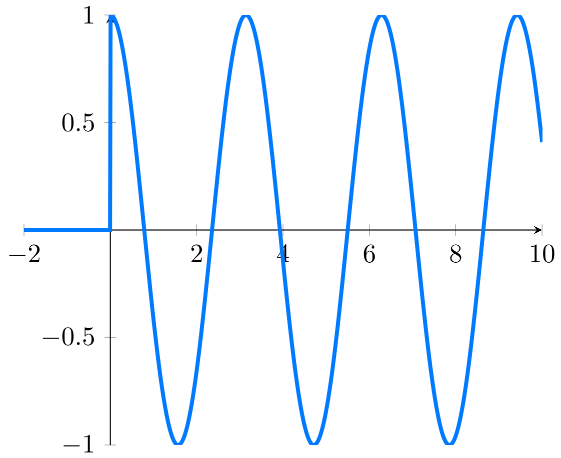
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

a) Si $x(t) = \cos(2t)u(t)$, calcule $y(t)$.

La ecuación diferencia que describe el sistema es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 3y(t) = 2x(t).$$

Dado que $x(t) = \cos(2t)u(t)$, la entrada es causal, y el sistema está inicialmente en resposo. Resolveremos esta ecuación diferencial para $y(t)$.



Paso 1: Representación de la entrada

La entrada $x(t) = \cos(2t)u(t)$ puede escribirse en términos de exponenciales complejas usando la identidad de Euler:

$$\cos(2t) = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2}.$$

Por lo tanto:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right)u(t).$$

Paso 2: Solución de la ecuación diferencial

La solución general de la ecuación difernecial tiene dos componentes:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

donde $y_h(t)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada ($x(t) = 0$) y $y_p(t)$ es una solución particular.

a) Solución homogénea

La ecuación homogénea es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_h(t) + 3y_h(t).$$

Resolviendo, obtenemos:

$$y(t) = Ce^{-3t},$$

donde C es una constante que se determinará con las condiciones iniciales.

b) Solución particular

Para encontrar $y_p(t)$, asumimos una solución de la forma:

$$y_p(t) = Ae^{j2t} + Be^{-j2t}.$$

Sustituyendo $y_p(t)$ en la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{j2t} + Be^{-j2t}\right) + 3\left(Ae^{j2t} + Be^{-j2t}\right) = 2x(t).$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{j2t} + Be^{-j2t}\right) = j2Ae^{j2t} - j2Be^{-j2t}.$$

Sustituyendo:

$$(j2A + 3A)e^{j2t} + (-j2B + 3B)e^{-j2t} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right).$$

Agrupando términos:

$$((j2+3)A)e^{j2t} + ((-j2+3)B)e^{-j2t} = e^{j2t} + e^{-j2t}.$$

Igualando coeficientes de e^{j2t} y e^{-j2t}:

- Para $e^{j2t} : (j2+3)A = 1$.
- Para $e^{-j2t} : (-j2+3)B = 1$.

Resolviendo para A y B:

$$A = \frac{1}{2j+3}, \quad B = \frac{1}{-2j+3}.$$

Simplificamos A y B multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$A = \frac{1}{2j+3} \cdot \frac{-2j+3}{-2j+3} = \frac{-2j+3}{(2j+3)(-2j+3)} = \frac{-2j+3}{13}$$
$$B = \frac{1}{-2j+3} \cdot \frac{2j+3}{2j+3} = \frac{2j+3}{(2j+3)(-2j+3)} = \frac{2j+3}{13}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p(t) = \frac{-2j+3}{13} e^{j2t} + \frac{2j+3}{13} e^{-j2t}.$$

Usando la identidad de Euler para regresar a términos reales:

$$y_p(t) = \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t).$$

c) Solución completa

La solución completa es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-3t} + \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t).$$

Dado que el sistema está inicialmente en reposo ($y(0) = 0$), sustituimos $t = 0$ para determinar C:

$$y(0) = C + \frac{3}{13}\cos(0) + \cancel{\frac{2}{13}\sin(0)} = 0.$$
$$C + \frac{3}{13} = 0 \longrightarrow C = -\frac{3}{13}.$$

Por lo tanto, la solución final es:

$$y(t) = -\frac{3}{13}e^{-3t} + \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t).$$

b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

La respuesta al impulso $h(t)$ se obtiene resolviendo la ecuación diferencial con $x(t) = \delta(t)$. La ecuación se convierte en:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) + 3h(t) = 2\delta(t).$$

Integrando ambos lados en un intervalo infinitesimal alrededor de $t = 0$, obtenemos:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} 3h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} 2\delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

El primer término es $h(\epsilon) - h(-\epsilon)$, y dado que $h(t) = 0$ para $t < 0$, esto se reduce a $h(0^+) = 2$. Por lo tanto, la solución es:

$$h(t) = Ce^{-3t}u(t).$$

Usando $h(0^+) = 2$, tenemos $C = 2$. Por lo tanto:

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t).$$

15) Obtenga la respuesta al impulso, así como las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad de los siguientes sistemas:

a) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$

Respuesta al impulso

Para encontrar la respuesta al impulso $h(t)$, sustituimos $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

La integral de la delta de Dirac es la función escalón unitario $u(t)$. Por lo tanto:

$$h(t) = u(t).$$

Propiedades

- **Memoria:** El sistema tiene memoria, ya que la salida en t depende de los valores pasado de la entrada ($x(\tau)$ para $\tau \leq t$).
- **Causalidad:** El sistema es causal, ya que la salida en t depende únicamente de valores de la entrada para $\tau \leq t$.
- **Estabilidad:** El sistema no es estable. Por ejemplo, si $x(t) = 1$ (una entrada acotada), la salida es $y(t) = t$, que no está acotada.
- **Invarianza en el tiempo:** El sistema es invariante en el tiempo. Si desplazamos la entrada $x(t)$ por t_0, la salida también se desplaza por t_0.
- **Linealidad:** El sistema es lineal, ya que satisface la superposición.

b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} 2x(\tau - 5)\mathrm{d}\tau$

Respuesta al impulso

Sustituyendo $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} 2\delta(\tau - 5)\mathrm{d}\tau.$$

La delta de Dirac se activa en $\tau = 5$, y la integral es cero para $t < 5$ y 2 para $t \geq 5$. Por lo tanto:

$$h(t) = 2u(t - 5).$$

Propiedades

- **Memoria:** El sistema tiene memoria, ya que la salida depende de valores pasados de la entrada.
- **Causalidad:** El sistema no es causal, ya que la salida en t depende de valores de la entrada en $\tau = t - 5$, que puede ser un valor futuro si $t < 5$.
- **Estabilidad:** El sistema no es estable. Por ejemplo, si $x(t) = 1$, la salida crece sin límite.
- **Invarianza en el tiempo:** El sistema es invariante en el tiempo. UN desplazamiento en la entrada produce un desplazamiento equivalente en la salida.
- **Linealidad:** El sistema es lineal, ya que satisface la superposición.

c) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} 3x(\tau - 2)\mathrm{d}\tau$

Respuesta al impulso

Sustituyendo $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} 3\delta(\tau - 2) \mathrm{d}\tau.$$

La delta de DIrac se activa en $\tau = 2$, y la integral evalúa:

$$y(t) = 3e^{-(t-2)} \text{ para } t \geq 2.$$

Por lo tanto:

$$h(t) = 3e^{-(t-2)} u(t-2).$$

Propiedades

- **Memoria:** El sistema tiene memoria, ya que la salida depende de valores pasados de la entrada.
- **Causalidad:** El sistema no es causal, ya que la salida en t depende de valores de la entrada $\tau = t - 2$, que puede ser un valor futuro si $t < 2$.
- **Estabilidad:** El sistema es estable. La respuesta al impulso $h(t)$ es absolutamente integrable, ya que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{2}^{\infty} 3e^{-(t-2)} \, \mathrm{d}t = 3.$$

- **Invarianza en el tiempo:** El sistema no es invariante en el tiempo debido al término $e^{-(t-\tau)}$, que depende explícitamente de t.
- **Linealidad:** El sistema es lineal, ya que satisface la superposición.

d) $y(t) = \displaystyle\int_{t-3}^{t+2} e^{-(t+\tau)} x(\tau - 2) \mathrm{d}\tau$

Respuesta al impulso

Sustituyendo $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \int_{t-3}^{t+2} e^{-(t+\tau)} \delta(\tau - 2) \mathrm{d}\tau.$$

La delta de Dirac se activa en $\tau = 2$, pero esto ocurre solo si $t - 3 \leq 2 \leq t + 2$, es decir, si $t \in [1, 5]$, En este intervalo, la integral evalúa:

$$y(t) = e^{-(t+2)} \text{ para } t \in [1, 5].$$

Fuera de este intervalo ($t < 1$ o $t > 5$), la integral es cero. Por lo tanto:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-(t+2)}, & 1 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedades

- **Memoria:** El sistema tiene memoria, ya que la salida depende de valores pasados de la entrada.
- **Causalidad:** El sistema no es causal, ya que la salida en t depende de valores de la entrada en $\tau - 2$, que puede ser un valor futuro.
- **Estabilidad:** El sistema es estable. La respuesta al impulso $h(t)$ es absolutamente integrable, ya que está acotada en el intervalo $[1, 5]$.
- **Invarianza en el tiempo:** El sistema no es invariante en el tiempo debido al término $e^{-(t+\tau)}$, que depende explícitamente de t.
- **Linealidad:** El sistema es lineal, ya que satisface la superposición.

16) Un sistema discreto viene determinado por la relación entrada-salida

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x[n-2].$$

Analice las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad del sistema.

1) Memoria

Un sistema tiene memoria si la salida en un instante n depende de valores pasados o futuros de la entrada. Si la salida depende únicamente del valor actual de la entrada, el sistema es sin memoria.

En este caso, la salida $y[n]$ depende de $x[n-2]$, que es un valor pasado de la entrada (desplazados dos unidades en el tiempo). Por lo tanto, **el sistema tiene memoria.**

2) Causalidad

Un sistema es causal si la salida en un instante n depende únicamente de valores presentes o pasados de la entrada, es decir, no depende de valores futuros de la entrada.

Aquí, $y[n]$ depende de $x[n-2]$, que es un valor pasado de la entrada. No hay dependencia de valores futuros de $x[n]$. Por lo tanto, **el sistema es causal.**

3) Estabilidad

Un sistema es estable si para toda entrada acotada $x[n]$, la salida $y[n]$ también es acotada.

La salida está dada por:

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x[n-2].$$

El término $e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}$ es una exponencial compleja de magnitud unitaria ($|e^{j\theta}| = 1$ para cualquier θ). Por lo tanto, si $x[n-2]$ es acotada, $y[n]$ también será acotada. Esto implica que **el sistema es estable**.

4) Invarianza en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la entrada produce un desplazamiento equivalente en la salida, sin cambiar la forma de la relación entrada-salida.

Supongamos que desplazamos la entrada $x[n]$ por k unidades, es decir, consideramos una nueva entrada $x_k[n] = x[n-k]$. La salida correspondiente sería:

$$y_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x_k[n-2] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x[n-k-2].$$

Comparando con la salida original $y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x[n-2]$, vemos que el desplazamiento en la entrada introduce un cambio en el argumento de x, pero no se traduce en un simple desplazamiento de la salida. Esto significa que **el sistema no es invariante en el tiempo.**

5) Linealidad

Un sistema es lineal si satisface el principio de superposición, es decir, si para dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ y sus respectivas salidas $y_1[n]$ y $y_2[n]$, se cumple que:

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \longrightarrow a_1y_1[n] + a_2y_2[n].$$

En este caso, la relación entrada-salida es:

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x[n-2].$$

Si la entrada es una combinación lineal $x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$, la salida será:

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}(a_1x_1[n-2] + a_2x_2[n-2]) = a_1e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x_1[n-2] + a_2e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x_2[n-2].$$

Esto corresponde a $a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$, lo que demuestra que **el sistema es lineal.**

17) Considere la señal $x[n] = \bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right)$. Obtenga y represente la parte par e impar de esta señal. Calcule la energía y potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal defindia en energía o en potencia.

1) Parte par e impar de la señal

La parte par ($x_e[n]$) y la parte impar ($x_o[n]$) de una señal $x[n]$ se definen como:

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}, \quad x_o = \frac{x[n] - x[-n]}{2}.$$

a) Cálculo de $x[-n]$

La señal invertida en el tiempo es:

$$x[-n] = \bigwedge\left(\frac{-n}{4}\right) + \prod\left(\frac{-n-2}{5}\right).$$

b) Parte par ($x_e[n]$)

Sustituyendo en la fórmula de la parte par:

$$x_e[n] = \frac{\bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right) + \bigwedge\left(\frac{-n}{4}\right) + \prod\left(\frac{-n-2}{5}\right)}{2}.$$

c) Parte impar ($x_o[n]$)

Sustituyendo en la fórmula de la parte impar:

$$x_o[n] = \frac{\bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right) - \bigwedge\left(\frac{-n}{4}\right) - \prod\left(\frac{-n-2}{5}\right)}{2}.$$

Para obtener las expresiones explícitas de $x_e[n]$ y $x_o[n]$, se necesita evaluar las propiedades de simetría de las funciones $\bigwedge$ y $\prod$:

- La función triangular $\bigwedge(x)$ es **par**, es decir, $\bigwedge(-x) = \bigwedge(x)$.
- La función rectangular $\prod(x)$ es **par**, es decir, $\prod(-x) = \prod(x)$.

Por lo tanto:

- $\bigwedge\left(\frac{-n}{4}\right) = \bigwedge\left(\frac{n}{4}\right)$.
- $\prod\left(\frac{-n-2}{5}\right) = \prod\left(\frac{n+2}{5}\right)$.

Sustituyendo estas propiedades:

$$x_e[n] = \frac{\bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right) + \bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n+2}{5}\right)}{2} = \bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{\prod\left(\frac{n-2}{5}\right) + \prod\left(\frac{n+2}{5}\right)}{2}.$$
$$x_o[n] = \frac{\bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right) - \bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) - \prod\left(\frac{n+2}{5}\right)}{2} = \frac{\prod\left(\frac{n-2}{5}\right) - \prod\left(\frac{n+2}{5}\right)}{2}.$$

2) Cálculo de energía y potencia

La energía de una señal $x[n]$ se define como:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2.$$

La potencia de una señal $x[n]$ se define como:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

a) Naturaleza de la señal $x[n]$

La señal $x[n]$ está compuesta por una función triangular $\left(\bigwedge\right)$ y una función rectangular $\left(\prod\right)$, ambas de soporte finito. Esto significa que $x[n]$ es no nula solo en el intervalo finito de n. Por lo tanto, la suma de $|x[n]|^2$ será finita, y la energía será finita. Además, dado que la señal no es periódica y tiene soporte finito, su potencia será cero.

b) Cálculo de la energía

Para calcular la energía, evaluamos:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right) \right|^2.$$

Dado que $\bigwedge(x)$ y $\prod(x)$ tienen soporte finito, la suma se produce a un intervalo finitp de n. La energía se puede calcular explícitamente evaluando $x[n]$ en los puntos donde no es cero.

c) Potencia

La potencia será:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Dado que $x[n]$ tiene soporte finito, la suma $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$ no crece con N, y al dividir entre $2N+1$, el resultado tiende a cero. Por lo tanto, la potencia es:

$$P_x = 0.$$

Por lo tanto, **la señal está definida en energía.**

18) Calcule la convolución de las señales

$$x_1[n] = (n-6)\prod\left(\frac{n-6}{13}\right) \qquad x_2[n] = \prod\left(\frac{-n-3}{5}\right)$$

Nota: la suma de una progresión aritmética $a_{n_i}, a_{n_i+1}, \ldots, a_{n_f}$, con $a_{n_i+1} = a_{n_i} + d, a_{n_i+2} = a_{n_i} + 2d, \ldots$ es

$$\sum_{k=n_i}^{n_f} a_k = \frac{(n_f - n_i + 1)(a_{n_i} + a_{n_f})}{2}.$$

1) Soporte de las señales

a) Soporte de $x_1[n]$

La función rectangular $\prod\left(\frac{n-6}{13}\right)$ es no nula solo cuando:

$$\left|\frac{n-6}{13}\right| \le \frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{13}{2} \le n-6 \le \frac{13}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \le n \le \frac{25}{2}.$$

Dado que n es un número entero, el soporte de $x_1[n]$ es:

$$n \in \{0, 1, 2, \ldots, 12\}.$$

b) Soporte de $x_2[n]$

La función rectangular $\prod\left(\frac{-n-3}{5}\right)$ es no nula solo cuando:

$$\left|\frac{-n-3}{5}\right| \leq \frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{5}{2} \leq -n-3 \leq \frac{5}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \leq -n \leq \frac{11}{2} \longrightarrow -\frac{11}{2} \leq n \leq \frac{1}{2}.$$

Dado que n es un número entero, el soporte de $x_2[n]$ es:

$$n \in \{-5, -4, -3, -2, -2, -1, 0\}.$$

2) Soporte de la convolución

El soporte de la convolución $y[n] = (x_1 * x_2)[n]$ es la suma de los soportes de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Como el soporte de $x_1[n]$ es $\{0, 1, \ldots, 12\}$ y el soporte de $x_2[n]$ es $\{-5, -4, \ldots, 0\}$, $y[n]$ será no nula en $n \in \{-5, -4, \ldots, 12\}$.

3) Expresión de la convolución

La convolución se calcula como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k].$$

Dado que $x_1[k]$ y $x_2[n-k]$ son no nulas solo en sus respectivos soportes, la suma se reduce a los valores de k donde ambos términos son no nulos. Esto ocurre cuando:

$$k \in \{0, 1, \ldots, 12\}, \quad n-k \in \{-5, -4, \ldots, 0\}.$$

Para que $n-k \in \{-5, -4, \ldots, 0\}$, se tiene:

$$-5 \leq n-k \leq 0 \longrightarrow n \leq k+5 \text{ y } k \leq n.$$

Por lo tanto, los valores de k están restringidos por:

$$\max(0, n-5) \leq k \leq \min(12, n).$$

La convolución se convierte en:

$$y[n] = \sum_{k=\max(0,n-5)}^{\min(12,n)} (k-6) \prod\left(\frac{k-6}{13}\right) \prod\left(\frac{-(n-k)-3}{5}\right).$$

4) Evaluación de los productos

a) Propiedades de $\prod(x)$

La función rectangular $\prod(x)$ es igual a 1 cuando $|x| \leq \frac{1}{2}$ y 0 en otro caso. Por lo tanto:

- $\prod\left(\frac{k-6}{13}\right)$ si $k \in \{0, 1, \ldots, 12\}$, y 0 en otro caso.
- $\prod\left(\frac{-(n-k)-3}{5}\right) = 1$ si $n-k \in \{-5, -4, \ldots, 0\}$, y 0 en otro caso.

Esto asegura que la suma realiza únicamente en el intervalo $k \in [\max(0, n-5), \min(12, n)]$.

5) Suma de una progresión aritmética

Dentro del intervalo válido para k, el término $k-6$ forma una progresión aritmética con diferencia $d = 1$. La suma de una progresión aritmética $a_k = k - 6$ desde $k = k_{\min}$ hasta $k_{\max}$ es:

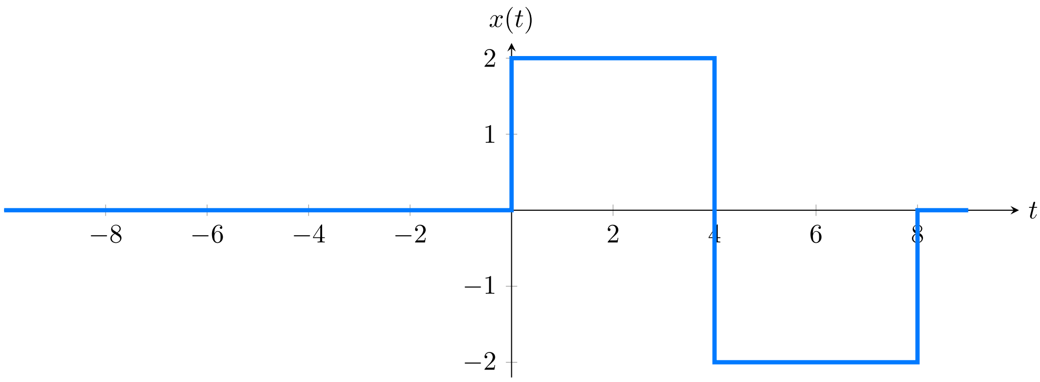
$$\sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} (k-6) = \frac{(k_{\max} - k_{\min} + 1)((k_{\min}) - 6) + (k_{\max} - 6)}{2}.$$

Aquí:

$$k_{\min} = max(0, n-5), \quad k_{\max} = \min(12, n).$$

19) Se pretende procesar la señal $x(t)$ de la figura con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = t \prod \left(\frac{2t-4}{8}\right) - 2\delta(t+12)$$



a) Obtenga la salida del sistema $y(t)$.

La salida $y(t)$ de un sistema LTI se obtiene mediante la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Respuestal al impulso $h(t)$:

$$h(t) = t \prod \left(\frac{2t-4}{8}\right) - 2\delta(t+12).$$

- El término $t \prod \left(\frac{2t-4}{8}\right)$ es un pulso triangular centrado en $t = 2$ con un ancho de 4 (no nulo para $t \in [0, 4]$).
- El término $-2\delta(t+12)$ es una función delta de Dirac escalada en $t = -12$.

Señal de entrada $x(t)$:

De la figura, $x(t)$ es un pulso rectangular definido como:

$$x(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 4 \\ -2, & 4 \leq t < 8 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Paso 1: Descomposición de la convolución

La convolución se puede dividir en dos términos debido a la estructura de $h(t)$:

$$y(t) = \left(x(t) * t \prod \left(\frac{2t-4}{8}\right)\right) - 2(x(t) * \delta(t+12)).$$

a) Convolución con $\delta(t+12)$:

La convolución con la delta desplaza la entrada $x(t)$ por -12:

$$x(t) * \delta(t+12) = x(t+12).$$

Como $x(t)$ es no nula solo para $t \in [0,8], x(t+12)$ será no nula para $t \in [-12,4]$. Por lo tanto:

$$-2(x(t) * \delta(t+12)) = \begin{cases} -4, & -12 \leq t < -8 \\ 4, & -8 \leq t < -4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Convolución con $t\prod\left(\frac{2t-4}{8}\right)$:

El término $t\prod\left(\frac{2t-4}{8}\right)$ es un pulso triangular centrado en $t = 2$ con un ancho de 4 (no nulo para $t \in [0,4]$). La convolución iimplica entregar la superposición de $x(\tau)$ y el pulso triangular desplazado $t\prod\left(\frac{2(t-\tau)-4}{8}\right)$.

Paso 2: Soportes de las señales

Soporte de $x(t)$:

La señal $x(t)$ es no nula para $t \in [0,8]$.

Soporte de $t\prod\left(\frac{3t-4}{8}\right)$:

El pulso tringular es no nulo para $t \in [0,4]$.

Soporte de la convolución:

El soporte de la convolución es la suma de los soporte de $x(t)$ y $t\prod\left(\frac{2t-4}{8}\right)$, es decir:

$$[0,8] + [0,4] = [0,12].$$

Por lo tanto, $y(t)$ será no nula para $t \in [0,12]$.

Paso 3: Evaluación de la convolución

La convolución se evalúa como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot (t-\tau) \prod\left(\frac{2(t-\tau)-4}{8}\right) \mathrm{d}\tau.$$

a) Intervalos de integración:

La integral se evalúa en los intervalos donde $x(\tau)$ y $(t-\tau)\prod\left(\frac{2(t-\tau)-4}{8}\right)$ se superponen. Esto depende de t:

- Para $0 \leq t < 4$, el pulso triangular está completamente dentro del soporte de $x(t)$.
- Para $4 \leq t < 8$, el pulso triangular se superpone parcialmente con $x(t)$.
- Para $8 \leq t < 12$, le pulso traingular se superpone con la segunda parte de $x(t)$.

b) Evaluación en cada intervalo:

- Para $0 \leq t < 4$:

  En este intervalo, el pulso triangular está completamente dentro del soporte de $x(t)$. La integral es:

$$y(t) = \int_0^t 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 2\int_0^t (t-\tau)\mathrm{d}\tau = 2\left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = 2\left[t^2 - \frac{t^2}{2}\right] = t^2.$$

- Para $4 \leq t < 8$:

  En este intervalo, el pulso triangular se superpone parcialmente con $x(t)$. La integral se divide en dos partes:

$$y(t) = \int_0^4 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \int_4^t -2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

  Resolviendo cada término:

  - Para $\int_0^4 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$:

$$\int_0^4 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 2\left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^4 = 2[4t-8] = 8t-16.$$

  - Para $\int_4^t -2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$:

$$\int_4^t -2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = -2\left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_4^t = -2\left[t^2 - \frac{t^2}{2} - (4r-8)\right] = -2\left[\frac{t^2}{2} - 4t + 8\right] = -t^2 + 8 - 16$$

  Sumando ambos términos:

$$y(t) = (8t-16) + (-t^2+8t-16) = -t^2+16t-32$$

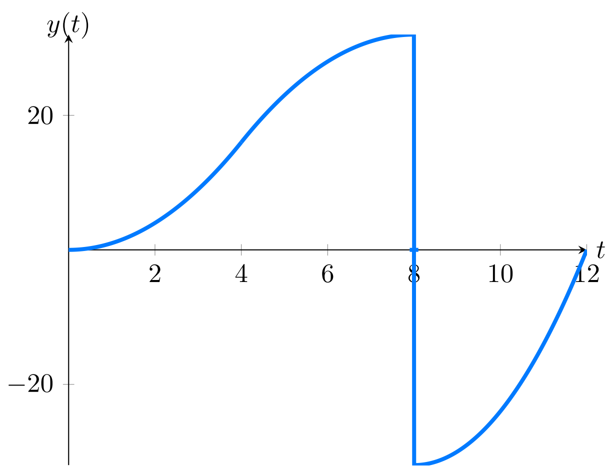
- Para $8 \leq t < 12$:

  En este intervalo, el pulso triangular se superpone con la segunda parte de $x(t)$. La integral es:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{t-4}^8 -2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = -2\int_{t-4}^7 (t-\tau)\mathrm{d}\tau = -2\left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{t-4}^8 \\
&= -2\left[8t - 32 - \left(t^2 - 4t - \frac{t^2-8t+16}{2}\right)\right] \\
&= -2\left[16t - 64 - (2t^2 - 8t - t^2 + 8t - 16)\right] = -2\left[-t^2+16t-48\right] \\
&= 2t^2 - 32t + 96
\end{aligned}$$

La salida $y(t)$ es una función por tramos definida como:

$$y(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 4 \\ -t^2+16t-32, & 4 \leq t < 8 \\ 2t^2-32t+96, & 8 \leq t < 12 \end{cases}$$



b) Indique razonadamente si este sistema posee las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad.

- **Memoria**
  - El sistema tiene memoria porque la respuesta al impulso $h(t)$ depende de t y no solo del valor actual de la entrada.
- **Causalidad:**
  - El sistema **no es causal** porque la respuesta al impulso $h(t)$ incluye un término $-2\delta(t+12)$, que depende de valores futuros del entrada (por ejemplo, $t = -12$)
- **Estabilidad:**
  - El sistema es **estable** porque la respuesta al impulso $h(t)$ es absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t < \infty.$$

c) Calcule la energía total y la potencia media de $x(t)$, e indique si está definida en energía o en potencia.

- **Energía:**

  La energía de $x(t)$ se define como:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

  Como $x(t)$ es constante por partes:

$$E_x = \int_0^4 |2|^2 \, \mathrm{d}t + \int_4^8 |-2|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^4 4 \, \mathrm{d}t + \int_4^8 4 \, \mathrm{d}t = 4[t]_0^4 + 4[t]_4^8 = 16 + 16 = 32.$$

- **Potencia:**

  La potencia promedio de $x(t)$ es:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{2T} = \frac{32}{\infty} = 0.$$

$x(t)$ es una **señal definida en energía** porque tiene energía infinita y potencia nula.

d) A partir del resultado del apartado (a), y utilizando únicamente propiedades de la convolución, obtenga la salida del sistema frente a la entrada

$$z(t) = 8 \bigwedge \left(\frac{t-4}{4} \right)$$

La función triangular $\bigwedge \left(\frac{t-4}{4} \right)$ es una versión escalada y desplazada de un pulso triangular. Usando las propiedades de la convolución.

- **Propiedades de escalamiento:**

  Si $x(t) * h(t) = y(t)$, entonces $[a \cdot x(t)] * h(t) = a \cdot y(t)$. Aquí, $z(t) = 8 \cdot \bigwedge \left(\frac{t-4}{4} \right)$, por lo que la salida se escala por 8.

- **Propiedad de desplazamiento:**

  Si $x(t) * h(t) = y(t)$, entonces $x(t-t_0) * h(t) = y(t-t_0)$. El pulso triangular $\bigwedge \left(\frac{t-4}{4} \right)$ está desplazado en 4. Por lo tanto, la salida también se desplaza.

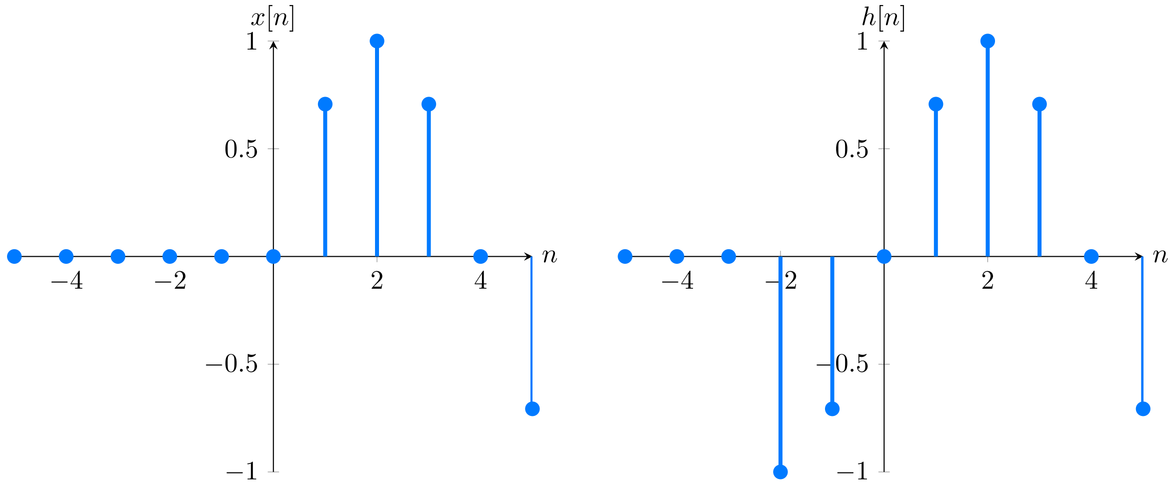
Usando estas propiedades, la salida para $z(t)$ es:

$$y_z(t) = 8 \cdot y(t-4),$$

donde $y(t)$ es el resultado de la parte (a).

20) Se pretende procesar la señal $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n+2]$.

a) Represente en detalle $x[n]$ y $h[n]$.



b) Indique razonadamente si este sistema definido por $h[n]$ posee las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad.

El sistema está definido por su respuesta al impulso $h[n]$. Analizamos las propiedades:

- **Memoria:**
  - Un sistema tiene memoria si su salida depende de valores pasados o futuros de la entrada.
  - En este caso, $h[n]$ depende de n, lo que implica que el sistema tiene memoria.
- **Causalidad:**
  - Un sistema es causal si su salida en un instante n depende solo de valores presentes o pasados de la entrada.
  - Como $h[n]$ es no nula para $n \geq -2$, el sistema **no es causal**, ya que depende de valores futuros de la entrada (por ejemplo, $n = -2$).
- **Estabilidad:**
  - Un sistema es estable si su respuesta al impulso $h[n]$ es absolutamente sumable, es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

  - En este caso, $h[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n+2]$ no es absolutamente sumable porque $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ no decrece a medida que $n \to \infty$. Por lo tanto, el sistema **no es estabe**.

c) Calcule la señal de salida del sistema.

La salida del sistema $y[n]$ se obtiene mediante la convolución de $x[n]$ con $h[n]$:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Soportes de $x[n]$ y $h[n]$:

- $x[n]$ es no nula para $n \geq 0$.
- $h[n]$ es no nula para $n \geq -2$.

Por lo tanto, la convolución será no nula para $n \geq -2$.

Cálculo de la convolución:

Sustituyendo las expresiones de $x[n]$ y $h[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}(n-k)\right).$$

Usamos la identidad trigonométrica para el producto de senos:

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)].$$

Sustituyendo $A = \frac{\pi}{4}k$ y $B = \frac{\pi}{4(n-k)}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}(n-k)\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}k - \frac{\pi}{4}(n-k)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}k + \frac{\pi}{4}(n-k)\right)\right].$$

Simplificando los argumentos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}k - \frac{\pi}{4}(n-k)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(2k-n)\right),$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}k + \frac{\pi}{4}(n-k)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

Y por lo tanto:

$$y[n] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}(2k-n)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right].$$

d) Calcule la energía total y la potencia media de $x[n]$, e indique si está definida en energía o en potencia.

- **Energía total:**

  La energía de $x[n]$ está dada por:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \infty.$$

- **Potencia media:**

  La potencia promedio de $x[n]$ es:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

  Como $x[n]$ es periódica con periodo $N = 8$, la potencia promedio es:

$$P_x = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \frac{1}{8}\cdot 4 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $x[n]$ es una **señal definida en potencia**.

e) Indique si la señal $z[n] = x[n] + x^*[-n]$ es periódica y, en su caso, obtenga el valor de su periodo.

- **Periodicidad de $x[n]$:**

  $x[n]$ es periódica con periodo $N = 8$.

- **Periodicidad de $x^*[-n]$:**

  $x^*[-n]$ es el conjungado de $x[-n]$. Como $x[n]$ es real y periódica con $N = 8, x^*[-n]$ también es periódica con $N = 8$.

- **Periodicidad de $z[n]$:**

  La suma de dos señales periódica con el mismo periodo $N = 8$ es también periódica con $N = 8$.

Por lo tanto, $z[n]$ es periódica con periodo:

$$N_z = 8.$$

21) Sean la señal de entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LTI las siguientes:

$$x(t) = \sin(3\pi t), \qquad h(t) = \prod\left(\frac{t-2}{6}\right)$$

a) Razone si el sistema tiene memoria, si es causal y si es estable.

El sistema está definido por su respuesta al impulso $h(t) = \prod\left(\frac{t-2}{6}\right)$, que es un pulso rectangular centrado en $t = 2$ con un ancho de 6 (no nulo para $t \in [-1, 5]$).

1) Memoria:

- Un sistema tiene memoria si su salida depende de valores pasados o futuros de la entrada.
- En este caso, $h(t)$ depende de t, lo que implica que el sistma tiene memoria.

2) Causalidad:

- Un sistema es causal si su salida en un instante t depende de valores presentes o pasados de la entrada.
- Como $h(t)$ es no nula para $t \in [-1, 5]$, el sistema **no es causal**, ya que depende de valores futuros de la entrada (por ejemplo, $t > 0$).

3) Estabilidad:

- Un sistema es estable si su respuesta al impulso $h(t)$ es absolutamente integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, \mathrm{d}t < \infty.$$

- En este caso, $h(t)$ es un pulso rectangular con un ancho finito de 6 y una amplitud constante de 1. Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{5} 1\, \mathrm{d}t = 6 < \infty.$$

El sistema **es estable**.

b) Calcule analíticamente la señal de salida.

La salida del sistema $y(t)$ se obtiene mediante la convolución de $x(t)$ con $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Señales involucradas:

- $x(t) = \sin(3\pi t)$, una señal sinusoidal con frecuencia angular $\omega = 3\pi$.
- $h(t) = \prod\left(\frac{t-2}{6}\right)$, un pulso rectangular centrado en $t = 2$ con ancho 6 (no nulo para $t \in [-1, 5]$).

Soporte de la convolución:

El soporte de $h(t)$ es $t \in [-1, 5]$, y $x(t)$ es no nula para todo t. Por lo tanto, el soporte de $y(t)$ será $t \in [-1, 5]$.

Cálculo de la convolución:

Sustituyendo las expresiones de $x(t)$ y $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(3\pi\tau) \prod \left(\frac{t - \tau - 2}{6} \right) \mathrm{d}\tau.$$

El pulso rectangular $\prod \left(\frac{t - \tau - 2}{6} \right)$ es no nulo solo para $t - \tau \in [-3, 3]$, es decir, $\tau \in [t - 3, t + 3]$. Por lo tanto, la integral se reduce a:

$$y(t) = \int_{t-3}^{t+3} \sin(3\pi\tau)\mathrm{d}\tau = \left[-\frac{\cos(3\pi\tau)}{3\pi} \right]_{t-3}^{t+3} = -\frac{1}{3\pi}[\cos(3\pi(t+3)) - \cos(3\pi(t-3))].$$

Usando la identidad de la diferencia de cosenos:

$$\cos(A) - \cos(B) = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Sustituyendo $A = 3\pi(t+3)$ y $B = 3\pi(t-3)$:

$$A + B = 3\pi(t+3) + 3\pi(t-3) = 6\pi t, \quad A - B = 3\pi(t+3) - 3\pi(t-3) = 18\pi.$$

Por lo tanto:

$$y(t) = -\frac{1}{3\pi}\left[-2\sin\left(\frac{6\pi t}{2}\right)\sin\left(\frac{18\pi}{2}\right) \right] = \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t)\cancelto{0}{\sin(9\pi)} = 0.$$

c) Calcule la energía total y la potencia media de $x(t)$, e indique si está definida en energía o en potencia.

Energía total:

La energía de $x(t)$ está dada por:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(3\pi t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(6\pi t)}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \, \mathrm{d}t - \cancelto{0}{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(6\pi t) \, \mathrm{d}t} = \infty.$$

Potencia media:

La potencia promedio de $x(t)$ es:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Sustituyendo $x(t) = \sin(3\pi t)$:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \sin^2(3\pi t) \, \mathrm{d}t.$$

Usamos nuevamente $\sin^2(A) = \frac{1 - \cos(2A)}{2}$:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}(T - (-T)) = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{4T} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $x(t)$ es una **señal definida en potencia.**

d) A partir del resultado del apartado (b), y aplicando únicamente propiedades de la convolución, obtenga la señal de salida producida por la entrada $z(t) = \cos(3\pi t)$.

Usamos la propiedad de la convolución para señales sinsusoidales. Sabemos que:

$$x(t)\sin(3\pi t), \quad z(t) = \cos(3\pi t).$$

La convolución de $z(t)$ con $h(t)$ será similar a la de $x(t)$, pero con un desfase. Como la salida para $x(t)$ fue $y(t) = 0$, la salida para $z(t)$ también será:

$$y_z(t) = 0.$$

22) Sea

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 3k).$$

Demuestre que $y(t) = Ae^{-t}$ para $0 \leq t < 3$, y determine el valor de A.

Paso 1: Propiedad de la convolución con un tren de impulsos

La convolución de una función $f(t)$ con un tren de impulsos $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - Tk)$ tiene una propiedad importante:

$$f(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - Tk) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - Tk).$$

En este caso, $f(t) = e^{-t}u(t)$ y $T = 3$. Por lo tanto, la convolución se convierte en:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3k)}u(t - 3k).$$

Paso 2: Análisis del escalón unitario $u(t - 3k)$

El término $u(t - 3k)$ asegura que cada término de la suma es no nulo solo cuando $t - 3k \geq 0$, es decir, $t \geq 3k$. Esto significa que el término $e^{-(t-3k)}$ contribuye a la suma solo si $t \geq 3k$.

Por lo tanto, la suma se reduce a los valores de k tales que $3k \leq t$. Esto implica que solo un número finito de términos contribuyen a la suma para un valor dado de t.

Paso 3: Determinación de $y(t)$ en el intervalo $0 \leq t < 3$.

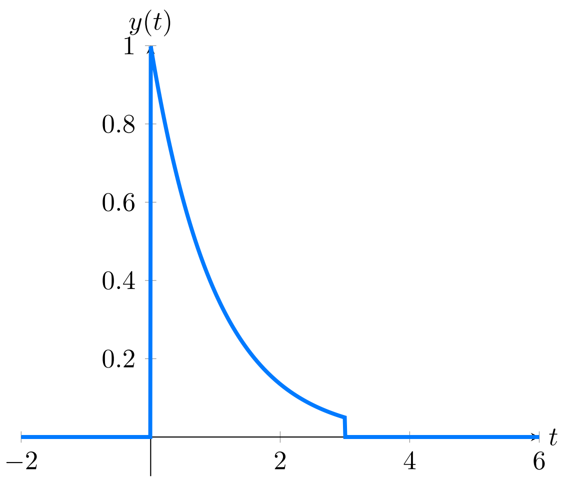
En el intervalo $0 \leq t < 3$, el único valor de k que satisface $3k \leq t$ es $k = 0$, ya que para $k = -1, 3k, = -3$, y para $k = 1, 3k = 3$, que excede el intervalo.

Por lo tanto, en este intervalo, la suma se reduce a un solo término:

$$y(t) = e^{-(t-3\cdot 0)}u(t - 3 \cdot 0) = e^{-t}u(t)$$

Dado que $u(t) = 1$ para $t \geq 0$, tenemos:

$$y(t) = e^{-t}, \text{ para } 0 \leq t < 3.$$



Paso 4: Determinación del valor de A

Comparando con la forma dada $y(t) = Ae^{-t}$ para $0 \leq t < 3$, se concluye que:

$$A = 1.$$

23) Sea un sistema discreto S_1 con respuesta al impulso $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$.

a) Determine el número real A tal que $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$.

El sistema S_1 tiene una respuesta al impulso:

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n],$$

donde $u[n]$ es la función escalón unitario, que es igual a 1 para $n \geq 0$ y 0 para $n < 0$.

Queremos encontrar un valor de A tal que:

$$h[n] - Ah[n-1] = \delta[n],$$

donde $\delta[n]$ es de la delta de Dirac discreta, que es igual a 1 para $n = 0$ y 0 para $n \neq 0$.

Sustitución de $h[n]$ y $h[n-1]$:

Sustituyendo $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$ y $h[n-1] = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1]$, tenemos:

$$h[n] - Ah[n-1] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1].$$

- **Caso $n = 0$:**

  Para $n = 0, u[0] = 1$ y $u[-1] = 0$. Por lo tanto:

  $$h[0] - Ah[-1] = \left(\frac{1}{5}\right)^0 - A \cdot 0 = 1.$$

  Esto coincide con $\delta[0] = 1$.

- **Caso $n > 0$:**

  Para $n > 0, u[n] = 1$ y $u[n-1] = 1$. Sustituyendo:

  $$h[n] - Ah[n-1] = \left(\frac{1}{5}\right)^n - A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{5} - A\right).$$

  Para que esto sea igual a $\delta[n]$, que es 0 para $n > 0$, necesitamos que:

  $$\frac{1}{5} - A = 0 \longrightarrow A = \frac{1}{5}.$$

b) A partir del resultado del apartado anterior, determine la respuesta al impulso del sistema inverso de S_1.

El sistema inversor de S_1 es aquel cuya respuesta al impulso $h_{\text{inv}}[n]$ satisface:

$$h_{\text{inv}}[n] * h[n] = \delta[n],$$

donde $*$ denota la convolución discreta.

Relación obtenida en el apartado (a):

Del apartado (a), sabemos que:

$$h[n] - \frac{1}{5}h[n-1] = \delta[n].$$

Esto se puede interpretar como una ecuación en diferencias que describe el sistema inverso. Reescribimos la ecuación como:

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{5}h[n-1].$$

Esta ecuación describe un sistema recursivo, y su solución es la respuesta al impulso del sistema inverso.

Forma explícita de $h_{\text{inv}}[n]$:

La ecuación en diferencias se puede resolver iterativamente. Para $n = 0$, tenemos:

$$h[0] = \delta[0] = 1.$$

Para $n = 1$, tenemos:

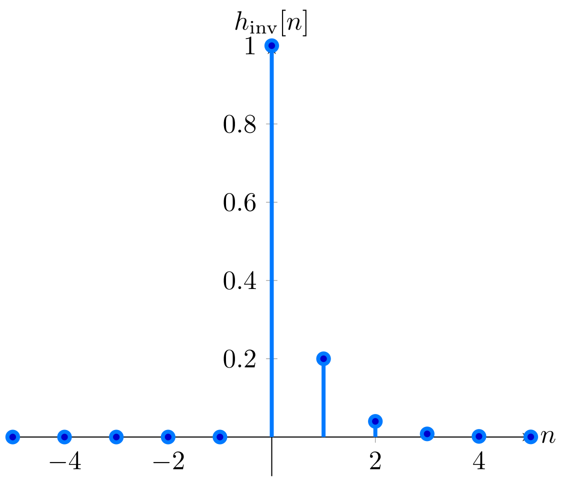
$$h[1] = \frac{1}{5}h[0] = \frac{1}{5}$$

Para $n = 2$, tenemos:

$$h[2] = \frac{1}{5}h[1] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

En general, para $n \geq 0$:

$$h_{\text{inv}}[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n].$$



24) Sea la conexión en cascada de dos sistemas S_1 y S_2 LTI causal tal que:
En S_1 la relación entre entrada $x[n]$ y salida $w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n]$.
En S_2 la relación entre entrada $w[n]$ y salida $y[n]$ es $y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n]$.
Si la ecuación en diferencias que relaciona $y[n]$ y $x[n]$ es

$$y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$$

a) Determine α y β.

Se tienen los dos sistemas en cascada:

- En S_1 la relación es

$$w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n].$$

- En S_2 la relación es

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n].$$

Como se conectan en cascada, la salida de S_1 alimenta a S_2. Entonces, sustituyendo la salida de S_1 en la ecuación de S_2 tenemos:

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta\left(x[n] + \frac{1}{2}w[n-1]\right).$$

Ahora, notamos que la misma relación de S_2 aplicada en el instante $n-1$ da:

$$y[n-1] = \alpha y[n-2] + \beta w[n-1],$$

de donde se despeja:

$$w[n-1] = \frac{1}{\beta}\left(y[n-1] - \alpha y[n-2]\right).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de $y[n]$ se tiene:

$$\begin{aligned} y[n] &= \alpha y[n-1] + \beta x[n] + \frac{\beta}{2} w[n-1] \\ &= \alpha y[n-1] + \beta x[n] + \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{\beta}\left(y[n-1] - \alpha y[n-2]\right) \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) y[n-1] - \frac{\alpha}{2} y[n-2] + \beta x[n]. \end{aligned}$$

Pero se nos dice que la ecuación de diferencias global es:

$$y[n] = \frac{3}{4} y[n-1] - \frac{1}{8} y[n-2] + x[n].$$

Al equiparar coeficientes obtenemos:

- Para $y[n-1]$:
$$\alpha + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \longrightarrow \alpha = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
- Para $y[n-2]$:
$$-\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{8} \longrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \quad \text{(confirmado)}.$$
- Para $x[n]$:
$$\beta = 1.$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \beta = 1.}$$

b) Obtenga la respuesta al impulso de la conexión en cascada de S_1 y S_2.

Primero se obtiene la respuesta al impulso de cada sistema individual:

- **Sistema S_1:**

  La ecuación de diferencias es
$$w[n] - \frac{1}{2} w[n-1] = x[n].$$
  Con entrada impulso $x[n] = \delta[n]$ y siendo el sistema causal, la respuesta al impulso es:
$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$
  donde $u[n]$ es la función escalón unitario.

- **Sistema S_2:**

  Con $\alpha = \frac{1}{4}$ y $\beta = 1$, la ecuación es
$$y[n] - \frac{1}{4} y[n-1] = w[n].$$

Para entrada impulso $w[n] = \delta[n]$ se tiene la respuesta:

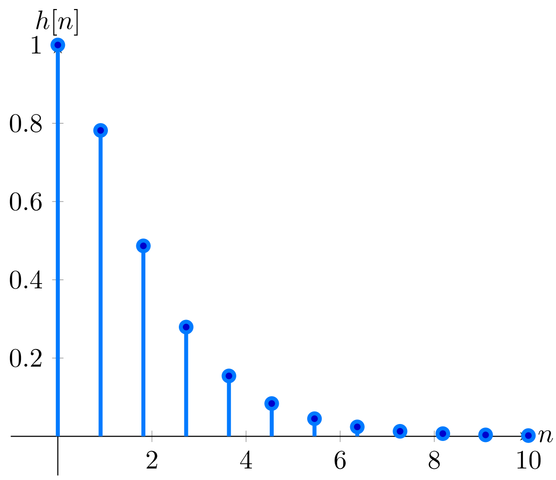
$$h_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Al conectar en cascada, la respuesta total es la convolución de las respuestas individuales:

$$\begin{aligned} h[n] = h_1[n] * h_2[n] &= \sum_{k=0}^{n} h_1[k]h_2[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} 2^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(2^{n+1} - 1\right). \end{aligned}$$

Alternativamente, se puede escribir la respuesta al impulso en forma factorizada:

$$\boxed{h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0.}$$



25) La salida de un sistema viene dada por $y[n] = x[2+n] + x[2-n]$.

a) Indique razonadamente si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y/o linealidad.

Analicemos las propiedades:

1) Memoria

Un sistema tiene memoria si su salida depende de valores pasados o futuros de la entrada. En este caso, $y[n]$ depende de $x[2+n]$ (futuro) y $x[2-n]$ (pasado). Por lo tanto, el sistema **tiene memoria**.

2) Causalidad

Un sistema es causal si su salida en el instante n depende únicamente de valores presentes o pasados de la entrada. Aquí, $y[n]$ depende de $x[2+n]$, que corresponde a valores futuros de la entrada. Por lo tanto, el sistema **no es causal**.

3) Estabilidad

Un sistema es estable si, para cualquier entrada acotada, la salida también es acotada. Si $x[n]$ es acotada, entonces $x[2+n]$ y $x[2-n]$ también son acotadas, y su suma también será acotada. Por lo tanto, el sistema **es estable**.

4) Invarianza en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la entrada produce el mismo desplazamiento en la salida. Supongamos que desplazamos la entrada $x[n]$ por k, es decir, consideramos $x_k[n] = x[n-k]$. La salida correspondiente sería:

$$y_k[n] = x_k[2+n] + x_k[2-n] = x[2+n-k] + x[2-n-k].$$

Comparando con la salida original $y[n] = x[2+n] + x[2-n]$, vemos que el desplazamiento no se refleja de manera uniforme en la salida. Por lo tanto, el sistema **no es invariante en el tiempo**.

5) Linealidad

Un sistema es lienal si satisface el principio de superposición. Supongamos que las entradas son $x_1[n]$ y $x_2[n]$, con salidas $y_1[n]$ y $y_2[n]$, respectivamente. Si la entrada es una combinación lineal $ax_1[n] + bx_2[n]$, la salida será:

$$y[n] = ax_1[2+n] + ax_1[2-n] + bx_2[2+n] + bx_2[2-n].$$

Esto es equivalente a $ay_1[n] + by_2[n]$. Por lo tanto, el sistema **es lineal.**

b) Considere la señal $x[n] = \bigwedge\left(\frac{n}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{n-6}{3}\right)$. Obtenga y represente la parte par $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

La señal dada es:

$$x[n] = \bigwedge\left(\frac{n}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{n-6}{3}\right),$$

donde $\bigwedge(x)$ es el pulso triangular definido como:

$$\bigwedge(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Parte par de una señal

La parte par de una señal $x[n]$ se define como:

$$x_{\text{par}}[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}.$$

Sustituyendo $x[n]$ en esta fórmula:

$$x_{\text{par}}[n] = \frac{\bigwedge\left(\frac{n}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{n-6}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{-n}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{-n-6}{3}\right)}{2}.$$

Ahora evaluamos cada término:

- $\bigwedge\left(\frac{-n}{3}\right) = \bigwedge\left(\frac{n}{3}\right)$, ya que el pulso triangular es par.
- $\bigwedge\left(\frac{-n-4}{3}\right) = \left(\frac{-(n+6)}{3}\right) = \bigwedge\left(\frac{n+6}{3}\right)$, ya que el pulso traingular también es par.

Por lo tanto:

$$x_{\text{par}}[n] = \frac{\bigwedge\left(\frac{n}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{n-6}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{n}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{n+6}{3}\right)}{2} = \bigwedge\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{\bigwedge\left(\frac{n-6}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{n+6}{3}\right)}{2}.$$

Señal definida en energía o potencia

Para determinar si la señal está definida en energía o en potencia, calculamos la energía total:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2.$$

Dado que $\bigwedge(x)$ tiene soporte finito, $x[n]$ también tiene soporte finito, lo que implica que la energía es finita. Por lo tanto, $x[n]$ es una señal **definida en energía**.

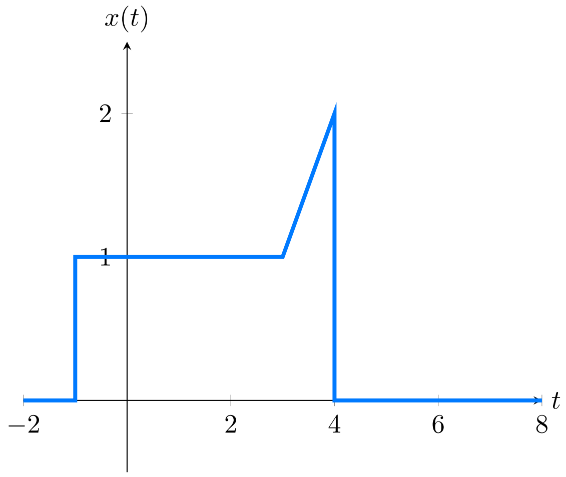
c) Realice la convolución discreta $x_1[n] * x_2[n]$, siendo

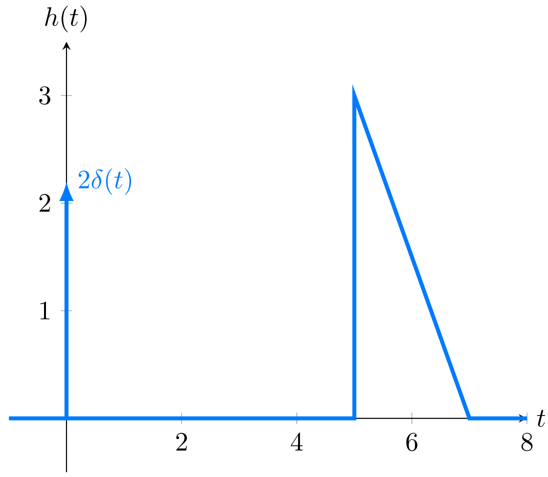
$$x_1[n] = \prod\left(\frac{n-6}{13}\right) + u[n-13]$$
$$x_2[n] = \bigwedge\left(\frac{n-3}{5}\right).$$

26) Se pretende filtrar la señal $x(t)$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$.

$$x(t) = \left(1 + \bigwedge\left(\frac{t-4}{1}\right)\right)\prod\left(\frac{t-1.5}{5}\right)$$
$$h(t) = \frac{9}{2}\bigwedge\left(\frac{t-4}{3}\right)u(t-5) + 2\delta(t)$$

a) Represente detalladamente las señales $x(t)$ y $h(t)$.





b) Indique razonadamente si el sistema definido por $h(t)$ cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad y/o invarianza.

Considerando $h(t) = \frac{9}{2}\bigwedge\left(\frac{t-4}{3}\right)u(t-5) + 2\delta(t)$, se pueden señalar las siguientes propiedades:

- **Memoria:**

  Un sistema es *sin memoria* si la salida en cada instante depende únicamente de la entrada en ese instante. En los sistemas LTI, esto ocurre solmanete si $h(t) = K\delta(t)$ (un escalamiento instantáneo). EN este caso, al existir además la componente continua (la parte triangular para $t \geq 5$), la salida depende de valores previos o posteriores de la entrada. Por ello, el sistema **tiene memoria**.

- **Causalidad:**

  Un sistema causal requiere que $h(t) = 0$ para $t < 0$. Aquí:

  - El término $2\delta(t)$ tiene soporte en $t = 0$.
  - La función $u(t-5)$ obliga a que el pulso triangular sea 0 para $t < 5$. Por lo tanto, $h(t) = 0$ para $t < 0$ y el sistema **es causal**.

- **Estabilidad:**

  La estabilidad exige que la integral del valor absoluto de la respuesta al impulso sea finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

La delta aporta una integral igual a 2, y la parte triangular tiene soporte acotado ($t \in [5,7]$) y está escalada por $\frac{9}{2}$, de modo que su integral es finita. Por ello, el sistema **es estable**.

- **Invarianza en el tiempo:**

  Dado que la respuesta al impulso $h(t)$ define al sistema LTI, éste es, por construcción, **invariante en el timepo**.

c) Calcule de forma analítica la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$. (Nota: puede hacer uso de las propiedades de la convolución).

Se desea calcular

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Debido a la linealidad de la convolución y a la estructura de $h(t)$, escribimos

$$y(t) = x(t) * [2 + d(t)] + x(t) * \left[\frac{9}{2}\bigwedge\left(\frac{t-4}{3}\right)u(t-5)\right] = 2x(t) + \frac{9}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\bigwedge\left(\frac{t-\tau-4}{3}\right)u(t-\tau-5)\mathrm{d}\tau.$$

Observaciones para simplificar la integral:

- El escalón $u(t-\tau-5)$ exige que $t-\tau \geq 5$, es decir, $\tau \leq t-5$.
- La función $\bigwedge\left(\frac{t-\tau-4}{3}\right)$ es diferente de cero únicamente cuando

$$\left|\frac{t-\tau-4}{3}\right| \leq 1 \longrightarrow t-\tau \in [4,7].$$

- Combinando los dos puntos anteriores se tiene que el integrando es no nulo cuando:

$$t-\tau \in [5,7] \longrightarrow \tau \in [t-7, t-5].$$

- Además, recordemos que $x(\tau)$ es no nula únicamente en $\tau \in [-1,4]$.

Por lo tanto, el intervalo efectivo de integración es

$$\delta \in \left[\max\{-1, t-7\}, \min\{4, t-5\}\right].$$

En este intervalo (donde además se cumple que $t-\tau \in [5,7]$), se tiene que

$$\bigwedge\left(\frac{t-\tau-4}{3}\right) = 1 - \frac{t-\tau-4}{3}.$$

Entonces la convolución se puede escribir de forma compacta como

$$\boxed{y(t) = 2x(t) + \frac{9}{2}\int_{\max\{-1,t-7\}}^{\min\{4,t-5\}} x(\tau)\left[1 - \frac{t-\tau-4}{3}\right]\mathrm{d}\tau.}$$

La señal $x(t)$ se define como

$$x(t) = \left(1 + \bigwedge\left(\frac{t-4}{1}\right)\right)\prod\left(\frac{t-1.5}{5}\right).$$

Recordemos que el pulso rectangular

$$\prod\left(\frac{t-1.5}{5}\right)$$

toma el valor 1 cuando

$$\left|\frac{t-1.5}{5}\right| \leq \frac{1}{2} \longrightarrow |t-1.5| \leq 2.5 \longrightarrow t \in [1.5-2.5, 1.5+2.5] = [-1,4],$$

y 0 en otro caso.

La función triangular

$$\bigwedge\left(\frac{t-4}{1}\right)$$

tiene soporte cuando

$$\left|\frac{t-4}{1}\right| \leq 1 \longrightarrow t \in [4-1, 4+1] = [3, 5],$$

y se define como

$$\bigwedge\left(\frac{t-4}{1}\right) = \begin{cases} 1-|t-4|, & t \in [3,5] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, la parte de $x(t)$ que esté "dentro" del rectángulo (es decir, para $t \in [-1, 4]$) se tiene:

- Si t está fuera del intervalo $[3, 5]$ (es decir, para $t \in [-1, 3)$) el pulso triangular es 0 y entonces

$$x(t) = 1 + 0 = 1.$$

- Si $t \in [3, 4]$ (recordando que el rectángulo está definido solo hasta $t = 4$) el pulso triangular es no nulo y, usando que para estos t se tiene $|t-4| = 4-t$, se obtiene

$$x(t) = 1 + [1-(4-t)] = t-2.$$

En resumen:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1,3) \\ t-2, & t \in [3,4] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta expresión define completamente a $y(t)$, cuyo soporte se extiende (por las propiedades de la convolución) aproximadamente para $t \in [4, 11]$. En particular, para $t < 4$ la condición $\tau \leq t-5$ no es compatible con el soporte de $x(\tau)$ (ya que $t-5 < -1$) y por lo tanto el término de la integral se anula, de donde $y(t) = 2x(t)$ en esos instantes.

d) Calcule la energía y la potencia de $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

La energía de $x(t)$ se define como

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Como $x(t)$ es no nula únicamente en $t \in [-1, 4]$, se puede separar la integral en dos partes:

- Para $t \in [-1, 3]$ se tiene $x(t) = 1$, de modo que

$$\int_{-1}^{3} 1^2 \, \mathrm{d}t = 3-(-1) = 4.$$

- Para $t \in [3, 4]$ se tiene $x(t) = t-2$; por lo tanto

$$\int_{3}^{4} (t-2)^2 \, \mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{l} u = t-2 \\ \text{Si } t = 3 \longrightarrow t = 1 \\ \text{Si } t = 4 \longrightarrow t = 2 \end{array} \right\} = \int_{1}^{2} u^2 \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}.$$

En conjunto,

$$E_x = 4 + \frac{7}{3} = \frac{19}{3}.$$

La potencia media de $x(t)$ viene dada por

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{2T} = \frac{\frac{19}{3}}{\infty} = 0.$$

Por lo tanto, $x(t)$ es una **señal definida en energía**.

27) Considere un sistema LTI cuya señal de salida $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = \int_{1}^{\infty} 3e^{-(2+5j)\tau} x(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema LTI.

Recordemos que para un sistema LTI la salida se expresa como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

En el enunciado se tiene

$$y(t) = \int_{1}^{\infty} 3e^{-(2+5j)\tau} x(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

lo cual implica que la función $h(\tau)$ del sistema es:

$$h(\tau) = 3e^{-(2+5j)\tau} \quad \text{para } \tau \geq 1,$$

$$h(\tau) = 0 \text{ para } \tau < 1.$$

Utilizando la función escalón unitario $u(\cdot)$, podemos escribir de forma compacta:

$$\boxed{h(t) = 3e^{-(2+4j)t}u(t-1).}$$

b) Indique razonadamente si el sistema posee las propiedades de memoria, causalidad y/o estabilidad.

- **Memoria:**

  Un sistema es sin memoria cuando la salida en el tiempo t depende únicamente de $x(t)$. Dado que en la convolución la salida depende de $x(t-\tau)$ para $\tau \geq 1$, la salida depende de valores pasados de la entrada. Por lo tanto, el sistema tiene memoria.

- **Causalidad:**

  Para que un sistema sea causal es necesario que la respuesta al impulso sea nula para tiempos negativos, es decir, $h(t) = 0$ para $t < 0$. En nuestro caso, $h(t) = 0$ para $t < 1$, de modo que la salida en t depende únicamente de valores de entrada en tiempos anteriores. Así, el sistema es causal.

- **Estabilidad:**

  Un sistema es estable si:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t < \infty.$$

  Dado que

  $$|h(t)| = 3e^{-2t} \text{ para } t \geq 1,$$

  se tiene

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{1}^{\infty} 3e^{-2t} \, \mathrm{d}t = 3\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_1^{\infty} = \frac{3}{2}e^{-2} < \infty.$$

  Por lo tanto, el sistema es estable.

c) Calcule la señal de salida del sistema cuando la señal de entrada es un escalón unitario.

Sea $x(t) = u(t)$. Entonces a salida es:

$$y(t) = \int_1^{\infty} 3e^{-(2+5j)\tau} u(t-\tau) \mathrm{d}\tau.$$

La función $u(t-\tau)$ vale 1 cuando $t - \tau \geq 0$ (es decir, $\tau \leq t$) y 0 en caso contrario. Se distinguen dos casos:

- Para $t < 1$:

  Debido a que $\tau \geq 1$ en la integración y además $t < 1$ implica $\tau > t$, se tiene $u(t-\tau) = 0$ para todo τ en el intervalo de integración. Por ello,

$$y(t) = 0, \quad t < 1.$$

- Para $t \geq 1$:

  La variable de integración varía de $\tau = 1$ hasta $\tau = t$ (pues para $\tau > t$ se tiene $u(t-\tau) = 0$). Así,

$$y(t) = \int_1^t 3e^{-(2+5j)\tau} \mathrm{d}\tau = 3 \left[\frac{e^{-(2+5j)\tau}}{-(2+5j)} \right]_{\tau=1}^{\tau=t} = \frac{3}{2+5j} \left(e^{-(2+5j)} - e^{-(2+5j)t} \right).$$

Resumiendo:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \dfrac{3}{2+5j} \left(e^{-(2+5j)} - e^{-(2+5j)t} \right), & t \geq 1. \end{cases}}$$

d) Calcule la energía y potencia de la señal $y(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

Observamos primero el comportamiento de $y(t)$ cuando $t \to \infty$. Para $t \geq 1$,

$$y(t) = \frac{3}{2+5j} \left(e^{-(2+5j)} - e^{-(2+5j)t} \right).$$

Dado que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-(2+5j)t} = 0,$$

obtendremos

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{3}{2+5j} e^{-(2+5j)} = y_{\infty}.$$

El valor constante no es cero, lo que implica que la salida tiene una componente permanente.

- **Energía:**

  La energía de la señal es

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

  Debido a que para $t \geq T$ (con T suficientemente grande) $y(t)$ se aproxima a un valor constante distinto de cero, la integral diverge a infinito. Es decir,

$$E_y = \infty.$$

- **Potencia:**

  La potencia media se define mediante

$$P_y = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |y(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

  Como para t grande $y(t) \approx y_{\infty}$ (constante), la potencia resulta ser el cuadrado del módulo del valor asintótitco:

Primero, calculemos el módulo:

$$\left|\frac{3}{2+5j}\right| = \frac{3}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}},$$

y

$$\left|e^{-(2+5j)}\right| = e^{-2}.$$

De modo que

$$|y_\infty| = \frac{3}{\sqrt{29}}e^{-2}.$$

Por ello, la potencia es

$$P_y = |y_\infty|^2 = \left(\frac{3e^{-2}}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{9e^{-4}}{29}.$$

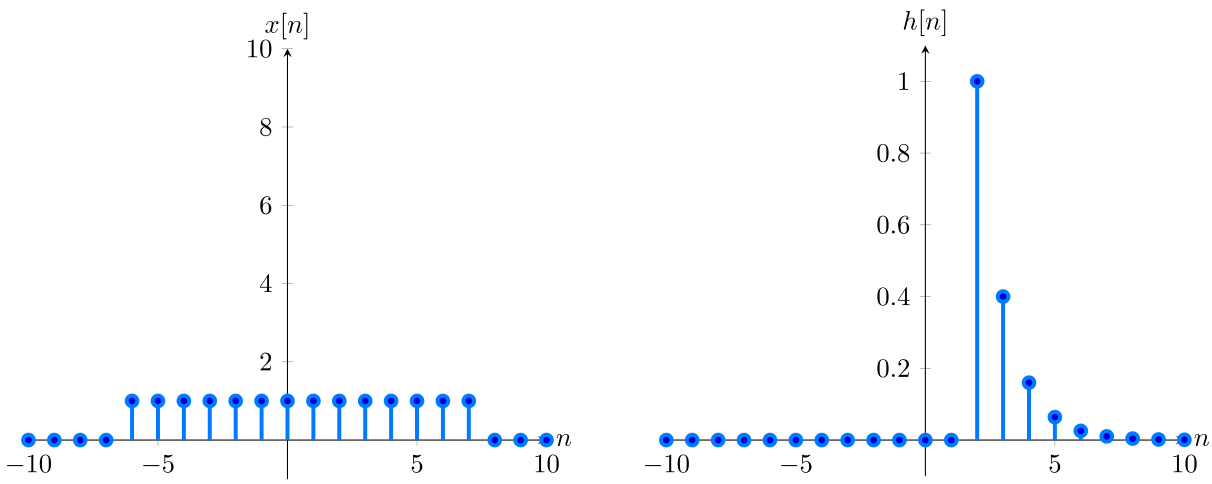
Dado que la energía es infinita y la potencia es finita, concluimos que la señal $y(t)$ es una señal defindia en potencia.

28) Se pretende filtrar la señal $x[n]$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n]$:

$$x[n] = (u[n+6] - u[n-7] + \delta[-n+7])u[-n+10]$$

$$h[n] = 0.4^{n-2}u[n-2]u[n]$$

a) Represente detalladamente $x[n]$ y $h[n]$.



b) Indique razonadamente si el sistema definido por $h[n]$ cumple las propiedades de memoria, causalidad y/o estabilidad.

El sistema LTI queda definido por su respuesta al impulso $h[n]$.

- **Memoria**
  - Un sistema no tiene memoria si la salida en un instante n depende solo de la entrada en ese mismo instante n.
  - Una convolución con $h[n]$ siempre aplica dependencia de muestras pasadas (o futuras), a menos que $h[n] = 0$ excepto en $n = 0$.
  - Dado que $h[n]$ es distinta de cero en muchos valores (para $n \geq 2$), el sistema claramente tiene memoria.
- **Causalidad**
  - Un sistema es causal si $h[n] = 0$ para $n < 0$.
  - Observando $h[n]$, vemos que, para $n < 2$, es 0. En particular, para $n < 0$, también es 0. Luego no depende de valores futuros de la entrada.

- Por lo tanto, **sí es causal**. (El hecho de que empiece en $n = 2$ no rompe la causalidad; basta con que sea 0 para $n < 0$).

- **Estabilidad**

  - Un sistema LTI es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

  - Aquí,

$$h[n] = \begin{cases} 0.4^{n-2}, & n \geq 2 \\ 0, & n < 2 \end{cases}$$

Es decir, para $n \geq 2$, $|h[n]| = 0.4^{n-2}$.

  - Se trata de una serie geométrica con $|0.4| < 1$. Es sabido que $\sum_{m=0}^{\infty} (0.4)^m$ converge.

  - Por lo tanto, la suma total es finita y el sistema **es estable**.

c) Utilizando la definición, calcule la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$.

Por definición,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Dado que $x[k] \neq 0$ solo para $-6 \leq k \leq 7$, la suma se reduce a:

$$y[n] = \sum_{k=-6}^{7} x[k]h[n-k],$$

y recordando que $x[k] = 1$ en ese rango de k, tenemos

$$y[n] = \sum_{k=-6}^{7} 1 \cdot h[n-k].$$

Mientras tanto, $h[m]$ es no nula solo si $m \geq 2$. En la expresión $h[n-k]$, esto significa que

$$n - k \geq 2 \implies k \leq n - 2.$$

Por ello, el término $h[n-k]$ será 0 si $k > n - 2$. En consecuencia, para cada n, la variable k se sitúa en

$$-6 \leq k \leq 7, \quad k \leq n - 2.$$

La parte entera de la suma quedará:

$$y[n] = \sum_{k=-6}^{\min(7,n-2)} h[n-k].$$

Sustituyendo la expresión de $h[m]$ para $m \geq 2$:

$$h[m] = 0.4^{m-2}, \quad m \geq 2.$$

Entonces,

$$h[n-k] = \begin{cases} 0.4^{(n-k)-2}, & \text{si } n - k \geq 2, \\ 0, & \text{si } n - k < 2. \end{cases}$$

La convolución, pues, se vuelve:

$$y[n] = \sum_{k=-6}^{\min(7,n-2)} 0.4^{(n-k)-2}.$$

Y, de paso, notamos que *para que exista al menos un término* en la suma, necesitamos $\min(7, n-2) \geq -6$, lo cual se cumple cuando $n - 2 \geq -6 \implies n \geq -4$.

d) Calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si es una señal definida en energía o en potencia.

La energía de una señal discreta se define como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2.$$

La potencia promedio se define como

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Energía de $x[n]$

Hemos visto que

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -6 \leq n \leq 7, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego $|x[n]|^2 = 1^2 = 1$ en $-6 \leq n \leq 7$, y 0 fuera de ese rango. El número de enteros entre -6 y 7 es 14. Entonces,

$$E = \sum_{n=-6}^{7} 1 = 14.$$

Potencia de $x[n]$

Para la potencia promedio:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Como $|x[n]|^2 = 1$ solo para $-6 \leq n \leq 7$ y 0 en otro caso, cuando N es suficientemente grande, la suma se convierte en la suma de 14 unos. Por lo tanto,

$$\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = 14 \text{ (para } N \geq 7).$$

Entonces

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{14}{2N+1} = 0.$$

La energía es finita y distinta de cero, y la potencia promedio es 0. Por definición, esto significa que $x[n]$ **es una señal definida en energía**.

29) Considere el siguiente diagrama de bloques de un sistema causal (figura 2).

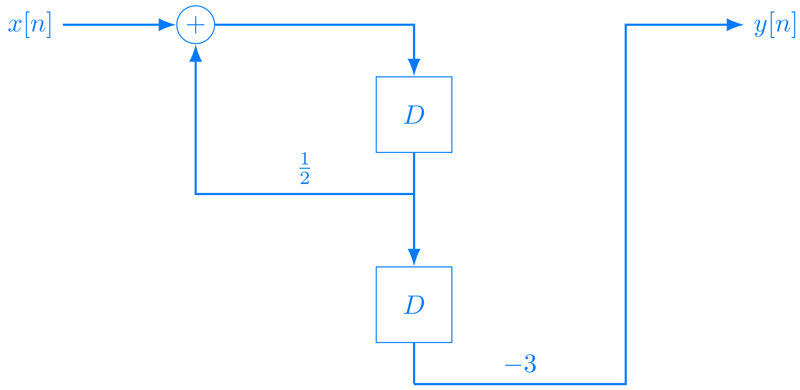


Figura 2

a) Obtenga la ecuación en diferencias con coeficientes constantes que relaciona la señal de entrada $x[n]$ con la señal de salida $y[n]$.

Del diagrama se observa que la salida $y[n]$ se forma sumando la entrada $x[n]$ con dos "ramas" de realimentación que introducen sendos retardos (cada bloque D corresponde a un retardo de 1 muestra) y factores escalares (en la figura aparecen los coeficientes $+\frac{1}{2}$ y -3). Al llevar esto a la forma estándar de ecuación en diferencias, uno obtiene:

$$\boxed{y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + 3y[n-2] = x[n].}$$

En otras palabras, la salida actual depende de la entrada actual y de dos salidas anteriores, con los coeficientes indicados.

b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema e indique razonadamente si se trata de un sistema FIR o IIR. Justifique si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad y/o estabilidad.

- **Respuesta al impulso**

  La respuesta al impulso $h[n] = \delta[n]$. De acuerdo con la ecuación en diferencias:

  $$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] + 3h[n-2] = \delta[n],$$

  con la condición causal de que $h[n] = 0$ para $n < 0$. Resolviendo este sistema (ya sea por métodos directos o por transformada Z) se obtiene una secuencia que generalmente **no** se anula después de un número finito de muestras, precisamente debido a la parte de realimentación $+3y[n-2]$. De hecho, los polos del sistema son las raíces de

  $$r^2 - \frac{1}{2}r + 3 = 0,$$

  las cuales resultan ser complejas con magnitud mayor que 1. Esto implica que $h[n]$ es de **duración finita** (y además crece exponencialmente).

  Por consiguiente:

  - El sistema es **IIR** porque su respuesta al impulso no se reduce a un número finito de muestras distintas de cero.

- **Memoria**

  Un sistema es *sin memoria* solamente si la salida en el instante n depende **exclusivamente** de la entrada en el mismo instante n. Aquí, en cambio, $y[n]$ depende de salidas pasadas ($y[n-1]$ y $y[n-2]$), así que **posee memoria**.

- **Causalidad**

  El sistema es **causal** si para toda n la salida depende solo de entradas (y salidas) en instantes presentes o pasados (no futuros). De la ecuación en diferencias se ve que $y[n]$ involucra $x[n], y[n-1], y[n-2]$ (todas en instantes $\leq n$), así que **sí** es causal.

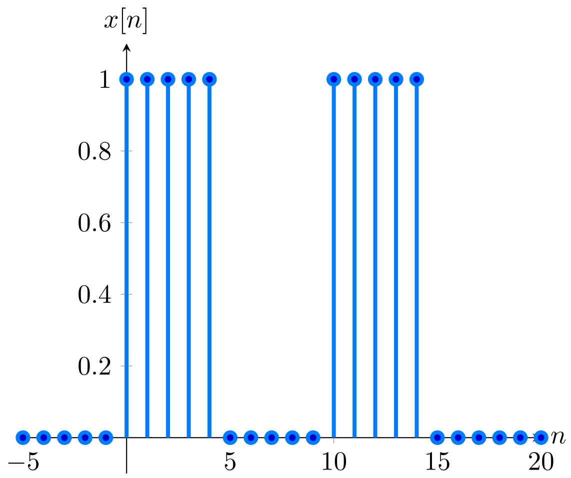
- **Estabilidad**

  Un sistema LTI es estable si su respuesta al impulso $h[n]$ es absolutamente sumable. En términos de polos, si alguna raíz de la ecuación característica tiene magnitud mayor o igual que 1, el sistema pierde estabilidad. Aquí las raíces del polinomio

$$r^2 - \frac{1}{2}r + 3 = 0$$

  tiene magnitud $\sqrt{3} \approx 1.732 > 1$. Por tanto, la magnitud de los polos es mayor que 1 y la suma de los valores absolutos de $h[n]$ diverge. El sistema es **inestable**.

c) Considere la señal de entrada $x[n] = \prod\left(\frac{n-2}{5}\right) + u[2n-20]u[-n+14]$. Represente la señal y calcule su energía total y potencia media.



Energía de $x[n]$

Por definición, la energía en tiempo discreto es

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2.$$

Como $x[n] = 1$ en 10 valores de n (cinco en $[0, 4]$ y cinco más en $[10, 14]$), y 0 en otro lado se obtiene

$$E = 10.$$

Potencia promedio

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{10}{2N+1} = 0.$$

d) Determine la señal de salida del sistema $y[n]$ cuando se introduce la señal $x[n]$ del apartado anterior como señal de entrada.

La salida se determina (en principio) resolviendo la misma ecuación en diferencias halladas en (a), pero con $x[n]$ dado por la suma de las dos "ventanas" recién descritas:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + 3y[n-2] = x[n],$$

con condiciones iniciales típicamente $y[n] = 0$ para $n < 0$ si asumimos causalidad "pura" (o se pueden indicar condiciones iniciales específicas, según el problema). **No** es necesario aquí detallar cada valor de $y[n]$, pero sí debe notarse que el sistema, al ser inestable (polos de magnitud mayor que 1), tenderá a generar términos crecientes. Incluso con una entrada "finita" de 10 muestras distintas de cero, la solución homogénea a partir de cada pulso puede tener término exponencial creciente.

En un sistema estable normal hubiéramos convolucionado $x[n]$ con $h[n]$ y obtenido una señal de duración mayor que la de $x[n]$ pero acotada. Sin embargo, dada la inestabilidad, la salida puede divergir a medida que avanza n.

En cualquier caso, **la forma explícita** de $y[n]$ proviene de:

- Resolver la ecuación en diferencias para $n \geq 0$ (o $-\infty$) usando que $x[n] = 1$ en los intervalos mencionados y 0 en otro caso.
- Sumar la solución homogénea (cuyos polos son $|r| > 1$) y la particular (que actúa mientras la entrada es no nula).

30) Considere el sistema descrito por la siguiente relación entre la entrada y la salida:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k-1]$$

a) Indique razonadamente si el anterior sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invertibilidad, linealidad y/o invarianza temporal.

- **Memoria:**

  El sistema tiene memoria, ya que la salida $y[n]$ depende de una suma de muestras de la entrada $x[\cdot]$ evaluadas en instantes anteriores (en particular, todos los $x[m]$ con $m \leq n-2$ después del cambio de variable que se verá más abajo). No se basa únicamente en el valor de $x[n]$ en el instante actual.

- **Causalidad:**

  El sistema es causal. Al realizar el cambio de variable $m = k - 1$ la expresión se puede escribir como

  $$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-2} x[m].$$

  Esto significa que para calcular $y[n]$ solo se utilizan valores de $x[m]$ para $m \leq n-2$; es decir, únicamente se requieren muestras del pasado (o al menos retrasadas respecto del instante de salida), lo que satisface la definición de causalidad.

- **Estabilidad:**

  Para que un sistema sea estable, la respuesta al impulso $h[n]$, debe ser absolutamente sumable. En este caso, al ver que la respuesta al impulso es

  $$h[n] = u[n-2],$$

  se tiene

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=2}^{\infty} 1,$$

  lo que diverge. Además, si se alimenta el sistema con una entrada acotada (por ejemplo, $x[n] = 1$ para todo n), la salida será una suma infinita de unos, lo que también diverge. Por ello, el sistema **no es estable**.

- **Invertibilidad:**

  Se puede recuperar la entrada a partir de la salida. En efecto, escribiendo la salida en la forma

  $$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-2} x[m],$$

se observa que al tomar la diferencia

$$y[n+1] - y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] - \sum_{m=-\infty}^{n-2} x[m] = x[n-1],$$

se obtiene la muestra $x[n-1]$. Por lo tanto, salvo la posible determinación de la constante de integración, el sistema es **invertible**.

- **Linealidad:**

  El sistema está definido mediante una suma lineal de los valores de $x[\cdot]$. Si se aplica la propiedad de aditividad y homogeneidad, resulta inmediato comprobar que se cumple la superposición. Es decir, para entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ y constantes a y b:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-2} [ax_1[m] + bx_2[m]] = a \sum_{m=-\infty}^{n-2} x_1[m] + b \sum_{m=-\infty}^{n-2} x_2[m],$$

  lo que prueba la **linealidad**.

- **Invarianza temporal:**

  Se puede demostrar que el sistema es invariante en el tiempo. Al realizar el cambio de variable $m = k-1$, la expresión queda como

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-2} x[m],$$

  la cual se puede interpretar como la convolución de $x[n]$ con la función

$$h[n] = u[n-2],$$

  donde $u[n]$ es la función escalón unitario. Dado que la convolución con una función $h[n]$ fija garantiza la invarianza temporal, el sistema es **invariante en el tiempo**.

b) ¿Se trata de un sistema LTI? En caso afirmativo, obtenga y represente su respuesta al impulso $h[n]$.

Hemos observado que el sistema es lineal e invariante en el tiempo. Además, al realizar el cambio de variable $m = k-1$ se reescribe la relación como

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-2} x[m].$$

Esta expresión corresponde a la convolución

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m],$$

donde la respuesta al impulso $h[n]$ debe satisfacer

$$h[n-m] = u[n-m-2],$$

de forma que para cualquier n se tiene

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-2} x[m].$$

Para corroborarlo, se puede calcular la salida del sistema ante una entrada impulso. Sea $x[n] = \delta[n]$. Entonces:

$$h[n] = y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} \delta[k-1].$$

La única contribución ocurre cuando $k-1=0$ (es decir, $k=1$), que estará incluida en la suma siempre que

$1 \leq n-1$ (o sea, $n \geq 2$). Por ello,

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 2, \\ 0, & n < 2. \end{cases}$$

De lo anterior se concluye que el sistema es **LTI** y que su respuesta al impulso es

$$h[n] = u[n-2].$$

c) Utiliza la definición de convolución, obtenga la salida del sistema del enunciado, $y[n]$, cuando a su entrada se tiene la señal $x[n] = (n+1)u[n]$.

Dada la señal de entrada

$$x[n] = (n+1)u[n],$$

donde $u[n]$ es la función escalón unitario, y utilizando la representación del sistema como convolución con $h[n] = u[n-2]$, la salida es

$$y[n] = (x*h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]u[n-m-2].$$

Dado que $x[m] = 0$ para $m < 0$, la suma se reduce a

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-2} x[m] = \sum_{m=0}^{n-2} (m+1),$$

con la condición de que la suma tenga sentido únicamente cuando $n-2 \geq 0$, es decir, para $n \geq 2$. Para $n < 2$ la suma es nula y, por lo tanto, $y[n] = 0$.

La suma

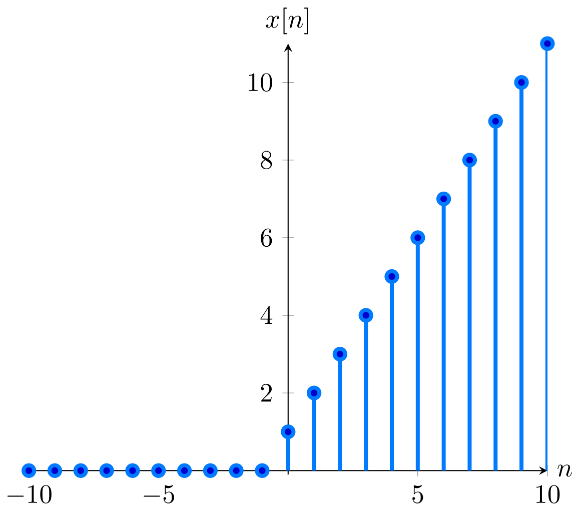
$$\sum_{m=0}^{n-2} (m+1)$$

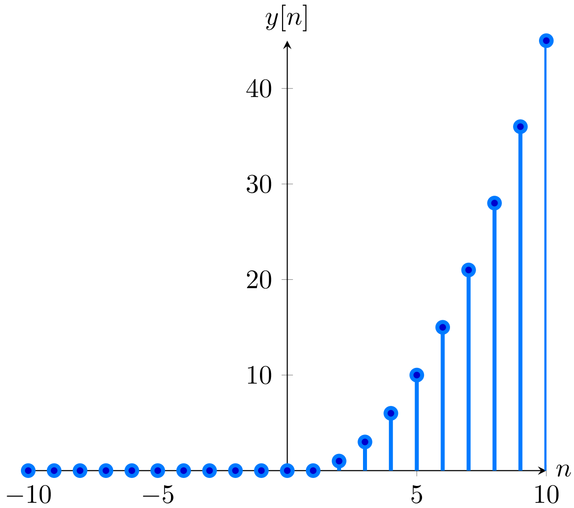
es la suma de los primeros $n-1$ números naturales (empezando en 1), y se conoce que

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Por lo tanto, la respuesta en el tiempo es

$$y[n] = \frac{n(n-1)}{2} u[n-2]$$





d) Calcule la energía total y la potencia media de la señal $x[n]$ del apartado anterior, indicando de qué tipo de señal se trata según estos valores.

La **energía total** de un señal discreta se define como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 = +\infty.$$

La potencia media se define por

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} (n+1)^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{N^3}{3}}{2N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N^2}{6} = \infty.$$

La señal **no esta definida en energía ni en potencia**.

31) Considere el sistema LTI discreto consistente en la conexión en serie de los subsistemas LTI descritos por

$$h_1[n] = n\delta[n-1]$$
$$h_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n+1]$$

Obtenga la salida del sistema $y[n]$ cuando la entrada es

$$x[n] = (-1)^n (u[2-n] - u[-n-1])$$

32) Represente el diagrama de bloques en forma canónica del sistema dado por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 8y(t) = x(t) - \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

Paso 1: Respuesta al impulso equivalente del sistema

La respuesta al impulso equivalente del sistema en serie es la convolución de $h_1[n]$ y $h_2[n]$:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] h_2[n-k].$$

Respuesta al impulso del primer subsistema $(h_1[n])$**:**

$$h_1[n] = n\delta[n-1].$$

Esto significa que $h_1[n]$ es cero para todos los valores de n excepto en $n=1$, donde toma el valor $h_1[1] = 1$. Por lo tanto:

$$h_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Respuesta al impulso del segundo subsistema $(h_2[n])$**:**

$$h_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n+1].$$

La función escalón $u[n+1]$ es igual a 1 para $n \geq -1$ y 0 para $n < -1$. Por lo tanto, $h_2[n]$ es:

$$h_2[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, & n \geq -1, \\ 0, & n < -1. \end{cases}$$

Convolución de $h_1[n]$ y $h_2[n]$:

Dado que $h_1[n]$ es no nula solo en $n = 1$, la convolución es simplificada a:

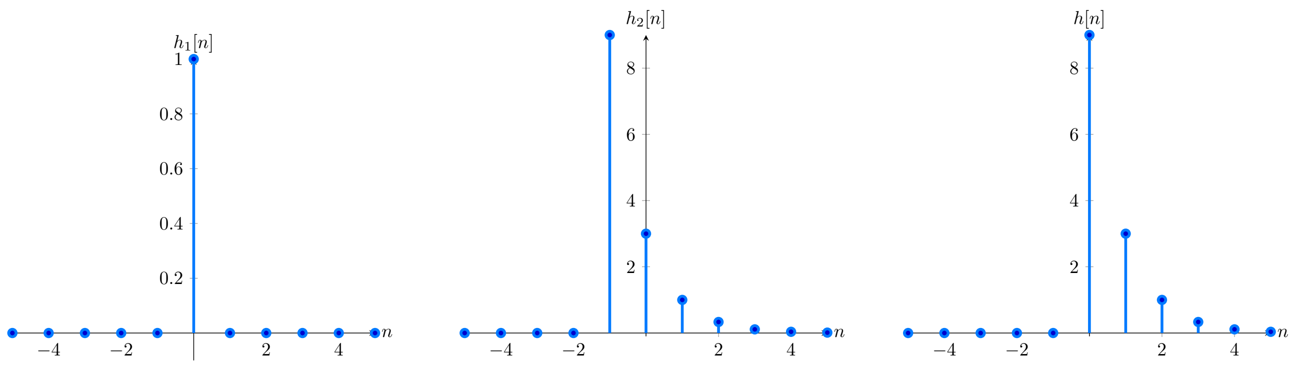
$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k] = h_1[1]h_2[n-1].$$

Como $h_1[1] = 1$, se tiene:

$$h[n] = h_2[n-1].$$

Sustituyendo $h_2[n-1]$:

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)-1} u[(n-1)+1] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n].$$



Paso 2: Salida del sistema

La salida del sistema $y[n]$ se obtiene convolucionando la entrada $x[n]$ con la respuesta al impulso equivalente $h[n]$:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Entrada $x[n]$:

La entrada está dada por:

$$x[n] = (-1)^n(u[2-n] - u[-n-1]).$$

Analicemos esta expresión:

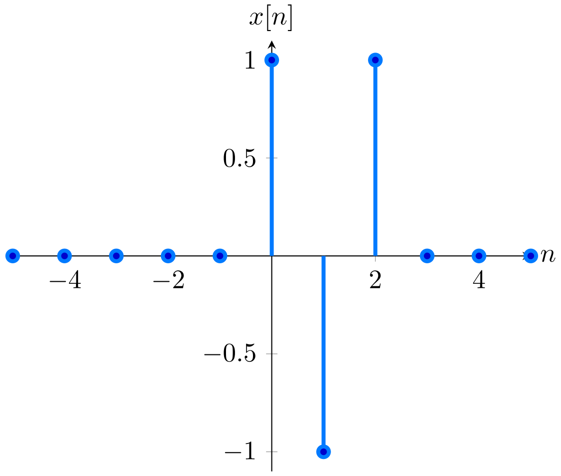
- $u[2-n]$: Es igual a 1 para $n \leq 2$ y 0 para $n > 2$.
- $u[-n-1]$: Es igual a 1 para $n \leq -1$ y 0 para $n > -1$.

Por lo tanto, $x[n]$ es no nula en el intervalo $-1 < n \leq 2$. En este intervalo:

$$x[n] = (-1)^n.$$

En resumen:

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^n, & -1 < n \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Convolución $y[n]$:

Sustituyendo $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n]$ y $x[n]$ en la convolución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Dado que $x[k]$ es no nula solo para $-1 < k \leq 2$, la suma se reduce a:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{2} x[k]h[n-k].$$

Sustituendo $h[n-k] = \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-k)-2} u[n-k]$, la convolución se convierte en:

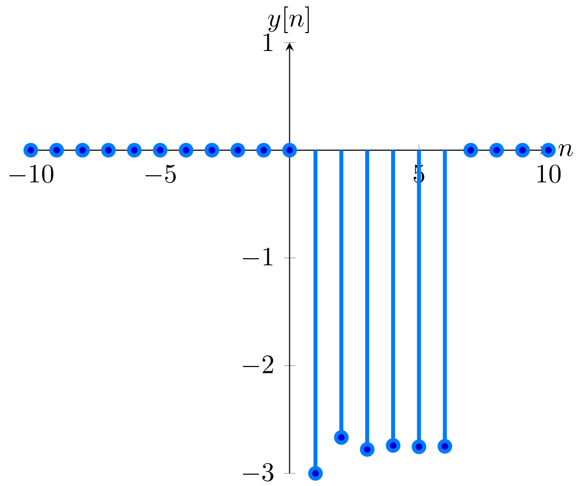
$$y[n] = \sum_{k=0}^{2} x[k] \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-2} u[n-k].$$

El término $u[n-k]$ asegura que solo se suman términos para los cuales $n \geq k$. Por lo tanto, la suma final es:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\min(2,n)} x[k] \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-2}.$$

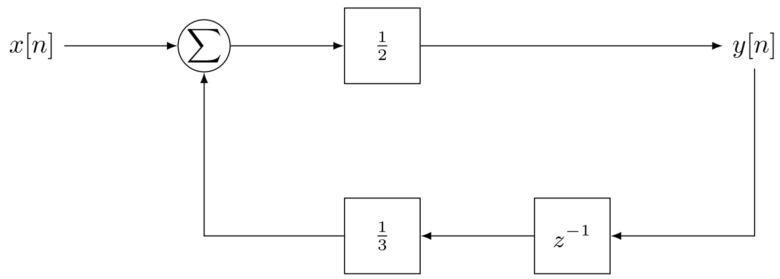
Sustituyendo $x[k] = (-1)^k$ para $k = 0, 1, 2$, se obtiene:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\min(2,n)} (-1)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-2}$$

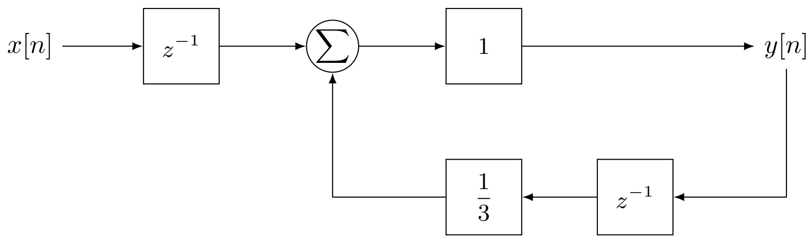


33) Dibuje el diagrama de bloques de los siguientes sistemas LTI causales descritos mediante sus ecuaciones en diferencias:

a) $y[n] = \dfrac{1}{3}y[n-1] + \dfrac{1}{2}x[n]$



b) $y[n] = \dfrac{1}{3}y[n-1] + x[n-1]$



34) Dibuje el diagrama de bloques de los siguientes sistemas LTI causales descritos mediante sus ecuaciones diferenciales:

a) $y(t) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 4x(t)$

b) $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 3y(t) = x(t)$

35) Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante la ecuación en diferencias

$$y[n] = -ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1]$$

36) Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante la ecuación diferencial

$$a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0y(t) = b_0x(t) + b_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

37) Obtenga que la ecuación diferencial del ejercicio anterior se puede escribir en forma de ecuación integral como

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau + Bx(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

expresando las constantes A, B y C en términos de las constantes a_0, a_1, b_0 y b_1.
Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal expresado según esta ecuación integral.