Álgebra Lineal

Ejercicios Tema 3: Sistemas de ecuaciones y determinantes

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Sea $\{w_1, w_2, w_3\}$ un conjunto independiente de vectores de $\mathbb{R}^3$. Se definen los vectores $v_1 = w_1 + w_2$, $v_2 = w_1 + 2w_2 + w_3$ y $v_3 = w_2 + cw_3$. Si $V = [v_1, v_2, v_3]$ y $W = [w_1, w_2, w_3]$, entonces se tiene $V = WC$ con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Qué condición debe cumplir c para que los vectores v_1, v_2, v_3 sean linealmente independientes?

Para determinar la condición que debe cumplir c para que los vectores v_1, v_2, v_3 sean linealmente indpendientes, observa que:

1) **Los vectores** $\{w_1, w_2, w_3\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Esto implica que la matriz

$$W = [w_1, w_2, w_3]$$

es invertible (tiene determinante distinto de cero).

2) **Los vectores** $\{v_1, v_2, v_3\}$ se pueden expresar como

$$V = [v_1, v_2, v_3] = WC,$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

3) **Independencia lineal de** v_1, v_2, v_3**.** Puesto que W es invertible v_1, v_2, v_3 serán linealmente independientes si y solo si la matriz C es invertible; es decir, si y sólo si $\det(C) \neq 0$.

4) **Cálculo de** $\det(C)$**.** Calculamos el determinante de la matriz C:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = (2c + 0 + 0) - (0 + c + 1) = 2c - c - 1 = c - 1$$

5) **Condición de independencia.** Para que C sea invertible, necesitamos $\det(C) \neq 0$. Dado que

$$\det(C) = c - 1,$$

se requiere

$$c - 1 \neq 0 \longrightarrow c \neq 1.$$

2) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Halla una matriz de permutación P tal que $PA = B$ y escribe P como producto de matrices de permutación simples.

Para encontrar una matriz de permutación P tal que $PA = B$, procedemos de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Se tiene una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño 5×5, donde a_{ij} en la cantidad de mensajes que la persona i manda a la persona j. Las filas y columnas siguen el orden: Juan, Ana, Pedro, María, Maite. Halla una matriz de permutación P tal que las columnas y filas de $PAP^\intercal$ sigan el orden: Ana, María, Juan, Maite, Pedro.

Para encontrar la matriz de permutación P tal que las filas y columnas de $PAP^\intercal$ estén en el orden deseado, seguimos estos paso:

1) Entender el problema:

   La matriz A tiene filas y columas y columnas ordendas como:

   $$\text{Orden original: } \{\text{Juan}, \text{Ana}, \text{Pedro}, \text{María}, \text{Maite}\}.$$

   Queremos reorganizar filas y columnas para que queden en este orden:

   $$\text{Nuevo orden: } \{\text{Ana, María, Juan, Maite, Pedro}\}.$$

   La matriz de permutación P realizará este cambio

2) Definir P:

   La matriz de permutación P es una matriz identidad 5×5 con las filas reordenadas de acuerdo con el nuevo orden. Cada fila de P indica la nueva posición de una fila de la matriz identidad:

   - El orden original:
     - Ana $(i = 2)$ pasa a la posición 1.
     - María $(i = 4)$ pasa a la posición 2.
     - Juan $(i = 1)$ pasa a la posició 3.
     - Maite $(i = 5)$ pasa a la posición 4.
     - Pedro $(i = 3)$ pasa a la posición 5.

Entonces, P se construye intercambiando las filas de la identidad en consecuencia:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) Interpretación de $PAP^{\intercal}$:

La operación $PAP^{\intercal}$ realiza dos pasos:

1) **Reorganizar las filas de A según P**, es decir, poner las filas de A en el orden especificado.
2) **Reorganizar las columnas de A** (mediante $P^{\intercal}$) en el mismo orden.

4) Consideremos la matriz por bloques $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ con A una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times p$. Supongamos que haciendo operaciones elementales de filas se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}$. Prueba que $X = A^{-1}B$.

Para probar que $X = A^{-1}B$, analizamos el problema paso a paso:

1) Definición del problema.

La matriz por bloques es

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix},$$

donde A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, y B es una matriz de tamaño $n \times p$.

Por hipótesis, haciendo operaciones elementales de filas, se transforma en

$$\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y X es una matriz de tamaño $n \times p$.

Queremos demostrar que $X = A^{-1}B$.

2) Operaciones elementales y equivalencia de filas:

Hacer operaciones elementales de filas sobre una matriz equivale a multiplicarla a la izquierda por una matriz invertible P. Esto significa que existe una matriz P de tamaño $n \times n$ tal que:

$$P \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}.$$

Separando los bloques, esta ecuación se escribe como:

$$P \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA & PB \end{bmatrix}.$$

De la igualdad con $\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}$, concluimos que:

$$PA = I_n \quad \text{y} \quad PB = X.$$

De la igualda $PA = I_n$, vemos que P es la inversa de A:

$$P = A^{-1}.$$

Sustituyendo $P = A^{-1}$ en $PB = X$, obtenemos:

$$X = A^{-1}B.$$

5) Halla una relación de dependencia entre los vectores $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (2,1,0,1)$, $u_3 = (0,2,-1,1)$ y $u_4 = (3,-1,2,0)$.

Para encontrar una relación de dependencia lineal entre los vectores u_1, u_2, u_3 y u_4, necesitamos determinar si existen coeficientes c_1, c_2, c_3, c_4, no todos cero, tales que:

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = 0,$$

o equivalentemente:

$$c_1(1,0,1,0) + c_2(2,1,0,1) + c_3(0,2-1,1) + c_4(3,-1,2,0) = (0,0,0,0).$$

Esto genera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_4 = 0 \\ c_2 + 2c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 - c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

1) Formar la matriz del sistema:

   Escribimos este sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Resolver por eliminación gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_1]{F_3 \to F_3 + 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + 3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Esta matriz reducida resultante muestra que la última fila es cero, indicando una relación de dependencia lineal entre los vectores u_1, u_2, u_3, u_4.

3) Relación de dependencia:

   De la matriz reducida, obtenemos las ecuaciones:

   - $c_1 + c_4 = 0 \longrightarrow c_1 = -c_4$
   - $c_2 + c_4 = 0 \longrightarrow c_2 = -c_4$
   - $c_3 - c_4 = 0 \longrightarrow c_3 = c_4$

   Al sustituir en la combinación lineal, podemos escribir la relación de dependencia como:

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = 0 \quad \text{con} \quad c_1 = c_2 = -c_4, c_3 = c_4.$$

6) Sean A y B matrices del mismo tamaño. Sea A' la matriz que resulta de A después de intercambiar las columnas i, j y sea B' la matriz que resulta de B después de intercambiar las filas i, j. Escribe las matrices A' y B' en términos de A, B y matrices elementales. ¿Por qué se verifica que $AB = A'B'$?

Paso 1: Representar A' y B' en términos de matrices elementales

Supongamos que A y B son matrices de tamaño $n \times n$. Queremos describir las matrices A' y B' que resultan al intercambiar columnas y filas, respectivamente.

1.1) Matriz A':

Para obtener A', intercambiamos las columnas i y j de A. Esto se logra multiplicando A por una matriz de permutación P_{ij} desde la derecha:

$$A' = AP_{ij},$$

donde P_{ij} es una matriz identidad $n \times n$ con las columnas i y j intercambiadas.

1.2) Matriz B':

Para obtener B', intercambiamos las filas i y j de B. Esto se logra multiplicando B por una matriz de permutación P_{ij} desde la izquierda:

$$B' = P_{ij}B.$$

Paso 2: Producto AB en términos de A' y B'

El producto AB se transforma en $A'B'$. Sustituyendo $A' = AP_{ij}$ y $B' = P_{ij}B$, tenemos:

$$A'B' = (AP_{ij})(P_{ij}B).$$

Por la propiedad asociativa del producto de matrices:

$$A'B' = A(P_{ij}P_{ij})B.$$

La clave es que P_{ij} es una matriz de permutación, y el producto de una matriz de permutación consigo misma es la identidad:

$$P_{ij}P_{ij} = I.$$

Por lo tanto:

$$A'B' = AIB = AB.$$

7) Calcula el rango de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

en función de los parámetros a y b.

<u>Posibles casos:</u>

1) $a = b = 0 \longrightarrow B = [0] \longrightarrow \text{rango}(B) = 0$

2) $a = 0, b \neq 0 \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_1} \underbrace{\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}}_{\text{forma escalonada}} \longrightarrow \text{rango}(B) = 4$

3) $a \neq 0, b = 0 \longrightarrow B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \text{rango}(B) = 4$

8) Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ calcula matrices invertibles P y Q tales que

$$PMQ = \left[\begin{array}{c|c} 1_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

con r el rango de M.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \to -F_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 2C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - C_2]{C_3 \to C_3 - C_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos una matriz $PMQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que tiene la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

donde I_r es la matriz identidad con $r = \text{rango}(M) = 2$.

9) Halla la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y expresa A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

Vamos a calcular la inversa de la matriz A usando el método de Gauss-Jordan, que implica reducir A a la matriz identidad I y aplicar las mismas operaciones elementales a I. Luego expresaremos A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{F_1 \to F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -10 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \to -F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -10 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 7F_3]{F1 \to F1 + 10F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 10 \\ 4 & -6 & -7 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10) Determina el valor del parámetro a para el cual la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$ es invertible y calcula su inversa.

El determinante de A se puede calcular expandiendo por cofactores, pero notamos que A tiene una estructura triangular. En matrices triangulares, el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Por lo tanto:

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

El determinante de A es siempre 1, independientemente del valor de a. Esto implica que la matriz A **siempre es invertible**, para cualquier valor de a.

La inversa de una matriz triangular inferior como A también es triangular inferior, y sus elementos se calculan directamente utilizando las relaciones entre las filas y columnas.

Construcción de A^{-1}

La inversa de A tiene la forma:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 \end{bmatrix}.$$

Para verificar que la matriz calculada es la inversa, multiplicamos A y A^{-1}, y comprobamos que el resultado es la matriz identidad I_4.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z - 2t &= 5 \\ -2x - 4y + 2z + 4t &= -10 \\ y + t &= 1 \\ x + 3y - z - t &= 6 \\ x - z - 4t &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, usaremos el método de eliminación gaussiana. Reescribimos el sistema en forma de matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_4\to F_4-F_1 \\ F_5\to F_5-F_1}]{F_2\to F_2+2F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_5\to F_5+2F_3]{F_4\to F_4-F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

El sistema ahora se simplifica como:

1) $x + 2y - z - 2t = 5.$

2) $y + t = 1.$

De la segunda ecuación:

$$t = 1 - y.$$

Sustituyendo $t = 1 - y$ en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x + 2y - z - 2(1 - y) &= 5 \\ x + 2y - z - 2 + 2y &= 5 \\ x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

Ahora tenemos:

$$\begin{cases} x + 4y - z = 7 \\ t = 1 - y \end{cases}$$

De las dos ecuaciones restante, el sistema tiene **dos grados de libertad**. Sea $y = s$ y $z = r$ donde $s, r \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) De $x + 2y - z = 7$:

$$x = 7 - 4s + r.$$

2) De $t = 1 - y$:

$$t = 1 - s.$$

El sistema tiene solución paramétrica:

$$x = 7 - 4s + r, \quad y = s, \quad z = r, \quad t = 1 - s.$$

donde $s, r \in \mathbb{R}$ son parámetros libres.

12) Discute en el cuerpo de los números reales los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro a

$$\begin{cases} x + ay + at = a \\ ax + y + z + t = a \\ x + y + az + t = 1 \end{cases}$$

Podemos escribir el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ a \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Observemos que hay 4 incógnitas pero solo 3 ecuaciones, de modo que, si el sistema es compatible, normalemente esperamos soluciones con (al menos) un grado de libertado. Sin embargo, dependiendo del valor de a, podría ocurrir que el sistema:

1) Sea **incompatible** (no tenga soluciones).
2) Sea **compatible** con una familia infinita de soluciones de dimensión 1.
3) Sea **compatible** pero con una familia de soluciones de mayor dimensión (si se reduce el rango de la matriz de coeficientes).

A continuación discutiremos cada caso.

1) Reducción y búsqueda de condiciones de compatibilidad

   Partiendo de las ecuaciones:

   1) $x + ay + at = a$.
   2) $ax + y + z + t = a$.
   3) $x + y + az + t = 1$.

   1.1) De la primera ecuación,

$$x = a - ay - at.$$

   1.2) Sustituir e las otras dos

   - En la segunda:

$$ax + y + z + t = a \quad \longrightarrow \quad a(a - ay - at) + y + z + t = a.$$

     Desarrollando,

$$a^2 - a^2y - a^2t + y + z + y = a \longrightarrow z = a - a^2 - (1 - a^2)(y + t).$$

   - En la tercera:

$$x+y+az+t = 1 \longrightarrow (a-ay-at)+y+az+t = 1 \longrightarrow a+(1-a)(y-t)+az = 1 \longrightarrow az = 1-a-(1-a)(y+t),$$

     y si $a \neq 0$,

$$z = \frac{1 - a - (1 - a)(y + t)}{a}.$$

   1.3) De las segunda y tercera ecuación obtenemos la condición de compatibilidad:

$$a - a^2 - (1 - a^2)(y + t) = \frac{1 - a - (1 - a)(y + t)}{a} \quad \text{asumiendo } a \neq 0.$$

   Multiplicando ambos lados por a y reordenando se llega a la siguiente ecuación en $S := y + t$:

$$(a^2-a^3)+(a^3-a)S = (1-a)[1-S] \longrightarrow a^2-a^3+a^3S-aS = 1-a-S+aS \longrightarrow \underbrace{(a^2 - a^3 + a - 1)}_{\text{término constante}} + \underbrace{(a^3 - 2a + 1)S}_{\text{término en } S} = 0.$$

   - Se factoriza

$$a^2 - a^3 + a - 1 = (a - 1)(1 - a^2) = (a - 1)(1 - a)(1 + a).$$

   - Asimismo,

$$a^3 - 2a + 1 = (a - 1)(a^2 + a - 1).$$

   Por tanto, la ecuación completa se factoriza como

$$(a - 1)\left[(1 - a)(1 + a)\right] + S\left[(a - 1)(a^2 + a - 1)\right] = 0,$$

o

$$(a-1)\left[(1-a)(1+a)+S(a^2+a-1)\right]=0.$$

De aquí surgen **dos grandes ramas**:

1) $a-1=0 \longrightarrow a=1$.

2) $(1-a)(1+a)+S(a^2+a-1)=0$.

   Si $a \neq 1$, esto equivale a

$$1-a^2+S(a^2+a-1)=0 \longrightarrow S=\frac{a^2-1}{a^2+a-1},$$

   siempre que $a^2+a-1 \neq 0$.

De modo que, **salvo casos especiales**, se fija

$$S=y+t=\frac{a^2-1}{a^2+a-1}.$$

2) Discusión según el valor de a

A partir de lo anterior, distinguimos:

2.1) Caso $a=1$

Si $a=1$, las ecuaciones se convierten en:

1. $x+y+t=1$.
2. $x+y+z+t=1$.
3. $x+y+z+t=1$.

Obsérvese que las ecuaciones 2 y 3 son **idénticas**. Por tanto, el sistema realmente queda en:

- $x+y+t=1$.
- $x+y+z+t=1$.

Restando la primera a la segunda, se ve que $z=0$.

Entonces la primera ecuación imponer $x+y+t=1$. Aquí hay 3 incógnitas (x,y,t) y solo una ecuación, de modo que la dimensión del conjunto de soluciones es $3-1=2$. En otras palabras, **existen infinitas soluciones** (un plano de soluciones en $\mathbb{R}^3$), que además se extiene a la cuarta variable $z=0$ fijo.

Por tanto,

$$\boxed{\text{Para } a=1\text{, el sistema es compatible con infinitas soluciones (dimensión 2).}}$$

2.2) Caso $a^2+a-1=0$

La ecuación $a^2+a-1=0$ tiene dos raíces reales:

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} a_+=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ a_-=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

En este caso, la fórmula para $s=\dfrac{a^2-1}{a^2+a-1}$ no es aplicable porque el denominador es cero. Además, si uno examina la factorización final, el término que quedaba era

$$(1-a)(1+a)+S(a^2+a-1),$$

pero si $a^2 + a - 1 = 0$, entonces $(1-a)(1+a) = 1 - a^2$ se vuelve

$$1 - a^2 = 1 - (1-a) = a \quad (\text{pues } a^2 = 1 - a).$$

De modo que la condición de cimplatibilidad sería $a + 0 \cdot S = 0$, esto es $a = 0$, que **no** coincide con $a_\pm$. Por tanto, **no hay manera de que el sistema sea consistente** en esos valores.

$$\boxed{\text{Para } a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ el sistema es incompatible (no tiene soluciones).}}$$

2.3) Caso restante: $a \neq 1$ y $a^2 + a - 1 \neq 0$

En este caso, no salta ninguna inconsistencia. Para que el sistema sea compatible basta imponer

$$y + t = S = \frac{a^2 - 1}{a^2 + a - 1}.$$

Es decir, $y + t$ viene **fijado** por esa fórmula en función de a. Una vez impuesto $y + t = S$, podemos:

- Escoger libremente (por ejemplo) a y como parámetro libre λ.
- Determinar $t = S - y = S - \lambda$.
- Con ello, de la primera ecuación se halla x, y de la segunda/tercera se determina z.

Como hay 4 incógnitas y finalmente 3 ecuaciones **independientes**, el espacio de soluciones (cuando es no vacío) tiene dimensión $4 - 3 = 1$. Por tanto:

$$\boxed{\text{Para } a \neq 1 \text{ y } a^2 + a - 1 \neq 0, \text{ existe una familia infinita (1-paramétrica) de soluciones.}}$$

Obsérvese que dentro de este caso "restante" también se incluye $a = 0$. De hecho, si $a = 0$, la condición $y + t = 1$ (que se verifica fácilmente sustituyendo en las ecuaciones) produce soluciones infinitas de dimensión 1.

13) Si $A = [u_1, \dots, u_n]$, expresa el determinante de $B = [u_n u_1 \cdots u_{n-1}]$ en función del determinante de A.

Supongamos que $A = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ es una matriz $n \times n$ cuyas columnas son los vectores $u_1, u_2, \dots, u_n$. La matriz

$$B = [u_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]$$

se obtiene a partir de A al realizar una permutación cíclica de columnas:

$$(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n) \longmapsto (u_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}).$$

Esta permutación de columnas corresponde al ciclo

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad \dots, \quad (n-1) \mapsto n, \quad n \mapsto 1,$$

que es un ciclo de longitud n. Recordemos que el signo de un ciclo de longitud n, $\sigma = (-1)^{n-1}$.

Dado que $\det(A)$ cambia por el factor σ al permutar sus columnas, obtenemos:

$$\det(B) = (-1)^{n-1} \det(A).$$

En conclusión,

$$\boxed{\det([u_n, u_1, \dots, u_{n-1}]) = (-1)^{n-1} \det([u_1, \dots, u_n]).}$$

14) Una matriz A que cumple $A = -A^\intercal$ se llama **antisimétrica**. Prueba que una matriz antisimétrica e tamaño impar tiene determinante nulo.

Idea de la demostración

La clave está en la relación entre el determinante de una matriz y el determinante de su traspuesta, junto con el hecho de multiplicar una matriz por -1.

1) Sabemos que $\det(A) = \det(A^\intercal)$.

2) Dado que $A = -A^\intercal$, se tendrá $A^\intercal = -A$.

3) Por propiedades del determinante, $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

Juntando estas ideas, al ser n impar, concluiremos que $\det(A) = 0$.

Demostración detallada

1) **Relación entre $\det(A)$ y $\det(A^\intercal)$.**

   Para cualquier matriz cuadrada A de orden n, se cumple

$$\det(A) = \det(A^\intercal).$$

   Esto es una propiedad estándar del determinante.

2) **Relación entre A y $A^\intercal$ para A antisimétrica.**

   Por hipótesis, A es antisimétrica, es decir,

$$A = -A^\intercal \longrightarrow A^\intercal = -A.$$

3) **Determinante de $-A$.**

   Si multiplicamos una matriz A de orden n por -1, el nuevo determinante $\det(-A)$ equivale a

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

4) **Caso n impar.**

   Suponiendo que n es *impar*, se tiene $(-1)^n = -1$. Por tanto,

$$\det(A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A).$$

   Lo cual implica

$$\det(A) = -\det(A) \longrightarrow 2\det(A) = 0 \longrightarrow \det(A) = 0.$$

En consecuencia, **toda matriz antisimétrica de orden impar es singular**, es decir, tiene determinante nulo.

15) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

1) Casos pequeños: $n = 1$ y $n = 2$

   - Caso $n = 1$:

$$\det(M) = 1.$$

   - Caso $n = 2$:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

2) Caso general $n \geq 3$

Veremos que para $n \geq 3$ el determinante es 0. Para ello, haremos operaciones elementales sobre las filas que no cambian o solo cambian el determinante por un factor distitnto de cero. En particular, restar una fila de otra *no altera* el valor del determinante.

1) Restar la primera fila a las demás

Para $k = 2, \ldots, n$, hacemos

$$R_k \longleftarrow R_k - R_1.$$

- La primera fila R_1 se queda igual:

$$R_1 = (1, 2, 3, \ldots, n).$$

- La fila R_k original era $(k, k+1, k+2, \ldots, k+(n-1))$.

  Al restarle R_1, obtenemos

$$R_k - R_1 = (k-1, (k+1)-2, (k+2)-3, \ldots, (k+n-1)-n).$$

  Observando cada componente:

$$(k+j-1) - (1+j-1) = (k-1).$$

  En efecto, para cada columna j, el resultado es **constante** e igual a $k-1$.

Por tanto, después de esas $n-1$ restas, la matriz queda:

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

2) Examinar las filas resultantes

A partir de la segunda fila, todas están dentro del mismo subespacio de dimensión 1. Esto implica que la matriz M' **tiene rango menor que** n tan pronto como $n \geq 3$. Si el rango es menor que n, el determinante debe ser cero.

Más concretamente, podemos incuso anular una de esas filas con una combinación adecuada. Por ejemplo, si restamos 2 veces la fila 2 a la fila 3, obtenemos una fila completamente nula:

$$R_3 \longleftarrow R_3 - 2R_2 = (2 - 2\cdot 1, 2 - 2\cdot 1, \ldots, 2 - 2\cdot 1) = (0, 0, \ldots, 0).$$

En cuanto aparece una fila de ceros, el determinante es 0.

Por lo tanto, para $n \geq 3$ el determinante se anula.

16) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 4x - 6y - 2x &= 2 \\ -2x + 15y + 7z &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Observa que podemos eliminar la última ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras. Considerando ahora los términos en z como si fuesen términos independientes, observa que el sistema es un sistema de Cramer en x, y. Resuélvelo con la fórmula de Cramer y después expresa las soluciones en la forma $x_0 + u$ (x_0 solución parcial y u

solución genérica del sistema homogéneo).

Se observa que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras ($3 \cdot (1) - 2 \cdot (2) = (3)$), por lo que puede eliminarse. Quedamos con el sistema reducido a las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 4x - 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

Consideremos los términos en z como si fuesen términos independientes. Esto nos permite escribir el sistema como un sistema de Cramer en x y y, donde los coeficientes de z se tratan como términos constantes.

Podemos expresar el sistema en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 2+2z \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\nabla = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16$$

Dado que $\nabla \neq 0$, el sistema tiene una única solución en x e y para cualquier valor de z.

Usando la fórmula de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 2+2z & -6 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{6z - 2 - 2z}{-16} = \frac{4z-2}{-16} = \frac{1}{8} - \frac{z}{4}.$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 4 & 2+2z \end{vmatrix}}{-16} = \frac{4 + 4z + 4z}{-16} = \frac{4+8z}{-16} = -\frac{1}{4} - \frac{z}{2}.$$

Escribimos las soluciones en la forma $x_0 + u$.

1) Sistema homogéneo:

   Tomemos $z = 0$ en el sistema, resolviendo:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases}$$

   De la primera, $y = -2x$. Sustituyendo en la segunda:

$$4x - 6(-2x) = 0 \longrightarrow 4x + 12x = 0 \longrightarrow x = 0, y = 0.$$

   Entonces, la solución homogénea general es:

$$(x, y, z) = (0, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

2) Solución general:

   Sumamos la solución particular $x_0 = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, 0\right)$ y la solución homogénea:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, 0\right) + t(0, 0, 1),$$

   donde $t = z$ es el parámetro libre.