Álgebra Lineal
Examen Convocatoria Junio 2023

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Consideremos los número complejos

$$x_1 = -1 - j, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}.$$

Calcula $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2$ y $\dfrac{z_2}{z_1}$ y expresa el resultado en forma exponencial.

2) Dada una matriz cuadrada D, se llama de *similitud producto-escalar* a la matriz $S = DD^\intercal$, con $D^\intercal$ la traspuesta de D. Se pide:

a) Demuestra que S simétrica.

b) Sea P una matriz ortogonal del mismo tamaño que D y consideremos la matriz DP. Denotemos por S y S' a las matrices de similitud producto-escalar de D y DP, respectivamente. Comprueba que $S = S'$.

3) Sea A una matriz. Explica con detalle en qué consiste la factorización en valores singulares (SVD) de A. Por supuesto, se ha de explicar qué son los valores singulares y cómo se calculan las matrices que aparecen en dicha factorización. Pon también un ejemplo de aplicación de la factorización SVD en Ciencia de datos.

4) Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcc} 4x - 4y & 0 & 8 \\ -4x + 5y + z & = & -9 \\ y + 2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) Comprueba que la matriz de coeficientes del sistema es simétrica definida positiva.

b) Calcula la factorización de Cholesky de la matriz de coeficientes.

c) Resuelve el sistema usando la factorización anterior

5) Dada la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

calcula una base ortonormal del subespacio $\mathrm{Col}(A)$. Si B es una matriz de tamaño $4 \times m$, ¿qué podemos decir de la dimensión del subespacio $\mathrm{Col}(AB)$?

6) Dada la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$, explica por qué no existe ninguna matriz invertible P tal que la matriz $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.