Álgebra Lineal

Francisco Javier Mercader Martínez

Índice

Tema 1: Números reales y complejos

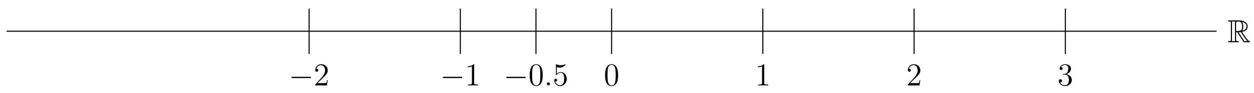
1.1) Números reales y su representación en el ordenador

Recordemos los conjuntos de números habituales:

- Números naturales: $\mathbb{N} = \{01, 2, 3, \dots\}$
- Números enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Números racionales: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}$

  Los números racionales se pueden expresar en forma decimal, con un número finito de cifras decimales $\left(\text{por ejemplo, } \frac{1}{2} = 0.5\right)$ o bien con un número infinito de cifras decimales periódicas $\left(\text{por ejemplo, } \frac{1}{3} = 0.333\dots\right)$.

- Números reales: $\mathbb{R}$ incluye a todos los anteriores más números irracionales (que contienen un número infinito de cifras decimales no periódicas) como $\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}$, etc.



Ejemplo

$$\underbrace{1}_{s} \quad \underbrace{10000000010}_{e} \quad \underbrace{\overbrace{100\dots0}^{52 \text{ bits}}}_{f}$$

$s = 1 \longrightarrow (-1)^s = -1$

$e = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + \cdots + 1 \cdot 2^{10} = 1026$

$f = 1 \cdot \frac{1}{2^1} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + 0 \cdot \frac{1}{2^{52}} = 0.5$

$x = (-1)^1 \cdot 2^{1026-1023}(1 + 0.5) = -8 \cdot \frac{3}{2} = \boxed{-12}$

Debido a este sistema de representación:

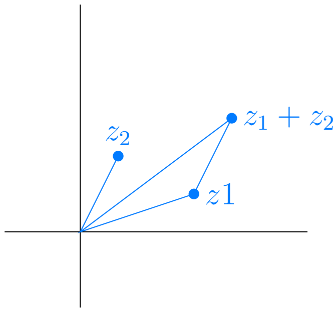
1) El rango de números representables es $[-1 =^{300}, 10^{300}]$ con una precisión de 15 dígitos.
2) Números no uniformemente distribuidos. Están más juntos los números pequeños.
3) El número más pequeño que se puede representar el llamado epsilon de la máquina (en Python)

es $\varepsilon \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$.

En $\mathbb{C}$ tenemos definidas las dos siguientes operaciones:

a) Suma: $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$

$z_1 + x_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$



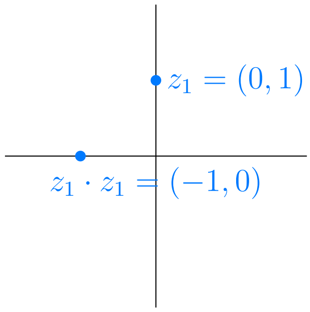
b) Producto: $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

Ejemplo

$z_1 = (0, 1),\ z_2 = z_1 = (0, 1)$

$z_1 \cdot z_1 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$



1.2) Algunos números complejos destacados

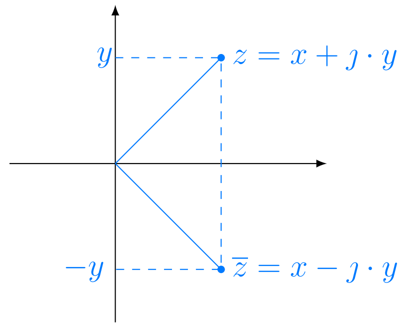
- Los números complejos de la forma $(x, 0)$ se identifican con el número real, es decir, $x \equiv (x, 0)$.

$$\underbrace{(x_1 + \imath y_1)}_{(x_1,y_1)} + \underbrace{(x_2 + \imath y_2)}_{(x_2,y_2)} = x_1 + x_2 + \imath(y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned}\underbrace{(x_1 + \imath y_1)}_{(x_1,y_1)} \cdot \underbrace{(x_2 + \imath y_2)}_{(x_2,y_2)} &= x_1x_2 + \imath y_1y_2 + \imath y_1x_2 - y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + \imath(x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

- Definición (conjugado)

Dado $z = x + \imath y$, se llama conjugado de z, denotado $\overline{z}$, al número complejo $\overline{z} = x - \imath y$.



- Propiedades del conjugado

- $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

- $z \cdot \overline{z} = (\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2$

- Se llama módulo de $z = x + \imath\, y$ al número real

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Dado $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$, se define el argumento de z denotado $\arg z$, como el conjunto

$$\arg z = \{\theta \in \mathbb{R} : \mathrm{Re} z = |z| \cos\theta, \mathrm{Im} z = |z| \sin\theta\}$$

Obviamente, si $\theta \in \arg z$ entonces $\theta + 2k\pi \in \arg z \ \forall k \in \mathbb{Z}$. Al único $\theta \in \arg z$ tal que $\theta \in [0, 2\pi[$ se le llama argumento principal de z.

Por tanto,

$$\begin{aligned} z = \mathrm{Re} z + \imath\, \mathrm{Im} z &= |z| \cos\theta + \imath \cdot |z| \sin\theta \quad && \text{(forma trigonométrica)} \\ &= |z|(\cos\theta + \imath \sin\theta) && \\ &= |z| e^{\imath\theta} && \text{(forma exponecial)} \end{aligned}$$

donde $e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath \sin\theta$

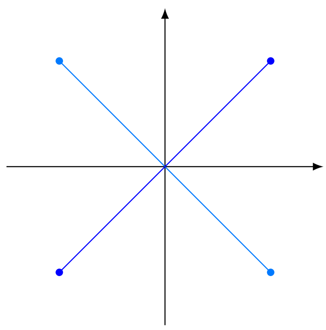
También podemos expresar $z \in \mathbb{C}$ como

$$|z|_\theta \equiv \text{formal polar.}$$

¿Cómo pasar de una forma a otra?

Binómica	$\Rightarrow$	Polar
$z = x + \imath\, y$		$\lvert z\rvert = +\sqrt{x^2+y^2}$
		$\theta = \arg z = \arctan \dfrac{y}{x}$

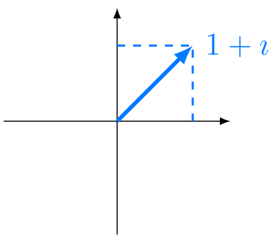
¡! La calculardora sólo devuelve valores entre $-90°$ y $90°$. Dependiendo de la localización del número complejo hay que sumar $180°$.



Polar	$\longrightarrow$	Binómica
$\lvert z\rvert_\theta$	$\longrightarrow$	$z = \lvert z\rvert\cos\theta + \imath\lvert z\rvert\sin\theta$

Ejemplo

- $1+\imath$



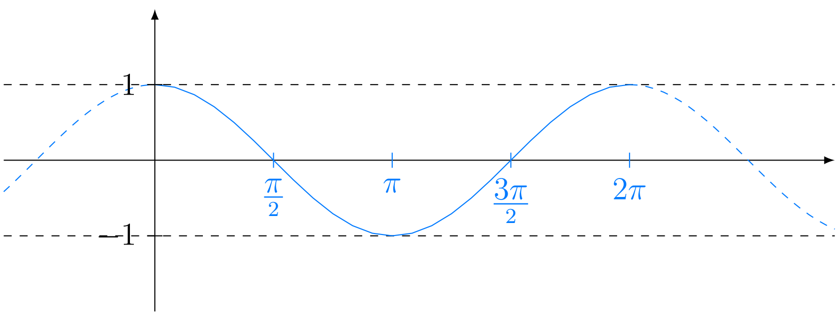
$$|1+\imath| = +\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\frac{1}{1} = 45° = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$

$$1+\imath = \sqrt{2}_{45°} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

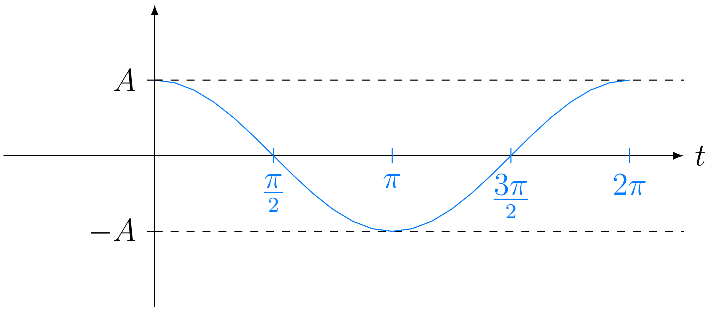
1.3) Representación matemática de una onda

- La función $\cos t = \dfrac{e^{\jmath t}+e^{-\jmath t}}{2}$, $t \equiv$tiempo.



$\boxed{\text{Periodo } \; T = 2\pi}$

- La función $A\cos t = \dfrac{Ae^{\jmath t} + Ae^{-\jmath t}}{2}$

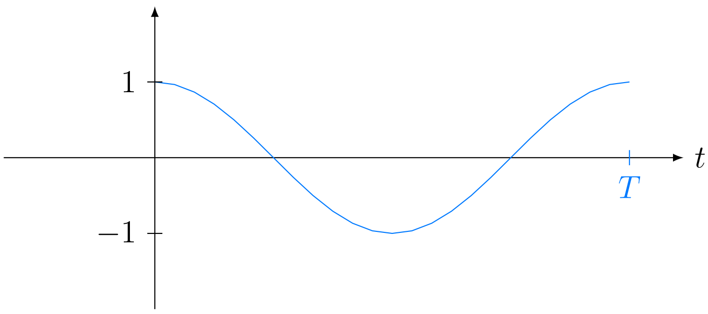


$\boxed{A \equiv \text{Amplitud de la onda}}$

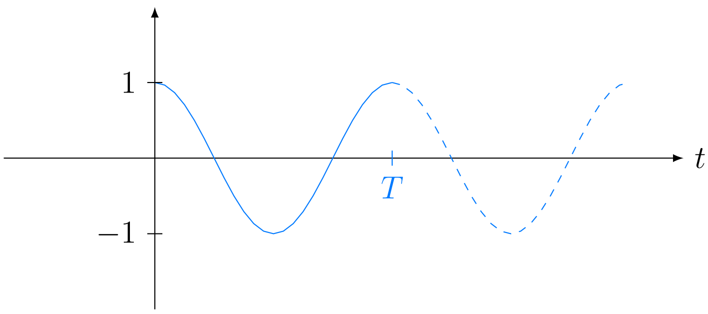
- La función $\cos(wt) = \dfrac{e^{\jmath wt} + e^{-\jmath wt}}{2}$

$wt = 2\pi \longrightarrow t = \dfrac{2\pi}{w} = t$ período

Si w es pequeño$\longrightarrow$ T es grande (pocas oscilaciones)



Si w es grande$\longrightarrow$ T es pequeño (muchas oscilaciones)



Las ondas también se suelen manipular usando números complejos a partir de las identidades.

$$e^{\jmath t} = \cos t + \jmath \sin t$$

$$e^{-\jmath t} = \cos(-t) + \jmath\sin(-t) = \left\{ \begin{array}{l} \cos x \text{ es par} \\ \\ \sin x \text{ es impar} \end{array} \right\} = +\cos t - \jmath \sin t$$

Sumando: $2\cos t = e^{\jmath t} + e^{-\jmath t} \longrightarrow \cos t = \dfrac{e^{\jmath t + e^{-\jmath t}}}{2}$

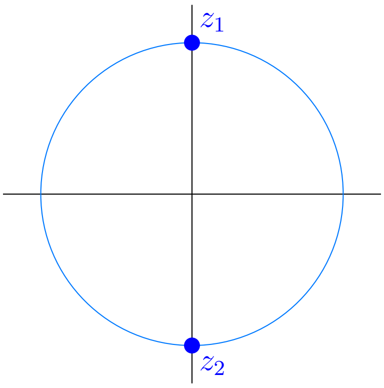
Restando: $e^{\jmath t} - e^{-\jmath t} = 2\jmath \sin t \longrightarrow \sin t = \dfrac{e^{\jmath t - e^{-\jmath t}}}{2\jmath}$

Por tanto:

$$\text{Onda} = f(t) = A\cos(wt-\varphi) = \frac{A \cdot \left(e^{\jmath(wt-\varphi)} + e^{-\jmath(wt-\varphi)}\right)}{2}$$

1.4) Raíces n-ésimas y raíces de polinomios

Consideremos la ecuación $x^2+1=0$.



Buscamos $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|e^{\imath\theta}$ tal que $z^2+1=0$; $z^2 = |z|^2 e^{2\imath\theta} = -1 = e^{\imath\pi}$

$$\begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 2\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} |z| = +\sqrt{1} = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k = 0, 1, \ldots \end{array}$$

$$k = 0 \longrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$k = 1 \longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$
$$k = 2 \longrightarrow \theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

Hoja de ejercicios Tema 1: Números complejos

1) Calcula las siguientes operaciones de números complejos:

a) $(-2+\jmath)+\left(-\frac{1}{2}-3\jmath\right) = -2+\jmath-\frac{1}{2}-3\jmath = \boxed{-\frac{5}{2}-2\jmath}$

b) $(-2-\jmath)-\left(-3+\frac{1}{2}\jmath\right) = -2-\jmath+3-\frac{1}{2}\jmath = \boxed{1-\frac{3}{2}\jmath}$

c) $-2\cdot(-1-\jmath)-3\cdot(-2+\jmath)+2\cdot(1-2\jmath) = 2+2\jmath+6-3\jmath+2-4\jmath = \boxed{10-\jmath}$

d) $j\cdot(-1+\jmath) = -\jmath+j^2 = \boxed{j+1}$

e) $(-2-\jmath)\cdot\left(-3+\frac{1}{2}\jmath\right) = 6-\jmath+3\jmath-\frac{1}{2}\jmath^2 = 6-\jmath+3\jmath+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{13}{2}+2\jmath}$

f) $\frac{1}{-1-2\jmath} = \frac{1}{2\jmath+1}\cdot\frac{2\jmath-1}{2\jmath-1} = \frac{2\jmath-1}{4\jmath^2-1} = \frac{2\jmath-1}{-4-1} = \boxed{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\jmath}$

g) $\frac{-\jmath}{2-3\jmath} = \frac{-\jmath}{2-3\jmath}\cdot\frac{2+3\jmath}{2+3\jmath} = \frac{-\jmath\cdot(2+3\jmath)}{4-9\jmath^2} = \frac{-2\jmath-3\jmath^2}{4+9} = \frac{2\jmath-3}{13} = \boxed{-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}\jmath}$

h) $\frac{-1-\jmath}{-2+\jmath} = \frac{-1-\jmath}{\jmath-2}\cdot\frac{\jmath+2}{\jmath+2} = \frac{(-1-\jmath)\cdot(j+2)}{\jmath^2-4} = \frac{-\jmath-2-\jmath^2-2\jmath}{-1-4} = \frac{-3\jmath-2+1}{-5} = \frac{-3\jmath-1}{-5} = \boxed{\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\jmath}$

i) $\frac{1-\jmath}{\jmath}-\frac{\jmath}{1-\jmath} = \frac{\jmath-1}{\jmath}\cdot\frac{\jmath}{\jmath}-\frac{\jmath}{1-\jmath}\cdot\frac{1+\jmath}{1+\jmath} = \frac{(j-1)\cdot j}{\jmath^2}-\frac{j(1+\jmath)}{1-\jmath^2} = \frac{\jmath^2-\jmath}{\jmath^2}-\frac{\jmath+\jmath^2}{1-\jmath^2} = \frac{1+\jmath}{-1}-\frac{\jmath-1}{1+1} = -1-\jmath-\frac{\jmath-1}{2} = \frac{-2-\jmath-\jmath+1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\jmath}$

2) Obtén las formas polares y trigonométricas de los siguientes números complejos:

a) $1+\jmath$

- Polar: $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$
- Trigonométrica: $|z|\cdot(\cos(\theta)+\jmath\sin(\theta)) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\jmath\sin\frac{\pi}{4}\right)$

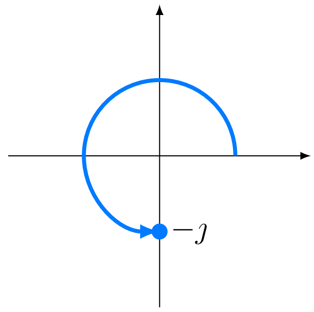
$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{1}{1} = 45^\circ \equiv \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$

b) $-\jmath$

$z_1 = -\jmath$

Polar: $1_{\frac{3\pi}{2}}$

Trigonométrica: $|z_1| \cdot (\cos(\theta_1) + \jmath \sin(\theta_1)) = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + \jmath \cdot \sin\frac{3\pi}{2}\right)$



$$z_1 = \begin{cases} |z_1| = 1 \\ \theta_1 = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{-1}{0} = 90 \longrightarrow \theta = 90 + 180 = 270 \equiv \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

c) $-1 + \sqrt{3}\jmath$

- Polar: $2 \cdot e^{\left(\frac{2\pi}{3}\right)\jmath}$
- Trigonométrica: $|z| \cdot (\cos(\theta) + \jmath \sin(\theta)) = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \jmath \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

d) $2\sqrt{3} - 2\jmath \longrightarrow 4 \cdot e^{\jmath \frac{11}{6}\pi}$

$$|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

$$\theta = \arctan\frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{11}{6}\pi = 330^\circ$$

e) $-1 - \jmath$

- Polar:
- Trigonométrica: $|z| \cdot (\cos(\theta) + \jmath \sin(\theta))$

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

f) $-2 + \jmath$

- Polar:
- Trigonométrica:

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{1}{-2} = \end{cases}$$

3) Obtén la forma binómica de los siguientes números complejos:

a) $2_{\frac{\pi}{2}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\jmath\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{2\jmath}$

b) $1_{\pi} = \cos(\pi) + \jmath\sin(\pi) = \boxed{-1}$

c) $3_{\frac{5\pi}{4}} = 3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 3\jmath\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\jmath}$

4) Calcula las siguientes operaciones de números complejos, expresando el resultado en forma polar:

a) $2_{\frac{5\pi}{3}} \cdot 3_{\frac{\pi}{2}} = \left(1 - \sqrt{3}\jmath\right) \cdot 3\jmath = 3 - 3\sqrt{3}\jmath = (*) = \boxed{6_{\frac{2\pi}{3}}}$

$$\begin{cases} 2_{\frac{5\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 2\jmath\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\jmath \\ 3_{\frac{\pi}{2}} = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \jmath\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6 \\ \theta = \arctan\frac{-3\sqrt{3}}{3} = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

b) $1_{\frac{7\pi}{4}} \cdot 2_{\frac{7\pi}{3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\jmath\right) \cdot (1 + \sqrt{3}\jmath) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\jmath = (*) = \boxed{2_{\frac{\pi}{12}}}$

$$\begin{cases} 1_{\frac{7\pi}{4}} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \jmath\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\jmath \\ 2_{\frac{7\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + 2\jmath\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2 \\ \theta = \arctan\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = \arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

c) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \jmath\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot 3_{\frac{11\pi}{6}} = 2\jmath \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\jmath\right) = 3 + 3\sqrt{3}\jmath = (*) = \boxed{6_{\frac{\pi}{4}}}$

$$\begin{cases} 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \jmath\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 \cdot (0 + \jmath) = 2\jmath \\ 3_{\frac{11\pi}{6}} = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \jmath\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\jmath\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6 \\ \theta = \arctan\frac{3\sqrt{3}}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

d) $\frac{4_{\frac{5\pi}{2}}}{2_{\frac{2\pi}{3}}} = \frac{4\jmath}{-1+\sqrt{3}\jmath} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}\jmath}{-1+\sqrt{3}\jmath} = \frac{4\jmath \cdot \left(-1-\sqrt{3}\jmath\right)}{(-1+\sqrt{3}\jmath) \cdot \left(-1-\sqrt{3}\jmath\right)} = \frac{4\sqrt{3} - 4\jmath}{4} = \sqrt{3} - \jmath = (*) = \boxed{2_{\frac{2\pi}{3}}}$

$$\begin{cases} 4_{\frac{5\pi}{2}} = 4\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) + \jmath\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)\right) = 4\cdot(0+\jmath) = 4\jmath \\ 2_{\frac{2\pi}{3}} = 2\cdot\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \jmath\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right) = 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\jmath\right) = -1+\sqrt{3}\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \\ \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

e) $$\frac{1_\pi}{2_{\frac{7\pi}{6}}} = \frac{-1}{-\sqrt{3}-\jmath} = \frac{1}{\sqrt{3}+\jmath}\cdot\frac{\sqrt{3}-\jmath}{\sqrt{3}-\jmath} = \frac{\sqrt{3}-\jmath}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\jmath = (*) = \boxed{1_{\frac{\pi}{6}}}$$

$$\begin{cases} 1_\pi = 1\cdot(\cos\pi + \jmath\sin\pi) = -1 \\ 2_{\frac{7\pi}{6}} = 2\cdot\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + \jmath\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right) = \cancel{2}\cdot\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \dfrac{1}{\cancel{2}}\jmath\right) = -\sqrt{3}-\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ \theta = \arctan\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

f) $$\frac{12\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \jmath\sin\frac{5\pi}{4}\right)}{8_{\frac{5\pi}{4}}} = \frac{-6\sqrt{2}-6\sqrt{2}\jmath}{-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\jmath} = \frac{6\sqrt{2}+6\sqrt{2}\jmath}{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\jmath}\cdot\frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\jmath}{4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\jmath} = \frac{96}{64} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} 12\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + \jmath\sin\dfrac{5\pi}{4}\right) = 12\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\jmath\right) = -6\sqrt{2}-6\sqrt{2}\jmath \\ 8\cdot\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + \jmath\sin\dfrac{5\pi}{4}\right) = 8\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\jmath\right) = -4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\jmath \end{cases}$$

5) Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $(1-\sqrt{3}\jmath)^6$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \arctan\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$(1-\sqrt{3}j)^6 = 2^6\cdot\left(\cos\left(6\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + \jmath\sin\left(6\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) = 2^6\cdot(\underbrace{\cos(-2\pi)}_{1} + \jmath\underbrace{\sin(-2\pi)}_{0}) = 2^6 = 64$$

$$(1-\sqrt{3})^6 = \boxed{64}$$

b) $(1-\jmath)^8$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\left(-\dfrac{1}{1}\right) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(1-\jmath)^8=(\sqrt{2})^8\cdot\left(\cos\left(8\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\jmath\sin\left(8\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\right)=2^4\cdot(\underbrace{\cos(-2\pi)}_{1}+\jmath\underbrace{\sin(-2\pi)}_{0})=2^4=16$$

$$(1-\jmath)^8=\boxed{16}$$

c) $(-\sqrt{3}+\jmath)^{10}$

$$\begin{cases}|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2\\ \theta=\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$(-\sqrt{3}+\jmath)^{10}=2^{10}\cdot\left(\cos\left(8\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+\jmath\sin\left(8\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=2^{10}\cdot\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)+\jmath\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right)=$$

$$2^{10}\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\jmath\right)=-2^9-2^9\sqrt{3}\jmath$$

$$(-\sqrt{3}+\jmath)^{10}=\boxed{-512-512\sqrt{3}\jmath}$$

6) Expresar los siguientes números complejos en forma binómica y en forma polar:

a) $(1+\jmath)^3=-2+2\jmath$

$$\begin{cases}|z|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\\ \theta=\arctan\left(\dfrac{-2}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$-2+2\jmath=2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\jmath\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\jmath\right)$$

b) $\jmath^5+\jmath^{16}=(-1)^8+(-1)^2\cdot\jmath=1+\jmath$

$$\begin{cases}|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\\ \theta=\arctan\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$1+\jmath=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\jmath\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

c) $1+3e^{\imath\pi}$

d) $\dfrac{2+3\jmath}{3-4\jmath}=$

e) $2_{\frac{3\pi}{2}}+\jmath$

f) $\dfrac{1}{\jmath}$

7) Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $2\jmath$

b) $1-\jmath$

c) -1

d) $\dfrac{1+\jmath}{1-\jmath}$

e) $\dfrac{1}{\jmath\pi}$

f) $-3+\jmath\sqrt{3}$

8) Representa gráficamente los siguientes subconjuntos del plano complejo:

a) Números complejos cuyo módulo es igual a 1

b) $\{z^k \in \mathbb{C} : z = e^{\frac{2\pi j}{8}},\ 1 \leq k \leq 8\}$

c) $\{z^k \in \mathbb{C} : z = e^{-\frac{2\pi j}{8}},\ 1 \leq k \leq 8\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : z - \overline{z} = j\}$

9) Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa el resultado en forma binómica:

a) $3+4j+10e^{\frac{\pi}{3}j} = ze^{\frac{\pi}{3}j}$

b) $5_{-\frac{\pi}{6}} + z + 4 + \sqrt{2}j = 6e^{-\frac{\pi}{4}j}z$

c) $2_{\frac{\pi}{3}} + j + ze^{-\frac{\pi}{3}j} = 0$

d) $z + 4jz = 1$

10) Dados los números complejos $z_1 = -1-j$, $z_2 = 2_{\frac{\pi}{3}}$, $z_3 = 4e^{100\pi j}$, representa gráficamente los números $z_1, z_2, z_3, z_1+z_2+z_3, z_2\cdot z_2, z_1\cdot z_2\cdot z_3$.

11) Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(t) = 4e^{-t}e^{100\pi tj}$. Representa gráficamente $\mathrm{Re}f(t)$ e $\mathrm{Im}f(t)$. Idem con la función $g(t) = 4e^{100\pi tj} + 7e^{\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)j}$. Indica e interpreta físicamente las siguientes magnitudes asociadas a las gráficas anteriores: amplitud de las oscilación, periodo, frecuencia y fase.

12) **Números complejos en Teoría de Sistemas Eléctricos.** Supongamos que tenemos una circuito de corriente alterna tipo RLC con una resistencia con valor $R = 20\Omega$, un condensador con valor $C = 33.3\mu F$ y una bobina con valor $L = 0.01H$. Se supone que la fuente de voltaje (o fuerza electro motriz) viene dada por $\varepsilon(t) = 353.5\cos(\omega t+\phi)$, con $\omega = 3000\text{rad}/s$ y $\phi = -10°$. Nótese que la frecuencia ω está expresada en radianes mientras que la fase inicial ϕ en grados. Por tanto, al hacer cálculos hemos de expresar **ambas** magnitudes en radianes o grados, pero no una en radianes y la otra en grados. También hemos de tener en cuenta las unidades físicas en que expresamos las distintas magnitudes del problema. Por ejemplo, en el enunciado anterior, la Capacitancia del capacitador está dada en microfaradios por lo que hemos de multiplicar por 10^{-6} para expresarla en Faradios y que de esta forma todas las magnitudes estén expresadas en unidades del Sistema Internacional (S.I). Se pide:

a) Calcula la impedancia compleja del circuito, la cual se define como $\vec{z} = R + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) j$.

$$\vec{z} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j = 20 + \left(3000 \cdot 0.01 - \frac{1}{3000 \cdot 33.3 \cdot 10^{-6}}\right) j = (10 + 10j)\Omega$$

b) Sabiendo que $\vec{E} = 353.35 e^{-10j}$ y que $\vec{E} = \vec{I}\vec{z}$, calcula $\vec{I}$ expresando el resultado en forma polar.

Empezamos escribiendo $\vec{z}$ en forma polar. Se tiene $\vec{z} = 20 + 20j = \sqrt{20^2 + 20^2}_{\arctan \frac{20}{20}} = 28.8_{45^\circ}$.

Por tanto, $\vec{I} = \dfrac{353.5_{-10}}{28.8_{45}} = 12.5_{-55^\circ}$

c) Calcula las siguientes magnitudes físicas:

i) $\vec{V}_R = R\vec{I}$

$\vec{V}_R = R\vec{I} = 20 \cdot 12.5_{-55^\circ} = 250_{-55^\circ}$

ii) $\vec{V}_L = \vec{I}\vec{X}_L$, donde $\vec{X}_L = \omega L j$ se llama reactancia inductiva.

$\vec{V}_L = \vec{I}\vec{X}_L = 12.5_{-55^\circ} \cdot 30_{90^\circ} = 375_{35^\circ}$

iii) $\vec{V}_C = \vec{I}\vec{X}_C$, donde $\vec{X}_C = -\dfrac{1}{\omega C} j$ se llama reactancia del capacitador.

$\vec{V}_C = \vec{I}\vec{X}_C = 12.5_{-55^\circ} \cdot 10_{-90^\circ} = 125_{-145^\circ}$

Tema 2: Vectores, matrices y tensores

2.1) Vectores

- Definición

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Definimos $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}$.

A los elementos $u \in \mathbb{K}^n$ se les llama vectores de n-componentes. En $\mathbb{K}^n$ definimos las dos siguientes operaciones:

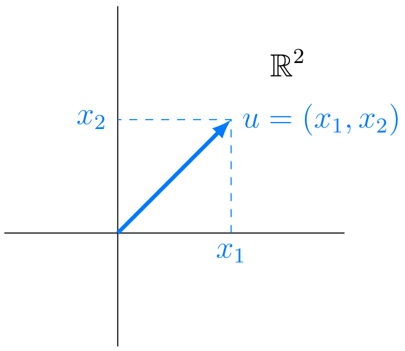
- Suma: Si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y_{,}y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

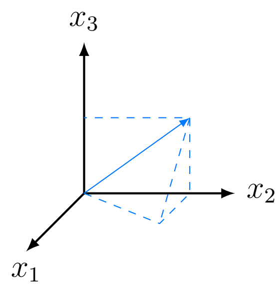
$$u + v = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, , x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- Producto por escalares: Sean $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

El conjunto $\mathbb{K}^n$ dotado de las dos operaciones anteriores se dice que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.





2.1.1) Dependencia linea

- Definición (Combinación lineal)

Una combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{K}^n$ es un vector que se escribe como

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m,$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ escalares llamados coeficientes de la combinación lineal

Ejemplo

$$\underset{\lambda_1}{1} \cdot \underbrace{(-1,0)}_{u_1} + \underset{\lambda_2}{2} \cdot \underbrace{(1,2)}_{u_2} = \underbrace{(1,4)}_{u}$$

$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$ u es combinación lineal de u_1 y u_2

- Definición (Independencia lineal)

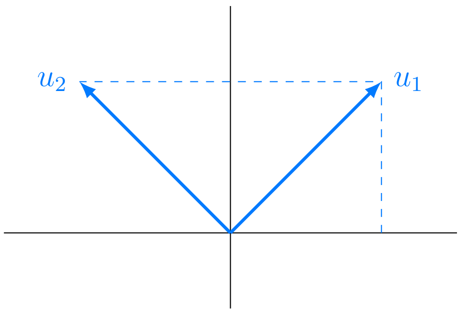
Se dice que los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{K}^n$ son linealmente independientes si una combinación lineal suya nula sólo puede ocurrir cuando todos los coeficientes son nulos, es decir, si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

En caso contrario, se dice que $u_1, \ldots, u_m$ son linealmente dependientes, es decir, $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ vector nulo.

Ejemplo

$u_1 = (1,1),\ u_2 = (-1,1)$

¿Son linealmente independientes?



$$\lambda_1 \cdot (1,1) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (0,0)$$

$$(\lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2) = (0,0)$$

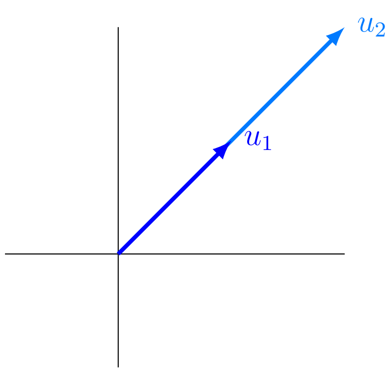
$$(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 \longrightarrow \lambda_2 = 0 \\ &2\lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \end{aligned}$$

Son linealmente independientes

$u_1 = (1,1),\ u_2 = (2,2)$

¿Son linealmente independientes?



$$\lambda_1 \cdot (1,1) + \lambda_2 \cdot (2,2) = (0,0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} &\lambda_1 = -2 \\ &\lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

Proporciona una combinación lineal nula con coeficientes no nulos.

Son linealmente dependientes.

- Proposición

Sean $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores y $u \in \mathbb{K}^n$. Entonces:

1) Todo subconjunto no vacío de S es linealmente independiente.

2) El conjunto $S \cup \{u\}$ es linealmente independiente si y sólo si u no es combinación lineal de $u_1, \ldots, u_m$.

- Demostración

1) Trivial

2) Si $S \cup \{u\}$ es linealmente independiente y $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$, entonces

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m u_m - 1 \cdot u = 0$$

es una combinación lineal nula con al menos un coeficiente no nulo. Por tanto, $S \cup \{u\}$ no es linealmente independiente (contradicción).

Recíprocamente, si $S \cup \{u\}$ es linealmente dependiente, existen escalones $r, r_1, \ldots, r_m$, no todos nulos tales que $ru + r_1 u_1 + \cdots + r_m u_m = 0$.

r no puede ser cero pues si lo fuera entonces

$$r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_m u_m = 0$$

y así $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$.

Por tanto, $u = -r^{-1} r_1 u_1 - \cdots - r^{-1} r_m u_m$ y así u es combinación lineal de $u_1, \ldots, u_m$.

- Definición (Base canónica de $\mathbb{K}^n$)

Se llama base canónica de $\mathbb{K}^n$ al conjunto de vectores

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

Nótese que todo vector $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ se puede expresar como combinación lineal de $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. En efecto:

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{e_1} + x_2 \underbrace{(0, 1, 0, \ldots, 0)}_{e_2} + \cdots + x_n \underbrace{(0, \ldots, 0, 1)}_{e_n}.$$

2.1.2) Normas de vectores

- Definición

Sea $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces se definen:

1) $\|u_1\|_p = (|x_1|p + |x_2|p + \cdots + |x_n|p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$

   - $p = 1$
   - $p = 2$ norma euclídea

2) $\|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ norma del máximo.

Ejemplo

$u = (1, -2, -1)$

$\|u\|_1 = |1| + |-2| + |-1| = 4$

$\|u_2\| = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |1|^2} = \sqrt{6}$

$\|u\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |1|\} = 2$

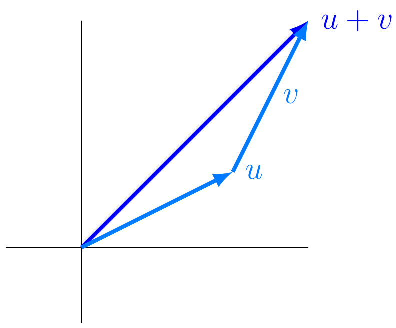
- Proposición

Sean $\|\cdot\|$ cualquiera de las normas anteriores, $u \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \longleftrightarrow u = 0$.

2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$.

3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular)



2.1.3) Producto escalar

- Definición

Dado $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define el producto escalar euclídeo de u por v como

$$u \cdot v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Nótese que $\|u\|_2 = \sqrt{u \cdot u}$

- Proposición (Propiedades del producto escalar)

  1) $u \cdot v = v \cdot u \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

  2) $u \cdot (v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2 \qquad \forall u,\ v_1,\ v_2 \in \mathbb{K}^n.$

  3) $(\alpha\, u) \cdot v = u \cdot (\alpha\, v) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u,\ v \in \mathbb{K}^n$

  4) $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0 \longleftrightarrow u = 0.$

- Proposición (Propiedades de la norma)

  1) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$

  2) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v)$

  3) $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (desigualdad de Cauchy-Shwarz).

De la propiedad (3) se tiene que si $u, v \neq 0$, entonces

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1;$$
$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Por tanto, existe un ángulo $0 \leq \varphi \leq \pi$ tal que

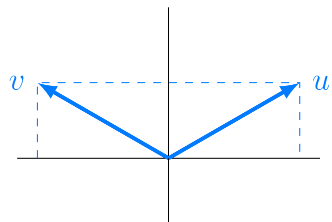
$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|v\| \cdot \|u\|}.$$

A este ángulo se le llama ángulo formado por los vectores u, v. Escribimos $\cos(u, v)$. De aquí se tiene:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(u, v).$$

Ejemplo

$u = (\sqrt{3}, 1)$, $v = (-\sqrt{3}, 1)$



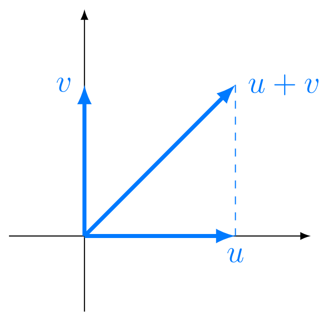
$$\cos(u,v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{(\sqrt{3},1)\cdot(-\sqrt{3},1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2}}$$
$$= \frac{-3+1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.}$$

2.1.4) Ortogonalidad

- Se dice que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales so $u \cdot v = 0$.

Por tanto, por la proposición anterior se tiene que si u y v son ortogonales, entonces

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$



- Definición

Un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ se dice ortogonal si $u_i \cdot u_j = 0$ si $i \neq j$. Si además los vectores son unitarios ($\|u_i\| = 1, \leq i \leq m$), entonces el conjunto se dice ortogonal.

Ejemplo

La base canónica de $\mathbb{R}^n$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un conjunto ortonormal.

1) Proposición

Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es ortogonal, entonces es un conjunto linealmente independiente.

- Demostración

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$$

Si multiplicamos por u_j:

$$\cancelto{0}{\lambda_1 u - 1 \cdot u_j} + \cdots + \cancelto{\lambda_j \|u_j\|^2}{\lambda_j u_j \cdot u_j} + \cdots + \cancelto{0}{\lambda_m u_m \cdot u_j} = 0 \longrightarrow \lambda_j = 0$$

2.2) Matrices

- Una matriz es un conjunto de números reales o complejos ordenados por filas (o columnas).

Denotaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto de todas las matrices de m-filas y n-columnas.

Si $m = n$ la matriz se dice cuadrada.

Ejemplo

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz de Hilbert}$$

Algunos tipos de matrices destacados:

- Diagonal:

$$D = (d_{ij}), \qquad d_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$
$$= \text{diag}[a, b, c, \dots]$$
$$= \begin{bmatrix} \text{a} & & & 0 \\ & \text{b} & & \\ & & \text{c} & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

- Si $a = b = c \dots$, la matriz se llama escalar.

- Si $a = b = c \dots, = 1$, la matriz se llama identidad y se denota I.

- Matriz triangular superior (inferior) si $a_{ij} = 0 \qquad i > j \quad (i < j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Triangular superior}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Triangular inferior}$$

2.2.1) Operaciones con matrices

- Suma:

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

$$A + B = C \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Producto por escalares: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, $\quad \lambda = j$, $\quad \lambda A = \begin{bmatrix} 3j & -2j \\ 0 & 6j \end{bmatrix}$

- Producto de matrices:

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij}) \longrightarrow A \cdot B \in M_{m\times n}$$

$$\pitchfork \qquad\qquad \pitchfork$$

$$M_{m\times p} \qquad M_{p\times n}$$

  - Si denotamos $C = A \cdot B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$A \cdot B = [2]$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de matrices no es conmutativo.

- Propiedades

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

4) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$

5) $A \cdot I = I \cdot A = A$

- Definición (Matriz traspuesta y matriz simétrica)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$. Se llama transpuesta de A, denotado A^T, a la matriz

$$A^T = (b_{ij}) \in M_{n \times m} \text{ con } b_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

- Una matriz cuadrada se dice simétrica si $A = A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Propiedades de la traspuesta

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

4) $(A\,B)^T = B^T\,A^T$

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se dice que A es invertible si existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

A la matriz B se le llama inversa de A y se denota $B = A^{-1}$.

Propiedades

1) Si A y B son invertibles, entonces $A \cdot B$ es invertible y $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2) Si A es invertible, entonces A^T es invertible y

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

2.2.2) Operaciones con matrices por bloques

– Notación

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1^T \\ u_2^T \\ \\ u_n^T \end{array} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & & v_m \end{array} & \end{array} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$$

- Producto como filas por columnas

$$A = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = \underbrace{u_i^T \cdot v_j}_{\text{producto escalar}}$$

- Producto matriz por columna

$$B = [v_1, \dots, v_m]_{n\times m} \qquad X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$B \cdot X = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

$$= \alpha v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} -1 \cdot a + 1 \cdot b \\ 2 \cdot a + 3 \cdot b \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

El producto por la derecha de una matriz A por una columna X es una combinación lineal de las columnas de A con los elementos de X como coeficientes.

– Producto de fila por matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m^T$$

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} = [-1 \cdot a + 2 \cdot b,\ 1 \cdot a + 3 \cdot b]$$

$$= a \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{u_1^T} + b \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}}_{u_2^T}$$

El producto por la izquierda de una fila X por una matriz A es una combinación lineal de las filas de A con los elementos de X como coeficientes.

– Producto como suma de matrices de rango 1

Cuando multiplicamos una columna por una fila

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & b_p \end{bmatrix}_{1\times p} = \left[\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_p \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_p \\ \hdashline a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_p \end{array}\right]_{m\times p}$$

obtenemos una matriz cuyas filas son proporcionales, es lo que llamaremos una matriz de rango 1.

Por tanto, el producto matricial

$$A \cdot B = [v_1, \ldots, v_n]_{n\times m} \cdot \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}_{m\times n} = \underbrace{v_1 u_1^T}_{\text{rango } 1} + \cdots + \underbrace{v_n u_n^T}_{\text{rango } n}$$

se puede expresar como suma de matrices de rango 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 14 & 16 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & 44 & 48 \\ 50 & 55 & 60 \\ 60 & 66 & 72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 47 & 52 & 57 \\ 64 & 71 & 78 \\ 81 & 90 & 99 \end{bmatrix}$$

2.2.3) Matrices ortogonales

- Definición

Una matriz cuadrada Q se dice ortogonal si es no singular y su inversa es su traspuesta, es decir, $Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I$.

Si $Q = [u_1, \ldots, u_m]$

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & \cdots & u_1^T u_n \\ & & \\ u_n^T u_1 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, una matriz es ortogonal si y sólo si sus filas (columnas) forman un conjunto ortonormal de vectores

- Proposición

Sean P, Q ortogonales. Entonces:

1) $P \cdot Q$ es ortogonal

2) $Q\,u \cdot Q\,v = u \cdot v \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^4$

3) $\|Q_u\| = \|u\| \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}^4$

- Demostración

1) $(PQ)^T = Q^T P^T =!^{-1} P^{-1} = (PQ)^{-1}$

2) $Qu_{n\times n} \cdot Qv_{n\times 1} = (Qu)^T_{1\times n} \cdot Qv_{n\times 1} = u_T \cdot Q^T \cdot Qv = u^T \cdot v = u \cdot v$

3) $\|Qu\|^2 = Qu \cdot Qu = u \cdot u = \|u\|^2.$

2.2.4) Tensores

- Definición (Tensor de orden 3)

Un tensor de orden 3 es una colección finita de matrices. Por tanto, el tensor T lo indexamos como

$$T = (t_{ijk}), \qquad \begin{array}{l} 1 \le i \le I \\ 1 \le j \le J \\ 1 \le k \le K \end{array}$$

De manera recurrente se define un tensor de cualquier orden n. En particular, un vector es un tensor de orden 1, y una matriz un tensor de orden 2.

Hoja de ejercicios Tema 2: Vectores, matrices y tensores

1) Determina la verdad o falses de la siguiente afirmación: si u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3, entonces u_3 es combinación lineal de u_1 yu_2

2) Consideremos los vectores $u = (1,1,0)$ y $v = (0,1,1)$. Encuentra un vector w ortogonal a u y v. Comprueba que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v. Encuentra ahora un vector que <u>no</u> sea combinación lineal de u, v y comprueba que no es ortogonal a w.

3) Haz un dibujo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x,y)\|_1 = 1\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x,y)\|_2 = 1\}$$

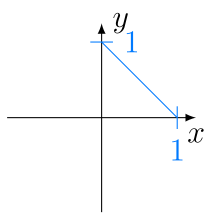
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x,y)\|_\infty = 1\}$$

$\{x, y \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_1 = 1\}$

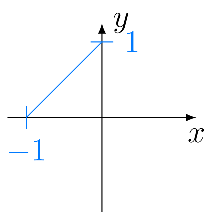
$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$

- Posibles casos

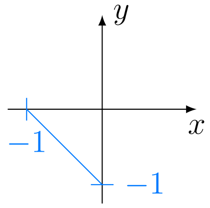
1) $x, y \geq 0 \rightarrow \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| = x + y = 1 \rightarrow y = -x + 1$



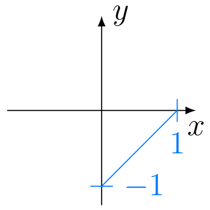
2) $x \leq 0, y \geq 0 \rightarrow \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| = -x + y = 1 \rightarrow y = x + 1$



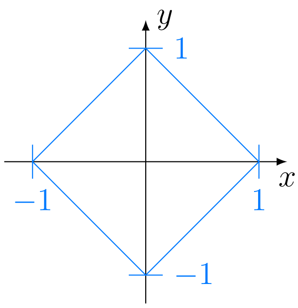
3) $x, y \leq 0 \rightarrow \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| = -x - y = 1 \rightarrow y = -x - 1$



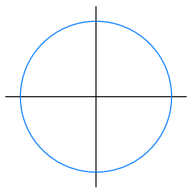
4) $x \geq 0, y \leq 0 \rightarrow \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| = x - y = 1 \rightarrow y = x - 1$



En resumen:

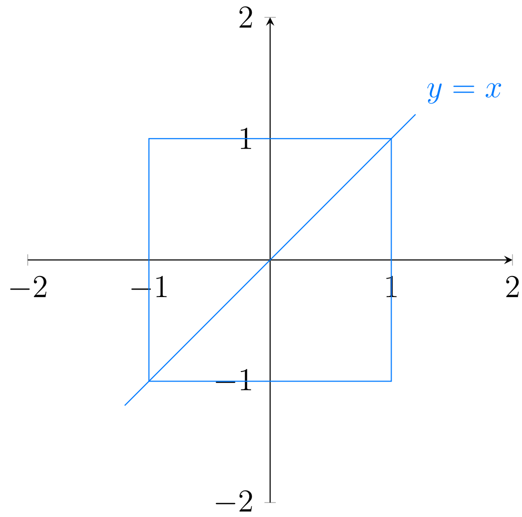


$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_2 = 1\},\ \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \longleftrightarrow x^2 + y^2 = 1$



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_\infty = 1\}$

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$



- Posibles casos

1) $x \geq 0, y \geq 0 \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{x,y\} = 1$

2) $x \leq 0, y \geq 0 \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{-x,y\} = 1$

3) $x \leq 0, y \leq 0 \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{-x,-y\} = 1$

4) Prueba que $\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty}$

$$\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty}, \qquad u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\|u\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\|u\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

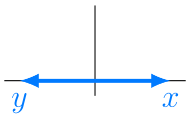
$$\begin{aligned}\|u\|_2^2 &= |x_1|\,|x_1| + |x_2|\,|x_2| + \cdots + |x_n|\,|x_n| \\ &\leq |x_1| \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} + |x_2| \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} + \cdots + |x_n| \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \\ &\leq (|x_1| + \cdots + |x_n|) \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \\ &= \|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty\end{aligned}$$

5) Dos vectores son ortogonales cuando su podructo escalar es cero, pero ¿qué pasa si su producto es próximo a cero? Sean $x = [1, -0.75]$ e $y = [0.3, 0.3]$. Calcular el producto escalar $x \cdot y$ y el ángulo que forman. ¿Qué conclusión puedes sacar?
Si dos vectores x, y son unitarios, entonces $-1 \leq x \cdot y \leq 1$ (¿por qué?). En este caso, ¿qué podemos decir si $x \cdot y$ es aproximadamente $-1, 1$ o cero?

$\|x\| = \|y\| = 1 \qquad -1 \leq x \cdot y \leq 1 \qquad$ ¿Por qué?

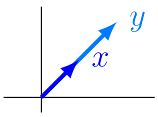
$-1 \leq x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cos(x, y) = \cos(x, y) \leq 1$

Si $x \cdot y \simeq -1 \longrightarrow$



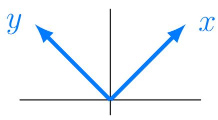
Paralelos y de sentido contrario

Si $x \cdot y \simeq 1 \longrightarrow$



Paralelos y del mismo sentido

Si $x \cdot y \simeq 0 \longrightarrow$ Ortogonales



6) Sean u, v dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$ que forman un ángulo de $60°$. Calcula $\|2u + v\|$.

$$
\begin{aligned}
\|2u+v\|^2 &= (2u+v)\cdot(2u+v)\\
&= 4u\cdot u + 2u\cdot v + 2v\cdot u + v\cdot v\\
&= 4\underbrace{\|u\|^2}_{1} + \underbrace{2u\cdot v + 2v}_{(*)}\cdot u + \underbrace{\|v\|^2}_{1}
\end{aligned}
$$

$$
(*) = 4u\cdot v = 4\underbrace{\|u\|}_{1}\cdot\underbrace{\|v\|}_{1}\underbrace{\cos(u,v)}_{\cos 60^\circ}
$$

7) Sean u, v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ de norma 2 y 3 repectivamente que forman un ángulo de 60°. ¿Qué angulo forman los vectores u y $2u-v$?

8) Calcula $A+B$, $(A+B)^\intercal$, AB, BA, $(AB)^\intercal$, $A^\intercal B^\intercal$ y $B^\intercal A^\intercal$ para las matrices:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

9) Prueba que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe A

$$
A = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1^\intercal \\ u_2^\intercal \end{array}\\
\begin{array}{cc} u_1 & \quad u_2 \end{array} &
\end{array}
$$

$A\cdot A =$

$u_1^\intercal \cdot v_1 = 0 \to u_1^\intercal$ y v_1 son ortogonales

$u_2^\intercal \cdot v_1 = 0 \to u_2^\intercal$ y v_1 son ortogonales

$u_2^\intercal \cdot v_2 = 0 \to u_2^\intercal$ y v_2 son ortogonales

$$
\left.\begin{array}{l}
u_1^\intercal \cdot v_2 = 1\\
u_1^\intercal \cdot v_2 = u_1^\intercal \cdot \lambda v_1 = \lambda u_1^\intercal \cdot v_1 = 0
\end{array}\right\}\ \text{NO}
$$

10) ¿Es cierta para matrices la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$?

$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + A\cdot B + b\cdot A + B^2$

Para que fuese cierto, el producto de matrice debería ser conmutativo. Sabemos que no lo es. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11) ¿Existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A\cdot A^\intercal = 0$? ¿y si son matrices complejas?

¿Existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A\cdot A^\intercal = 0$? ¿Y complejas?

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow u_1^\intercal \\ \leftarrow u_2^\intercal \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow u_1 & \uparrow u_2 \end{array} & \end{array} \qquad A^\intercal = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow u_1^\intercal \\ \leftarrow u_2^\intercal \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow u_1 & \uparrow u_2 \end{array} & \end{array}$$

$$A\cdot A^\intercal = \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ u_2^\intercal \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^\intercal\cdot u_1 & u_1^\intercal\cdot u_2 \\ u_2^\intercal\cdot u_1 & u_2^\intercal\cdot u_2 \end{bmatrix}$$

$$u_1^\intercal\cdot u_1 = \|u_1\|^2 = 0 \to u_1^\intercal = [0,0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2^\intercal\cdot u_2 = \|u_2\|^2 = 0 \to u_2^\intercal = [0,0]$$

$$A = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \qquad A^\intercal = \begin{bmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^\intercal = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z1^2 + z_2^2 & z_1z_3 + z_2z_4 \\ z_2z_1 + z_4z_2 & z_3^2 + z_4^2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} z_1 = j & z_3 = j \\ z_2 = 1 & z_4 = 1 \\ \multicolumn{2}{l}{z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_4 = j^2 + 1 = 0} \end{array}$$

12) Sean A, B matrices tales que $I + AB$ es invertible y sea S la inversa de $I + AB$. Prueba que $I + BA$ también es invertible y su inversa es $I - BSA$.

Hipótesis: ¿qué es lo que sabemos?

$$\boxed{\begin{array}{l} (I + AB) \cdot S = I \\ S(I + AB) = I \end{array}}$$

Tesis: lo que queremos probar

$$(I + BA) \cdot (I - BSA) \stackrel{?}{=} I$$

$$(I - BSA) \cdot (I + BA) \stackrel{?}{=} I$$

$$\begin{aligned} (I + BA) \cdot (I - BSA) &= I - \overline{BSA} + BA - BA\overline{BSA} \stackrel{?}{=} I \\ &= I + BA - B(SA + ABSA) \\ &= I`BA - B\underbrace{(S + ABS)}_{I \text{ por hipótesis}}A \\ &= I + \cancel{BA} - \cancel{BA} \\ &= I \end{aligned}$$

13) Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Si llamamos **flop** a una operación, ya sea una suma, resta, multiplicación o división, prueba que para calcular

$A_{n \times p} \quad B_{p \times m}$

$A \cdot B$ requiere $m \times n(2p - 1)$ flops

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & & \\ b_{p1} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$$

$$\text{fila} \times \text{columna} = p + p - 1 = 2p - 1$$

$$\text{fila} \times \text{todas columnas} = m(2p - 1)$$

$$\text{todas las filas} \times \text{todas columnas} = \boxed{nm(2p-1)}$$

$$A_{\underset{n}{10}\times\underset{p}{2}} \qquad B_{\underset{p}{2}\times\underset{m}{10}} \qquad C_{10\times 10}$$

$$\underset{\xrightarrow[\text{backward}]{\hspace{5em}}}{(A \cdot B)_{n\times m} \cdot C} = \underset{\xleftarrow[\text{backward}]{\hspace{5em}}}{A \cdot (B \cdot C)_{2\times 10}}$$

14) Dadas dos matrices cuadradas A, B, se define el **conmutador** de A, B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por otra parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguientes tres matrices, llamadas matrices de Pauli:

$$S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \; S_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ matrices de Pauli}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \; h \text{ constante de Plank}$$

$$[S_x, S_y] = \hbar S_z [S_x, S_y] = S_x S_y - S_y S_x = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} 2j & 0 \\ 0 & -2j \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\hbar^2 j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = j\hbar \underbrace{\frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{S_z}$$

$$S_x S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

$$S_y S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

15) Si A es una matriz simétrica, ¿son las matrices $B^\intercal A B$, $A + A^\intercal$ y $A - A^\intercal$ simétricas?

$$
\begin{aligned}
(B^\intercal AB)^\intercal &= (A\cdot B)^\intercal (B^\intercal)^\intercal \\
&= B^\intercal A^\intercal B \\
&= B^\intercal AB
\end{aligned}
$$

por ser A simétrica

Por tanto, $B^\intercal AB$ es simétrica.

$(A + A^\intercal)^\intercal = A^\intercal + (A^\intercal)^\intercal = A^\intercal + A = A + A^\intercal$ Si es simétrica

$(A - A^\intercal)^\intercal = A^\intercal - (A^\intercal)^\intercal = A^\intercal - A \neq A - A^\intercal$ No es simétrica

16) Prueba que si A es una matriz invertible simétrica, entonces A^{-1} es también simétrica.

$(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1} = \{A \text{ simétrica}\} = A^{-1}$

17) Sean $u_1, \ldots, u_m$ vectores de $\mathbb{K}^n$ y supongamos que para ciertos escalares $x_1, \ldots, x_m$ se tiene $x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0$. Expresa esta última igualdad en forma matricial.

$$
x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0 \longleftrightarrow Ax = 0 \text{ donde } A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}
$$

18) Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Observa que $1 + v^\intercal u$ es un escalar, que suponemos no nulo. Prueba que la matriz $I + u\,v^\intercal$ es no singular y su inversa es

$$
(I + u\,v^\intercal)^{-1} = I - \frac{u\,v^\intercal}{1 + v^\intercal u}
$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$v^\intercal \cdot u = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$I + u\,v^\intercal \in M_{n\times n}$$

$$\begin{aligned}\left(I - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u}\right)(I + u\,v^\intercal) &= I + u\,v^\intercal - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u} - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u} \cdot u\,v^\intercal \\ &= I + u\,v^\intercal - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u \cdot u \cdot v^\intercal} \\ &= I + u\,v^\intercal - \frac{(u + u\cdot v^\intercal \cdot u)v^\intercal}{1+v^\intercal u} \\ &= I + u\,v^\intercal - \frac{u\cancel{(1+v^\intercal u)}\cdot v^\intercal}{\cancel{1+v^\intercal}} \\ &= I + u\,v^\intercal - u\,v^\intercal = I\end{aligned}$$

De igual manera se prueba que

$$(I + u\,v^\intercal)\cdot\left(I - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u}\right) = I$$

19) Sea A la matriz dada por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} invertible. Prueba que existen matrices X, Y tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ e I es la matriz identidad del tamaño adecuado (la matriz S se denomina **complemento de Schur** de A_{11}).

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A.11 & 0 \\ XA_{11} & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{bmatrix}$$

$$A_{11}Y = A_{12} \longrightarrow Y = A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$XA_{11} = A_{21} \longrightarrow X = A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$\begin{aligned} A_{22} = XA_{11}Y + S &= A_{21}\underbrace{A_{11}^{-1}A_{11}}_{1}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \\ &= A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \\ &= A_{22} \end{aligned}$$

20) Expresa la matriz AB como suma de matrices de rango 1, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B$ como suma de matrices de rango 1.

$$A \cdot B_{2\times 3} = v_1u_1^\intercal + v_2u_2^\intercal + v_3u_3^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 4 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

21) Sea $u^\intercal = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $v^\intercal = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ y $w^\intercal = [a, b, c]$. Halla a, b, c para que la matriz $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal de determinante 1.

$$u^\intercal = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$v^\intercal = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$w^\intercal = [a,\ b,\ c]$$

$$\begin{aligned}
0 = u^\intercal \cdot w^\intercal &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cdot [a,\ b,\ c] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}c \\
0 = v^\intercal \cdot w^\intercal &= \left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cdot [a,\ b,\ c] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}a + \frac{1}{\sqrt{3}}b + \frac{1}{\sqrt{3}}c
\end{aligned}$$

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a & & & + & c & = & 0 \\ -a & + & b & + & c & = & 0 \\ -a & - & 2b & + & c & = & \sqrt{2}\sqrt{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow c = -a \\ \\ \longrightarrow 3b = -\sqrt{2}\sqrt{3} \longrightarrow b = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{array}$$

$$2c = -b \longrightarrow c = -\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \longrightarrow a = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$$

Tema 3: Sistemas de ecuaciones y determinantes

3.1) Operaciones elementales en una matriz

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ llamaremos operaciones elementales de filas en A a cualquiera de las siguientes operaciones:

1) Intercambiar dos filas

2) Multiplicar una fila por un escalar.

3) Añadir a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Estas operaciones se pueden llevar a cabo multiplicando A por una determinada matriz que llamaremos elemental. Hay tres tipos de matrices elementales:

1) Matriz de permutación simple P_{ij}: se obtiene permutando las filas $\imath$ y $\jmath$ en la identidad.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_{12} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

2) Matriz de dilatación $D_s(r)$: se obtiene multiplicando la fila S de la identidad por r.

Ejemplo

$$D_2(5) = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{matrix}, \quad D_2(5) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \end{bmatrix}$$

3) Matriz de adición $S_{ij}(r)$: se obtiene sumando a la fila $\imath$ la $\jmath$ multiplicada por r.

Ejemplo

$$S_{12}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- Propiedades

La matrices elementales son invertibles. Además:

1) $P_{ij}^{-1} = P_{ji}$

2) $D_s(r)^{-1} = D_s\left(\frac{1}{r}\right)$

3) $S_{ij}(r)^{-1} = S_{ij}(-r)$

- Definición (Matriz de permutación)

Llamaremos matriz de permutación P a aquella que se expresa como producto de matrices de permutación elementales.

Ejemplo

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{12}P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Definición (Matrices equivalentes)

Se dice que dos matrices A y B son equivalentes si existen matrices invertibles P y Q de modo que

$$\boxed{B = P\,A\,Q}$$

- Definición

Dada una matriz, se llama pivote de una fila a la primera entrada (contando de izquierda a derecha) no nula de esa fila.

Se dice que la matriz escalonada por filas si:

1) El pivote de cada fila no nula está estrictamente a la derecha del pivote de la fila anterior.

2) Las filas nulas, si las hay, son las últimas.

La matriz escalonada reducida por filas si además:

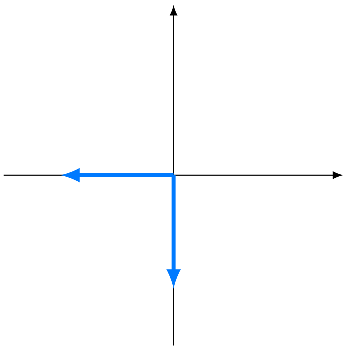
1') El pivote de cada fila no nula vale 1.

2') Cada pivote es el único elemento no nulo de su columna.

Ejemplo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{No escalonada}} \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Escalonada pero no reducida}} \qquad C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{Escalonada reducida}}$$

- Teorema (Factorización PAQ)



Toda matriz A es equivalente a un matriz de la forma

$$B = \left[\begin{array}{c|c} Ir & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

Nota: La forma de llegar de A a B es utilizando operaciones elementales. Este proceso se llama **eliminación gaussiana**.

es decir, existen matrices invertibles P y Q de modo que

$$B = PAQ$$

Al número r, es decir, al número de filas no nulas que resultan después de escalonar una matriz se le llama rango de A y se denota $r = \mathrm{rg}(A)$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hacemos operaciones elementales fila con la matriz.

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{3}F_2} \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = PA,$$

con

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora realizamos operaciones elementales columna:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \longleftrightarrow C_3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - C_1]{C_3 \to C_3 - 2C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se tiene que $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = PAQ$$

$\mathrm{rg}(A) = 2$

3.2) Sistemas de ecuaciones

- Definición

Un sistema lineal de m-ecuaciones con n-incógnitas es un sistema del tipo:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \hdashline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que en forma matricial escribimos como

$$(*) \qquad Ax = n$$

donde:

- $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz del sistema.
- $b = (b_i) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el término independiente.
- $x = (x_j)$ es el vector incógnita.

El sistema $(*)$ se dice:

- Homogéneo si $b = 0$
- Incompatible: si no tiene solución.
- Compatible determinado: si tiene una única solución.
- Compatible indeterminado: infinitas soluciones.

- Teorema (Rouché-Frobenius)

Consideremos el sistema $(*)$ y sea $(A|b)$ la llamada matriz. Entonces:

1) Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) =$nº de incógnitas, entonces el sistema $(*)$ es compatible determinado. (SCD)
2) Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) <$nº de incógnitas, entonces $(*)$ es compatible indeterminado (SCI). La solución depende de nº de incógnitas$-\mathrm{rg}(A)$ parámetros.
3) Si $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A|b)$, el sistema $(*)$ es incompatible.

3.2.1) Método de Gauss para la resolución de sistemas lineales

Consiste en hacer operaciones elementales fila sobre la matriz $(A|b)$ hasta conseguir una matriz escalonada cuyo sistema asociado se resuelva fácilmente.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 3t = 6 \\ x + 2y - 2z - t = 3 \\ 4x + 5y - 2z + t = 12 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right] \xleftrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_3 - 4F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 2 < 4 = \text{nº de incógnitas. SCI}$$

La solución depende de 2 parámetros.

$$\left.\begin{array}{ll} t = \lambda & x + 2y - 2\mu - \lambda = 3 \\ z = \mu & -3y + 6\mu + 5\lambda = 0 \end{array}\right\}$$

$$y = 2\mu + \frac{5}{3}\lambda$$

$$\begin{aligned} x = 3 - 2y + 2\mu + \lambda &= 3 - 2\left(2\mu + \frac{5}{3}\lambda\right) + 2\mu + \lambda \\ &= 3 - 4\mu - \frac{10}{3}\lambda + 2\mu + \lambda \\ &= \boxed{3 + 2\mu - \frac{7}{3}\lambda} \end{aligned}$$

3.2.2) Cálculo de la inversa de una matriz mediante eliminación Gaussiana

- Método

Realizar operaciones elementales fila sobre la matriz $(A|I)$ hasta conseguir que a la izquierda aparezca la identidad. A la derecha tendremos A^{-1}.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{3}F_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

3.3) Determinantes

- Definición

Sea $A \in M_2(\mathbb{K})$. Se define el determinante de A, denotado $|A|$ o $\det(A)$, como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Si $A \in M_3(\mathbb{K})$, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} =&a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

Para matrices de mayor tamaño, el determinante se define de manera recursiva. Veámoslo:

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se llama menor complementario del elemento a_{ij} al determinante $(|A_{ij}|)$ de la submatriz A_{ij} que se obtiene eliminando la fila $\imath$ y la columna $\jmath$ de la matriz original A.

Se llama adjunto de a_{ij}, denotado $\triangle_{ij}$, al escalar

$$\triangle_{ij} = (-1)^{\imath+\jmath}|A_{ij}|.$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 24 - (3 + 8) = 21$$

$$\triangle_{23} = (-1)^{2+3} A_{23} = -21$$

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. El determinante de A se define de manera recurrente como:

$n = 1, \quad |(a)| = a$

$n > 1 \quad |A| = a_{i1}\triangle_{i1} + a_{i2}\triangle_{i2} + \cdots + a_{in}\triangle_{in}$

Nota: También se puede definir eligiendo una columna. La definición no depende de la fila o columna elegidas.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 2 \cdot (4-4) + 4 \cdot 6 = 21$$

Desarrollando por la segunda columna:

$$2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot | \quad | + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(4-4) + 0 - 3 \cdot (1-8) = 21$$

3.3.1) Propiedades básicas

1) $|A| = |A^\intercal|$

2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

3) A es no singular (invertible) si y sólo si $|A| \neq 0$. En este caso

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

3.3.2) Propiedades de los determinantes y las operaciones elementales

1) $\big|[u_1, \dots, u_j + u_j', \dots, u_n]\big| = |[u_1, \dots, u_j, \dots, u_n]| + \big|[u_1, \dots, u_j', \dots, u_n]\big|$

2) $\det[u_1, \dots, \alpha u_j, \dots, u_n] = \alpha \cdot \det[u_1, \dots, u_j, \dots, u_n]$

3) $\det[u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n] = -\det[u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n]$

4) Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un escalar, el determinante no cambia.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 & a+5 \\ a+6 & a+7 & a+8 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F-2\to F_2-F_1} \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3\to F_3-F_2} 2\cdot \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.3.3) Resolución de sistemas lineales usando determinantes

Consideremos el sistema $Ax = b$. Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución que viene dada por

$$x_i = \frac{\triangle_i}{|A|}, \qquad \text{(regla de Cramer)}$$

donde $\triangle_i$ es el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo la columna i-ésima de A por el término independiente b.

Ejemplo

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ -x+z&=1 \\ x+y-z&=1 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1-1-(1+1) = -2 \neq 0.$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1-(1-1) = 2$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1-1-(1+1+1) = -4$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - (1-1) = 0$$

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1,\ x_2 = \frac{\triangle_2}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2,\ x_3 = \frac{\triangle_3}{|A|} = 0$$

3.3.4) Cálculo de la inversa mediante determinantes

- Definición (Matriz adjunta)

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se llama matriz adjunta de A, denotado $\hat{A}$, a la matriz cuyas entradas son los adjuntos de la entrada de A, es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces $\hat{A} = (\triangle_{ij})$.

- Proposición

Si A es invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\hat{A}^{\intercal}.$$

Ejemplo

Sea $Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ortogonal con $|Q| = +1$. Vamos a calcular su inversa.

$\triangle_{11} = |d| = d \qquad \triangle_{12} = -|b| = -b$

$\triangle_{21} = -|c| = -c \qquad \triangle_{22} = |a| = a$

$\hat{Q} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \hat{Q}^{\intercal} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

Como $|Q| = +1 \longrightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

Recordaremos que como Q es ortogonal, $Q^{-1} = Q^{\intercal}$.

Por tanto

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} a = d \\ b = -c \end{matrix}$$

En resumen:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$|Q| = \begin{bmatrix} a & -b \\ \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

Hoja de ejercicios Tema 3: Sistemas de ecuaciones y determinantes

1) Sea $\{w_1, w_2, w_3\}$ un conjunto independiente de vector de $\mathbb{R}^3$. Se definen los vectores $v_1 = w_1 + w_2, v_2 = w_1 + 2w_2 + w_3$ y $v_3 = w_2 + cw_3$. Si $V = [v_1, v_2, v_3]$ y $W = [w_1, w_2, w_3]$, entonces se tiene $V = WC$ con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Qué condición debe cumplir c para que los vectores v_1, v_2, v_3 sean linealmente independientes?

2) Dadas las matrices

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Halla matriz de permutación P tal que $PA = B$ y escribe P como producto de matrices de permutación simples.

3) Se tiene una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño 5×5, donde a_{ij} en la cantidad de mensajes que la persona $\imath$ manda a la persona $\jmath$. Las filas y columnas siguen el orden: Juan, Ana, Pedro, María, Maite. Halla una matriz de permutación P tal que las columnas y filas de $PAP^\intercal$ sigan el orden: Ana, María, Juan, Maite, Pedro.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \longleftrightarrow J \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P \longrightarrow J \qquad P_{34}$

$P \longrightarrow \text{MAY} \qquad P_{45}$

$P_{ij} =$ permutación entre la fila i y la j

$$J \longleftrightarrow M \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = P_{45}\, P_{34}\, P_{24}\, P_{12}$

4) Consideremos la matriz por bloques $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ con A una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times p$. Supongamos que haciendo operaciones elementales de filas se obtiene la matriz

$\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}$. Prueba que $X = A^{-1}B$.

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \underset{\text{fila}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} I & X \end{bmatrix} \longrightarrow X = A^{-1}B$$
$$\begin{bmatrix} A & I\,B \end{bmatrix} \longrightarrow [I \quad \underbrace{A^{-1}B}_{X}]$$

Cada operación fila se traduce es el producto de una matriz elemental por I. B permanece inalterada.

5) Halla una relación de dependencia entre los vectores $u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (2, 1, 0, 1), u_3 = (0, 2, -1, 1)$ y $u_4 = (3, -1, 2, 0)$.

6) Sean A y B matrices del mismo tamaño. Sea A' la matriz que resulta de A después de intercambiar las columnas $\imath, \jmath$ y sea B' la matriz que resulta de B después de intercambiar las filas $\imath, \jmath$. Escribe las matrices A' y B' en términos de A, B y matrices elementales. ¿Por qué se verifica que $AB = A'B'$?

$$A' = AP_{ij}^{\text{columna}}$$
$$B' = P_{ij}^{\text{fila}}B$$
$$A'B' = A_{ij}^{c}P_{ij}^{f}B$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}^{c} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{ij}^{f} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}^{c} \cdot P_{ij}^{f} = I$$

7) Calcular el rango de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

en función de los parámetros a y b.

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Calcula el rango de B

<u>Posibles casos:</u>

1) $a = b = 0 \longrightarrow B = [0] \longrightarrow \text{rg}(B) = 0$

2) $a \neq 0, b = 0 \longrightarrow \text{rg}(B) = 4$

3) $a = 0, b \neq 0 \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$ $\text{rg}(B) = 4$

$a \neq 0, b \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{b}{a}F_1} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{b}{a}F_2} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & \dfrac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 \to F_4 - \frac{b}{a}F_3} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & \dfrac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \dfrac{b^4}{a^3} \end{bmatrix}$$

Si $a - \dfrac{b^4}{a^3} = 0 = \left\{a^4 - b^4 = 0 \longleftrightarrow a = \pm b\right\} = \text{rg}(B) = 3$

Si $a \neq \pm b \longrightarrow \text{rg}(B) = 4$

8) Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ calcula matrices invertibles P y Q tales que

$$PMQ = \left[\begin{array}{c|c} 1_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

con r el rango de M.

9) Halla la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y expresa A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

10) Determina el valor del parámetro a para el cual la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$ es invertible y calcula su inversa.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_4 \to F_4 - a^3F_1 \\ F_3 \to F_3 - a^2F_1}]{F_2 \to F_2 - aF_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a & 1 & -a^3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - a^2F_2]{F_3 \to F_3 - aF_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a^4 - a^3 & 0 & -a^2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_4 \to F_4 - aF_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a^4 - 2a^3 & a^2 & -a^2 + a & 1 \end{array}\right]$$

11) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z - 2t &= 5 \\ -2x - 4y + 2z + 4t &= -10 \\ y + t &= 1 \\ x + 3y - z - t &= 6 \\ x - z - 4t &= 3 \end{aligned}\right\}$$

12) Discute en el cuerpo de los números reales los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & ay & & & + & at & = & a \\ ax & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & + & y & + & az & + & t & = & 1 \end{array}\right.$$

13) Si $A = [u_1, \ldots, u_n]$, expresa el determinante de $B = [u_n u_1 \cdots u_{n-1}]$ en función del determinante de A.

14) Una matriz A que cumple $A = -A^\intercal$ se llama **antisimétrica**. Prueba que una matriz antisimétrica de tamaño impar tiene determinante nulo.

A antisimétrica de tamaño n impar

$$A = -A^{\intercal} \longrightarrow |A| = 0$$
$$|A| = |-A^{\intercal}| = (-1)^n|A^{\intercal}| = (-1)^n|A| \longrightarrow |A| = 0$$

15) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \hdashline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{array}\right| \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hdashline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{array}\right| =$$

$$2 \cdot \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hdashline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{array}\right| = 0$$

16) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x + y + & = & 0 \\ 4x - 6y - 2z & = & 2 \\ -2x + 15y + 7z & = & -4 \end{array}\right\}$$

Observa que podemos eliminar la última ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras. Considerando ahora los términos en z como si fuesen términos independientes, observa que el sistema es un sistema de Cramer en x, y. Resuélvelo con la fórmula de Cramer y después expresa las soluciones en la forma $x_0 + u$ (x_0 solución particular y u solución genérica del sistema homogéneo).

$$\left.\begin{array}{l}2x+y=-z\\ 4x-6y=2+2z\end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -6\end{vmatrix}=-16$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-z & 1\\ 2+2z & -6\end{vmatrix}}{-16}=-\frac{1}{16}(6z-2-2z)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -z\\ 4 & 2+2z\end{vmatrix}}{-16}=-\frac{1}{16}(4+4z+4z)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}z$$

$$\begin{cases}x= & \frac{1}{8}-\frac{1}{4}z\\ y= & -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}z\\ z= & z\end{cases}\qquad x_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{4}\\ 0\end{bmatrix}$$

Sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l}2x+y+z=0\\ 4x-6y-2z=0\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}-4x-2y+2z=0\\ 4x-6y-2z=0\end{array}\right\}$$

Solución genérica del homogéneo

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{4}z\\ y=-\frac{1}{2}z\\ z=z\end{cases}\qquad\begin{array}{l}-8y=4z\to y=-\frac{1}{2}z\\ 2x=-y-z=+\frac{1}{2}z-z=-\frac{3}{2}z\\ x=-\frac{1}{4}z\end{array}$$

Tema 4: Subespacios vectoriales, bases y coordenadas

- Definición (Subespacio vectorial)

Un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ es un subconjunto W de $\mathbb{K}^n$ que cumple:

1) Si $w, w' \in W \longrightarrow w + w' \in W$

2) Si $w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K} \longrightarrow \alpha w \in W$

Nota: Nótese que el vector 0 siempre pertence a todo subespacio vectoria W. En efecto dado $w \in W$ se tiene que $-1 \cdot w = -w \in W$. Además $w + (-w) = 0 \in W$

Ejemplo

Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y W el conjunto de soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces, w es un subespacio vectorial. En efecto: si $w, w^{\perp} \in W$, entonces $Aw = 0, Aw' = 0$. Por tanto, $A(w + w') = Aw + Aw' = 0 + 0 = 0$, lo que implica que $w + w' \in W$.

Si $w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $Aw = 0$ y $A(\alpha w) = \alpha Aw = 0$. Por tanto, $aw \in W$.

A este subespacio se le llama núcleo de A y se denota $\mathrm{nuc}(A)$.

Ejemplo 1

Sea $W = \mathbb{K}^n$. Entonces los vectores

$$B = \{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)\}, \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

son una base de W. En efecto:

1) B es un conjunto generador ya que si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$\begin{aligned} v &= v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n \\ &= v_1(1, 0, \ldots, 0) + v_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + v_n(0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

2) B es linealmente independiente:

$$\sum \alpha_i e_i = 0 \longleftrightarrow \alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_n(0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0)$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$

Ejemplo 2

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $W = \text{nuc}(A)$.

Vamos a obtener una base de W.

$$Ax = 0 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas}$$

Desde un punto de vista computacional interesa disponer de bases ortonormales. El Algoritmo de Gram-Schmidt proporciona un método sistemático para construir una base ortonormal a partir de otra dada.

- Teorema (Algoritmo de Gram-Schmidt)

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un conjunto de vectores lineales independiente de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe un conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ de modo que

$$< v_1, v_2, \ldots, v_m > = < u_1, u_2, \ldots, u_m >$$

- Demostración

1) Sea $v_1' = v_1$

2) $v_2' = v_2 + \alpha v_1$. Imponemos

$$0 = v_1' \cdot v_2' = v_1 \cdot v_2 + \alpha v_1 \cdot v_1' = v_1' \cdot v_2 + \alpha \|v_1'\|^2 \longrightarrow \alpha = -\frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} \longrightarrow v_2' = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} v_1$$

obviamente $< v_1, v_2 > = < v_1', v_2' >$

3) $v_3' = v_3 + \alpha v_2' + \beta v_1'$. Imponemos

$$0 = v_3' \cdot v_2' = v_3 \cdot v_2' + \alpha v_2' v_2' + \cancelto{0}{\beta v_1' v_2'} \longrightarrow \alpha = -\frac{v_3 \cdot v_2'}{\|v_2'\|^2}$$

$$0 = v_3' \cdot v_1' = v_3 \cdot v_1' + \cancelto{0}{\alpha v_2' \cdot v_1'} + \beta v_1' \cdot v_1' \longrightarrow \beta = -\frac{v_3 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'} = -\frac{(0,1,1) - (1,1,0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$v_3' = (0,1,1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) - \frac{1}{2}(1,1,0)$$

Finalmente:

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1\|}, \quad u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \quad u_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|}$$

4.1) Suma de subespacios vectoriales

- Definición (Suma de subespacios)

Sean $U, V \subset \mathbb{K}^n$ dos subespacios vectoriales. Se llama suma de los subespacios u y v, denotado,

$$U + V = \{w = u + v, u \in U, v \in W\}$$

obviamente, $U + V$ es un subespacio vectorial.

Además, si $U =< u_1, \ldots, u_r >, V =< v_1, \ldots, v_s >$ entonces

$$U + V =< u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s > .$$

- Proposición

La suma $U + V$ es directa si y sólo si $U \cap V = \{0\}$. En este caso, cada vector $w \in U \oplus V$ se escribe de forma única como $w = u + v, u \in U, v \in W$.

4.2) Ortogonal a un subespacio

- Definición

Dado un subespacio vectorial $U \subset \mathbb{R}^n$, se define su subespacio ortogonal como

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : u \cdot v = 0 \, \forall u \in U\}$$

- Proposición

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial. Entonces

$$U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$$

- Demostración

Es fácil ver que $u^\perp$ es un subespacio vectorial. Además, si $u \in U \cap U^\perp$ entonces $u \cdot u = 0 \longrightarrow u = 0$.

Sea B una base ortogonal de U y la ampliamos a una base ortogonal $B \cup B'$ de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\mathbb{R}^n =< B > \oplus < B' > \subseteq U \oplus U^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$$

4.3) Subespacios asociados a una matriz. Rango

- Definición

Dada $A \in M_{m\times n}$, definimos los siguientes subespacios, llamados fundamentales, de A:

1) $\mathrm{Col}(A)$ = subespacio generado por las columnas de A.

2) $\mathrm{Fil}(A)$ = subespacio generado por las filas de A.

3) $\mathrm{nuc}(A)$ = subespacio generado por las soluciones del sistema $Ax = 0$. (núcleo por la derecha)

4) $\mathrm{nuc}(A^{\intercal})$ = subespacio generado por las soluciones del sistema $A^{\intercal}x = 0$, que también se escribe como $x^{\intercal}A = 0$.

- Proposición

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{dimFil}(A) = \mathrm{dimCol}(A).$$

- Demostración

1) Veamos que si P es invertible, entonces

$$\mathrm{dimCol}(PA) = \mathrm{dimCol}(A)$$

Sea $r = \mathrm{dimCol}(A)$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ una base de $\mathrm{Col}(A)$.

Entonces $\{Pu_1, \ldots, Pu_r\}$ son linealmente independientes. Por tanto, $r \leq \mathrm{dimCol}(PA)$.

Recíprocamente, si $\{Pu_1, \ldots, Pu_s\}$ es una base de $\mathrm{Col}(PA)$ entonces $\{P^{-1}Pu_1, \ldots, P^{-1}Pu_s\}$ son linealmente independientes. Por tanto, $s \leq r$ y así $\mathrm{dimCol}(A) = \mathrm{dimCol}(PA)$.

2) De igual modo se prueba que si Q es invertible, entonces $\mathrm{dimFil}(AQ) = \mathrm{dimFil}(A)$.

3) Consideremos la factorización PAQ de A, es decir,

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} Ir & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

y recordemos que el rango es el número de pivotes no nulos.

Por lo visto anteriormente se tiene el resultado.

- Teorema (Rank-nullity)

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{dimnuc}(A) = n}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\mathrm{rg}(A) = 2$

4.4) Coordenadas respecto de una base

Sean $W \subset \mathbb{K}^n$ un subespacio vectorial y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de W.

Entonces, todo vector de W se expresa de modo único como combinación lineal de los vectores de B.

En efeto: sea $w \in W$ y supongamos que

$$w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_1 u_1.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0 \xrightarrow[\text{lin. ind.}]{\{u_i\}} \alpha_i - \beta_i = 0$$

- Definición

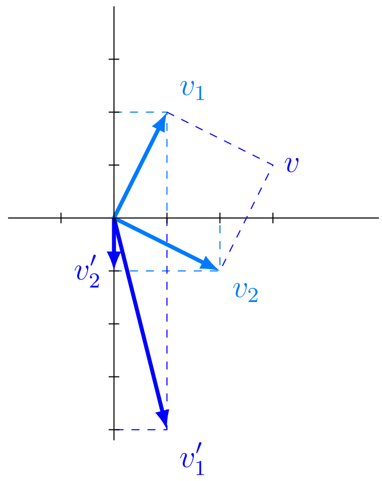
Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de W.

Dado $w \in W$, se llaman coordenadas de w en la base B a los únicos escalares $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^n$ tales que $w = x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m$. Se denota:

$$[w]_B = (x_1, \ldots, x_m)$$

Ejemplo

$W = \mathbb{R}^2$



$B = \{v_1 = (1, 2), v_2 = (2, -1)\}$

$B' = \{v_1' = (1, -3), v_2' = (0, 1)\}$

Vamos a clauclar $M_{B \to B'}$

$v_1 = (1, 2) = a_{11} \cdot v_1' + a_{21} \cdot v_2' = a_{11}(1, -3) + a_{21}(0, -1)$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_{11} \\ 2 &= -3a_{11} - a_{21} \end{aligned}\right\} \longrightarrow a_{21} = -3a_{11} - 2 = -5$$

$v_2 = (2, -1) = a_{12} \cdot v_1' + a_{22} \cdot v_2' = a_{12}(1, -3) + a_{22}(0, -1)$

$$\begin{cases} 2 = a_{12} \\ -1 = -3a_{12} - a_{22} \end{cases} \longrightarrow a_{22} = 1 - 3a_{12} = -5$$

$$M_{B \to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Sea ahora $[v]_B = (1, 1)$, ¿$[v]_{B'}$?

$$\begin{aligned} [v]_{B'} &= M_{B \to B'} \cdot [v]_b \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.5) Coordenadas en bases ortonormales

Supongamos que $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base ortonormal de W, es decir,

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases} \text{ delta de Kronecker}$$

$$\|u_i\| = 1, \; 1 \leq i \leq m$$

Vamos a calcular la forma que tiene $[w]_B$, siendo $w \in W$. Se tiene:

$$w = \sum x_i u_i$$

Por tanto:

$$w \cdot u_j = \sum x_i \cdot u_i \cdot u_j = x_j$$

es decir,

$$[w]_B = (w \cdot u_j)$$

Además, como

$$\begin{aligned} w \cdot u_j &= \|w\| \cdot \|u_j\| \cos(w, u_j) \\ &= \|w\| \cos(w, u_j) \end{aligned}$$

con lo que si $\|w\| = 1 \longrightarrow [w]_B = \underbrace{(\cos(w, u_j))}_{\substack{\text{cosenos directores} \\ \text{del vector } w}}$

- Resumen: Subespacios fudamentales de una matriz y resolución de sistemas lineales

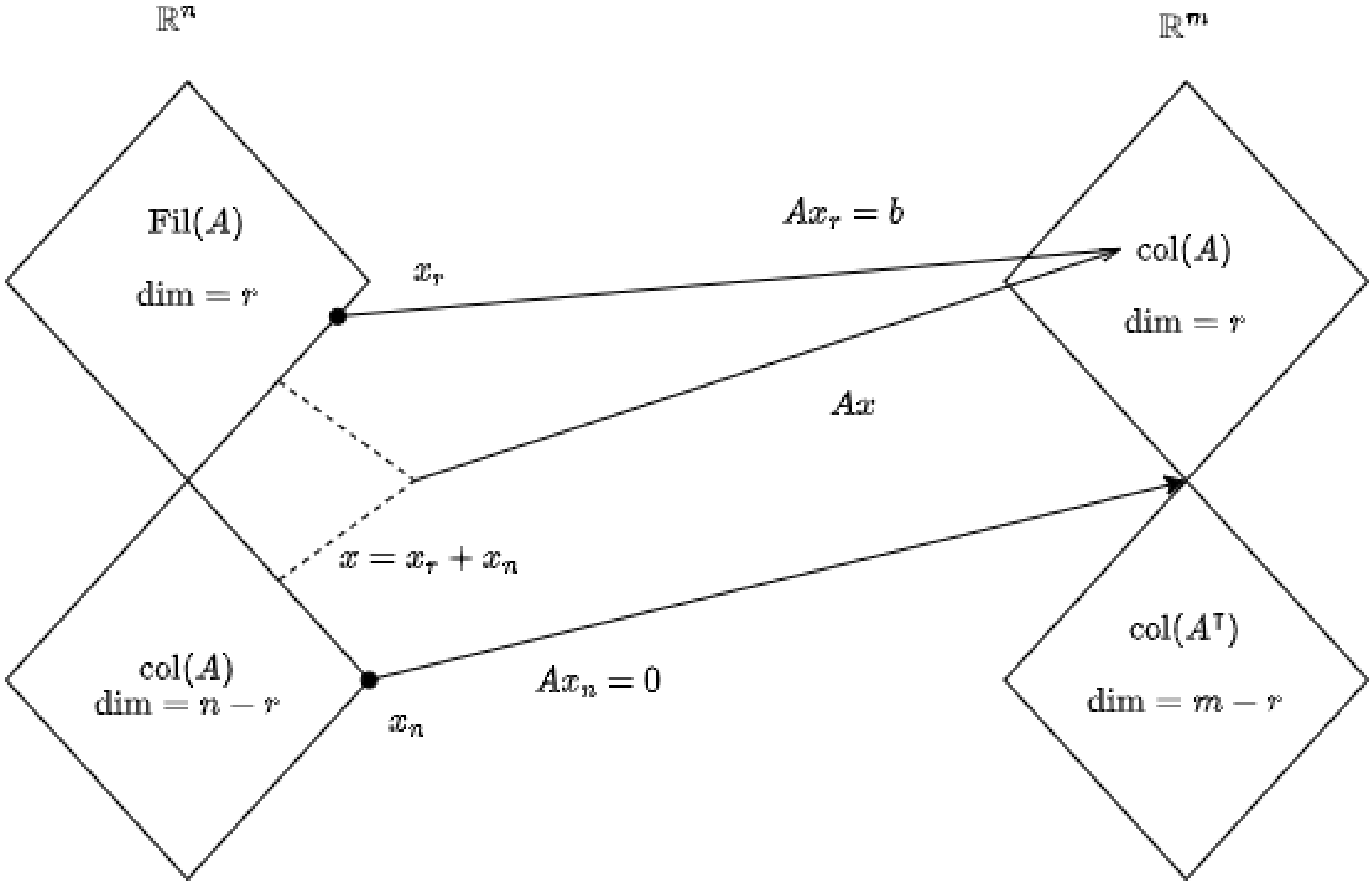
$A \in M_{m \times n}$

- $\text{Fil}(A), \text{nuc}(A)$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$
- $\text{Fil}(A) \perp \text{nuc}(A)$

$$Av = \begin{bmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \hdashline \text{fila } m \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} \text{fila } 1 \cdot v \\ \text{fila } 2 \cdot v \\ \hdashline \text{fila } m \cdot v \end{bmatrix} = 0$$

Por tanto, si $v \in \text{nuc}(A) \longrightarrow v \perp$ todas las filas de A

$$\left.\begin{aligned} \text{rg}(A) = \dim\text{Fil}(A) = r \\ \text{rg}(A) + \dim\text{nuc}(A) = n \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{Fil}(A) \oplus \text{nuc}(A) = \mathbb{R}^n$$



- $\mathrm{Col}(A), \mathrm{nuc}(A^\intercal)$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^m$

- $\mathrm{Col}(A) \perp \mathrm{nuc}(A^\intercal)$

$$A^\intercal v = \left[\begin{array}{c} \text{Col } 1^\intercal \\ \text{Col } 2^\intercal \\ \hdashline \text{Col } m^\intercal \end{array}\right] \qquad v = \left[\begin{array}{c} \text{Col } 1^\intercal \cdot v \\ \text{Col } 2^\intercal \cdot v \\ \hdashline \text{Col } n^\intercal \cdot v \end{array}\right] = 0$$

Por tanto, si $v \in \mathrm{nuc}(A^\intercal) \longrightarrow v \perp$ columnas de A

$\mathrm{rg}(A^\intercal) + \mathrm{dimnuc}(A^\intercal) = m \longrightarrow \mathrm{Col}(A) \oplus \mathrm{nuc}(A^\intercal)$

Hoja de ejercicios Tema 4: Subespacios vectoriales, bases y coordenadas

1) Determina cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$

No porque el vector $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ pertenece al subespacio pero $(1, 0, 0) + (1, 1, 0) = (2, 1, 0)$ no pertenece.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$

No porque al comprobar los la suma de vectores $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$ vemos que no cumple la condición a pesar de que los vectores sí lo hagan.

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0$

$$\begin{matrix} (x_1, y_1, z_1) \in w \\ (x_2, y_2, z_2) \in W \end{matrix} \longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 0$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1, z_1) \longrightarrow \underbrace{\alpha(x_1, y_1, z_1)}_{} \in W$$

$$(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

$$\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha \underbrace{(x_1, y_1, z_1)}_{0} = 0$$

2) Comprueba que, en $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por los vectores $(1, 2, 1)$ y $(6, 1, -16)$ coincide con el subespacio generado por los vectores $(-2, 7, 20)$ y $(4, 9, 6)$.

3) Usando determinantes, halla una base del subespacio W del ejercicio anterior que esté contenida en el conjunto generador dado.

4) Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ con $n \geq 3$. Pon un ejemplo de una matriz A tal que los sistemas de ecuaciones $Ax = v_1$ y $Ax = v_2$ tengan solución pero el sistema $Ax = v_3$ no la tenga.

$$A \cdot x = \underset{\text{columnas}}{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{x} = v_1 \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{x} = v_2$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = v_1x_1 + v_2x_2 = v_3$$

5) Completar la frase: "el vector b pertenece a Col(A) cuando ...... tiene solución".

El sistema $Ax = b$ tiene solución

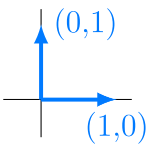
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

$\mathrm{Col}(A) =< a_1, a_2, \ldots, a_n >$

6) Cierto o falso: "si el vector cero pertenece a Fil(A), entonces las filas de A son linealmente independientes".

Si $0 \in \mathrm{Fil}(A) \longrightarrow$ las filas de A son linealmente independientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Fil}(A) =< \underbrace{(1,0), (0,1)}_{\text{lin. indep.}} >= \mathbb{R}^2$$



$(0,0) \in \mathrm{Fil}(A) = \mathbb{R}^2$

7) Halla una base del subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores

$$(-1,0,0,1,-2) \quad (2,1,0,-1,2) \quad (1,3,1,0,-1) \quad (0,2,1,0,-1) \quad (3,1,0,-2,4)$$

8) Amplía el conjunto $\{(1,-1,1)\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

9) En $\mathbb{R}^5$, si las ecuaciones del subespacio U son $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z+t+u=0 \\ x-y+z-t+u=0 \end{array} \right\}$, encuentra las de $U^{\perp}$.

$$V \equiv \begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ x-y+z-y+u=0 \end{cases} \quad \text{ecuaciones implícitas} \qquad u^{\perp}$$

Calcular una base de u

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rg}(A) = 2 < 5 = \text{nº de incógnitas} \longrightarrow 3 \text{ parámetros } SCI$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\alpha \\ t=\beta \\ z=\varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} x+y=-\varphi-\beta-\alpha \\ x-y=-\varphi+\beta-\alpha \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x=-2\gamma-2\alpha \longrightarrow x=-\varphi-\alpha \\ y=-x-\varphi-\beta-\alpha=\cancel{\varphi}+\cancel{\alpha}-\cancel{\varphi}-\beta-\cancel{\alpha}=-\beta \end{array}$$

$$\begin{cases} x=-\alpha-\gamma \\ y=-\beta \\ z=\gamma \\ t=\beta \\ u=\alpha \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de } u}$$

$$v \in u^{\perp} \longleftrightarrow v \cdot u = 0\, \forall\, u \in U \longleftrightarrow v \cdot u_j = 0,\ \{u_1, \dots, u_m\} \text{ base de } U$$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,z,t,u)\cdot(-1,0,0,0,1)=0 \\ (x,y,z,t,u)\cdot(0,-1,0,1,0)=0 \\ (x,y,z,t,u)\cdot(-1,0,1,0,0)=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x+u=0 \\ -y+t=0 \\ -x+z=0 \end{array}\right\} \text{ecuaciones implícitas de } u^{\perp}.\ 2 \text{ parámetros}$$

$$\underbrace{u}_{3} \oplus \underbrace{u^{\perp}}_{2} = \mathbb{R}^5 \qquad \left.\begin{array}{l} u=\alpha \\ t=\beta \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=u=\alpha \\ y=t=\beta \\ z=-x=-\alpha \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de } u^{\perp}}$$

10) Halla una base de siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

a) $\{(x, y, z) | x = y = z = t\}$

b) $\{(x, y, z, t) | x + y + z + t = 0\}$

11) Dados los subespacios

$$U = \{(a, b, a - b, a - 2b)\} \qquad W = \{(x, x - y, -x + y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

calcula la base de cada uno de ellos y determina si están en suma directa.

12) Dada la matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ calcula:

a) Tres bases distintas de $\mathrm{Col}(U)$.

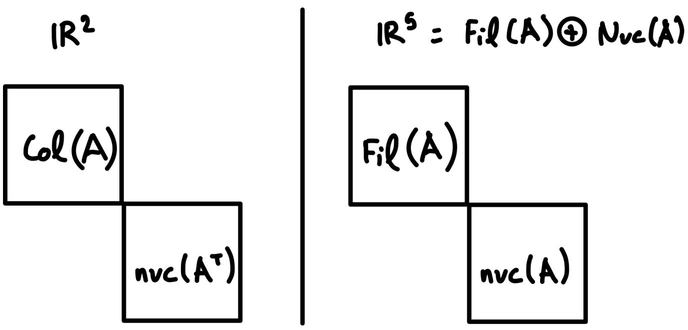
b) Dos bases distintas de $\mathrm{Fil}(U)$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 5}$ $\qquad \mathrm{Fil}(A), \mathrm{Col}(A), \mathrm{nuc}(A), \mathrm{nuc}(A^\intercal)$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{dimFil}(A) = \mathrm{dimCol}(A) = 2$

$\mathrm{Fil}(A) =< (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0) >$

$\mathrm{Col}(A) =< (1, 0), (0, 1) >$



$\underbrace{\text{rg}(A)}_{2} + \underbrace{\text{dimNuc}(A)}_{3} = 5$

$$\left.\begin{array}{l} x+z+u=0 \\ y+t=0 \end{array}\right\} \text{ecuaciones implícitas de nuc}(A)$$

Tomamos 3 parámetros

$$\left.\begin{array}{l} u=\alpha \\ t=\beta \\ z=\gamma \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-z-u=-\alpha-\gamma \\ y=-t=-\beta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de nuc}(A)}$$

13) Sea S un conjunto de 6 vectores de $\mathbb{R}^4$. De las opciones entre paréntesis escoge la(s) correcta(s):

a) S (es) (no es) (no necesariamente es) un conjunto generador de $\mathbb{R}^4$.

b) S (es) (no es) (puede ser) un conjunto linealmente independiente.

c) Un subconjunto de S con 4 vectores (es) (no es) (puede ser) una base de $\mathbb{R}^4$

14) Determina los valores que faltan en la siguiente matriz sabiendo que tiene rango 1:

$$\begin{bmatrix} 7 & - & - \\ - & 8 & - \\ - & 12 & 6 \\ - & - & 2 \\ 21 & 6 & - \end{bmatrix}$$

15) Dadas dos matrices A y B, prueba las siguientes afirmaciones:

a) $\text{rg}(A+B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$ (usa que el rango es la dimensión de $\text{Col}(A)$ y lo visto en la página 72 de los apuntes).

b) $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A), \text{rg}(B)$ (usa los resultados 4.26 y 4.28 de los apuntes).

16) Sea A una matriz $m \times n$ de rango k. Prueba que existe una matriz B de tamaño $m \times k$ y rango k

y una matriz C de tamaño $k \times n$ tales que $A = BC$ (esta factorización se llama **full rank factorization**). Si k es mucho menor que n y m, razona si es mejor, en términos de memoria, almacenar A o almacenar B y C.

$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}}_{\text{vectores de tamaño } m}$ $\dim\mathrm{Col}(A) = k \longrightarrow$ Sea $B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_k \end{bmatrix}}_{\text{vectores de tamaño } m}$ una base de $\mathrm{Col}(A)$.

Por tanto, todo vector de $\mathrm{Col}(A)$ se escribe como combinación lineal de los vectores $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. En particular, las columnas de A.

$$a_j = c_{ij}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{kj}b_k \quad C = [c_{ij}]_{k\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_k \end{bmatrix}_{n\times k} \cdot \left[\begin{array}{cc:c} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{kn} \end{array}\right]_{k\times n}$$

<u>Ejemplo</u>

$$\begin{array}{ll} m = 10^2 & A \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10^2 = 10^4 = 10,000 \text{ datos} \\ n = 10^2 & B \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10 = 10^3 = 1,000 \text{ datos} \\ k = 10 & C \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10 = 10^3 = 1,000 \text{ datos} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} 2,000 \text{ datos}$$

17) Calcula la "full rank factorization" para la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rg}(A) = 2$$

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}}_{\text{base de Col}(A)} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = c_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= c_{13} \\ 1 &= -c_{13} - 3c_{23} \end{aligned}\right\} \quad 3c_{23} = -1 - c_{13} = -3 \longrightarrow c_{23} = -1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = c_{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{24} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= c_{14} \\ 0 &= -c_{14} - 3c_{24} \end{aligned}\right\} \quad 3c_{24} = -c_{14} = 3 \longrightarrow c_{24} = -1$$

Comprobación

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}$$

18) Utiliza la "full rank factorization" y el ejercicio 15 para ver que una matriz A tiene rango k si y sólo si se puede expresar como suma de k matrices de rango 1, pero no se puede expresar como suma de menos de k matrices de rango 1. Expresa la matriz del ejercicio anterior como suma de 2 matrices de rango 1.

19) Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

en donde B se obtiene restando la fila uno a la fila tres. ¿Qué relación hay entre los cuatro subespacios fundamentales de las dos matrices? Calcula una base para cada uno de ellos.

20) Pon un ejemplo de una matriz cuadrada A en la que $\text{Col}(A) = \text{Fil}(A)$ y otro en el que $\text{Col}(A) \neq \text{Fil}(A)$

21) Sea A una matriz 10×10 que cumple $A^2 = 0$. Prueba que $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(A)$ y, en consecuencia, el rango de A es menor o igual a 5.

Sea $v \in \mathrm{Col}(A) \overset{?}{\Rightarrow} Av = 0$

Como $v \in \mathrm{Col}(A) \longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}^{10}$ tal que

$$v = Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{bmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_{10}x_{10}$$

$Av = A \cdot (Ax) = A^2x = 0 \longrightarrow v \in \mathrm{nuc}(A)$

$\boxed{\underline{\text{Nota:}}\ \underbrace{\mathrm{rg}(A)}_{\leq 5} + \mathrm{dimnuc}(A) = 10,\ \mathrm{rg}(A) = \mathrm{dimCol}(A)}$

22) Sea A una matriz cuadrada invertible. Calcula una base para cada uno de los subespacios fundamentales de las matrices A y $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$.

23) Sin calcular la matriz A, encuentra bases para sus cuatro subespacios fundamentales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

24) Halla una base del subespacio $\mathbb{R}^4$ dado por el núcleo de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprueba que el vector $(1, 1, 1 - 2)$ pertenece a $\mathrm{Nuc}(A)$ y calcula sus coordenadas respecto de la base obtenida.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + z + 2t \\ x + y + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{aligned} 2x + z + 2t &= 0 \\ x + y + t &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\qquad$ $\begin{aligned} &\mathrm{rg}(A) = 2 \\ &\mathrm{rg}(A) + \mathrm{dimNuc}(A) = 4 \longrightarrow \mathrm{dimNuc}(A) = 2 \end{aligned}$

Tomamos 2 parámetros:

$$\left.\begin{array}{l} t=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right\} \longrightarrow \quad \begin{array}{l} 3x=-2t-z=-2\alpha-\beta \longrightarrow x=-\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta \\ y=-t-x=-\alpha+\frac{2}{3}\beta=-\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \alpha \underset{\downarrow\times 3}{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} + \beta \underset{\downarrow\times 3}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$B_{\text{nuc}(A)} = \{(-2,-1,0,3),(-1,1,3,0)\}$

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1-4 \\ 1\cdot 1+1\cdot 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (1,1,1,1-2) \in \text{nuc}(A)$$

$(1,1,1,-2) = \alpha(-2,-1,0,3) + \beta(-1,1,3,0)$

$$\left.\begin{array}{l} 1=-2\alpha-\beta \\ 1=\alpha+\beta \\ 1=3\beta \\ -2=3\alpha \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \alpha=-\frac{2}{3} \\ \beta=\frac{1}{3} \end{array}$$

$[1,1,1,-2]_{B_{\text{nuc}(A)}} = \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

25) Dadas las siguientes bases de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1=(1,1,0,0), v_2=(0,1,0,0), v_3=(0,0,1,1), v_4=(0,0,0,1)\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w_1=(1,2,0,0), w_2=(0,1,2,-1), w_3=(0,1,1,1), w_4=(0,1,2,0)\}$$

encuentra la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ y la de l cambio inverso. ¿Qué coordenadas tiene el vector $3w_1-w_3+2w_2$ con respecto a la base $\mathcal{B}_1$?

$$M_{B_1\to B_2} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ -2 & \\ -2 & \\ 3 & \end{array}\right] \qquad M_{B_2\to B_1} = \left[M_{B_1\to B_2}\right]^{-1}$$

$$v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 + a_{41}w_4$$
$$= a_{11}(1,2,0,0) + a_{21}(0,1,2,-1) +_{31}(0,1,1,1) + a_{41}(0,1,2,0)$$
$$= (1,1,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_{11}\cdot 1 \\ 1 &= 2a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} \\ 0 &= 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ 0 &= -a_{21} + a_{31} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -1 &= \overset{-2}{a_{21}} + \overset{-2}{a_{31}} + a_{41} \\ 0 &= 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ 0 &= -a_{21} + a_{31} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{F_1 \to 2F_1} \begin{array}{ccl} -2 & = & 2a_{21} + 2a_{31} + 2a_{41} \\ 0 & = & 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ \hline -2 & = & a_{31} \end{array}$$

$$3v_1 - v_3 + v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$[3v_1 - v_3 + v_2]_{B_2} = M_{B_1\to B_2}[3v_1 - v_3 + v_2]_{B_1} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ -2 & & \\ -2 & & \\ 3 & & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

26) Calcula una base y unas ecuaciones implícitas de $U + V$, donde

$$U = \langle (1,2,3,4,5,), (5,4,3,2,1), (-1,0,1,2,3) \rangle$$
$$V = \left\{ (x,y,z,r,s) : \begin{array}{c} 2x + r = 2y \\ 3x + s = 2y \end{array} \right\}$$

$$V \equiv \begin{cases} 2x + r = 2y \\ 3x + s = 2y \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 2y + r = 0 \\ 3x - 2y + s = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}(A) = 2 < 3 =$ nº de incógnitas $\longrightarrow S.C.I$

Tomamos 3 parámetros

$$\left.\begin{aligned} s &= \alpha \\ r &= \beta \\ z &= \gamma \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x - 2y &= -\beta \\ 3x - 2y &= \alpha \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x &= \alpha + \beta \\ y &= \frac{1}{2}(3\alpha + 3\beta - \alpha) = \alpha + \frac{3}{2}\beta \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ r \\ s \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = < (1, 1, 0, 0, 1), \left(1, \frac{3}{2}, 0, 1, 0\right), (0, 0, 1, 0, 0) >$$

$$U + V = < (1, 2, 3, 4, 5), (5, 4, 3, 2, 1), (-1, 0, 1, 2, 3), (1, 1, 0, 0, 1), \left(1, \frac{3}{2}, 0, 1, 0\right), (0, 0, 1, 0, 0) >$$

Base de $U + V$ se obtiene haciendo operaciones elementales sobre la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de igaul forma a como lo hacemos para calcular el rango. Las columnas que resulten con pivotes no nulos constituyen una base de $U + V$.

Las ecuaciones implícitas los podemos obtener a partir de las paramétricas, eliminando los parámetros. También se puede hacer con determinantes.

Tema 5: Álgebra Lineal Computacional

5.1) Factorizaciones *LU*, *PLU* y *Cholesky*

5.1.1) Factorización PU (PLU)

Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, se llama factorización LU a una factorización (o descomposición) de la forma

$$A = LU$$

donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline l_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{array}\right]}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U}$$

L triangular inferior con 1s en la diagonal principal

U triangular superior

L =Lower, U =Upper

- Aplicaciones

  1) Cálculo de determinantes

  $$|A| = |L \cdot U| = |L| \cdot |U| = 1 \prod_{j=1}^{n} u_{jj}$$

  2) Resolución de sistemas lineales

  $$Ax = b \Longleftrightarrow LUx = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ux = z \\ Lz = b \end{cases}$$

  son dos sistemas fácilmente resolubles porque U y L son triangulares superior e inferior, respectivamente.

En efecto:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$u_{nn}x_n = z_n \longrightarrow x_n = \frac{z_n}{u_{nn}}$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = z_{n-1}$$

$$x_{n-1} = \frac{z_{n-1}u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

En general,

$$x_i = \frac{z_1 - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}$$

Para que esto funciones $u_{ii} \neq 0$

- Coste computacional

Consideremos el caso $n = 4$

$$\left.\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 &= z_1 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 &= z_2 \\ u_{33}x_3 + u_{34}x_4 &= z_3 \\ u_{44}x_4 &= z_4 \end{aligned}\right\}$$

$x_4 = \dfrac{z_4}{u_{44}}$ 1 operación

$x_3 = \dfrac{z_3 - u_{34}x_4}{u_{33}}$ 3 operaciones

$x_2 = \dfrac{z_2 - u_{23}x_3 - u_{24}x_4}{u_{22}}$ 5 operaciones

$x_1 = \dfrac{z_2 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - u_{14}x_4}{u_{11}}$ 7 operaciones

$\text{Total} = 16 = 4^2 = n^2$

En general, esto es cierto para un sistema de orden n, es decir, el coste computacional de resolver un sistema triangular es del orden n^2, escribimos $O(n^2)$.

¿Cómo se calculan L y U tales que $A = LU$?

Haciendo eliminación Gaussiana. Veamos un ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ matriz de Toepliz de dimensión 3.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + \frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + \frac{2}{3}F_2} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}$$

La matriz U es

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

¿Dónde está L? Una vez conocemos el pivot de la fila $\jmath$, y la entrada que se desea eliminar en la fila $\imath$, el multiplicador l_{ij} se define como

$$l_{ij} = \frac{\text{entrada a eliminar en la fila } \imath\text{-ésima}}{\text{pivot en la fila } \jmath}$$

Así, en el ejemplo anterior:

$$l_{21} = -\frac{1}{2}, \quad l_{31} = \frac{0}{2} = 0, \quad l_{32} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Nota 1: (Factorización PLU)

En ocasiones es preciso permutar algunas filas de A para conseguir pivotes no nulos o llevar filas nulas al final. Todo ello se consigue a través de una matriz de permutación P.

A la factorización $PA = LU$ se le llama factorización PLU. Nótese que $P^{-1} = P^{\intercal}$. Por tanto,

$$A = P^{\intercal} LU.$$

Nota 2: (Coste computacional)

Se puede probar que el coste computacional de resolver un sistema lineal $Ax = b$, mediante factorización LU, es decir,

$$LUx = b \longrightarrow \begin{cases} Ux = z \\ Lz = b \end{cases}$$

es $\dfrac{n^3 + 3n^3 - 1}{3}$, siendo n el tamaño de A.

Volviendo a la factorización

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

se observa que el carácter simétrico de A se pierde en la factorización LU. Esta simétrica se puede recuperar separando los pivots (diagonal de U) en una matriz diagonal D y dividiendo cada fila de U por su correspondiente pivot. Se obtiene así:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & & \\ & \frac{2}{3} & \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & -\frac{2}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{L^\intercal}$$

A una factorización del tipo $A = LDL^\intercal$ se le llama de Cholesky.

Además, D se puede factorizar como

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & & \\ & \frac{2}{3} & \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}}$$

Se llega así a la factorización

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^\intercal$$

la cual se puede simplificar como:

$$L\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{D}L^{\intercal} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & -\frac{2}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}$$

es decir,

$$\boxed{A = \tilde{L}\tilde{L}^{\intercal}},$$

que es una nueva forma simplificada de la factorización de Cholesky.

Nota 1:

Nótese que este último procedimiento ha funcionado porque los pivots son positivos. Esto siempre sucede para una clase particular de matrices, llamadas **definidas positivas**. Éstas son matrices que satisfacen la condición

$$x^{\intercal}Ax > 0 \, \forall x \neq 0.$$

Las estudiaremos en detalle más adelante.

Nota 2:

Nótese que en la factorización Cholesky sólo tenemos $\tilde{L}$ y su traspuesta $\tilde{L}^{\intercal}$. Por tanto, el coste computacional de Cholesky es la mitad que LU, es decir, del orden $\frac{n^3}{6}$

- Recomendación

$Ax = b$

- Si A es simétrica y definida positiva, usar Cholesky.
- Para el resto, usar LU.

5.2) Análisis de errores

Analizamos la cuestión de la estabilidad en la resolución de un sistema lineal $Ax = b$.

Supongamos que b se ve afectado por errores de maldición, representación y/o redondeo. La solución cambiará también, es decir, la entrada será $b + \triangle b$ y la salida $x + \triangle x$.

¿Cómo podemos estimar o cuantificar $\triangle x$ en la función de $\triangle b$?

Obviamente, la matriz A juega un papel clave.

Necesitamos introducir normas de matrices. Recordemos que para vectores tenemos las normas:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \begin{aligned} &\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ &\|x\|_1^p = \sum x_i\|^p, \qquad p = 1, \ldots \\ &\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \end{aligned}$$

Consideraremos la norma

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

con $\|\cdot\|$ cualquiera de las normas de vectores anterior, por ejemplo, la norma $\|\cdot\|_2$.

Obviamente, $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|, \qquad \forall x \neq 0$, y así

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

- Definición (Número de condicionamiento de A).

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ se llama número de condicionamiento de A al número

$$\mathrm{c}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Obviamente, suponemos A invertible.

Volvemos al sistema $Ax = b$, que suponemos compatible determinado, es decir, tiene una única solución

$$x = A^{-1}b.$$

Si el término de la derecha es $b + \triangle b$, entonces se tiene

$$A(x + \triangle x) = b + \triangle b$$

de modo que

$$Ax + A\triangle A = b + \triangle b$$

con lo que

$$A\triangle x = \triangle b,$$

es decir,

$$\triangle x = A^{-1}(\triangle b),$$

y así

$$\|\triangle x\| = \|A^{-1}(\triangle b)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\triangle b\|,$$

lo que nos da una cota superior del error absoluto $\triangle x$. Más importante que el error absoluto es el relativo, el cual estimamos del siguiente modo:

$$\|\triangle x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\triangle b\| \cdot \frac{\|Ax\|}{\|b\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \cdot \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}$$

de donde

$$\frac{\|\triangle b\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|} = \mathrm{c}(A) \cdot \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}$$

Esta desigualdad se lee: *"el error relativo en la solución es del orden de* $\mathrm{c}(A)$ *veces el error relativo en el input* b*"*.

Si $\mathrm{c}(A)$ es grande, se dice que la matriz A está mal condicionada.

La regla básica a tener en cuenta es que para el sistema $Ax = b$, el ordenador pierde $\log_{10}(\mathrm{c}(A))$ decimales en errores de redondeo.

Nota: Se puede probar que si el error inicial viene asociado a la matriz A, es decir, tenemos $A + \triangle A$, la estimación anterior en términos del número de condición sigue siendo válida.

Veamos un ejemplo concreto.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax)b \iff \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 7x2 = 7 \\ x_2 = 1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow x_1 = 0$$

Solución: $(x_1, x_2) = (0, 1)$

Supongamos ahora que $\triangle b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, es decir, una

$A(\triangle x) = \triangle b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle x_1 + 7\triangle x_2 = 0 \\ \triangle x_2 = 0.1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \triangle x_1 = -7\triangle x_2 = -0.7$$

El error relativo en x es:

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{(-0.7)^2 + (0.1)^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 0.1\sqrt{50}$$

Comparando con el error relativo en b:

$$\frac{\|\triangle b\|}{\|b\|} = \frac{\sqrt{0^2 + 0.1^2}}{7^2 + 1^2} = \frac{0.1}{\sqrt{50}}$$

Por tanto:

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} = 0.1\sqrt{50} = 0.1\sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 50 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{50}} = 50 \cdot \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}$$

Si calculamos en Python $\mathrm{c}(A) = 51$ para la norma de Frobenius.

Observamos que $\mathrm{c}(A)$ de una estimación bastante precisa de la propagación del error.

¿Qué hacer si $\mathrm{c}(A) >> 1$?

En lugar de resolver el sistema $Ax = b$, resolvemos el sistema equivalente

$$C^{-1}Ax = C^{-1}b$$

de modo que la matriz C haga que

$$\mathrm{c}(C^{-1}A) << \mathrm{c}(A)$$

¿Cómo elegir C?

- Opción naive (ingenua):

Tomar $C = A$. En este caso, $C^{-1}A = A^{-1}A = I$ cuyo número de condición es 1. Sin embargo, calcular A^{-1} es igual de costoso que resolver $Ax = b$.

El intento $C = A$ no resuelve el problema, pero nos sugiere que C debe ser próxima a A.

Otras dos opciones más prácticas son:

1) Si A no tiene cero en la diagonal, tomamos

$$C = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 50 \end{bmatrix} \qquad \text{Python} \longrightarrow \mathrm{c}(A) = 6.3371$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{50} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{c}(C^{-1}A) = 2.084$ para la suma de Frobenius

2) Tomar $C^{-1} = p(A)$, un polinomio en A que resulta de truncar la serie de A^{-1}. Es decir,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (I - (I - A))^{-1} \equiv \frac{1}{I - (I - A)} \\ &= I + (I - A) + (I - A)^2 + \cdots \end{aligned}$$

que resulta de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

la cual converge si $0 < x < 1$, $\quad \|I - A\| < 1$.

Por tanto,

$$C^{-1} = I + \sum_{k=1}^{N} (I - A)^k$$

Estas ideas conducen a los llamados métodos iterativos, que estudiamos a continuación:

Dado que $Ax = b$, para toda matriz P del mismo tamaño que A, que llamamos precondicionador, se tiene que

$$Px = (P - A)x + b$$

Esta descomposición sugiere el algoritmo iterativo siguiente:

1) Inicialización: tomar $x_0 \in \mathbb{R}^n$

2) Iteración hasta convergencia

$$Px_{k+1} = (P - A)x_k + b.$$

El éxito del algoritmo está garantizado si se cumple:

1) x_{k+1} se calcula fácilmente a partir de x_k.

2) Los errores $e_k = x - x_k$ se aproximan a cero cuando $k \to +\infty$, es decir, el algoritmo converge.

Veamos qué se ha de cumplir para que el algoritmo sea convergente:

$$\begin{aligned} Px_{k+1} &= (P-A)x_k + b \\ Px &= (P-A)x + b \end{aligned}$$

Si restamos:

$$\begin{aligned} P(x - x_{k+1}) &= (P-A)\cdot(x - x_k) \\ P \cdot e_{k+1} &= (P-A)e_k \end{aligned}$$

de donde, suponiendo que P es invertible:

$$e_{k+1} = P^{-1}(P-A)e_k = \underbrace{\left(I - P^{-1}A\right)}_{M} e_k$$

Repitiendo el proceso:

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| = \|M \cdot e_k\| &\leq \|M\| \cdot \|e_k\| \\ &\leq \|M\| \cdot \|M\| \cdot \|e_{k-1}\| \\ &\leq \cdots \\ &\leq \|M\|^{k+1} \cdot \|e_0\| \end{aligned}$$

lo que implica que $\|e_{k+1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si $\|M\| < 1$.

La pregunta ahora es: ¿Cómo elegir P?

- Jacobi propuso tomar $P = D$, la parte diagonal de A. Esto conduce al llamado método de Jacobi.

- Gauss-Seidel proponen descomponer A en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \\ \hdashline a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

y tomar como $P = L + D$ de modo que el algoritmo queda

$$Px_{k+1} = -Ux_k + b, \quad P = L + D.$$

Ejemplo

$$A = T_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = L + D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El algoritmo queda: $Px_{k+1} = -Ux_k + b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\text{new}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\text{old}} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \\ -x_2 + 2x_3 \\ -x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}^{\text{new}}}_{} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\text{old}} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\text{new}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}^{\text{old}} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Resolución: $x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4$

Recordemos que el método converge cuando

$$\|M\| < 1, \quad M = (I - P^{-1}A)$$

Esta condición siempre se cumple para matrices que son diagonal dominantes.

- Definición

Una matriz $A = (a_{ij})$ se dice estrictamente diagonal dominante si para cada fila i se cumple

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} |a_{11}| &= 2 > 1 \\ |a_{22}| &= 4 > 2 + 1 = 3 \\ |a_{33}| &= 3 > 2 \end{aligned}$$

- Teorema

Supongamos que A es estrictamente diagonal dominante. Entonces, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes.

5.3) Ejercicios

1) Cálculo de la inversa de una matriz usando factorización LU o Cholesky.

$A \in M_n(\mathbb{R})$. Sea $X \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces $X = A^{-1}$ si se cumple

$$AX = I$$

Si $x^1, x^2, \ldots, x^n$ son las columnas de X, entonces se tiene:

$$Ax^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{- - - - - - - - - -}$$

$$Ax^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, para calcular A^{-1} hemos de resolver n sistemas lineales. Cualquiera de ellas se resuelve como

$$
\left.\begin{aligned}
Ax^j &= b^j \\
LUx^j &= b^j \\
&\downarrow \\
Ux^j &= z^j \\
Lz^j &= b^j
\end{aligned}\right\}
\qquad
b^j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow j\text{-ésimo}
$$

Tema 6: Transformaciones lineales

6.1) Introducción

$A \in M_{m\times n}$ tiene asociada los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Así, dado $v \in \mathbb{R}^n$, $Av \in \mathbb{R}^m$.

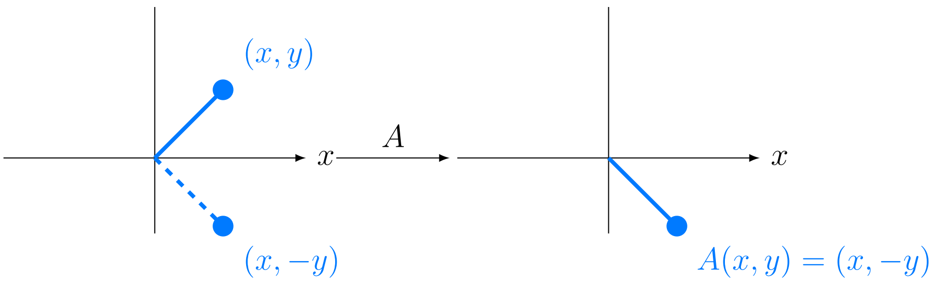
Podemos ver A como una forma de transformar vectores de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\;A\;} & \mathbb{R}^m \\ v & \longmapsto & Av \end{array}$$

Veamos algunos ejemplos:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow Av = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

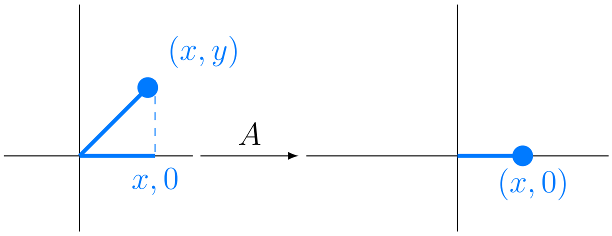


A es una simetría respecto del eje OX.

Tenemos pues la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x, -y) \end{aligned}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$



A es una proyección sobre el eje OX.

A induce una aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (x, 0) \end{aligned}$$

3) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}$$

A reescala las variables e induce la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (ax, by, cz) \end{aligned}$$

Nota: Nótese que las transformaciones inducidas por matrices satisfacen

$$A(\alpha y + \beta v) = \alpha A u + \beta A v$$

6.2) Aplicaciones lineales

- Definición

Una aplicación o transformación lineal es una aplicación $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ que cumplen que

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \; \forall u, v \in \mathbb{K}^n$$

Veamos ahora que fijadas bases de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$, toda aplicación lineal tiene una matriz asociada o que la representa.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

SI $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

Supongamos que $f(e_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ y que $f(x) = (y_1, \ldots, y_m)$. Entonces

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

A la matriz (a_{ij}) se le llama matriz de la aplicación lineal f en las bases canónicas y se denota $M_{C\to C}(f)$, es decir,

$$M_{C\to C}(f) = \begin{bmatrix} & & & \\ f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & n\text{- esima} \\ \text{columna} & \text{columna} & \text{columna} \end{array}$$

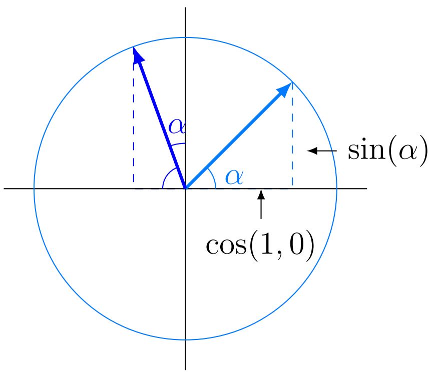
Ejemplo

$$\begin{aligned} f :\, & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \longmapsto f(x, y) = (x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha)) \end{aligned}$$

$f(1, 0) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

$f(0, 1) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$

$$M_{C\to C}(f) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$



f es un giro de ángulo α.

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$

- Definición

Una transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice ortogonal si su matriz asociada es ortogonal.

Ejemplo

La aplicación anterior es ortogonal ya que

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha), -\sin(\alpha)] \cdot [\sin(\alpha), \cos(\alpha)] = \cos(\alpha)\sin\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0 \\ [\quad & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \\ & (-\sin(\alpha))^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

6.3) Cambio de coordenadas (o de base en las aplicaciones lineales)

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y sea $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. La matriz cuyas columnas son las coordenadas de $f(u_j)$ en la base B se llama matriz asociada a la aplicación lineal f en la base B y se denota $M_{B\to B}(f)$, es decir,

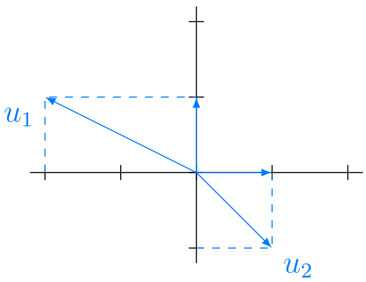
$$M_{B\to B}(A) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} f(u_1)_B & f(u_2)_B & \cdots & f(u_n)_B \end{array} \right]$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (5x + 6y, -3x - 4y) \end{aligned}$$

Vamos a calcular $M_{C\to C}(f), M_{B\to B}(f)$ y la relación entre estas dos matrices, donde

$B = \{u_1 = (-2, 1), u_2 = (1, -1)\}$



$$f(e_1) = f(1,0) = (5,-3) = 5 \cdot e_1 + (-3) \cdot e_2$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (6,-4) = 6 \cdot e_1 + (-4) \cdot e_2$$

$$M_{C\to C}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$f(u_1) = f(-2,1) = (-4,2) = a_{11}(-2,1) + a_{21}(1,-1)$$

$$\begin{array}{rl} -4 = & -2a_{11} + a_{21} \\ 2 = & a_{11} - a_{21} \\ \hline -2 = & -a_{11} \end{array} \longrightarrow a_{21} = 0$$

$$M_{B\to B}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = f(1,-1) = (-1,1) = 0 \cdot (-2,1) + (-1) \cdot (1,-1)$$

Importante!!

La aplicación lineal es la misma pero las matrices asociadas son distintas, porque las bases cambian. El esquema es como sigue

$$\begin{tikzcd} C & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d] & C \\ B & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[u] & \mathbb{R}^2 & B \end{tikzcd}$$

$$M_{B\to B}(f) = M_{C\to B} M_{C\to C}(f) M_{B\to C}$$

donde $M_{C\to B}$ es la matriz de cambio de base de base de C a B y $M_{B\to C}$ es la matriz de cambio de base de B a C. Obviamente, estas matrices son una la inversa de otra. Por tanto, la fórmula anterior queda

$$\boxed{M_{B\to B}(f) = \left[M_{B\to C}\right]^{-1} M_{C\to C}(f) M_{B\to C}}$$

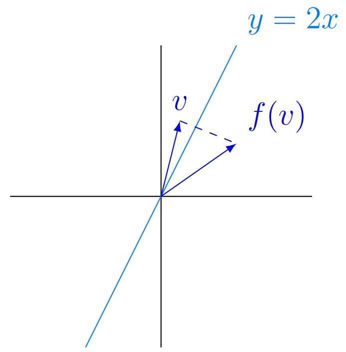
$$M_{B\to C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad M_{C\to B} = \left[M_{B\to C}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{F_3 \to (-1)\cdot F_3} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$[M_{B\to C}]^{-1}\, M_{C\to C}(f) M_{B\to C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = M_{B\to B}(f)$

Ejemplo (Simetría respecto a una recta)

Consideremos la recta $y = 2x$



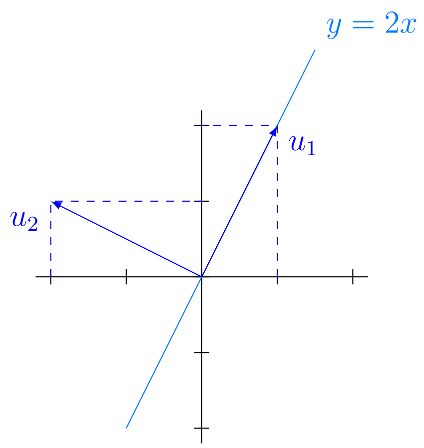
Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal que hace corresponder a vector v su simétrico respecto a dicha recta.

Vamos a calcular $M_{C\to C}(f)$, es decir, la matriz asociada a dicha aplicación lineal en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $C = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$.

Se tiene $M_{C\to C}(f) = \left[\begin{array}{c:c} f(e_1) & f(e_2) \end{array}\right]$.

Como es difícil de calcular $f(e_1)$ y $f(e_2)$ consideramos una base distinta

$$B = \{u_1 = (1,2), u_2 = (-2,1)\}$$



Nótese que u_1 está en la recta ya que $2 = 2 \cdot 1$ y u_2 es perpendicular a la recta ya que

$$(1,2) \cdot (-2,1) = 0.$$

Por tanto, $f(u_1) = u_1,\ f(u_2) = -u_2$.

Además, la matriz de cambio de base

$$M_{B\to C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la inversa de esta matriz

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{5}F_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

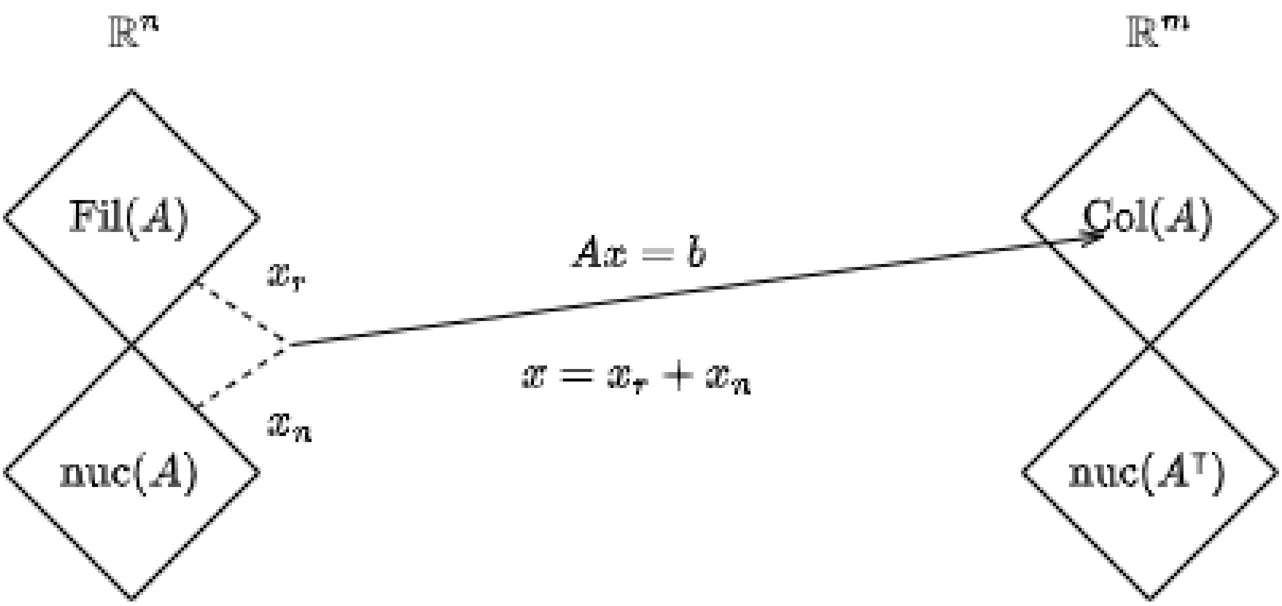
Tenemos el esquema

$$\begin{tikzcd} C \quad \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \quad C \arrow[d] \\ B \quad \mathbb{R}^2 \arrow[u] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \quad B \end{tikzcd}$$

$$M_{C\to C}(f) = M_{B\to C} M_{B\to B}(f) M_{C\to B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

6.4) Proyecciones

Supongamos que el sistema $Ax = b$ es incompatible. Por tanto, $b \notin \text{Col}(A)$



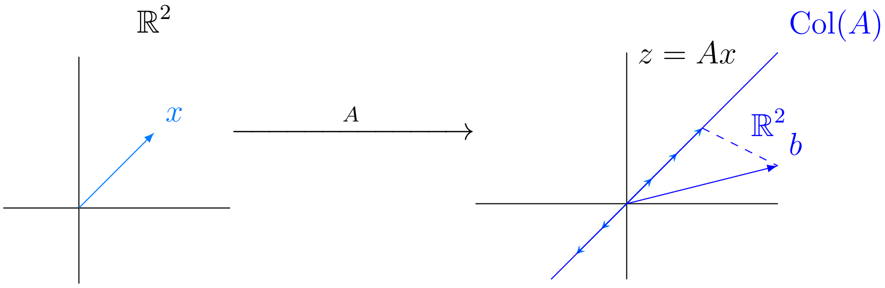
Nos planteamos el problema de encontrar el vector $z \in \mathrm{Col}(A)$ que esté más próximos a b, es decir, $z = Ax$ y buscamos minimizar $\|Ax - b\|$, que también puede escribirse como

$$\left\{ \min \|z - b\|^2 = (z_1 - b_1)^2 + \cdots + (z_n - b_n)^2 \right.$$

con $z = (z_1, \ldots, z_m)$ y $b = (b_1, \ldots, b_m)$.

El problema anterior se llama aproximación por mínimos cuadrados.

Vamos a ver que el z buscado es la proyección ortogonal de b sobre $\mathrm{Col}(A)$. Gráficamente



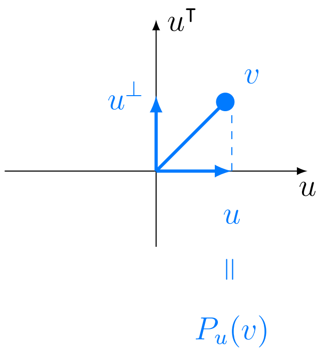
- Recordatorio

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial y $v \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $v = u + u^\intercal$, con $u \in U, u^\intercal \in U^\intercal$.

Recordemos $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\intercal$. Al vector $u \in U$ se le llama proyección ortogonal de v en U y se denota $P_u(v)$. Podemos pues considerar la aplicación lineal

$$\begin{aligned} P_u : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto P_u(v) \end{aligned}$$



Por tanto, si $U = \mathrm{Col}(A)$ y $v \in U$ entonces

$$\begin{aligned} \|v - b\|^2 &= \|v - P_u(b) + (-b + P_u(b))\|^2 \\ &= \underbrace{\|v - P_u(b)\|^2}_{u} + \underbrace{\| - b + P_u(b)\|^2}_{u^\perp} \end{aligned}$$

Así, el vector v que minimiza la norma anterior es $v = P_u(b)$.

¿Cómo se calcula la proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial?

- Proposición

Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ de la forma $\{u_, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$, donde

$$U =< u_1, \dots, u_m >, \; u^{\perp} =< u_{m+1,\dots,u_n} >$$

Entonces

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j$$

y multiplicando por u_k, $1 \leq k \leq m$

$$x \cdot u_k = x_k \cdot u_k \cdot u_k$$

de donde

$$x_k = \frac{x \cdot u_k}{\|u_k\|^2}$$

6.5) Cálculo de la matriz asociada a la proyección sobre un subespacio vectorial

Supongamos que $U =< (1,0,1), (2,1,-1) >$.

Buscamos una matriz A tal que si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$P_u(v) = Av.$$

Veamos varias formas de hacerlo:

1) $A = \left[\begin{array}{c:c:c} P_u(e_1) & P_u(e_2) & P_u(e_3) \end{array} \right]$

   $e_1 = (1,0,0),\; e_2 = (0,1,0),\; e_3 = (0,0,1)$

   Consideramos una base ortogonal de U. Lo hacemos por Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1,0,1) \\
u_2 &= (2,1,-1) + \alpha(1,0,1) \\
0 = u_1 \cdot u_2 &= (1,0,1) \cdot (2,1,-1) + \alpha(1,0,1) \cdot (1,0,1) \\
&= 1 + 2\alpha \longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \\
u_2 &= (2,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Para evitar fracciones, consideramos la base de U

$$\{u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (3,2,-3)\}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
P_u(e_1) &= \frac{e_1 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{e_1 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} \\
&= \frac{(1,0,0)\cdot(1,0,1)}{2}(1,0,1) + \frac{(1,0,0)\cdot(3,2,-3)}{9+4+9} \cdot (3,2,-3) \\
&= \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{3}{22}(3,2,-3) \\
&= \frac{1}{11}(10,3,1) \\
P_u(e_2) &= \frac{e_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{e_2 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{1}{11}(3,2,-3) \\
P_u(e_3) &= \frac{e_3 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \frac{e_3 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 = \frac{1}{11}(1,-3,10) \\
P_u \equiv A &= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2) Otra forma de hacerlo.

Tomamos una base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de modo que $u_1, u_2 \in U$ y $u_3 \in U^{\intercal}$

$u_1 = (1,0,1)$

$u_2 = (2,1,-1)$

$u_3 = (x,y,z)$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= u_1 \cdot u_3 = x + z \\ 0 &= u_2 \cdot u_3 = 2x + y - z \end{aligned}\right\}$$

Tomamos un parámetro:

$z = \alpha$

$x = -\alpha$

$u = -2x + z = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$

$u_3 = (-1,3,1)$

Por tanto,

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^{\perp}$ de modo que $U =< u_1, u_2 >$ y $u^{\intercal} =< u_3 >$.

Así,

$$P_u(u_1) = u_1$$
$$P_u(u_2) = u_2$$
$$P_u(u_3) = 0 \text{ ya que } u_3 \in U^{\perp}$$

Por tanto $M_{B\to B}(P_u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hacemos ahora el cambio de base con la canónica.

$M_{C\to C}(P_u) = M_{B\to C} M_{B\to B}(P_u) M_{C\to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$

$\dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

6.6) Proyección sobre $\mathrm{Col}(A)$

- Proposición

Sea $A \in M_{m\times n}, \mathrm{rg}(A) = m$ y sea $U = \mathrm{Col}(A)$.

Entonces $M_{C\to C}(P_u) = A(A^{\intercal}A)^{-1}A^{\intercal}$.

- Demostración

1) $A^{\intercal}A$ (matrices de Gram) es simétrica y definida positiva.

   $x^{\intercal}A^{\intercal}Ax = (Ax)^{\intercal}Ax = \|Ax\|^2 = 0 \longleftrightarrow Ax = 0 \xrightarrow[\mathrm{rg}(A)=m]{} x = 0$

2) Dado $b \in \mathbb{R}^n$, $P_u(b) = Ax$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

   Como $b - P_u(b) = b - Ax \in U^{\perp})\,\mathrm{nuc}(A^{\intercal})$ se cumple

$$0 = A^{\intercal}(b - Ax) = A^{\intercal}b - A^{\intercal}Ax$$
$$\longrightarrow A^{\intercal}Ax = A^{\intercal}b \longrightarrow x = (A^{\intercal}A)^{-1}A^{\intercal}b$$
$$\longrightarrow P_u(b) = A(A^{\intercal}A)^{-1}A^{\intercal}b$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{C\to C}(P_u(b)) = A(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

El sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ y &= 1 \\ x - y &= -2 \end{aligned}\right\} \text{es incompatible}$$

$$\text{El vector } x \text{ minimiza } \|Ax - b\|,\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ viene dado por}$$

$$(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal b = \begin{bmatrix} -\frac{15}{11} \\ \frac{8}{11} \end{bmatrix}$$

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{11}F_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 6F_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -\frac{6}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{array}\right]$$

$$(A^\intercal A)^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -6 & 17 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hoja de ejercicios Tema 6: Transformaciones Lineales

1) Comprueba que si $v = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación $T_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T_v(x) = x + v$ no es lineal. Este tipo de aplicación se llama una **traslación de vector** v y no se puede representar por medio de una matriz 3×3. Sin embargo, esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la traslación de vector $v = (a_1, a_2, a_3)$ se calcula por medio de la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ a_3 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las 4 coordenadas $(x_1, x_2, X-3, 1)$ del vector tridiemensional x se llaman coordenadas homogéneas de x.

$$\begin{aligned} T_v : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto T_v(x) = v + x \end{aligned} \qquad \text{no es lineal, } v \neq 0.$$

$T_v(0) = v \neq 0$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad v = (a_1, a_2, a_3)$$

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ a_3 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1, x_2, x_3, 1) \equiv$ coordenadas homogéneas.

2) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (-2, 3, -2)$, $v_2 = (-4, 5, -3)$ y $v_3 = (5, -6, 4)$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula la matriz en la base $\mathcal{B}$ de la transformación lineal cuya matriz en las bases canónicas es

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

$$M_{B\to B}(f) = M_{C\to B}{\cdot}M_{C\to C}(f){\cdot}M_{B\to C} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{C\to C}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix},\ M_{B\to C} = \underset{M_{C\to B}=(M_{B\to C})^{-1}}{\begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{tikzcd}
{}_C f : \mathbb{R}^3 \arrow[r, "M_{C\to C}(f)"] & \mathbb{R}^3_C \arrow[d, "M_{C\to B}"] \\
f : \mathbb{R}^3_B \arrow[u, "M_{B\to C}"] \arrow[r] & \mathbb{R}^3_B
\end{tikzcd}$$

3) Las llamadas **rotaciones de Givens** son las transformaciones lineales que vienes dadas por las matrices

$$R-x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}, \qquad R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix}, \qquad R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $c = \cos\alpha$ y $s = \sin\alpha$ para un cierto ángulo α. ¿Qué interpretación geométrica tienen? Dada la transformación lineal que tiene por matriz en las bases canónicas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcula la matriz en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde

$$u_1 = (1,1,1), \qquad u_2 = (0,1,1), \qquad u_3 = (1,1,0)$$

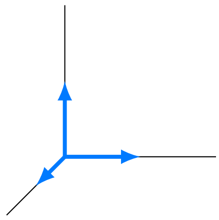
A la vista del resultado, ¿cuál es la interpretación geométrica de la transformación lineal dada por la matriz A?

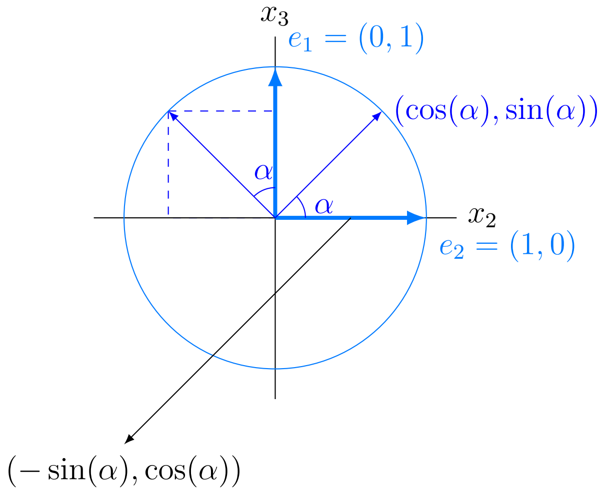
Rotaciones de Givens

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$$

$x = \cos(\alpha)$

$s = \sin(\alpha)$





$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} e_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} e_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$ giro de ángulo α en el plano x_2x_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} e_3 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\underset{M_{C\to C}(f)}{\overset{A}{\|}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (0,1,1),\ u_3 = (1,1,0)\}$$

$$M_{B\to B}(f) = M_{C\to B}\,\underbrace{M_{C\to C}(f)}_{A}\quad \underbrace{M_{B\to C}}_{\|}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Consideremos un plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, es decir, un subespacio y recibe el nombre de **reflexión de Householder**. Para verlo, prueba que si x es un vector arbitrario, entonces $x + Hx$ es ortogonal a v (es decir, $x + Hx$ pertenece al plano) y $x - Hx$ es proporcional a v (estas dos cosas prueban de Hx es el simétrico de x respecto del plano dado).

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax+by+cz=0\}$ $\qquad v \cdot v^\intercal = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{bmatrix}$

$H = I - \dfrac{2v \cdot v^\intercal}{v^\intercal \cdot v}$

Simetría ortogonal respecto del plano (reflexión de Householder)

$$0 \overset{?}{=} v^\intercal(x+Hx) = v^\intercal x + v^\intercal Hx = v^\intercal x + v^\intercal \left(x - \frac{2vv^\intercal}{v^\intercal v}\right) = v^\intercal x + v^\intercal x - \frac{2\cancel{v^\intercal v}v^\intercal}{\cancel{v^\intercal v}} = 0$$

$x - Hx$ proporcional a x

$x - Hx = x - x + \dfrac{2vv^\intercal}{v^\intercal v} \cdot x = v\dfrac{2v^\intercal x}{v^\intercal v} \equiv$ proporcional a v

$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x+Hx)}_{\in u} + \underbrace{\frac{1}{2}(x-Hx)}_{\in u^\intercal} \qquad Hx = \underbrace{\frac{1}{2}(x+Hx)}_{\in u} + \frac{1}{2}(x-Hx)$

5) Calcula la proyección del vector (2,3,4) sobre el subespacio Col(A), donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hazlo de tres formas disitntas: como en el ejemplo 5.17, como en el ejemplo 5.18 y como en el ejemplo 5.21.

$u = \mathrm{Col}(A) =< (1,0,0),(1,1,0) >$

$M_{C\to C}(P_u) = \left[\begin{array}{c:c:c} P_u(e_1) & P_u(e_2) & P_u(e_3) \end{array}\right]$

$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$

$\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ base ortogonal de u, entonces

$$P_u(u) = \frac{u \cdot u_1}{\|u_1\|^2}u_1 + \cdots + \frac{u \cdot u_m}{\|u_m\|^2}u_m$$

1) Calculamos por Gram-Schmidt una base ortogonal de $u = \mathrm{Col}(A)$

   a) $u_1 = (1,0,0)$

   b) $u_2 = (1,1,0) + \alpha(1,0,0)$

   Imponemos la condición

   $$0 = u_1 \cdot u_2 = (1,0,0)\cdot(1,1,0) + \alpha(1,0,0)\cdot(1,0,0) \longrightarrow \alpha = -\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,0)}{(1,0,0)\cdot(1,0,0)} = -1$$

$$P_u(1,0,0) = \underbrace{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}_{1}\cdot(1,0,0) = (1,0,0)$$

$$P_u(0,1,1) = (0,1,0)$$

$$P_u(0,0,1) = \underbrace{(0,0,1)\cdot(1,0,0)}_{0}\cdot u_1 + (0,0,1)\cdot(0,1,0)\cdot u_2 = (0,0,0)$$

$$P_u(2,3,4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6) ¿Qué combianción lienal de los vectores $(1,2,-1)$ y $(1,0,1)$ está más "cerca" del vector $(2,1,1)$?

$\|(1,2,1)x_1 + (1,0,1)x_2 - (2,1,1)\|$ mínima.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} \qquad \| \underbrace{Ax}_{P_{\mathrm{Col}(A)(b)}} - b\| \text{ minimizar.} \quad Ax = A\underbrace{(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal b}_{x}$$

7) Encuentra una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Col}(A)$ sea el subespacio generado por u_1, u_2 donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de los cuatro subespacios fundamentales de A contiene a u_3? Calcula la proyección orotogonal de $b^\intercal = (1,2,7)$ sobre $\mathrm{Col}(A)$ y explica por qué esta proyección es la solución aproximada del sistema de ecuaciones $Ax = b$.

Se tiene que cumplor que $\mathrm{Col}(A) = < u_1,\ u_2 >$

Gram-Schmidt

1) $u_1 = (1,2,-2) \longrightarrow \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

2) $u_2 = (1,-1,4) + \alpha(1,2,-2)$

$$0 = u_1 \cdot u_2 \longrightarrow \alpha = ?$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|}$$

3) $u_3 = \underbrace{(1,0,0)}_{\substack{(0,1,0)\\(0,0,1)}} + \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \longrightarrow \begin{array}{l} 0 = u_1 \cdot u_3 \longrightarrow \alpha \\ 0 = u_2 \cdot u_3 \longrightarrow \beta \end{array}$

$\mathrm{Col}(A) \oplus \mathrm{nuc}(A^\intercal) = \mathbb{R}^3$

Tema 7: Valores y vectores propios

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio o autovalor (eigenvalue) de A si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{K}^n$, llamado vector propio o autovector (eigenvector) de modo que $Av = \lambda v$.

Al conjunto de todos los valores propios de A se le llama espectro de A. Al mayor, en valor absoluto, de los autovalores se le llama radio espectral, denotado $\rho(A)$.

¿Cómo calculamos los autovalores y autovectores de una matriz?

$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0 \iff v \in \operatorname{nuc}(A - \lambda I) \iff \operatorname{nuc}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \operatorname{dimnuc}(A - \lambda I) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I) \geq 1 \iff \operatorname{rg}(A - \lambda I) < n \iff \det(A - \lambda I) = 0$

- Definición (Polinomio característico)

Sea $A \in M_n(\mathbb{K}^n)$. Se llama polinomio característico de A, denotado $P_A(\lambda)$, al polinomio

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Por tanto, las raíces del polinomio característico son los valores propios de A.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} &= (5-\lambda)^2 - 16 \\ &= 25 + \lambda^2 - 10\lambda - 16 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right.$$

Valores propios $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$

Espectro de $A = \{9, 1\}$

Radio espectral $\rho(A) = 9$.

Vectores propios.

- $\lambda_1 = 9 \qquad \ker(A - 9I) = \ker \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -4x + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\} y = \alpha \longrightarrow x = \alpha$$

$\ker(A - 9I) =< (1,1) >$

- $\lambda_2 = 1,\ \ker(A - I) = \ker \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{aligned}\right\} y = \alpha \longrightarrow x = -\alpha$$

$\ker(A - I) =< (-1,1) >$

Consideremos la matriz formada por lo valores propios anteriores, pero unitarios, es decir,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Nótese que P es ortogonal. Por tanto, $P^{-1} = P^{\intercal}$.

Además, si denotamos por D la matriz diagonal formada por los valores propios de A, es decir,

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces se cumple:

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & \frac{9}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

Es decir, $A = PDP^{-1}$ y también $D = P^{-1}AP$

7.1) Interpretación en términos de aplicaciones lineales

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (5x+4y.4x+5y)$$

$$C = \{(1,0),(0,1)\}$$

$$f(1,0) = (5,4) \qquad M_{C\to C}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

$$f(0,1) = (4,5)$$

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

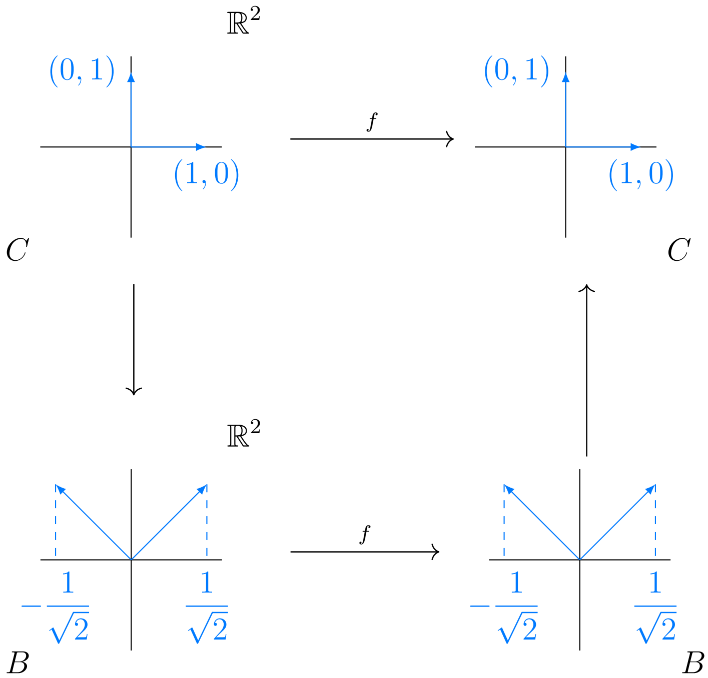
$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(-5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\cdot -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$M_{B\to B}(f) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{B\to C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \equiv P$$

$$M_{C\to B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



$A = M_{C\to C}(f) = M_{B\to C} M_{B\to B}(f) M_{C\to B} = PDP^{-1}$

- Conclusiones

1) Los valores propios dependen de la aplicación lineal, no de la matriz. Es decir, son invariantes por cambio de base. En efecto, las matrices A y $Q^{-1}AQ$ tienen los mismos valores propios.

$$\begin{aligned}
\det(Q^{-1}AQ - \lambda I) &= \det[Q^{-1}AQ - Q^{-1}(\lambda I)Q] \\
&= \det[Q^{-1}(A - \lambda I)Q] \\
&= \det[Q^{-1}] \cdot \det[A - \lambda I] \cdot \det(Q) \\
&= \det(A - \lambda I)
\end{aligned}$$

2) La base de vectores propios nos permite expresar la aplicación lineal f de la forma más sencilla posible (a través de una matriz diagonal)

7.2) Cálculo numérico de valores propios

- Teorema (Factorización QR)

Sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n-vectores de $\mathbb{R}^m$ linealmente independientes. Entonces existe un conjunto ortonormal de vectores $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ de $\mathbb{R}^m$ de modo que

$$< a_1, a_2, \ldots, a_n > = < q_1, q_2, \ldots, q_n > .$$

Además, si denotamos por $A = [a_1, \ldots, a_n]$ la matriz cuyas columnas son los vectores $\{a_1, \ldots, a_n\}$ y por Q la matriz cuyas columnas son $\{q_1, \ldots, q_n\}$, entonces existe una matriz R, triangular superior de modo que

$$A = QR,$$

es decir,

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \quad & \downarrow \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{array}\end{array} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & & q_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & & \\ & & r_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Ejemplo

$$A = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}^{Q} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{array}\end{array} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}}^{R}$$

1°) $q_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|}, \qquad \|a_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 \longrightarrow a_1 = \underbrace{\sqrt{2}}_{r_{11}}\, q_1 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3$$

2°) $v_2 = a_2 + \alpha q_1$

$$0 = v_2 \cdot q_1 = a_2 \cdot q_1 + \alpha q_1 \cdot q_1 \longrightarrow \alpha = -a_2 \cdot q_1$$
$$= -(1,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_2 = a_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} q_1$$
$$= (1,0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$
$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} q_1 + v_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{r_{12}} q_1 + \underbrace{\|v_2\|}_{\substack{r_{22} \\ \| \\ \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}}} q_2 + 0 \cdot q_3$$

3°) $v_3 = a_3 + \alpha q_1 + \beta q_2$

$$0 = q_1 \cdot v_3 \longrightarrow \alpha = -a_3 \cdot q_1 = -(0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$0 = q_2 \cdot v_3 \longrightarrow \beta = -a_3 \cdot q_2 = -(0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$v_3 = (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$
$$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$\|v_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$a_3 = \underbrace{-\alpha}_{r_{13}} q_1 \underbrace{-\beta}_{r_{23}} q_2 + \underbrace{\|v_3\|}_{r_{33}} q_3$$

7.3) Algoritmo QR para el cálculo de valores propios

1°) Inicialización: tomar $A_0 = A$

2°) Iteración: para $k \geq 0$ d_0:

2.1) $A_0 = Q_1 R_1$ factorización QR de A_0

2.2) $A_1 = R_1 Q_1$

Nota: $A_1 = Q_1^\intercal Q_1 R_1 Q_1 = Q_1^\intercal A_0 Q_1$

2.3) $A_1 = Q_2 R_2$

2.4) $A_2 = R_2 Q_2$

Nota: $A_2 = Q_2^\intercal Q_2 R_2 Q_2 = Q_2^\intercal A_1 Q_2$

$= Q_2^\intercal Q_1^\intercal A_0 Q_1 Q_2$

y así sucesivamente.

Se observa que A_k converge a una matriz triangular superior que tiene en su diagonal principal los valores propios de A.

Una vez el algoritmo ha convergido, los vectores propios están en la columnas de $Q = Q_1, \ldots, Q_n$.

Nota: El algoritmo es estable (los errores no se propagan) porque Q es ortogonal. Por tanto, su número de condición es 1.

- Definición (Factorización en valores propios)

Sea $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$. Se dice que A es diagonalizable o factorizable en valores propios si existen una diagonal D, que contiene en su diagonal los valores propios de A, y una matriz invertible P, cuyas columnas están formadas por los vectores propios de A, de modo que

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

A esta factorización se le llama factorización en valores propios.

¿Qué matrices cuadradas son factorizables en valores propios?

- Proposición

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si A tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

- Teorema

Si A es simétrica, entonces

$$A = PDP^{-1}$$

con $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, λ_j valores propios y $P = [u_1, \ldots, u_n]$ es una base ortonormal de vectores propios.

Nota: Nótese que, en esta situación

$$\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ \vdots \\ u_m^\intercal \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ \vdots \\ u_n^\intercal \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 u_1 u_1^\intercal + \cdots + \lambda_n u_n u_n^\intercal$$

La expresión $A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i u_i i_i^\intercal$ se le llama descomposición espectral de A.

Nótese que

$$u_i u_i^\intercal = \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \cdots & \hat{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1\hat{u}_1 & \hat{u}_1\hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_1\hat{u}_n \\ \hat{u}_2\hat{u}_1 & \hat{u}_2\hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_2\hat{u}_n \\ \hdashline \hat{u}_n\hat{u}_1 & \cdots & \cdots & \hat{u}_n\hat{u}_n \end{bmatrix}$$

son matrices simétricas y de rango 1

7.4) Matrices semidefinidas positivas

- Definición

$A \in M_n(\mathbb{R})$ se dice semidefinida positiva si $x^\intercal A x \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Si $x^\intercal A x > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n$ no nulo. A se dice definida positiva.

- Proposición

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica. Son equivalentes:

i) A es definida positiva

ii) Todos los valores propios de A son estrictamente positivos.

Si A es semidefinida positiva, entonces los valores propios son ≥ 0.

7.5) Factorización en Valores Singulares (SVD)

Los principales inconvenientes de la factorización en valores propios es que la matriz A ha de ser cuadrada y simétrica. Sin embargo, en Ciencia de Datos aparecen muchas matrices que no son cuadradas ni simétricas.

La factorización SVD soluciona ambos problemas y, para muchos, es el resultado más importante en Ciencia de Datos.

- Definición

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama factorización en valores singulares SVD (Singular Value Descomposition) de A a una factorización de la forma

$$A = U\Sigma V^\intercal$$

con $U \in M_m(\mathbb{R})$, $V \in M_n(\mathbb{R})$, ambas ortogonales y $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, una matriz diagonal.

¿Cómo se obtiene?

$A^\intercal A$ es simétrica y semidefinida positiva. En efecto, $(A^\intercal A)^\intercal = A^\intercal (A^\intercal)^\intercal = A^\intercal A$.

$$x^\intercal A^\intercal A x = (Ax)^\intercal Ax = \|Ax\|^2 \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Por tanto, sus valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$.

- Definición (Valores Singulares)

Se llaman valores singulares de A, denotados $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, a las raíces cuadradas de los valores propios de $A^\intercal A$, es decir,

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1},\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2},\ \ldots,\ \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

- Teorema (Factorización SVD)

Sea $A \in M_{m\times n}$, con $n \leq m$. Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ los valores singulares de A. Entonces existen matrices ortogonales $U \in M_m(\mathbb{R})$ y $V \in M_n(\mathbb{R})$ tales que

$$A = U\Sigma V^\intercal$$

con $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ diagonal con $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ en la diagonal principal.

Nota: El resultado también es válido si $m \leq n$. En este caso $A^\intercal = U\Sigma V^\intercal$ y por tanto, tomando traspuestas,

$$A = V\Sigma^\intercal V^\intercal$$

El esquema queda:

$$\boxed{A} = \boxed{U} \cdot \boxed{\begin{matrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n\end{matrix}} \cdot \boxed{V^T}$$

En forma compacta: si $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ son los valores singulares no nulos, entonces

$$U\Sigma V^\intercal = [u_1, \dots, u_m] \cdot [\sigma_1 e_1, \dots, \sigma_r e_r, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} v_1^\intercal \\ \vdots \\ v_n^\intercal \end{bmatrix} = [\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_r u_r, 0, \dots, 0] \cdot \begin{bmatrix} v_1^\intercal \\ \vdots \\ v_n^\intercal \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_1 u_1 v_1^\intercal + \cdots + \sigma_r u_r v_r^\intercal = U_r \Sigma_r V_r^\intercal$$

- Demostración del Teorema

Paso 1: Como $A^\intercal A$ es simétrica y semidefinida positiva todos sus valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ y asociados a ellos tenemos una base ortonormal de vectores propios $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sea $V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}$

Paso 2: Definimos $u_i = \dfrac{1}{\sigma_i} A v_i$, $i = 1, \dots, r$, valores singulares asociadas a los $\lambda_j \geq 0$.

2.1) Veamos que $\{u_1, \dots, u_r\}$ es un conjunto ortonormal de vectores. En efecto:

$$\begin{aligned} u_i^\intercal u_j &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (Av_i)^\intercal (Av_j) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^\intercal \underbrace{A^\intercal A v_j}_{\substack{\| \\ \lambda_j v_j}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

ya que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de vectores propios de $A^\intercal A$.

2.2) Completamos (por ejemplo, usando Gram-Schmidt) el conjunto $\{u_1, \dots, u_r\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$

Definimos $U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_m \end{bmatrix}$

Paso 3: Calculamos $U^\intercal AV$

$$
\begin{aligned}
U^\intercal AV &= \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ \vdots \\ u_m^\intercal \end{bmatrix} \cdot A \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ \vdots \\ u_m^\intercal \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Av_1 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ \vdots \\ u_m^\intercal \end{bmatrix} \cdot [\sigma_1 u_1, \ldots, \sigma_r u_r, 0, \ldots, 0] \\
&= (\sigma_1 u_1^\intercal u_1, \ldots, \sigma_r u_r^\intercal u_r, 0, \ldots, 0) \equiv \Sigma
\end{aligned}
$$

Multiplicando a la derecha por $V^{-1} = V^\intercal$ y a la izquierda por U se tiene

$$A = U\Sigma V^\intercal$$

- Notas importantes

1) ¿Qué son los vectores $u_1, \ldots, u_n$?

Son los autovectores de $AA^\intercal$. En efecto

$$
\begin{aligned}
AA^\intercal u_k &= AA^\intercal \left(\frac{1}{\sigma_k} Av_k \right) \\
&= A \left(\frac{A^\intercal A v_k}{\sigma_k} \right) \\
&= A \frac{\sigma_k^2 \cdot v_k}{\sigma_k} \\
&= \sigma_k A v_k \\
&= \sigma_k \sigma_k u_k \\
&= \lambda_k u_k
\end{aligned}
$$

2) Por tanto, los u_s son los vectores propios de $AA^\intercal$ asociados a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, y los v_s son los vectores propios de $A^\intercal A$ asociados a los mismos valores propios $\lambda, \ldots, \lambda_m$.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Valores propios de $A^\intercal A$

$$\det(A^\intercal A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot\big((3-\lambda)^2 - 9\big) = 0$$

$\lambda_1 = 6 > \lambda_2 = 3 > \lambda_3 = 0$

Valores singulares: $\sigma_1 = \sqrt{6}, \quad \sigma_2 = \sqrt{3}$

Valores propios de $A^\intercal A$:

- $\lambda_1 = 6$

$$\ker(A^\intercal A - 6I) \iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- $\lambda_2 = 3$

$$\ker(A^\intercal A - 3I) \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_2 = (1, 0, 0)$$

- $\lambda_3 = 0$

$$\ker(A^\intercal A - 0\cdot I) \iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Por tanto,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora los vectores que forman las columnas de U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Hemos de completar a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$:

Lo podemos hacer de manera sistemáticamente usando Gram-Schmidt a partir de los vectores

$$\left\{ u_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), (1,0,0,0), (0,1,0,0) \right\}$$

o bien directamente se ve

$$u_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), u_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La matriz U es

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$A = U \Sigma V^{\intercal} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

que también podemos escribir de manera más compacta:

$$
A = U_2\Sigma_2V_2^{\intercal} = \frac{1}{\sqrt{6}}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 \end{array}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \\
\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{array}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \longleftarrow v_1^{\intercal} \\ \longleftarrow v_2^{\intercal} \end{array}
$$

$$
= \underbrace{\begin{bmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 1 \end{bmatrix}}_{\sigma_1u_1v_1^{\intercal}}
+ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{2} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot 0 \\ 0\cdot\sqrt{2} & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{2} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot 0 & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot 0 \end{bmatrix}}_{\sigma_2u_2v_2^{\intercal}}
$$

Suma de matrices de rango 1.

¿Por qué es importante la SVD en Ciencia de Datos?

- Teorema (Eckart-Young-Mirsky)

Sea $A_k = \sum_{k=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^{\intercal}$.

Entonces, para toda matriz de rango k se tiene que

$$\|A - A_k\| \leq \|A - B\|$$

donde $\|\cdot\|$ norma de Frobenius. Es decir, A_k es la mejor aproximación posible de A con matrices de rango menor o igual que k.

Aplicaciones: Compresión de imágenes, eliminación de ruido en señales, etc...

Geometría de la SVD: $A = U\Sigma V^{\intercal}$

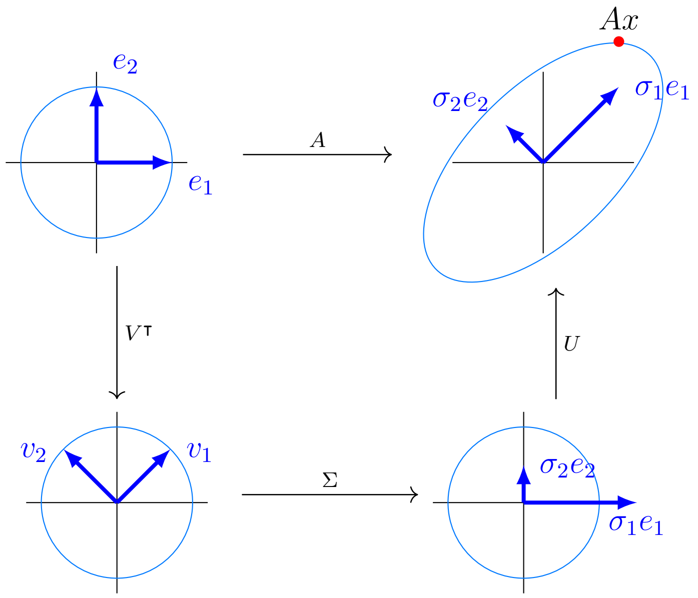
- U: Ortogonal
- Σ: Dilatación
- $V^{\intercal}$: Ortogonal

Veámoslo en dimensión 2.

$$
\begin{tikzcd}
{}_{C}\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"] \arrow[d] & \mathbb{R}^2\ {}_{C} \\
{}_{V}\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\Sigma"] & \mathbb{R}^2\ {}_{U} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Columnas de V = base de $\mathbb{R}^2$.

Columnas de U forman una base de $\mathbb{R}^2$.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ x & d \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}_{V^\intercal}$$

V produce un cambio de base ortonormal.

Σ define las dos direcciones principales y cuánto éstas se alargan o acortan.

U es un nuevo cambio de base ortonormal que marca precisamente las direcciones principales.

7.5.1) Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz y la SVD

- Lema

Se tiene que $\text{nuc}(A^\intercal A) = \text{nuc}(A)$.

- Demostración

Sea $u \in \text{nuc}(A^\intercal A) \longrightarrow A^\intercal A u = 0$

Multiplicando por $u^\intercal$

$$0 = u^\intercal A^\intercal A u = (Au)^\intercal A u = \|Au\| \longrightarrow Au = 0 \longrightarrow u \in \text{nuc}(A)$$

Recíprocamente, si $Au = 0 \longrightarrow A^\intercal A u = 0$.

- Proposición

Sea $A \in M_{m\times n}$, $n \leq m$ y sea $r = \text{rg}(A)$. Entonces:

1) $\text{nuc}(A) =< v_{r+1}, \dots, v_n >$

2) $\text{Col}(A) =< u_1, \dots, u_r >$

3) $\text{Fil}(A) = \text{nuc}(A)^\perp =< v_1, \dots, v_r >$

4) $\text{nuc}(A^\intercal) = \text{Col}(A)^\perp =< u_{r+1}, \dots, u_m >$

- Demostración

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de vectores propios de $A^\intercal A$, por la factorización en valores propios se tiene que

$$V^\intercal A^\intercal A V = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0]$$

ya que $\text{rg}(A) = \text{rg}(U\Sigma V^\intercal) = \text{rg}(\Sigma)$

Por el lema anterior $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de $\text{nuc}(A) = \text{nuc}(A^\intercal A)$. Nótese que $A^\intercal A V = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0$ V.

Por la definición de los vectores $u_i = \dfrac{1}{\sigma_i} A v_i$, $1 \leq i \leq r$, se tiene que $\text{Col}(A) =< u_1, \dots, u_r >$.

El resto se prueba teniendo en cuenta que

$$\text{Col}(A) \oplus \text{nuc}(A^\intercal) \longrightarrow \{u_{r+1}, \dots, u_m\}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}(A) & \oplus & \text{nuc}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{v_1, \dots, v_r\} & & \{v_{r+1}, \dots, v_n\} \end{array}$$

que dichos espacios son ortogonales dos a dos y que U y V son ortogonales.

Hoja de ejercicios Tema 7: Vectores y Valores Propios

1) Halla la matriz real más general posible que tiene como vectores propios los vectores $(1,1)$ y $(1,-1)$

$$A = P^{-1}DP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix}} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \lambda_1, \lambda_2 \equiv \text{valores propios}$$

2) Dada la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$, explica por qué no existe ninguna matriz invertible P tal que para la matriz $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal. ¿Puedes generalizar este resultado para matrices de tamaño mayor?

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ $b \neq 0$ No existe P invertible tal que $P^{-1}AP = D$

$$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda_i] = \det\begin{bmatrix} a-\lambda & 0 \\ b & a-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)^2 = 0$$

Valor propio $\lambda = a$ multiplicidad 2.

$$\text{nuc}(A - aI) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \qquad bx = 0 \longrightarrow x = 0$$

$\text{dimnuc}(A - aI) = 1$ $\qquad v = (0,1)$

<u>Conclusión:</u> para que $P^{-1}AP = D$ es necesario que la dimensión de los subespacios de vectores propios coincidan con la multiplicidad de los correspondientes valores propios.

3) Sea A una matriz diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Prueba que la matriz A^2 también es diagonalizable con valores propios $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$

A diagonalizable, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios $\longrightarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de vectores propios A^2 diagonalizable, $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ valores propios.

$$Av_j = \lambda_j v_j, \ 1 \leq j \leq n \qquad A^2 v_j = \lambda_j A v_j = \lambda_j \lambda_j v_j = \lambda_j^2 v_j$$

$¿A^2 v_j = \lambda_j^2 v_j?$

A^2 tiene valores propios λ_j^2

A^2 tiene vectores propios los mismo que A

4) Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de A. ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1}?

$\exists v_j \neq 0 Av_j = \lambda_j v_j$

$$= \underbrace{A^{-1}A}_{I} v_j = \lambda_j A^{-1} v_j \longrightarrow \boxed{A^{-1}v_j = \frac{1}{\lambda_j} v_j}$$

$Av = 0 \longrightarrow \operatorname{nuc}(A) \neq \{0\}$

$$\operatorname{dimnuc}(A) \geq 1$$

$v \neq 0$ $\qquad +$

$$\operatorname{dimrg}(A) = n$$

5) Determina los valores a para los cuales la matriz $\begin{bmatrix} 5 & -3 & a \\ 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & a \\ 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad a \text{ para que } A \text{ sea diagonalizable.}$$

$$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 & a \\ 6 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda)(2-\lambda) + 18(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda) \quad \underbrace{((5-\lambda)(-4-\lambda)+18)}$$

$$-20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right.$$

Valores propios

$\lambda_1 = 2$ multiplicidad 2

$\lambda_2 = -1$ multiplicidad 1

$\boxed{\text{nuc}(A-2I)}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & a \\ 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 3x - 2y + az = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & a \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix},$$

$a = 3 \longrightarrow$ rango $1 \longrightarrow$ 2 parámetros $\longrightarrow$ 2 vectores propios $\longrightarrow$ A diagonalizable.

$a \neq 3 \longrightarrow$ rango $2 \longrightarrow$ 1 parámetro$\longrightarrow$1 vector propio$\longrightarrow$ A no diagonaliza.

6) Una empresa comercializa dos marcas de un producto. Entre los usuarios de estas marcas la empresa ha podido determinar que la probabilidad de que un usuario de la marca 1 se pase a la marca 2 después de un mes es de 0.4, y la probabilidad de que un usuario de la marca 2 se pase a la marca 1 después de un mes es de 0.2. Con esta información, observa que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

es tal que a_{ij} es la probabilidad de que un usuarios de la marca j se pase a la marca i después de un mes. Este tipo de matrices se llaman **matrices de Markov**.

Si inicialmente hay, por ejemplo, un 20% de usuarios que prefieren la marca 1 y un 80% que prefieren la marca 2, se puede ver, usando argumentos probabilísticos, que las preferencias de los usuarios después de n meses vienen dadas por

$$A^n \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Determina cuáles serán las preferencias por cada marca en el futuro.

¿Cómo calcular $A^n, n \in \mathbb{N}, n$ grande?

$$A = P^{-1}DP \qquad A^2 = \underbrace{P^{-1}DP}_{A}\underbrace{P^{-1}DP}_{A} = P^{-1}D^2P$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad A^n = P^{-1}D^nP$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \qquad D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

7) **El secreto de Google y el Álgebra Lineal.** El teorema que sugye es una pieza clave en el algoritmo *PageRank* que usa (o usaba) *Google* para ordenar las búsquedas de las páginas de Internet. En su versión más sencilla, el Teorema de Perron-Frobenius se enuncia así: Sea A una matriz cuadrada con entradas positivas, es decir, $a_{ij} > 0$. Entonces existe un autovalor simple (es decir, de multiplicidad 1) cuyo autovector asociado puede elegirse con todas sus componentes estrictamente positivas. Calcula los autovalores y autovectores de la maatriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

y comprueba que se satisface el Teorema de Perron-Frobenius. Se recomienda la lectura del artículo `https://sctmates.webs.ull.es/modulo1lp/8/pfernandez.pdf` a aquellos alumnos que tengan curiosidad por saber las Matemáticas en el algoritmo *PageRank* de Google. En particular, se podrá apreciar el papel destacado del Teorema de Perron-Frobenius.

autovalores, autovectores= eig(A)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{valor propio dominante} = 6.1933$$

$v = (0.69, 0.5, 0.53)$

8) Calcula y compara los valores propios y los valores singulares de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué conclusión puedes sacar?

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 2 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 3\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}=\lambda^4=0$$

$$\det[B-\lambda I]\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 2 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 3\\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 0 & -\lambda & 3\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -\lambda & 3\\ \frac{1}{60000} & 0 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4-\frac{6}{60000}=0$$

$$\lambda^4=10^{-4}\left\langle\begin{array}{l}\lambda=\pm 0.1\\ \lambda=\pm 0.1j\end{array}\right.$$

Valores propios y singulares de A y B

Valores propios de $A\longrightarrow\lambda=0$ multiplicidad 4

Valores propios de $B\longrightarrow\left\langle\begin{array}{l}\lambda=\pm 0.1\\ \lambda=\pm 0.1j\end{array}\right.$

$$\begin{cases}A^{\intercal}A\longrightarrow\text{ valores propios }\longrightarrow\text{ valores singulares }\sigma_1=3,\sigma_2=\sigma_3=1,\sigma_4=0\\ B^{\intercal}B\longrightarrow\text{ valores propios }\longrightarrow\text{ valores singulares }\sigma_1=3,\sigma_2=\sigma_3=1,\sigma_4\approx 2.27\cdot 10\end{cases}$$

Son simétricas$\longrightarrow$valores propios son reales.

9) Consideremos la matriz $A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

a) Calcula los valores propios y los valores singulares de A

$P_A(\lambda)=\det[A-\lambda I]=\det\begin{bmatrix}3-\lambda & 8\\ 0 & 3-\lambda\end{bmatrix}=(3-\lambda)^2=\lambda^2-6\lambda+9\longrightarrow\lambda=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=$
$\dfrac{6\pm}{2}=3$

$\lambda=3$ multiplicidad 2

b) ¿Es A diagonalizable?

$\boxed{\lambda=3}$ $\quad\operatorname{nuc}(A-3I)=\operatorname{nuc}\begin{bmatrix}0 & 8\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0 & 8\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{array}{l}8y=0\longrightarrow y=0\\ \boxed{v=(1,0)}\end{array}$$

$\text{dimnuc}(A-3I) = 1 \neq 2$ multiplicidad de $\lambda = 3$

A no factoriza, no diagonaliza.

c) Calcula las matrices U y V ortogonales tales que $A = U\Sigma V^{\intercal}$, donde $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ con σ_1, σ_2 los valores singulares de A.

Calcular los valores y vectores propios de $A^{\intercal}A$

$$A^{\intercal}A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 \\ 24 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 24 \\ 24 & 73-\lambda \end{bmatrix} = (9-\lambda)(73-\lambda) - 576 = \lambda^2 - 82\lambda + 81 = 0$$

$$\lambda = \frac{82 \pm \sqrt{82^2 - 4\cdot 81}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 81 \longrightarrow \sigma_1 = 9 \\ \lambda_2 = 1 \longrightarrow \sigma_2 = 1 \end{array} \right. \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_1 = 81}$ $\quad \text{nuc}(A^{\intercal}A - 81I) = \text{nuc} \begin{bmatrix} -72 & 24 \\ 24 & -8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -72 & 24 \\ 24 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -72x + 24y = 0 \\ 24x - 8y = 0 \end{array} \right. \longrightarrow 8y = 24\alpha \longrightarrow y = 3\alpha$$

$v = (1,3) \longrightarrow \|v\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ $\quad \text{nuc}(A^{\intercal}A - I) = \text{nuc} \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 72 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 72 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} 8x + 24y = 0 \\ 24x + 72y = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow y = \alpha \longrightarrow x = -\frac{24\alpha}{8} = -3\alpha; \boxed{\alpha = 1}$$

$v = (-3, 1)$

$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

<u>Cálculo de U</u>

$$U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = U\Sigma V^{\intercal}}$$

10) Encuentra la factorización SVD de la matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la primera de ellas, escribe la matriz como suma de matrices de rango 1, según se explica en la página 121 de los apuntes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{\intercal}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P_{A^{\intercal}A} = \det(A^{\intercal}A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(9-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 9 \longrightarrow \sigma_1 = \sqrt{9} = 3$$
$$\lambda_2 = 4 \longrightarrow \sigma_2 = \sqrt{4} = 2$$

$$\boxed{\lambda_1 = 9}\ \mathrm{nuc}(A^{\intercal}A - 9I) \longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5x = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow y = 1 \longrightarrow v_1 = (0, 1)$$

$$\boxed{\lambda_2 = 4}\ \mathrm{nuc}(A^{\intercal}A - 4I) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 5y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow x = 1 \longrightarrow v_2 = (1, 0)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow V^{\intercal} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Completamos $u_1 = (0,1,0), u_2(0,0,-1)$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Basta tomar

$$u_3 = (1,0,0)$$

Por tanto:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$V^\intercal = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- -

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el número de condicionamiento de B es 3 y el de filas es 2, hemos de hacer la factorización SVD de $B^\intercal$ y a partir de ella deduciremos la de B.

Empezamos Pues considerando la matriz

$$A = B^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1°) Cálculo de los autovalores y autovectores de $A^\intercal A$.

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Valores propios de $A^\intercal A$: Valores singulares de A:

$$\lambda_1 = 5 \qquad \sigma_1 = \sqrt{5}$$

$$\lambda_2 = 4 \qquad \sigma_2 = \sqrt{2}$$

$\boxed{\lambda_1 = 5}$ $\operatorname{nuc}(A^\intercal A - 5I) = \operatorname{nuc}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow -y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow v_1 = (1, 0)$$

$\boxed{\lambda_2 = 4}$ $\operatorname{nuc}(A^\intercal A - 4I) = \operatorname{nuc}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x = 0 \longrightarrow v_2 = (0, 1)$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Completamos $\{u_1, u_2\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Se puede calcular el tercer vector u_3 usando Gram-Schmidt, pero de manera directa se puede ver que podemos tomar

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)$$

Por tanto:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

En resumen:

$$B^\intercal = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{V^\intercal}$$

Tomando la traspuesta:

$$B = V\Sigma^\intercal U^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

11) Sea A una matriz real y simétrica. Prueba que los valores singulares de A son los valores absolutos de los valores propios de A. ¿Qué pasa si A es semidefinida positiva?

> Nota: Antisimétrica.
>
> Valores singulares de A son los valores absolutos de los valores propios de A. ¿A semidefinida positiva?

Valores singulares de A son las raíces cuadradas de los valores propios de $A^\intercal A$.

$$\underbrace{A^\intercal A v_j}_{} \longrightarrow \sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$$
$$A^2 v_j = \lambda_j^2 v_j \longrightarrow \sigma_j = \sqrt{\lambda_j^2} = |\lambda_j|$$

donde λ_j son los valores propios de A. $A \geq 0 \longrightarrow \lambda_j \geq 0$

Ejercicios Tipo Examen

1) En una red eléctrica se tienen dos fuentes de tensión $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, siendo $\vec{V}_2 = 5_{45^\circ}$, esto es, el número complejo de módulo 5 y argumento 45°. La ley de Ohm conduce al sistema de ecuaciones lineales $\vec{V} = R\vec{I}$, donde

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ 0 \\ \vec{V}_2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1+\jmath & -5\,\jmath & 0 \\ -5\,\jmath & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{I} = \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Calcula el valor que debe tomar $\vec{V}_1$ de modo que $\vec{I}_2$ sea igual a cero.

Por la regla de Cramer se tiene que

$$\vec{I}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1+\jmath & \vec{V}_1 & 0 \\ -5\jmath & 0 & -3 \\ 0 & \vec{V}_2 & 1 \end{bmatrix}}{|R|}$$

Por tanto, $\vec{I}_2 = 0$ si y sólo si

$$0 = \begin{bmatrix} 1+\jmath & \vec{V}_1 & 0 \\ -5\jmath & 0 & -3 \\ 0 & 5_{45^\circ} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}_{45^\circ} & \vec{V}_1 & 0 \\ 5_{-90^\circ} & 0 & 3_{180^\circ} \\ 0 & 5_{45^\circ} & 1_{0^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |1+j| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\dfrac{1}{1} = 45^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow 1+j = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

$$-5\jmath = 5(-\jmath) = 5_{-90^\circ} = 5_{270^\circ}$$

$$-3 = 3_{180^\circ}$$

Hemos tomado el argumento principal en $[0, 360^\circ[$. Así:

$$0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}_{45^\circ} & \vec{V}_1 & 0 \\ 5_{270^\circ} & 0 & 3_{180^\circ} \\ 0 & 5_{45^\circ} & 1_{0^\circ} \end{bmatrix} = -(5_{45^\circ}\cdot 3_{180^\circ}\cdot \sqrt{2}_{45^\circ} + 1\cdot 5_{270^\circ}\cdot \vec{V}_1) = -15\sqrt{2}_{270^\circ} - 5_{270^\circ}\cdot \vec{V}_1$$

Despejando:

$$\vec{V}_1 = \frac{-15\sqrt{2}_{270^\circ}}{5_{270^\circ}} = \frac{15\sqrt{2}_{270^\circ}\cdot 1_{180^\circ}}{5_{270^\circ}} = 3\sqrt{2}_{180^\circ} = \boxed{-3\sqrt{2}}$$

2) Sea

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

una matriz ortogonal con determinante $|Q| = 1$. Consideremos la norma matricial

$$\|Q_2\| = \max_{x\in\mathbb{R}^2, x\neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2},$$

donde $\|v\|_2^2 = v_1^2 + v_1^2$ para todo $v = [v_1, v_2] \in \mathbb{R}^2$. Se pide:

a) Demuestra que el número de condicionamiento de Q, para la norma anterior, es igual a 1.

$\mathrm{c}(Q) = \|Q\|_2 \cdot \|Q^{-1}\|_2$

Recordemos que este tipo de matrices tienen la forma $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$.

También se tiene que

$$Q^{-1} = Q^{\intercal} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\|Q\|_2 &= \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^2\\ x\neq 0}} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^2\\ x\neq 0}} \frac{\left\| \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^2\\ x\neq 0}} \frac{\|(ax_1 + bx_2 - bx_1 + ax_2)\|_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^2\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{(ax_1 + bx_2)^2 + (-bx_1 + ax_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^2\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + 2abx_1x_2 + b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - 2abx_1x_2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^2\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{\cancelto{1}{(a^2 + b^2)}(x_1^2 + x_2^2)}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 1
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\|Q^{-1}\|_2 = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\|Q^{-1}x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\left\| \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_2}{\|(x_1, x_2)\|_2}$$

$$= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\|(ax_1 - bx_2, bx_1 + ax_2)\|_2}{\|(x_1, x_2)\|_2}$$

$$= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{(ax_1 - bx_2)^2 + (bx_1 + ax_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2 - 2abx_1x_2 + b^2x_1^2 + a^2x_2^2 + 2abx_1x_2}}{\sqrt{x_1^2 + x_1^2}} = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (x_1^2 + \cdots}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Por tanto,

$$\mathrm{c}(Q) = \|Q\|_2 \cdot \|Q^{-1}\|_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

b) Se puede probar que la propiedad anterior es cierta si la matriz Q del apartado anterior es de orden n, siendo $n \geq 2$ un número natural. Supongamos que queremos resolver un sistema lineal de la forma $Qx = b$ y que, debido a errores de redondeo o de medida, cometemos un error relativo en el término independiente de aproximadamente 10^{-3}. Obtén una cota del error relativo que se cometería en la solución x. Se ha de justificar la respuesta.

Recordemos que

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{c}(Q) \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}$$

Como $\mathrm{c}(Q) = 1$, si $\dfrac{\|\triangle b\|}{\|b\|} = 10^{-3}$, entonces

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} \leq 1 \cdot 10^{-3} = 10^{-3}.$$

3) Explica en qué consisten las factorizaciones LU, PLU y Cholesky de una matriz cuadrada A. Explica también cómo se resolvería un sistema lineal de la forma $Ax = b$ usando ambas factorizaciones. Finalmente, supongamos que la matriz A es simétrica y definida positiva. ¿Cuál de las factorizaciones usarías para resolver el sistema $Ax = b$? ¿Por qué?

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Una factorización LU de A es una factorización de la forma

$$A = LU$$

con $L \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ triangular inferior con unos en la diagonal, y U una matriz triangular superior de tamaño $m \times n$.

Se llama factorización PLU de A a toda factorización de la forma

$$PA = LU$$

con L y U como antes y P una matriz de permutación.

Se llama factorización Cholesky de A a toda factorización de la forma

$$A = L \cdot L^{\intercal}$$

con L una matriz triangular inferior.

Dado el sistema $Ax = b$, si A se factoriza en la forma $A = LU$, entonces

$$LUx = b$$

y llamando $z = Ux$, se tiene que el sistema $Ax = b$ es equivalente a los dos sistemas

$$\left.\begin{aligned} Lz &= b \\ Ux &= z \end{aligned}\right\}$$

Para el caso Cholesky, donde $A = L \cdot L^{\intercal}$,

$$L \cdot L^{\intercal}x = z$$

y llamando $L^{\intercal}x = z$ se tiene los sistemas

$$\left.\begin{aligned} Lz &= b \\ L^{\intercal}x &= z \end{aligned}\right\}$$

Si A es simétrica y definida positiva, entonces la factorización Cholesky es posible.

Debemos usar la factorización Cholesky en este caso ya que su coste computacional para resolver

$Ax = b$ es $\dfrac{n^3}{6}$, justo la mitad que si usamos la factorización LU.

4) Una clase de matrices que aparecen en varias aplicaciones en Ciencia de Datos (por ejemplo, en el famoso PageRank de Google) son las llamadas *matrices de Markov*. Se caracterizan porque todas sus entradas son no negativas y además la suma de las entradas de cada columna siempre da como resultado 1. La siguiente matriz es un ejemplo de matriz de Markov:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) Encuentra matrices P y Q de modo que $B = PMQ$, con B una matriz por bloques que tiene a la identidad I_r en el primer bloque, y en el resto de bloques vale cero.

Para obtener la factorización pedida empezamos haciendo operaciones elementales filda de la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hacemos ahora operaciones elementales columna:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_3 \to C_3 + \frac{1}{2}C_1} \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_3 \to C_3 - \frac{3}{2}C_2} \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_2 \to 3C_2]{C_1 \to 2C_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} \\ ' & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q}$$

b) ¿Cuál es el rango de M?

El rango de M es 2.

c) Resuleve el sistema lineal $Mx = x$, donde $x = [x_1, x_2, x_3]^\intercal$ es la incógnita.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_2 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_3 \end{array}\right\}$$

De las 2 primeras ecuaciones se tiene que $x_1 = x_2$ y la tercera ecuación se escribe en la forma más sencilla

$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0.$$

Tenemos pues el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &= 0 \\ \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$