Ejercicios Propuestos

1. Halle todos los números x para los que:

   a) $4 - x < 3 - 2x$.
   b) $5 - x^2 < 8$.
   c) $x^2 - 2x + 2 > 0$.
   d) $2^x < 8$.
   e) $x + 3^x < 4$.
   f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$.

2. Demuestre que si $0 < a < b$ entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

   Observe que la desigualdad $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ se verifica que todo $a, b \geq 0$.

3. Formule de nuevo cada una de las siguientes expresiones utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.

   a) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}|$.
   b) $||a + b| - |a| - |b||$.
   c) $|x^2 - 2xy + y^2|$.

4. Halle todos los números x para los cuales:

   a) $|x - 3| = 8$.
   b) $|x - 3| < 8$.
   c) $|x + 4| < 2$.
   d) $|x - 1| + |x - 2| > 1$.
   e) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$.
   f) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$.

5. Demuestre que si x e y no son ambos igual a 0 entonces $x^2 + xy + y^2 > 0$.

6. Comprueba que

$$r_1 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}},$$

   es racional.

7. Determine los extremos superior e inferior de los siguientes conjuntos de números reales, justificando si son máximo o mínimo en algún caso.

   a) $A = \{r \in \mathbb{Q} : 2r^3 - 1 < 15\}$;
   b) $B = \{x : x^2 < 9\}$;
   c) $C = \{x + \frac{1}{x} : x > 0\}$;
   d) $D = \{\frac{-1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

8. Demuestre por inducción:

a) $4^n > n^2$.

b) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$. Utilice, y demuestre, la igualdad:

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

c) Para $r \neq 1$.

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

d) Desigualdad de Bernoulli.

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x,$$

para todo $x \geq -1$, $n \geq 1$.

e) $2^{2n} + 15\,n - 1$ es múltiplo de 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

f) $n! \leq n^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

9. ¿Verdadero o Falso?. Si $x \geq y$ y $u \geq v$, entonces:

   a) $x + u \geq y + v$.

   b) $x \cdot u \geq y \cdot v$.

10. Demuestre que

$$\text{máx}\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2},$$

y

$$\text{mín}\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$