

1. Señales periódicas continuas. Series de Fourier

Las ecuaciones que relacionan una señal periódica continua con su desarrollo en series de Fourier son

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

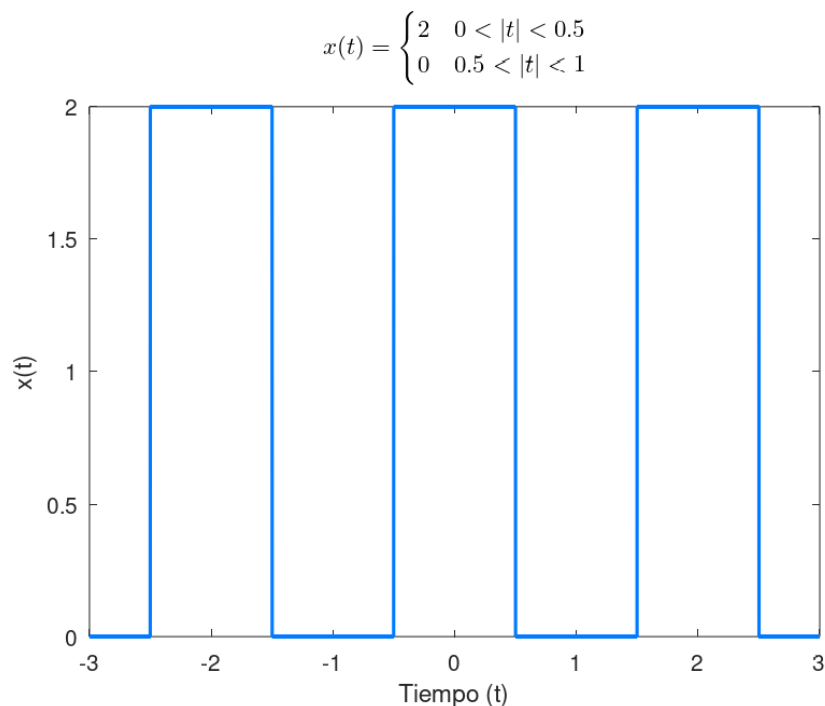
En este ejercicio se implementarán las dos ecuaciones mediante funciones en MATLAB. Para ello es necesario simular la señal continua $x(t)$, discretizándola mediante un incremento de tiempo, Δt , dando lugar a la señal continua discretizada $x(k\Delta t)$.

1. Genere en MATLAB las siguientes señales periódicas ($T = 2$), generando 3 periodos de cada una de ellas.

```
% Definir el periodo y el paso de tiempo
T = 2; dt = 0.001;
% Crear el rango de tiempo para un periodo
t = -T/2:dt:T/2-dt;
```

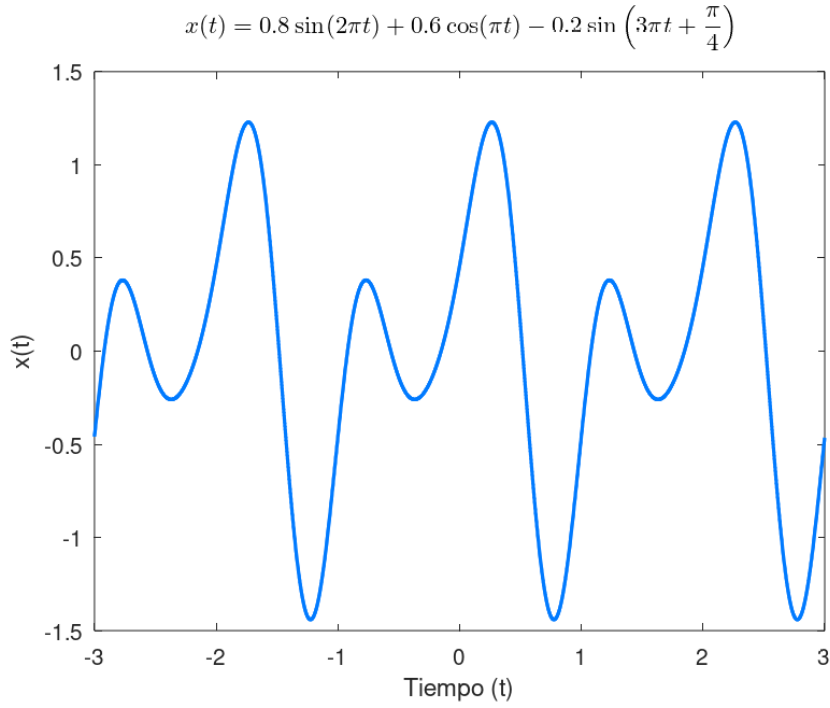
a) $x(t) = \begin{cases} 2, & 0 < |t| < 0.5 \\ 0, & 0.5 < |t| < 1 \end{cases}$

```
x = zeros(1, length(t));
% Encontrar los índices de tiempo donde 0<|t|<0.5 y asignar el valor 2 a x en esos índices
ti = find(abs(t)<=0.5); x(ti) = 2;
% Encontrar los índices de tiempo donde 0.5<|t|<1 y asignar el valor 0 a x en esos índices
ti = find(abs(t)> 0.5); x(ti) = 0;
% Graficar la señal para 3 periodos
figure(1), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=\begin{cases}2 & 0<|t|<0.5\\0 & 0.5<|t|<1\end{cases}$', 'Interpreter', 'latex');
```



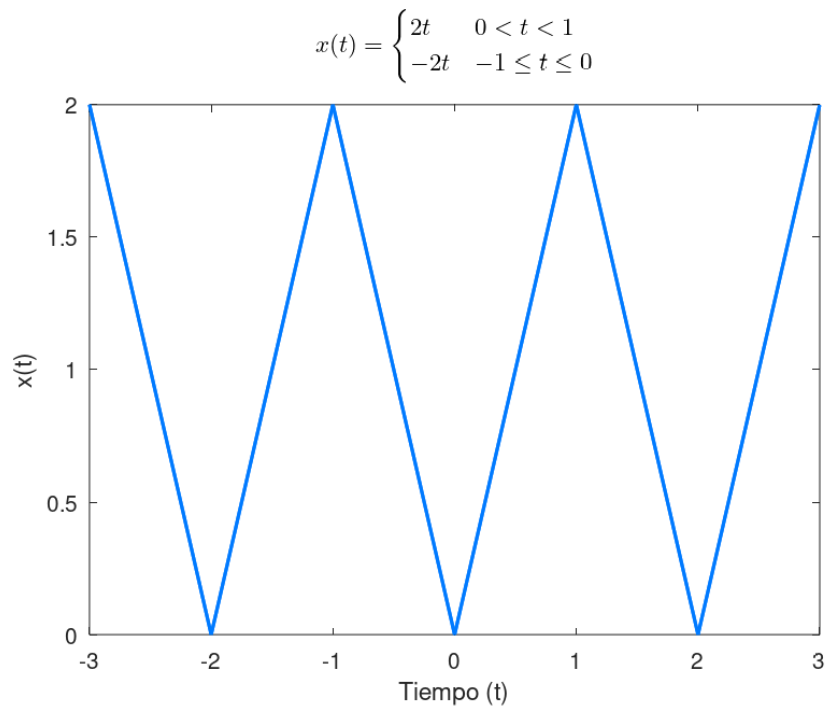
b) $x(t) = 0.8 \sin(2\pi t) + 0.6 \cos(\pi t) - 0.2 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

```
x = 0.8*sin(2*pi*t) + 0.6*cos(pi*t) - 0.2*sin(3*pi*t + pi/4);
figure(2), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=0.8\sin(2\pi t)+0.6\cos(\pi t)-0.2\sin\left(3\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)$', 'Interpreter','latex');
```



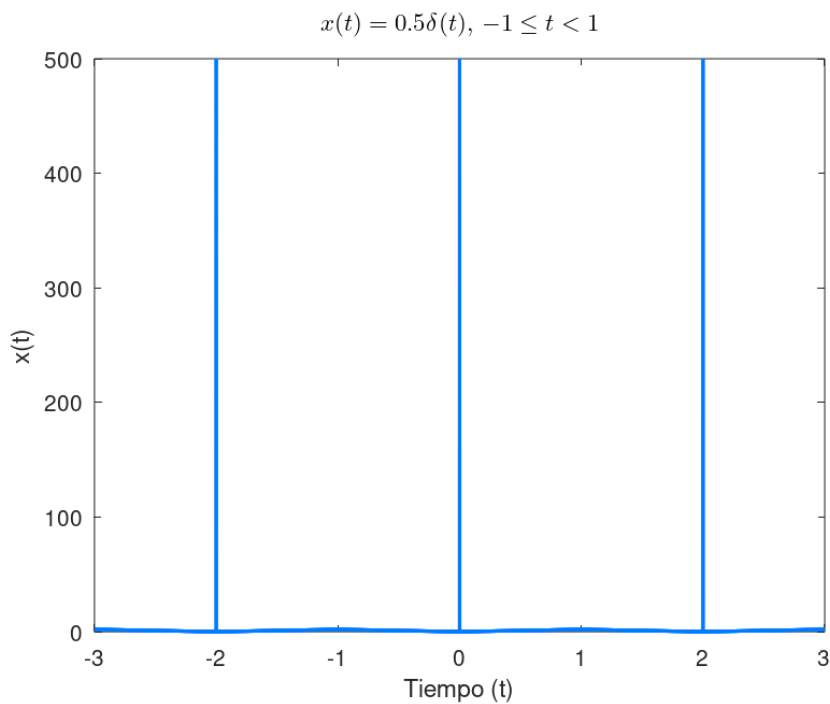
c) $x(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 1 \\ -2t, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$

```
ti = find(t==0); x(ti) = 0.5 * (1/dt);
figure(4), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=0.5\delta(t), \, -1 \le t < 1$', 'Interpreter', 'latex')
```



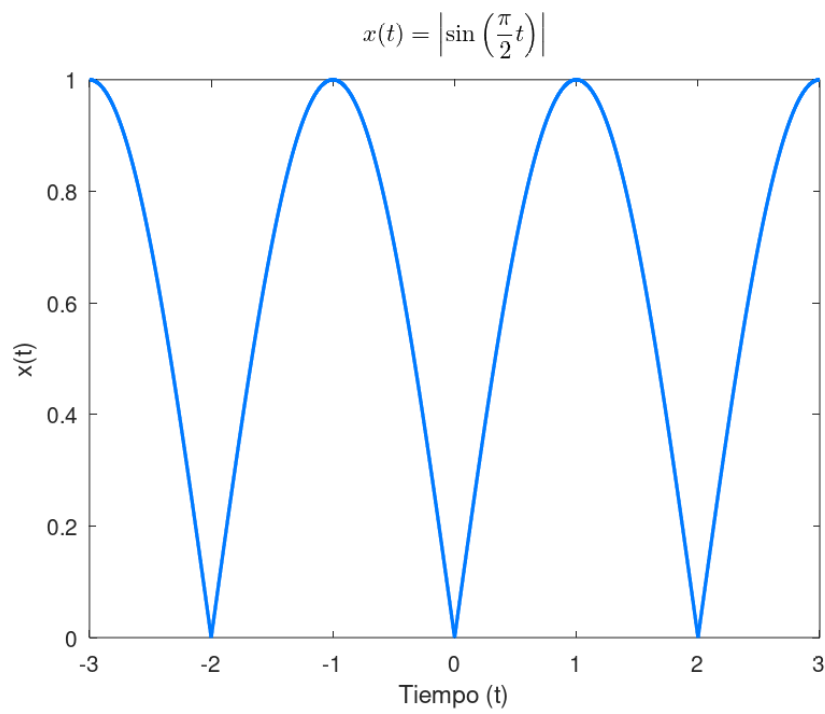
d) $x(t) = 0.5\delta(t)$, $-1 \leq t < 1$

```
ti = find(t==0); x(ti) = 0.5 * (1/dt);
figure(4), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=0.5\delta(t)$, $-1 \le t < 1$', 'Interpreter', 'latex')
```



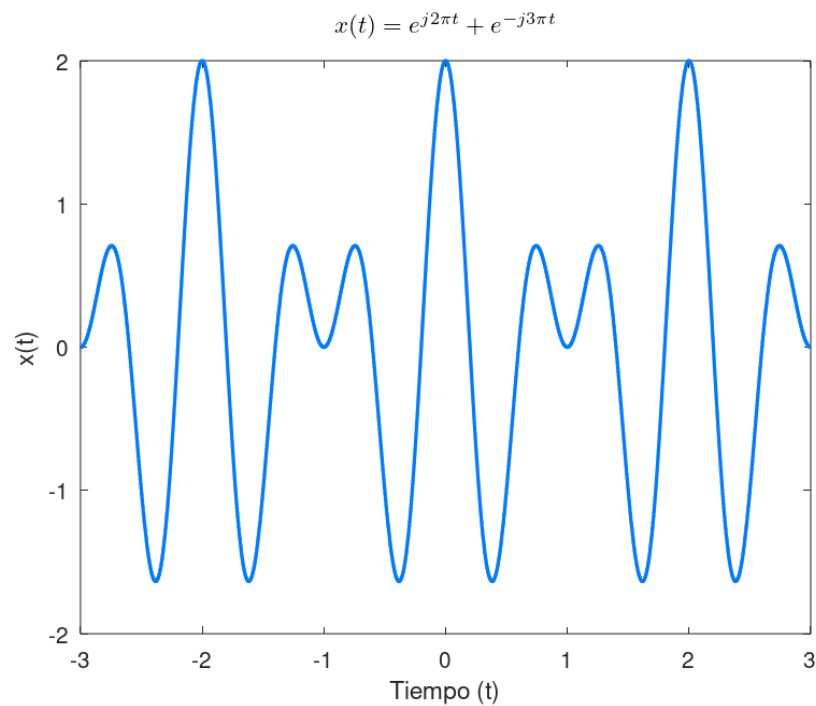
e) $x(t) = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right|$

```
x = abs(sin(pi/2.*t));
figure(5), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\right|$', "Interpreter", "latex")
```



f) $x(t) = e^{j2\pi t} + e^{-j3\pi t}$

```
x = exp(j*2*pi*t) + exp(-3*j*pi*t);
figure(6), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=x(t)=e^{j2\pi t}+e^{-j3\pi t}$', 'Interpreter', 'latex')
```



Ayuda: la señal (a) se obtiene mediante los comandos

```
T = 2; dt = 0.001; t = -T/2:dt:T/2-dt;
x = zeros(1, length(t));
ti = find(abs(t)<=0.5); x(ti) = 2;
ti = find(abs(t)> 0.5); x(ti) = 0;
figure, plot([t-T t t+T], [x x x])
```

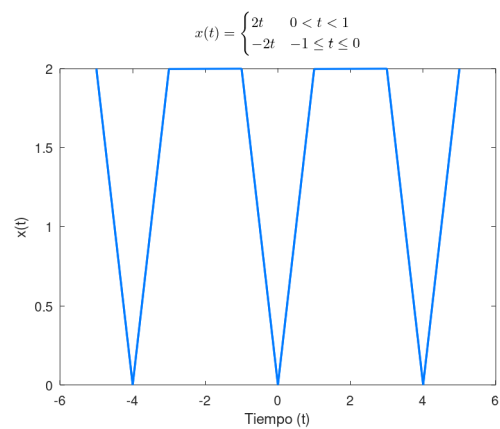
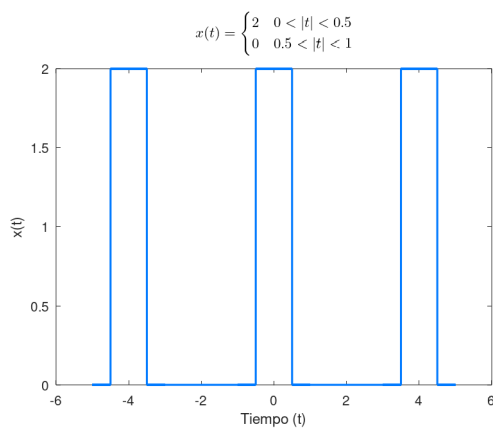
2. Repita el proceso para las señales a) c) y d), asumiendo un periodo $T=4$ y $T=6$. Razone los resultados obtenidos.

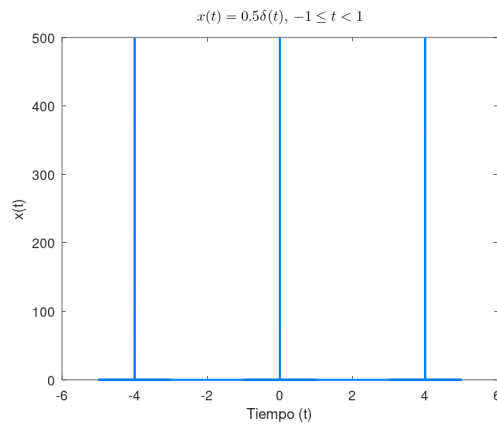
```
T = 4; dt = 0.001;
% Crear el rango de tiempo para un periodo
t = -T/2:dt:T/2-dt;
% Inicializar la señal x con ceros
x = zeros(1, length(t));
% Encontrar los índices de tiempo donde 0<|t|<0.5 y asignar el valor 2 a x en esos índices
ti = find(abs(t)<=0.5); x(ti) = 2;
% Encontrar los índices de tiempo donde 0.5<|t|<1 y asignar el valor 0 a x en esos índices
ti = find(abs(t)> 0.5); x(ti) = 0;
```

```
% (a)
x = zeros(1, length(t));
figure(7), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=\begin{cases}2 & 0<|t|<0.5\\0 & 0.5<|t|<1\end{cases}$', 'Interpreter', 'latex');

% (c)
x = zeros(1, length(t));
ti = find(t>=-1 & t<0); x(ti) = -2*t(ti);
ti = find(t>0 & t<1); x(ti) = 2*t(ti);
figure(8), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=\begin{cases}2t & 0<t<1\\-2t&-1\leq t\leq0\end{cases}$', 'Interpreter', 'latex');

% (d)
x = zeros(1, length(t));
ti = find(t==0); x(ti) = 0.5 * (1/dt);
figure(9), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=0.5\delta(t), -1\leq t<1$', 'Interpreter', 'latex')
```



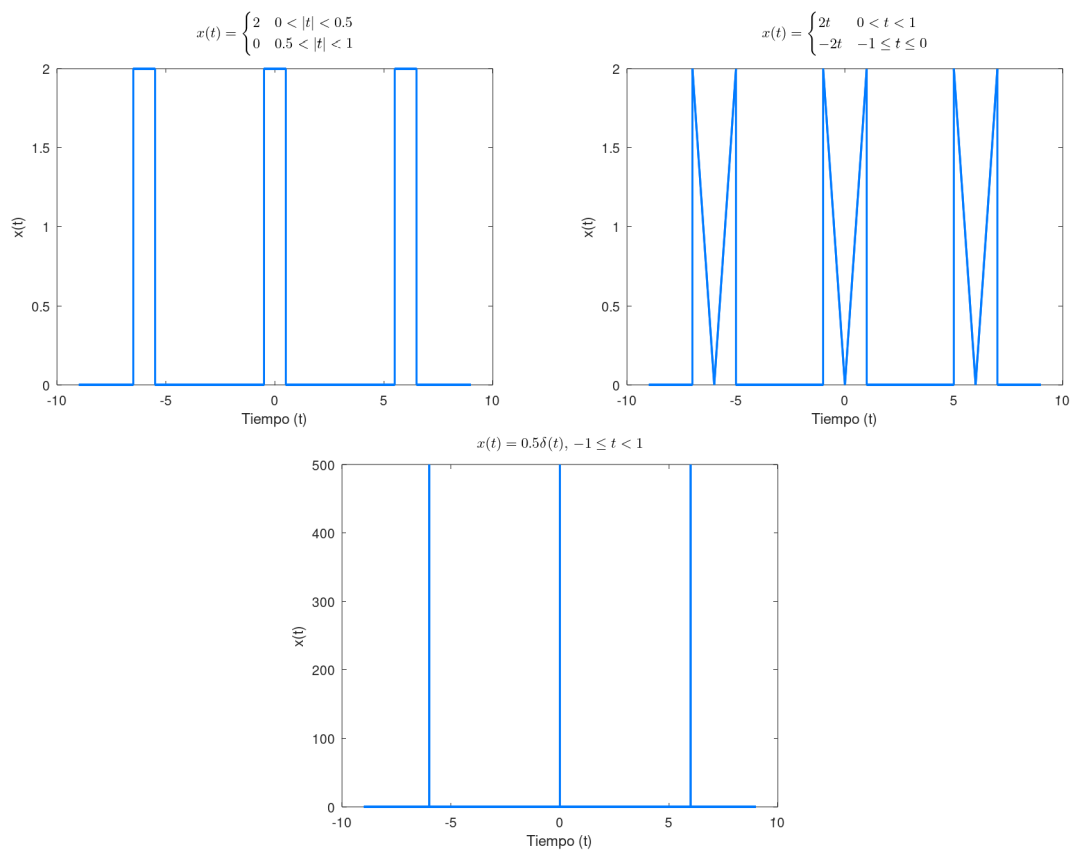


```
T = 6; dt = 0.001;
% Crear el rango de tiempo para un periodo
t = -T/2:dt:T/2-dt;
% Inicializar la señal x con ceros
x = zeros(1, length(t));
% Encontrar los índices de tiempo donde 0<|t|<0.5 y asignar el valor 2 a x en esos índices
ti = find(abs(t)<=0.5); x(ti) = 2;
% Encontrar los índices de tiempo donde 0.5<|t|<1 y asignar el valor 0 a x en esos índices
ti = find(abs(t)> 0.5); x(ti) = 0;
```

```
% (a)
figure(10), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=\begin{cases}2 & 0<|t|<0.5\\0 & 0.5<|t|<1\end{cases}$', 'Interpreter', 'latex');

% (c)
x = zeros(1, length(t));
ti = find(t>=-1 & t<0); x(ti) = -2*t(ti);
ti = find(t>0 & t<1); x(ti) = 2*t(ti);
figure(11), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=\begin{cases}2t & 0<t<1\\-2t&-1\le t\le0\end{cases}$', 'Interpreter', 'latex');

% (d)
x = zeros(1, length(t));
ti = find(t==0); x(ti) = 0.5 * (1/dt);
figure(12), plot([t-T t t+T], [x x x], "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('x(t)');
title('$x(t)=0.5\delta(t), \le t<1$', 'Interpreter', 'latex')
```



Como se aumenta el periodo fundamental de las señales podemos observar que por la fórmula de su frecuencia angular $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ tenemos que se expande en el tiempo porque cuanto mayor sea el periodo fundamental la señal tardará más tiempo en repetirse.

3. Cree la siguiente función de MATLAB que obtiene los coeficientes de la serie de Fourier (DSF) de una señal periódica:

```
function ak = cfourier(x,T,N,dt)
t = -T/2:dt:T/2-dt;
ak = zeros(1,2*N+1);
for k = -N:N
ak(k+N+1) = 1/T*sum(x.*exp(-j*k*2*pi/T*t))*dt;
end
```

donde **x** es una señal continua discretizada como las generadas anteriormente, **T** es el periodo de la señal, **N** es el orden del armónico más alto y **dt** es el paso temporal de discretación. El DSF queda almacenado en **ak** con el siguiente orden:

$$[a_{-N} a_{-N+1} a_{-N+2} \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots a_{N-2} a_{N-1} a_N]$$

4. Como estudio previo calcule analíticamente los desarrollos en series de Fourier de las señales del punto 1 y corrobore los resultados numéricos obtenidos con la función **cfourier**.

```
% Definir el periodo y el paso de tiempo
T = 2; dt = 0.001; N=5;
t = -T/2:dt:T/2-dt;
```

```
% (a)
x = zeros(1, length(t));
ti = find(abs(t)<=0.5); x(ti) = 2;
ti = find(abs(t)> 0.5); x(ti) = 0;
ak_a = cfourier(x, T, N, dt);
```

```
ak_a =
    0.1273 + 0.0000i    0.0010 - 0.0000i   -0.2122 - 0.0000i   -0.0010 + 0.0000i    0.6366 - 0.0000i
    1.0010 +          0i    0.6366 + 0.0000i   -0.0010 - 0.0000i   -0.2122 + 0.0000i    0.0010 + 0.0000i
    0.1273 - 0.0000i
```

```
% (b)
x = 0.8*sin(2*pi*t) + 0.6*cos(pi*t) - 0.2*sin(3*pi*t + pi/4);
ak_b = cfourier(x, T, N, dt);
```

```
ak_b =
    0.0000 - 0.0000i   -0.0000 - 0.0000i   -0.0707 - 0.0707i   -0.0000 + 0.4000i    0.3000 + 0.0000i
   -0.0000 +          0i    0.3000 - 0.0000i   -0.0000 - 0.4000i   -0.0707 + 0.0707i   -0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i
```

```
% (c)
x = zeros(1, length(t));
ti = find(t>=-1 & t<0); x(ti) = -2*t(ti);
ti = find(t>0 & t<1); x(ti) = 2*t(ti);
ak_c = cfourier(x, T, N, dt);
```

```
ak_c =
   -0.0162 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i   -0.0450 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i   -0.4053 + 0.0000i
    1.0000 +          0i   -0.4053 - 0.0000i    0.0000 - 0.0000i   -0.0450 - 0.0000i    0.0000 - 0.0000i
   -0.0162 - 0.0000i
```

```
% (d)
x = zeros(1, length(t));
ti = find(t==0); x(ti) = 0.5 * (1/dt);
ak_d = cfourier(x, T, N, dt);
```

```
ak_d =
    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500
```

```
% (e)
x = abs(sin(pi/2.*t));
ak_e = cfourier(x, T, N, dt);
```

```
ak_e =
   -0.0064 - 0.0000i   -0.0101 - 0.0000i   -0.0182 + 0.0000i   -0.0424 - 0.0000i   -0.2122 + 0.0000i
    0.6366 +          0i   -0.2122 - 0.0000i   -0.0424 + 0.0000i   -0.0182 - 0.0000i   -0.0101 + 0.0000i
   -0.0064 + 0.0000i
```

```
% (f)
x = exp(j*2*pi*t) + exp(-3*j*pi*t);
ak_f = cfourier(x, T, N, dt);
```

```
ak_f =
   -2.3575e-16 - 7.3283e-17i    3.4063e-16 + 5.8993e-17i    1.0000e+00 - 5.6710e-17i
   -3.3348e-16 + 1.3077e-16i   -3.4729e-16 + 4.8116e-17i   -3.7292e-16 - 3.4807e-17i
   -3.3980e-16 - 1.8739e-16i    1.0000e+00 + 5.8039e-17i    3.0022e-16 + 1.5665e-18i
   -2.5388e-16 + 9.3413e-17i    3.3479e-17 + 5.4260e-17i
```

5. Cree la siguiente función de MATLAB, que calcula la señal periódica a partir de su desarrollo en series de Fourier:


```
function x = icfourier(ak,T,N,dt)
t = -T/2:dt:T/2-dt;
x = zeros(1,length(t));
for k = -N:N
x = x + ak(k+N+1)*exp(j*k*2*pi/T*t);
end
```

6. Reconstruya a partir de los desarrollos mediante series de Fourier **ak** las señales a) c) d) y e) variando el máximo número de armónicos N en la reconstrucción. Comente los resultados obtenidos.

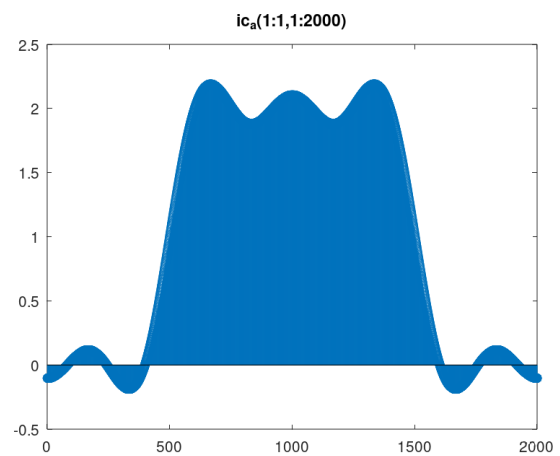
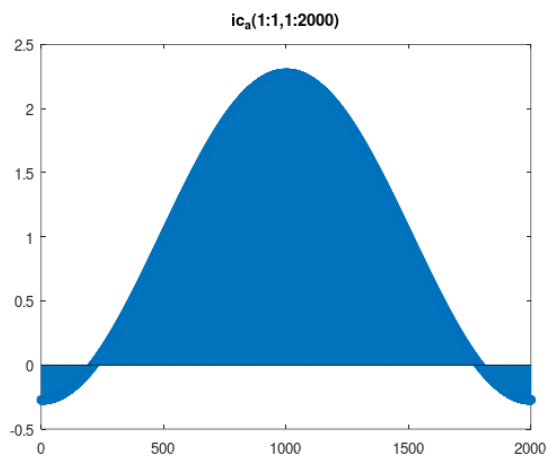
```
% (a)
ic_a = icfourier(ak_a, T, N, dt);

% (c)
ic_c = icfourier(ak_c, T, N, dt);

% (d)
ic_d = icfourier(ak_d, T, N, dt);

% (e)
ic_e = icfourier(ak_e, T, N, dt);
```

A continuación van a aparecer dos variaciones de los valores obtenidos del apartado (a) utilizando **N=1** y **N=5**, en ese orden:



7. Verifique el cumplimiento del teorema de Parseval comparando los resultados **teóricos** y prácticos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt$$

2. Transformada de Fourier

Las ecuaciones que relacionan una señal con su transformada de Fourier son las siguientes:

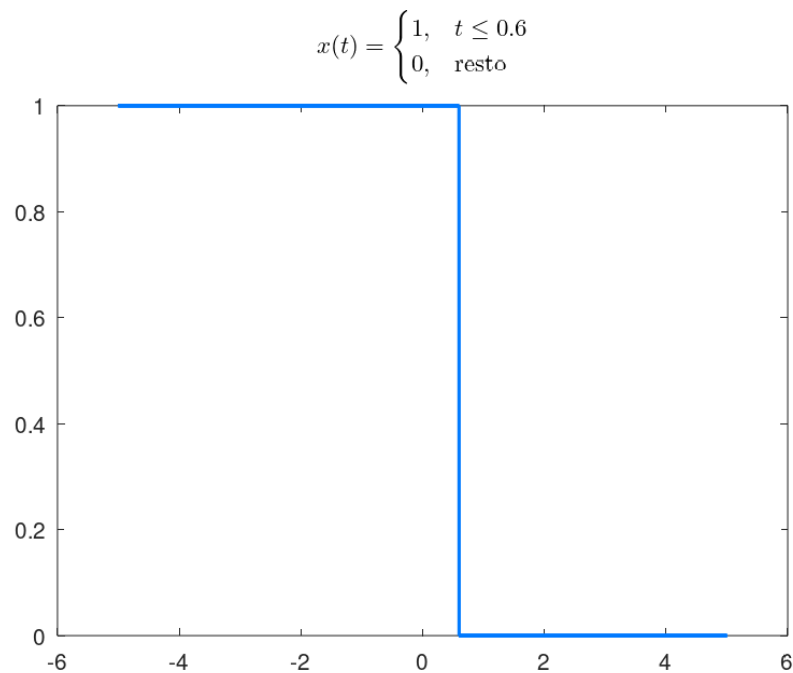
$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Cuestiones

1. Genere en MATLAB las siguientes señales aperiódicas, tomando un intervalo de discretación de 0.002, y considerando $-5 \leq t \leq 5$.

a) $x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0.6 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

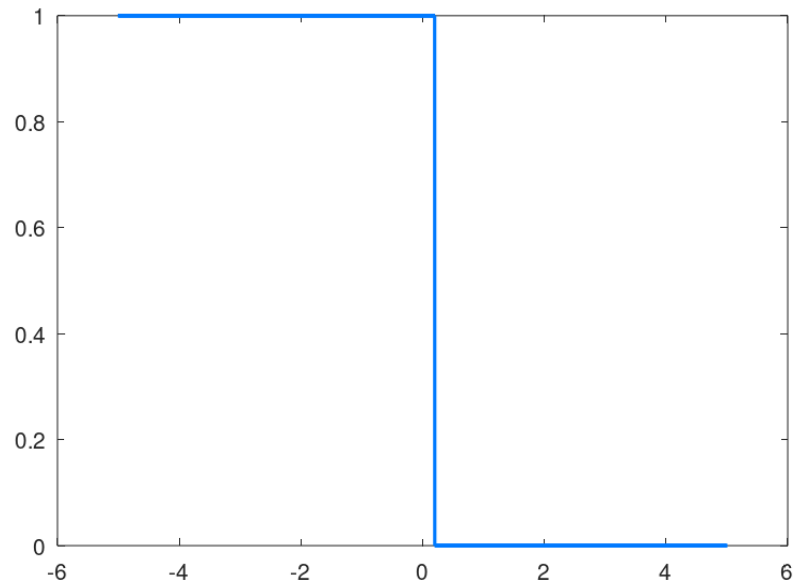
```
% a)
t = -5:0.002:5;
x = zeros(size(t));
x(t <= 0.6) = 1;
figure(13); plot(t, x, "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
title('$x(t)=\begin{cases}1, & t \leq 0.6 \\ 0, & \text{resto}\end{cases}$', "Interpreter", "
    latex");
```



b) $x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0.2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

```
% b)
t = -5:0.002:5;
x = zeros(size(t));
x(t <= 0.2) = 1;
figure(14); plot(t, x, "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
title('$x(t)=\begin{cases}1, & t \leq 0.2 \\ 0, & \mathrm{resto}\end{cases}$', 'Interpreter',
    'latex');
```

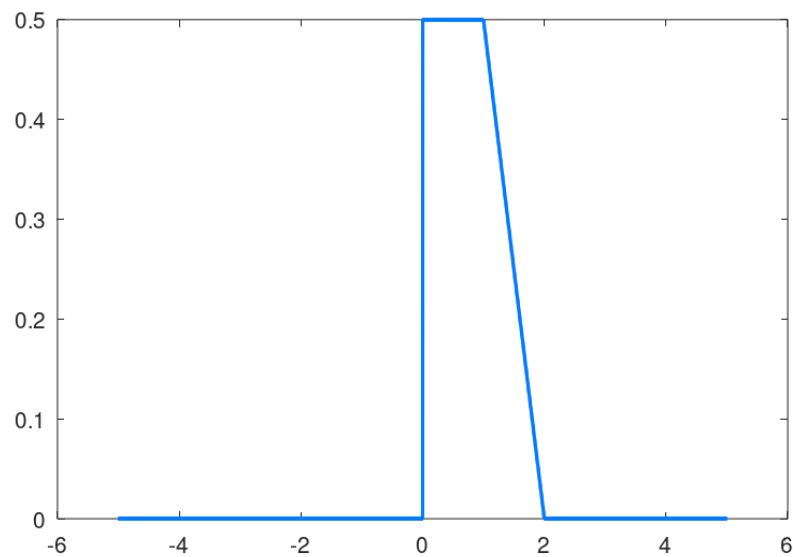
$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0.2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



c)
$$x(t) = \begin{cases} 0.5, & 0 < t \leq 1 \\ 1 - 0.5t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

```
% c)
t = -5:0.002:5;
x = zeros(size(t));
x(0 < t & t <= 1) = 0.5;
x(1 < t & t <= 2) = 1 - 0.5 * t(1 < t & t <= 2);
figure(15); plot(t, x, "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF");
title('$x(t)=\begin{cases}0.5, & 0<t\leq 1\\1-0.5t,& 1<t\leq 2\\0,& \mathrm{resto}\end{cases}$', "Interpreter", "latex");
```

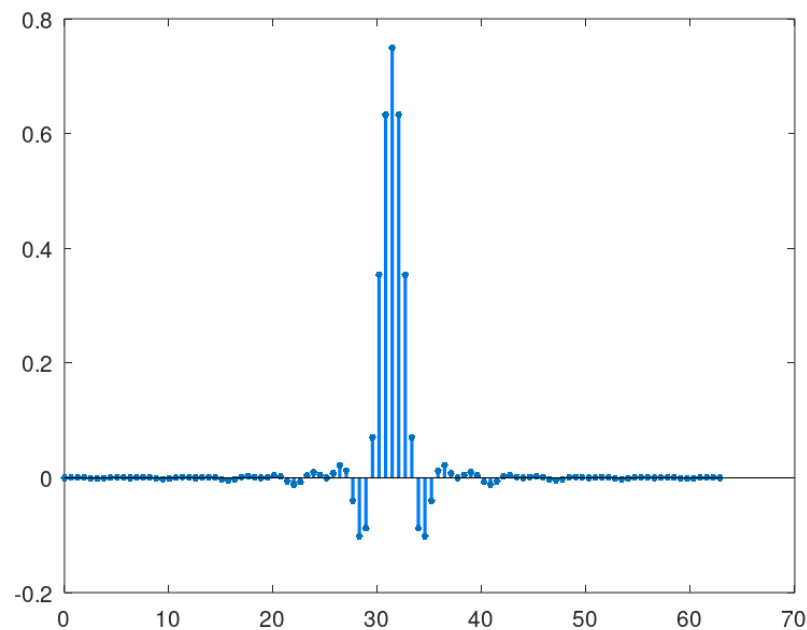
$$x(t) = \begin{cases} 0.5, & 0 < t \leq 1 \\ 1 - 0.5t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



2. Suponiendo que las señales del punto 1 representaban el periodo de una señal periódica,

- i) Calcule su desarrollo en series de Fourier mediante **ak=cfourier(x,T,N,dt)**, y normalice por T (**ak=T*ak**). Al estar cada armónico está asociado a la frecuencia $k\frac{2\pi}{T}$, represente las series de Fourier normalizadas en el eje de frecuencias. Para ello emplee **stem(w,ak,'.')** y previamente defina el vector de frecuencias **w=2*pi*k/T**.

```
T = length(x)*0.002;
N = 50;
dt = 0.002;
ak = cfourier(x, T, N, dt);
ak = T * ak;
k = 0:length(ak)-1;
w = 2*pi*k/T;
figure(16); stem(w, ak, 'b.', "LineWidth", 1.5, "color", "#007AFF", "MarkerSize", 10);
```



- ii) Incremente la longitud del vector de la señal hacia ambos lados de la siguiente manera:

```
Ti=floor(length(x)/2);
x=[zeros(1,Ti) x zeros(1,Ti)];
```

- iii) Vuelva al paso **i** para obtener las nuevas series de Fourier normalizadas. Considere que:

- El orden del máximo armónico a tener en cuenta es el doble que el previo (**N=2*N**)
- El nuevo periodo obtenido es el doble del previo (**T=2*T**)

Repita este proceso (puede emplear un programa con un bucle **for**) y explique los resultados.

3. Implemente una función que obtenga la transformada de Fourier de una señal adaptando el programa de desarrollo en series de Fourier.

```
function [X,w]=tfourier(x,t,dw,wmax)
```

- El intervalo de frecuencias a calcular está entre **-wmax** y **wmax** ($w_{max} < \pi/dt$)
- **dw** es la discretización en frecuencia en frecuencia
- **w** es el vector con el eje frecuencia, su tamaño es el mismo que el de **x**.

- \mathbf{t} es el vector con el eje temporal, su tamaño es el mismo que el de \mathbf{x} .

```
function [X,w] = tfourier(x,t,dw,wmax)
    % Crear el vector de frecuencias
    w = -wmax:dw:wmax;

    % Inicializar el vector de la Transformada de Fourier
    X = zeros(size(w));

    % Calcular la Transformada de Fourier para cada frecuencia
    for k = 1:length(w)
        X(k) = sum(x .* exp(-1i * w(k) * t));
    end
end
```

4. Empleando en la propiedad de la dualidad de la transformada de Fourier implemente una función que calcule la transformada inversa de Fourier haciendo uso de la función de la transformada directa.

```
function [X,w]=itfourier(x,t,dw,wmax)
```

```
function [x,t] = itfourier(X,w,dw,tmax)
    % Aplicar la Transformada de Fourier a la señal en el dominio de la frecuencia
    [x_tilde, t] = tfourier(X,w,dw,tmax);

    % Escalar la señal y tomar la parte real para obtener la señal en el dominio del tiempo
    x = real(dw/(2*pi) * x_tilde);
end
```

5. Verifique el correcto cumplimiento de las siguientes propiedades de la transformada de Fourier empleando la función **tfourier**:

- Propiedad de linealidad $X(\omega) + Y(\omega) \longleftrightarrow x(t) + y(t)$ (emplee las señales a y b).
- Desplazamiento en el tiempo $e^{-j\omega t_0} X(\omega) \longleftrightarrow x(t - t_0)$ (emplee señal b).
- Inversión $X(-\omega) \longleftrightarrow x(-t)$ (emplee señal c).
- Conjugación $X(\omega)^* \longleftrightarrow x(-t)^*$ (emplee señal c).
- $\text{Real}\{X(\omega)\} \longleftrightarrow \text{Parte real}\{x(t)\}$ (emplee señal c).
- $\text{Imag}\{X(\omega)\} \longleftrightarrow \text{Parte impar}\{x(t)\}$ (emplee señal c).