

# Cálculo II

## Tema 4: Teoría de campos

Francisco Javier Mercader Martínez

### Capítulo 1: Integración múltiple

1) Calcular para  $\Omega = [0, 1] \times [0, 3]$  las integrales

a)  $\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$

$$\int_0^3 \int_0^1 xy \, dx \, dy = \int_0^3 \left[ \frac{x^2}{2} y \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^3 \frac{1}{2} y \, dy = \left[ \frac{1}{4} y^2 \right]_{y=0}^{y=3} = \frac{9}{4}$$

b)  $\iint_{\Omega} x e^y \, dx \, dy$

$$\int_0^3 \int_0^1 x e^y \, dx \, dy = \int_0^3 e^y \int_0^1 x \, dx \, dy = \int_0^3 e^y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^3 \frac{e^y}{2} \, dy = \left[ \frac{e^y}{2} \right]_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{2}(e^3 - 1)$$

c)  $\iint_{\Omega} y^2 \sin x \, dx \, dy$

$$\int_0^3 \int_0^1 y^2 \sin x \, dx \, dy = \int_0^3 y^2 [-\cos x]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^3 y^2 (1 - \cos(1)) \, dy = \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=3} \cdot (1 - \cos(1)) = 9(1 - \cos(1))$$

2) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican

a)  $\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$  en  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\Omega$  es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables  $x$  y  $y$  se expresan como:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial  $dx \, dy$  se transforma en:

$$r \, dr \, d\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \sin \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \cdot \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \cdot [-\cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{3} (-\cos(2\pi) + \cos(0)) = \frac{1}{3}(-1 + 1) = 0$$

b)  $\iint_{\Omega} (3y^3 + x^2) \, dx \, dy$  en  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

$\Omega$  es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables  $x$  y  $y$  se expresan como:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial  $dx dy$  se transforma en:

$$r dr d\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

En estas coordenadas, la función  $2y^3 + x^2$  se convierte en:

$$2y^3 + x^2 = 3(r \sin \theta)^3 + (r \cos \theta)^2.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (2y^3 + x^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3(r \sin \theta)^3 + (r \cos \theta)^2) \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^4 \sin^3 \theta + r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=1} \cdot \sin^3 \theta + \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} \cdot \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{5} \sin^3 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta d\theta = (*) \end{aligned}$$

Usamos que  $\sin^3 \theta = \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)$  y la simetría de  $\sin \theta$  en  $[0, 2\pi]$  implica que:

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$$

Usamos la identidad  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ . Entonces:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[ \frac{1}{2} \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = 0 \text{ porque } \cos(2\theta) \text{ es impar en } [0, 2\pi].$$

$$(*) = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$$

c)  $\iint_{\Omega} \sqrt{xy} dx dy$  en  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

$\Omega$  es el disco de radio 1 centrado en el origen.

La función  $\sqrt{xy}$  depende del producto  $xy$ . Observamos que:

- Si  $x > 0$  y  $y > 0$ ,  $\sqrt{xy} > 0$ .
- Si  $x < 0$  o  $y < 0$ , el signo del producto puede cambiar.
- En particular, en las regiones donde  $x > 0$ ,  $y < 0$  (o viceversa), el producto  $xy < 0$ , y  $\sqrt{xy}$  no está definida para valores negativos.

Debido a que  $\sqrt{xy}$  no está definida en  $\mathbb{R}^2$  cuando  $xy < 0$ , esta integral **no se puede calcular** sobre  $\Omega$  como está formulada, porque incluye regiones donde  $xy < 0$ .

d)  $\iint_{\Omega} ye^x dx dy$  en  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 < x \leq y^2\}$ .

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} y e^x dx dy = \int_0^1 y \cdot [e^x]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y \cdot (e^{y^2} - 1) dy = \int_0^1 y e^{y^2} - y dy = \int_0^1 y e^y dy - \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-2)$$

$$\int_0^1 y e^{y^2} dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y^2 \\ du = 2y dy \end{array} \right\} = \int_0^1 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 y dy = \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

e)  $\iint_{\Omega} y + \log x dx dy$  en  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0.5 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ .

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{x^2}^x y + \log x dy dx$$

$$\int_{x^2}^x y + \log x dy = \int_{x^2}^x y dy + \int_{x^2}^x \log x dy = \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} + [y \log x]_{y=x^2}^{y=x} = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2} \right) + \log x(x - x^2) = \frac{x^2(1-x^2)}{2} + \log x(x - x^2)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2} + \log x(x - x^2) dx = \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x - x^2) dx}_{I_2} \quad I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 -$$

$$x^4 dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=0.5}^{x=1} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{47}{480} \right) = \frac{47}{960}$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x - x^2) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \log x - x^2 \log x dx = (*) = \left( -\frac{1}{8} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{16} \right) - \left( -\frac{1}{24} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{7}{72} \right) = -\frac{1}{12} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{13}{144}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x \log x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \log x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \left[ \log x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{8} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx$$

$$= -\frac{1}{8} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{8} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{16}$$

$$(*) \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \log x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \log x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \left[ \log x \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{24} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx$$

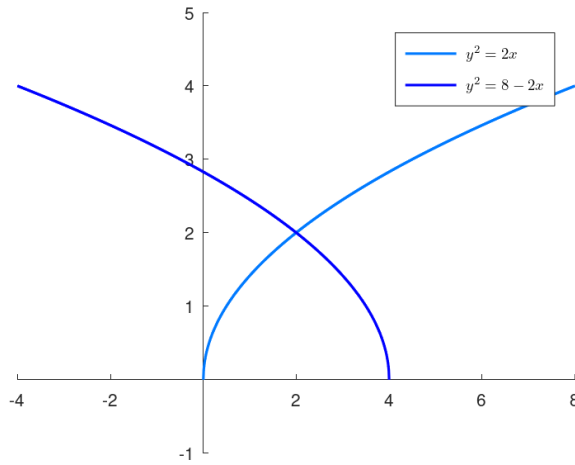
$$= -\frac{1}{24} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{24} \log \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{7}{72}$$

3) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

a)  $\iint_{\Omega} (4 - y^2) dx dy$  en el recinto limitado por las ecuaciones  $y^2 = 2x$  e  $y^2 = 8 - 2x$ .

$y^2 = 2x$  representa una parábola con vértice en el origen ( $x = 0, y = 0$ ) y que se abre hacia la derecha.

$y^2 = 8 - 2x$  representa una parábola con vértice en  $(x, y) = (4, 0)$



- b)  $\iint_{\Omega} (x^4 + y^2) dx dy$  en el recinto limitado por  $y = x^3$  e  $y = x^2$ .
- c)  $\iint_{\Omega} (x + y) dx dy$  en el recinto limitado por  $y = x^3$  e  $y = x^4$  con  $-1 \leq x \leq 1$ .
- d)  $\iint_{\Omega} (2xy^2 - y) dx dy$  en la región limitada por  $y = |x|$ ,  $y = -|x|$  y  $x \in [-1, 1]$ .
- 4) Calcular la superficie de las siguientes regiones:
- Círculo de radio  $R$ .
  - Elipse de semiejes  $a, b$ .
  - La región limitada por las ecuaciones  $x^2 = 4y$  y  $2y - x - 4 = 0$ .
  - La región limitada por las ecuaciones  $x + y = 5$  y  $xy = 6$ .
  - La región limitada por las ecuaciones  $x = y$  y  $x = 4y - y^2$ .
- 5) Calcular el volumen de los siguientes sólidos:
- El limitado por  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  y los planos de coordenadas.
  - El tronco limitado superiormente por  $z = 2x + 3y$  e inferiormente por el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
  - Esfera de radio  $R$ .
  - Cono de altura  $h$  y radio de la base  $R$ .
  - El tronco limitado superiormente por la ecuación  $z = 2x + 1$  e inferiormente por el disco  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ .
- 6) Calcular cambiando a coordenadas polares:
- $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ .
  - $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$ .
  - $\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx$ .
  - $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ .
- 7) Calcular para  $\Omega = [0, 1] \times [0, 3] \times [-1, 1]$  las integrales
- $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ .

- b)  $\iiint_{\Omega} x e^{y+z} dx dy dz.$
- c)  $\iiint_{\Omega} y^2 z^3 \sin x dx dy dz.$
- 8) Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:
- a)  $\iiint_{\Omega} (y^3 + z + x) dx dy dz$  en  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- b)  $\iiint_{\Omega} (y \sin z + x) dx dy dz$  en  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2, 0 \leq x, y \leq 1\}.$
- c)  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$  en  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2, 0 \leq z \leq 1\}.$
- d)  $\iiint_{\Omega} yxz dx dy dz$  en  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2 + x, -1 \leq x, y \leq 1\}.$
- 9) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por  $z = 1$  e inferiormente por  $z = \sqrt{x^2 + y^2}.$
- 10) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico  $z = 1 - y^2$ , inferiormente por el plano  $2x + 3y + z + 10 = 0$  y lateralmente por el cilindro circular  $x^2 + y^2 + x = 0.$
- 11) Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones  $z = 2 - x^2 - y^2$  y  $z = x^2 + y^2.$
- 12) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica  $x^2 + z = 4$ , inferiormente por el plano  $x + z = 2$  y lateralmente por los planos  $y = 0$  e  $y = 3.$
- 13) Haciendo uso de las coordenadas esféricas  $x = r \sin \phi \cos \theta, y = r \sin \phi \sin \theta$  y  $z = r \cos \phi$ , calcular:
- a) El volumen de una esfera de radio  $R.$
- b)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$  en el recinto  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$
- c) El volumen del recinto del apartado (b).
- 14) Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones  $z = x^2 + 4y^2$ , el plano  $z = 0$  y lateralmente por los cilindros  $x = y^2$  y  $x^2 = y.$
- 15) Calcular  $\iint_{\Omega} e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$  siendo  $\Omega$  el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta  $x + y = 1.$
- 16) Calcular el volumen comprendido entre los cilindros  $z = x^2$  y  $z = 4 - y^2.$
- 17) Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$
- 18) Calcular

$$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde  $\Omega$  es la región limitada por las esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ , donde  $0 < b < a$ . Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.