Álgebra Lineal

Examen Convocatoria Enero 2023

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Consideremos los número complejos

$$z_1 = -1 - j, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}.$$

Calcula $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ y $\dfrac{z_2}{z_1}$ y expresa el resultado en forma exponencial.

$z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + j\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + j$

- $z_1 + z_2 = (-1 - j) + 1 + j = 0$
- $z_1 \cdot z_2 = (-1 - j) \cdot (1 + j) = -1 - j - j + 1 = -2j$
- $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1+j}{-1-j} = \dfrac{1+j}{-1-j} \cdot \dfrac{-1+j}{-1+j} = \dfrac{(1+j)\cdot(-1+j)}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

2) Dada una matriz cuadrada D, se llama de *similitud producto-escalar* a la matriz $S = DD^{\intercal}$, con $D^{\intercal}$ la traspuesta de D. Se pide:

a) Demuestra que S simétrica.

Sabemos que:

$$S = DD^{\intercal}$$

donde $D^{\intercal}$ es la traspuesta de D. Para verificar que S es simétrica, necesitamos comprobar que $S = S^{\intercal}$.

El cálculo de la traspuesta de S es:

$$S^{\intercal} = (DD^{\intercal})^{\intercal}$$

Utilizando la propiedad de la trasposición de un producto de matrices: $(AB)^{\intercal} = B^{\intercal}A^{\intercal}$. Entonces:

$$S^{\intercal} = (DD^{\intercal})^{\intercal} = (D^{\intercal})^{\intercal}D^{\intercal}$$

Sabmos que $(D^{\intercal})^{\intercal} = D$. Por lo tanto:

$$S^{\intercal} = DD^{\intercal}$$

Dado que $S = DD^{\intercal}$, se concluye que $S = S^{\intercal}$, lo que prueba que S es simétrica.

b) Sea P una matriz ortogonal del mismo tamaño que D y consideremos la matriz DP. Denotemos por S y S' a las matrices de similitud producto-escalar de D y DP, respectivamente. Comprueba que $S = S'$.

Definimos:

- $S = DD^{\intercal}$ como la matriz de similitud producto escalar de D.
- S' como la matriz de similitud producto-escalar de DP, donde P es una matriz ortogonal.

Dado que P es ortogonal, satisface $P^{\intercal}P = I$, donde I es la matriz identidad. La matriz S' está dada por:

$$S' = (DP)(DP)^{\intercal}$$

Calculamos $(DP)^\intercal$ utilizando la propiedad de la transposición de producto de matrices:

$$(DP)^\intercal = P^\intercal D^\intercal$$

Sustituimos esto en la definición de S':

$$S' = (DP)(DP)^\intercal = (DP)(P^\intercal D^\intercal)$$

Distribuimos el producto:

$$S' = D(PP^\intercal)D^\intercal = DID^\intercal = DD^\intercal = S$$

Esto prueba que $S' = S$.

3) Sea A una matriz. Explica con detalle en qué consiste la factorización en valores singulares (SVD) de A. Por supuesto, se ha de explicar qué son los valores singulares y cómo se calculan las matrices que aparecen en dicha factorización. Pon también un ejemplo de aplicación de la factorización SVD en Ciencia de datos.

La **Factorización en Valores Singulares (SVD)** descompone cualquier matriz A (de tamaño $m \times n$) en el producto de tres matrices específicas:

$$A = U\Sigma V^\intercal,$$

donde:

1) U es una matriz ortogonal de tamaño $m \times m$.
2) Σ es una matriz diagonal de tamaño $m \times n$, cuyos elementos no nulos en la diagonal se llaman **valores singulares**.
3) $V^\intercal$ es la traspuesta de una matriz ortogonal V de tamaño $n \times n$.

Definición de los componentes

1) **Matriz U:**
   - Sus columans son los **vectores singulares izquierdos** de A, que son vectores propios de $AA^\intercal$.
   - Representan las direcciones principales del espacio de salida de A.
   - U es ortogonal: $U^\intercal U = I_m$.
2) **Matriz Σ:**
   - Es una matriz diagonal cuyos elementos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$ (donde r es el rango de A) se llaman **valores singulares**.
   - Los valores singulares son las raíces cuadradas de los valores propios de $A^\intercal A$ o $AA^\intercal$:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad \text{donde } \lambda_i \text{ son los valores propios de } A^\intercal A.$$

3) **Matriz V:**
   - Sus columnas son los **vectores singulares derechos** de A, que son vectores propios de $A^\intercal A$.
   - Representan las direcciones principales del espacio de entrada de A.
   - V es ortogonal: $V^\intercal V = I_n$.

Cálculo del SVD:

Paso 1: Calcular los valores propios de $A^\intercal A$ y $AA^\intercal$:

- Los valores propios de $A^\intercal A$ (o $AA^\intercal$) determinan lso valores singulares σ_i^2.

Paso 2: Encontrar los vectores propios:

- Los vectores propios de $A^\intercal A$ son las columnas de V.
- Los vectores propios de $AA^\intercal$ son las columnas de U.

Paso 3: Construir Σ:

- Los valores singulares se colocan en la diagonal de Σ.

4) Responde a las siguientes preguntas:

a) Explica qué es una matriz ortogonal.

Una matriz Q de tamaño $n \times n$ es **ortogonal** si sus columnas forma un conjunto ortonormal. Esto significa que:

Paso 1: Las columnas de Q son **ortogonales entre sí** (el producto escalar entre dos columnas distintas es 0).

Paso 2: Cada columna de Q tiene **norma 1** (su longitud es igual a 1).

En términos matemáticos, una matriz Q es ortogonal si satisface:

$$Q^\intercal Q = I_n \quad \text{o} \quad QQ^\intercal = I_n,$$

donde:

- $Q^\intercal$ es la traspuesta de Q.
- I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

b) Explica en qué consiste la factorización QR de una matriz cuadrada A.

La factorización QR de una matriz cuadrada A descompone A en el producto de dos matrices:

$$A = QR,$$

donde:

1) Q: Es una matriz ortogonal ($Q^\intercal Q = I$). Las columnas de Q son ortonormales, es decir, forman una base de ortonormal para el espacio columna de A.
2) R: Es una matriz triangular superior (todos los elementos debajo de la diagonal son 0).

c) ¿Qué propiedad tiene que cumplir A para que se pueda calcular su factorización QR?

Anque cualquier matriz A tiene una factorización QR, en ciertos contextos puede haber condiciones adicionales:

- Rango completo de columnas: Para que el proceso de Gram-Schmidt sea válido, se requiere que las columnas de A sean linealmente independientes.

d) Razona si la siguiente afirmación es cierta o falsa: sea A una matriz no singular. El sistema lineal $Ax = b$ siempre se puede resolver mediante factorización LU y Choleski. Además, siempre hemos de elegir el método de Cholesky porque su coste computacional es menor que el de la LU.

La afirmación es **falsa**, porque:

1) Aunque $Ax = b$ siempre se puede resolver mediante LU si A es no singular (invertible), **Cholesky no siempre es aplicable**. La factorización de Cholesky requiere que A sea simétrica ($A = A^\intercal$) y definida positiva ($x^\intercal Ax > 0$ para todo $x \neq 0$), lo cual no está garantizado para cualquier matriz no singular.
2) Aunque el coste computacional de Cholesky es menor que el de LU, **no siempre se puede elegir Cholesky** debido a las restricciones mencionadas.

5) Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}.$$

Calcula la factorización LU de A y utiliza dicha factorización para calcular el determinante de A. Por curiosidad, la matriz L que aparece en la factorización anterior contiene el llamado *triángulo de Pascal*, que se usa, por ejemplo, en Combinatoria.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & & & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to F_4-F_1}]{F_2\to F_2-F_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 1 & & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 1 & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4\to F_4-3F_2]{F_3\to F_3-2F_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 1 & 3 & & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_4\to F_4-3F_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Tenemos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El determinante de A se calcula como el producto de elentos de la diagonal de U:

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

6) Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Se pide:

a) Calcula los valores propios y una base ortonormal de vectores propios de la matriz $A^\intercal A$. Denotemos por λ_1, λ_2 dichos vectores propios y por v_1, v_2 dicha base ortonormal de vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente. LLamaremos V a la matriz cuyas columnas son, en este orden, v_1 y v_2.

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^\intercal - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 25-\lambda & 20 \\ 20 & 25-\lambda \end{bmatrix} = (25-\lambda)^2 - 400 = \lambda^2 - 50\lambda + 625 - 400 = \lambda^2 - 50\lambda + 225 = 0$$

$$\lambda = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 225}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{2} = \begin{cases} \dfrac{50+40}{2} = 45 = \lambda_1 \\ \dfrac{50-40}{2} = 5 = \lambda_2 \end{cases}$$

- Para $\lambda_1 = 45$

$$\text{Nuc}(A^\intercal A - 45I) = \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -20x + 20y = 0 \\ 20x - 20y = 0 \end{cases} \longrightarrow 20x = 20y \longrightarrow x = y \longrightarrow (1,1)$$

$$v_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

- Para $\lambda_2 = 5$

$$\text{Nuc}(A^\intercal A - 5I) = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 20x + 20y = 0 \\ 20x + 20y = 0 \end{cases} \longrightarrow 20x = -20y \longrightarrow x = -y \longrightarrow (1,-1)$$

$$v_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

b) Sean $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$ y $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$. Calcula los vectores $u_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A v_1$ y $u_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} A v_2$ y comprueba que forman una base ortonormal de vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 para la matriz $AA^\intercal$.

$$\sigma_1 = \sqrt{45}$$
$$\sigma_2 = \sqrt{5}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{30} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

Para comprobar que u_1 y u_2 son vectores propios de $AA^\intercal$, debemos verificar que satisfacen:

$$AA^\intercal u_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2.$$

- Para u_1:

  Sustituimos $u_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A v_1$ en $AA^\intercal u_1$:

$$AA^\intercal u_1 = AA^\intercal \left(\frac{1}{\sigma_1} A v_1 \right) = \frac{1}{\sigma_1} A(A^\intercal A v_1).$$

  Sabemos que $A^\intercal A v_1 = \lambda_1 v_1$, así que:

$$AA^\intercal u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A(\lambda_1 v_1) = \frac{\lambda_1}{\underbrace{\sigma_1}_{\sqrt{\lambda_1}}} A v_1 = \sigma_1 A v_1 = \lambda_1 u_1.$$

- Para u_2:

  Sustituimos $u_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} A v_2$ en $AA^\intercal u_2$:

$$AA^\intercal u_2 = AA^\intercal \left(\frac{1}{\sigma_2} A v_2 \right) = \frac{1}{\sigma_2} A(A^\intercal A v_2).$$

Sabemos que $A^\intercal A v_2 = \lambda_2 v_2$, así que:

$$AA^\intercal u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A(\lambda_2 v_2) = \frac{\lambda_2}{\underbrace{\sigma_2}_{\sqrt{\lambda_2}}} A v_2 = \sigma_2 A v_2 = \lambda_2 u_2.$$

Por lo tanto, u_1 y u_2 son vectores propios de $AA^\intercal$ asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Para demostrar que u_1 y u_2 son ortogonales, calulamos el producto escalar:

$$u_1 \cdot u_2 = \left(\frac{1}{\sigma_1} A v_1\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma_2} A v_2\right) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} (A v_1)^\intercal (A v_2).$$

Sabemos que $(Av_1)^\intercal (Av_2) = v_1^\intercal (A^\intercal A) v_2$. Usamos que v_1 y v_2 son ortogonales (porque son vectores propios de $A^\intercal A$ asociados a diferentes valores propios):

$$v_1^\intercal (A^\intercal A) v_2 = \lambda_2 v_1^\intercal v_2 = 0$$

Por lo tanto:

$$u_1 \cdot u_2 = 0,$$

lo que demuestra que u_1 y u_2 son ortogonales.

c) Sean U la matriz que tiene por columnas los vectores u_1 y u_2, en ese orden, y Σ la matriz diagonal que tiene en su diagonal los números σ_1 y σ_2. Comprueba que

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^\intercal + \sigma_2 u_2 v_2^\intercal = U \Sigma V^\intercal.$$

Por definición de σ_i, u_i, y v_i, tenemos:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^\intercal + \sigma_2 u_2 v_2^\intercal.$$

Expandimos cada términos:

$$\sigma_1 u_1 v_1^\intercal = \sigma_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \end{bmatrix}$$
$$\sigma_2 u_2 v_2^\intercal = \sigma_2 \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

La suma es:

$$A = \sigma_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \end{bmatrix} + \sigma_2 \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Agrupamos los términos para formar A, ya que u_1, u_2 y v_1, v_2 forman las bases ortonormales en U y V.

La forma general de $U\Sigma V_\intercal$ es:

$$U\Sigma V^\intercal = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^\intercal \\ v_2^\intercal \end{bmatrix}.$$

Realizamos el producto:

$$U\Sigma = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 & \sigma_2 u_2 \end{bmatrix}.$$

Multiplicamos por $V^\intercal$:

$$U\Sigma V^\intercal = \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 & \sigma_2 u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^\intercal \\ v_2^\intercal \end{bmatrix} ={}_1 v_1^\intercal + \sigma_2 u_2 v_2^\intercal.$$

Por lo que queda demostrado que:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^\intercal + \sigma_2 u_2 v_2^\intercal = U\Sigma V^\intercal.$$

d) ¿Cómo se llaman los números σ_1 y σ_2? ¿Cómo se llama la factorización de A que hemos hecho en el aparato anterior?

Los números σ_1 y σ_2 son los **valores singulares** de la matriz A.

- Los valores singulares son raíces cuadradas de los valores propios de la matriz $A^\intercal A$, es decir:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad \text{donde } \lambda_i \text{ son los valores propios de } A^\intercal A.$$

- Los valores singulares miden *"la magnitud"* de la transformación lineal inducida por A en diferentes direcciones del espacio.

La factorización de A que hemos realizado se llama **Factorización en Valores Singulares (SVD)**. En esta factorización descomponemos A como:

$$A = U\Sigma V^\intercal,$$

donde:

- U es la matriz ortogonal formada por los vectores singulares izquierdos (u_i) de A, que son los vectores propios de $AA^\intercal$.
- V es una matriz ortogonal formada por los vectores singulares derechos (v_i) de A, que son vectores propios de $A^\intercal A$.
- Σ es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores singulares (σ_1, σ_2) de A.

7) Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcula la dimensión y una base de los cuatro subespacios fundamentales de A, es decir, $\text{Fil}(A), \text{Col}(A), \text{Nuc}(A)$ y $\text{Nuc}(A^\intercal)$.

1) $\text{Fil}(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Los vectores independientes son $(1,1,1)$ y $(0,1,2)$. Por lo tanto:

$$\text{Fil}(A) =< (1,1,1), (0,1,2) > .$$

La dimensión de $\text{Fil}(A)$ es:

$$\dim\text{Fil}(A) = 2.$$

2) $\text{Col}(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3 \to C_3 - C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - 2C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas $(1,1)^\intercal$ y $(1,2)^\intercal$ son independientes. Por lo tanto:

$$\text{Col}(A) =< (1,1), (1,2) > .$$

La dimensión de $\text{Col}(A)$ es:

$$\dim\text{Col}(A) = 2.$$

3) $\text{Nuc}(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \longrightarrow y=-2z \longrightarrow x=2z-z=z$$

Por lo tanto, el núcleo es:

$$\text{Nuc}(A) =< (1,-2,1) > .$$

La dimensión de $\text{Nuc}(A)$ es:

$$\text{dimNuc}(A) = 1.$$

4) $\text{Nuc}(A^{\intercal})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \\ x+3y \end{cases} \longrightarrow x=-y$$

Por lo tanto, el núcleo es:

$$\text{Nuc}(A^{\intercal}) =< (-1,1) >$$

La dimensión de $\text{Nuc}(A^{\intercal})$ es:

$$\text{dimNuc}(A^{\intercal}) = 1.$$

b) En general, ¿qué relaciones pueden dar entre los subespacios anteriores?

1) **Relaciones entre dimensiones:** Por el **teorema fundamental del álgebra lineal:**

$$\text{dimFil}(A) = \text{dimCol}(A) = \text{rango}(A),$$

y

$$\text{dimNuc}(A) + \text{dimFil}(A) = n, \quad \text{dimNuc}(A^{\intercal}) + \text{dimCol}(A) = m,$$

donde n es el número de columnas y m es el número de filas de A.

2) **Ortogonalidad:** Los vectores en $\text{Nuc}(A)$ son ortogonales a los vectores de $\text{Fil}(A)$, y los vectores en $\text{Nuc}(A^{\intercal})$ son ortogonales a los vectores de $\text{Col}(A)$.