Cálculo II
Tema 2: Límites y continuidad de funciones de varias variables

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Calcular el máximo dominio de definición de las funciones siguientes.

a) $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

Para determinar el dominio de definición de la función $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, debemos analizar los valores de (x,y) que hacen que la expresión $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ esté bien definida.

La función $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ estará definida siempre que $x^2+y^2\neq 0$. Esto ocurre porque si $x^2+y^2=0$, el denominador se anula y la función no está definida. Sabemos que:

$$x^2+y^2=0\longrightarrow x=0 \text{ y } y=0.$$

Por lo tanto, la única solución en la que $x^2+y^2=0$ ocurre en el punto $(0,0)$. La función $\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ estará definida siempre que $x^2+y^2\neq=$, lo que significa que el dominio de la función es el conjunto de todos los puntos del plano excepto el origen $(0,0)$.

El dominio máximo de definición de $f(x,y)$ es:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\neq 0\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

b) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

La función $f(x,y)$ estará definida siempre que $xy\neq 0$ porque el denominador se anula y la función no está definida. Sabemos que:

$$xy=0\longrightarrow x=0 \text{ ó } y=0.$$

Por lo tanto, el dominio de $f(x,y)$ consiste en todos los pares $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $x\neq 0$ y $y\neq 0$.

El dominio de la función es:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \text{ y } y\neq 0\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):x=0 \text{ ó } y=0\}=\mathbb{R}^2\setminus(\{x=0\}\cup\{y=0\})$$

c) $\vec{f}(x,y)=\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2-1},\dfrac{xy}{x^2+y^2-4}\right)$

Para determinar el dominio de definición de la función vectorial $\vec{f}(x,y)$, debemos analizar las restricciones impuestas por el denominador de cada componente, asegurándonos de evitar divisiones por cero.

<u>Analizar los denominadores</u>

1) Primer denominador: $x^2+y^2-1\neq 0$

$$x^2+y^2\neq 1.$$

Esto significa que el punto (x,y) no puede estar en el círculo de radio 1 centrado en el origen, ya que en ese caso el denominador sería cero.

2) Segundo denominador: $x^2+y^2-4\neq 0$

$$x^2+y^2\neq 4.$$

Esto significa que el punto (x,y) no puede estar en el círculo de radio 2 centrado en el origen, ya que en ese caso el denominador sería cero.

Analizar el numerador

El numerador en ambos casos en xy, el cual está bien definido para todos los valores de x e y, por lo que no introduce restricciones adicionales al dominio.

Determinar el dominio

El dominio de $\vec{f}(x,y)$ estará definido en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ excepto aquellos que hagan que alguno de los denominadores sean cero. Esto ocurre en los puntos que satisfacen $x^2+y^2=1$ ó $x^2+y^2=4$.

Por lo tanto, el dominio es el plano $\mathbb{R}^2$ excluyendo los puntos en ls círculos de radio 1 y radio 2.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1 \text{ y } x^2+y^2 \neq 4\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x^2+y^2=1\} \cup \{x^2+y^2=4\}).$$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

Para determinar el dominio de definición de la función $f(x,y)$, necesitamos asegurarnos de que la expresión dentro de la raíz cuadrada sea mayor o igual a cero, ya que la raíz cuadrada no está definida para números negativos en el dominio real.

- Condición para que la raíz sea válida:

  La raíz está definida si:
  $$x^2+y^2-1 \geq 0 \longrightarrow x^2+y^2 \geq 1$$
  Esto significa que la función está definida para los puuntos (x,y) que se encuentren en el exterior o sobre el círculo de radio 1 centrado en el origen.

- Determinar el dominio:

  El dominio consiste en todos los puntos (x,y) del plano tal que $x^2+y^2 \geq 1$.
  $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\}$$

e) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2-4}, \log(x^2+y^2+z^2-1)\right)$

Para determinar el dominio de definición de la función vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ debemos analizar las restricciones impuestas por los denominadores y la función logarítmica.

- Condición para el denominador del primer componente

  El denominador del primer componente, $x^2+y^2+z^2-4$, no puede ser cero, ya que eso haría que la fracción sea definida. Esto implica:
  $$x^2+y^2+z^2 \neq 4.$$
  Esto significa que el dominio excluye todos los puntos sobre la esfera de radio 2 centrada en el origen.

- Condición para el argumento del logaritmo:

  El argumento del logaritmo, $x^2+y^2+z^2-1$, debe ser estrictamente positivo, ya que el logaritmo solo está definido para valores mayores que cero. Esto implica:
  $$x^2+y^2+z^2-1 > 0 \longrightarrow x^2+y^2+z^2 > 1.$$
  Esto significa que el dominio incluye solo los puntos fuera de la esfera de radio 1 centrada en el origen.

- Combinar restricciones:

  El dominio de $\vec{f}(x,y,z)$ está formado por los puntos (x,y,z) que cumplen simultáneamente:

  1) $x^2+y^2+z^2 > 1$ (fuera de la esfera de radio 1).
  2) $x^2+y^2+z^2 \neq 4$ (excluyendo la esfera de radio 2).

  $$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 > 1 \text{ y } x^2+y^2+z^2 \neq 4\}.$$

2) Estudiar la existencia de límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+m^4x^4}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}(1+m^4)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+m^4)}{1+m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría cero.

2) Coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^4}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\cancel{r^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}} = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta) = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdría cero.

3) Límites iterados o retirados

- $\displaystyle \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^2} = \lim_{y\to 0} y^2 = 0$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

4) Definición del límite:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x,y) - L| < \mathcal{E} \text{ si } \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$$

En coordenadas polares:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(r,\theta) - \underbrace{L}_{0}| < \mathcal{E} \text{ si } r < \delta$$

En todos los caminos considerados, $f(x,y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

3) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$, de la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x,y) = \left(x+y^2, \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

Para que el límite de $\vec{f}(x,y)$ exista en $(0,0)$, deben existir los límites de ambas componentes de forma independiente.

- Primera componente: $f_1(x,y) = x + y^2$

  1) Límites direccionales:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y^2 = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} x + m^2x^2 = 0$$

  No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

  2) Cambio por coordenadas polares:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y^2 \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta + r^2\sin^2\theta = 0$$

  No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

  3) Límites iterados o reiterados:

  - $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} x+y^2\right) = \lim_{x\to 0} x = 0$
  - $\displaystyle \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x+y^2\right) = \lim_{y\to 0} y^2 = 0$

  En todos los caminos considerados, $f_1(x,y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Segunda componente: $f_(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

  1) Límites direccionales:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}m}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

  No existe el límite, porque el resultado depende de m.

  Por lo tanto, al no haber en $(0,0)$ para $f_2(x,y)$, la función vectorial $\vec{f}(x,y)$ no tendrá límite en $(0,0)$.

4) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\{y=mx\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+mx}{\sqrt{\underbrace{x^2+m^2x^2}_{x^2(1+m^2)}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(\cancelto{0}{x}+m)}{\cancel{x}\sqrt{1+m^2}}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

No existe el límite, porque el resultado depende de m.

5) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$, de la función $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

1) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2m^2x^2+2xm^3x^3}{(x^2+m^2x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}(1+3m^2+2m^3)}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2}=\frac{1+3m^2+2m^3}{(1+m^2)^2}$$

No existe el límite porque el resultado depende de m.

6) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^5+4x^2y^3-2y^5}{(x^2+y^2)^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5+4x^2m^3x^3-2m^5x^5}{(x^2+m^2x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{5}}(2+4m^3-2m^5)}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2+4m^3-2m^5)}{(1+m^2)^2}=0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá cero.

2) Cambio de coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to 0}\frac{2r^5\cos^5\theta+4r^2\cos^2\theta r^3\sin^3\theta-2r^5\sin^5\theta}{(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{2r^{\cancel{5}}(\cos^5\theta+2\cos^2\theta\sin^3\theta-\sin^5\theta)}{\cancel{r^4}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}_{1}}=\lim_{r\to 0}2r(\cos^5\theta+2\cos^2\theta\sin^3\theta-\sin^5\theta)=0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá cero.

3) Límites iterados o reiterados:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{x^4}=\lim_{x\to 0}2x=0$
- $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{-2y^5}{y^4}=\lim_{y\to 0}-2y=0$

En todos los caminos considerados, $f(x,y)\to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es 0.

7) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $\vec{f}:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{f}(x,y)=\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},xy,\sqrt{|xyz|}\right)$$

Para que el límite de $\vec{f}(x,y)$ exista en $(0,0)$, deben existir los límites de las tres componentes independientemente.

- Primera componente: $f_1(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

  1) Límites direccionales:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} xmx\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}m(1-m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2m(1-m^2)}{1+m^2} = 0$$

  No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

  2) Cambio por coodenadas polares:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+^2} = \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot\frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

  $$= \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{\cancel{r^2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cancel{r^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}} = \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 0$$

  No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá 0.

  3) Límites iterados o reiterados:

  - $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
  - $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

  En todos los caminos posibles, $f_1(x,y)\to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Segunda componente: $f_2(x,y) = xy$

  1) Límites direccionales:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} xmx = \lim_{x\to 0} x^2m = 0$$

  2) Cambio por coordenadas polares:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta r\sin\theta = r^2\cos\theta\sin\theta = 0$$

  3) Límites iterados o reiterados:

  - $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} xy\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
  - $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} xy\right) = \lim_{y\to 0} = 0$

  En todos los caminos posibles, $f_2(x,y)\to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Tercera componente: $f_3(x,y) = \sqrt{|xyz|}$

  (a) Límites direccionales:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xyz|} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0}\sqrt{|xmxz|} = \lim_{x\to 0}\sqrt{|x^2mz|} = 0$$

  (b) Cambio de coordenadas polares:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xyz|} = \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} = \lim_{r\to 0}\sqrt{|r\cos\theta r\sin\theta z|} = \lim_{r\to 0}\sqrt{|r^2\cos\theta\sin\theta z|} = 0$$

  (c) Límites iterados o reiterados:

  - $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\sqrt{|xyz|}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
  - $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\sqrt{|xyz|}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

En todos los caminos posibles, $f_3(x,y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

Para las tres compoenentes, los límites son:

- $f_1(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \to 0$
- $f_2(x,y) = xy \to 0$
- $f_3(x,y) = \sqrt{|xyz|} \to 0$

Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \vec{f}(x,y,z) = (0,0,0)$$

8) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+xmx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(1+m)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{1+m}{1+m^2}$$

No existe el límite porque el resultado depende de m.

9) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{xm^2x^2}{x^2m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}m^2}{\cancel{x^2}(1+m^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{xm^2}{1+m^4x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\cos\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta r^2\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta} = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
- $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

En todos los caminos posibles, $f(x,y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

10) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}.$$

1) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+m^3x^3}{x^2+m^2x^2+m^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}(1+m^3)}{\cancel{x^2}(1+m^2+m^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+m^3)}{1+m^2+m^4x^2} = \frac{0}{1+m^2} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^4\sin^4\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{\cancel{r^2}(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + r^2\sin^4\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{1+r^2\sin^4\theta} = \frac{0}{1} = 0$$

3) Límites iterados o reiterados

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$
- $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^3}{y^2+y^4}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^{\cancel{3}}}{\cancel{y^2}(1+y^2)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{1+y^2}=\dfrac{0}{1}=0$

En todos los caminos posibles, $f(x,y)\to 0$. Por lo tanto , el límite existe y es cero.

11) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $\vec{f}:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{f}(x,y)=\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\sin\left(\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right)\right).$$

Para que el límite de $\vec{f}(x,y)$ exista en $(0,0)$, deben existir los límites de ambas componentes de forma independiente.

- Primera componente: $f_1(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

  1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+m^4x^4}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{4}}(1+m^4)}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+m^4)}{1+m^2}=0$$

  2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}=\left\{\begin{array}{c}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^4\theta+r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r^{\cancel{4}}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\cancel{r^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}}=\lim_{r\to 0}r^2(\cos^4\theta+y^4\theta)=0$$

  3) Límites iterados o reiterados

  - $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$
  - $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^4}{y^2}=\lim\limits_{y\to 0}y^2=0$

  En todos los caminos posibles, $f_1(x,y)\to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Segunda compoenente: $f_2(x,y)$

  1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin\left(\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right)=\{y=mx\}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x^2+xmx}{x^2+m^2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\cancel{x^2}(1+m)}{\cancel{x^2}(1+m^2)}\right)=\sin\left(\frac{1+m}{1+m^2}\right)$$

  Al depende de m, no existe el límite en la función $f_2(x,y)$, la función $\vec{f}(x,y)$ no tendrá límite en $(0,0)$.

12) Dadas las funciones

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } |x|\neq|y|\\ 0 & \text{si } |x|=|y|\end{cases}$$

y

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

se pide:

a) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)$ en los siguientes casos: $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{k}{n}\right)$ y $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2}\right)$, donde k es un número real.

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{k^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1+k^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\cancel{3}}}\cdot \cancel{n^2}}{1+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1+k^2)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{n^2+1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^3(n^2+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) ¿Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2-y^2} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2-m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1-m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-m^2} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2-y^2} = \left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta}{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}}\cos^3\theta}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^3\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta} = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^3}{x^2-y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$
- $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2-y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

En todos los caminos posibles, $f(x,y)\to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

c) Comprobar si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+m^3x^3}{x^2+m^2x^2+x^2mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}(1+m^3)}{\cancel{x^2}(1+m^2+mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+m^3)}{1+m^2+mx} = 0$$

El límite queda demostrado.

13) Estudiar la continuidad de la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir con $(0,0)$.

Estudiamos la existencia del límite de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\} = \lim_{r\to 0} \underbrace{(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)}_{r^2} \sin\frac{1}{\underbrace{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}}_{r}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\sin\left(\frac{1}{r}\right) = \overset{\text{Teorema del Sandwich}}{\left\{\left|\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right|\right\}} = \lim_{r\to 0}\left|r^2\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right| \leq \lim_{r\to 0} r^2 = 0$$

Dado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto $(0,0)$.