1) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$f(x) = x - \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

Para empezar, como hay un cociente debemos evitar que el denominador sea cero

$$x - 1 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ No está en el dominio}$$

Por otro lado, tenemos una raíz cuadrado y esto implica que la de dentro, debe ser positivo o cero: $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$

		-2		1	
$x+2$	$-\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$		$+\ +\ +$
	$+$		$-$		$+$
$x-1$	$-\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +$

$\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0 \longrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

Por lo tanto el dominio de la función es:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)}$$

2) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x}{\log(x)}}$

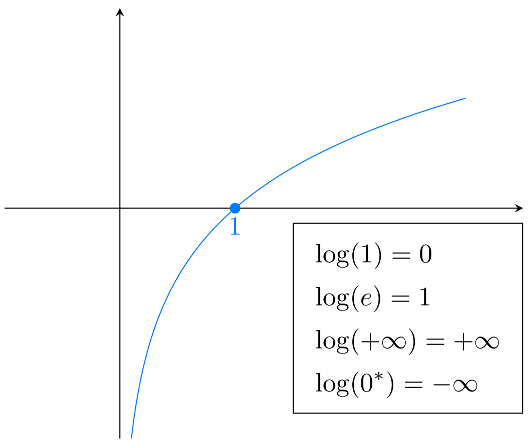
Como hay un cociente entonces el denominador no puede ser cero:

$$\log(x) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ No está en el dominio}$$

Como hay un logaritmo, lo de dentro solo puede ser positivo:

$$\boxed{x > 0}$$

Como tenemos una raíz cuarta (de grado par) entonces lo de dentro no puede ser negativo:



$\dfrac{x}{\log(x)} \geq 0 \longrightarrow x \in (1, +\infty)$

		1	
x	$+\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$
	$-$		$+$
$\log(x)$	$-\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (1, +\infty)}$$

3) Vamos a comprobar si la aplicación

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x + 1$$

es biyectiva, es decir, si es inyectiva y sobreyectiva.

Nota: Dada una función $y = f(x)$, se dice que esta función tiene inversa $x = f^{-1}(y)$ si cumple que sea inyectiva.
Decimos que $y = f(x)$ es inyectiva si $\forall x_1 \neq x_2$ se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Realmente para comprobar si una función es inyectiva lo que haremos será partir de $f(x_1) = f(x_2)$ y terminar demostrando que $x_1 = x_2$.

Veamos si la aplicación $f(x)$ es inyectiva:

- Sea:

$$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \longrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Por lo tanto: $f(x)$ es inyectiva.

- Por otro lado: $\forall y \in \mathbb{R} \longrightarrow y = f(x) = 2x + 1$
  $2x = 1 - y \longrightarrow x = \dfrac{1-y}{2}$ Por lo tanto $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y \longrightarrow f(x)$ es sobreyectiva.

Entonces, como $f(x)$ es inyectiva y sobreyectiva en todo $\mathbb{R}$ podemos asegurar que $f(x)$ es biyectiva y por lo tanto existe su función inversa.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$$

4) Comprobar si la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ tiene inversa.

Para que tenga inversa debe ser inyectiva, y esto implica que para elementos diferentes debe tener diferentes y como:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{No es inyectiva} \longrightarrow f(x) \text{ No tiene inversa}$$

5) Dadas las siguientes funciones, averiguar en qué puntos son discontinuas y por qué.

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ si $x \neq 0$, $f(2) = 0$.

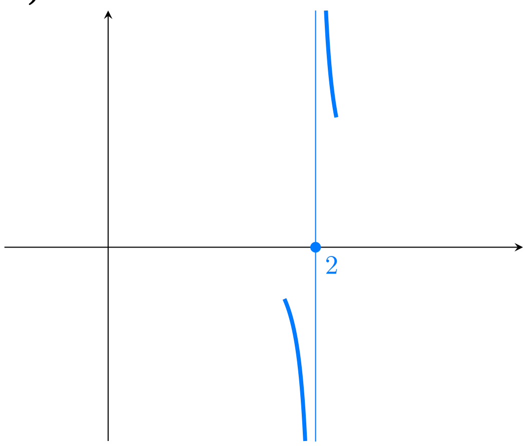
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$\forall x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos ahora si es continua en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$

$f(x)$ No es continua en $x = 2$, en concreto presenta en $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto infinito. Diremos que $f(x)$ presenta en $x = 2$ una asíntota vertical.



6) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^x}}$

Como es un cociente, debemos evitar que el denominador sea cero:

$$1 - e^x = 0 \longrightarrow e^x = 1 \longrightarrow x = \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0} \text{ No pertence el dominio}$$

Como hay una raiz cuadrada, lo de dentro no puede ser negativo:

$$1 - e^x > 0 \longrightarrow e^x < 1 \longrightarrow x < \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x < 0}$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, el Dom}(f) = (-\infty, 0)}$

7) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x < 0 \\ xe^{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\forall x < 0 \longrightarrow f(x) = -xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
$\forall x \in (0,1) \longrightarrow f(x) = xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
$\forall x > 1 \longrightarrow f(x) = xe^{1-x}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
Veamos ahora si $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $x = 1$:

En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} (-xe^{x-1}) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (xe^{1-x}) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}$$

Como existe el límite de $f(x)$ en $x = 0$ y coincide con $f(0)$ entonces podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} xe^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} xe^{1-x} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}$$

Como existe el límite de $f(x)$ en $x = 1$ y coincide con $f(1)$ entonces podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por lo tanto, y resumiendo, diremos que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

8) Determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para los que las siguientes funciones son continuas. Indica su dominio de definción:

a) $f(x) = \begin{cases} ax - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -ax + b & \text{si } \ -1 < x < 2 \\ -2ax + 3b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Para todos los puntos $x \neq -1$ y $x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un polinomio.

Veamos en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} (ax - 5) = -a - 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (-ax + b) = a + b \\ f(-1) = -a - 5 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, debe cumplirse que

$$-a - 5 = a + b \longrightarrow \boxed{2a + b = -5}$$

Veamos en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} (-ax + b) = -2ab \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (-2ax + 3b) = -4a + 3b \\ f(2) = -4 + 3b \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, debe cumplirse que

$$-2a + b = -4a + 3b \longrightarrow \boxed{2a - 2b = 0}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \longrightarrow 3a = -5 \longrightarrow \\ 2a - 2b = 0 \longrightarrow b = a \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} a = -\dfrac{5}{3} \\ b = -\dfrac{5}{3} \end{array}}$$

Como estos valores de a y b podemos asegurar que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3x + a & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ bx + a & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2x - b & \text{si } 3 \leq x < 5 \end{cases}$

Para empezar debemos darnos cuenta de que la función solo está definida para el intervalo: $[-2, 5) \longrightarrow \boxed{\text{Dom}(g) = [-2, 5)}$

Podemos asegurar que $g(x)$ es continua en $\forall x \in \text{Dom}(g)$ solo en $x = -1$ y $x = 3$, que todavía no lo sabemos ya que son los puntos de cambio.

<u>Veamos en $x = -1$:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} (3x + a) = -3 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (bx + a) = -bx + a \\ f(-1) = -b + a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Para que } g(x) \text{ sea continua en } x = -1 \\ -3 + \cancel{a} = -b + \cancel{a} \longrightarrow \boxed{b = 3} \end{array}$$

<u>Veamos en $x = 3$:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} (bx + a) = 9 + a \\ \lim\limits_{xto3^+} (2x - b) = 3 \\ f(3) = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Para que } g(x) \text{ sea continua en } x = 3 \\ 9 + a = 3 \longrightarrow \boxed{a = -6} \end{array}$$

Por lo tanto, podemos asegurar que si $a = -6$ y $b = 3$ entonces $g(x)$ es continua en todo su dominio: $\text{Dom}(g) = [-2, 5)$.

9) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left\{ \begin{array}{c} \text{multiplicaremos y dividiremos} \\ \text{por el conjugado de las raíces} \end{array} \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cancel{1} - x) - (\cancel{1} - x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

10) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 3x + 5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 4x + 5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}}{1 + \cancelto{0}{\frac{3}{x}} + \cancelto{0}{\frac{5}{x^2}}} = \boxed{3}$$

<u>Nota:</u> Siempre que tengamos un límite de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ que sea un cociente de polinomios, lo que haremos para resolverlo será dividir numerada y denominador por x^p siendo p el mayor grado de los terminos del denominador.

11) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x^2 + 2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x^2 + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancelto{0}{\frac{3}{x}}}{1 + \cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

12) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{x+1}{x-1}-1\right]} = (*) = \boxed{e^2}$$

Nota: Siempre que tengamos una indeterminación de la forma 1^∞, haremos lo siguiente $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = (1^\infty) = e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$

Base:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}}{\frac{x}{x}-\underset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}} = 1$$

$$(*) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}} = 2$$

13) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})-(\sqrt{x^2-4})\cdot(\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2-4})}{(\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2-4})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-(\sqrt{x^2-4})^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\cancel{x^2}+1)-(\cancel{x^2}-4)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{+\infty} = \boxed{0}$$

14) Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} & \text{si } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$\forall x\neq 1 \longrightarrow f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos si $f(x)$ es continua en $x=1$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to1^-}\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0^-}}+1} = \frac{1}{e^{-\infty}+1} = \left\{e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0\right\} = \frac{1}{1} = 1 \\ &\lim_{x\to1^+} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0^+}}+1} = \frac{1}{e^{+\infty}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Como los límites laterales no son iguales, entonces no existe el límite en $x=1 \longrightarrow f(x)$ no es continua en $x=1$.

En concreto podemos asegurar que $f(x)$ presenta en $x=1$ una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1ª especie.

$\boxed{\text{Por lo tanto, la conclusión es que } f(x) \text{ es continua } \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}.}$

15) Calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right)^{\frac{x^3}{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right)^{\frac{x^3}{1-x^2}} = (*) = (1^\infty) = (**)$$

$$(*)\begin{cases} \underline{\text{Base:}}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\overset{0}{\cancel{\frac{3}{x}}}+\overset{0}{\cancel{\frac{6}{x^2}}}}{1+\underset{0}{\cancel{\frac{4}{x}}}-\underset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}} = 1 \\ \underline{\text{Exponente:}}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{1-x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\underset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}-1} = \dfrac{\infty}{-1} = -\infty \end{cases}$$

$$(**) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-1}-1\right]} = \boxed{e^7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-1}-1\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{\cancel{x^2}-3x+6-\cancel{x^2}-4x+1}{x^2+4x-1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\cdot\frac{-7x+7}{x^2+4x-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^3+7x^3}{x^2+4x-1-x^4-4x^3+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^4+7x^3}{-x^4-4x^3+2x^2+4x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{7}{x^4}+\frac{7x^3}{x^4}}{-\frac{x^4}{x^4}-\frac{4x^3}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}+\frac{4x}{x^4}-\frac{1}{x^4}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-7+\cancelto{0}{\frac{7}{x}}}{-1-\cancelto{0}{\frac{4}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{4}{x^3}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^4}}} = \frac{-7}{-1} = 7$$

16) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

Como tenemos:

- $\lim_{x\to 0} x = 0$
- $\sin\frac{1}{x}$ es una función acotada ya que siempre ocurrirá que $-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$

Por lo tanto por el teorema del encaje (Sandwich), tendremos que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$

Nota: Teorema del Sandwich o del encaje

Si tenemos tres funciones tales que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ entonces si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$.

Una consecuencia de este teorema es la siguiente:

Si tenemos $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $g(x)$ está acotada $|g(x)|\leq k$ entonces podemos asegurar que

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$$

17) Calcular el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin(x)$$

Como se cumple que:

- $\lim_{x\to+\infty} = 0$
- La función $\sin(x)$ está acotada, ya que $-1\leq\sin(x)\leq 1$

Aplicand el teorema del encaje (Sandwich), tendremos que:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin(x) = 0}$$

18) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

Aplicando la equivalencia: $\sin(x)\rightsquigarrow_0 x$ podemos decir que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \boxed{1}$$

Nota: Hay veces en las que tenemos que hacer límites de funciones conocidas cuando estamos cerca de $x=0$. En estos casos podemos plantearnos transformar estas funciones en polinomios, mediante las llamadas equivalencias:

$\sin(x)\rightsquigarrow_0 x$	$e^x\rightsquigarrow_0 1+x$	$\arcsin(x)\rightsquigarrow_0 x$
$\cos(x)\rightsquigarrow_0 1-\frac{x^2}{2}$	$\log(1+x)\rightsquigarrow_0 x$	$\arctan(x)\rightsquigarrow_0 x$
$\tan(x)\rightsquigarrow_0 x$	$a^x\rightsquigarrow_0 1+x\log(a)$	$(1+x)^n\rightsquigarrow_0 1+nx$

19) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x\sin(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x\sin(2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=(*)$$

Resolveremos este límite aplicando equivalencias:

$$\sin(x)\rightsquigarrow_0 x \longrightarrow \sin(2x)\rightsquigarrow_0 (2x)$$
$$\cos(x)\rightsquigarrow_0 1-\frac{x^2}{2} \longrightarrow \cos(2x)\rightsquigarrow_0 1-\frac{(2x)^2}{2}=1-2x^2$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-2x^2)}{3x\cdot(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

20) Calcular el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)\tan^3(3x)}{(1-\cos^2(x))\cdot(e^x-1)^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)\tan^3(3x)}{\underbrace{(1-\cos^2(x))}_{\sin^2(x)}\cdot(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sin^2(x)}\cdot\tan^3(3x)}{\cancel{\sin^2(x)}\cdot(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(3x)}{(e^x-1)^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=(*)$$

Aplicaremos equivalnecias para resolver este límite:

$$\tan(x)\rightsquigarrow_0 x\longrightarrow \boxed{\tan(3x)\rightsquigarrow_0 3x}$$
$$\boxed{e^x\rightsquigarrow_0 1+x}$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^3}{(1+x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{27x^3}{x^3}=\boxed{27}$$

21) Para calcular

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{3-\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} = (0^0) = \lim_{x\to 0^+} e^{\log x^{\frac{2}{3-\ln x}}} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{3-\ln x}\cdot\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{3-\ln x}}=(*)=\boxed{e^{-2}}$$

Exponente: $\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3-\ln x}=\{\ln(0^+)=-\infty\}=\frac{2}{\infty}=0$

$$(*)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{3-\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}{\frac{3}{\ln x}-\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}=$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\cancel{\frac{3}{\ln x}}^{\,0}-1}=-2$$

<u>Nota:</u> Siempre que tengamos un límie de la forma 0^0 o ∞^0 que sea indeterminaciones, lo que haremos será aplicar lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left(0^0 \text{ ó } \infty^0\right)=\lim_{x\to a}e^{\log(f(x))^{g(x)}}=$$
$$\lim_{x\to a}e^{g(x)\log f(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)}$$

22) Para calcular

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3)^{\frac{1}{\ln(x^2)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3)^{\frac{1}{\ln x^2}}=(\infty^0)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(5x^3)^{\frac{1}{\ln x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x^2}\ln(5x^3)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(5x^3)}{\ln x^2}}=(*)=e^{\frac{3}{2}}$$

$$(*)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(5x^3)}{\ln x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5+\ln x^3}{\ln x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5+3\ln x}{2\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\frac{\ln 5}{\ln x}}^{\,0}+3\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}{2\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}=\frac{3}{2}$$

23) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x^3+5x^2+6x+2)}{\ln(x^2+5)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x^3+5x^2+6x+2)}{\ln(x^2+5)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^3\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right)}{\ln\left(x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^3)+\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{2\ln x+\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} =$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\frac{3\ln x}{\ln x}}+\cancelto{0}{\frac{\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\ln x}}}{\frac{2\ln x}{\ln x}+\cancelto{0}{\frac{\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{\ln x}}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite que sea un cociente de logaritmos, lo que haremos será sacar en cada logaritmo factor común el término polinómico de mayor grado y mediante reglas de logaritmos lo reduciremos a un cociente de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ donde dividiremos arriba y abajo por $\ln x$.

24) Si queremos calcular A para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ A & \text{si } x=2\end{cases}$$

sea continua en el punto $x_0=2$ lo que tenemos que hacer es calcular.

- Veamos si existe el límite en $x_0=2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4\longrightarrow\lim_{x\to 2}f(x)=4$$

Nota: Para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x=a$ debe verificar las siguiente condiciones:

i) Exista $\lim\limits_{x\to a}f(x)$

ii) Exista $f(a)$

iii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

- Como podemos ver en $f(x)$, existe $f(2)$ y vale $f(2)=A$.
- Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$, debe verificarse que $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

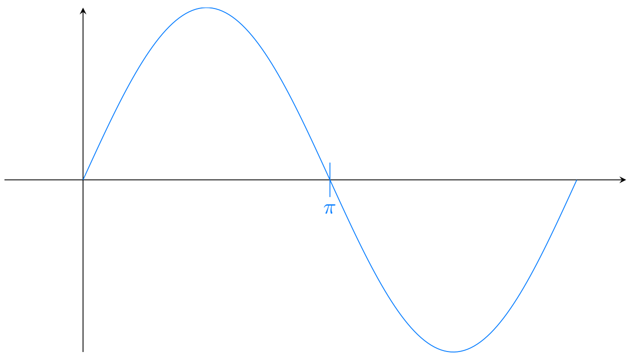
$$\boxed{A=4}$$

25) Sea $k\in\mathbb{Z}$. Si queremos estudiar la continuidad de la función en el punto $x_0=\pi$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x\neq k\pi\\ 1 & \text{si } x=k\pi,\end{cases}$$

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=\pi$ debemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x}{\sin x}=\left(\frac{\pi}{0}\right)=\left\{\lim_{x\to\pi^-}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{0^+}=+\infty\quad\lim_{x\to\pi^+}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{0^-}=-\infty\right.$$



No es continua en $x_0=\pi$ en concreto, podemos asegurar que $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x_0=\pi$. Hay, por l tanto, auna asíntota vertical $x_0=\pi$.

26) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<2\\ x^2 & \text{x } \geq 2\end{cases}$$

en el punto $x_0=2$.

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en el punto $x_0=2$, debemos:

i) Estudiaremos la existencia del límite de $f(x)$ en $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} 3 = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} x^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ no es continua en $x = 2$ en concreto presenta una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1ª especie.

27) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

en el punto $x_0 = 1$.

Para estudiar la continuidad, debemos hacer lo primero el límite en $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{0^-}\right)}{e^{\frac{1}{0^-}}+1} = \dfrac{\overbrace{\sin(-\infty)}^{\text{oscilante}}}{\cancelto{0}{e^{-\infty}} + 1} = \nexists \lim \text{ ya que es oscilante} \\ \lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{0^+}\right)}{e^{\frac{1}{0^+}} + 1} = \dfrac{\sin(+\infty)}{e^{+\infty} + 1} = \dfrac{\sin(+\infty)}{+\infty} = 0 \text{ (Teorema del Sandwich)} \end{cases}$$

No existe el límite ya que hay un límite lateral que no existe $\longrightarrow f(x)$ no es continua en $x_0 = 1$.

28) Consideremos las funciones

$$f(x) = e^{-x}x \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

Estudiar la continuidad de la función $f \circ g$

La composición de funciones $f \circ g$, consiste en realizar la función $g(x)$, y donde esta termine comenzaremos $f(x)$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x)$$

$$\frac{1}{x} \longrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$f(x) = e^{-x} \cdot x$$

Por lo tanto, tenemos que: $\boxed{(f \circ g) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}}$.

Por lo tanto podemos asegurar que $(f \circ g)$ es continua en todos los $\mathbb{R}$ salvo en $x = 0$, donde $\nexists (f \circ g)(0)$

29) Dadas las funciones reales $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Calcular las expresiones de $g \circ f$ y $f \circ g$.

Comenzamos calculando $g \circ f$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x)) \longrightarrow \boxed{(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}}$$

$$x \longrightarrow \sin x \longrightarrow \sqrt{\sin x}$$

Calcularemos ahora $f \circ g$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x)) \longrightarrow \boxed{(f \circ g)(x) = \sin(\sqrt{x})}$$

$$x \longrightarrow \sqrt{x} \longrightarrow \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

30) Para calcular el límite
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\left(\frac{0}{0}\right)=(*)$$

$$x^2-x-2=0\longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\begin{cases}2\\-1\end{cases}\longrightarrow (x^2-x-2)=(x-2)(x+1)$$

$$x^3-12x+16=0$$

	1	0	-12	16
2		2	4	-16
	1	2	-8	$\boxed{0}$
2		2	8	
	1	4	$\boxed{0}$	

$$(x^3-12x+16)=(x-2)^2(x+4)$$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{[(x-2)(x+1)^{20}]}{[(x-2)^2(x+4)]^{10}}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)^{20}}\cdot(x+1)^{20}}{\cancel{(x-2)^{20}}\cdot(x+4)^{10}}=\frac{3^{20}}{6^{10}}=\frac{3^{20}}{2^{10}\cdot 3^{10}}=\boxed{\frac{3^{10}}{2^{10}}}$$

31) Calcular el siguiente límite:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{(x-x_0)}(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$$

32) Calcula la correspondencia inversa de las funciones:

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

La función inversa es aquella que verifica que si $f(x)\longrightarrow x=f^{-1}(y)$

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\longrightarrow\frac{x-1}{x+2}=y^2\longrightarrow (x-1)=y^2(x+2)$$
$$x-1=xy^2+2y^2\longrightarrow x-xy^2=1+2y^2\longrightarrow x(1-y^2)=1+2y^2$$

$$x=\frac{1+2y^2}{1-y^2}\longrightarrow\boxed{x\cdot f^{-1}(y)=\frac{1+2y^2}{1-y^2}}$$

33) Calcula la correspondencia inversa de las funciones:

$$y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$$

La función invertible que verifica que si $y=f(x)\longrightarrow x=f^{-1}(y)$

$$y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\longrightarrow(2-\sqrt{x})y=2+\sqrt{x}\longrightarrow 2t-t\sqrt{x}=2+\sqrt{x}\longrightarrow 2y-2=2\sqrt{x}+\sqrt{x}$$

$$2y-2=(y+1)\sqrt{x}\longrightarrow\sqrt{x}=\frac{2y-2}{y+1}\longrightarrow x=\left(\frac{2y-2}{y+1}\right)^2\longrightarrow\boxed{x=f^{-1}(y)=\left(\frac{2y-2}{y+1}\right)^2}$$

34) Calcula el dominio de las siguiente funciones:

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

Como $f(x)$ está definida mediante un cociente, entonces tenemos que su denominador no puede ser cero

$$x+1=0 \longrightarrow x=-1$$
$$\boxed{\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}}$$

35) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$g(x)=\frac{x+3}{x^2-4}$$

Como tenemos un cociente, el denominador no puede ser cero.

$$x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow x=\pm 2$$
$$\boxed{\text{Dom}(g(x))=\mathbb{R}-\{-2,\,2\}}$$

36) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$l(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

- Lo primero que tenemos es un cociente, el cual no puede tener el denominador igual a cero

$$x+2=0 \longrightarrow \boxed{x=-2} \text{ No está en el dominio}$$

- Como tenemos una raíz cuadrada, entonces lo de dentro no puede ser negativo:

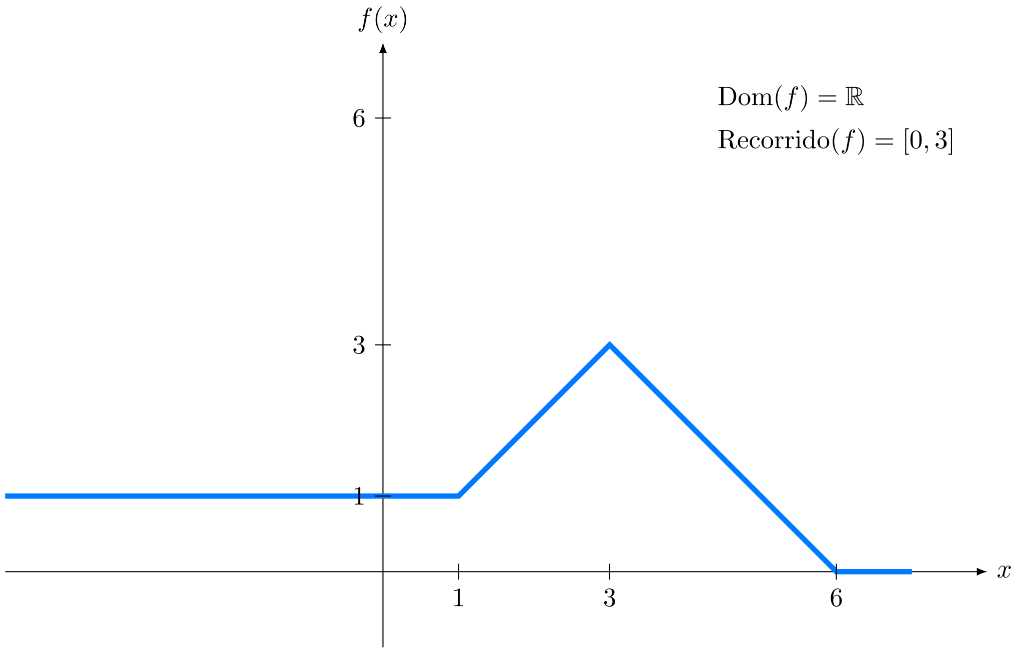
$$\frac{x-1}{x+2}\geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

$$\boxed{\text{Dom}(f)=(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)}$$

37) Representa la función

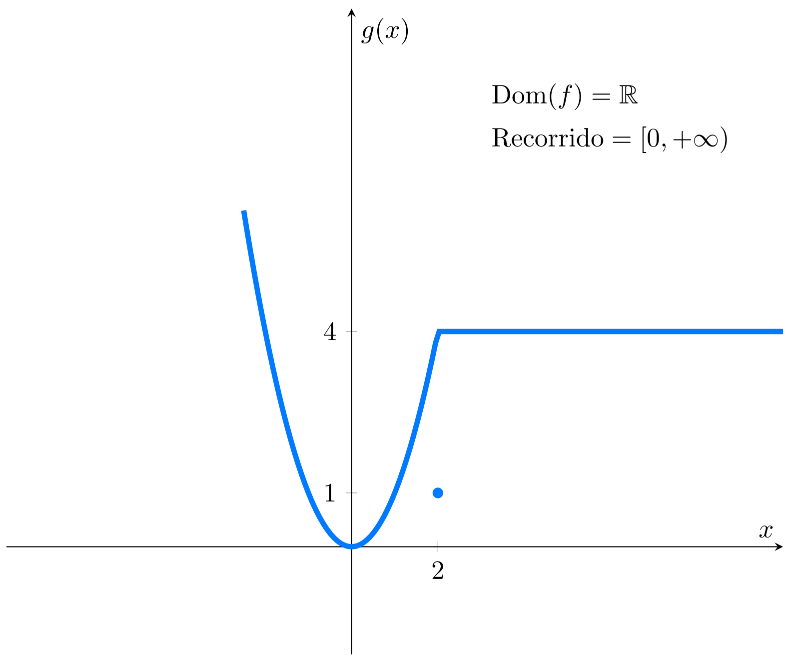
$$y=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leq 1 \\ x & \text{si } 1<x\leq 3 \\ -x+6 & \text{si } 3<x\leq 6 \\ 0 & \text{si } 6<x \end{cases}$$



38) Representa la función

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Escribe su dominio y su recorrido



39) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1}$$

40) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\cancel{(x-1)}\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{2 \cdot \frac{2}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$x^2-1=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=\pm 1 \longrightarrow (x^2-1)=(x-1)(x+1)$$

$$2x^2-x-1=0 \longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}\begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}\end{cases} \qquad 2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

41) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}{2-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

42) Calcula los siguientes límites:

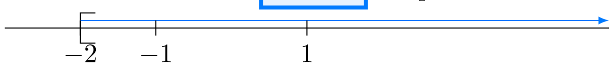
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-4x^2+x-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{5x}^{\,+\infty}-4+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}{2-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}=+\infty$$

43) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ y $g(x)=\sqrt{x+2}$ escribe los criterios y dominios de las funciones $f\cdot g$ y $f:g$.

$$f\cdot g=f(x)\cdot g(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}\longrightarrow (f\cdot g)(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$$

- Por la raíz cuadrada tenemos que $x+2\geq 0 \longrightarrow \boxed{x\geq -2}$
- Por el cociente, su denominador debe ser distinto de cero:

$$x^2-1=0\longrightarrow x^2=1\longrightarrow \boxed{x=\pm 1}\ \text{No pertenece al dominio.}$$

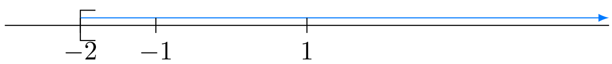


$$\boxed{\mathrm{Dom}(f\cdot g)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}\longrightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}}$$

- Por la raíz tenemos que $x+2\geq 0\longrightarrow \boxed{x\geq -2}$
- Por el cociente:

$$x^2-1=0\longrightarrow x^2=1\longrightarrow \boxed{x=\pm 1}\ \text{No puede ser}$$
$$x+2=0\longrightarrow x=-2\longrightarrow \text{No puede ser}$$



$$\boxed{\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)}$$

44) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos 3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}}=(*)$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{Equivalencias}\\ \cos x\sim_0 1-\frac{x^2}{2}\\ \cos(3x)\sim_0 1-\frac{(3x)^2}{2}\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\frac{9x^2}{2}-\cancel{1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{2}x^2}{x^2}=\boxed{-\frac{9}{2}}$$

Nota: Siempre que tengamos una indeterminación de la forma 1^∞, debemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\,(f(x)-1)}$$