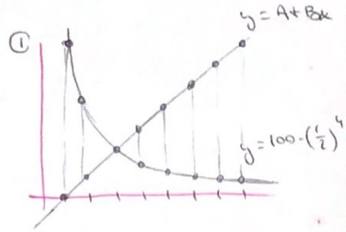
Tema 2. Sucesiones

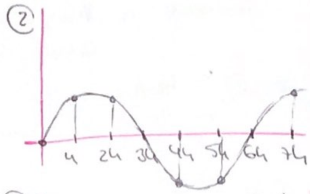
2.1 Sucesiones y límites

Def. Una sucesión es una aplicación $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$

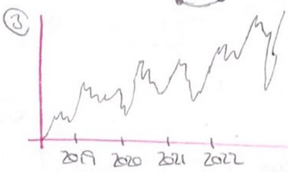


Ejemplo.

1. Progresiones aritméticas o geométricas.
   $a_n = A + B_n \qquad a_n = A \cdot \ell^n$
2. Funciones discretizadas.
   $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ $\longrightarrow$ $a_n := f[h \cdot A]$ (donde $h > 0$ es fijo)

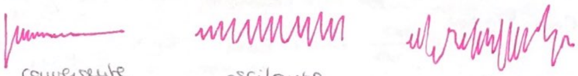


3. Mediciones de datos
   $a_n =$ cambio de 1 US $ en el día n
   día 0 = 1-1-2018



4. Sucesiones que no provienen de funciones.
   $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to \{ \frac{-1}{1}, \frac{+1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{+1}{4} \dots \}$
   $\frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$
5. Sucesiones recurrentes (o iteraciones)
   $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$
   $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$
   $a_2 = a_0 + a_1 = 2 \quad a_3 = a_2 + a_1 = 3 \quad a_3 = a_2 + a_1 = 5$

Objetivos.



1. Dibujar
2. Calcular límites
3. Calcular el término general

(explicar comportamiento a largo plazo)

4. $<$ si converge $\to$ velocidad de convergencia; si $+\infty$ $\to$ valor crecimiento $\longrightarrow$ $a_n = 2n+1$; $2n \le 2n+1 \le 3n$; $a_n = \mathcal{O}(n)$

→ Definición formal de límite

Decimos que:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, si $\forall M \ge 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_n \ge M \\ \text{si } n \ge n_0 \end{cases}$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \to |a_n| < \varepsilon$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \to \begin{cases} |a_n - L| < \varepsilon \\ \forall n \ge n_0 \end{cases}$

$\lim(n \cdot e^n) = \lim(n) \cdot \lim(e^n) = \infty \cdot e^\infty = \infty \cdot \infty = \infty$

Ejemplos.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\lim n^2} = \frac{1}{(\lim n)^2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$
- $\lim (n^2 + 3n + 2) = \infty^2 + 3\infty + 2 = \infty$
- $\lim \frac{n^3+1}{n^2-1} = \frac{\infty}{\infty}$ Indet. $\to$ dividir por n^3 $\to \lim \frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}} =$

$= \frac{1+0}{0-0} = \frac{1}{0} = \infty$

*En general si $P(n) = a \cdot n^N + a_1 \cdot n^{N-1} + \dots + a_n$
$Q(n) = b \cdot n^M + b_1 \cdot n^{M-1} + \dots + b_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot n^N}{b \cdot n^M} = \begin{cases} \infty & \text{si } N > M \\ 0 & \text{si } M > N \\ a/b & \text{si } M = N \end{cases}$$

$\to$ límites según el grado mayor

- $\lim \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} = \lim \frac{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n}}{\frac{n+2}{n}} = \lim \frac{\sqrt{\frac{2n^2-1}{n^2}}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim \frac{\sqrt{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}}{1 + 2/n} =$

$= \lim \frac{\sqrt{2-0}}{1+0} = \sqrt{2}$

- $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \infty - \infty = \lim \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$

$\to$ multiplicar por el conjugado

$= \lim \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$

- $\lim n^{1/n} = \infty^0 = \lim e^{\ln(n^{1/n})} = \lim e^{\frac{1}{n} \cdot \ln n} = e^{\frac{\lim n}{n}} = e^0 = 1$

$\lim \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim \frac{1/x}{1} = \lim \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

Teorema 1. Criterio de Stolz

Si a_n, b_n son POSITIVAS + CRECIENTES

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

si se tiene $\boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$ en el primer límite y si el segundo límite existe.

Ejemplos.

1. $\lim \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2} + n^2) - \cancel{(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2)}}{n^3 - (n-1)^3} =$

$= \lim \frac{n^2}{\cancel{n^3} - (\cancel{n^3} - 3n^2 + 3n - 1)} = \lim \frac{n^2}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{1}{3}$

2. $\lim \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \to \lim \frac{\ln(n) - \ln(n-1)}{n-(n-1)} = \lim \frac{\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)}{1} = \ln 1 = 0$

3. si $\lim a_n = L$, si $\sigma_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to \lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$

Dem. $\lim \sigma_n = \lim \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \underset{\text{stolz}}{=} \lim \frac{(\cancel{a_1+\cdots} + a_n) - (\cancel{a_1 + \cdots + a_{(n-1)}})}{\cancel{n}-(\cancel{n}-1)} =$

$\lim \frac{a_n}{1} = L$

4. si $\lim a_n = L \quad (a_n > 0)$

$g_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ $\qquad \log = \ln \neq \log_{10}$

$\lim g_n = \lim e^{\ln(a_1 \cdots a_n)^{1/n}} = \lim e^{\frac{1}{n}\ln(a_1 \cdots a_n)}$

$\lim \frac{\ln(a_1 \cdots a_n)}{n} = \lim \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n} \underset{\text{stolz}}{=} \lim \frac{[\cancel{\ln a_1 + \cdots} + \ln a_n] - [\cancel{\ln a_1 + \cdots + \ln a_{n-1}}]}{\cancel{n}-(\cancel{n}-1)}$

$= \lim \frac{\ln a_n}{1} = \ln L$

Calcular. $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^\infty}{\infty}$??

Teorema 2. Del bocadillo

si $\boxed{A_n \leq a_n \leq B_n}$ y existen $\boxed{\lim A_n = \lim B_n = L} \to \boxed{\exists \lim a_n = L}$

Ejemplos.

1. $\lim \frac{(-1)^n}{n} \to A_n = \frac{-1}{n} \quad B_n = \frac{1}{n}$

$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \qquad \lim A_n = \lim B_n = 0 \to \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$

2. $\lim \frac{\operatorname{sen} n}{n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \infty}{\infty}$??

$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\operatorname{sen} n}{n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} \implies \lim \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$

3. $\lim \frac{1+n^2}{(1+n)^n} \to 0$

si $n \geq 3 \to (1+n)^n = (1+n)^3(1+n)^{n-3} \geq (1+n)^3 \to 0 \leq \overset{\substack{0 \\ \uparrow}}{\frac{1+n^2}{(1+n)^n}} \leq \overset{\substack{0 \\ \uparrow}}{\frac{1+n^2}{(1+n)^3}}$

4. $\lim \frac{n!}{n^n} = \frac{\infty}{\infty} \to 0$

Teorema bocadillo

$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq 1 \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}}$

Teorema 3. Criterio de la raíz.

Si $a_n > 0$ entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$ (si el 2º lím existe)

Ejemplos.

1. $\lim n^{1/n} = \lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{n}{n-1} = 1$

2. $\lim \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}} \overset{\text{raíz}}{=} \lim \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Stolz}}$

$$\lim \frac{(\cancel{1+\dots}+\frac{1}{n})-(\cancel{1+\dots+\frac{1}{n-1}})}{(\cancel{1+\dots}+\frac{1}{n-1})-(\cancel{1+\dots+\frac{1}{n-2}})} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \lim \frac{n-1}{n} = 1$$

2.2 Sucesiones monótonas

Def. Diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}$ es
- Creciente si $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Decreciente si $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Monótona si es creciente o decreciente

Ejemplos.

1. $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & n = \text{par} \\ -1, & n = \text{impar} \end{cases}$
   → no monótona

2. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = \text{par} \\ \frac{-1}{n}, & n = \text{impar} \end{cases}$
   → no monótona

$\exists \lim a_n = 0$

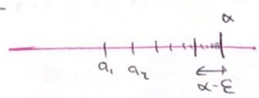
Teorema 1.

a) Si a_n es creciente y acotada superiormente
→ $\exists \lim a_n = \sup a_n$

b) Si a_n es decreciente y acotada inferiormente
→ $\exists \lim a_n = \inf a_n$

Dem. a. Si $A = \{a_n\}_{n=1}$ → es acotado superiormente

Ax supremo → $\exists \sup a_n = \alpha \in \mathbb{R}$



Dado $\varepsilon > 0$ (pequeño) → $\alpha - \varepsilon < \alpha = \sup A$

Prop del sup → $\exists a_{n_0} \in A \,/\, \alpha - \varepsilon < a_{n_0} \le \alpha$

como $a_{n_0} \le a_{n_0+1} \le \dots \le a_n \le \alpha$

→ se cumple la def. de $\lim a_n = \alpha$

$\alpha - \varepsilon < a_n \le \alpha$ $\forall n \ge n_0$

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ $\forall n \ge n_0$

Ejemplos.

1. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

a. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq a_n + \frac{1}{(n+1)!} = a_{n+1}$

b. a_n es acotada superiormente

$a_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$a_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$

a_n es acotada superiormente

$\exists \lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \leq 3$

Se puede probar que:

$\lim 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = e$

3. Una sucesión recurrente

$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot a_n} \\ a_1 = 1 \end{cases} \longrightarrow a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}, a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \dots$

Suponer que existe $\lim a_n = L$

$\longrightarrow L = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2 \cdot a_n} = \sqrt{2L}$

$L = \sqrt{2L} \rightarrow L^2 = 2L < \begin{matrix} 0 = L \\ 2 = L \end{matrix}$

Veamos que $a_n \leq 2$ (por inducción)

$n = 1 \quad a_1 = 1 \leq 2$

Suponer cierto $a_n \leq 2$ y ver el caso $n+1$

$a_{n+1} = \sqrt{2 a_n} \overset{HI}{\leq} \sqrt{2 \cdot 2} = 2$

$a_n \leq a_{n+1}$

$a_n \leq \sqrt{2 a_n} \longleftrightarrow a_n^2 \leq 2 \cdot a_n \longleftarrow a_n \leq 2$ ✓

Conclusión. Por Tma 1 $\rightarrow \exists L = \lim a_n \xrightarrow{\text{paso 1}} L = 2$ o bien $L = 0$

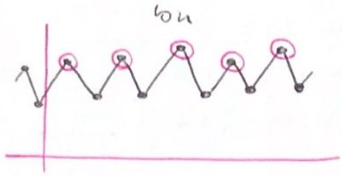
como $L = \sup a_n \geq a_1 = 1 \longrightarrow L \neq 0 \longrightarrow L = 2$

2.3 Subsucesiones

Def: si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión, entonces una subsucesión es una sucesión formada por elementos (ordenados) de la sucesión original $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, es decir;

$b_n = a_{p_n}$, donde $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$

Ejemplos.



① $\{a_n = \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

$\to b_n = a_{2n} \to \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8} \dots\}$

subsucesión de pares

$\to b_n = a_{2n-1} \to \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \dots\}$

subsucesión de impares

Teorema 1. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión

1. Si existe $\lim a_n = L \longrightarrow \begin{cases} \lim b_n = L \\ \forall \text{ subsucesión } b_n \text{ de } \{a_n\} \end{cases}$

2. Si $\exists$ subsucesión b_n y b_n' de $\{a_n\}$ tales que $\lim b_n \neq \lim b_n'$
$\longrightarrow \nexists \lim a_n$

Dem. a. Si $\exists \lim a_n = L \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0 / |a_n - L| < \varepsilon \quad n \geq n_0$

$\to$ tb será verdad para cualquier subsgto. b_n de los a_n

$\exists |b_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

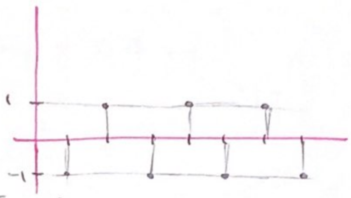
b. Contrarecíproco de a.

Ejemplo.

① $a_n = (-1)^n$

parece por el dibujo que

$\nexists \lim a_n$



para justificarlo considero 2 subsucesiones

$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow \lim b_n = 1$

$b_n' = a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to \lim b_n' = -1$

Tm. 6.1 $\nexists \lim (-1)^n$

2. $a_n = -\frac{1}{n} + (-1)^n$

considero:

$\rightarrow s_n = a_{2n} = \frac{1}{2n} + (-1)^{2n} = \frac{1}{2n} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\rightarrow s_n' = a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} + (-1)^{2n-1} = \frac{1}{2n-1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

$1 \neq -1 \implies \nexists \lim a_n$

3. Sabemos que $\exists \lim \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\text{creciente y acotada sup.}} = e$

si tomo $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$

Tma 19: $\lim a_{p_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$

Ejemplo.

$$\lim \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3} = 1^{\infty} = \lim \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2-3} = \lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^3} =$$

$$= \lim \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{a_{n^2}}\Bigg]^2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^3} = (e)^2 \cdot \frac{1}{(1+0)^3} = e^2$$

4. (Hoja 2, 1e)

$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n^2+2} = \frac{(-1)^n}{1+\frac{2}{n^2}}$ parece que $\nexists \lim a_n$

$s_n = a_{2n} = \frac{1}{1+\frac{2}{(2n)^2}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1$

$s_n' = a_{2n-1} = \frac{-1}{1+\frac{2}{(2n-1)^2}} \longrightarrow \frac{-1}{1+0} = -1$

$1 \neq -1 \implies \nexists \lim \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}$

5. (Hoja 2, 1f)

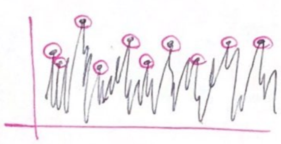
$\lim \frac{(-1)^n + n}{n} = \lim \frac{(-1)^n}{n} + 1 = \lim \frac{(-1)^n}{n} + \lim 1 = 0 + 1$

Teorema 2. de Bolzano - Weierstrass

Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada

$\rightarrow$ siempre tiene alguna subsucesión convergente, es decir, existe s_n subsuc. de a_n tal que $\lim s_n \in \mathbb{R}$

Ejemplo.



Límites superior e inferior:

Def. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión se denominan.

$\lim \sup a_n = \inf_{i \geq 1} \left(\sup_{n \geq i} a_n \right)$ = mayor lím de una subsuc. de a_n

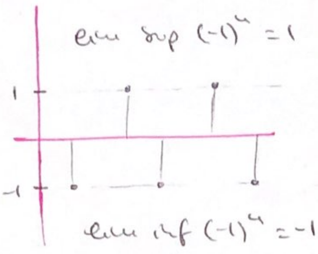
$\lim \inf a_n = \sup_{i \geq 1} \left(\inf_{n \geq i} a_n \right)$ = menor lím de una subsuc. de a_n.

Ejemplo.

$a_n = (-1)^n$

$\lim \sup (-1)^n = \inf_{i \geq 1} \left(\sup_{n \geq i} (-1)^n \right) = \inf_{i \geq 1} (1) = 1$

$\lim \inf (-1)^n = \sup_{i \geq 1} \left(\inf_{n \geq i} (-1)^n \right) = \sup_{i \geq 1} (-1) = -1$



* Nota: los $\lim \sup a_n$ y $\lim \inf a_n$ siempre $\exists$ (aunque no exista el $\lim a_n$).

Teorema. Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes

1. $\exists \lim a_n = l$
2. $\lim \sup a_n = \lim \inf a_n = l$