

Cálculo II

Tema 3: Cálculo diferencial de funciones de varias variables I

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Decir si es o no diferenciable en el punto $(0, 0)$ la función real

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para comprobar si $f(x, y)$ es diferenciable o no en el punto $(0, 0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de no serlo directamente diríamos que es diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 \cdot r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2}$$
$$2 \cos \theta \sin \theta \longrightarrow \nexists \lim$$

Como no existe el límite, entonces $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$ y por lo tanto, podemos asegurar que tanto es diferenciable en dicho punto.

2) Comprobar que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.

Para comprobar si $f(x, y)$ es diferenciable o no en el punto $(0, 0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de serlo directamente diríamos que no diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{x} = \{\text{Teorema del Sándwich}\} = 0$$

Como el límite coincide con $f(0, 0) = 0$, la función $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$.

- Comprobar que $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$:

La función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$ si existe un plano tangente que se aproxime localmente a $f(x, y)$. Esto ocurre si:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} \sin \frac{1}{\cancel{h}} - 0}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

El término $\sin \frac{1}{x}$ oscila entre -1 y 1 de manera no convergente cuando $h \rightarrow 0$, por lo que este límite no existe. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

3) Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular su derivada direccional de cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ en el punto $(0,0)$.

- Estudio de la continuidad en el punto $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin^2 \theta = 0$$

Como el límite coincide con $f(0,0) = 0$, la función $f(x,y)$ es continua en dicho punto.

- Comprobar que $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$:

Para verificar la diferenciabilidad en $(0,0)$, usando el criterio de que la función es diferenciable si existe un plano tangente local, lo que requiere que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Si $f(x,y)$ fuera diferenciable, se debería cumplir:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} h = r \cos \theta \\ k = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^3} \\ &= \cos \theta \sin^2 \theta \longrightarrow \nexists \text{ lim} \end{aligned}$$

El término $\cos \theta \sin^2 \theta$ depende de θ , lo que implica que el límite no existe uniformemente. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

- Derivada direccional en $(0,0)$:

La derivada direccional en la dirección $v = (v_1, v_2)$ está dada por:

$$\begin{aligned} D_v f(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 (v_1^2 + v_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t}^3 v_1 v_2^2}{\cancel{t}^2 (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

La derivada direccional no siempre es cero, ya que depende de los valores de v_1 y v_2 .

4) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comprobar que f tiene derivada direccional respecto de cualquier vector de \mathbb{R}^2 en el punto $(0, 0)$, pero f no es derivable en dicho punto.

- Derivada direccional en $(0, 0)$:

La derivada direccional de $f(x, y)$ en la dirección de un vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ se define como:

$$\begin{aligned} D_v f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^4}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t(t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(v_1 v_2^2)}{t^2(v_1^2 + t^2 v_2^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1} \end{aligned}$$

La derivada direccional existe para cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ y está dada por

$$D_v f(0, 0) = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 \text{ y } v_2 = 0 \end{cases}$$

- Diferenciabilidad de $f(x, y)$ en $(0, 0)$:

La función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$ si existe:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Si $f(x, y)$ fuera diferenciable en $(0, 0)$, las derivadas direccionales serían consistentes con las derivadas parciales. Sin embargo, observamos que

$$D_v f(0, 0) = \frac{v_2^2}{v_1}, \quad \text{si } v_1 \neq 0,$$

y esto depende de la dirección $v = (v_1, v_2)$, lo cual indica que $f(x, y)$ no puede aproximarse localmente por una aplicación lineal.

La función no es diferenciable en $(0, 0)$ porque las derivadas direccionales no son consistentes con una aproximación lineal.

5) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = x^2 \tan \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

definida para todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, y comprobar que

$$xD_1 f(x, y) + yD_2 f(x, y) = 2f(x, y)$$

Denotamos $u = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$. Entonces:

$$f(x, y) = x^2 \tan(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(-\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2y(x^2 + y^2 - y^2 \cdot 2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y + 2y^3 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y) &= x \cdot \left[2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(-\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] + y \cdot \left[x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] \\ &= 2x^2 \tan(u) - \frac{2x^4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (\tan^2(u) + 1) + \frac{2x^4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (\tan^2(u) + 1) = 2x^2 \tan(u) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot f(x, y)$$

6) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$$

definida en el conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, y comprobar que

$$xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y) = -\frac{1}{2}f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x + y)^2}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x + y)^2} + y \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x + y)^2} \\ &= \frac{x \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right) + y \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right)}{(x + y)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}(x + y) - x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \frac{\sqrt{y}}{2}(x + y) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x + y)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)}{(x + y)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - 1 \right) (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)}{(x + y)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$$

Por lo tanto:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot f(x, y)$$

7) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = y \cdot \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$$

definida en el conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(1, 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y \cdot \frac{1}{\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{3x^2 y \cdot (x^2 + y^2) - x^3 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^3 y} \cdot \frac{3x^4 y + 3x^2 y^3 - 2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot y \\ &= y \cdot \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^3 y(x^2 + y^2)} = y \cdot \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^5 y + x^3 y^3} = \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^5 + x^3 y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + y \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^3 y} \cdot \frac{x^3(x^2 + y^2) - x^3 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{1^3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1^3}{1^5 + 1^3 \cdot y^2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \log \frac{1^3 \cdot 1}{1^2 + 1^2} + \frac{1^2 - 1^2}{1^2 + 1^2} = \log \frac{1}{2}$$

El diferencial en $(1, 1)$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) dy = 2 dx + \log \frac{1}{2} dy$$

8) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

definida en el conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(2, 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(x - \frac{y}{x^2}\right) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(2 - \frac{2}{1}\right) = 0 \end{aligned}$$

El diferencial en $(2, 1)$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) dy = \frac{1}{2} dx$$

9) Dada la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x, y) = (x^4 + y^3, x^2 y^2 - 3y^2)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(1, 1)$. Comprobar que \vec{f} es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$f(x, y) = (x^4 + y^3, x^2 y^2 - 3y^2) = \begin{cases} f_1(x, y) = x^4 + y^3 \\ f_2(x, y) = x^2 y^2 - 3y^2 \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 & 3y^2 \\ 2xy^2 & 2x^2 y - 6y \end{pmatrix} \rightarrow J(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, podemos asegurar que es diferenciable.

Su diferencial, al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} df(P)(h, k) &= J(f)(P)(h, k) = df(1, 1)(h, k) = J(f)(1, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h + 3k \\ 2h - 4k \end{pmatrix} \longrightarrow df(1, 1)(h, k) = (4h + 3k, 2h - 4k) \end{aligned}$$

10) Dada la función $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y, x \cos y \sin y)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$. Comprobar que \vec{f} es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$\begin{aligned} \vec{f}(x, y) &= (x \cos y, x \sin y, x \cos y \sin y) = \begin{cases} f_1(x, y) = x \cos y \\ f_2(x, y) = x \sin y \\ f_3(x, y) = x \cos y \sin y \end{cases} \\ J(f) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \\ \cos y \sin y & x(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \longrightarrow J(f) \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que todas las funciones coordenada son C^1 , por lo tanto la función $\vec{f}(x, y)$ es también C^1 y también es diferenciable.

$$\begin{aligned} df(P)(h, k) &= J(f)(P)(h, k) = df \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) (h, k) = J(f) \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (-\pi k, h, -\pi k) \longrightarrow df \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) (h, k) = (-\pi k, h, -\pi k) \end{aligned}$$

11) Comprobar que la función $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + yz - z^2, xy - xz + 2z^2, xyz)$$

es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^3 y calcularla en el punto $(3, 2, 1)$.

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + yz - z^2, xy - xz + 2z^2, xyz) = \begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + yz - z^2 \\ f_2(x, y, z) = xy - xz + 2z^2 \\ f_3(x, y, z) = xyz \end{cases}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que son diferenciables, por consecuencia, $\vec{f}(x, y, z)$ también es diferenciable.

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & z & y - 2z \\ y - z & x & -x + 4z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Su diferencial al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} df(P)(h, k, j) &= J(f)(P)(h, k, j) \longrightarrow df(3, 2, 1)(h, k, j) = J(f)(3, 2, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} = (6h + k, h + 3k + j, 2h + 3k + 6j) \\ &\longrightarrow df(3, 2, 1)(h, k, j) = (6h + k, h + 3k + j, 2h + 3k + 6j) \end{aligned}$$

12) Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = x^{y+z}$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y+z)x^{y+z-1} & x^{y+z} \cdot \ln(x) & x^{y+z} \cdot \ln(x) \end{pmatrix}$$

b) $f(x, y, z) = x^{y^z}$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^z \cdot x^{y^z-1} & x^{y^z} \cdot \ln(x) \cdot z \cdot y^{z-1} & x^{y^z} \cdot \ln(x) \cdot y^z \cdot \ln(y) \end{pmatrix}$$

c) $f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$

$$\begin{aligned} J(f) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= (\cos(x \sin(y \sin z)) \cdot (\sin(y \sin z)), \cos(x \sin(y \sin z)) \cdot x \cdot \cos(y \sin z) \cdot \sin z, \cos(x \sin(y \sin z)) \cdot x \cdot \cos(y \sin z) \cdot \sin z) \end{aligned}$$

d) $\vec{f}(x, y) = (\sin(xy), \sin(x \sin y), x^4)$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(xy) \cdot y & \cos(x, y) \cdot x \\ \cos(x \sin y) \cdot \sin y & \cos(x \sin y) \cdot x \cdot \cos(y) \\ 4x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

13) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, y) & \text{si } (x, y) = (0, y) \end{cases}$$

Comprobar que f es diferenciable.

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y \right) & \text{si } x \neq 0 \\ (0, y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Caso $x \neq 0$:

La función es C^1 en esta región porque las funciones x^2 , $\sin \frac{1}{x}$, y y son derivables, y no hay discontinuidades cuando $x \neq 0$. Por lo tanto, f es diferenciable en esta región.

- Caso $x = 0$:

Cuando $x = 0$, la función se define como

$$f(x, y) = (0, y)$$

En este caso, debemos comprobar la diferenciabilidad en el punto $(0, y_0)$ para cualquier y_0 . Empezamos calculando las derivadas parciales.

- Primera componente $f_1(x, y)$:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, la derivada parcial respecto a x es:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x + 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

- Segunda componente $f_2(x, y)$:

$$f_2(x, y) = y$$

La derivada parcial respecto a y es constante, y vale 1 en todo \mathbb{R}^2 .

En el caso $x = 0$, el comportamiento de $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ es consistente con la definición y es continuo. Por lo tanto, todas las derivadas son continuas en $(0, y_0)$.

Dado que la función $f(x, y)$ es de clase C^1 en $x \neq 0$ y las derivadas parciales son continuas en $x = 0$, podemos concluir que $f(x, y)$ es diferenciable en \mathbb{R}^2 .

14) Sabiendo que $f(x, y) = \sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}$, calcular

$$xf(x, y)D_1f(x, y) + yf(x, y)D_2f(x, y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{xy} \cdot y + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{xy} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned}
xf(x, y)D_1f(x, y) + yf(x, y)D_2f(x, y) &= x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\
&\quad + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} + \frac{1}{2} + \frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = 1
\end{aligned}$$

15) Sabiendo que $f(x, y) = \sin \frac{2x + y}{2x - y}$, calcular

$$xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{2 \cdot (2x - y) - (2x + y) \cdot 2}{(2x - y)^2} \right) = \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{4x - 2y - 4x - 2y}{(2x - y)^2} \right) = \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{-4y}{(2x - y)^2} \right) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{1 \cdot (2x - y) - (2x + y) \cdot (-1)}{(2x - y)^2} \right) = \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{2x - y + 2x + y}{(2x - y)^2} \right) = \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{4x}{(2x - y)^2} \right) \\
xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y) &= x \cdot \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{-4y}{(2x - y)^2} \right) + y \cdot \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{4x}{(2x - y)^2} \right) \\
&= \cos \frac{2x + y}{2x - y} \cdot \left(\frac{-4xy}{(2x - y)^2} + \frac{4xy}{(2x - y)^2} \right) = 0
\end{aligned}$$

16) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$.

La ecuación del plano tangente, viene dada por:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

- Para el punto $(0, 0)$:

$$c = f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$z - 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \longrightarrow z = 0$$

- Para el punto $(1, 2)$

$$c = f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$$

$$z - 5 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2) \longrightarrow z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

$$\longrightarrow z = 2x - 2 + 4y - 8 + 5$$

$$\longrightarrow z = 2x + 4y - 5$$

17) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \log x^2 + \log y^2$ en los puntos $(3, 1)$ y (x_0, y_0) .

La del plano tangente, viene dada por:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

- Para el punto $(3, 1)$:

$$\begin{aligned} c &= f(3, 1) = \log(3^2) + \log(1^2) = \log(9 \cdot 1) = \log(9) & z - \log(9) &= \frac{2}{3}(x - 3) + 2(y - 1) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = \frac{2}{3} & z &= \frac{2}{3}x - 2 + 2y - 2 + \log(9) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} \cdot 2y = \frac{2}{y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2 & z &= \frac{2}{3}x + 2y - 4 + \log(9) \end{aligned}$$

- Para el punto (x_0)

$$\begin{aligned} c &= f(x_0, y_0) = \log(x_0^2) + \log(y_0^2) = \log(x_0 \cdot y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2}{x_0} & z - \log(x_0 \cdot y_0) &= \frac{2}{x_0}(x - x_0) + \frac{2}{y_0}(y - y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} \cdot 2y = \frac{2}{y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2}{y_0} \end{aligned}$$

- 18)** Sea A un abierto de \mathbb{R}^3 y $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f es diferenciable en un punto $(a_1, a_2, a_3) \in A$ y que $Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Calcular $D_v f(a_1, a_2, a_3)$ siendo v el vector siguiente:

Sabemos que la derivada lineal $Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3)$ es:

$$Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Esto implica que el gradiente de f en cualquier punto (a_1, a_2, a_3) es:

$$\nabla f(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$$

La derivada direccional en la dirección del vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ se calcula como:

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = \nabla f(a_1, a_2, a_3) \cdot v = (1, 1, 1) \cdot (v_1, v_2, v_3).$$

El producto escalar es:

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

a) $v = (1, 2, 3)$

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = 1 + 2 + 3 = 6$$

b) $v = (0, 1, 1)$

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = 0 + 1 + 1 = 2$$

c) $v = (-1, 1, 2)$

$$D_v f(a_1, a_2, a_3) = -1 + 1 + 2 = 2$$

- 19)** Sea A un abierto de \mathbb{R}^3 y $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Supongamos que \vec{f} es diferenciable en un punto $(a_1, a_2, a_3) \in A$. Si $\vec{f} = (f_1, f_2)$ y $D_{v_i} f_j(a_1, a_2, a_3) = i + j$ para $j = 1, 2$ e $i = 1, 2, 3$ donde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, determinar el diferencial de \vec{f} en dicho punto.

Para determinar diferencial de la función vectorial \vec{f} en el punto (a_1, a_2, a_3) , recordemos que el diferencial es una matriz 2×3 que contiene las derivadas parciales de cada componente de \vec{f} :

$$Df(a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Dado que conocemos las derivadas direccionales de f_1 y f_2 en las direcciones de los vectores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, podemos usar la relación entre la derivada direccional y las derivadas parciales:

$$D_{v_i} f_j(a_1, a_2, a_3) = \nabla f_j(a_1, a_2, a_3) \cdot v_i,$$

$$\text{donde } \nabla f_j(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \frac{\partial f_j}{\partial x_3} \right).$$

Con esta información, determinaremos las derivadas parciales.

- Componente $f_1(j = 1)$:

1) Para $i = 1(v_1 = (1, 1, 1))$:

$$D_{v_1} f_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 1 = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2$$

2) Para $i = 2(v_2 = (0, 1, 1))$:

$$D_{v_2} f_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 1 = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2$$

3) Para $i = 3(v_3 = (0, 0, 1))$:

$$D_{v_3} f_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 = 1 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 1$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2 - 1 = 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2 - (1) - 1 = 0 \end{aligned}$$

- Componente $f_2(j = 2)$:

1) Para $i = 1(v_1 = (1, 1, 1))$:

$$D_{v_1} f_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 3$$

2) Para $i = 2(v_2 = (0, 1, 1))$:

$$D_{v_2} f_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 1 = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 2$$

3) Para $i = 3(v_3 = (0, 0, 1))$:

$$D_{v_3} f_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 1$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 2 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2 - 1 = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 3 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3 - (1) - 1 = 1 \end{aligned}$$

El diferencial de \vec{f} en el punto (a_1, a_2, a_3) es:

$$Df(a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

20) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comprobar que existen las derivadas parciales segundas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Primero verificamos las derivadas parciales de primer orden en $(0, 0)$. Para calcular las derivadas parciales, tomamos los límites respectivos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Ahora calculamos las derivadas parciales mixtas en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(x \cos y - \sin x)(x^2 + y^2) - (x \sin y - y \sin x) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Ahora calculamos el límite cuando $x \rightarrow 0$ para evaluar $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(0, 0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = (*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cos h - \sin h}{h^2} - 0}{h} = \left\{ \sin h \approx h - \frac{h^3}{6} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \frac{h^3}{6}}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{6}}{h^3} = \frac{1}{6}$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) = \frac{(h \cos 0 - \sin h) \cdot h^2}{h^4} = \frac{h - \sin h}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(\sin y - y \cos x) \cdot (x^2 + y^2) - (x \sin y - y \sin x) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Ahora calculamos el límite cuando $y \rightarrow 0$ para evaluar $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(0, 0)$.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = (*) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin k - k \cos 0}{k^2} - 0}{k} = \left\{ \sin k \approx k - \frac{k^3}{6} \right\} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left(k - \frac{k^3}{6} \right) - k}{k^3} = \lim_{k \rightarrow 0} -\frac{\frac{k^3}{6}}{k^3} = -\frac{1}{6}$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, k) = \frac{(\sin k - k \cos 0) \cdot k^2}{k^4} = \frac{\sin k - k}{k^2}$$

21) Se consideran las funciones $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $\vec{f}(x, y) = (x^2 y^4, x^3 y^3 + 4xy^2)$ y $\vec{g}(x, y) = (x \sin y, y \sin x)$. Sea $\vec{F} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Calcular la matriz jacobiana de \vec{F} en el punto $(2, -1)$

La composición $f \circ g$ viene dada por:

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ (2, -1) & & (4, 0) & & \end{array}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^4 & 4x^2y^3 \\ 3x^2y^3 + 4y^2 & 3x^3y^2 + 8xy \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)(2, -1) = \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y \\ y \cos x & \sin x \end{pmatrix} \longrightarrow J(g)(4, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

$$J(F)(2, -1) = J(g)(4, 0) \cdot J(f)(2, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \sin 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 32 \\ -8 \sin 4 & 8 \sin 4 \end{pmatrix}$$

- 22)** Se consideran las funciones $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $\vec{f}(t) = (t^2, 3t - 1, 1 - t^2)$ y $\vec{g}(x, y, z) = (x^2 - y - zx, y^2 + xy + z^2)$. Sean $\vec{F} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Calcular la matriz jacobiana de \vec{F} en el punto -1 . ¿Es posible calcular la matriz jacobiana de la función $\vec{G} = \vec{f} \circ \vec{g}$ en el punto $(1, 1, 1)$?

$$\vec{F}(t) = \vec{g}(\vec{f}(t)) = \vec{g}(t^2, 3t - 1, 1 - t^2)$$

Sustituyendo $(x, y, z) = (t^2, 3t - 1, 1 - t^2)$ en \vec{g} :

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} (t^2)^2 - (3t - 1) - (1 - t^2) \cdot t^2 \\ (3t - 1)^2 + t^2 \cdot (3t - 1) + (1 - t^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 - 3t + 1 - t^2 + t^4 \\ 9t^2 - 6t + 1 + 3t^3 - t^2 + t^4 - 2t^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^4 - t^2 - 3t + 1 \\ t^4 + 3t^3 - 3t^2 - 6t + 2 \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{F}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t^3 - 2t - 3 \\ 4t^3 + 9t^2 + 12t - 6 \end{pmatrix} \longrightarrow J_{\vec{F}}(-1) = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Composición de $\vec{G} = \vec{f} \circ \vec{g}$:

Para que la composición $\vec{f} \circ \vec{g}$ esté definida, la función \vec{g} debe producir un resultado en \mathbb{R} , pero $\vec{g}(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Esto hace que la composición $\vec{f} \circ \vec{g}$ **no sea válida**, ya que los dominios y codominios no son compatibles.

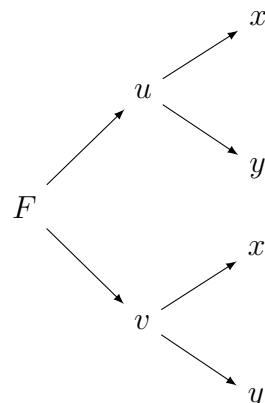
- 23)** Hallar la expresión de las derivadas parciales de la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ y $g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase $C^1(\mathbb{R})$.

La función $f(u, v)$ depende de dos variables:

- $u = g(x)k(y)$
- $v = g(x) + h(y)$



$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= g'(x)h(y) \\
\frac{\partial x}{\partial v} &= g'(x) \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot g'(x)h(y) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot g'(x) \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= g(x)h'(y) \\
\frac{\partial y}{\partial v} &= h'(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot g(x)h'(y) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot h'(y)
\end{aligned}$$

24) Calcular la expresión de las derivadas parciales de la función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = f(x^y, y^z, z^x)$$

donde $f : M \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $C^1(M)$ con

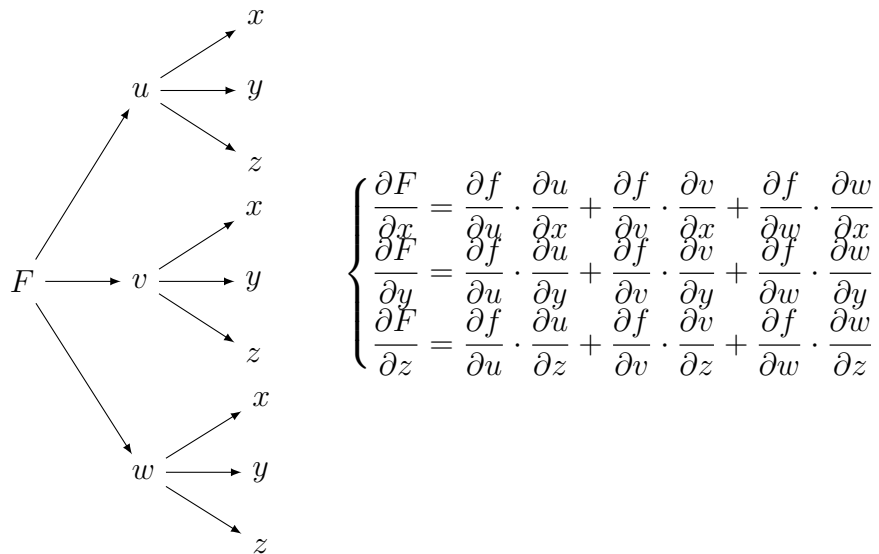
$$M = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

La función $F(x, y, z)$ puede escribirse como:

$$F(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

donde

$$u(x, y, z) = x^y, \quad v(x, y, z) = y^z, \quad w(x, y, z) = z^x$$



$$\begin{cases}
\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\
\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\
\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= y \cdot x^{y-1} \\
\frac{\partial x}{\partial v} &= 0 \\
\frac{\partial x}{\partial w} &= z^x \cdot \ln(z) \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y \cdot x^{y-1} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot z^x \cdot \ln(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= x^y \ln(x) \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= z \cdot y^{z-1} \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x^y \ln(x) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot z \cdot y^{z-1} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= y^z \ln(y) \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= x \cdot z^{x-1} \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y^z \ln(y) + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot x \cdot z^{x-1}
\end{aligned}$$

25) Calcular la expresión de las derivadas parciales de las funciones $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

a) $F(x, y, z) = \int_0^{x+y+z} \sin t \, dt$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x, y, z)$ respecto a cada variable es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} = \sin(x+z+y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial y} = \sin(x+z+y) \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial z} = \sin(x+z+y)
\end{aligned}$$

b) $F(x, y, z) = \int_0^{xyz} t \sin t \, dt$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x, y, z)$ respecto a cada variable es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial x} = \sin(x+z+y) \cdot yz \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial y} = \sin(x+z+y) \cdot xz \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = \sin(x+z+y) \cdot xy
\end{aligned}$$

c) $F(x, y, z) = \int_{x^2+y^2}^{xyz} \sin t \, dt$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x, y, z)$ respecto a cada variable es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \sin(x^2+y^2) \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = \sin(x+z+y) \cdot yz - \sin(x^2+y^2) \cdot 2x \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \sin(x^2+y^2) \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = \sin(x+z+y) \cdot xz - \sin(x^2+y^2) \cdot 2y \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial z} - \sin(x^2+y^2) \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial z} = \sin(x+z+y) \cdot xy
\end{aligned}$$

26) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \text{ con } x, y \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las siguientes igualdades:

a) $x^2 \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y^2 \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2} \\ x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

b) $xy(x+y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) + x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{2}{x^3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{y^2} \right) = \frac{2}{y^3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{y^2} \right) = 0 \\ xy(x+y) \cdot 0 + x^2 \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right) + y^2 \cdot \frac{2}{y^3} &= -\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \neq 0\end{aligned}$$

27) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \text{ con } x \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

a) $x \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + F(x, y) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \right) = \frac{x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \left(\frac{y}{x}\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \right) = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \\ x \cdot \left(\frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \right) + y \cdot \left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \right) + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} &= \frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} + \frac{y \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \\ &= -\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot y}{x^2} + \frac{y \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} = 0\end{aligned}$$

b) $x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 2F(x, y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} - f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \right) = \frac{2f''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x^3}}{x^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \right) = \frac{f''\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \right) = \frac{-f''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x^3}}{x^2}\end{aligned}$$

28) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$. Comprobar que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

1)
