Cálculo II

Tema 4: Teoría de campos

Francisco Javier Mercader Martínez

Capítulo 1: Integración múltiple

1) Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ las integrales

a) $\displaystyle\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

$$\int_0^3 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{1}{2}y \, \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{4}y^2\right]_{y=0}^{y=3} = \frac{9}{4}$$

b) $\displaystyle\iint_\Omega xe^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

$$\int_0^3 \int_0^1 xe^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^3 e^y \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^3 e^y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{e^y}{2} \, \mathrm{d}y = \left[\frac{e^y}{2}\right]_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{2}(e^3 - 1)$$

c) $\displaystyle\iint_\Omega y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

$$\int_0^3 \int_0^1 y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^3 y^2 \left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^3 y^2(1-\cos(1)) \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=3} \cdot (1-\cos(1)) = 9(1-\cos(1))$$

2) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican

a) $\displaystyle\iint_\Omega y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables x y y se expresan como:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ se transforma en:

$$r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \cdot \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3} \cdot \left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{3}(-\cos(2\pi) + \cos(0)) = \frac{1}{3}(-1+1) = 0$$

b) $\displaystyle\iint_\Omega (3y^3 + x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables x y y se expresan como:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se transforma en:

$$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

En estas coordenadas, la función $2y^3 + x^2$ se convierte en:

$$2y^3 + x^2 = 3(r\sin\theta)^3 + (r\cos\theta)^2.$$

$$\iint_\Omega (2y^3 + x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3(r\sin\theta)^3 + (r\cos\theta)^2)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^4\sin^3\theta + r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{3r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\sin^3\theta + \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{5}\sin^3\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (*)$$

Usamos que $\sin^3\theta = \sin\theta(1-\cos^2\theta)$ y la simetría de $\sin\theta$ en $[0,2\pi]$ implica que:

$$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta = 0$$

Usamos la identidad $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$. Entonces:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \cancelto{0}{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta} = \pi$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$ porque $\cos(2\theta)$ es impar en $[0,2\pi]$.

$(*) = \dfrac{3}{5}\cdot 0 + \dfrac{1}{4}\cdot\pi = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

La función $\sqrt{xy}$ depende del producto xy. Observamos que:

- Si $x > 0$ y $y > 0$, $\sqrt{xy} > 0$.
- Si $x < 0$ o $y < 0$, el signo del producto puede cambiar.
- En particular, en las regiones donde $x > 0$, $y < 0$ (o viceversa), el producto $xy < 0$, y $\sqrt{xy}$ no está definida para valores negativos.

Debido a que $\sqrt{xy}$ no está definida en $\mathbb{R}^2$ cuando $xy < 0$, esta integral **no se puede calcular** sobre Ω como está formulada, porque incluye regiones donde $xy < 0$.

d) $\displaystyle\iint_\Omega ye^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 < x \le y^2\}$.

$$\int_0^1\int_0^{y^2} ye^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\cdot[e^x]_{x=0}^{x=y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\cdot\left(e^{y^2}-1\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^{y^2} - y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^y\,\mathrm{d}y - \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-2)$$

$$\int_0^1 ye^{y^2}\,\mathrm{d}y = \left\{\begin{array}{l} u = y^2 \\ \\ \mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y \end{array}\right\} = \int_0^1 e^u\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,[e^u]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

e) $\iint_\Omega y+\log x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0.5\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{x^2}^x y+\log x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{x^2}^x y+\log x\,\mathrm{d}y = \int_{x^2}^x y\,\mathrm{d}y + \int_{x^2}^x \log x\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} + [y\log x]_{y=x^2}^{y=x} = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{(x^2)^2}{2}\right)+\log x(x-x^2) = \frac{x^2(1-x^2)}{2} + \log x(x-x^2)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}+\log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 - x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{x=0.5}^{x=1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{47}{480}\right) = \frac{47}{960}$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 x\log x - x^2\log x\,\mathrm{d}x = (*) = \left(-\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{16}\right) - \left(-\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{72}\right) = -\frac{1}{12}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{13}{144}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x\log x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u=\log x & \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \left[\log x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{16}$$

$(*)$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\log x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u=\log x & \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^3}{3}\end{array}\right\} = \left[\log x\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{\cancel{3}}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{72}$$

3) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

a) $\iint_\Omega (4-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8-2x$.

Se nos da el recinto limitado por las curvas:

$$y^2 = 2x \quad \text{e} \quad y^2 = 8-2x$$