Academia Optativa

Francisco Javier Mercader Martínez

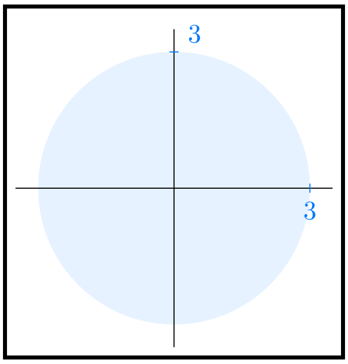
1) Calcular y representar el dominio de la siguiente función:

$$f(x,y)=\ln(9-x^2-y^2)$$

Como sabemos, lo de dentro de un logaritmo neperiano nunca puede ser negativo ni 0, por eso:

$$0-x^2-y^2>0\longrightarrow 9>x^2+y^2$$

Por lo tanto, podemos representar el dominio como: $\boxed{\mathrm{Dom}(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|x^2+y^2<9\right\}}$



Este recinto representa el interior de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $R=3$.

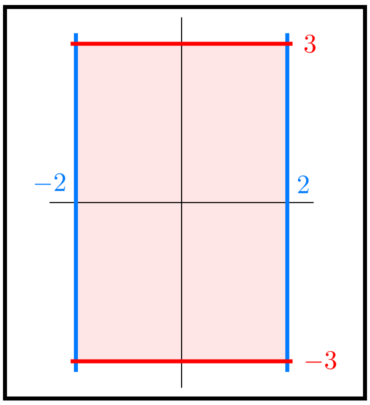
2) Calcular y representar el dominio de la siguiente función:

$$f(x,y)=\sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{9-y^2}$$

Como dentro de una raíz solo puede haber elementos que sean positivos o cero:

- $4-x^2\geq 0\longrightarrow x^2\leq 4\longrightarrow -2\leq x\leq 2$
- $9-y^2\geq 0\longrightarrow y^2\leq 9\longrightarrow -3\leq y\leq 3$

$\boxed{\mathrm{Dom}(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|-2\leq x\leq 2,\ -3\leq y\leq 3\right\}}$



3) Realizar el límite direccional mediante el cambio de rectas de:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} y-b=m(x-a) \\ \\ y=mx \end{array} \right\} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2\cdot x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdría $L=0$.

4) Realizar el límite direccional mediante el cambio de rectas de:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m\cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(m^2+1)} = \frac{m}{1+m^2}$$

Como el resultado depende de m, entonces <u>no existe el límite</u>.

5) Realizar el límite direccional mediante rectas y parábolas en el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

<u>Rectas:</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+m^3x^3}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}(1+m^3)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+m^3)}{1+m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría $L=0$.

<u>Parábolas:</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+^2} = \left\{y=mx^2\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+m^3x^6}{x^2+m^3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}(1+m^3x^3)}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+m^3x^3}{1+m^2x^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría $L=0$.

6) Dado el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

a) Calcular su límite direccional por rectas.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{xm^2x^2}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1\text{‘}m^4x^2)}$$

b) Calcular su límite direccional por parábolas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \left\{y=mx^2\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{xm^2x^4}{x^2+m^4x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^{\cancel{5}}}{\cancel{x^2}(1+m^4x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{1+m^4x^6} = \frac{0}{1} = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría 0.

c) Calcular su límite direccional por aquel cambio que consideres óptimo.

Como sabemos, el cambio óptimo en límites direccionales, es aquel que nos deja igualados los grados de los términos del denominador:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \left\{x=my^2\right\} = \lim_{y\to 0} \frac{my^2\cdot y^2}{m^2y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{m\cdot \cancel{y^4}}{\cancel{y^4}(m^2+1)} = \frac{m}{m^2+1}$$

Como depende de m, podemos asegurar que <u>no</u> existe el límite.

7) Comprobar si existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

Comenzamos realizando los límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \{x = my^3\} = \lim_{y\to 0} \frac{my^3\cdot y^3}{m^2y^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{m\cancel{y^6}}{\cancel{y^6}(m^2+1)} = \frac{m}{m^2+1}$$

Como depende de m que es la dirección de acercamiento, entonces no existe el límite.

8) Comprobar la existencia del siguiente límite mediante el cambio de coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \frac{\cancel{\rho^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos\theta+\sin\theta)}_{1}} = \cos\theta\cdot\sin\theta$$

Como el resultado depende de θ que es la dirección de acercamiento, entonces no existe el límite.

9) Calcular el siguiente límite mediante límites iterados:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

- $\displaystyle \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}+y^3}{\cancel{x^2}+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^{\cancel{3}}}{\cancel{y^2}} = \lim_{y\to 0} y = 0$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3+\cancel{y^3}}{x^2+\cancel{y^2}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = 0$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría 0.

10) Calcular los límites iterados del siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3y^2}{x^2+y^2}$$

- $\displaystyle \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}+3y^2}{\cancel{x^2}+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{3y^2}{y^2} = 3$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3+\cancel{3y^2}}{x^2+\cancel{y^2}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = 0$

Como los límites no coinciden entonces no existe el límite.

11) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+m)}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+m)}{\cancel{x}\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Como depende de m entonces no existe el límite.

Por lo tanto: $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

12) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $\vec{f}:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x,y)=\left(x+y^2,\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Como podemos observar la función $\vec{f}(x,y)$ es una función vectorial, ya que su imagen es un vector, en este caso, de dos coordenadas.

Para que una función vectorial tenga límite, debe verificarse que todas sus funciones coordenadas tengan límite.

Vamos a empezar por

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to0}\frac{xmx}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}\longrightarrow\nexists\lim$$

Por lo tanto, como una de las coordenadas no tiene límite, entonces decimos que la función no tiene límite.

13) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{x^2+y^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to0}\frac{x^4+3x^2m^2x^2+2xm^3x^3}{(x^2+m^2x^2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4+3m^2x^4+2m^3x^4}{(x^2(1+m^2))^2}=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^4}(1+3m^2+2m^3)}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2}=\frac{1+3m^2+2m^3}{(1+m^2)^2}$$

No existe el límite porque depende de m.

14) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\{x=my^2\}=\lim_{y\to0}\frac{my^2\cdot y^2}{m^2y^4+y^4}=\lim_{y\to0}\frac{m\cancel{y^4}}{\cancel{y^4}(m^2+1)}=\frac{m}{m^2+1}$$

No existe el límite porque depende de m.

15) ¿Qué tiene que valer el número real k para que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

sea continua?

El número real k, que es $f(0,0)=k$, para que sea continua, deberá valer lo mismo que valga el límite de la función en el punto $(0,0)$, para que casi coincidan y por lo tanto sea continua.

Hagamos por lo tanto el límite de $f(x,y)$ en el punto $P(0,0)$:

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

No existe el límite, pues el resultado depende de m.

Por lo tanto, al no haber límite en $(0,0)$, no existe ningún valor de k, que haga que la función sea continua en $(0,0)$.

16) Estudiar la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8} = \{x = my^4\} = \lim_{y\to 0} \frac{my^4\cdot y^4}{m^2y^8+y^8} = \lim_{y\to 0} \frac{m\cancel{y^8}}{\cancel{y^8}(m^2+1)} = \frac{m}{m^2+1} \quad \nexists \lim \text{ porque depende de } m.$$

17) Estudiar la existencia del siguiente límite, y calcularlo en caso de que exista:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá 0.

2) Límites por cambio de coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^3}\cos^3\theta}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\cos^3\theta = 0$$

3) Límite iterados o reiterados:

- $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3}{x^2+\cancel{y^2}^{\,0}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = 0$

Hemos suspendido las tres pruebas, quedándonos como candidato al límite el valor $L = 0$.

4) Definición de límite:

Nota: Para demostrar el límite por definición debemos partir de $|f(x,y)-L|$ en coordenadas polares y acotarlo superior que depende solo de δ, y a esta expresión la llamaremos ε, quedando así demostrada por definición.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 / |f(x,y)-L| < \varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$$

en coordenadas polares:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 / |\rho\cos^3\theta - 0| < \varepsilon \text{ si } \rho < \delta$$

$$|\rho \cos^3\theta - 0| = |\rho\cos^3\theta| = \rho \cdot |\cos\theta|^3 \leq \rho < \boxed{\delta = \varepsilon}$$

Por lo tanto, existe el límite y vale 0: $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0}$

18) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+m^4x^4}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}(1+m^4)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+m^4)}{1+m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá 0.

2) Límites por cambio de coordendas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^4\theta + \rho^4\sin^4\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^4}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta) = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

- $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}+y^4}{\cancel{x^2}+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^4}}{\cancel{y^2}} = \lim_{y\to 0} y^2 = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4+\cancel{y^4}}{x^2+\cancel{y^2}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

4) Definición de límite:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 / |f(x,y) - 0| < \varepsilon \text{ si } \underbrace{\|(x,y)-(0,0)\|}_{\sqrt{x^2+y^2}} < \delta$$

En coordenadas polares será:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 / |\rho^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 0| < \varepsilon \text{ si } \rho < \delta$$

$$|\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)| = \rho^2|\cos^4\theta+\sin^4\theta| \leq 2\rho^2 < \boxed{2\delta^2 = \varepsilon}$$

Queda demostrada la definición.

Por lo tanto, existe el límite: $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0}$

19) Calcular las derivadas parciales de la siguiente función

$$f(x,y) = x^3 + 3y^2 + xy$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y + x \end{array} \right.}$$

20) Calcular las derivadas parciales de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1+(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{0\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned} \longrightarrow \boxed{\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{cases}}$$

21) Calcular las derivadas parciales de la siguiente función:

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x^2+y^3}\cdot 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x^2+y^3}\cdot 3y^2\end{aligned} \longrightarrow \boxed{\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+y^3}\cdot 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y^3}\cdot 3y^2\end{cases}}$$

22) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{2x^5+2y^3(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5+2y^3\cdot(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^5+4x^5m^5-2m^5x^5}{(x^2+m^2x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^5+4m^5x^5-2m^5x^5}{(x^2(1+m^2))^2} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^5}(2+4m^5-2m^5)}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x(2+4m^5-2m^5)}{(1+m^2)^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá 0.

2) Límites por cambio de coordendas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5+2y^3\cdot(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \left\{\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta\end{aligned}\right\} = \lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho^5\cos^5\theta+4\rho^4\cos^2\theta\rho^3\sin^3\theta-2\rho^5\sin^5\theta}{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)^2} =$$
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho^5\cos^5\theta+4\rho^5\cos^2\theta\sin^3\theta-2\rho^5\sin^5\theta}{(\rho^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1})^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\cancel{e^5}(2\cos^5\theta+4\cos^2\theta\sin^3\theta-2\sin^5\theta)}{\cancel{\rho^4}} =$$
$$\lim_{\rho\to 0}\rho(2\cos^5\theta+4\cos^2\theta\sin^3\theta-2\sin^5\theta) = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá 0.

3) Límites iterados o reiterados

- $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x^5}+\cancel{4x^2y^3}-2y^5}{(\cancel{x^2}+y^2)^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-2y^5}{y^4} = \lim_{y\to 0}(-2y) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^5+\cancel{4x^2y^4}-\cancel{2y^5}}{(x^2\cancel{y^2})^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x\to 0}2x = 0$

Como podemos observar, hemos superado las tres pruebas, por lo tanto nos falta demostrar la definición de límite.

4) Definición de límite

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0/|f(x,y)-L|<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|<\delta$$

En coordenadas polares:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / |f(\rho, \theta) - 0| < \varepsilon \text{ si } \rho < \delta$$

$$|f(\rho,\theta)| = |\rho(2\cos^5\theta + 4\cos^2\theta - 2\sin^5\theta)| = \rho|(2\cos^5\theta + 4\cos^2\theta\sin^3\theta - 2\sin^5\theta)| \leq 8\rho < \boxed{8\delta = \varepsilon}$$

Queda así demostrada la definición.

Por lo tanto, si existe el límite y vale cero $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^5 + 2y^3 \cdot (2x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0}$

23) ¿Qué tiene que valore el número real k para que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ k & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

sea continua? Lo primero que debe ocurrir para que sea continua en $(0,0)$ es que exista el límite. En caso de que así sea, para que sea continua deberemos forzar para que $f(0,0) = k$ coincida con dicho límite. Será así como obtendremos el valor de k.

Estudiamos la existencia del límite de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$:

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot mx}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá 0.

2) Límite por cambio de corrdenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta \cdot \rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{3}}(\cos^2\theta\sin\theta)}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^2\theta \cdot \sin\theta) = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá 0.

3) Límites reiterados o iterados

- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) = 0$
- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) = 0$

Como podemos observar, hemos superado las tres pruebas, por lo tanto nos falta demostrar la definición de límite.

4) Definición de límite:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / |f(x,y) - \overset{\substack{0\\ \|}}{L}| < \varepsilon \text{ si } \| \overset{\substack{\sqrt{x^2+y^2}\\ \|}}{(x,y)} - (0,0)\| < \delta$$

En coordenadas polares, se queda:

$$\forall \epsilon \quad \exists \delta > 0 / |f(\rho,\theta) - 0| < \varepsilon \text{ si } \rho < \delta$$

$$|f(\rho,\theta)| = |\rho(\cos^2\theta \cdot \sin\theta)| = \rho|\cos^2\theta \cdot \sin\theta| \leq \rho \cdot 1 = \rho < \boxed{\delta = \varepsilon}$$

Queda así demostrada la definición.

Por lo tanto podemos asegurar que existe el límite y vale cero, es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0) = k \longrightarrow \boxed{k=0}$$

Condición para que $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$.

24) Decir si es o no diferenciable en el punto $(0,0)$ la función real

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Para comprobar si $f(x,y)$ es diferenciable o no en el punto $P(0,0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si es continua en dicho punto, ya que en caso de no ser continua directamente diríamos que no es diferenciable.

<u>Estudio de la continuidad en $(0,0)$</u>

1) <u>Límites direccionales</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \{y=mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{2xmx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{2m}{1+m^2}$$

Como depende de $m \longrightarrow \nexists \lim$

Como no existe el límite, entonces $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ y por lo tanto podemos asegurar que no es diferenciable en $(0,0)$.

25) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x>0,\ y>0\}$, y comprobar que

$$x\underbrace{D_1f(x,y)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} + y\underbrace{D_2f(x,y)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{1}{2}f(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{\frac{1}{1\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x+y)^2} + y \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x+y)^2} =$$
$$\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}(x+y) - x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \frac{\sqrt{y}}{2}(x+y) - y(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{(x+y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{2}}} =$$
$$\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x+y} = \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x+y} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} = -\frac{1}{2}f(x,y)$$

26) Dada la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x,y) = (\underbrace{x^4+y^3}_{f_1}, \underbrace{x^2y^2-3y^2}_{f_2})$$

formar su matriz jacobiana en el punto (1,1). Comprobar que $\vec{f}$ es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$I(f)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & \quad y \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\[2ex] f_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 4x^3 & 3y^2 \\ \\ 2xy^2 & 2xy^2-6y \end{pmatrix}$$

$$I(1,1)=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Como las funciones coordenada de $f(x,y)$ son C^1 (continuas y con derivadas primeras continuas) por ser polinomios, entonces es diferenciable y su diferencial viene dada por:

$$df(P)(h,k)=I(f)(P)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \longrightarrow df(1,1)(h,k)=I(f)(1,1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h \\ \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4h+3k \\ \\ 2h-4k \end{pmatrix}$$

$$\boxed{df(1,1)(h,k)=(4h+3k,2h-4k)}$$

27) Determinar si la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

es continua.

Como nos pide que estudiemos la continuidad general y no solo en un punto concreto, comenzamos diciendo que:

$\forall(x,y) \longrightarrow f(x,y)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos si es continua en el punto $(0,0)$. Para ello deberemos lo primero comprobar si $\exists \lim$ en el punto $(0,0)$ y en caso de que exista deberá coincidir con $f(0,0)=0$. Estudiamos la existencia del límite de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to0}\frac{x^2mx}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\cancel{3}}m}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\lim_{x\to0}\frac{xm}{1+m^2}=0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá 0.

2) Límites por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ \\ y=\rho\sin\theta \end{array}\right\}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^{\cancel{3}}(\cos^2\theta\cdot\sin\theta)}{\cancel{\rho^2}\underset{\substack{\| \\ 1}}{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}=\lim_{\rho\to0}\rho(\cos^2\theta\cdot\sin\theta)=0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá 0.

3) Límites reiterados o iterados:

- $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=0$

4) Definición de límite:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0/\left|\tfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|<\delta$$

En coordenadas polares:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / |\rho \cos^2\theta \sin\theta| < \varepsilon \text{ si } \rho < \delta$$

$|\rho \cos^2\theta \sin\theta| = \rho \cdot |\cos\theta|^2 \cdot |\sin\theta| \leq \rho < \boxed{\delta = \varepsilon} \longrightarrow$ Queda demostrada la definición.

$|\cos\theta| \leq 1$

$|\sin\theta| \leq 1$

Por lo tanto, existe el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \longrightarrow f(x,y) \text{ es continua en } (0,0)$$

$\boxed{f(x,y) \text{ es continua en todo } \mathbb{R}^2}$

28) Dada la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x,y) = (x\cos(y), x\sin(y), x\cos(y)\sin(y))$$

formar su matriz jacobiana en el punto $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$. Comprobar que $\vec{f}$ es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

Tenemos la función vectorial:

$$f(x,y) = (x\cos(y), x\sin(y), x\cos(y)\sin(y)) \begin{cases} f_1 = x\cos(y) \\ f_2 = x\sin(y) \\ f_3 = x\cos(y)\sin(y) \end{cases}$$

La matriz Jacobiana de f, viene dada por:

$$J(f) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\[2ex] f_2 \\[2ex] f_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x\sin(y) \\ \sin(y) & x\cos(y) \\ \cos(y)\sin(y) & x(-\sin^2(y) + \cos^2(y)) \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{J(f)\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}}$$

Como todas las funciones coordenadas son continuas y con derivadas continuas, entonces podemos asegurar que todas las funciones coordenadas son C^1, por lo tanto la función $\vec{f}(x,y)$ es también C^1 y como es C^1 podemos asegurar que es diferenciable.

Su diferencial, al ser una función vectorial, vendrá dada por:

$$df(P)(h,k) = J(f)(P)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \longrightarrow df\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)(h,k) = J(f)\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi k \\ h \\ -\pi k \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$\boxed{df\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)(h,k) = (-\pi k, h, -\pi k)}$

29) Sabiendo que $f(x,y) = \sin\dfrac{2x+y}{2x-y}$, calcular

$$xD_1 f(x,y) + yD_2 f(x,y).$$

$$E = xD_f(x,y) + yD_2f(x,y) = x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)\cdot\left[\frac{2(2x-y)-2\cdot(2x+y)}{(2x-y)^2}\right] = \cos\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)\left(\frac{-4y}{(2x-y)^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)\cdot\left[\frac{1\cdot(2x-y)+(2x+y)}{(2x-y)^2}\right] = \cos\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)\cdot\left(\frac{4x}{(2x-y)^2}\right)$$

Sustituyendo tenemos que:

$$E = x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\cos\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)\cdot\left(\frac{-4y}{(2x-y)^2}\right) + y\cdot\cos\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)\cdot\left(\frac{4x}{(2x-y)^2}\right) = \cancel{\frac{-4xy}{(2x-y)^2}\cdot\cos\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)} + \cancel{\frac{4xy}{(2x-y)^2}\cdot\cos\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)} = 0 \longrightarrow \boxed{E=0}$$

30) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2+y^2$ en los punto $(0,0)$ y $(1,2)$.

$c = f(x,y) = x^2+y^2$

- $P(0,0)$

  La ecuación de plano tangente viene dada por
  $$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

  $a = 0$

  $b = 0$

  $c = f(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\boxed{z=0}$$

Ecuación del plano tangente en el punto (0,0).

Nota: Si tenemos una superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $z = f(x,y)$ en el punto $P(a,b)$, debemos saber que la ecuación de su plano tangente viene dada por

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

donde $c = f(a,b)$

- $P(1,2)$

  La ecuación del plano tangente viene dada por:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

  $a = 1$

  $b = 2$

  $c = f(1,2) = 5$

  $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$$

  Por lo tanto: $\boxed{z-5 = 2(x-1)+4(y-2)}$

  Ecuación del planto tangente en el punto $(1,2)$

31) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = x^2\tan\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

definida para todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y comprobar que

$$xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) = 2f(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)} \cdot \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 2x\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)} \cdot \frac{2y(x^2+y^2) - 2y \cdot y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}$$

Sustituyendo:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = x\left[2x\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}\right] + y\left[\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}\right] =$$

$$2x^2\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) - \cancel{\frac{2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}} + \cancel{\frac{2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}} = 2 \cdot \left(x^2\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right) =$$

$2f(x,y)$

32) Determinar si la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable.

Como sabemos, antes de estudiar la diferenciabilidad vamos a estudiar la continuidad, ya que en aquellos puntos donde no es continua, diremos directamente que no es diferencial.

- Continuidad:

  $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos ahora si es continua en el punto $(0,0)$:

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}m}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{xm}{1+m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría 0.

2) Límites por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta \cdot \rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \frac{\rho^{\cancel{3}}\cos^2\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\theta\sin\theta$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría 0.

3) Límites iterados o reiterados:

- $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0$

4) Definición de límite:

$$\forall\varepsilon \quad \exists\delta > 0 / \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| - \varepsilon \text{ si } \| \overset{\sqrt{x^2+y^2}}{\overset{\|}{(x,y)}} - (0,0)\| < \delta$$

En coordenadas polares:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / |\rho \cos^2 \theta \sin \theta| < \varepsilon \text{ si } \rho < \delta$$

$|\rho \cos^2 \theta \sin \theta| = \rho \cdot |\cos \theta|^2 \cdot |\sin \theta| \leq \rho < \boxed{\delta = \varepsilon} \longrightarrow$ Queda demostrada la definición.

$|\cos \theta| \leq 1$

$|\sin \theta| \leq 1$

$\boxed{f(x,y) \text{ en continua en todo } \mathbb{R}^2.}$

- Estudiamos ahora la diferenciabilidad de $f(x,y)$:

$\forall (x,y) \neq (0,0)$ es diferenciable por ser un cociente de funciones con denominador distinto de cero.

Veamos ahora si es diferenciable en $(0,0)$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - \cancelto{0}{f(0,0)}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - \cancelto{0}{f(0,0)}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Tenemos que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k}{h^2+k^2}}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \{k = mh\} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot mh}{(h^2+m^2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h\to 0} \frac{mh^3}{(h^2(1+m^2))^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h\to 0} \frac{m\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como depende de m entonces no existe el límite porque depende de la direcicón de acercamiento al punto.

Como no existe el límite entonces no es diferenciable en $(0,0)$.

33) Comprobar que la función $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + yz, xy - xz + 2z^2, xyz)$$

es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^3$ y calcularla en el punto $(3,2,1)$.

Como la función $f(x,y,z)$ tiene como funciones coordenadas $\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \\ f_2(x,y,z) = xy - xz + 2z^2 \\ f_3(x,y,z) = xyz \end{cases}$. Como las funciones son todas C^1 (continuas y con derivadas primeras continuas) entonces podemos asegurar que todas son diferenciables, por lo tanto, como todas las funciones coordenadas son diferenciables entonces la función vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ es diferenciable.

Para calcular la diferencial de una función vectorial, necesitamos calcular su matriz Jacobiana.

$$J(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 2x & 2 & y-2z \\ y-z & x & -x+4z \\ yz & xz & zy \end{pmatrix}$$

$$J(f)(3,2,1) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$df(3,2,1)(h,k,j) = J(f)(3,2,1)\begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6h+k \\ h+3k+j \\ 2h+3k+6j \end{pmatrix}$$

$$\boxed{df(3,2,1)(h,k,j) = [6h+k,\ h+3k+j,\ 2h+3k+6j]}$$

34) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = y \log \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x>0,\ y>0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{\frac{x^3y}{\cancel{x^2+y^2}}} \cdot \frac{3x^2y(x^2+y^2) - 2x\cdot x^3y}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} = y \cdot \frac{3x^4y+3x^2y^3-2x^4y}{x^3y(x^2+y^2)} = y \cdot \frac{x^4y+3x^2y^3}{x^3y(x^2+y^2)} = y \cdot \frac{\cancel{x^2}\cancel{y}(x^2+3y^2)}{\cancel{x^3}\cancel{y}(x^2+y^2)} = \frac{y(x^2+3y^2)}{x(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \log\left(\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right) + \cancel{y} \cdot \frac{1}{\cancel{\frac{x^3 y}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\cancel{x^3}(x^2+y^2) - 2y\cdot \cancel{x^3}y}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} = \log\left(\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right) + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$df(1,1)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)k$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{4}{2} = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{df(1,1)(h,k) = 2h + \log\left(\frac{1}{2}\right)k}$$

35) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \text{ con } x, y \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

a) $x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y^2 \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0.$

Lo que tenemos realmente en este problema es:

$$F(x,y) = f(u)$$
$$u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{tikzcd} & & x \\ F = f \arrow[r] & u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & y \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\cdot\left(\frac{-1}{y^2}\right)$$
$$x^2\cdot\frac{\partial F}{\partial x} + y^2\cdot\frac{\partial F}{\partial y} = x^2\cdot\left[f'(u)\cdot\frac{1}{x^2}\right] + y^2\cdot\left[f'(u)\cdot\left(\frac{-1}{y^2}\right)\right] = f'(u) - f'(u)$$

Se verifica la ecuación.

b) $xy(x+y)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) + x^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + y^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0.$

Calcularemos las derivadas segundas, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u)\cdot\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{\frac{\partial f'(u)}{\partial x}}\cdot\frac{1}{x^2} + f'(u)\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right) = \left(f''(u)\cdot\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x^2} - f'(u)\cdot\frac{2}{x^3} = f''(u)\cdot\frac{1}{x^4} - f'(u)\cdot\frac{2}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'(u)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right) = \boxed{\frac{\partial f'(u)}{\partial y}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) + f'(u)\cdot\frac{2}{y^3} = \left(f''(u)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) + f'(u)\cdot\frac{2}{y^3} = f''(u)\cdot\frac{1}{y^4} + f'(u)\cdot\frac{2}{y^3}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right) = \frac{\partial f'(u)}{\partial x}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) + f'(u)\cdot 0 = \left(f''(u)\cdot\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{x^2y^2}\cdot f''(u)$$
$$xy(x+y)\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \cancel{x}\cancel{y}(x+y)\left(\frac{-1}{x^{\cancel{2}}y^{\cancel{2}}}\right)f''(u) + x^3\left[f''(u)\frac{1}{x^4} + f'(u)\frac{2}{x^3}\right] + y^3\left[f''(u)\frac{1}{y^4} + f'(u)\frac{2}{y^3}\right] =$$
$$\frac{-(x+y)}{xy}f''(u) + \frac{1}{x}f''(u) - \cancel{2f'(u)} + f''(u)\frac{1}{y} + \cancel{2f'(u)} = \left[\frac{-x}{xy} - \frac{y}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right]f''(u) = \left[-\frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right]f''(u) = 0$$

Por lo tanto, se cumple la ecuación.

36) Se consideran las funciones $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y $\vec{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definidas por $\vec{f}(x,y) = (x^2y^4,\ x^2y^3 + 4xy^2)$ y $\vec{g}(x,y) = (x\sin y, y\sin x)$. Sea $\vec{F} = \vec{g}\circ\vec{f}$. Calcular la matriz jacobiana de $\vec{F}$ en el punto $(2,-1)$.

$$g\circ f = F$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$$(2,-1) \to \underset{(4,0)}{\underset{\|}{(2,-1)}}$$

$$J(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 2xy^4 & 4x^2y^3 \\ 3x^2y^3 + 4y^2 & 3x^3y^2 + 8xy \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J(g) = \begin{array}{c} \\ g_1 \\ g_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \sin y & x\cos y \\ y\cos x & \sin x \end{pmatrix} \longrightarrow J(g)(4,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

$$J(F)(2,-1) = F(g)(4,0)\cdot J(f)(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \sin 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 32 \\ -8\sin 4 & 8\sin 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J(F)(2,-1) = \begin{pmatrix} -32 & 32 \\ -8\sin 4 & 8\sin 4 \end{pmatrix}}$$

37) Dada $f(x,y,z)$ se define el gradiente de f como

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right).$$

Dadas las coordenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

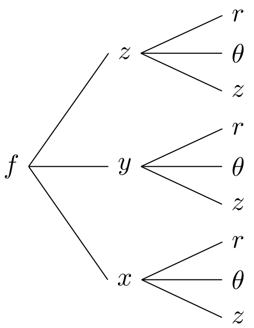
obtener el gradiente de f en estas coordenadas.

Realmente, el cambio de coordenadas cilíndricas, lo interpretamos como:

$x = x(r,\theta,z) = r\cos\theta$

$y = y(r,\theta,z) = r\sin\theta$

$z = z(r,\theta,z) = z$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\cancel{\dfrac{\partial z}{\partial r}} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\cancel{\dfrac{\partial z}{\partial \theta}} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cancel{\dfrac{\partial x}{\partial z}} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cancel{\dfrac{\partial y}{\partial z}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial z} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin\theta) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta \longrightarrow -\frac{\partial f}{\partial \theta} r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z}\cdot 1 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} \cos\theta\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial r} \\[3ex] -r\sin\theta\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Nota Regla de Cramer: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial r} & \sin\theta\\ \frac{\partial f}{\partial \theta} & r\cos\theta\end{vmatrix}}{r}=\frac{\frac{\partial f}{\partial r}r\cos\theta-\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta\right)}{r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\cos\theta & \frac{\partial f}{\partial r}\\ -r\sin\theta & \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{vmatrix}}{r}=\frac{\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}}{r}=\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\boxed{\operatorname{grad}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,\ \sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

38) Sea la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de dicha función en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

- Continuidad:

  $\forall (x,y)\neq(0,0)\to f(x,y)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

  Veamos ahora si es continua en el punto $(0,0)$:

  1) Límites direccionales:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-x^2y}{x^2+y^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-x^2mx}{x^2-m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^3}(1-m)}{\cancel{x^2}(1-m^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-m)}{1+m^2}=0$$

  No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdría 0.

  2) Definición de límite:

  $$f(x,y)=\frac{x^3-x^2y}{x^2+y^2}\longrightarrow f(\rho,\theta)=\frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}=\frac{\cancel{\rho^3}(\cos^3\theta-\cos^2\theta\sin\theta)}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{\parallel\atop 1}}\longrightarrow f(\rho,\theta)=\rho(\cos^3\theta-\cos^2\theta\sin\theta)$$

  $$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0/|f(\rho,\theta)-0|<\varepsilon \text{ si } \rho<\delta$$

  $$|\rho(\cos^3\theta-\cos^2\theta\sin\theta)-0|=\rho|\cos^3\theta-\cos^2\theta\sin\theta|\le2\rho<\boxed{2\delta=\varepsilon}$$

  Queda demostrada la definición.

  Por lo tanto existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)\longrightarrow f(x,y)$ es continua en $(0,0)$. Por lo que $f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

- Diferenciabilidad:

  $\forall(x,y)\neq(0,0)\quad f(x,y)$ es diferenciable por ser un cociente de funciones diferenciables con denominador distinto de cero.

  Veamos ahora si es diferenciable en $(0,0)$. Para ello

  $$¿\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)}{t} = \frac{t}{t} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)}{t} = \frac{0}{t} = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-h^2k}{h^2k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cancel{h^3} - h^2k - \cancel{h^3} - hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-h^2k-hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-h^2k-hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \{k=mh\} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2mh - hm^2h^2}{(h^2+m^2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h^3}(-m-m^2)}{\cancel{h^3}(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-m-m^2}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\nexists$ límite porque depende de $m \longrightarrow f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

39) Calcular el desarrollo de Taylor hasta orden 2 de la función $f(x,y) = e^{x+2y}$ en el punto $P(2,-1)$.

$$T_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)$$

En concreto queremos que $P(a,b) = P(2,-1)$

$$T_2(x,y) = f(2,-1) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)(y+1)\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1)(x-2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2,-1)(x-2)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-1)(y+1)^2\right)$$

$$f(x,y) = e^{x+2y} \longrightarrow (2,-1) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{x+2y} \longrightarrow (2,-1) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+2y} \longrightarrow (2,-1) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4e^{x+2y} \longrightarrow (2,-1) = 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2e^{x+2y} \longrightarrow (2,-1) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 2e^{x+2y} \longrightarrow (2,-1) = 2$$

Sustituyendo tenemos que:

$$T_2(x,y) = 1 + (x-2) + 2(y+1) + \frac{1}{2}\left((x-2)^2 + 2\cdot 2\cdot(x-2)(y+1) + 4(y+1)^2\right)$$
$$\boxed{T_2(x,y) = 1 + (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2(x-2)(y+1) + 2(y+1)^2}$$

40) Calcular el polinomio de Taylor en $(0,0)$ hasta orden 3 de las siguientes funciones:

$f(x,y) = \log(1+x+y)$

Como nos piden el desarrollo de Taylor en orden 3:

$$\begin{aligned} T_3(x,y) =& f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)(x-a)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a,b)(x-a)^2(y-b) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)(y-b)^3\right)\end{aligned}$$

Como en concreto me lo piden en el punto $P(0,0)$, desarrollo de McLaurin:

$$T_2(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)x^2y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)y^3\right)$$

$f(x,y) = \log(1+x+y) \longrightarrow f(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{1+x+y} = (1+x+y)^{-1} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{1+x+y} = (1+x+y)^{-1} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-1)\cdot(1+x+y)^{-2} = \dfrac{-1}{(1+x+y)^2} \longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (-1)\cdot(1+x+y)^{-2} = \dfrac{-1}{(1+x+y)^2} \longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-1)\cdot(1+x+y)^{-2} = \dfrac{-1}{(1+x+y)^2} \longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 2\cdot(1+x+y)^{-3} = \dfrac{2}{(1+x+y)^3} \longrightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 2$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2\cdot(1+x+y)^{-3} = \dfrac{2}{(1+x+y)^3} \longrightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 2$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 2\cdot(1+x+y)^{-3} = \dfrac{2}{(1+x+y)^3} \longrightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 2$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 2\cdot(1+x+y)^{-3} = \dfrac{2}{(1+x+y)^3} \longrightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 2$

Por lo tanto, sustituyendo tenemos que

$$T_3(x,y) = x + y + \frac{1}{2}\left(-x^3 - 2xy - y^2\right) + \frac{1}{6}(2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 2y^3)$$
$$T_3(x,y) = x + y + \frac{1}{2}\left(-x^3 - 2xy - y^2\right) + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$
$$\boxed{T_3(x,y) = (x+y) - \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{3}(x+y)^3}$$

41) Comrpobar que la ecuación $x^2 + xy + y^3 - 11 = 0$ define a y como función implícita de x en un abierto del punto $x = 1$ en el cual toma el valor $y = 2$. Calcular la primera y segunda derivada de dicha función en el punto $x = 1$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^3 - 11$

1) f es C^1 ($f(x,y)$ es continua y con derivadas primeras por ser un polinomio.)

2) $f(1,2) = 1 + 2 + 8 - 11 = 0$

3) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2 \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1 + 12 = 13 \neq 0$

Como se cumplen las tres condiciones del teorema de la funció implícita, entonces podemos asegurar que $\exists u(1)$ (entorno no alrededor del punto $x = 1$) tal que $y = y(x)$ y además $y(1) = 2$.

La ecuación por lo tanto, nos queda de la forma: $x^2 + xy(x) + (y(x))^3 - 11 = 0$

<u>Derivamos la ecuación:</u>

$$2x + y(x) + xy'(x) + 3\,(y(x))^2 \cdot y'(x) = 0 \xrightarrow[y(1)=2]{x=1} 2 + 2 + y'(1) + 12y'(1) = 0 \longrightarrow 4 + 13y'(1) = 0 \longrightarrow \boxed{y'(1) = -\frac{4}{13}}$$

<u>Derivamos otra vez:</u>

$$2 + y'(x) + y'(x) + xy''(x) + 3\left[2\,(y(x))\,y'(x)y'(x) + (y(x))^2 \cdot y''(x)\right] = 0 \longrightarrow 2 - \frac{4}{13} - \frac{4}{13} + 2y''(1) + 3\left[4\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot\left(-\frac{4}{13}\right) + 4y''(1)\right] =$$
$$0 \longrightarrow \frac{18}{13} + y''(1) + \frac{192}{169} + 12y''(1) = 0 \longrightarrow 13y''(1) = \frac{-426}{169} \longrightarrow \boxed{y''(1) = \frac{-426}{2197}}$$

42) Idem para la ecuación $\sin x + \cos y - 1 = 0$ en el punto $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $y = \dfrac{\pi}{2}$. Obtener su polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sin x + \cos y - 1$

1) f es C^1 ($f(x,y)$ es continua y con derivadas primeras continuas).

2) $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 - 1 = 0$

3) $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$

Por el teorema de la función implícita, existe un entorno alrededor de $x = \frac{\pi}{2}$ tal que $y = y(x)$ y además $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\boxed{\sin x + \cos(y(x)) - 1 = 0}$$

Queremos ahora, calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $y = y(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$T_3(x) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{y'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{y''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3$$