Práctica 2 de Señales y Sistemas

Convolución y análisis de sistemas LTI

Francisco Javier Mercader Martínez

Rubén Gil Martínez

1. Convolución de señales discretas

La convolución de dos señales discretas viene dada por la expresión

$$y[n] = h[n] \cdot x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

La convolución de dos señales se puede entender de dos maneras desde el punto de vista analítico:

1) En la primera a cada impulso de la señal de entrada, el sistema responde con la respuesta al impulso ponderada por el valor de la señal en ese momento, así:

$$y[n] = \cdots + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \cdots$$

2) Para la segunda en cada instante de tiempo discreto n la señal de salida $y[n]$ se calcula asumiendo que el eje de tiempos es k, se queda fija la señal de entrada, y se invierte y se desplaza a n la respuesta al impulso, multiplicándose finalmente ambas señales y sumando todos sus valores. De esta manera podemos obtener el resultado:

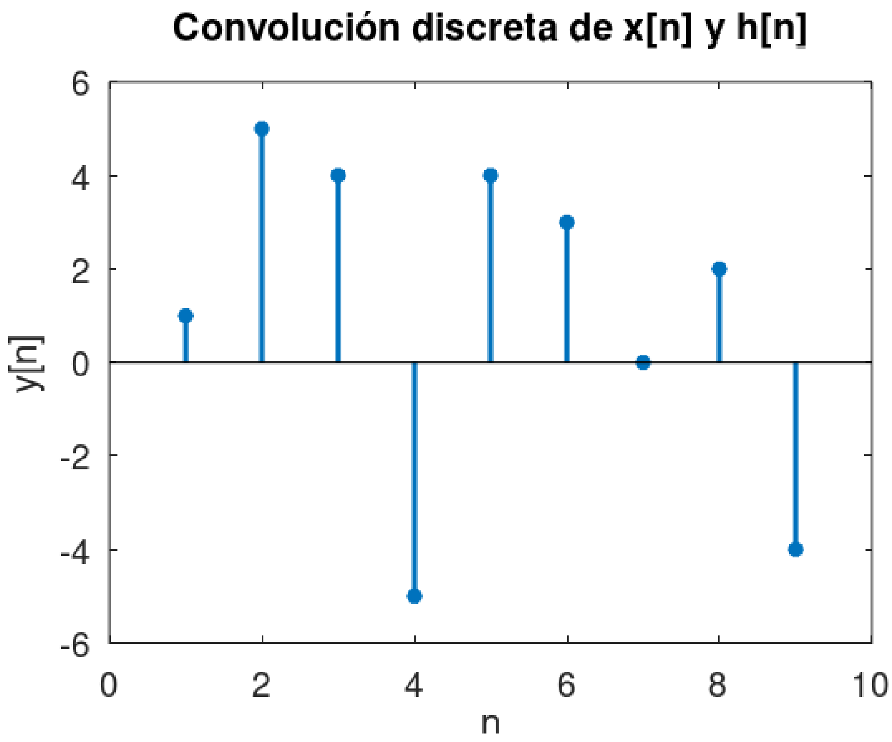
$$\begin{array}{l} \ldots \\ y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-1-k] \\ y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] \\ y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] \\ \ldots \end{array}$$

Cuestiones

- **Calcule previamente de manera gráfica y a mano la convolución de las dos señales casuales $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ y $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$** que definiremos en MATLAB de la siguiente manera.

  - **`x = [1 2 -2];`**
  - **`h = [1 3 0 1 2 1 2];`**

```
x = [1 2 -2];
h = [1 3 0 1 2 1 2];


y = conv(x, h);
```



- **Teniendo en cuneta que la longitud de la secuencia x[n] es N y la de h[n] es M, deduzca una expresión para la longitud de y[n].**

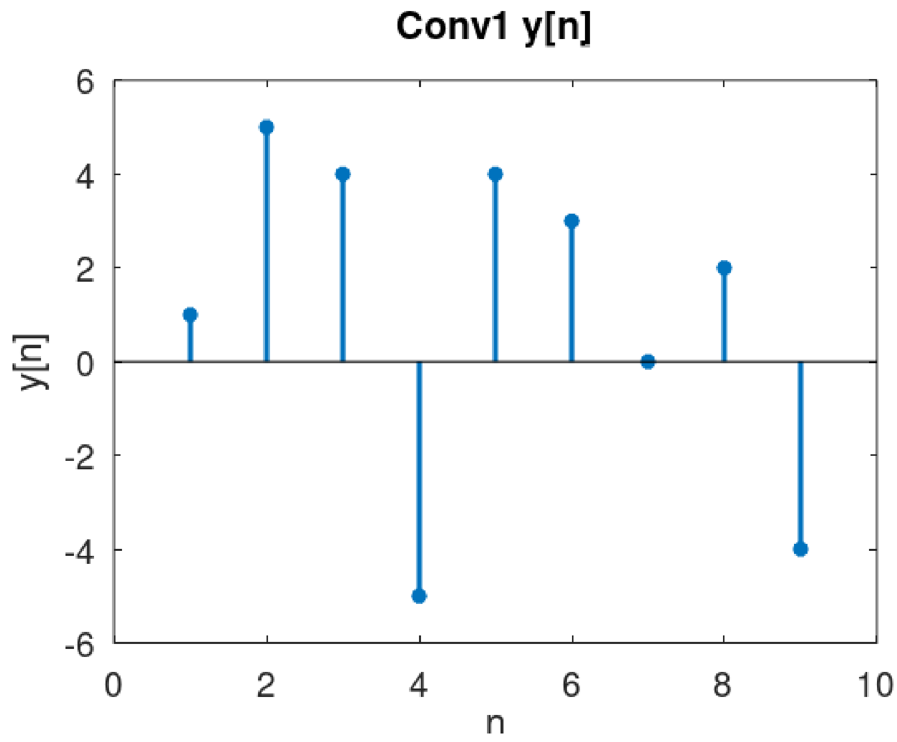
```
longitud_y = length(x) + length(h) - 1;  % = 9
```

- Programa dos funciones MATLAB, denominadas **conv1** y **conv2**, que implementen la convolución de dos señales dsicretas mediante el método 1 y el método 2, explicados anteriormente. Las funciones tendrán el formato **y=conv1(x,h)** y **y=conv2(x,h)**. Puede inicializar la longitud de la señal de salida deducida en el punto anterior al implementear las funciones. Proporcione el código desarrollado.

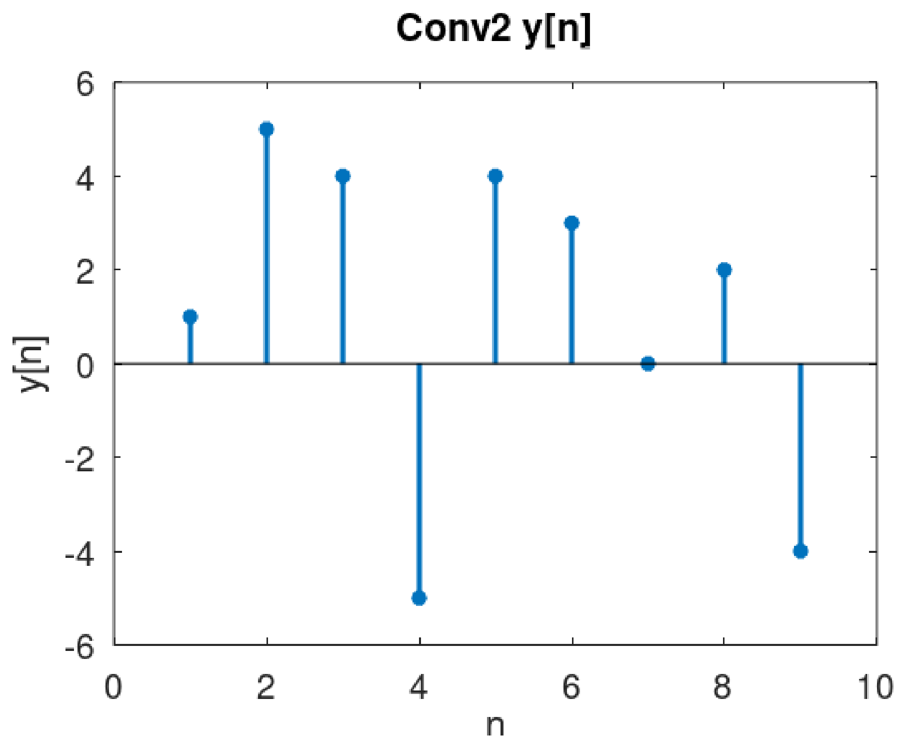
```
function y = conv1(x, h)
  % N es la longitud de la secuencia x
  N = length(x);
  % M es la longitud de la secuencia h
  M = length(h);
  % Inicializa la secuencia de salida y con ceros
  y = zeros(1, N+M-1);
  % Itera sobre cada elemento de la secuencia de salida
  for n = 1:N+M-1
    % Itera sobre los elementos de x y h que se superponen para el elemento
       actual de y
    for k = max(1, n+1-M):min(n, N)
      % Suma el producto de los elementos correspondientes de x y h a la
         secuencia de salida
      y(n) = y(n) + x(k) * h(n-k+1);
    end
  end
```

```
end

function y = conv2d(x, h)
  % Obtén las dimensiones de las matrices de entrada
  [xRows, xCols] = size(x);
  [hRows, hCols] = size(h);
  % Inicializa la matriz de salida
  y = zeros(xRows + hRows - 1, xCols + hCols - 1);
  % Realiza la convolución
  for i = 1:xRows
    for j = 1:xCols
      for m = 1:hRows
        for n = 1:hCols
          y(i+m-1, j+n-1) = y(i+m-1, j+n-1) + x(i, j) * h(m, n);
        end
      end
    end
  end
end

% El objetivo de los bucles es que simulen un sumatorio que mantenga la
% señal "x" fija y que la señal de respuesta al impulso se vaya desplazando
% (iterando) para así ir actualizando los valores de la señal "y"
```

```
y1 = conv1(x,h);

figure(2)
stem(y1, "filled", "LineWidth", 1.5, "MarkerSize", 4);
xlabel('n');
ylabel("y[n]")
title('Conv1 y[n]')
```




```
y2 = conv2d(x, h);

figure(3)
stem(y2, "filled", "LineWidth", 1.5, "MarkerSize", 4);
xlabel('n');
ylabel("y[n]")
title('Conv2 y[n]')
```



- Compruebe el correcto funcionamiento de las funciones empleando las señales $x[n]$ y $h[n]$ generadas en MATLAB previamente. Consulta la ayuda (con el comnado **`help`**) de la función **`conv`** de MATLAB, que implementa la convolución discreta de dos secuencias. El resultado con **`conv`**, **`conv1`** y **`conv2`** ha de ser el mismo con cualquier par de señales de entrada.

```
% Las siguientes funciones recorren todos los elementos de las señales y
% comprueban si sus valores coinciden con valores binarios (1 sí, 0 no).
disp(all(y == y1)); % 1
disp(all(y == y2)); % 1
disp(all(y1 == y2)); % 1
```

2. Respuesta al impulso de un sistema lineal

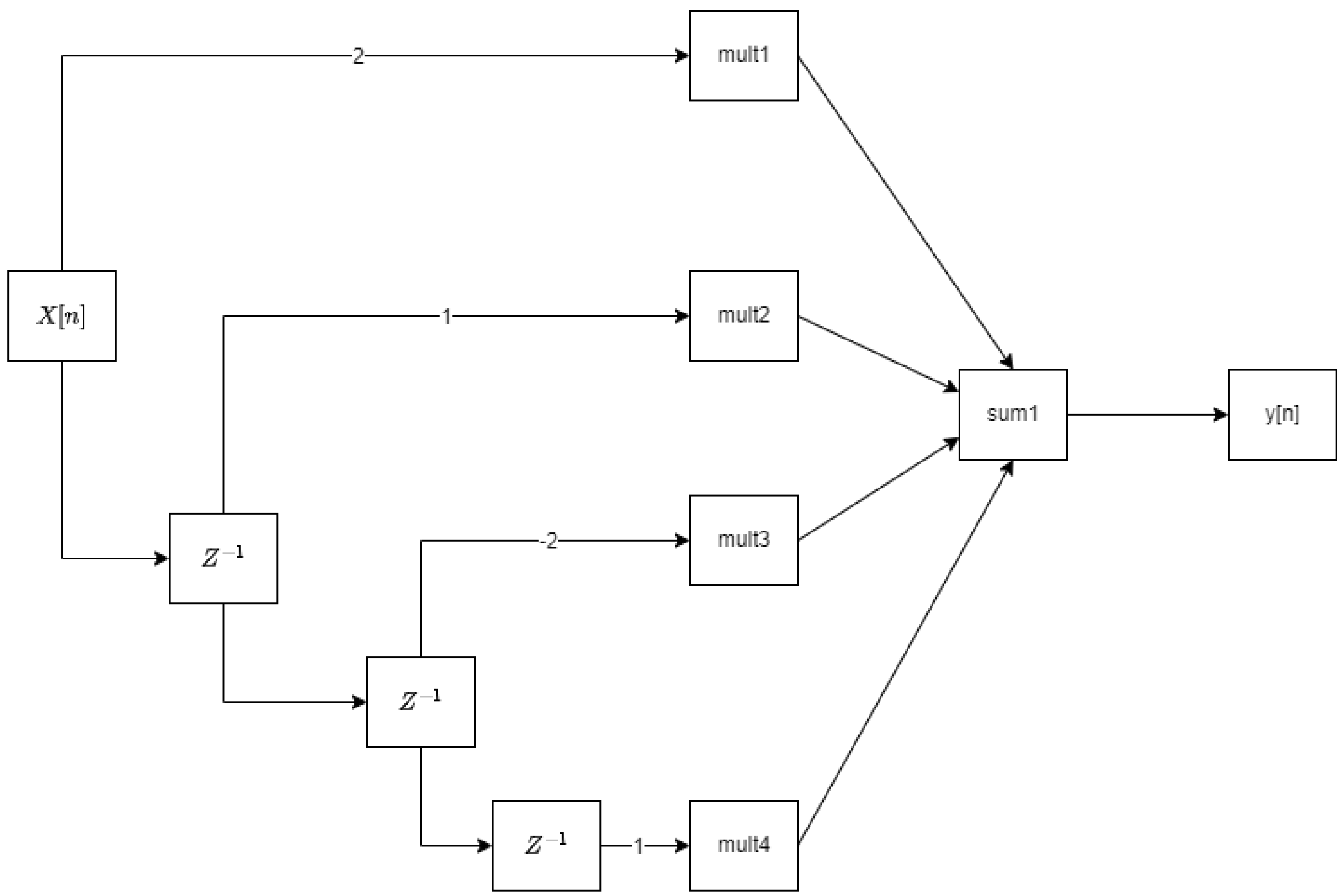
La respuesta al impulso $h[n]$ se emplea para caracterizar el comportamiento de un sistema lineal e invariante (LTI – Linear Time-Invariant). Podremos clasificar el comportamiento de los sistemas LTI atendiendo a la duración finita o infinita de la respuesta al impulso. Por lo tanto, hablaremos respectivamente de sistemas FIR (Finite Impulse Response) o bien de sistemas IIR (Infinite Impulse Response).

Cuestiones

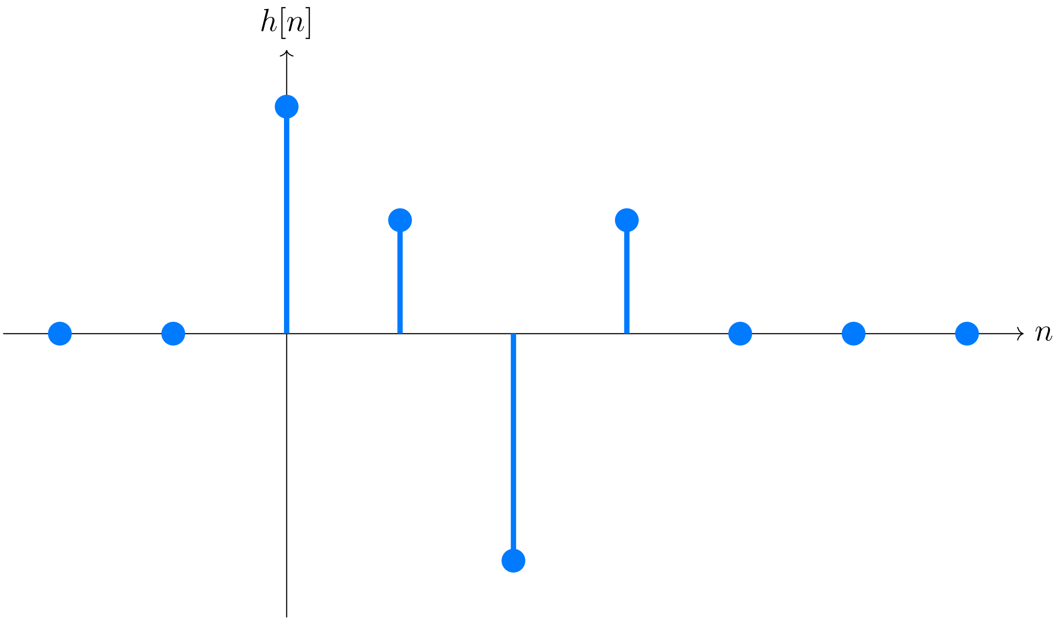
Sistemas FIR

$$y[n] = 2x[n] + x[n-1] - 2x[n-2] + x[n-3]$$

- **Como estudio previo represente el diagrama de bloques (con delays, multiplicadores y sumadores) que caracteriza a este sistema.**



- **Como estudio previo calcule y represente gráficamente a mano la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema dado. ¿Es de duración finita?**



La respuesta al impulso se obtiene al aplicar un impulso unitario (delta de Dirac) a la entrada del sistema. En este caso, si $x[n] = \delta[n]$, entonces:

`h[n]=2*δ[n] - δ[n-1] - 2*δ[n-2] + δ[n-3]`

Por lo tanto, la respuesta al impulso es de duración finita y se extiende desde n=0 hasta n=3.

- **Como estudio calcule a mano la salida del sistema ante la entrada $\mathbf{x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]}$,** (en MATLAB **`x=[1 -1]`**).

Para calcular la salida del sistema ante la entrada dada, habrá que sustituir **`x[n]`** en la ecución **`y[n]`** con los valores de **`x[n]`** que se han proporcionado.

La entrada es **`x[n]=δ[n]-δ[n-1]`**, que en términos de una secuencia de valores es **`x[n] = [1 -1]`**. Esto significa que **`x[0] = 1, x[1] = -1`** y **`x[n] = 0`** para **`n < 0`** y **`n > 1`**.

Calcule la salida con la función **`conv`** (o **`convol1`**, **`convol2`**) en Matlab y verifique que los resultados coinciden con el estudio **previo**

```
x = [1 -1];
h = [2 1 -2 1];

% Calcular la secuencia de y[n] mediante la convolución de x[n] y h[n]
y = conv(x, h);
y1 = conv1(x, h);
y2 = conv2d(x, h);

disp(y) % [2 -1 -3 3 -1]
disp(y1) % [2 -1 -3 3 -1]
```

```
disp(y2) % [2 -1 -3 3 -1]
```

Sistemas IIR

Para un sistema IIR causal definido por la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{4}{5}y[n-1] = x[n]$$

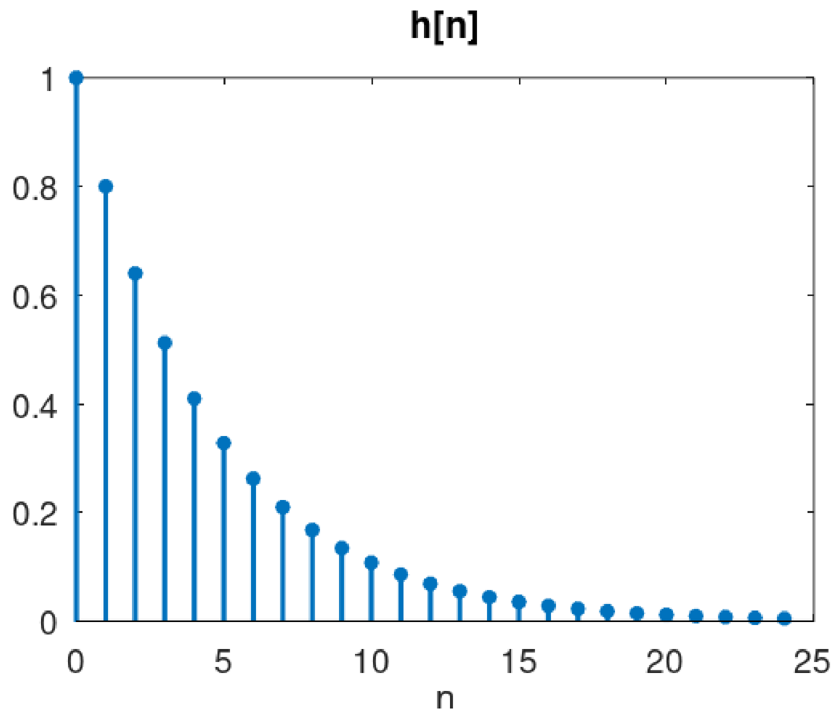
Teniendo en cuenta que se trata de un sistema IIR la respuesta al impulso es de duración infinita. Dado que $h[n]$ es la duración infinita no se podrá emplear la función **conv** de MATLAB para obtener exactamente la salida de este sistema ante cualquier señal de entrada. Para estos casos, MATLAB ofrece la función **filter** con la que podemos calcular la salida del sistema a partir de la entrada y la ecuación en diferencias.

- **Como estudio previo calcule analíticamente la respuesta al impulso del sistema anterior.** Genere en MATLAB la respuesta al impulso mediante la función **filter** y tomando $x[n]$ como **x=[1 zeros(1, 24)]**. Verifique que el resultado teórico y el práctico coinciden.

```
b = [1]; % Coefifientes de x[n]
a = [1 -4/5]; % Coefifientes de y[n]

% Definir la entrada como un impulso
x = [1 zeros(1, 24)];

% Calcular la respuesta al impulso
h = filter(b, a, x)

disp(h)
```

```
h =
1.0000e+00   8.0000e-01   6.4000e-01   5.1200e-01   4.0960e-01   3.2768e-01   2.6214e-01
2.0972e-01   1.6777e-01   1.3422e-01   1.0737e-01   8.5899e-02   6.8719e-02   5.4976e-02
4.3980e-02   3.5184e-02   2.8147e-02   2.2518e-02   1.8014e-02   1.4412e-02   1.1529e-02
9.2234e-03   7.3787e-03   5.9030e-03   4.7224e-03
```

```
% Representación gráfica
figure(4)
stem(n=[0:24], h, "filled", "LineWidth", 1.5, "MarkerSize", 4);
xlabel("n");
title("h[n]")
```



- **Como estudio previo calcule analíticamente la respuesta del sistema ante la siguiente señal de entrada:**

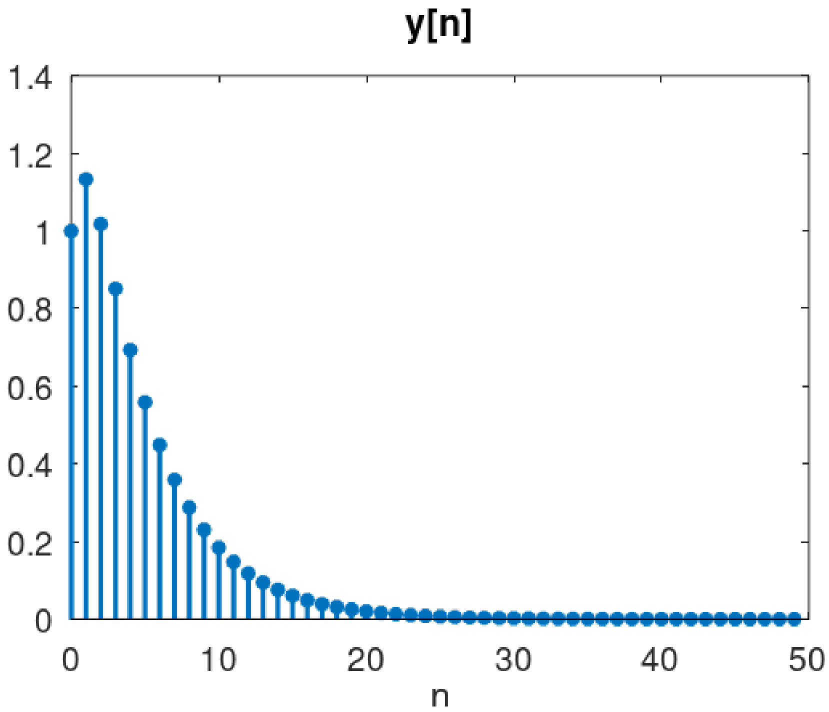
$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Genere en MATLAB la señal $x[n]$ en el intervalo [0:49]. Genere en MATLAB la salida del sistema ante la entrada $x[n]$ empleando de nuevo la función **`filter`**. Compruebe que el resultado práctico coincide con la solución teórica.

```
% Generar la señal de entrada
n = 0:49;
x = (1/3).^n;

% Calcular la respuesta del sistema
y = filter(b, a, x);
```

```
y =
1.0000e+00  1.1333e+00  1.0178e+00  8.5126e-01  6.9335e-01  5.5880e-01  4.4841e-01
3.5919e-01  2.8750e-01  2.3005e-01  1.8406e-01  1.4725e-01  1.1780e-01  9.4243e-02
7.5395e-02  6.0316e-02  4.8253e-02  3.8602e-02  3.0882e-02  2.4705e-02  1.9764e-02
1.5811e-02  1.2649e-02  1.0119e-02  8.0955e-03  6.4764e-03  5.1811e-03  4.1449e-03
3.3159e-03  2.6527e-03  2.1222e-03  1.6977e-03  1.3582e-03  1.0866e-03  8.6925e-04
6.9540e-04  5.5632e-04  4.4505e-04  3.5604e-04  2.8483e-04  2.2787e-04  1.8229e-04
1.4584e-04  1.1667e-04  9.3335e-05  7.4668e-05  5.9734e-05  4.7787e-05  3.8230e-05
3.0584e-05
```

```
% Representación gráfica
figure(5)
stem(n, y, "filled", "LineWidth", 1.5, "MarkerSize", 4);
xlabel("n");
title("y[n]")
```



- Repita el proceso anterior, esta vez para la siguiente señal de entrada

$$x[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$$

y verifique que la salida, tanto **teórica** como práctica, es

$$y[n] = (n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$$

```
% Generar la señal de entrada
x = (4/5).^n;

% Calcular la respuesta del sistema
y = filter(b, a, x);
```

```
y =
1.0000e+00   1.6000e+00   1.9200e+00   2.0480e+00   2.0480e+00   1.9661e+00   1.8350e+00
1.6777e+00   1.5099e+00   1.3422e+00   1.1811e+00   1.0308e+00   8.9335e-01   7.6966e-01
6.5971e-01   5.6295e-01   4.7851e-01   4.0532e-01   3.4227e-01   2.8823e-01   2.4211e-01
2.0291e-01   1.6971e-01   1.4167e-01   1.1806e-01   9.8225e-02   8.1602e-02   6.7700e-02
```

```
5.6094e-02   4.6423e-02   3.8376e-02   3.1691e-02   2.6145e-02   2.1550e-02   1.7747e-02
1.4603e-02   1.2007e-02   9.8654e-03   8.1000e-03   6.6461e-03   5.4498e-03   4.4662e-03
3.6580e-03   2.9945e-03   2.4500e-03   2.0036e-03   1.6377e-03   1.3380e-03   1.0927e-03
8.9203e-04
```

```
% Representación gráfica
figure(6)
stem(n, y, "filled", "LineWidth", 1.5, "MarkerSize", 4);
xlabel("n");
title("y[n]")
```