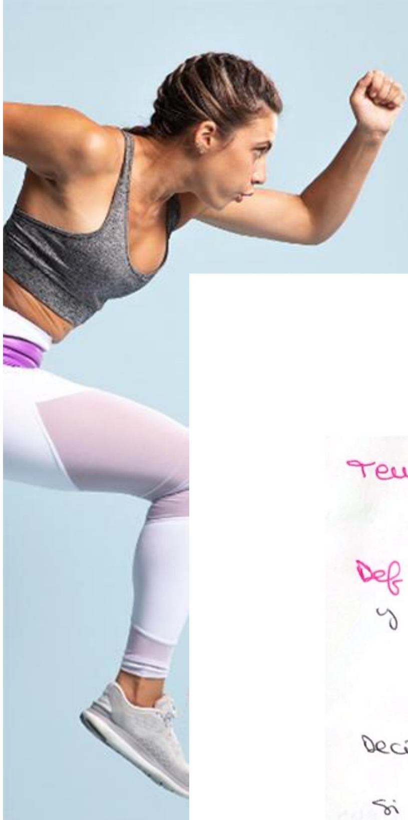

DECATHLON

yo cuando me entero que ya han subido los apuntes a wuolah

Tema 6. Series

6.1 Series numéricas

Def. Una serie numérica es la suma infinita de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se denota

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ , o bien } \sum a_n \text{ , o bien } (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots)$$

Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si $\exists \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = S$

si $\nexists$ el lim, es divergente.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie se llama sucesión de sumas parciales a

$$\left.\begin{matrix} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \end{matrix}\right\} \cdots \to S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Teorema 1. Criterio del cociente (o de D'Alembert)

Suponer que $a_n > 0 \to$ (serie de términos positivos)

y sea $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \begin{cases} \text{si } L < 1 \to \sum a_n \text{ converge} \\ \text{si } L > 1 \to \sum a_n \text{ diverge} \\ \text{si } L = 1 \to \text{duda.} \end{cases}$

Teorema 2. Criterio de la raíz (o de Cauchy)

Suponer que $a_n \geq 0$ y sea

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} \to \begin{cases} \text{si } L < 1 \to a_n \text{ converge} \\ \text{si } L > 1 \to a_n \text{ diverge} \\ \text{si } L = 1 \to \text{duda.} \end{cases}$$

Ejemplos.

① $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \to$ difícil de calcular

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} = L < 1 \to \text{converge}$$

② $\sum n \cdot 2^{-n} \to \sqrt[n]{a_n} = (n \cdot 2^{-n})^{1/n} = n^{1/n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \to$ converge

($\lim n^{1/n} = 1$)

WUOLAH

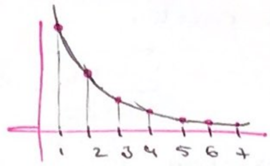
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Teorema 3. Criterio integral

Recordar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S si $\exists \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{N=1}^{N} a_n = S$

Suponer que $a_n = f(n)$, donde f es decreciente y positiva en $[1,+\infty)$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$



Además, se tiene la cota de error,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_n\right| = \left|\sum_{n=N-1}^{\infty} a_n\right| < \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

Demostración. Como $f(x)$ es decreciente, si $x \in [n, n+1] \rightarrow \underset{a_{n+1}}{f(n+1)} \leq f(x) < \underset{a_n}{f(n)}$

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

'$\rightarrow$' si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_1 a_n < \infty$

'$\leftarrow$' si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

$$\sum_1^{\infty} a_n < 1$$

ejemplo 1

series armónicas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\alpha > 0$ Notar que $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}} = f(n)$

donde $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ es posit y decrec. en $[1,\infty)$

Por el crit. integral $\rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ conv $\leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} < \infty \leftrightarrow \alpha > 1$

ejemplo $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots = +\infty$

2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ ¿conv o div?

$a_n = f(n)$ donde $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ es decre. y posit. en $[2,\infty)$

$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \log n} < \infty \leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x} < \infty \quad \Rightarrow \sum_2^{\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty$$

$\log x = t$

$\frac{dx}{x} = dt$

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \log t \Big]_{\log 2}^{+\infty} = +\infty$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Si te ha dado por el Crossfit ... Entra aquí anda...

6.2 Series de términos positivos y negativos

Ejemplo. Sabemos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=+\infty$$

pero $\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2$

caso especial del polinomio de Taylor de $f(x)=\ln(1+x)$

$$P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n}$$

$$\xrightarrow{x=1} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln(1+x)=\ln 2$$

Teorema 1. Criterio de Leibniz

Suponer que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$

cumple ① $a_n>0$ y decreciente
② $\lim a_n=0$ $\Big\} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ converge

Además, $|S_N-S|\leq a_{N+1}\rightarrow$ cota del error

Ejemplo. $\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ¿conv o div?

Aquí, $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, posit. decreci. y $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\sqrt{\infty}}=0$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge $\qquad$ ¿Cuántos términos para $|S-\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}|<10^{-4}$?

Sabemos que $|S-\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}|\leq a_{N+1}=\frac{1}{\sqrt{N+1}}<10^{-4}\leftrightarrow$

$\leftrightarrow 10^4<\sqrt{N+1}\leftrightarrow 10^8<N+1\leftrightarrow N>10^8-1\simeq 100$ millones.

Def. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ se dice <u>absolutamente convergente</u> si

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$$

Teorema 2.

Si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge

Nota: Si $\sum|a_n|<\infty\rightarrow$ todas sus reordenaciones convergen, es decir,

$\exists\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=S$ $\forall$ permutación $\sigma:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Si te ha dado por el Crossfit ... Entra aquí anda...