WUOLAH

Numeros-reales.pdf

Jorge_Ballesta

Cálculo I

1º Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos

Facultad de Informática
Universidad de Murcia

NATURALES

naturales

Denotaremos dicho conjunto como $\mathbb{N}$

PROPIEDADES:

1. Es infinito. Su cardinal es el infinito "más pequeño". Un conjunto para el que existe una biyección con el de los números naturales recibe el nombre de conjunto numerable

2. Todo subconjunto $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo. En esta propiedad, se basa el "Principio de Inducción"

P. INDUCCIÓN

Supongamos que de una determinada propiedad $P(n)$ en la cual interviene un número genérico n, si:

1. La propiedad es cierta para $n=1$

2. Se supone que la propiedad es cierta para n (hipótesis de inducción). Se deduce que $P(n+1)$ es cierta

Entonces, la propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$

Ej Establecer la igualdad $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(1)$ $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$; $1=1$ es cierto. Nuestra H. I es cierta para n. Por tanto, se deduce que la propiedad satisface a $n+1$

$P(n+1)$ $1+2+\cdots+n+n+1 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$;

$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+n+1 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} \rightarrow$ es cierto

$(n^2+n)+(2n+2) = n^2+2n+n+2$

$a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}$ $a \neq 1$, $n \geq 1$

P(1) $a = \frac{a-a^2}{1-a} = \frac{a\cdot(\cancel{1-a})}{(\cancel{1-a})}$ es cierto

Suponiendo que la propiedad se cumple para n, se deduce mediante la H I que también satisface a n+1

P(n+1) $a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1} = \frac{a-a^{n+2}}{1-a}$

$\frac{a-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{a-a^{n+2}}{1-a}$; $\frac{a-a^{n+1}+(1-a)\cdot a^{n+1}}{1-a} = \frac{a-a^{n+2}}{1-a}$

$a - \cancel{a^{n+1}} + \cancel{a^{n+1}} - a\cdot a^n\cdot a$; $\frac{a - a^n\cdot a\cdot a}{1-a} = \frac{a-a^n\cdot a\cdot a}{1-a}$

Principio de inducción - Demostración de desigualdades

$(1+x)^n \geq 1+nx$ P(1) $1+x \geq 1+x$ es cierto

P(n+1) $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot x$

$(1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+nx)\cdot(1+x) \geq 1+(n+1)\cdot x$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2 \geq 1+nx+x$ ✓

$4n < n^2 - 7$; $n \geq 6$ P(6) $24 < 36-7$; $24 < 29$

P(n+1) $4(n+1) < (n+1)^2 - 7$

$4n+4 < n^2 - 7 + 3 + 1 + 2k - 2k < (k+1)^2 - 7$

$4n+4 < n^2 + 2k + 1 - 7 + 3 - 2k < (k+1)^2 - 7$

$4n+4 < (n+1)^2 - 7 - 2n + 3 < (k+1)^2 - 7$

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado $B \subseteq A$
$a \in A$

a es **cota superior** de B si $b \leq a$ para todo $b \in B$ ("cualquier elemento igual o mayor que $b \in B$

a es **cota inferior** de B si $a \leq b$ para todo $b \in B$

"cota superior más pequeña"

a es el **supremo** de B si:

a es **cota superior** de B

Si a' es otra **cota superior** de B, entonces $a \leq a'$

cota inferior más grande

a es el **ínfimo** de B si:

a es **cota inferior** de B

Si a' es otra **cota superior** de B entonces $a' \leq a$

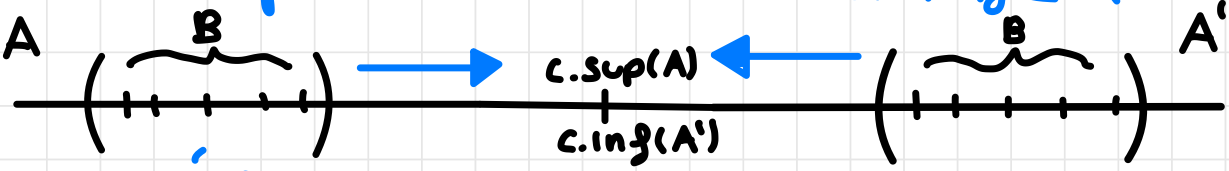
Sea A un conjunto ordenado $B \subseteq A$, $b \in B$

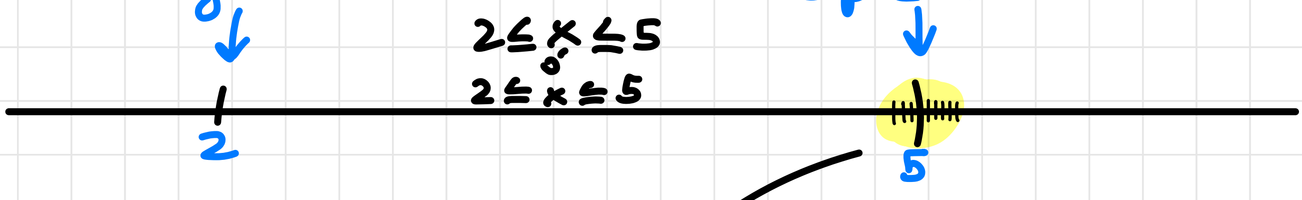
b es el **máximo** de B si no existe $b' \in B$ con $b \leq b'$ y $b \neq b'$

b es el **mínimo** de B si no existe $b' \in B$ con $b' \leq b$ y $b \neq b'$

Gráficamente

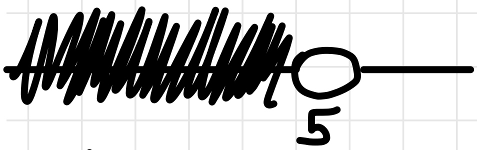
Cota superior → c.sup(A) ← **Cota inferior**



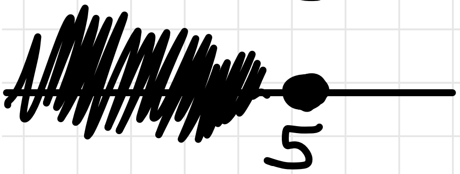


Máximo

max = supremo → supremo = máximo



$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\}$ $\nexists$ max A y $\exists$ Sup(A) = 5



$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 5\}$ $\exists$ max A y $\exists$ Sup(A) = 5

Mínimo

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 5\}$ $\nexists$ min(A) y $\exists$ inf(A) = 5

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 5\}$ $\exists$ min(A) y $\exists$ inf(A) = 5

En el momento que existe un máximo, todos los máximos son supremos y el supremo es el más pequeño de las cotas superiores

VALOR ABSOLUTO

$$|x| = \max\{-x, x\}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x-y| \geq |x| - |y|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x^{-1}| = |x|^{-1}$
- $||x| - |y|| \leq |x-y|$

FUNCIONES

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es:

- *par si $f(x) = f(-x)$ para cada $x \in I$.*
- *impar si $f(x) = -f(-x)$ para cada $x \in I$.*
- *creciente si para $x < y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.*
- *estrictamente creciente si para $x <$ entonces $f(x) < f(y)$.*
- *decreciente si para $x < y$ entonces $f(x) \geq f(y)$.*
- *estrictamente decreciente si para $x < y$ entonces $f(x) > f(y)$.*

Proposición (Propiedades) $f(x) = x^n$

- Si $n > 0$ entonces $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$.
- Si $n = 0$, $x^0 = 1$.
- Si $n < 0$ entonces $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$.
- $(xy)^n = x^n \cdot y^n$.
- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.
- $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.
- Si $n > 0$, entonces x^n es monótona creciente en $(0, +\infty)$.
- Si $n < 0$, x^n es monótona decreciente en $(0, -\infty)$.

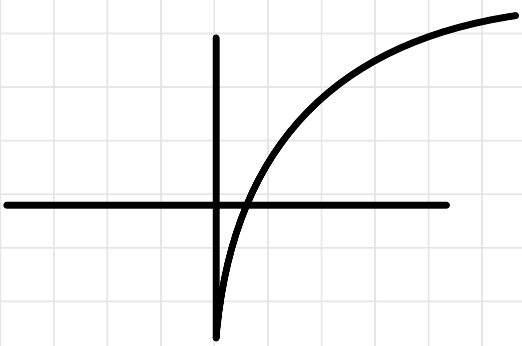
Proposición (Propiedades) $f(x) = a^x$

- Si $a = 1$, la función es constantemente igual a 1.
- $a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y$, $a^0 = 1$.
- Si $x < y$ y $a > 1$, entonces $a^x < a^y$.
- Si $x < y$ y $0 < a < 1$, entonces $a^y < a^x$.
- Si $a > 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
- Si $0 < a < 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

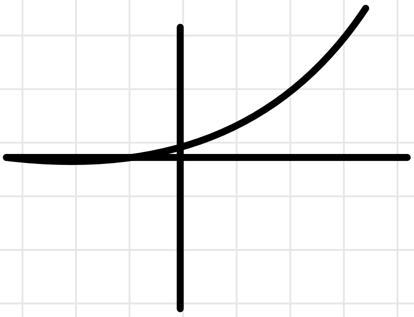
Proposición (Propiedades) $f(x) = \log_a(x)$

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- $\log_a x^n = n \log_a(x)$.
- Si $a > 1$, y $x < y$ entonces $\log_a(x) < \log_a(y)$.
- Si $0 < a < 1$ y $x < y$ entonces $\log_a(x) > \log_a(y)$.
- Si $b > 0$, entonces $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

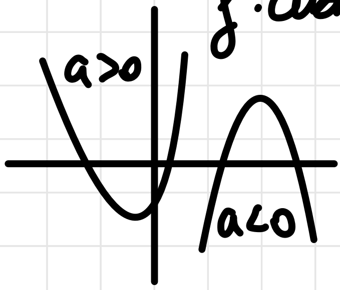
$f(x) = \log a$



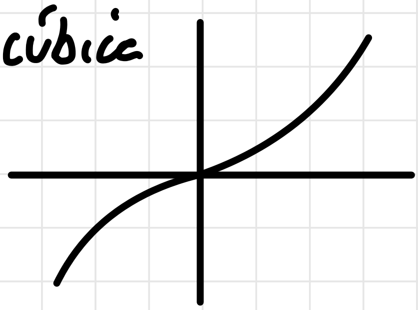
$f(x) = e^x$



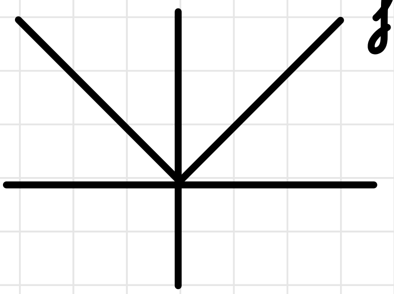
f. cuadrática



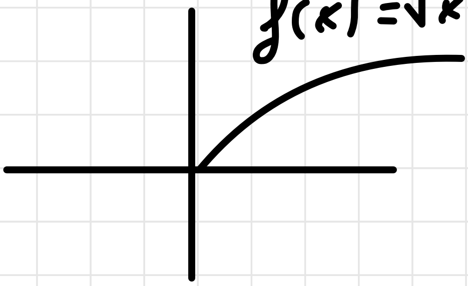
f. cúbica



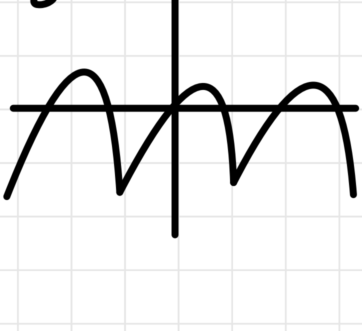
$f(x) = |x|$



$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \text{sen}(x)$



$f(x) = \cos(x)$