Sucesiones.pdf

Jorge_Ballesta

Cálculo I

1º Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos

Facultad de Informática
Universidad de Murcia

concepto

Es una aplicación definida de los números naturales empezando por uno $\mathbb{N}\{1,2,3,\ldots\}$ en $\mathbb{R}$. Así, cada número natural, va a tener una imagen que denotaremos "a_n" donde n, es el término $\mathbb{N}$ en el que estamos

$$\{1,2,3,\ldots\} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \quad n \longrightarrow a_n$$

Podemos definir una sucesión

- $a_n = n \cdot K$ (en función de n)
- $a_n = a_{n-1} \cdot K ; n>1$ (sucesión recurrente)
- $a_n =$ nº pares (sucesión definida por una propiedad)

$a_n = 2 \cdot a_{n-1} \; \forall n \in \mathbb{N} \; n>1$

$\updownarrow$

$a_{n+1} = 2 \cdot a_n \; \forall n \in \mathbb{N} \; n>0$

dos formas de expresarlas

monotonía

Monótona creciente o creciente $\quad a_{n+1} \geq a_n$

Monótona decreciente o decreciente $\quad a_{n+1} \leq a_n$

Estrictamente creciente $\quad a_{n+1} > a_n$

Estrictamente decreciente $\quad a_{n+1} < a_n$

ACOTACION

↑ a_n acotada superiormente si $\exists K \in \mathbb{R} / a_n \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$ (K: cota superior)

↓ a_n acotada inferiormente si $\exists K \in \mathbb{R} / a_n \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$ (K: cota inferior)

↕ a_n acotada si esta acotada inferiormente y superiormente

a_n es convergente:

↑↑ a_n es creciente y está acotada superiormente

↓↓ a_n es decreciente y está acotada inferiormente

a_n es divergente: $\rightarrow \pm\infty$

↑ a_n es creciente y no está acotada superiormente

↓ a_n es decreciente y no está acotada inferiormente

Ejemplos

$a_n = (-1)^n$ $\quad \underset{a_1}{-1}, \underset{a_2}{1}, \underset{a_3}{-1}, \underset{a_4}{1}, \dots$

a_n es una sucesión oscilante

Es decir, no tiene límite finito ni infinito

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \nexists$; oscila $\langle -1, 1 \rangle \rightarrow$ denotación

1. $a_n = n$; $[1, 2, 3, \dots]$

Estrictamente y monótona creciente
Acotada inferiormente $(K \leq 1)$
} divergente $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\right)$

2. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots\right]$

Estrictamente y monótona decreciente
Acotada $\longrightarrow (0 \leq a_n \leq 1)$
} Convergente

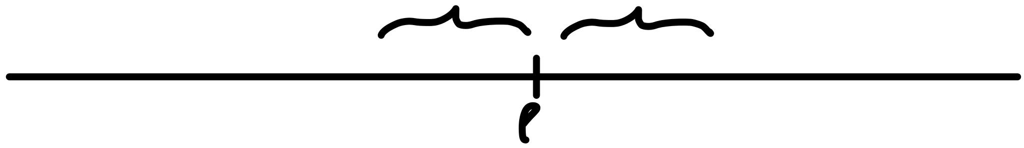
LIMITES

Definición:

Una sucesión $(a_n)_n$ de números reales tiene por límite al número $\ell \in \mathbb{R}$ cuando para cada número real positivo *$\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0* $\in \mathbb{N}$ tq si $n \geq n_0$ entonces $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

$d|(a,b)|$

* ε = distancia

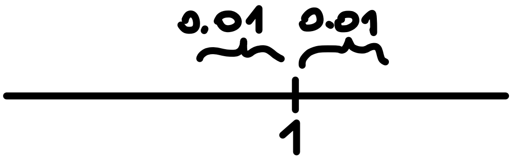


* n_0 = un término tal que a partir de este término, todos los terminos son más próximos a "a" que ε

Por tanto a_{n_0+1}, a_{n_0+2} están dentro de ε y cada vez más próximo a "a".

Ejemplo

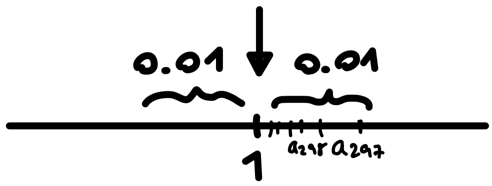
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+4} = 1 = a \quad ¿\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0 \; |a_n - 1| < \underset{\varepsilon}{0.01}$$



$$d(a,b) = d|b-a|$$

$$d\left|\frac{n+1}{n+4} - \frac{1}{1}\right| = d\left|\frac{n+1-n-4}{n+4}\right|$$

$$= \left|\frac{-3}{n+4}\right| = \frac{3}{n+4} < 0.01$$



$$\frac{3}{0.01} < (n+4)$$

$n_0 = 297 \quad 300 < n+4 \;;\; 296 < n$

Las sucesiones que tienen límite finito en l, se les llama sucesiones que convergen en l

Las sucesiones que tienen límite infinito, se les llama sucesiones que divergen hacia $\pm\infty$

Si no presenta límite finito o infinito => oscilante

Propiedades

1. La suma de dos sucesiones convergentes = otra sucesión convergente

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

2. La resta de dos sucesiones convergentes = otra sucesión convergente

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

3. El producto de dos sucesiones convergentes = otra sucesión convergente

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

4. El producto de un escalar por una sucesión convergente

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

5. El cociente de dos sucesiones convergentes = otra sucesión convergente

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Dos sucesiones a_n y b_n son equivalentes si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

INFINITESIMOS

Se llama infinitésimo a toda sucesión cuyo límite es cero

- $\log(1+a_n) \equiv a_n$
- $\operatorname{sen}(a_n) \equiv a_n$
- $\tan(a_n) \equiv a_n$
- $\operatorname{arc\,sen}(a_n) \equiv a_n$
- $\arctan(a_n) \equiv a_n$
- $1-\cos(a_n) \equiv \frac{a^2{}_n}{2}$
- $K^{a_n} - 1 \equiv a_n \log(K)$
- $e^{a_n} - 1 \equiv a_n$
- $(1+a_n)^{\alpha} - 1 \equiv \alpha \cdot a_n$

INFINITOS EQUIVALENTES

- $a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p \equiv a_0 n^p \quad p \in \mathbb{N}$
- $\log(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p) \equiv \log(n^p) \quad p \in \mathbb{N}$
- $n! \equiv e^{-n} n^n \sqrt{2\pi \cdot n}$ (Fórmula de Stirlings)

P. Sustitución: El límite de una sucesión no se altera al sustituir uno de sus factores o divisores por otro " " que sea equivalente a su infinitésimo

Polinomios

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} +\infty & \text{si la } n \text{ de mayor grado es positiva} \\ -\infty & \text{si la } n \text{ de mayor grado es negativa} \\ a & \text{si } a_n = a \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Raíces

$$a_n = \sqrt[m]{b_n} \begin{cases} m \text{ par} & n \text{ debe ser positivo} = +\infty \\ m \text{ impar} & \text{y } n \text{ de mayor grado es negativo} = -\infty \\ & \text{es positivo} = +\infty \end{cases}$$

Cocientes

$\dfrac{a_n}{b_n}$ donde a_n y b_n son polinomios

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^4+n^3-5}{4n^4+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2n^4}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} - \frac{5}{n^4}}{\frac{4n^4}{n^4} + \frac{2n}{n^4}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{n^3}{n^4} \to 0 \qquad \frac{5}{n^4} \to 0 \qquad \frac{2n}{n^4} \to 0$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ si $k>0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0}{3} = 0$$

El signo del infinito depende de los signos de la n de mayor grado del numerador y la del denominador por separado ↓

$$\lim_{n\to\infty} \frac{+2n^5+3n-1}{-n^2+1} = \frac{2}{0} = \pm\infty \,? = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n}}{\sqrt{n^4-5n}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2]{\frac{\sqrt[3]{n^3+2n}}{n^3}}}{\sqrt[2]{\frac{\sqrt[3]{n^4-5n}}{n^3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{\frac{n^8}{n^9}}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Potencias

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = ?$$

Caso 1

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

Caso 2

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \end{array} \right\} a^\infty \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & a > 1 \\ \text{IND} & a = 1 \ ;\ 1^\infty \\ 0 & -1 < a < 1 \\ \nexists & a \leq -1 \end{array} \right.$$

Caso 3

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \end{array} \right\} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^{b_n} \ ;\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\infty}$$

$$\downarrow$$

$$\lim -b_n = +\infty$$

indeterminación

Indeterminación 1^∞

Sabemos que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim b_n = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (1+a_n-1)^{b_n} = \left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}\cdot a_n-1\cdot b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{b_n\cdot(a_n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{2n+1} = 1^\infty \text{ IND}$$

$$e^{\lim_{n\to\infty}(2n+1)\cdot\left(\frac{n^2+1}{n^2+5}-1\right)}$$

$$e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{n^2+5}\cdot(2n+1)} = \frac{-8n-4}{n^2+5} = \frac{0}{1} = 0 \quad e^0 = 1$$

Indeterminación $\infty - \infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \infty - \infty \text{ IND}$$

Caso 1 (m.c.m)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} - \frac{n^2+2}{n+3} \overset{m.c.m}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\cdot(n^2+1) - ((n+1)\cdot(n^2+2))}{n^2+4n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+3n^2+3-(n^3+2n+n^2+2)}{n^2+4n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+1}{n^2+4n+3} = 2$$

Caso 2 $(\sqrt{a_n} - b_n) \to$ Conjugado

$$\lim_{n\to\infty} (\underset{\infty}{\sqrt{n^2+n}} \underset{-\infty}{-n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Caso 3 $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \to$ conjugado

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\cdot(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} = \frac{2}{2n} = \frac{0}{2} = 0$$

CRITERIOS

Stolz

• Sean a_n y b_n dos sucesiones reales, siendo b_n monótona (creciente o decreciente) que cumple:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{; ó } \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

Podemos aplicar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

Ejemplos

1 $\lim_{n\to\infty} \frac{2^3+4^3+\dots+(2n)^3}{(2n+1)^4}$ $a_n \to +\infty$ $b_n \to +\infty$ = caso 2 => aplicamos stolz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^3}+\cancel{4^3}+\cancel{\dots}+\cancel{(2n)^3}+(2n+1)^3 - \cancel{2^3}+\cancel{4^3}+\cancel{\dots}+\cancel{(2n)^3}}{\underbrace{[2(n+1)+1]^4}_{\text{b. Newton}} - (2n+1)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\text{b. Newton}}{(2(n+1))^3}}{64n^3+192n^2+208n+80}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+24n^2+24n+8}{64n^3+\dots\ \dots} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^2+6^2+\dots+(3n)^2}{n^3+1}$ $a_n \to \infty$ $b_n \to \infty$ monoton crecien aplicamos stolz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^2}+\cancel{6^2}+\cancel{\dots}+\cancel{(3n)^2}+\overset{\text{b. Newton}}{(3(n+1))^2} - \cancel{3^2}+\cancel{6^2}+\cancel{\dots}+\cancel{(3n)^2}}{\underset{\text{b. Newton}}{(n+1)^3}+1 - n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+9+18n}{\cancel{n^3}+3n^2+3n\cancel{+1}-\cancel{n^3}\cancel{+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+18n+9}{3n^2+3n} = \frac{9}{3} = 3$$

Media Aritmética

Si a_n es una sucesión convergente de números reales la sucesión de sus medias converge y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

*El recíproco, no es cierto

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)}{3n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln\left(\frac{7}{9}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)}{3n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln\left(\frac{7}{9}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n^2-1}{2n^2+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \ln(1) = \frac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

Media Geométrica

Si a_n es una sucesión convergente de números reales estrictamente positivos, la sucesión de sus medias geométricas también converge:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Ejemplos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4}{15} \cdot \frac{7}{30} \cdot \frac{12}{55} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2+3}{5n^2+10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n^2+10}$$

$a_n \longrightarrow 0.\ldots$; converge

$$= \frac{1}{5}$$

Raíz

: Si a_n es una sucesión de números reales estrictamente positivos tq (a_n/a_{n-1}) converge entonces $(\sqrt[n]{a_n})$ también converge:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

* El recíproco no es cierto

Ejemplos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n^2+1} \overset{c.r}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-2n+2} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n-1)^2+1} = \frac{n^2+1}{n^2-2n+1+1} = \frac{n^2+1}{n^2-2n+2} = 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Regla del emparedado

Si a_n, b_n, c_n son sucesiones tq $a_n \leq b_n \leq c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$; entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Como consecuencia si a_n está acotada y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a_n \cdot 0 = 0$

Ejemplos

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^4} + \frac{n^3+1}{n^4+1} + \dots + \frac{n^3+1}{n^4+n}$

¿Cuántos sumandos? $= n+1$ sumandos pq empieza en a₀

$$(n+1)\frac{n^3+1}{n^4+n} \leq \frac{n^3+1}{n^4} + \frac{n^3+1}{n^4+1} + \dots + \frac{n^3+1}{n^4+n} \leq \frac{n^3+1}{n^4}\cdot(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n+n^3+1}{n^4+n} = 1 \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3+n+1}{n^4} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^4} + \frac{n^3+1}{n^4+1} + \dots + \frac{n^3+1}{n^4+n} = 1$$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$

Hay n sumandos $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\cdot n = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n}} = \frac{1}{1} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\cdot n = \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}+\frac{n}{n^3}}} = 1 \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} = 1$$