# Matemática Discreta (GICD). 16–6–2023

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. (**1.5 puntos**) Enunciar y demostrar el Teorema de Euler de aritmética.

   **Solución.** Teoría.

2. (**1.5 puntos**) Define qué es una grafo simple y su matriz de adyacencia, definiendo asímismo cada concepto de teoría de grafos que utilices. Como aplicación, dado el grafo simple $G = (V, E)$ con la siguiente matriz de adyacencia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Representar gráficamente el grafo en cuestión. ¿Es Euleriano? ¿Es Hamiltoniano? ¿Es plano? En caso de ser plano, encontrar un mapa del mismo.

   **Solución.** Teoría. Para el ejemplo, no es Euleriano ya que hay vértices con grado impar. Es Hamiltoniano ya que se tiene el ciclo $(1, 2, 7, 6, 5, 4, 3)$ etiquetando cada vértice con la fila de la matriz. El grafo no es plano porque el subgrafo formado por los vértices 1, 2, 4, 5, 6 y 7 es el grafo bipartito $K_{3,3}$.

3. (**1.5 puntos**) Demostrar que $(p \vee q \wedge \neg r) \vee (p \vee q)$ es equivalente a $p \vee q$.

   **Solución.** Veamos que tienen la misma tabla de verdad.

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg r$ | $q \wedge \neg r$ | $p \vee q \wedge \neg r$ | $p \vee q$ | $(p \vee q \wedge \neg r) \vee (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

   La otra tabla

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

4. (**1.5 puntos**) En la fiesta había cocacola, fantas de limón y de naranja, sprite, ron, whisky y ginebra. Si se hacen combinados con tres de estas bebidas, ¿cuántos tipos de ellos pueden hacerse si es posible repetir las bebidas? ¿Cuántos combinados pueden hacerse para abstemios si es posible repetir las bebidas? ¿Cuántos tipos de combinados pueden hacerse con bebidas distintas?

   **Solución.** En la primera pregunta, se trata de combinaciones con repetición de 7 elementos
$$C^r(7,3) = C(9,3) = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84.$$
   En la siguiente, de nuevo son combinaciones con repetición de 4 elementos, con fórmula
$$C^r(4,3) = C(6,3) = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20.$$
   Si no pueden repetirse las bebidas son combinaciones sin repetición
$$C(7,3) = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35.$$

5. Resolver:

   (a) (**1 punto**) La ecuación $916x + 1516y = 16$ en $\mathbb{Z}$.

   (b) (**1 punto**) Calcular el entero positivo más pequeño tal que verifica el sistema de congruencias
$$\begin{cases} x \equiv 4 (\operatorname{mod} 5), \\ x \equiv 1 (\operatorname{mod} 6), \\ x \equiv 5 (\operatorname{mod} 13). \end{cases}$$

   **Solución.** (a) La ecuación tendrá solución en $\mathbb{Z}$ si
$$916x \equiv 16 (\operatorname{mod} 1516)$$
   tiene solución. Para ello, $\gcd(916, 1516)$ debe dividir a 16. Calculamos $\gcd(916, 1516)$ por el algoritmo ampliado de Euclides
$$\begin{pmatrix} 916 & 1 & 0 \\ 1516 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 - F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 916 & 1 & 0 \\ 600 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \times F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 600 & -1 & 1 \\ 916 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2 - F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 600 & -1 & 1 \\ 316 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{F_2 \times F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 316 & 2 & -1 \\ 600 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 - F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 316 & 2 & -1 \\ 284 & -3 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_2 \times F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 284 & -3 & 2 \\ 316 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{F_2 - F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 284 & -3 & 2 \\ 32 & 5 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_2 \times F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 32 & 5 & -3 \\ 284 & -3 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_2 - 8F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 32 & 5 & -3 \\ 28 & -43 & 26 \end{pmatrix}$$
$$\underset{F_2 \times F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 28 & -43 & 26 \\ 32 & 5 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_2 - F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 28 & -43 & 26 \\ 4 & 48 & -29 \end{pmatrix} \underset{F_2 \times F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 48 & -29 \\ 28 & -43 & 26 \end{pmatrix}$$
$$\underset{F_2 - 7F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 48 & -29 \\ 0 & -379 & 229 \end{pmatrix},$$
   por lo que $\gcd(916, 1516) = 4$, que divide 16. Dividiendo por 4 la ecuación modular tenemos
$$229x \equiv 4 (\operatorname{mod} 379),$$

con solución
$$x = 4 \cdot 229^{-1} (\mathrm{mod}\, 379).$$
Calculamos el inverso de 229 mediante el Teorema de Bezout ya que
$$4 = 916 \cdot 48 - 1516 \cdot 29$$
y dividiendo por 4
$$1 = 229 \cdot 48 - 379 \cdot 29,$$
por lo que
$$229^{-1} = 48.$$
Entonces
$$x = 4 \cdot 48 (\mathrm{mod}\, 379) = 192 (\mathrm{mod}\, 1516).$$
Existen otras dos soluciones de la ecuación $916x \equiv 16(\mathrm{mod}\, 1516)$, que son
$$\begin{aligned} x &= 192 + 379 = 571, \\ x &= 192 + 379 \cdot 2 = 950, \\ x &= 192 + 379 \cdot 3 = 1329. \end{aligned}$$
Despejando estas cuatro soluciones en la ecuación original $916x + 1516y = 16$, obtenemos los valores de $y$
$$\begin{aligned} y &= \frac{16 - 916 \cdot 192}{1516} = -116, \\ y &= \frac{16 - 916 \cdot 571}{1516} = -345, \\ y &= \frac{16 - 916 \cdot 1950}{1516} = -574, \\ y &= \frac{16 - 916 \cdot 1329}{1516} = -803. \end{aligned}$$
(b) Por el Teorema Chino de los restos, que puede aplicarse ya que 5, 6 y 13 son coprimos dos a dos, planteamos las ecuaciones
$$\left\{ \begin{array}{c} 78x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5), \\ 65x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 6), \\ 30x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 13). \end{array} \right.$$
o equivalentemente
$$\left\{ \begin{array}{c} 3x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5), \\ 5x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 6), \\ 4x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 13). \end{array} \right.$$
Las primera ecuación tienen por solución
$$x = 3^{-1} = 2,$$
la segunda
$$x = 5^{-1} = 5,$$
mientras que la solución de la tercera es
$$x = 4^{-1} = 10.$$
La solución al problema será entonces
$$x = 78 \cdot 2 \cdot 4 + 65 \cdot 5 \cdot 1 + 30 \cdot 10 \cdot 5 = 2449 \equiv 109 \, \mathrm{mod}(390),$$
por lo que el número más pequeño solución será 109.