

Cálculo II

Tema 3: Cálculo diferencial de funciones de varias variables I

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Decir si es o no diferenciable en el punto $(0, 0)$ la función real

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para comprobar si $f(x, y)$ es diferenciable o no en el punto $(0, 0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de no serlo directamente diríamos que es diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 \cdot r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\cancel{r^2} \cos \theta \sin \theta}{\cancel{r^2}} = 2 \cos \theta \sin \theta \rightarrow \nexists \lim$$

Como no existe el límite, entonces $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$ y por lo tanto, podemos asegurar que tanto es diferenciable en dicho punto.

2) Comprobar que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.

Para comprobar si $f(x, y)$ es diferenciable o no en el punto $(0, 0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de serlo directamente diríamos que no diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{x} = \{\text{Teorema del Sándwich}\} = 0$$

Como el límite coincide con $f(0, 0) = 0$, la función $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$.

- Comprobar que $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$:

La función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$ si existe un plano tangente que se aproxime localmente a $f(x, y)$. Esto ocurre si:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} \sin \frac{1}{\cancel{h}} - 0}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

El término $\sin \frac{1}{x}$ oscila entre -1 y 1 de manera no convergente cuando $h \rightarrow 0$, por lo que este límite no existe. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

3) Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular su derivada direccional de cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ en el punto $(0,0)$.

- Estudio de la continuidad en el punto $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^3} \cos \theta \sin^2 \theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin^2 \theta = 0$$

Como el límite coincide con $f(0,0) = 0$, la función $f(x,y)$ es continua en dicho punto.

- Comprobar que $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$:

Para verificar la diferenciabilidad en $(0,0)$, usando el criterio de que la función es diferenciable si existe un plano tangente local, lo que requiere que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Si $f(x,y)$ fuera diferenciable, se debería cumplir:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} h = r \cos \theta \\ k = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^3} \cos \theta \sin^2 \theta}{\cancel{r^3}} \\ &= \cos \theta \sin^2 \theta \longrightarrow \nexists \lim \end{aligned}$$

El término $\cos \theta \sin^2 \theta$ depende de θ , lo que implica que el límite no existe uniformemente. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

- Derivada direccional en $(0,0)$:

La derivada direccional en la dirección $v = (v_1, v_2)$ está dada por:

$$\begin{aligned} D_v f(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 (v_1^2 + v_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t^3} v_1 v_2^2}{\cancel{t^2} (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

La derivada direccional no siempre es cero, ya que depende de los valores de v_1 y v_2 .

4) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comprobar que f tiene derivada direccional respecto de cualquier vector de \mathbb{R}^2 en el punto $(0, 0)$, pero f no es derivable en dicho punto.

- Derivada direccional en $(0, 0)$:

La derivada direccional de $f(x, y)$ en la dirección de un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ se define como:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t(t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(v_1 v_2^2)}{t^2(v_1^2 + t^2 v_2^4)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1} \end{aligned}$$

La derivada direccional existe para cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y está dada por

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 \text{ y } v_2 = 0 \end{cases}$$

- Diferenciabilidad de $f(x, y)$ en $(0, 0)$:

La función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$ si existe:

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\left| f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0 \end{aligned}$$

Si $f(x, y)$ fuera diferenciable en $(0, 0)$, las derivadas direccionales serían consistentes con las derivadas parciales. Sin embargo, observamos que

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \frac{v_2^2}{v_1}, \quad \text{si } v_1 \neq 0,$$

y esto depende de la dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, lo cual indica que $f(x, y)$ no puede aproximarse localmente por una aplicación lineal.

La función no es diferenciable en $(0, 0)$ porque las derivadas direccionales no son consistentes con una aproximación lineal.

5) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = x^2 \tan \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

definida para todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y comprobar que

$$xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) = 2f(x,y)$$

Denotamos $u = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$. Entonces:

$$f(x,y) = x^2 \tan(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(-\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2y(x^2 + y^2 - y^2 \cdot 2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y + 2y^3 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) &= x \cdot \left[2x \tan(u) + x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(-\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] + y \cdot \left[x^2(\tan^2(u) + 1) \cdot \left(\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] \\ &= 2x^2 \tan(u) - \frac{2x^4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (\tan^2(u) + 1) + \frac{2x^4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (\tan^2(u) + 1) = 2x^2 \tan(u) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot f(x,y)$$

6) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, y comprobar que

$$xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) = -\frac{1}{2}f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2} + y \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right) + y \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}(x+y) - x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \frac{\sqrt{y}}{2}(x+y) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x+y)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - 1 \right) (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)}{(x+y)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot f(x,y)$$

7) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = y \cdot \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$$

definida en el conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(1, 1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{3x^2 y \cdot (x^2 + y^2) - x^3 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^3 y} \cdot \frac{3x^4 y + 3x^2 y^3 - 2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot y$$

$$= y \cdot \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^3 y(x^2 + y^2)} = y \cdot \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^5 y + x^3 y^3} = \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{x^5 + x^3 y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + y \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^3 y} \cdot \frac{x^3(x^2 + y^2) - x^3 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = \log \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{1^3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1^3}{1^5 + 1^3 \cdot 1^2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \log \frac{1^3 \cdot 1}{1^2 + 1^2} + \frac{1^2 - 1^2}{1^2 + 1^2} = \log \frac{1}{2}$$

El diferencial en $(1, 1)$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) dy = 2 dx + \log \frac{1}{2} dy$$

8) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

definida en el conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(2, 1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(x - \frac{y}{x^2}\right) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(2 - \frac{2}{1}\right) = 0$$

El diferencial en $(2, 1)$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) dy = \frac{1}{2} dx$$

9) Dada la función $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x, y) = (x^4 + y^3, x^2 y^2 - 3y^2)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(1, 1)$. Comprobar que \vec{f} es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$f(x, y) = (x^4 + y^3, x^2 y^2 - 3y^2) = \begin{cases} f_1(x, y) = x^4 + y^3 \\ f_2(x, y) = x^2 y^2 - 3y^2 \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 & 3y^2 \\ 2xy^2 & 2x^2 y - 6y \end{pmatrix} \rightarrow J(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, podemos asegurar que es diferenciable.

Su diferencial, al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} df(P)(h, k) &= J(f)(P)(h, k) = df(1, 1)(h, k) = J(f)(1, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h + 3k \\ 2h - 4k \end{pmatrix} \longrightarrow df(1, 1)(h, k) = (4h + 3k, 2h - 4k) \end{aligned}$$

10) Dada la función $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y, x \cos y \sin y)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(\pi, \frac{\pi}{2})$. Comprobar que \vec{f} es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$\begin{aligned} \vec{f}(x, y) &= (x \cos y, x \sin y, x \cos y \sin y) = \begin{cases} f_1(x, y) = x \cos y \\ f_2(x, y) = x \sin y \\ f_3(x, y) = x \cos y \sin y \end{cases} \\ J(f) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \\ \cos y \sin y & x(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \longrightarrow J(f) \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que todas las funciones coordenada son C^1 , por lo tanto la función $\vec{f}(x, y)$ es también C^1 y también es diferenciable.

$$\begin{aligned} df(P)(h, k) &= J(f)(P)(h, k) = df \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right) (h, k) = J(f) \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (-\pi k, h, -\pi k) \longrightarrow df \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right) (h, k) = (-\pi k, h, -\pi k) \end{aligned}$$

11) Comprobar que la función $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + yz - z^2, xy - xz + 2z^2, xyz)$$

es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^3 y calcularla en el punto $(3, 2, 1)$.

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + yz - z^2, xy - xz + 2z^2, xyz) = \begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + yz - z^2 \\ f_2(x, y, z) = xy - xz + 2z^2 \\ f_3(x, y, z) = xyz \end{cases}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que son diferenciables, por consecuencia, $\vec{f}(x, y, z)$ también es diferenciable.

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & z & y - 2z \\ y - z & x & -x + 4z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Su diferencial al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} df(P)(h, k, j) &= J(f)(P)(h, k, j) \longrightarrow df(3, 2, 1)(h, k, j) = J(f)(3, 2, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} = (6h + k, h + 3k + j, 2h + 3k + 6j) \\ &\longrightarrow df(3, 2, 1)(h, k, j) = (6h + k, h + 3k + j, 2h + 3k + 6j) \end{aligned}$$

12) Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = x^{y+z}$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y+z)x^{y+z-1} & x^{y+z} \cdot \ln(x) & x^{y+z} \cdot \ln(x) \end{pmatrix}$$

b) $f(x, y, z) = x^{y^z}$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^z \cdot x^{y^z-1} & x^{y^z} \cdot \ln(x) \cdot z \cdot y^{z-1} & x^{y^z} \cdot \ln(x) \cdot y^z \cdot \ln(y) \end{pmatrix}$$

c) $f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$

$$\begin{aligned} J(f) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= (\cos(x \sin(y \sin z)) \cdot (\sin(y \sin z)), \cos(x \sin(y \sin z)) \cdot x \cdot \cos(y \sin z) \cdot \sin z, \cos(x \sin(y \sin z)) \cdot x \cdot \cos(y \sin z) \cdot y \cos z) \end{aligned}$$

d) $\vec{f}(x, y) = (\sin(xy), \sin(x \sin y), x^4)$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(xy) \cdot y & \cos(x, y) \cdot x \\ \cos(x \sin y) \cdot \sin y & \cos(x \sin y) \cdot x \cdot \cos(y) \\ 4x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

13) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, y) & \text{si } (x, y) = (0, y) \end{cases}$$

Comprobar que f es diferenciable.

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y \right) & \text{si } x \neq 0 \\ (0, y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Caso $x \neq 0$:

La función es C^1 en esta región porque las funciones x^2 , $\sin \frac{1}{x}$, y y son derivables, y no hay discontinuidades cuando $x \neq 0$. Por lo tanto, f es diferenciable en esta región.

- Caso $x = 0$:

Cuando $x = 0$, la función se define como

$$f(x, y) = (0, y)$$

En este caso, debemos comprobar la diferenciabilidad en el punto $(0, y_0)$ para cualquier y_0 . Empezamos calculando las derivadas parciales.

- Primera componente $f_1(x, y)$:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, la derivada parcial respecto a x es:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x + 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

- Segunda componente $f_2(x, y)$:

$$f_2(x, y) = y$$

La derivada parcial respecto a y es constante, y vale 1 en todo \mathbb{R}^2 .

En el caso $x = 0$, el comportamiento de $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ es consistente con la definición y es continuo. Por lo tanto, todas las derivadas son continuas en $(0, y_0)$.

Dado que la función $f(x, y)$ es de clase C^1 en $x \neq 0$ y las derivadas parciales son continuas en $x = 0$, podemos concluir que $f(x, y)$ es diferenciable en \mathbb{R}^2 .

14) Sabiendo que $f(x, y) = \sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}$, calcular

$$xf(x, y)D_1f(x, y) + yf(x, y)D_2f(x, y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{xy} \cdot y + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{xy} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} xf(x, y)D_1f(x, y) + yf(x, y)D_2f(x, y) &= x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\ &\quad + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} + \frac{1}{2} + \frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = 1 \end{aligned}$$

- 15) Sabiendo que $f(x, y) = \sin \frac{2x+y}{2x-y}$, calcular

$$xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y).$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{2 \cdot (2x-y) - (2x+y) \cdot 2}{(2x-y)^2} \right) = \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{4x-2y-4x-2y}{(2x-y)^2} \right) = \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{-4y}{(2x-y)^2} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{1 \cdot (2x-y) - (2x+y) \cdot (-1)}{(2x-y)^2} \right) = \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{2x-y+2x+y}{(2x-y)^2} \right) = \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{4x}{(2x-y)^2} \right) \\ xD_1f(x, y) + yD_2f(x, y) &= x \cdot \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{-4y}{(2x-y)^2} \right) + y \cdot \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{4x}{(2x-y)^2} \right) \\ &= \cos \frac{2x+y}{2x-y} \cdot \left(\frac{-4xy}{(2x-y)^2} + \frac{4xy}{(2x-y)^2} \right) = 0\end{aligned}$$

- 16) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$.

La ecuación del plano tangente, viene dada por:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

- Para el punto $(0, 0)$:

$$c = f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad z - 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \longrightarrow z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

- Para el punto $(1, 2)$

$$c = f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5 \quad z - 5 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2) \longrightarrow z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \quad \longrightarrow z = 2x - 2 + 4y - 8 + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4 \quad \longrightarrow z = 2x + 4y - 5$$

- 17) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \log x^2 + \log y^2$ en los puntos $(3, 1)$ y (x_0, y_0) .