MATEMÁTICA DISCRETA

GRAFOS

Jorge Ballesta Cerezo

. . .

T5 - Grafos

Nociones básicas

$G=(V,E)$ es un grafo formado por dos conjuntos V (conjunto de vértices) y E (conj de aristas que unen dos vértices de V.

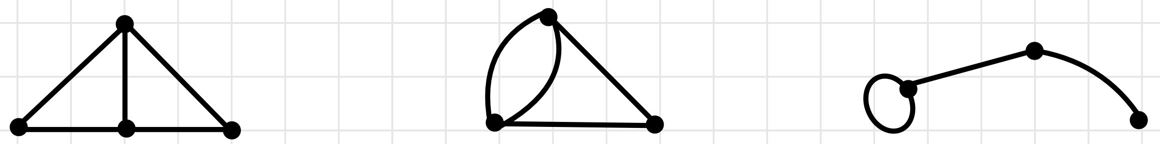
Si u y v son vértices por una arista, podemos representar ésta por (u,v).

Dos vértices pueden estar unidos por más de una arista, por lo que habría que especificar qué arista estamos tomando en cada caso.

El orden del grafo es el número de vértices

El grado de $v \in V$, denotado $deg(v)$ es el número de aristas que entran o salen de v

G es un grafo simple si dos vértices de V, están unidos a lo sumo por una arista



Simple
(a lo sumo una arista por par de V)

Multigrafo
(mas de una arista por par de V)

Pseudografo
(admite (v,v))

Teorema (Apretón de manos)

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$$

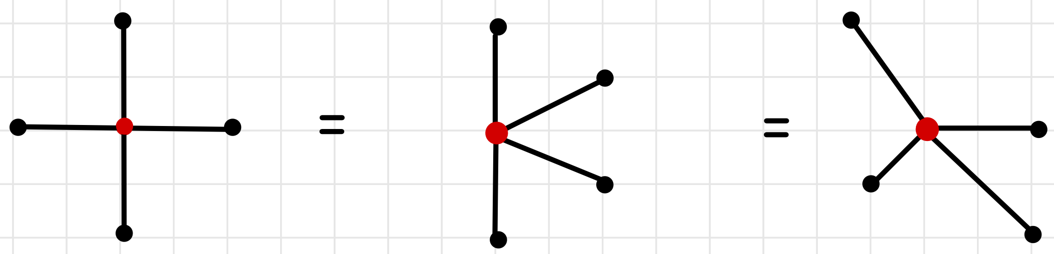
Basta con darse cuenta de que al contar aristas, estas se cuentan dos veces ya que unen vértices distintos ■

Subgrafo

Dado $G=(V,E)$, un subgrafo de G es otro grafo $G'(V',E')$ de forma que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$

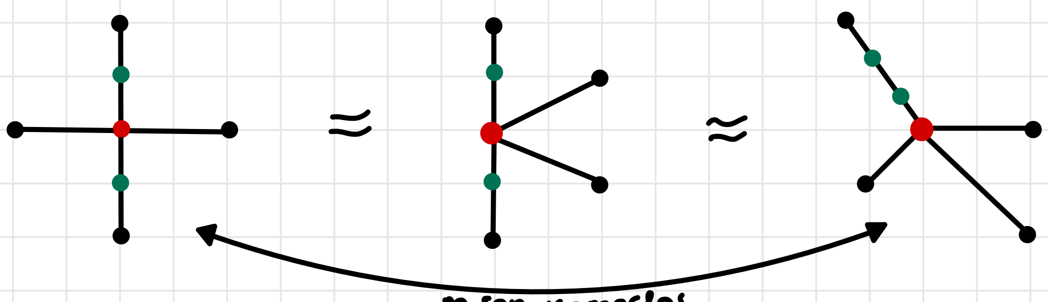
Isomorfismo

Dos grafos $G(V,E)$ y $G^*(V^*,E^*)$ son isomorfos si existe una aplicación biyectiva $f: V \to V^*$ (mismos vértices) donde cada par de vértices, sus imágenes están unidas por las mismas aristas (mismos grados)



Homeomorfismo

Dos grafos $G(V,E)$ y $G^*(V^*,E^*)$ son homeomorfos si es posible obtener G' a partir de G añadiéndole vértices sobre las aristas



Camino

Secuencia alternativa de vértices y aristas $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n$ donde la longitud del camino es igual al número de aristas

Camino cerrado: $v_1 = v_n$

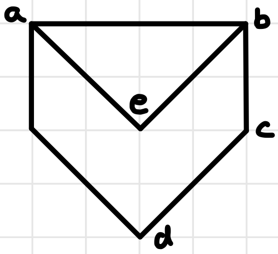
Camino simple: todos los vértices son distintos ($v_i \neq v_j \quad i \neq j$)

Ciclo: camino cerrado donde $v_i \neq v_j \ \forall \ i,j \in \{2,3,\dots,n-1\}, \ i \neq j$

Recorrido: camino que no repite aristas ($e_i \neq e_j$) $i,j \in \{1,2,\dots,n-1\}$, $i \neq j$)

Teorema (camino de u a v)

Existe un camino de u a v si y solo si existe un camino simple que los une



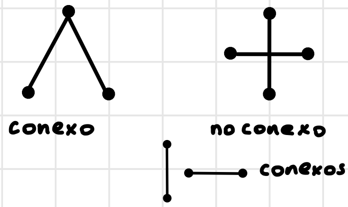
camino de a — e
e, a, ~~d, c, b, a~~

Marcamos el primer vértice que se repite y eliminamos todos los vértices entre el elemento repetido y su repetición (incluido)

Grafo conexo

G(V,E) es conexo si para cada par de vértices existe un camino que los une.

Un grafo no conexo puede estar formado por grafos conexos

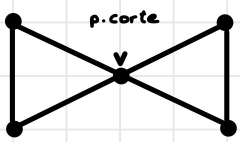


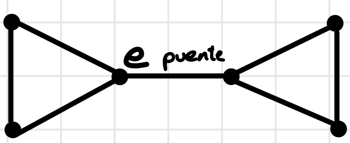
Distancia u—v: Camino más corto entre u y v

Diámetro: Máxima distancia de u a v $\forall u,v \in V$

Punto de corte: Si $G \setminus v$ es disconexo (eliminamos $v \in V$ y sus aristas enlazadas)

Puente: Si $G \setminus e$ es disconexo

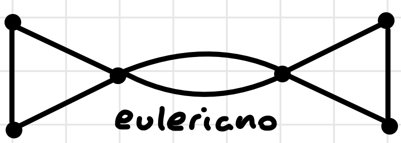


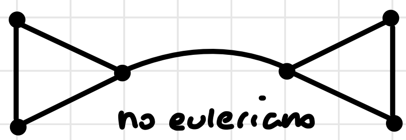


Grafo Euleriano

puede repetir vértice pero no aristas

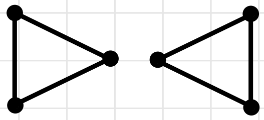
G(V,E) es euleriano si existe un recorrido de longitud |E|





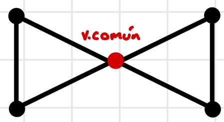
Lema

Si $G(V,E)$ es un grafo formado por dos subgrafos eulerianos que están unidos al menos por un vertice y sin aristas en común $\Rightarrow G$ es euleriano



euleriano euleriano

2 recorridos cerrados long $|E|=3$



euleriano

Recorrido cerrado de longitud $|E|=6$

Sea $v \in V$ un vértice común a cada subgrafo. Tomamos dos recorridos cerrados en cada grafo, que empiezan por v. Como lo subgrafos no tienen aristas en común, el resultado es un recorrido de longitud $|E| \Rightarrow G$ es euleriano

Teorema de Euler

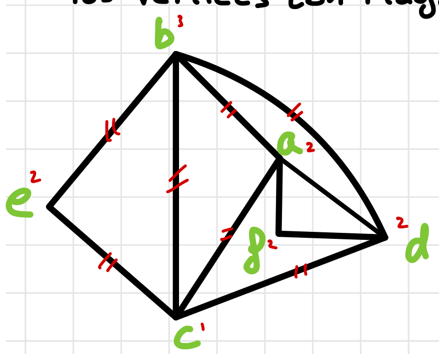
Sea $G(V,E)$ un grafo conexo. G es Euleriano si y solo si $deg(v)$ es par para todo $v \in V$ (Demostración cayó en el primer examen)

Algoritmo de Fleury (Encontrar recorrido cerrado euleriano)

Sea $G(V,E)$ un grafo conexo

1. Fijamos un vértice cualquiera de $v \in V$

2. Recorremos los vértices pasando una vez por cada arista. Se eligen los vértices con mayor número de aristas sin usar

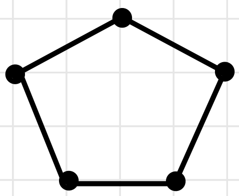


Si hay dos impares, sólo hay un camino euleriano y debemos empezar por un impar y acabar en otro impar

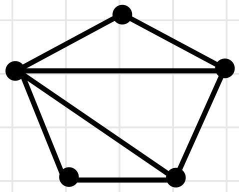
a, b, d, c, b, e, c, a, d, f, a

Grafos Hamiltonianos puede repetir aristas pero no vértices

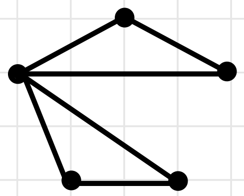
Un grafo conexo $G(V,E)$ es Hamiltoniano si existe un ciclo de longitud $|V|$



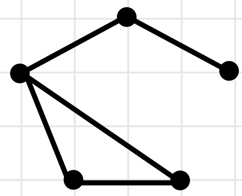
euleriano
hamiltoniano



no euleriano
hamiltoniano



euleriano
no hamiltoniano



no euleriano
no hamiltoniano

Teorema de Ore

Sea $G(V,E)$ un grafo simple y conexo de orden $n=|V|\leq 3$. Si para cada par de vertices no adyacentes u,v se cumple:

$$\deg(u)+\deg(v)\geq n=|V|$$ entonces G es Hamiltoniano suficiente pero no necesaria

Suponemos que G no es Hamiltoniano. Sabemos que G es un grafo simple es un subgrafo de K_n (Grafo completo con n vértices)

Añadimos aristas a G hasta obtener un grafo H_m ya que K_n es hamiltoniano

Sea G' el grafo no hamiltoniano tq añadiendo una arista obtendriamos H_m

$$\deg_{G'}(u)+\deg_{G'}(v)\geq \deg(u)+\deg(v)\geq n \Rightarrow G' \text{ cumple la hipótesis}$$

Sean dos vértices v_1, v_n los vértices no adyacentes que si se añade la arista que los une, el grafo resultante es H_m

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ camino simple uniendo $v_1 - v_n$

$P=\{v_i : v_{i+1} \text{ es adyacente con } v_1\}$; $|P|=\deg_{G'}(v_1)=m$ $\quad v_i\in P$; $v_n \notin P$. Por hipótesis:

Como hay $n-1$ vértices distintos de v_n, habrá como mucho $m-1$ vertices adyacente v_n

$$\deg_{G'}(v_n)\geq n-\deg_{G'}(v_1)=n-m$$

Debe existir $v_t \in P$ adyacente con v_n y no adyacente con v_1

$v_1, v_2, \dots, v_t, v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots v_{t+1} + v_t$ es un ciclo de longitud n y G' no es hamiltoniano es un ciclo de longitud n y G' no es hamiltoniano $\Rightarrow$ contradicción que procede de la primera proposición

Corolario

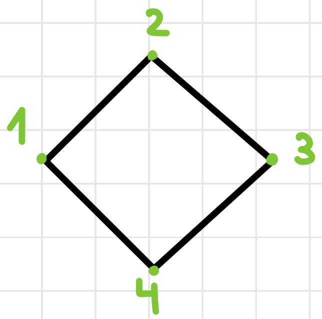
Sea $G(V,E)$ un grafo conexo simple con $|V| \geq 3$. Si $\forall\, v \in V$ se cumple que $\deg(n) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow G$ es hamiltoniano   condición suficiente pero no necesaria

$$\deg(n) + \deg(v) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

Matriz de adyacencia

Sea $G(V,E)$ un grafo simple donde $|V| = n$

Existe una matriz binaria $A \in M_{n \times n}$ donde a_{ij} $\begin{cases} 1 & \text{si } v_i \overset{e}{\text{———}} v_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = A$
$A^2 = A \cdot A$
$A^k = A^{k-1}$

Teorema

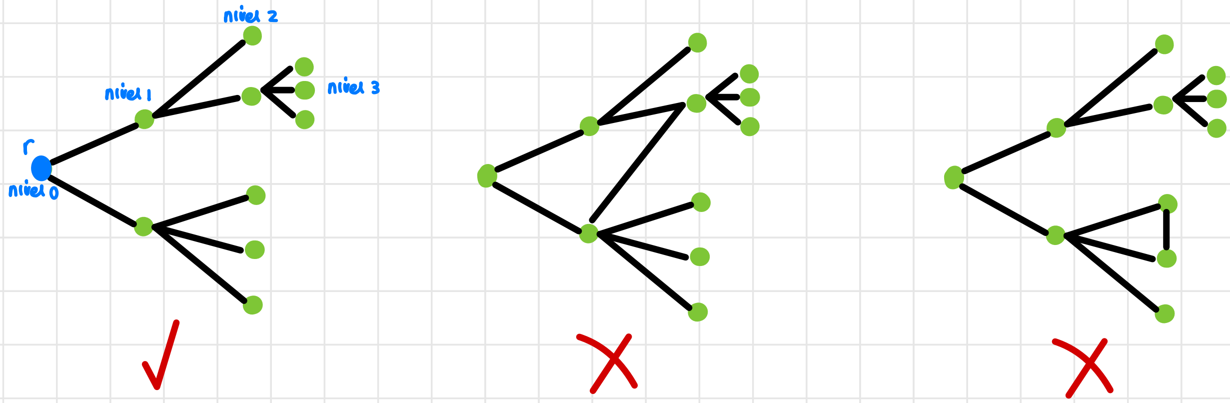
Sean $G=(V,E)$ un grafo simple con $|V| = n$ y A su matriz de adyacencia. Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $A^k = (a_{ij}^{[k]})$. Entonces, $a_{ij}^{[k]}$ es el número de caminos de longitud k de v_i a v_j

Corolario

Sean $G=(V,E)$ un grafo simple con $|V| = n$ y A su matriz de adyacencia. G es conexo si y solo si la matriz $A + A^2 + A^n$ tiene sus entradas fuera de la diagonal principal no nulas. Ya que puedo ir de i hasta j $\forall\, i,j$ mediante un camino de longitud k $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Árboles

Un arbol G(V,E) es un grafo conexo sin ciclos



Raíz. Vértice de partida **Nivel:** Nº aristas que recorre desde la raiz hasta v

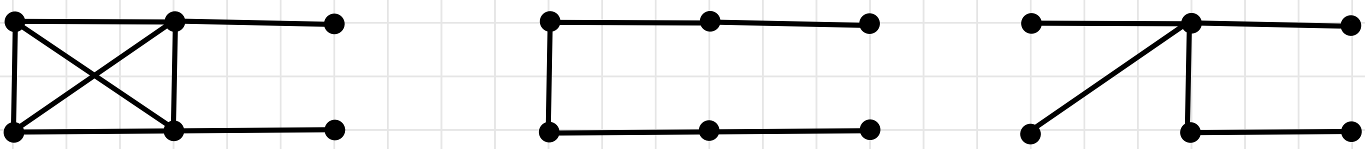
Teorema

salió en meup

Sea G(V,E) un grafo simple. G es un árbol si y solo si G es conexo y $|V| = |E| + 1$

Arbol generador

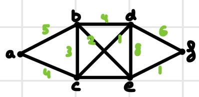
Dado un grafo simple G(V,E), se llama arbol generador de G a un arbol que contiene todos los vértices de G



grafo conexo — árbol generador — árbol generador

Grafo ponderado

Grafo simple que tiene unos pesos o costes determinados en cada arista. El peso de un camino se define como la suma de los pesos de sus aristas. Un problema importante es encontrar los árboles generadores de peso mínimo, disponemos de varios algoritmos.



Algoritmo I

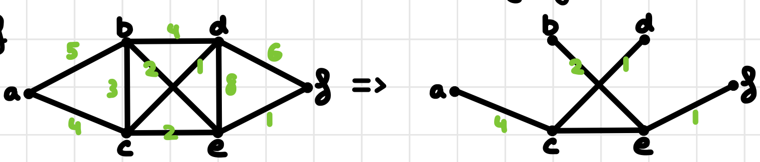
1. Partimos de un grafo simple conexo ponderado G(V, E) con n vértices

2. Ordenamos las aristas en orden decreciente de peso

3. Eliminamos secuencialmente cada arista que no haga el grafo disconexo

4. Se termina el proceso cuando el número de aristas en el grafo sea $E = |n-1|$ (V-1)

de, df, ab, bd, ac, bc, ce, be, cd, ef



Algoritmo de Kruskal

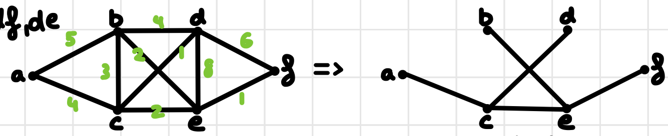
1. Partimos de un grafo simple conexo ponderado G(V, E) con n vértices

2. Ordenamos las aristas en orden creciente de peso

3. Se toman los vértices G y se van agregando aristas de forma secuencial, de forma que el grafo resultante no tenga ciclos

4. Se termina el proceso cuando el número de aristas en el grafo sea n-1

ef, cd, be, ce, bc, ac, bd, ab, df, de



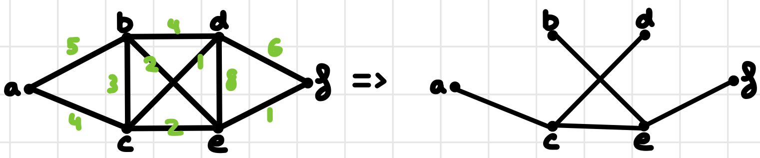
Algoritmo de Prim

1. Partimos de un grafo simple conexo ponderado G(V, E) con n vértices

2. Empezamos en un vértice cualquiera

3. Añadimos aristas secuencialmente eligiendo las de menor peso (a partir de vértices descubiertos) de manera que tengan un vértice en común con el grafo del paso anterior y no se generen ciclos

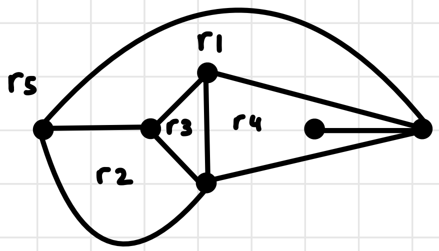
4. Se termina el proceso cuando el número de aristas en el grafo sea n-1



Grafos planos

Un grafo G(V,E) es plano cuando puede representarse sin que sus aristas se crucen

La representación del graf de forma que sus aristas no se cortan se llama mapa
Dado un mapa de grafo conexo, las aristas del grafo dividen a este en un número finito de regiones que están delimitadas por ciclos de forma que no contienen aristas en su interior. Todas las regiones están acotadas salvo la exterior.



deg(r) = longitud del ciclo que lo define $\begin{cases} deg(r_1) = 4 \\ deg(r_2) = 3 \\ deg(r_3) = 3 \\ deg(r_4) = 5 \\ deg(r_5) = 3 \end{cases}$

Teorema

Sea G(V,E) un grafo plano conexo, entonces:

$$\sum_{r \in R} deg(r) = 2|E|$$

Teorema

Consideremos un mapa de un grafo plano conexo G(V,E), entonces:

Fórmula de euler: $|V| + |R| - 2 = |E| \Rightarrow G$ es plano

Teorema

Consideremos un mapa de un grafo simple plano conexo G(V,E) con $|V| \geq 3$:

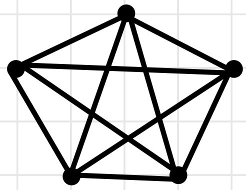
a) $|E| \leq 3|V| - 6$

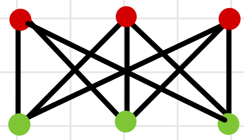
b) Si G no tiene ciclos de longitud 3, entonces $|E| \leq 2|V| - 4$

c) G tiene al menos un vértice de grado menor o igual a 5

Teorema (Kuratowski)

Sea $G(V,E)$ un grafo conexo G no es plano si y solo si contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$





$K_{3,3}$

Se trata de un grafo bipartito completo formado por dos conjuntos de tres vértices cada uno, donde cada vértice de un conjunto está conectado a todos los vértices del otro conjunto

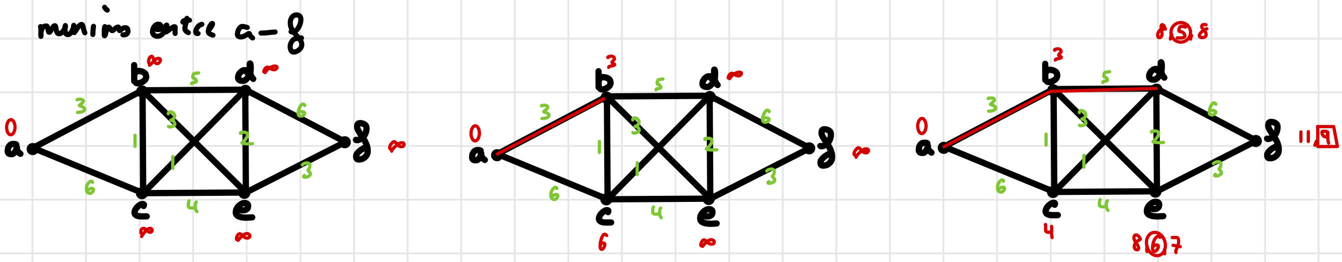
Camino más corto (Dijkstra)

Sea $G(V,E)$ un grafo conexo ponderado con vértices $V=\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, vamos a establecer el camino más corto uniendo v_0 y v_n

1. Fijamos v_0 y definimos $U=\{v_0\}$ y $L_0(v_i)$ como el peso de la arista que une $v_0 - v_i$ si existe, en caso contrario ∞

2. Sea v_i^* donde $L(v_i)$ es mínimo. Añadimos $v_i^* \in U$

3. mínimo entre a−g



a, b, e, g = 9