Cálculo II

Tema 4: Teoría de campos

Francisco Javier Mercader Martínez

Capítulo 1: Integración múltiple

1) Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ las integrales

a) $\displaystyle\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

$$\int_0^3 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2} y\right]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{1}{2} y \, \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{4} y^2\right]_{y=0}^{y=3} = \frac{9}{4}$$

b) $\displaystyle\iint_\Omega xe^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

$$\int_0^3 \int_0^1 xe^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^3 e^y \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^3 e^y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{e^y}{2} \, \mathrm{d}y = \left[\frac{e^y}{2}\right]_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{2}(e^3 - 1)$$

c) $\displaystyle\iint_\Omega y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

$$\int_0^3 \int_0^1 y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^3 y^2 \left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^3 y^2 (1 - \cos(1)) \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=3} \cdot (1 - \cos(1)) = 9(1 - \cos(1))$$

2) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican

a) $\displaystyle\iint_\Omega y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables x y y se expresan como:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ se transforma en:

$$r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \cdot \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3} \cdot \left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{3}(-\cos(2\pi) + \cos(0)) = \frac{1}{3}(-1+1) = 0$$

b) $\displaystyle\iint_\Omega (3y^3 + x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables x y y se expresan como:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se transforma en:

$$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi].$$

En estas coordenadas, la función $2y^3 + x^2$ se convierte en:

$$2y^3 + x^2 = 3(r\sin\theta)^3 + (r\cos\theta)^2.$$

$$\iint_\Omega (2y^3 + x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3(r\sin\theta)^3 + (r\cos\theta)^2)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^4\sin^3\theta + r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{3r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\sin^3\theta + \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{5}\sin^3\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (*)$$

Usamos que $\sin^3\theta = \sin\theta(1-\cos^2\theta)$ y la simetría de $\sin\theta$ en $[0,2\pi]$ implica que:

$$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta = 0$$

Usamos la identidad $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$. Entonces:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \overbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta}^{0} = \pi$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$ porque $\cos(2\theta)$ es impar en $[0,2\pi]$.

$(*) = \dfrac{3}{5}\cdot 0 + \dfrac{1}{4}\cdot\pi = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

La función $\sqrt{xy}$ depende del producto xy. Observamos que:

- Si $x > 0$ y $y > 0$, $\sqrt{xy} > 0$.
- Si $x < 0$ o $y < 0$, el signo del producto puede cambiar.
- En particular, en las regiones donde $x > 0$, $y < 0$ (o viceversa), el producto $xy < 0$, y $\sqrt{xy}$ no está definida para valores negativos.

Debido a que $\sqrt{xy}$ no está definida en $\mathbb{R}^2$ cuando $xy < 0$, esta integral **no se puede calcular** sobre Ω como está formulada, porque incluye regiones donde $xy < 0$.

d) $\displaystyle\iint_\Omega ye^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ 0 < x \le y^2\}$.

$$\int_0^1\int_0^{y^2} ye^x\,dx\,dy = \int_0^1 y\cdot[e^x]_{x=0}^{x=y^2}\,dy = \int_0^1 y\cdot\left(e^{y^2}-1\right)dy = \int_0^1 ye^{y^2} - y\,dy = \int_0^1 ye^y\,dy - \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-2)$$

$$\int_0^1 ye^{y^2}\,dy = \left\{\begin{array}{l} u=y^2 \\ \\ du = 2y\,dy \end{array}\right\} = \int_0^1 e^u\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

e) $\displaystyle\iint_\Omega y+\log x\,dx\,dy$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0.5\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{x^2}^x y+\log x\,dy\,dx$$

$$\int_{x^2}^x y+\log x\,dy = \int_{x^2}^x y\,dy + \int_{x^2}^x \log x\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} + [y\log x]_{y=x^2}^{y=x} = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{(x^2)^2}{2}\right)+\log x(x-x^2) = \frac{x^2(1-x^2)}{2} + \log x(x-x^2)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}+\log x(x-x^2)\,dx = \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^2(1-x^2)}{2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x-x^2)\,dx}_{I_2}$$ $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 - x^4\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{x=0.5}^{x=1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{47}{480}\right) = \frac{47}{960}$

$I_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x-x^2)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x\log x - x^2\log x\,dx = (*) = \left(-\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{16}\right) - \left(-\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{72}\right) = -\frac{1}{12}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{13}{144}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x\log x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u=\log x & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \left[\log x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\cancel{x^2}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx$$
$$= -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{16}$$

$(*)$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\log x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u=\log x & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx & v=\frac{x^3}{3}\end{array}\right\} = \left[\log x\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\cancel{x^3}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\,dx$$
$$= -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{72}$$

3) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

a) $\displaystyle\iint_\Omega (4-y^2)\,dx\,dy$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2=2x$ e $y^2=8-2x$.

b) $\displaystyle\iint_\Omega (x^4+y^2)\,dx\,dy$ en el recinto limitado por $y=x^3$ e $y=x^2$.

c) $\displaystyle\iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy$ en el recinto limitado por $y=x^3$ e $y=x^4$ con $-1\le x\le 1$.

d) $\displaystyle\iint_\Omega (2xy^2-y)\,dx\,dy$ en la región limitada por $y=|x|$, $y=-|x|$ y $x\in[-1,1]$.

4) Calcular la superficie de las siguientes regiones:

a) Círculo de radio R.

b) Elipse de semiejes a, b.

c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.

d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.

e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

5) Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.

b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

c) Esfera de radio R.

d) Cono de altura h y radio de la base R.

e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

6) Calcular cambiando a coordenadas polares:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

7) Calcular para $\Omega = [0, 1] \times [0, 3] \times [-1, 1]$ las integrales

a) $\displaystyle\iiint_{\Omega} xyz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

b) $\displaystyle\iiint_{\Omega} xe^{y+z}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

c) $\displaystyle\iiint_{\Omega} y^2 z^3 \sin x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

8) Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

a) $\displaystyle\iiint_{\Omega} (y^3 + z + x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

b) $\displaystyle\iiint_{\Omega} (y \sin z + x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2, 0 \leq x, y \leq 1\}$.

c) $\displaystyle\iiint_{\Omega} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

d) $\displaystyle\iiint_{\Omega} yxz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2 + x, -1 \leq x, y \leq 1\}$.

9) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x + 3y + z + 10 = 0$ y lateralmente por el cilindro ciruclar $x^2 + y^2 + x = 0$.

11) Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

12) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por lo planos $y = 0$ e $y = 3$.

13) Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r \sin\phi \cos\theta, yr \sin\phi \sin\theta$ y $z = r \cos\phi$, calcular:

a) El volumen de una esfera de radio R.

b) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ en el recinto $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$.

c) El volumen del recinto del apartado (b).

14) Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2+4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

15) Calcular $\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo Ω el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x+y=1$.

16) Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z = x^2$ y $z = 4-y^2$.

17) Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

18) Calcular

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde Ω es la región limitado por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, donde $0<b<a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.