Señales y Sistemas

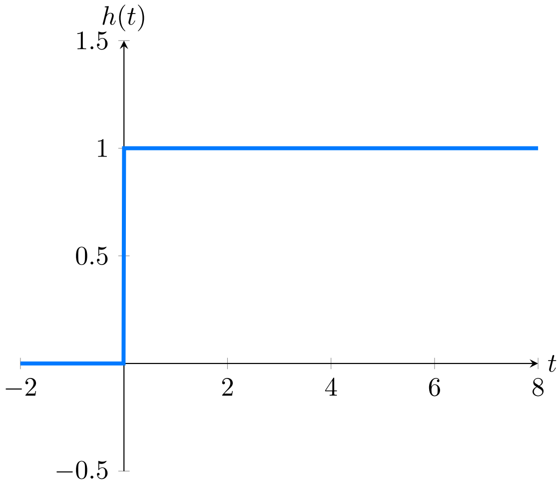
Examen Mayo 2025

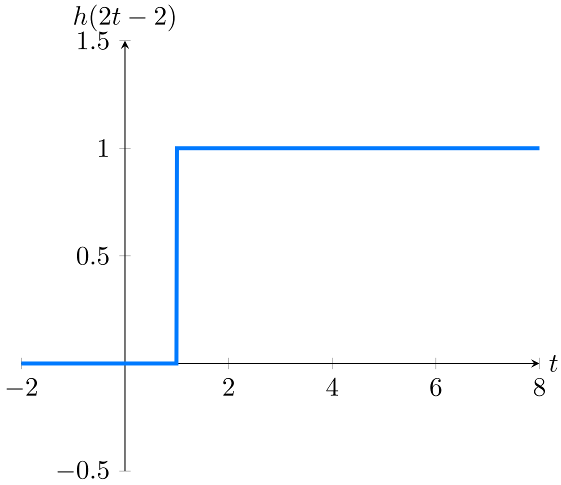
Francisco Javier Mercader Martínez

Problema 1 Dominio del tiempo.

Sea un sistema LTI continuo cuya respuesta al impulso es $h(t) = u(t) + \delta(t-6)$.

a) Represente $h(t)$ y $h(2t-2)$.





b) Estuda las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad del sistema.

$h(t) \neq 0$ para $t \neq 0 \longrightarrow$ con memoria

$h(t) = 0$ para $t < 0 \longrightarrow$ causal

$\displaystyle\int_0^\infty |h(t)|\,\mathrm{d}t = \infty \longrightarrow u$

c) Calcule la señal de salida cuando a la entrada se aplica la señal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

La salida es:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [u(t) + \delta(t-6)] = x(t) * u(t) + x(t) * \delta(t-6)$$

1) $x(t) * u(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = 1 - e^{-t}$

2) $x(t) * \delta(t-6) = x(t-6) = e^{-(t-6)}u(t-6)$

Resultado final:

$$y(t) = (1 - e^{-t}) + e^{-(t-6)}u(t-6)$$

d) Calcule la energía total y potencia media de la señal de entrada $x(t)$.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \, \mathrm{dt} = \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{\infty} = \left(-\cancelto{0}{\frac{e^{-\infty}}{2}} - \left(-\frac{e^0}{2} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \lim_{T \to \infty} \frac{E}{2T} = \frac{\frac{1}{2}}{\infty} = 0$$

e) Si la señal de entrada es $3e^{-(t-1)}u(t-1) + 2e^{-(t-3)}u(t-3)$, ¿cuál será la señal de salida?

Usamos la linealidad de la convolución:

$$y(t) = 3e^{-(t-1)}u(t-1) * h(t) + 2e^{-(t-3)}u(t-3) * h(t)$$

Sabemos que:

$$e^{-(t-a)}u(t-a) * h(t) = (1 - e^{-(t-a)})u(t-a) + e^{-(t-a-6)}u(t-a-6)$$

Entonces:

- Para el primer término ($a = 1$):

$$3\left[(1 - e^{-(t-1)})u(t-1) + e^{-(t-7)}u(t-7)\right]$$

- Para el segundo término ($a = 3$):

$$2\left[(1 - e^{-(t-3)})u(t-3) + e^{-(t-9)}u(t-9)\right]$$

Resultado final:

$$y(t) = 3(1 - e^{-(t-1)})u(t-1) + 3e^{-(t-7)}u(t-7) + 2(1 - e^{-(t-3)})u(t-3) + 2e^{-(t-9)}u(t-9)$$

Sea el sistema LTI discreto dado por la relación salida-entrada

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] + x[n-1]$$

f) Obtenga y represente la respuesta al impulso $h[n]$.

La respuesta al impulso se obtiene aplicando como entrada:

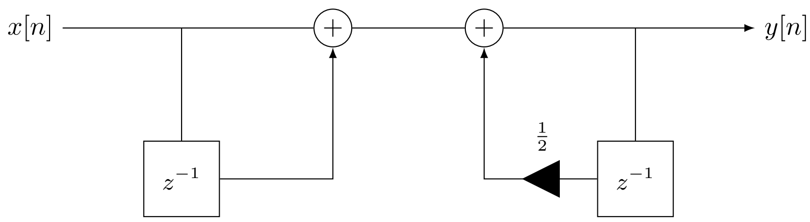
$$x[n] = \delta[n]$$

Y calculando la salida $y[n] = h[n]$ paso a paso.

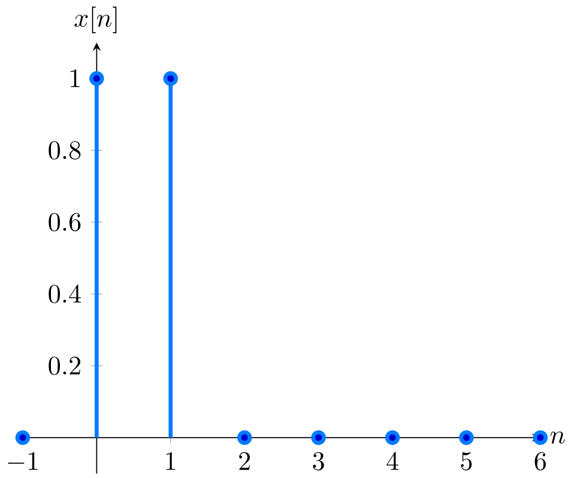
$$\begin{aligned}
n = 0 &\longrightarrow \cancelto{0}{\frac{1}{2}y[-1]} + x[0] + \cancelto{0}{x[-1]} = 1 \\
n = 1 &\longrightarrow \frac{1}{2}y[0] + \cancelto{0}{x[1]} + x[0] = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3}{2} \\
n = 2 &\longrightarrow \frac{1}{2}y[1] + \cancelto{0}{x[2]} + \cancelto{0}{x[1]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \\
n = 3 &\longrightarrow \frac{1}{2}y[2] + \cancelto{0}{x[3]} + \cancelto{0}{x[2]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \\
n = 4 &\longrightarrow \frac{1}{2}y[3] + \cancelto{0}{x[4]} + \cancelto{0}{x[3]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es un sistema IIR, ya que tiene retroalimentación.

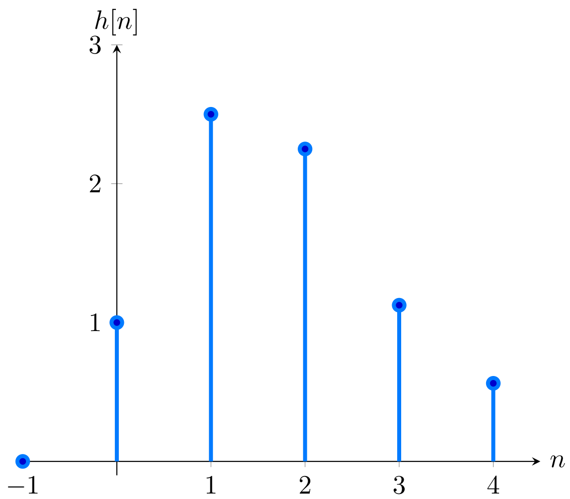
g) Dibuje el diagrama de bloques del sistema en su forma directa I.



h) Calcule la salida cuando la entrada es $x[n] = u[n] - u[n-2]$. Represéntela hasta $n = 4$.



$$
\begin{aligned}
n = 0 &\longrightarrow y[0] = \frac{1}{2}y[-1] + x[0] + x[-1] = 1 \\
n = 1 &\longrightarrow y[1] = \frac{1}{2}y[0] + x[1] + x[0] = \frac{1}{2}\cdot 1 + 1 + 1 = \frac{5}{2} \\
n = 2 &\longrightarrow y[2] = \frac{1}{2}y[1] + x[2] + x[1] = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} + 0 + 1 = \frac{9}{4} \\
n = 3 &\longrightarrow y[3] = \frac{1}{2}y[2] + x[3] + x[2] = \frac{9}{8} \\
n = 4 &\longrightarrow y[4] = \frac{1}{2}y[3] + x[4] + x[3] = \frac{9}{16}
\end{aligned}
$$



Problema 2 Dominio de la frecuencia.

a) Obtenga de 2 formas distintas la expresión analítica del espectro $X(\omega)$ correspondiente a la señal $x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right) - \prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)$.

b) Considere ahora la señal $z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-6n)$. Represente detalladamente la señal $z(t)$, indique si es periódica y, en caso afirmativo, exprese la señal $z(t)$ como una combinación lineal de exponenciales complejas. Obtenga la salida $y(t)$

que resultaría de procesar la señal $z(t)$ con el sistema LTI caracterizado por la respuesta al impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$.

c) Se nuestra ahora la sñela $x(t)$ del apartado a) tomando una muestra cada $T_s = 0.5$ seg. Escriba la expresión analítica de la secuencia $x[n]$ resultante, e indique si se habrá producido solapamiento espectral (*aliasing*) al muestrear.

d) Se desea filtrar los 300 primeros valores (esto es, para los índices $0 \leq n \leq 299$) de la secuencia $x[n]$ del apartado anterior con un sistema causal cuya respuesta al impulso $h[n]$ está comprendida entre los índices $0 \leq n \leq 199$. Indique de la forma más eficiente de obtener el resultado de dicho procesado, $y[n]$, especificando el número de puntos sobre el que se realizarán los cálculos.