

Procesos Estocásticos y Series Temporales

Francisco Javier Mercader Martínez

Índice

1	Introducción a los procesos estocásticos	2
1.1	Concepto de proceso estocástico, trayectorias y ejemplos	2
1.2	Funciones asociadas a un proceso estocástico	4
1.3	Procesos estacionarios y débilmente estacionarios	6
1.4	Procesos gaussianos	7
1.5	Ejemplos y simulación	8
1.5.1	Ruido blanco gaussiano	8
1.5.2	Movimiento Browniano	8
1.6	Procesos gaussianos estacionarios isotrópicos	11
2	Cadenas de Markov	17
2.1	Cadenas de Markov de tiempo discreto	17
2.2	Matriz de transición de n pasos	20
2.3	Clasificación de los estados	21
2.4	Número de visitas	25
2.5	Probabilidades de absorción y tiempos medios de llegada	25
2.5.1	Probabilidades de absorción	26
2.6	Comportamiento asintótico	26
2.7	Algoritmo PageRank	30
3	Procesos de Poisson	35
3.1	Procesos de conteo	35
3.2	Proceso de Poisson	36
3.2.1	Distribución de Poisson	36
3.2.2	Definición de proceso de Poisson	37
3.3	Tiempos de ocurrencia (llegada) en un Proceso de Poisson	38
3.3.1	Distribución exponencial	39
3.3.2	Modelización de tiempos de llegada y entre llegadas consecutivas	39
3.3.3	Simulación de procesos de Poisson	41
3.4	Transformadas de procesos de Poisson	41
3.4.1	Superposición de procesos de Poisson independientes	42
3.4.2	Separación de procesos de Poisson	44
3.5	Procesos de renovación	46

Tema 1: Introducción a los procesos estocásticos

Los procesos estocásticos modelizan cantidades numéricas que cambian con el tiempo de manera aleatoria. Ejemplos del mundo real de estos procesos incluyen:

1. Resultados sucesivos en un juego de azar.
2. Número de plazas ocupadas en un parking.
3. Porcentaje de cielo cubierto en el cielo de Madrid.
4. Evolución del precio de activos financieros: acciones, tipos de cambio de divisas o criptomonedas, materias primas, etc.
5. Indicadores económicos como la inflación, el precio de la luz, y el IBEX 35.

Los procesos estocásticos proporcionan marcos matemáticos para modelar y comprender estos fenómenos, lo que permite hacer predicciones y tomar decisiones informadas.

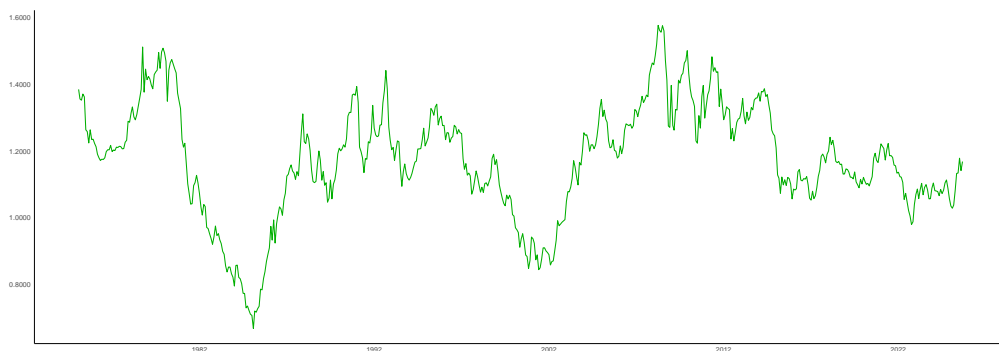


Figure 1: Evolución del tipo de cambio Euro/dólar (Fuente: Google Finance)

1.1) Concepto de proceso estocástico, trayectorias y ejemplos

A lo largo de este tema, vamos a fijar un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un subconjunto $\mathbb{T} \subset [0, \infty)$.

Definición 1.1.1 Un **proceso estocástico** $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ es una colección de variables aleatorias reales X_t definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Interpretamos t como el tiempo (medido en cierta unidad).

- Si \mathbb{T} es contable (por ejemplo, $\mathbb{T} = \{0 < 1 < 2 < \dots\}$), diremos que el proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ es de tiempo discreto.
- Si \mathbb{T} es un intervalo (por ejemplo, $\mathbb{T} = [0, T]$ o $\mathbb{T} = [0, \infty)$), diremos que el proceso estocástico es de tiempo continuo.

Para cada $t \in \mathbb{T}$ tenemos una variable aleatoria X_t . La variable aleatoria X_t tomará un valor numérico $X_t(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$. A los posibles valores que toma un proceso estocástico se les llama **estados**.

- Si para cada $t \in \mathbb{T}$ la variable aleatoria X_t es de tipo discreto, diremos que el proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ es de estado discreto.
- Si para cada $t \in \mathbb{T}$ la variable aleatoria X_t es de tipo continuo, diremos que el proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ es de estado continuo.

	t Discreto	t Continuo
X Discreta	Proceso de estado discreto y tiempo discreto (Unidades prod. mensualmente de un producto)	Proceso de estado discreto y tiempo continuo (Unidades producidas hasta t)
X Continua	Proceso de estado continuo y tiempo discreto (Toneladas de producción diaria de un producto)	Proceso de estado continuo y tiempo continuo (Velocidad de un vehículo en el instante t)

Figure 2: Tipos de procesos estocásticos

En lo que sigue, siempre supondremos que $0 \in \mathbb{T}$. Esta condición no es realmente restrictiva, ya que podemos desplazar el tiempo por una constante para garantizar que dicha condición se cumple.

Definición 1.1.2 Dado un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, para cada realización $\omega \in \Omega$, la colección de números reales $(X_t(\omega))_{t \in \mathbb{T}}$ se llama **trayectoria** del proceso.

- Para un proceso estocástico $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ de tiempo discreto, cada trayectoria define una sucesión de números reales $(x_t)_{t=0,1,2,\dots}$.
- Para un proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ de tiempo continuo, cada trayectoria define una función real $t \mapsto x(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

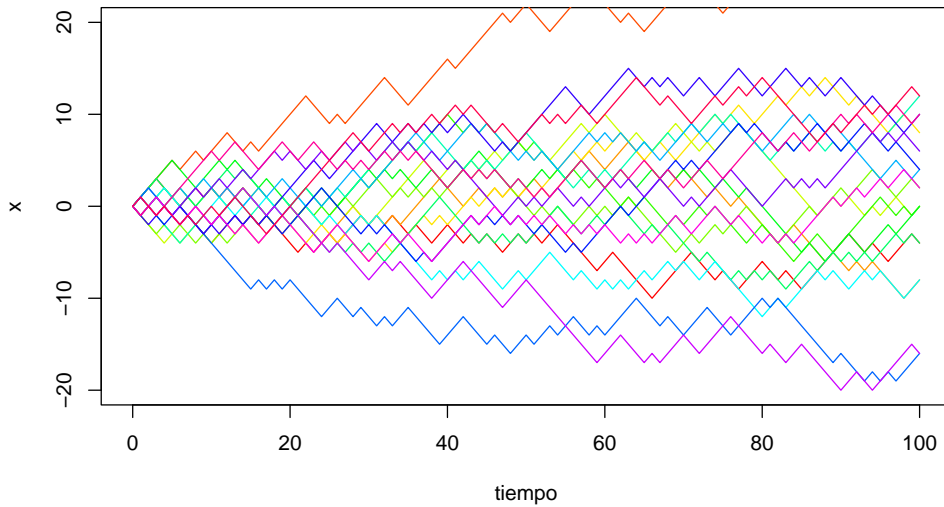
Cada trayectoria corresponde a una observación particular de la evolución del valor de un proceso estocástico en el tiempo.

Ejemplo. Supón que inviertes 100 euros en una cuenta bancaria con tipo de interés anual R , compuesto anualmente. Es decir, si X_t es la cantidad de dinero en el año t , entonces

$$X_t = 100 \cdot (1 + R)^t \text{ para } t = 0, 1, 2, \dots$$

Supongamos también que el valor de $R > 0$ es fijado cuando metes el dinero en la cuenta y sigue una distribución $\text{Exp}(1)$.

Para cada observación particular $R = r$ de la variable R tendremos una trayectoria del proceso estocástico $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$. Podemos simular y dibujar cinco trayectorias de este proceso estocástico mediante el siguiente código en R:



1.2) Funciones asociadas a un proceso estocástico

Dado un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, cada variable aleatoria X_t tendrá su propia distribución de probabilidad la cual puede ser discreta o continua. Observar un proceso estocástico en un solo tiempo de forma aislada no es útil para describir su comportamiento como función del tiempo, ya que los valores observados en un tiempo pueden condicionar su comportamiento en tiempos distintos. Por ejemplo, en el caso del camino aleatorio simétrico en el que apostamos un euro a cara, si hemos acumulado muchas ganancias en el pasado, cual disminuirá a lo sumo en un euro en cada lanzamiento.

Por ese motivo, es necesario estudiar la distribución de probabilidad conjunta a lo largo de varios tiempos.

Definición 1.2.1 Supongamos que $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ es un proceso estocástico. Dada una sucesión finita de tiempos $\{t_1 < t_2 < \dots < t_n\} \subset \mathbb{T}$, la función $F_{t_1, t_2, \dots, t_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

se llama **función de distribución (marginal) finito dimensional** del proceso $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

La función de distribución finito dimensional describe el comportamiento probabilístico del proceso estocástico observado en los distintos tiempo t_1, t_2, \dots, t_n . La distribución de probabilidad de un proceso está caracterizada por el conjunto de todas las distribuciones finito dimensionales. En particular, dos procesos estocásticos con las mismas funciones de distribución finito dimensionales tendrán un comportamiento probabilístico similar.

En el caso de que $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sea de estado discreto, entonces dicho comportamiento probabilístico puede ser descrito por medio la **función puntual de probabilidad finito dimensional**

$$P_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n).$$

En el caso de que $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sea de estado continuo, consideramos la **función de densidad finito dimensional** $f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, la cual verifica

$$\mathbb{P}(a_1 < X_{t_1} < b_1, \dots, a_n < X_{t_n} < b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

para todo $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$.

Definición 1.2.2 Dado un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ la **función medio o función de medias** $\mu_X : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t).$$

- Para un proceso estocástico $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ de tiempo discreto, la función media define una sucesión de números reales $(\mu_X(t))_{t=0,1,2,\dots}$ de tiempo discreto, la función media define una sucesión de números reales $(\mu_X(t))_{t=0,1,2,\dots}$.
- Para un proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ de tiempo continuo, la función media define una función real $t \mapsto \mu_X(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

La función de medias da una idea de cómo el proceso estocástico se comporta en promedio a lo largo del tiempo.

Ejemplo. Volvamos al ejemplo donde una moneda es lanzada reiteras veces y $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ son las ganancias acumuladas al apostar un euro a cara en cada lanzamiento (paseo aleatorio simétrico). En este caso, $\mu_X(0) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(0) = 0$ y, si $t > 0$,

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) + \dots + \mathbb{E}(Y_t) = 0,$$

donde hemos aplicado que $\mathbb{E}[Y_s] = 0$ para todo s . En definitiva, la ganancia acumulada promedio es 0 para cualquier número de lanzamientos efectuado.

Definición 1.2.3 Dado un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ la **función de covarianza** $C_X : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$C_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}((X_s - \mu_X(s))(X_t - \mu_X(t))) = \mathbb{E}(X_s X_t) - \mu_X(s) \mu_X(t).$$

La **función de varianza** $\sigma_X^2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\sigma_X^2(t) = \text{Var}(X_t) = C_X(t, t),$$

y la **función de correlación** $\rho_X : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\rho_X(s, t) = \frac{C_X(s, t)}{\sigma_X(s)\sigma_X(t)}.$$

Ejemplo. Consideremos el proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ definido como

$$X_t = A + Bt \quad \forall t \in [0, \infty),$$

donde A y B son variables aleatorias $N(1, 1)$ independientes.

Tenemos por un lado que la función de medias viene dada por:

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(A + Bt) = 1 + t \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Y por otro lado la función de varianzas es:

$$C_X(s, t) = \mathbb{E}(X_s X_t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$$

Observar que la esperanza del producto vale:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_s X_t) &= \mathbb{E}((A + Bt)(A + Bs)) \\ &= \mathbb{E}(A^2 + ABs + ABt + B^2 st) \\ &= \mathbb{E}(A^2) + \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B)(s + t) + \mathbb{E}(B^2)st \\ &= 2 + s + t + 2st \end{aligned}$$

Y el producto de esperanza vale:

$$\mu_X(s)\mu_X(t) = (1 + s)(1 + t) = 1 + s + t + st.$$

Por tanto, para este proceso estocástico la función de covarianzas es:

$$C_X(s, t) = (2 + s + t + 2st) - (1 + s + t + st) = 1 + st,$$

la función de varianzas:

$$\sigma_X^2(t) = \text{Var}(X_t) = C_X(t, t) = 1 + t^2,$$

y la función de correlaciones:

$$\rho_X(s, t) = \frac{1 + st}{\sqrt{(1 + t^2)(1 + s^2)}}$$

Ejemplo. Volvamos al ejemplo del paseo aleatorio simétrico $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$. Fijados dos números naturales n, m con $n \leq m$, tenemos

$$\begin{aligned} C_X(n, m) &= \mathbb{E}(X_n X_m) \\ &= \mathbb{E}(X_n(X_m - X_n + X_n)) \\ &= \mathbb{E}(X_n(X_m - X_n)) + \mathbb{E}(X_n^2) \\ &= \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_m - X_n) + \mathbb{E}(X_n^2) \\ &= n = \min(n, m), \end{aligned}$$

donde hemos usado que X_n y $X_m - X_n$ son variables aleatorias independientes. Además, obsérvese que, como $X_n =$

$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ y las variables Y_1, Y_2, \dots, Y_n son independientes, se tiene que:

$$\text{Var}(X_n) = \text{Var}(Y_1^2) + \text{Var}(Y_2^2) + \dots + \text{Var}(Y_n^2) = 1 + 1 + \dots + 1 = n,$$

y por tanto:

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \text{Var}(X_n) + (\mathbb{E}(X_n))^2 = n + 0 = n.$$

1.3) Procesos estacionarios y débilmente estacionarios

Los procesos estocásticos se pueden dividir entre estacionarios (en sentido estricto), débilmente estacionarios y no estacionarios. Intuitivamente hablando, un proceso estocástico es estacionario (en sentido estricto) si su comportamiento probabilístico o distribución no cambia con el tiempo.

Definición 1.3.1 Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ se dice que es **estacionario** si para toda sucesión finita de tiempos t_1, t_2, \dots, t_n y todo $s > 0$ se verifica que los vectores aleatorios

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \quad \text{y} \quad (X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \dots, X_{t_n+s})$$

tienen la misma función de distribución, es decir,

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1+s, t_2+s, \dots, t_n+s}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

para cualesquiera números reales x_1, x_2, \dots, x_n .

En particular, si un proceso es estacionario, entonces todas las variables aleatorias X_t del proceso tienen la misma distribución, es decir, están idénticamente distribuidas. Esto no implica que los vectores aleatorios que pueden formar con las variables del proceso en diferentes instantes tengan todos la misma distribución.

En la práctica es muy útil saber si un proceso estocástico es estacionario cuando es necesario predecir el comportamiento futuro de dicho proceso. Si sabemos que el proceso es estacionario, entonces observando su comportamiento en el pasado podremos inferir información de su comportamiento en el futuro.

A continuación introducimos una noción de estacionaridad menos exigente, la cual es también muy útil para predecir comportamientos futuros de procesos estocásticos reales.

Definición 1.3.2 Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ se dice que es **débilmente estacionario** si:

- 1) $\mu_X(t) = \mu_X(0)$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Es decir, la función de medias es constante.
- 2) $C_X(s, t) = C_X(0, t - s)$ para todo $s, t \in \mathbb{T}$ con $s \leq t$. Es decir, la función de covarianzas depende sólo del salto entre tiempos.

Obsérvese que, en particular, si el proceso es débilmente estacionario tendrá función de varianzas constante.

Dado que la media $\mu_X(t)$ es determinada por la función de distribución marginal $F_t(x)$, y la covarianza $C_X(s, t)$ es determinada por la función de distribución marginal $F_{s,t}(x)$, todo proceso estacionario será también débilmente estacionario. Sin embargo, es posible que un proceso sea débilmente estacionario pero no estacionario.

Ejemplo. Consideremos el proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ definido por

$$X_t = Y \cos(U + t),$$

donde Y y U son variables aleatorias independientes con $Y \sim N(0, 1)$ y $U \sim U[0, 2\pi]$. Entonces

$$\mu_X(t) = 0,$$

y además, para $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
C_X(s, t) &= \mathbb{E}(X_s X_t) - \mu_X(s) \mu_X(t) \\
&= \mathbb{E}((Y \cos(U + s))(Y \cos(U + t))) \\
&= \mathbb{E}(Y^2) \mathbb{E}(\cos(U + s) \cos(U + t)) \\
&= \mathbb{E}(\cos(U + s) \cos(U + t)) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2} \cos(2U + s + t) + \frac{1}{2} \cos(t - s)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2} \cos(2U + s + t)\right) + \frac{1}{2} \cos(t - s) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\cos(2u + s + t) \frac{1}{2\pi}\right) du + \frac{1}{2} \cos(t - s) \\
&= 0 + \frac{1}{2} \cos(t - s) \\
&= \frac{1}{2} \cos(t - s)
\end{aligned}$$

En particular, tenemos que $C_X(s, t) = \frac{1}{2} \cos(t - s) = C_X(0, t - s)$, de donde deducimos que el proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ es débilmente estacionario.

1.4) Procesos gaussianos

A continuación introducimos una de las familias de procesos estocásticos más importantes: los procesos gaussianos. Este tipo de procesos tienen importantes aplicaciones en Machine Learning.

Recordemos primero la noción de variable **Normal multivariante**. Una propiedad importante de las variables normales multivariadas es que su función de densidad (y, por tanto, su distribución) está completamente determinada por el vector de medias y la matriz de covarianzas.

Definición 1.4.1 Se dice que el vector aleatorio $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sigue una distribución Normal multivariante si su función de densidad viene dada por:

$$f_X(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|C_X|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu}_X)^\top C_X^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}_X) \right\} \text{ para todo } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\vec{\mu}_X$ es el vector de medias de \vec{X} y C_X es la matriz de covarianzas de \vec{X} .

Propiedad: Se puede probar, aunque no es inmediato, que una condición equivalente para el vector aleatorio (X_1, X_2, \dots, X_n) siga una distribución Normal multivariante es que, para cualesquiera números reales a_1, a_2, \dots, a_n la variable aleatoria real

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

sigue una distribución Normal univariante.

Otra importante propiedad de las variables aleatorias normales multivariadas que conviene recordar es que las transformaciones lineales de estas variables también son normales multivariadas. En otras palabras, si \vec{X} es un vector aleatorio Normal multivariante de tamaño n , A es una matriz constante de tamaño $m \times n$, y \vec{b} es un vector constante de tamaño m , entonces el vector aleatorio $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$ también es un vector aleatorio Normal multivariante.

Definición 1.4.2 Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ se dice que es **gaussiano** (o **Normal**) si para toda sucesión de tiempos $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ el vector aleatorio

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$$

es una variable Normal multivariante.

Una importante propiedad de los procesos gaussianos es que las nociones de estacionaridad y estacionaridad débil son equivalentes para este tipo de procesos. En la práctica esto significa que para verificar que un proceso gaussiano es estacionario

basta analizar su media y covarianza. Concretamente, tenemos lo siguiente.

Teorema 1.4.1 Sea $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un proceso estocástico gaussiano. Si $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ es débilmente estacionario, entonces es también estacionario.

1.5) Ejemplos y simulación

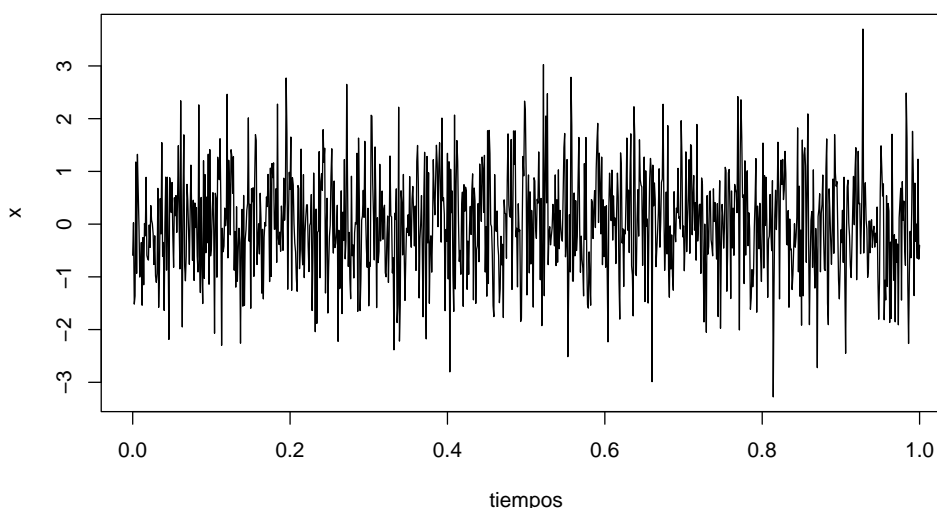
En lo que sigue vamos a estudiar y simular en R algunos ejemplos particulares de procesos estocásticos gaussianos, analizando en cada paso si se trata de procesos estacionarios o no estacionarios.

1.5.1) Ruido blanco gaussiano

Definición 1.5.1 Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ se llama **ruido blanco gaussiano** si las variables aleatorias X_t son independientes y siguen una distribución $N(0, \sigma^2)$.

Claramente el ruido blanco gaussiano es un proceso gaussiano. Además, $\mu_X(t) = 0$, $C_X(t, s) = 0$ si $t \neq s$, y $C_X(t, t) = \sigma^2$. Lo cual en particular implica que el ruido blanco gaussiano es un proceso estacionario.

Podemos simular en R una trayectoria del ruido blanco gaussiano:



Obtenemos una trayectoria extremadamente irregular. Además, observamos a simple vista un comportamiento estacionario del proceso.

1.5.2) Movimiento Browniano

Definición 1.5.2 Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$, de tiempo continuo se dice que es un **movimiento Browniano** o **proceso de Wiener** si cumple:

- 1) $X_0 = 0$.
- 2) Para todo par de tiempos $s \leq t$, la variable aleatoria $X_t - X_s$, sigue una distribución $N(0, t - s)$.
- 3) Para cualquier sucesión de tiempo $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ se tiene que las variables aleatorias

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \quad X_{t_3} - X_{t_2}, \quad \dots, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes.

- 4) Las trayectorias $t \mapsto X_{t(\omega)}$ son funciones continuas.

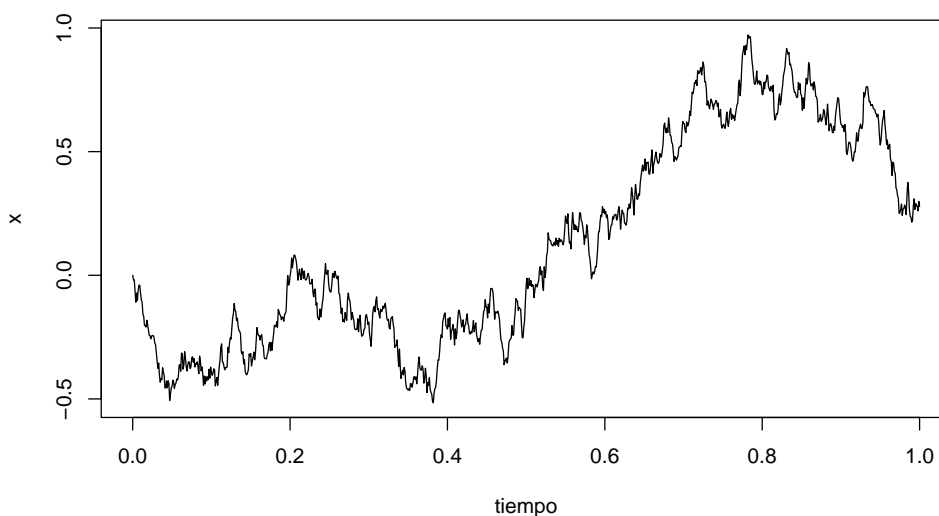
El movimiento Browniano se utiliza en finanzas para modelar la evolución del precio de activos financieros como las acciones o los tipos de cambio. En particular, se aplica a la valoración de opciones financieras mediante el bloque de Black-Scholes, y el análisis de riesgos.

A continuación vamos a simular una trayectoria del movimiento Browniano. Para ello fijamos un incremento de tiempo $\Delta t > 0$ y un número natural n . Deseamos simular una trayectoria en los instantes de tiempo $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_n = n\Delta t$. En vista de la definición de movimiento Browniano, tenemos que los incrementos

$$\Delta X_1 = X_{t_1} - X_{t_0}, \quad \Delta X_2 = X_{t_2} - X_{t_1}, \quad \dots, \quad \Delta X_n = X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

son variables aleatorias independientes y siguen todas ellas una distribución $N(0, \Delta t)$. De este modo, nuestra estrategia será simular los valores de los incrementos mediante la generación de una muestra aleatoria de n variables $N(0, \Delta t)$ independientes, y reconstruir la trayectoria del proceso a partir de dichos incrementos. Esto podemos lograrlo mediante el siguiente código en R:

```
set.seed(11)
n <- 1000
dt <- 1/n
tiempo <- seq(from=0, to=1, by=dt)
incrementos <- rnorm(n, 0, sqrt(dt))
x <- c(0, cumsum(incrementos))
plot(tiempo, x, type = "l", lty = 1)
```



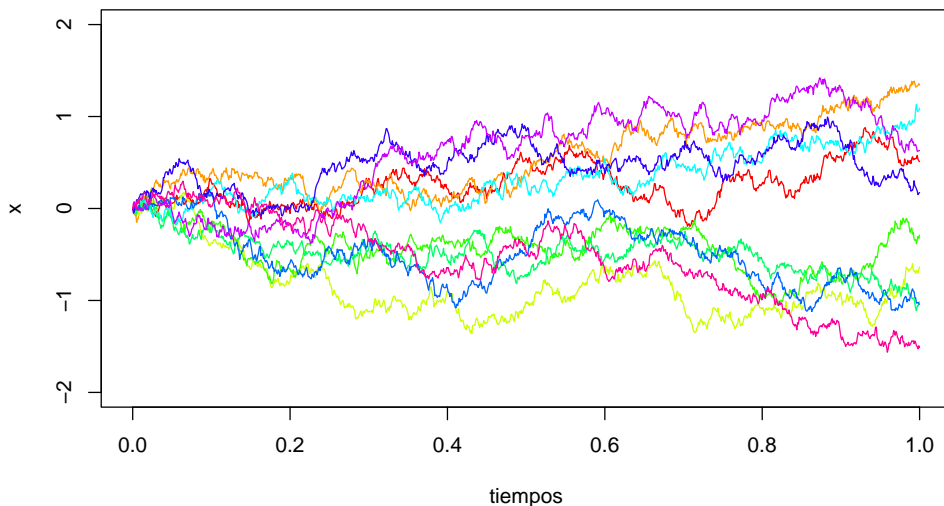
Para analizar el comportamiento probabilístico, simularemos diez trayectorias del proceso:

```
set.seed(123)
nsim <- 10
n <- 1000
dt <- 1/n
tiempos <- seq(from=0, to=1, by=dt)
incrementos <- rnorm(n, 0, sqrt(dt))
x <- c(0, cumsum(incrementos))

colores <- rainbow(nsim)

plot(tiempos, x, ylim=c(-2,2), type = "l", lty = 1, col=colores[1])
```

```
for (i in 2:nsim) {
  incrementos=rnorm(n, 0, sqrt(dt))
  x <- c(0, cumsum(incrementos))
  lines(tiempos, x, col=colores[i])
}
```



A simple vista observamos un comportamiento no estacionario del proceso. Notamos que a medida que avanza el tiempo, las trayectorias tienden a volverse más dispersas, lo que indica que el comportamiento probabilístico de las trayectorias varía con el tiempo.

El movimiento Browniano es un proceso gaussiano. De hecho, la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$, para $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, es normal multivariada porque se obtiene como una transformación lineal del vector $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$, el cual es normal multivariado porque sus componentes son independientes y normales.

Además, $\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) = 0$ y, para $s \leq t$,

$$\begin{aligned} C_X(s, t) &= \mathbb{E}(X_s X_t) \\ &= \mathbb{E}(X_s(X_t - X_s + X_s)) \\ &= \mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)) + \mathbb{E}(X_s^2) \\ &= s = \min(s, t) \end{aligned}$$

En resumen, el movimiento Browniano es un proceso gaussiano con funciones de media y covarianza $\mu_X(t) = 0$, y $C_X(s, t) = \min(s, t)$, respectivamente. En particular, observamos que este proceso no es estacionario (ni siquiera en el sentido débil), ya que en general no se verifica que $C_X(s, t) = C_X(0, t - s)$. Por ejemplo, $C_X(3, 4) = \min(3, 4) = 3$; sin embargo, $C_X(0, 4 - 3) = \min(0, 1) = 0$.

A continuación vamos a detallar otra estrategia para simular el movimiento Browniano, la cual se basa en que dicho proceso es gaussiano. Aunque nos vamos a centrar en el caso particular del movimiento Browniano, este procedimiento sirve para simular cualquier proceso gaussiano conocidas sus funciones de media y covarianza. Fijados los tiempos $t_1 < \dots < t_n$ sabemos que el vector aleatorio $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ sigue una distribución multivariada de media $\mu_X = 0$ y matriz de covarianzas $C_X = (c_{i,j})_{n \times n}$ donde $c_{i,j} = \min\{t_i, t_j\}$. De esta manera, podremos simular una trayectoria mediante la obtención de una muestra del anterior vector aleatorio. Para ello utilizamos la librería `mvtnorm` de R, la cual permite simular variables aleatorias normales multivariadas.

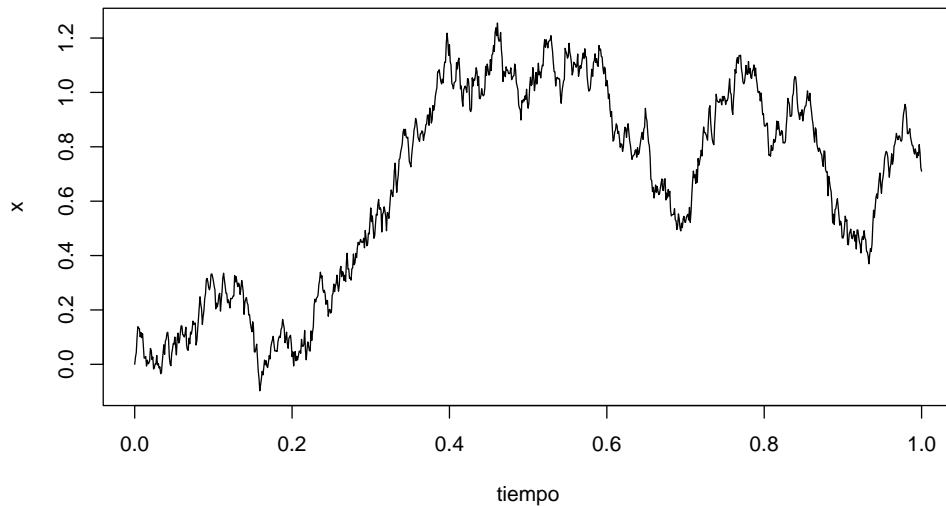
```
set.seed(23)
n <- 1000
```

```
dt <- 1/n
tiempo <- seq(from=0, to=1, by=dt)

# Definimos la matriz de covarianzas
C <- matrix(NA, nrow = n, ncol = n)
C <- dt*pmin(row(C), col(C))

# Simulamos una normal multivariada
library(mvtnorm)
x <- rmvnorm(1, sigma = C)

# Añadimos el valor 0 inicial
x <- c(0, x)
plot(tiempo, x, type = "l", lty = 1)
```



1.6) Procesos gaussianos estacionarios isotrópicos

Un tipo particular de proceso gaussiano estacionario son los procesos gaussianos estacionarios isotrópicos.

Definición 1.6.1 Decimos que un proceso gaussiano estacionario $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ es **isotrópico** si su función de medias es constante, $\mu_X(t) = \mu$, y la función de covarianza depende sólo de la distancia $|t - s|$, es decir,

$$C_X(s, t) = K(|t - s|)$$

para cierta función $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ llamada núcleo.

Tomemos por ejemplo $\mu_X(t) = 0$ y el núcleo exponencial $K_l(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right)$, donde l es un parámetro de escala. Vamos a simular en R una trayectoria de dicho proceso:

```
set.seed(112)
n <- 1000
dt <- 1/n
tiempo <- seq(from=0, to=1, by=dt)

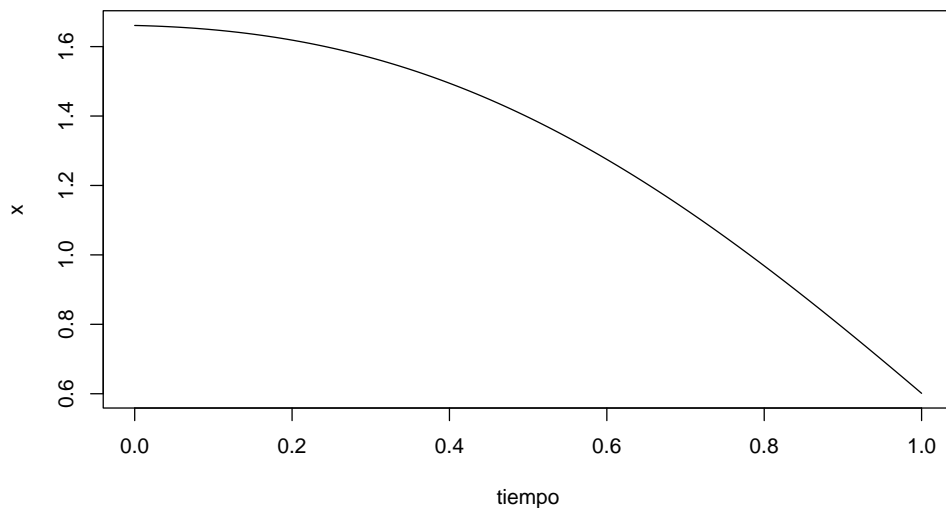
# Definimos la matriz de covarianzas
```

```

l <- 1
C <- matrix(NA, nrow = n+1, ncol = n+1)
C <- dt*abs(row(C)-col(C))
C <- exp(-C^2/(2*l^2))

# Simulamos una normal multivariada
library(mvtnorm)
x <- rmvnorm(1, sigma = C)
plot(tiempo, x, type = "l", lty = 1)

```



Para analizar el comportamiento probabilístico, podemos simular diez trayectorias del proceso:

```

set.seed(112)
nsim <- 10
n <- 1000
dt <- 1/n
tiempo <- seq(from=0, to=1, by=dt)

# Definimos la matriz de covarianzas
l <- 1
C <- matrix(NA, nrow = n+1, ncol = n+1)
C <- dt*abs(row(C)-col(C))
C <- exp(-C^2/(2*l^2))

# Simulamos una normal multivariada
library(mvtnorm)
x <- rmvnorm(1, sigma = C)

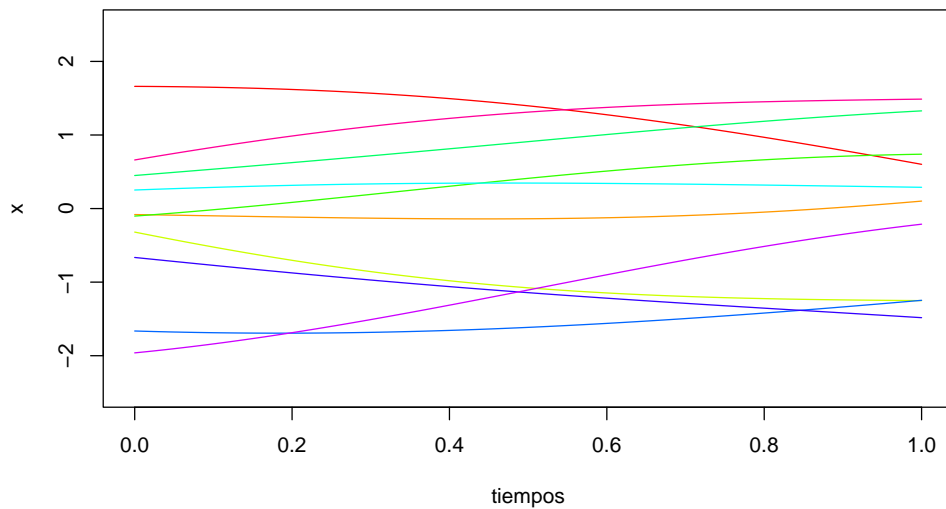
colores <- rainbow(nsim)

plot(tiempos, x, ylim=c(-2.5,2.5), type = "l", lty = 1, col=colores[1])

for (i in 2:nsim) {
  incrementos=rnorm(n, 0, sqrt(dt))

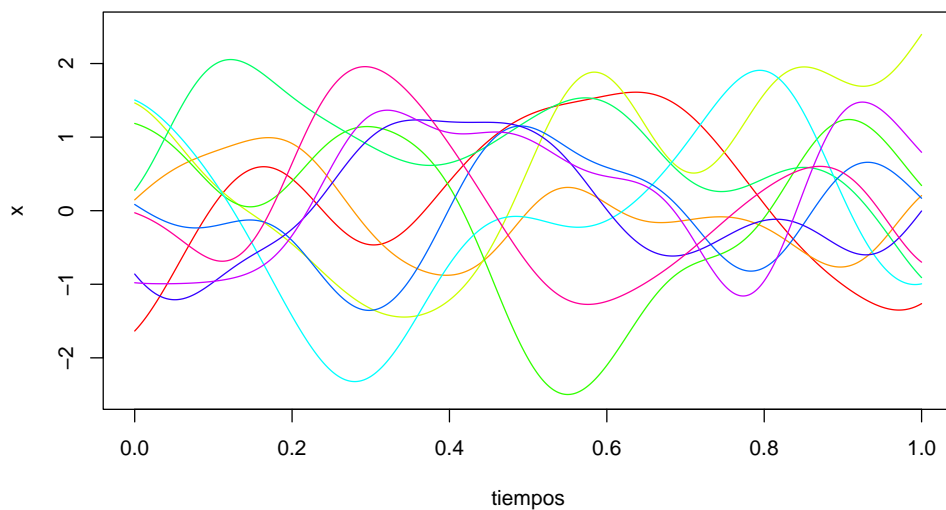
```

```
x <- rmvnorm(1, sigma = C)
lines(tiempos, x, col=colores[i])
}
```



A diferencia del movimiento Browniano, vemos que las trayectorias presentan un comportamiento estacionario, ya que su distribución es la misma a lo largo del tiempo. Otra diferencia con el movimiento Browniano es que las trayectorias tienen una apariencia suave.

Podemos cambiar el parámetro de escala, tomando $l = 0.1$. De este modo obtenemos las trayectorias:



Tomemos ahora el núcleo de Ornstein-Uhlenbeck $K - l(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right)$.

Simulemos algunas trayectorias en R:

```
set.seed(112)
nsim <- 10
n <- 1000
dt <- 1/n
tiempo <- seq(from=0, to=1, by=dt)
```

```

# Definimos la matriz de covarianzas
l <- 1
C <- matrix(NA, nrow = n+1, ncol = n+1)
C <- dt*abs(row(C)-col(C))
C <- exp(-C/l)

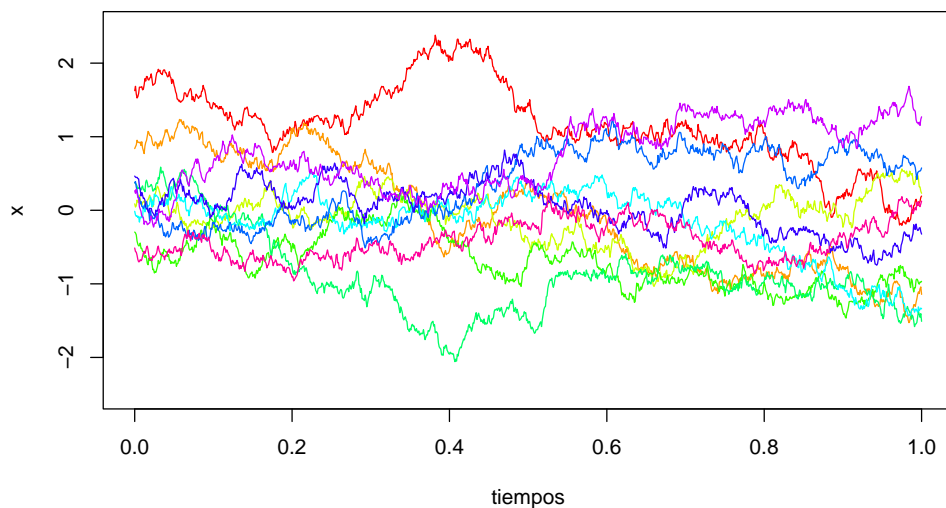
# Simulamos una normal multivariada
library(mvtnorm)
x <- rmvnorm(1, sigma = C)

colores <- rainbow(nsim)

plot(tiempos, x, ylim=c(-2.5,2.5), type = "l", lty = 1, col=colores[1])

for (i in 2:nsim) {
  x <- rmvnorm(1, sigma = C)
  lines(tiempos, x, col=colores[i])
}

```



Vemos que las trayectorias tienen una apariencia más irregular la cual nos recuerda al movimiento Browniano. Sin embargo, en este caso tenemos un proceso estacionario cuyas trayectorias se comportan de manera similar a lo largo del tiempo.

Hoja 1: Problemas de Introducción a los Procesos Estocásticos

- 1) ¿Qué es un proceso estocástico y cómo se define formalmente?
- 2) ¿Cuáles son los tipos principales de procesos estocásticos en función del tiempo?
- 3) ¿Cómo se clasifica un proceso estocástico según los estados que puede formar?
- 4) ¿Qué es una trayectoria en el contexto de un proceso estocástico?
- 5) ¿Qué es un paseo aleatorio y cómo se define en términos de variables aleatorias? Simular, usando R, 4 trayectorias de un paseo aleatorio con variables aleatorias i.i.d. dadas por la distribución $N(0, 1)$.
- 6) ¿Qué características tiene un paseo aleatorio simple y en qué se diferencia del paseo aleatorio simétrico? Simular, usando R, 6 trayectorias de un paseo aleatorio simple $p = \frac{1}{3}$.
- 7) ¿Qué es una función de distribución finito dimensional en un proceso estocástico?
- 8) ¿Cómo se define la función de medias de un proceso estocástico? ¿Y la de covarianzas y correlaciones?
- 9) ¿Qué relación existe entre la función de varianza y la función de covarianza en un proceso estocástico?
- 10) ¿Qué condiciones deben cumplirse para que un proceso sea estacionario y en qué se diferencia de la estacionariedad débil?
- 11) ¿Qué diferencias hay entre un proceso estocástico gaussiano y un ruido blanco gaussiano? Simular, usando R, 2 trayectorias de un ruido blanco gaussiano con varianza σ^2 .
- 12) ¿Cuál es la definición de un proceso de Wiener o movimiento Browniano? Simular, usando R, 3 trayectorias de un movimiento Browniano.
- 13) ¿Cuál de las siguientes es una condición necesaria para que un proceso estocástico sea débilmente estacionario?
 - (a) La varianza depende del tiempo.
 - (b) La media es constante en el tiempo.
 - (c) La covarianza es cero para todos los tiempos.
- 14) Si $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ es ruido blanco (gaussiano) con varianza σ^2 , ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
 - (a) $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2$ para todo t y h .
 - (b) $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2$ si $h = 0$, $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$ si $h \neq 0$.
 - (c) $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \frac{1}{2}\sigma^2$ para todo t y h .
- 15) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para un ruido blanco?
 - (a) Tiene una función de correlación que decrece exponencialmente.
 - (b) Su media es no nula.
 - (c) Sus valores en diferentes tiempos son independientes.
- 16) ¿Qué describe la función de covarianza de un proceso estocástico?
 - (a) La relación lineal en el proceso en dos tiempos diferentes.
 - (b) La suma de todas las realizaciones del proceso.
 - (c) La frecuencia con la que el proceso cruza la media.
- 17) Una condición necesaria para que un proceso estocástico sea débilmente estacionario es que:
 - (a) La media debe ser cero.
 - (b) La covarianza depende del tiempo.

(c) La función de covarianza depende solo de la diferencia entre los tiempos.

18) Consideremos el proceso estocástico de tiempo discreto $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$, con $X_0 = a \in \mathbb{R}$ una constante cualquiera y $X_t = 3 + \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$ para todo $t = 1, 2, \dots$, siendo $(\varepsilon_t)_{t=0,1,2,\dots}$ ruido blanco (gaussiano) de varianza σ^2 .

(a) Calcular la función de medias, covarianzas y correlaciones del proceso $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$.

(b) Justificar si el proceso es estacionario en sentido débil.

(c) Justificar si el proceso es estacionario (en sentido fuerte).

Nota: El proceso del enunciado es un proceso denominado MA(1) que estudiará en el tema posterior.

19) Consideremos el proceso estocástico de tiempo discreto $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$, con $X_0 = a \in \mathbb{R}$ una constante cualquiera y $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$, para todo $t = 1, 2, \dots$, siendo $(\varepsilon_t)_{t=1,2,\dots}$ ruido blanco (gaussiano) de varianza σ^2 . Suponiendo el proceso $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ es débilmente estacionario, obtener la función de medias y correlaciones.

Nota: El proceso del enunciado es un proceso denominado AR(1) que estudiará en el tema posterior.

20) Sea $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ un paseo aleatorio simple. Es decir, $X_0 = 0$ y $X_t = X_{t-1} + Y_t$, $(Y_t)_{t=0,1,2,\dots}$ variables aleatorias i.i.d verificando $P(Y_t = 1) = p$, $P(Y_t = -1) = 1 - p$, $p \in (0, 1)$.

(a) Calcular la función de medias, covarianzas y correlaciones del proceso $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$.

(b) Justificar si el proceso es estacionario en sentido débil.

(c) Justificar si el proceso es estacionario (en sentido fuerte).

Tema 2: Cadenas de Markov

En este tema vamos a estudiar un tipo particular de procesos estocásticos: las cadenas de Markov. Este tipo de procesos describen cambios de estado en un sistema, con la peculiaridad de que dichos cambios dependen únicamente del estado actual y no están influenciados por ningún estado que haya tomado previamente.

Por ejemplo, imaginemos un aparcamiento y consideremos la variable X_n representando el número de plazas de aparcamiento ocupadas en cada instante de tiempo $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Claramente el valor de X_{n+1} dependerá de X_n ya que X_{n+1} se obtiene de X_n sumándole los coches que han aparcado y restándole los que se han ido entre los instantes n y $n + 1$. Por tanto, conocido X_n , parece razonable que la cantidad X_{n+1} no dependa de los valores previos $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$.

Este tipo de procesos, en los que el valor X_{n+1} depende exclusivamente de X_n y no se ve influenciado por los estados previos $X_0, X_1, X_2, \dots, x_{n-1}$ es formalizado matemáticamente mediante el concepto de cadena de Markov.

2.1) Cadenas de Markov de tiempo discreto

Definición 2.1.1 Un proceso estocástico $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ de tiempo discreto se dice que es una **cadena de Markov** (de tiempo discreto) si se verifica:

- 1) Cada X_n toma valores en un conjunto numerable (es decir, finito o infinito numerable) \mathcal{S} llamado **espacio de estados**.
- 2) Se cumple que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n, X_{n-1} = a_{n-1}, \dots, X_0 = a_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n), \quad (1)$$

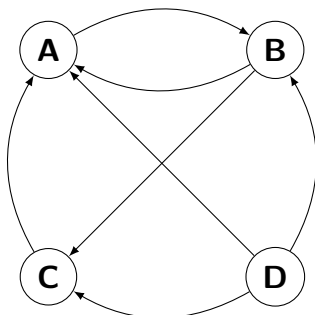
donde $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathcal{S}$.

La condición (1) arriba se llama **propiedad de Markov**. La interpretación es que la probabilidad de cualquier valor futuro del proceso, dado el valor actual, no está influenciada por ningún valor pasado. Se dice que las cadenas de Markov son procesos estocásticos sin memoria.

Ejemplo. (PageRank) es un algoritmo creado y desarrollado por la compañía tecnológica estadounidense Google para ordenar las apariciones de las páginas en cada búsqueda, dando preferencia a aquellas páginas que sean más "importantes" o "populares". Para medir esto, se analiza la cadena de Markov resultante de un individuo o "surfeador de la web" que va pulsando links al azar en un conjunto de páginas de internet. Por ejemplo, supongamos que el surfeador de la web navega haciendo clics al azar en las páginas A,B,C,D donde:

- A tiene enlace a B.
- B tiene enlaces a A y C.
- C tiene enlace a A.
- D tiene enlaces a las otras tres páginas.

Este proceso da lugar a una cadena de Markov con espacio de estados $\{A, B, C, D\}$, el cuál puede ser descrito mediante el siguiente grafo.



Además, tenemos las siguientes probabilidades de transición entre estados.

	A	B	C	D
A	0%	100%	0%	0%
B	50%	0%	50%	0%
C	100%	0%	0%	0%
D	33.3333%	33.3333%	33.3333%	0%

Claramente este proceso da lugar a una cadena de Markov, ya que, en cada paso, las probabilidades de visitar una página u otra, sólo depende de en qué página se encuentre el surfador, sin importar qué páginas haya visitado anteriormente.

El algoritmo PageRank trata de determinar la probabilidad con la que una página es visitada a medida que el surfador hace más y más clics, considerando como más importantes aquellas páginas para las que esta probabilidad. Éste es el criterio usado para ordenar las páginas en cada búsqueda en Google. Analizaremos este problema en detalle al final del tema.

Ejemplo. El paseo aleatorio simétrico $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ es una cadena de Markov con espacio de estados infinito

$$\mathcal{S} = \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

En este caso, para todo $i \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) &= 0 \text{ si } j \neq i \pm 1.\end{aligned}$$

Definición 2.1.2 Supongamos que $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ es una cadena de Markov con espacio de estados \mathcal{S} . Las **probabilidades de transición** son las probabilidades

$$p_{x,y}(n) = \mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x),$$

donde $x, y \in \mathcal{S}$ y $n = 1, 2, 3, \dots$

Definición 2.1.3 Decimos que la cadena de Markov $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ es **homogénea** si las probabilidades de transición no dependen del tiempo. En tal caso, definimos

$$\begin{aligned}p_{x,y} &= \mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)\end{aligned}$$

donde hemos eliminado n de la notación.

En el resto de este tema vamos a trabajar con cadenas de Markov homogéneas con un número de estados **finito**. Por lo que a partir de ahora, cada vez que nos refiramos a una **cadena** estaremos hablando de una cadena de Markov con esas características.

En general, usaremos que $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ es una cadena con espacio de estados finito que denotaremos por $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$.

Definición 2.1.4 Definimos la **matriz de transición** de $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ como

$$P = (p_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,N} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{bmatrix}$$

Obsérvese que las entradas de la fila 1 describen todas las probabilidades posibles condicionadas a empezar en el estado

$i = 1$. Por tanto, la suma de todas ellas debe ser igual a 1. Obviamente, lo mismo es cierto para el resto de filas, es decir, $p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,N} = 1$ para cada i . Por tanto, en una matriz de transición, la suma de todos los elementos de cualquier fila debe de ser 1. Sin embargo, esta condición no tiene por qué verificarse para las columnas de una matriz de transición.

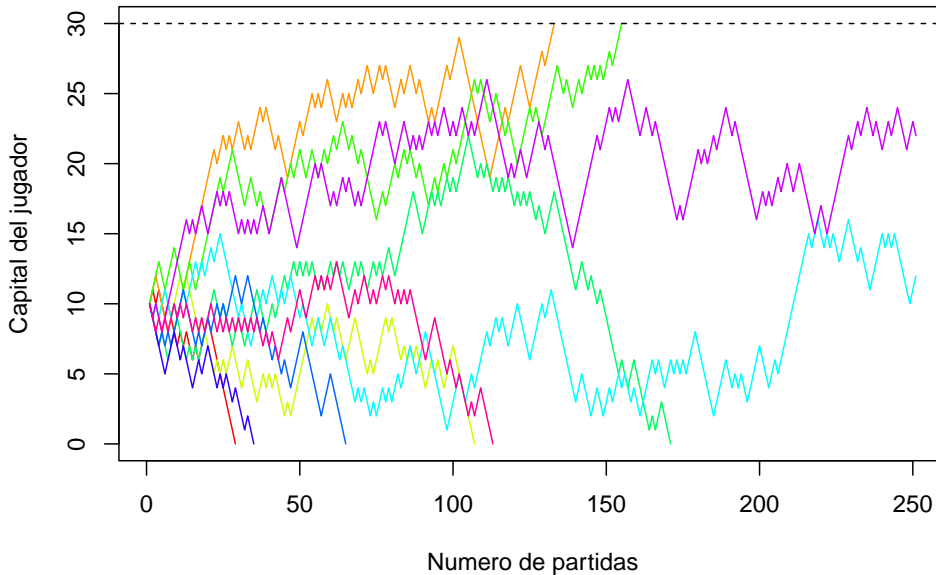
Ejemplo. (Urnas de Ehrenfest) Supongamos que tenemos dos urnas, U_1 y U_2 . En ellas están distribuidas N bolas numeradas. En cada paso, se elige un número al azar entre $\{1, 2, \dots, N\}$. A continuación se observa en qué urna está la bola con el número elegido y se cambia de urna. Denotemos por X_n el número de bolas contenidas en la urna U_1 en tiempo n . De esta manera, definimos una cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ y probabilidades de transición

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = i + 1 | X_{n-1} = i) &= \frac{N - i}{N}, \\ \mathbb{P}(X_n = i - 1 | X_{n-1} = i) &= \frac{i}{N}, \\ \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) &= 0 \quad \text{si } j \neq i \pm 1.\end{aligned}$$

Por ejemplo, si $N = 3$ tenemos espacio de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ y una matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. (Ruina del jugador) Consideremos un individuo que juega a la ruleta, que posee una riqueza inicial de X_0 euros, y que apuesta 1 euro al rojo en cada jugada con probabilidad de ganar p . El jugador seguirá apostando hasta que, o bien alcance una riqueza objetivo M , o bien hasta que se arruine. El proceso $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ de la riqueza acumulada hasta la jugada n es una cadena de Markov con espacio de estados finito $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, M\}$.



En este caso, el proceso de la fortuna acumulada $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ es una cadena de estados $\{0, 1, 2, \dots, M\}$ y transición

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2) Matriz de transición de n pasos

En esta sección, sea $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ una cadena con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$. En general, definimos lo siguiente.

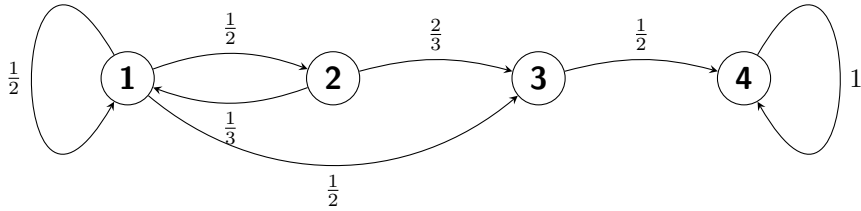
Definición 2.2.1 *Dados dos estados $i, j \in \mathcal{S}$, definimos la probabilidad de transición de n pasos*

$$p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i).$$

Definimos la **matriz de transición de n pasos** de $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ como

$$P^{(n)} = \left(p_{i,j}^{(n)} \right)_{i,j=1,2,\dots,N} = \begin{bmatrix} p_{1,1}^{(n)} & p_{1,2}^{(n)} & \cdots & p_{1,N}^{(n)} \\ p_{2,1}^{(n)} & p_{2,2}^{(n)} & \cdots & p_{2,N}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N,1}^{(n)} & p_{N,2}^{(n)} & \cdots & p_{N,N}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Para entender cómo calcular la matriz de transición de n pasos analicemos el siguiente ejemplo. Consideremos la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ dada por el grafo:



Esta cadena tiene matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Queremos ver lo que ocurre tras dos pasos del proceso.

Por ejemplo, veamos la probabilidad de llegar al estado 1 desde el estado 1 en dos pasos

$$p_{1,1}^{(2)} = \mathbb{P}(111) + \mathbb{P}(121) = p_{1,1} \cdot p_{1,1} + p_{1,2} \cdot p_{2,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Incluyendo todos los posibles caminos, incluso aquellos que no existen en el grafo, podemos poner

$$\begin{aligned} p_{1,1}^{(2)} &= \mathbb{P}(111) + \mathbb{P}(121) + \mathbb{P}(131) + \mathbb{P}(141) \\ &= p_{1,1} \cdot p_{1,1} + p_{1,2} \cdot p_{2,1} + p_{1,3} \cdot p_{3,1} + p_{1,4} \cdot p_{4,1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Escrito de esta manera, vemos que $p_{1,1}^{(2)}$ es la primera entrada de la matriz $P^2 = P \cdot P$. Es más, tenemos que $P^2 = (p_{i,j}^2)_{i,j \in \{1,2,3,4\}}$.

En general, tenemos lo siguiente.

Teorema 2.2.1 *La matriz de transición de n pasos vendrá dada por n -ésima potencia de P . Es decir,*

$$P^n = (p_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,2,\dots,N}.$$

Como consecuencia, se tiene la relación:

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \cdot P^n$$

donde:

$$\pi^{(0)} = (\pi_1^{(0)}, \dots, \pi_N^{(0)})$$

denota el vector de probabilidades iniciales de cada estado, es decir, $\pi_j^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = j)$ y

$$\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \dots, \pi_N^{(n)})$$

denota el vector de probabilidades iniciales de cada estado en el instante n , es decir, $\pi_j^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j)$, para todo $j = 1, 2, \dots, N$.

Teniendo en cuenta el teorema anterior junto al hecho de que $P^{m+n} = P^m P^n$, tenemos lo siguiente.

Corolario 2.2.1 *(Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov)*

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^N p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)}.$$

2.3) Clasificación de los estados

Sea $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ una cadena con espacio de estados \mathcal{S} . Dados dos estados $x, y \in \mathcal{S}$, definimos

$$r_{x,y} = \mathbb{P}(X_n = y \text{ para algún } n \geq 1 | X_0 = x).$$

Esto es, $r_{x,y}$ es la probabilidad de que la cadena alcance el estado y (en algún tiempo futuro) si la cadena se inicia en el estado x .

Definición 2.3.1 Sean $x, y \in \mathcal{S}$ con $x \neq y$.

- 1) Decimos que y es **accesible** desde x si $r_{x,y} > 0$. En tal caso escribimos $x \rightarrow y$.
- 2) Decimos que x se **comunica** con y si son accesibles entre sí (es decir, $x \rightarrow y, y \rightarrow x$). En tal caso escribimos $x \leftrightarrow y$.

Por convenio, se considera que cualquier estado x es accesible desde sí mismo ($x \rightarrow y$), y que se comunica consigo mismo ($x \leftrightarrow x$), incluyendo el caso de que $r_{x,x} = 0$.

Cada cadena puede ser representada con un grado. Podemos ver la accesibilidad simplemente observando si en el grafo existe un camino desde x hasta y respetando la dirección de las flechas. Cuando haya caminos en ambas direcciones, significará que ambos estados se comunican.

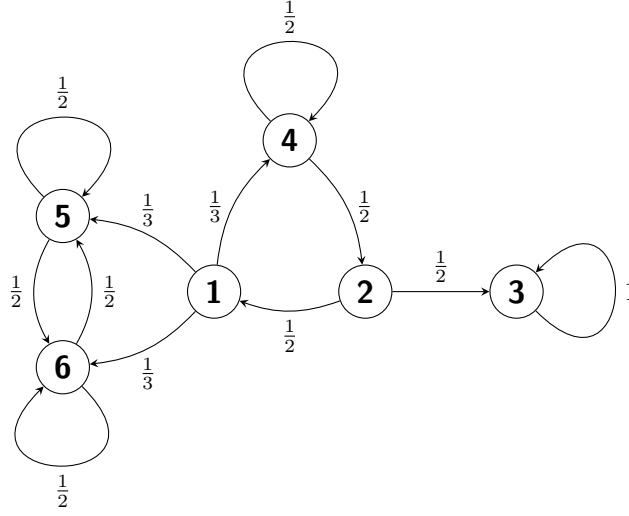


Figure 3: Observando las flechas podemos analizar la accesibilidad y la conexión entre estados

Por ejemplo, consideremos la cadena dada por el grafo de la Figura 3. Vemos que por ejemplo que $1 \rightarrow 3$ ya que podemos ir desde 1 hasta 3, siguiendo la dirección de las flechas, pasando por 4 y 2. Sin embargo, $3 \nrightarrow 1$, ya que de 3 sólo se puede volver a saltar a sí mismo. Por otro lado, $1 \leftrightarrow 2$ ya que podemos conectar ambos estados por caminos tanto empezando en 1 como empezando en 2.

En general, si un estado y es accesible desde un estado x , siempre será posible encontrar un camino desde x hasta y de modo que dicho camino no pase por un mismo estado dos veces. Para ello, basta considerar cualquier camino desde x hasta y , y si algún estado z aparece dos veces en el camino, eliminamos el tramo del camino desde la primera aparición de dicho estado hasta la última aparición del mismo, de modo que aparezca una sola vez. Dicho camino, al no pasar dos veces por un mismo estado, tendrá como mucho tantos pasos como estados tenga la cadena. En definitiva, tenemos lo siguiente.

Proposición 2.3.1 *Supongamos que el espacio de estados \mathcal{S} tiene N elementos. Entonces,*

$$x \rightarrow y \quad \text{si, y sólo si,} \quad p_{x,y}^{(n)} > 0 \quad \text{para algún } n \leq N.$$

La relación entre estados definida por la propiedad de estar comunicados es una relación de equivalencia. Es decir, tenemos lo siguiente.

Proposición 2.3.2 *Dado el espacio de estados \mathcal{S} , siempre es posible dividirlo en clases disjuntas*

$$\mathcal{S} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n \quad (2)$$

donde para todo $x, y \in \mathcal{S}$ se verifica

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow y & \quad \text{si } x, y \in C_i, \\ x \nleftrightarrow y & \quad \text{si } x \in C_i, y \in C_j, i \neq j. \end{aligned}$$

Las clases en (2) se llaman *clases irreducibles*. La proposición nos dice que cada cadena admite siempre una descomposición en clases irreducibles. Una cadena se dice que es *irreducible* si sólo posee una clase irreducible, es decir, todos sus estados se comunican entre sí.

Las clases irreducibles pueden ser fácilmente identificadas mirando el grafo de la cadena. Observando de nuevo el grado de la

cadena de la Figura 3, vemos que $1 \rightarrow 5$ pero $5 \nrightarrow 1$, por lo que están en clases diferentes. Por otro lado, $1 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, por lo que están en la misma clase. Finalmente, 3 no está comunicado con nadie, luego forma él solo una clase. En la Figura 4, podemos ver las tres clases irreducibles de la cadena que hemos identificado.

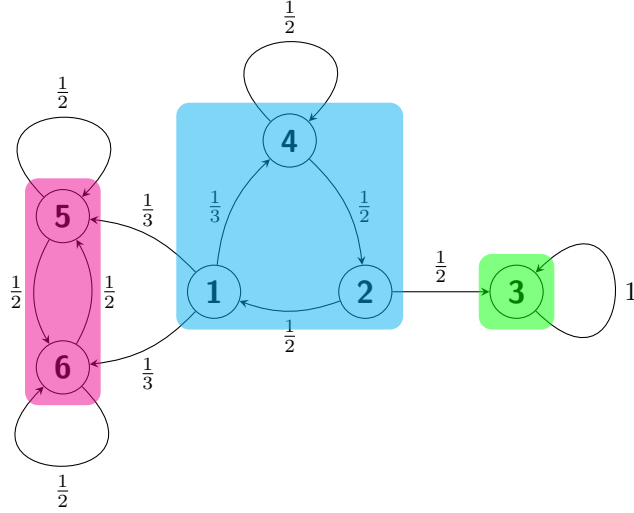


Figure 4: Tenemos en distinto color las tres clases irreducibles

A continuación vamos a introducir un criterio para clasificar los distintos estados de una cadena.

Definición 2.3.2 Sea $x \in S$.

- Decimos que x es **recurrente** si $r_{x,x} = 1$.
- Decimos que x es **transitorio** si $r_{x,x} < 1$.
- Decimos que x es **absorbente** si $p_{x,x} = 1$.

Si x es recurrente, tendremos que una vez que la cadena alcanza el estado x entonces tendremos total certeza de que volverá a alcanzar el estado x en el futuro.

Si x es transitorio, tendremos que una vez que la cadena alcanza el estado x entonces no tendremos certeza de que la cadena vuelva a alcanzar el estado x de nuevo.

Si x es absorbente, tendremos que una vez que la cadena alcanza el estado x con toda certeza permanezca en el estado x en el futuro. En particular, todo estado absorbente es también recurrente.

Mirando de nuevo al grafo de la Figura 4 arriba, vemos que el estado 3 es absorbente (y por tanto recurrente), ya que si comenzamos en él solo llegaremos al él mismo. Los estados 5 y 6 son recurrentes. Por ejemplo, vemos que si empezamos en 5 no podremos llegar a ningún otro estado excepto 6 y él mismo. Además, la única manera para que, empezando en 5, no se vuelva a visitar 5 es que la cadena se cambie al estado 6 y permanezca en ese estado en lo sucesivo. Pero la probabilidad de que eso ocurra es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots = 0$. Así que con probabilidad 1 se volverá en algún momento a 5, y por lo tanto es recurrente. El mismo argumento es aplicable a 6. Finalmente, los estados 1, 2 y 4 son transitorios ya que desde esos estados se accede a zonas de las que no se puede volver.

A continuación, enunciaremos, sin demostración, algunos resultados sobre el comportamiento de los estados recurrentes.

Teorema 2.3.1 Si $x \rightarrow y$ y x es recurrente, entonces y también es recurrente y, además, $r_{x,y} = 1 = r_{y,x}$.

El teorema de arriba nos dice que si y es accesible desde un estado recurrente, entonces se realizarán viajes de ida y vuelta entre x e y , una y otra vez.

Teorema 2.3.2 Toda cadena de Markov homogénea posee al menos un estado recurrente.

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores tenemos.

Corolario 2.3.1 *Supongamos que una cadena de Markov tiene descomposición en clases irreducibles*

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n.$$

Entonces si existe $x \in C_i$ el cual es recurrente (resp. transitorio), entonces todos los $y \in C_i$ son también recurrentes (resp. transitorios).

Obsérvese que, en la Figura 4 arriba, los estados 1, 2 y 4 están todos en una misma clase y son transitorios; los estados 5 y 6 están los dos en una misma clase y son recurrentes; finalmente, el estado 3 es absorbente y formará él solo una clase irreducible.

En las cadenas de Markov frecuentemente se observan patrones cíclicos, donde una sucesión de estados se recorre en un camino en forma de bucle empezando y acabando en un mismo estado. Esto da lugar al siguiente concepto.

Definición 2.3.3 *Un estado $x \in \mathcal{S}$ se dice que tiene **periodo** d si $p_{x,x}^{(n)} = 0$ para todo n que no sea divisible por d , y además d es el mayor número con esta propiedad. En el caso de que $p_{x,x}^{(n)} = 0$ para todo n (es decir, si $r_{x,x} = 0$), entonces diremos que el periodo de x es infinito. Un estado x con periodo 1 se dice que es **aperiódico**.*

En otras palabras, un estado x tiene periodo d si la cadena puede volver al estado x sólo en un número de pasos que sea múltiplo de d . En el caso de que la cadena no vuelva nunca más a x , el periodo es infinito.

Un importante propiedad es la siguiente.

Proposición 2.3.3 *Si $x \leftrightarrow y$, entonces x e y tienen el mismo periodo.*

Por definición en una cadena irreducible todos los estados se comunican, por lo que tenemos lo siguiente.

Corolario 2.3.2 *En una cadena irreducible todos los estados tienen el mismo periodo.*

Dado que todos los estados de una cadena irreducible tienen el mismo periodo, tiene sentido introducir lo siguiente.

Definición 2.3.4 *Se dice que una cadena irreducible tiene periodo d si uno de sus estados (y por tanto todos) tienen periodo d . Se dice que una cadena es aperiódica si uno de sus estados (y por tanto todos) es aperiódico.*

En el caso de cadenas no irreducibles tendremos lo siguiente.

Corolario 2.3.3 *Supongamos que una cadena de Markov tiene descomposición en clases irreducibles*

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n.$$

Todos los estados pertenecientes a una misma clase C_i tienen el mismo periodo.

Veremos más adelante que conocer si una cadena irreducible es aperiódica es importante en el estudio límite de las cadenas de Markov. Para determinar si un estado es aperiódico aplicaremos un simple método que explicaremos a continuación.

Recuerda que dos números n y m son coprimos si su máximo común divisor es 1. Supongamos que podemos encontrar dos números coprimos n y m tal que $p_{x,x}^{(n)} > 0$ y $p_{x,x}^{(m)} > 0$. En este caso, por definición de periodo, d debe dividir a n y m . Como n y m son coprimos, necesariamente tendremos que $d = 1$. Por tanto, para determinar si un estado x es aperiódico, trataremos de buscar en el grafo dos caminos de x en sí mismo de modo que los números de pasos dados en sendos caminos sean coprimos.

Para ilustrar este método, volvamos al ejemplo en la Figura 4 arriba. Claramente el estado 3 es aperiódico por ser absorbente. Por otro lado, partiendo del estado 1, podremos volver a dicho estado en tres pasos siguiendo el camino $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Pero, partiendo de 1, también podemos volver a 1 en cuatro pasos a través del camino $1 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ en el que pasamos dos veces por 4. Como 3 y 4 son coprimos, necesariamente tendremos que el estado 1 es aperiódico. Además, los estados 2 y 4 también serán aperiódicos por estar en la misma clase irreducible que 1. Un argumento similar muestra que los estados 5 y 6, los cuales están en la misma clase irreducible, son aperiódicos también.

2.4) Número de visitas

En esta sección vamos a estudiar el número medio de veces que una cadena de Markov alcanza un estado determinado a lo largo del tiempo. En lo que sigue consideramos una cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados \mathcal{S} . Dado $x \in \mathcal{S}$, la probabilidad de que la cadena vuelva a x habiendo empezado en x es $r_{x,x}$. Por tanto, si empezamos en x , la probabilidad de no volver nunca más a x es $1 - r_{x,x}$. Teniendo en cuenta ambas cosas, tenemos que

$$\mathbb{P}(\text{"visitar } x \text{ exactamente } k \text{ veces"} | X_0 = x) = r_{x,x}^k (1 - r_{x,x}), \quad (3)$$

donde no estamos contando la visita a x en tiempo 0.

Comentario. Recordemos que una variable aleatoria discreta Y sigue una distribución geométrica de parámetro $p \in [0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^k p \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En este caso,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1 - p}{p}.$$

Obsérvese que la anterior esperanza es infinita si $p = 0$. Para los demás valores de p tendremos valores finitos.

A partir de (3), vemos que el número de visitas a x partiendo de x sigue una distribución Geométrica de parámetro $p = 1 - r_{x,x}$. En particular, el *número esperado de visitas* a x si salimos de x es

$$\mathbb{E}(\text{"número de visitas a } x" | X_0 = x) = \frac{r_{x,x}}{1 - r_{x,x}}.$$

Además, la expresión arriba es finita si, y sólo si, $r_{x,x} < 1$, en cuyo caso x es transitorio. En caso contrario, tendremos un estado recurrente y el número esperado de visitas será infinito.

Consideremos ahora un estado y distinto de x , de modo que y es accesible desde x . Queremos calcular ahora el número medio de visitas a y empezado en x . Si partimos de x , tenemos dos posibilidades, o bien la cadena alcanza el estado y produciéndose al menos una visita, lo cual ocurre con probabilidad $r_{x,y}$; o bien no lo visita nunca, lo cual ocurre con probabilidad $1 - r_{x,y}$. De esta manera, el número esperado de visitas a y si salimos de x es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{"número de visitas a } y" | X_0 = x) &= r_{x,y} \cdot (1 + \mathbb{E}(\text{"número de visitas a } y \text{ con } n > 1" | X_1 = y)) + (1 - r_{x,y}) \cdot 0 \\ &= r_{x,y} \left(1 + \frac{r_{y,y}}{1 - r_{y,y}} \right) \\ &= \frac{r_{x,y}}{1 - r_{y,y}}. \end{aligned}$$

De nuevo podemos observar que la esperanza anterior es finita si, y sólo si, $r_{y,y} < 1$, en cuyo caso y es transitorio.

Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente enunciado.

Proposición 2.4.1 *Supongamos que x, y son dos estados (posiblemente iguales) de modo que $x \rightarrow y$. Entonces,*

$$\mathbb{E}(\text{"número de visitas a } y" | X_0 = x) = \frac{r_{x,y}}{1 - r_{y,y}}.$$

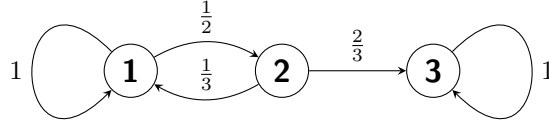
Además, la esperanza anterior es finita si y sólo si y es transitorio.

2.5) Probabilidades de absorción y tiempos medios de llegada

Cuando se estudian las cadenas de Markov, es habitual preguntarse por la probabilidad de que la cadena alcance cierto estado absorbente y también por el tiempo medio en el que alcanza dicho estado. Por ejemplo, en el caso de la ruina del jugador, podríamos plantearnos cómo de probable es alcanzar las ganancias que el jugador ha fijado antes de retirarse, cuál es la probabilidad de arruinarse, o cuánto tiempo tardarán en producirse dichos sucesos. A continuación, introduciremos los conceptos de probabilidad de absorción y tiempo medio de llegada, y veremos cómo se calculan.

2.5.1) Probabilidades de absorción

Supongamos que tenemos una cadena con todos sus estados transitorios o absorbentes. Por ejemplo, supongamos que tenemos la cadena dada el siguiente grafo:



Definimos $\tau_{1,3}$ como el número de pasos promedio necesarios para alcanzar estado absorbente 3 partiendo de 1, es decir,

$$\tau_{1,3} = \mathbb{E}[\text{"Número de pasos hasta la primera visita a 3"} | X_0 = 1].$$

Del mismo modo, podemos definir $\tau_{2,3}$ y $\tau_{3,3}$.

Obviamente $\tau_{3,3} = 0$. Para calcular $\tau_{1,3}$, tenemos que tener en cuenta que, si la cadena se encuentra en el estado 1, en el primer paso dado o bien vuelve al estado 1, o bien va al estado 2. De esa manera,

$$\tau_{1,3} = 1 + p_{1,1}\tau_{1,3} + p_{1,2}\tau_{2,3} = 1 + \frac{1}{2}\tau_{1,3} + \frac{1}{2}\tau_{2,3}.$$

Si estamos en el estado 2, daremos el primer paso o bien a 1, o bien a 3. Luego,

$$\tau_{2,3} = 1 + p_{2,1}\tau_{1,3} + p_{2,3}\tau_{3,3} = 1 + \frac{1}{3}\tau_{1,3} + \frac{2}{3}\tau_{3,3}.$$

Poniendo todo junto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \tau_{1,3} = 1 + \frac{1}{2}\tau_{1,3} + \frac{1}{2}\tau_{2,3}, \\ \tau_{2,3} = 1 + \frac{1}{3}\tau_{1,3} + \frac{2}{3}\tau_{3,3}, \\ \tau_{3,3} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos

$$\tau_{1,3} = \frac{9}{2}, \quad \tau_{2,3} = \frac{5}{2}, \quad \tau_{3,3} = 0.$$

En general, si $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ una cadena con un solo estado absorbente $a \in \mathcal{S}$ y todos los demás estados transitorios, entonces los tiempos medios de llegada a $a \in \mathcal{S}$ se pueden calcular usando que:

- 1) $\tau_{a,a} = 0$.
- 2) Para cualquier estado $x \in \mathcal{S}$ distinto de a ,

$$\tau_{x,a} = 1 + \sum_{y \in \mathcal{S}} p_{x,y}\tau_{y,a}.$$

2.6) Comportamiento asintótico

Como hemos visto, en una cadena irreducible, todos los estados son recurrentes. Tenemos que es posible pasar de cualquier estado a cualquier otro. De hecho la cadena pasará infinitas veces por todos los estados con probabilidad 1. Nos preguntamos sobre cuál es la probabilidad de que a largo plazo la cadena se encuentre en un estado particular. En otras palabras, queremos saber con qué frecuencia la cadena visitará dicho estado a medida que avanzamos en el tiempo.

En lo que sigue, consideramos una cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ irreducible con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$. Para cada

$n = 0, 1, 2, \dots$ y $j \in \mathcal{S}$ consideramos la probabilidad de que la cadena se encuentre en el estado j en n pasos, es decir,

$$\pi_j^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j).$$

De hecho, podemos considerar el vector

$$\pi^{(n)} = \left(\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots, \pi_N^{(n)} \right).$$

Al considerar la probabilidad de n pasos para todos los posibles estados, el vector $\pi^{(n)}$ verificará además que sus componentes suman 1, es decir, $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(n)} = 1$.

Dado un estado $j \in \mathcal{S}$, teniendo en cuenta la probabilidad de empezar en cada uno de los estados, tendremos que

$$\begin{aligned} \pi_j^{(n)} &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^0 \cdot p_{i,j}^{(n)} \end{aligned}$$

Lo cual conduce a la siguiente ecuación matricial

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \cdot P^n. \quad (4)$$

Supongamos que existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)} = \pi$. El vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ se llama **distribución límite** de la cadena de Markov. Puesto que $\sum_{j=1}^N \pi_j^{(n)} = 1$, la distribución límite necesariamente verificará

$$\sum_{j=1}^N \pi_j = 1. \quad (5)$$

Por otro lado, usando (4), tenemos

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi^{(0)} \cdot P^{n+1} \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(0)} \cdot P^n \right) \cdot P \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)} \right) \cdot P \\ &= \pi \cdot P. \end{aligned}$$

La distribución límite π cumple la ecuación matricial

$$\pi = \pi \cdot P \quad (6)$$

Podemos explicar esta ecuación de forma intuitiva como sigue. Imaginemos que para cierto tiempo n , tenemos que X_n sigue la distribución π . Entonces X_{n+1} sigue la distribución πP . Si $\pi = \pi P$, entonces X_{n+1} sigue también la distribución π . Por lo que la cadena de Markov habrá alcanzado una distribución estable en el tiempo. A una distribución π verificando (6) se llama **distribución estacionaria** de la cadena de Markov.

Hemos argumentado arriba que la distribución límite, si existe, debe cumplir las ecuaciones (5) y (6). Por otra parte, es posible demostrar que si una cadena irreducible es aperiódica entonces la distribución límite existe. Por tanto, tenemos lo siguiente.

Teorema 2.6.1 *Supongamos que $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ es una cadena irreducible aperiódica. Entonces, la distribución límite existe*

y está determinada por las ecuaciones

$$\begin{cases} \pi = \pi P, \\ \sum_{j=1}^N \pi_j = 1. \end{cases}$$

De esta manera, para encontrar la distribución límite de una cadena, bastará con comprobar que la cadena es irreducible y aperiódica, lo cual garantiza la existencia de una distribución límite, y luego resolver las ecuaciones anteriores para determinarla.

Ejemplo. Consideremos una cadena de Markov con sólo dos estados $\mathcal{S} = \{1, 2\}$, y con matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Esta cadena es irreducible y aperiódica ya que todos los estados están comunicados en un solo paso. Por tanto, existirá la distribución límite $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, la cual será también una distribución estacionaria. Para hallar dicha distribución, hemos de resolver la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix},$$

junto con la condición $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Esto nos conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_2 = 0, \\ -\frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = 0, \\ \pi_1 + \pi_2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos la distribución límite

$$\pi_1 = \frac{3}{5} = 0.6, \quad \pi_2 = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Dicha distribución límite es posible aproximarla por "fuerza bruta" tomando potencias sucesivas de la matriz de transición. Lo haremos con ayuda de R:

```
P <- rbind(c(2/3, 1/3),
           c(1/2, 1/2))
P2 <- P%*%P
P3 <- P2%*%P
P4 <- P3%*%P
P5 <- P4%*%P
P6 <- P5%*%P
P7 <- P6%*%P
P8 <- P7%*%P
P9 <- P8%*%P
P10 <- P9%*%P
P
##           [,1]      [,2]
## [1,] 0.6666667 0.3333333
## [2,] 0.5000000 0.5000000
P2
```

```

##          [,1]      [,2]
## [1,] 0.6111111 0.3888889
## [2,] 0.5833333 0.4166667

P3

##          [,1]      [,2]
## [1,] 0.6018519 0.3981481
## [2,] 0.5972222 0.4027778

P4

##          [,1]      [,2]
## [1,] 0.6003086 0.3996914
## [2,] 0.5995370 0.4004630

P5

##          [,1]      [,2]
## [1,] 0.6000514 0.3999486
## [2,] 0.5999228 0.4000772

P6

##          [,1]      [,2]
## [1,] 0.6000086 0.3999914
## [2,] 0.5999871 0.4000129

P7

##          [,1]      [,2]
## [1,] 0.6000014 0.3999986
## [2,] 0.5999979 0.4000021

P8

##          [,1]      [,2]
## [1,] 0.6000002 0.3999998
## [2,] 0.5999996 0.4000004

P9

##          [,1]      [,2]
## [1,] 0.6000000 0.4000000
## [2,] 0.5999999 0.4000001

P10

##          [,1] [,2]
## [1,]    0.6  0.4
## [2,]    0.6  0.4

```

Vemos que al tomar sucesivas potencias de la matriz de transición, el valor de la matriz se va estabilizando y sus filas se van aproximando a la distribución estacionaria π que hemos obtenido anteriormente. Recordemos que la potencia n -ésima de la matriz de transición corresponde a la matriz de transición de n pasos. Luego es lógico que al ir tomando potencias de la matriz de transición, obtengamos valores cada vez más cercanos a la distribución límite. Vemos también que la probabilidad límite no depende del valor inicial de la cadena, ya que todas las filas convergen a los mismos valores.

2.7) Algoritmo PageRank

Volvamos al ejemplo que vimos al principio del tema donde analizamos la cadena de Markov del algoritmo PageRank de Google. Recordemos que dicha cadena describía a un "surfeador de internet" que pulsaba al azar los links de un conjunto de páginas. El algoritmo PageRank se usa para ordenar la aparición de las páginas en cada búsqueda en Google, dando preferencia a aquellas páginas cuya probabilidad sea mayor en la distribución límite. Es decir, aquellas con mayor probabilidad serán las que sean más visitadas a largo plazo.

En nuestro ejemplo, el "surfeador de la web" navega al azar entre las páginas A, B, C y D, donde:

- A tiene enlace a B
- B tiene enlaces a A y C
- C tiene enlace a A
- D tiene enlaces a las otras tres páginas.

De esta manera, el espacio de estados es $\{A, B, C, D\}$, y la matriz de transición será

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Como hemos dicho, estamos interesados en determinar la distribución de la cadena de Markov definida por el surfeador. El problema es que dicha cadena podría no ser irreducible, por lo que la distribución límite podría no existir. De hecho, en nuestro ejemplo en particular, la cadena no es irreducible ya que, si bien todas las páginas son accesibles desde D, dicha página no es accesible desde el resto de las páginas.

Para solucionar este problema, el algoritmo de PageRank supone que, en cualquier caso, el surfeador de la web se puede "aburrir", y empezar a navegar de nuevo en cualquiera de las páginas del conjunto al azar. La probabilidad con la que, tras cada paso, el surfeador se aburre es un número fijo p . A la probabilidad complementaria $d = 1 - p$ se le llama factor de amortiguamiento (damping factor). Por regla general se suele tomar factor de amortiguamiento $d = 0.85$.

En nuestro ejemplo particular, si el surfeador se encuentra, por ejemplo, en la página B podría seguir navegando e ir a cualquiera de las páginas a las que tiene enlace, es decir, A o C, o podría aburrirse y salta a cualquiera de las páginas del conjunto A, B, C o D.

La cadena de Markov así obtenida es irreducible ya que desde cada página se puede pasar a cualquier otra página ya que existe la posibilidad de aburrirse. Además, será aperiódica ya que dichos saltos pueden darse en un solo paso. Al ser una cadena irreducible y aperiódica tendrá una distribución límite.

Desde un punto de vista más práctico, añadir la posibilidad de que el surfeador se pueda aburrir, hace que éste no pueda quedarse "atrapado" en un grupo de páginas particular conectadas entre sí, pero no a las demás, haciendo que el algoritmo desestime otras páginas que también podrían ser importantes.

En general, supongamos que el surfeador navega al azar entre n páginas con matriz de transición P . Entonces, al considerar un factor de amortiguación d obtenemos una nueva matriz de transición la cual viene dada por:

$$M = d \cdot P + (1 - d) \cdot \frac{1}{n} J_n, \quad (7)$$

donde J_n es la matriz cuadrada de tamaño n con todas sus entradas igual a 1. La nueva matriz de transición M representa que, en cada paso, con probabilidad d el surfeador actuará de acuerdo a la cadena con matriz de transición P , y con probabilidad $1 - d$ el surfeador actuará de acuerdo a la cadena consistente en elegir cualquiera de las n páginas al azar, cuya matriz de

transición es $\frac{1}{n}J_n$.

En nuestro ejemplo, tomando $d = 0.85$, calculamos con ayuda de R la matriz de transición:

```
P <- rbind(c(0, 1, 0, 0),
           c(1/2, 0, 1/2, 0),
           c(1, 0, 0, 0),
           c(1/3, 1/3, 1/3, 0))
d <- 0.85
n <- 4
M <- d*P + (1-d)*(1/n)*matrix(1, n, n)
```

Obtenemos

$$M = \begin{bmatrix} 0.0375 & 0.8875 & 0.0375 & 0.0375 \\ 0.4625 & 0.0375 & 0.4625 & 0.0375 \\ 0.8875 & 0.0375 & 0.0375 & 0.0375 \\ 0.3208333 & 0.3208333 & 0.3208333 & 0.0375 \end{bmatrix}$$

Sabemos que la cadena dada por la anterior matriz de transición posee distribución límite. Podemos calcular su valor exacto resolviendo las ecuaciones correspondientes. Sin embargo, por comodidad aproximaremos la distribución límite mediante el cálculo de potencias de la matriz de transición. Para ello podemos implementar el siguiente método iterativo en R:

```
M_nueva <- M

# Fijamos un error máximo
error_max <- 10^-15

# Inicializamos la variable de error
error <- 1

while (error > error_max) {
  M_nueva <- M_nueva%*%M
  error <- max(abs(M_nueva - M_nueva%*%M))
}

# La solución es
M_nueva[1,]

## [1] 0.3824972 0.3732476 0.2067552 0.0375000
```

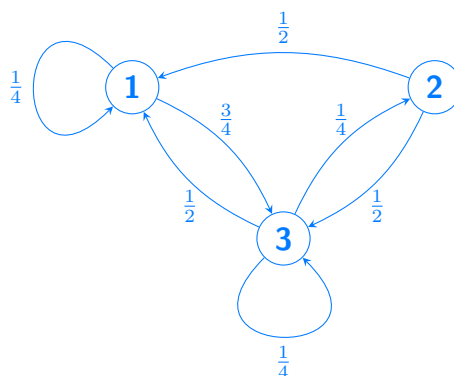
Obtenemos:

$$\pi_A = 0.3824972, \quad \pi_B = 0.3732476, \quad \pi_C = 0.2067552, \quad \pi_D = 0.0375.$$

Esto quiere decir que, a largo plazo, el surfearor gastará el 38.25% del tiempo en la página A; 37.32% del tiempo en la página B; 20.68% del tiempo en la página C; y el 3.75% del tiempo en la página D. Por tanto, el algoritmo PageRank ordenará las páginas en función de estas probabilidades, mostrando las páginas en el orden: A, B, C, D.

Hoja 2: Problemas de Cadenas de Markov

- 1) Considera la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ dada por el grafo



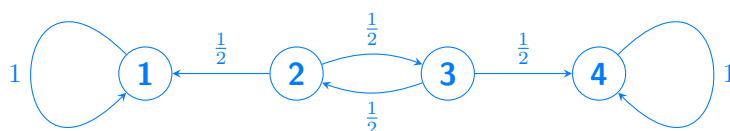
Supongamos que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ y que $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$.

- Encuentra la matriz de transición.
 - Determina las clases irreducibles de la cadena y clasifica los estados.
 - Determina el periodo de cada estado de la cadena.
 - Calcula $\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1)$.
 - Calcula $\mathbb{P}(X_1 = 3, X_3 = 1)$
 - Supongamos que las probabilidades iniciales de los estados 2 y 3 son iguales, mientras que la del estado 1 es el doble de la del estado 3. Determina cuál será la probabilidad de cada estado en dos pasos, es decir, para $n = 2$.
- 2) Considera la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- Dibuja el grafo de dicha cadena.
 - Determina las clases irreducibles de la cadena, clasifica los estados y calcula su periodo.
 - Sabiendo que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$$
 encuentra $\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1)$.
 - Sabiendo que la cadena se inició en el estado 1, determina la probabilidad de que vuelva a ese estado en 3 pasos.
- 3) Considera la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ y grafo



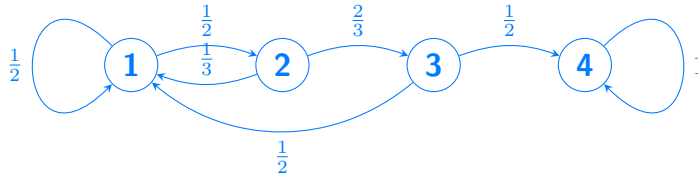
- a) Encuentra la matriz de transición.
- b) Determina las clases irreducibles de la cadena y clasifica sus estados.
- c) Calcula la probabilidad de ser absorbido por el estado 4 si la cadena se encuentra en el estado 2.
- d) Calcula la probabilidad de ser absorbido por el estado 4 si la cadena se encuentra en el estado 3.
- e) Calcula el número esperado de visitas al estado 2 si la cadena se encuentra en el estado 2.
- f) Calcula el número esperado de visitas al estado 2 si la cadena se encuentra en el estado 3.
- 4) Considera la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dada por la matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

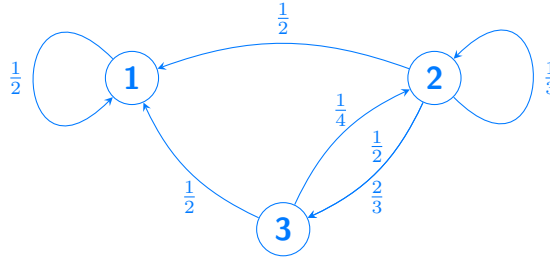
- a) Dibuja el grafo.
- b) Encuentra las clases irreducibles y clasifica los estados.
- c) Observa que una vez que la cadena alcanza cualquiera de los estados del conjunto $A = \{1, 2\}$ la cadena ya no vuelve a salir más de dicho conjunto. Si la cadena se encuentra en el estado 3, encuentra la probabilidad de ser absorbido por el conjunto A .
- 5) Considera la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dada por la matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

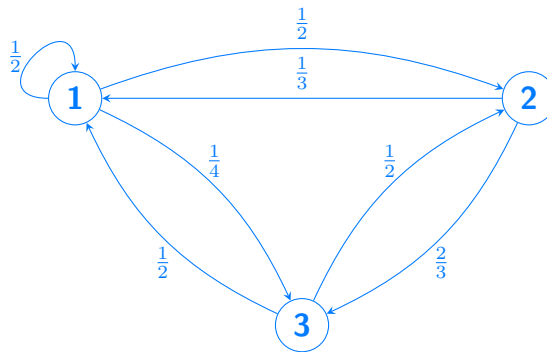
- a) Dibuja el grafo.
- b) Encuentra las clases irreducibles y clasifica los estados.
- c) Observa que una vez que la cadena alcanza cualquiera de los estados del conjunto $A = \{1, 2\}$ la cadena ya no vuelve a salir más de dicho conjunto. Si la cadena se encuentra en el estado 4, encuentra la probabilidad de ser absorbido por el conjunto A .
- 6) Considera la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$



- a) Calcula el número esperado de visitas al estado 1 si la cadena se encuentra en el estado 2.
 - b) Calcula la probabilidad de ser absorbido por estado 4 si la cadena se encuentra en estado 2.
 - c) Suponiendo que la cadena se encuentra en el estado 2, calcula el número esperado de pasos para ser absorbido por el estado 4.
- 7) Considera la cadena del problema 5. Las clases irreducibles $A = \{1, 2\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$ son cerradas. Recuerda que una clase es cerrada si una vez que la cadena visita uno de sus estados no vuelve a salir más de la clase. Suponiendo que la cadena se encuentra en el estado 4, calcula el número esperado de pasos hasta que la cadena alcance algún estado de A o B .
- 8) Considera la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ y grafo



- a) ¿Es esta cadena irreducible?
 - b) ¿Es esta cadena aperiódica?
 - c) Encuentra la distribución estacionaria.
 - d) ¿Es la distribución estacionaria también la distribución límite?
- 9) Considera la cadena $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ con espacio de estados $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ y grafo



- a) ¿Es esta cadena irreducible?
- b) ¿Es esta cadena aperiódica?
- c) Encuentra la distribución estacionaria.
- d) ¿Es la distribución estacionaria también la distribución límite?

Tema 3: Procesos de Poisson

En este capítulo vamos a ver un tipo de procesos estocásticos que son utilizados para contar la ocurrencia en el tiempo o el espacio de cierto evento aleatorio. Se trata de los procesos de Poisson y, más en general, los procesos de conteo. Este tipo de procesos pueden usarse para contar las llegadas de clientes a una tienda, apariciones de defectos en una línea de producción, las solicitudes individuales a un servidor de internet, el paso de coches por un tramo de carretera, las llegadas de emails a la bandeja de entrada, las ocurrencias de cierto tipo de delito en un gran ciudad, etc.

3.1) Procesos de conteo

Definición 3.1.1 Un proceso estocástico en tiempo continuo $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ se dice que es un **proceso de conteo** si se verifica:

- 1) $N_t \geq 0$.
- 2) N_t toma valores enteros.
- 3) Si $s < t$ entonces $N_s \leq N_t$.

En particular, son procesos estocásticos de tiempo continuo y estado discreto. El valor N_t se interpreta como el número de veces que ocurre el evento aleatorio en estudio durante el intervalo de tiempo $[0, t]$. En particular, si $s < t$, entonces $N_t - N_s$ representa el número de veces que ocurre el evento aleatorio durante el intervalo de tiempo $(s, t]$. Para fijar ideas, vamos a considerar que estamos contando las llegadas de clientes a un establecimiento. Por ejemplo, si $N_1 = 4$ tendremos que han llegado 3 clientes durante el intervalo de tiempo $(1, 2]$. El tiempo podría medirse por ejemplo en horas.

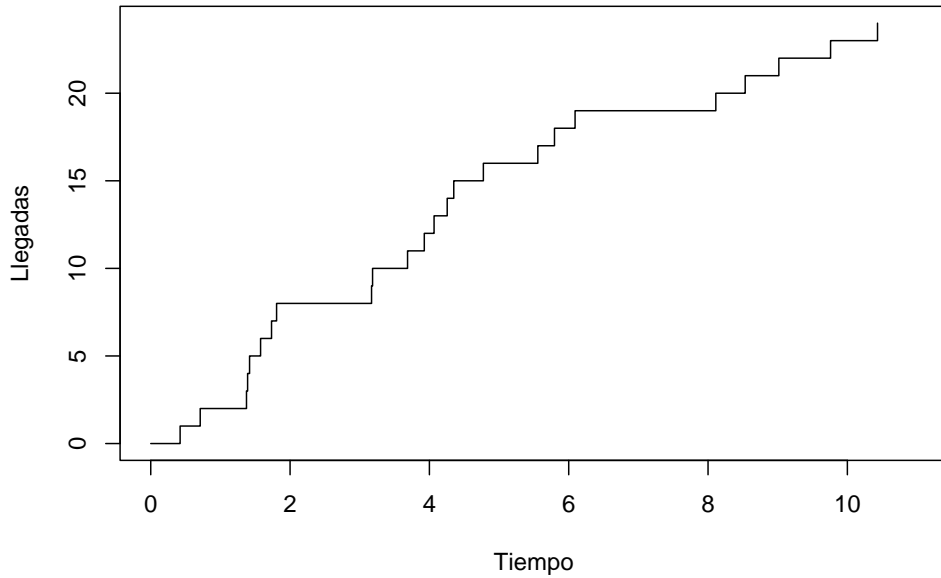


Figure 5: Trayectoria de un proceso de conteo. En cada tiempo t , N_t representa el número de llegadas ocurridas en el intervalo $[0, t]$

Definición 3.1.2 Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ se dice que tiene **incrementos independientes** si para toda sucesión de tiempo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ las variables aleatorias

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \quad X_{t_3} - X_{t_2}, \quad \dots, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

son independientes.

Un ejemplo de proceso con incrementos independientes es el movimiento Browniano. Para un proceso de conteo $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ con incrementos independientes contando las llegadas de clientes (o cualquier otro evento aleatorio), se tendrá que los números

de llegadas en intervalos disjuntos

$$(t_1, t_2], \quad (t_2, t_3], \quad \dots, \quad (t_{n-1}, t_n]$$

son independientes.

Supongamos que queremos calcular la probabilidad de que haya 2 llegadas en el intervalo $(1, 2]$ y 3 llegadas en el intervalo $(2, 3]$. Como los intervalos $(1, 2]$ y $(2, 3]$ son disjuntos, tendremos

$$\mathbb{P}(2 \text{ llegadas en } (1, 2] \text{ y } 3 \text{ llegadas en } (2, 3]) = \mathbb{P}(2 \text{ llegadas en } (1, 2]) \cdot \mathbb{P}(3 \text{ llegadas en } (2, 3])$$

3.2) Proceso de Poisson

El proceso de conteo más usado es el proceso de Poisson. En esta sección veremos su definición y principales propiedades. Antes de introducir este concepto, necesitamos recordar la distribución de Poisson.

3.2.1) Distribución de Poisson

Definición 3.2.1 Una variable aleatoria discreta X se dice que tiene distribución de **Poisson** de parámetro $\lambda > 0$ si toma valores en $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y tiene función puntual de probabilidad

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{para todo } k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

En este caso escribimos $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Algunas propiedades de la distribución de Poisson que conviene recordar son las siguientes.

Proposición 3.2.1 Supongamos que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Entonces $\mathbb{E}(X) = \lambda$ y $\text{Var}(X) = \lambda$.

La suma de variables Poisson independientes es Poisson. Más concretamente, tenemos lo siguiente.

Proposición 3.2.2 Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables independientes tal que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$. Entonces,

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

Las variables Poisson pueden ser interpretadas como el límite en distribución de variables aleatorias binomiales. Más específicamente tenemos lo siguiente.

Proposición 3.2.3 Consideremos una sucesión de variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots , donde $Y_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$ con $p_n = \frac{\lambda}{n}$ para cierto $\lambda > 0$. Entonces la función puntual de probabilidad de Y_n converge a la función puntual de probabilidad de una variable Poisson(λ), es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{para todo } k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Demostración. Fijado $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, como $Y_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \end{aligned} \tag{8}$$

Por otro lado, observamos que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)!n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-(k-1)}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) = 1,\end{aligned}$$

donde para calcular el último límites hemos usado que tenemos un número constante k de factores que convergen a 1.

Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$ en (8) teniendo en cuenta las anteriores igualdades, obtenemos el resultado deseado.

3.2.2) Definición de proceso de Poisson

El proceso de Poisson se usa para contar la ocurrencia de un evento aleatorio cuyas observaciones se dan en el tiempo con una frecuencia promedio constante λ . Por ejemplo, supongamos que mediante la observación se llega a la conclusión de que a un establecimiento llegan, de media, 5 clientes por hora. Puesto que las llegadas son aleatorias, cada hora llegará un número de clientes que no tiene por qué ser exactamente igual a 5; sin embargo, dicha cifra se verificará en promedio al avanzar el tiempo.

Definición 3.2.2 Un proceso de conteo $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ se dice que es un **proceso de Poisson** con tasa $\lambda > 0$ si se verifican las siguientes condiciones:

- 1) $N_0 = 0$.
- 2) N_t tiene incrementos independientes.
- 3) Para cada $t, s \geq 0$ se verifica que $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

Para justificar la definición anterior pensemos en los clientes que llegan al establecimiento. Supongamos que llegan de media λ clientes por hora. Sea N_t el número de clientes que han llegado a la tienda tras t horas. Queremos encontrar qué distribución debería seguir la variable aleatoria N_t .

Para simplificar el problema, vamos a suponer en primer lugar que, dado $n \in \mathbb{N}$, los clientes van llegando en instantes de tiempo equiespaciados

$$0 < \frac{t}{n} < \frac{2t}{n} < \frac{3t}{n} < \dots < t,$$

de forma que al final de cada intervalo $\left(\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n}\right]$ podrá llegar un solo cliente con probabilidad p , o no llegará ninguno con probabilidad $1 - p$. Además, consideramos que la llegada o no de un cliente en cada intervalo ocurre de forma independiente de lo que haya pasado en los intervalos anteriores.

Bajo estos supuestos, tenemos que el número total N_t de clientes llegados en el intervalo de tiempo $[0, t]$ sigue una distribución Binomial(n, p). En particular, como llegan de media λ clientes por hora, tendremos que

$$\lambda t = \mathbb{E}(N_t) = np.$$

Necesariamente, se tiene que verificar que $p = \frac{\lambda t}{n}$. De esta manera obtenemos la probabilidad de llegada de un cliente en cada intervalo, la cual depende del número de subdivisiones n en el que dividimos el intervalo de tiempo.

Para pasar a tiempo continuo, tomemos límites cuando $n \rightarrow \infty$. De este modo, como consecuencia de la Proposición 3.2.3, obtenemos que

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(t + \lambda)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Concluimos que N_t sigue una distribución Poisson(λt), lo cual justifica el punto 3 de la definición de Proceso de Poisson.

Es lógico considerar que los clientes que llegan en dos intervalos de tiempo disjuntos sean independientes, por lo que el proceso de conteo correspondiente debería tener incrementos independientes. Por lo cual, la condición 2 de la definición anterior es natural.

Como hemos observado arriba tenemos que $\mathbb{E}(N_t) = \lambda t$, lo cual es también consecuencia de la condición 3. En particular, la tasa λ de un proceso de Poisson nos informa del número medio de llegadas por unidad de tiempo.

Ejemplo. A una gasolinera llegan de media 10 coches por hora. Supongamos que la llegada de coches a la gasolinera sigue un proceso de Poisson. Calcula

- 1) Probabilidad de que lleguen 2 coches entre las 9:00 y las 9:20.
- 2) Probabilidad de que lleguen 3 coches entre las 9:00 y las 9:20 y 7 coches entre las 10:20 y las 11:00.

Solución. Consideramos el proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ de conteo de coches tras t horas. Como llegan una media de 10 coches por hora, tendremos que $\lambda = 10$.

- 1) Sea X = "Num. de coches entre las 9:00 y las 9:20". Debido a la condición 3 de la definición de proceso de Poisson, tenemos que $X \sim \text{Poisson}(10/3)$ ya que entre las 9:00 y las 9:20 ha pasado $\frac{1}{3}$ de hora. Por tanto,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{e^{-\frac{10}{3}} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2}{2!} = 0.1982.$$

Alternativamente, podemos usar el siguiente código en R para calcular el resultado anterior mediante la función puntual de probabilidad de la Poisson:

```
t <- 1/3
lambda <- 10
# Evaluamos la función puntual de probabilidad de la Poisson
dpois(2, t*lambda)
## [1] 0.1981889
```

- 2) Sea Y = "Núm. de coches entre las 10:20 y las 11:00". Tenemos que $Y \sim \text{Poisson}(20/3)$ y, además, X, Y son independientes. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 3, Y = 7) &= \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 7) \\ &= \frac{e^{-\frac{10}{3}} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3}{3!} \frac{e^{-\frac{20}{3}} \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^7}{7!} = 0.0325 \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos usar el siguiente código de R para calcular el resultado anterior:

```
t <- 1/3
s <- 2/3
lambda <- 10
# Evaluamos la función puntual de probabilidad de la Poisson
dpois(3, t*lambda)*dpois(7, s*lambda)
## [1] 0.03254399
```

3.3) Tiempos de ocurrencia (llegada) en un Proceso de Poisson

Hemos visto que los procesos de Poisson surgen de manera natural cuando se trata de contar las llegadas de clientes a un establecimiento. En esta sección vamos a estudiar qué distribución de probabilidad sigue el tiempo aleatorio que pasa entre la llegada de dos clientes consecutivos.

3.3.1) Distribución exponencial

Recordemos que una variable aleatoria continua τ tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$, en cuyo caso escribimos $\tau \sim \text{Exp}(\lambda)$, si toma valores reales positivos y tiene función de densidad

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Recordemos además que si $\tau \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces la función de distribución de τ es $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. En particular,

$$\mathbb{P}(\tau > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Las variables exponenciales suelen interpretarse como el tiempo de espera para la observación de un evento aleatorio. Por ejemplo, la llegada del primer cliente a una tienda, el tiempo de fallo de un sistema, el tiempo de quiebra de una entidad financiera, tiempo en el que una acción alcanza un determinado nivel, etc.

Proposición 3.3.1 Si $\tau \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces

$$\mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Si pensamos en la llegada del primer cliente a un establecimiento, la proposición anterior nos dice que el tiempo medio que esperaremos en observar llegar dicho cliente será $\frac{1}{\lambda}$.

Por otro lado, tendremos que $\mathbb{P}(\tau \leq t)$ es la probabilidad que el primer cliente llegue en algún instante del intervalo de tiempo $[0, t]$. Por tanto, $\mathbb{P}(\tau > t)$ es la probabilidad de que ningún cliente llegue durante el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Una importante propiedad de las variables exponenciales es que no tienen memoria, es decir, tenemos lo siguiente.

Proposición 3.3.2 Si $\tau \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces

$$\mathbb{P}(\tau > s) = \mathbb{P}(\tau > t + s | \tau > t)$$

para todo $t, s > 0$.

La anterior propiedad, conocida como **falta de memoria** de la distribución exponencial, quiere decir que la probabilidad de que en el intervalo de tiempo $[0, s]$ no haya ninguna llegada, es igual a la probabilidad de que en el intervalo de tiempo $[t, t + s]$ de igual longitud no haya ninguna llegada si en el intervalo de tiempo previo $[0, t]$ no ha habido llegadas, es decir,

$$\mathbb{P}(\text{no hay llegadas en } [0, s]) = \mathbb{P}(\text{no hay llegadas en } [t, t + s] | \text{no hay llegadas en } [0, t]).$$

Por ejemplo, si en 30 minutos no ha llegado ningún cliente a la tienda, la probabilidad de esperar 10 minutos más y no ver ningún cliente es la misma que si no hubiéramos esperado los 30 minutos iniciales.

3.3.2) Modelización de tiempos de llegada y entre llegadas consecutivas

El siguiente resultado, para el cual no damos la demostración, caracteriza a los procesos de Poisson en términos de tiempos de espera exponenciales.

Teorema 3.3.1 Un proceso estocástico $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ es un proceso de Poisson con tasa λ si y sólo si existe una sucesión $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ de variables aleatorias independientes con distribución $\text{Exp}(\lambda)$ tal que

$$N_t = \max\{n : \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n \leq t\}. \quad (9)$$

Podemos pensar en τ_i como el tiempo de espera entre las llegadas, es decir, τ_1 es el tiempo transcurrido hasta la primera llegada, τ_2 es el tiempo transcurrido entre la primera y la segunda llegada, τ_3 es el tiempo entre la segunda y la tercera llegada, etc. De esta manera, $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ es el tiempo transcurrido hasta la n -ésima llegada. En particular, la

condición (9) puede ser reescrita como

$$N_t = \max\{n : T_n \leq t\}.$$

Si, por ejemplo, $N_t = 4$, la condición anterior nos dice que

$$T_4 \leq t < T_5.$$

En términos de llegadas, tenemos que en el instante t habrán llegado los cuatro primeros clientes, pero no el quinto.

Recordemos que λ era el promedio de llegadas por unidad de tiempo. Por otro lado, como $\mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\lambda}$, tendremos que esperar de media $\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo entre cada dos llegadas sucesivas.

Ejemplo. A la bandeja de entrada de mi email llegan de media 2 emails por hora (o un email cada media hora). Supongamos que abro el correo a las 8:00 am. Calcula:

- 1) La probabilidad de que el primer email llegue más tarde de las 8:40.
- 2) La probabilidad de que el primer email llegue más tarde de las 11:00 si no ha llegado ningún correo hasta las 9:00.

Solución: Consideremos los tiempos $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ entre llegadas de emails, medidos en horas.

- 1) Tenemos que $\tau_1 \sim \text{Exp}(2)$, luego

$$\mathbb{P}(\tau_1 > 0.5) = e^{-2 \cdot 0.5} = 0.3679.$$

Alternativamente, podemos usar R para calcular la probabilidad anterior mediante la función de distribución de la exponencial:

```
lambda <- 2
# Evaluamos la función de distribución de la exponencial
1 - pexp(0.5, lambda)
## [1] 0.3678794
```

- 2) Usando que τ_1 no tiene memoria

$$\mathbb{P}(\tau_1 > 3 | \tau_1 > 1) = P(\tau_1 > 2) = e^{-2 \cdot 2} = 0.0183.$$

Alternativamente, podemos usar R para calcular la probabilidad anterior.

```
lambda <- 2
# Evaluamos la función de distribución de la exponencial
1 - pexp(2, lambda)
## [1] 0.01831564
```

Recordemos que una variable aleatoria continua T tiene distribución gamma, en cuyo caso escribimos $T \sim \Gamma(k, \lambda)$, si toma valores positivos y tiene función de densidad

$$f(t) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

donde $\Gamma(k)$ es la función Gamma, la cual viene dada por $\Gamma(k) = (k-1)!$ cuando k es entero.

La distribución gamma se obtiene cuando sumamos variables independientes con distribución exponencial.

Proposición 3.3.3 *Supongamos que $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ son variables independientes con distribución $\text{Exp}(\lambda)$. Entonces se verifica que*

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n \sim \Gamma(n, \lambda).$$

La anterior propiedad es muy útil para calcular probabilidades relativas a tiempos de llegada, ya que nos da la distribución del tiempo de llegada T_n del n -ésimo cliente.

Ejemplo. Volviendo al ejemplo anterior. Calcula:

- 1) La probabilidad de que el cuarto email llegue pasadas las 10:00 am.
- 2) La probabilidad de que el cuarto email llegue más de 3 horas después del segundo email si el segundo email llega después de las 9:00 am.

Solución:

- 1) Como $T_4 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \sim \Gamma(n = 4, \lambda = 2)$, tenemos

$$\mathbb{P}(T_4 > 2) = \int_2^\infty \frac{2^4 t^3 e^{-2t}}{3!} dt = \frac{8}{3} \int_2^\infty t^3 e^{-2t} dt = 0.4435,$$

donde la anterior integral puede ser calculada a mano mediante integración por partes, o con ayuda del ordenador.

Alternativamente, usando R tenemos.

```
n <- 4
lambda <- 2
# Evaluamos la función de distribución de la distribución gamma
1 - pgamma(2, n, lambda)
## [1] 0.4334701
```

- 2) Como τ_3, τ_4 son independientes de τ_2, τ_1 , por ser las τ_i independientes entre sí, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_3 + \tau_4 > 3 | \tau_1 + \tau_2 > 1) &= \mathbb{P}(\tau_3 + \tau_4 > 3) \\ &= \int_3^\infty 4te^{-2t} dt = 0.0173, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\tau_3 + \tau_4 \sim \Gamma(n = 2, \lambda = 2)$. Además, la anterior integral puede ser calculada a mano mediante integración por partes, o con ayuda del ordenador.

Alternativamente, usando R tenemos.

```
n <- 2
lambda <- 2
1 - pgamma(3, n, lambda)
## [1] 0.01735127
```

3.3.3) Simulación de procesos de Poisson

Simular proceso de Poisson es sencillo usando los tiempos entre llegadas. Para ello basta simular los tiempos entre llegadas como variables aleatorias exponenciales independientes y contabilizar el número de llegadas ocurridas.

Veamos un ejemplo en R:

3.4) Transformadas de procesos de Poisson

En esta sección vamos a ver dos tipos de transformaciones de procesos de Poisson, la superposición y la separación.

```

# Valores para simulación
lambda <- 2 # tasa (llegadas por unidad de tiempo)
T <- 10     # Intervalo de tiempo en el que observamos el proceso

# Simulación de los tiempos entre llegadas
set.seed(123)
tau <- NULL
i <- 1
while (sum(tau) < T) {
  tau[i] <- rexp(n = 1, rate = lambda)
  i <- i+1
}

# Calculamos los valores del proceso de Poisson
tiempos <- c(0, cumsum(tau))
N <- 0:length(tiempos)

# Dibujamos la trayectoria
plot(tiempos, N, type = "s",
     xlab = "Tiempo", ylab = "Llegadas", xlim = c(0, 10))

```

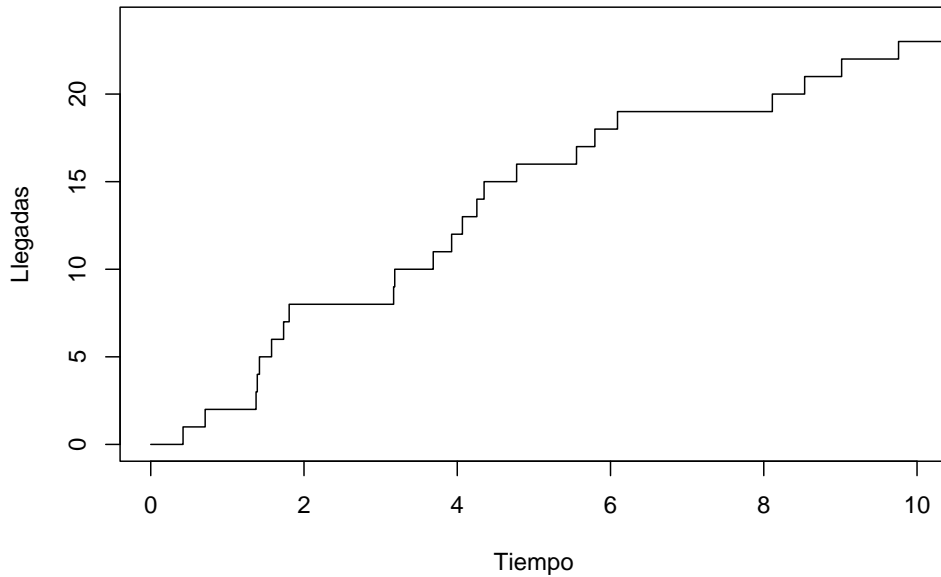


Figure 6: Simulación de la trayectoria de un proceso de Poisson

3.4.1) Superposición de procesos de Poisson independientes

Consideremos dos procesos de Poisson $(N_t^1)_{t \in [0, \infty)}$ y $(N_t^2)_{t \in [0, \infty)}$ independientes con tasas λ_1 y λ_2 , respectivamente. Consideremos el proceso $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ definido como

$$N_t = N_t^1 + N_t^2 \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Dados $t, s \geq 0$, se tiene que los incrementos

$$N_{t+s}^1 - N_s^1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t), \quad N_{t+s}^2 - N_s^2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2 t),$$

y son variables aleatorias independientes. Por tanto, debido a la Proposición 3.2.2 tenemos que

$$N_{t+s} - N_t = (N_{t+s}^1 - N_s^1) + (N_{t+s}^2 - N_s^2)$$

sigue una distribución Poisson($(\lambda_1 + \lambda_2)t$). Es más, $N_0 = N_0^1 + N_0^2 = 0$, y el proceso N_t tiene incrementos independientes (por tenerlos N^1 y N^2). Dado que se verifican todas las condiciones de la definición de proceso de Poisson, podemos concluir que el proceso $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ es de Poisson con tasa $\lambda_1 + \lambda_2$.

En general, tendremos lo siguiente.

Teorema 3.4.1 (Superposición) Sean $(N_t^1), (N_t^2), \dots, (N_t^m)$ procesos de Poisson independientes con tasas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ respectivamente. Sea además

$$N_t = N_t^1 + N_t^2 + \dots + N_t^m \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Entonces el proceso $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$.

A continuación simulamos en R la superposición de dos procesos de Poisson independientes.

```
# Valores para simulación de los procesos
lambda1 <- 2 # tasa del primer proceso de Poisson
lambda2 <- 0.5 # tasa del segundo proceso de Poisson
T <- 10 # Intervalo de tiempo en el que observamos el proceso

# Simulación de los tiempos entre llegadas
set.seed(123)
tau1 <- NULL
tau2 <- NULL
i <- 1
while(sum(tau1) < T){
  tau1[i] <- rexp(n = 1, rate = lambda1)
  i <- i + 1
}

i <- 1
while (sum(tau2) < T) {
  tau2[i] <- rexp(n = 1, rate = lambda2)
  i <- i + 1
}

# Definimos los tiempos y los valores correspondientes del proceso de Poisson 1
tiempos1 <- c(0, cumsum(tau1))
N1 <- 0:length(tau1)

# Definimos los tiempos y los valores correspondientes del proceso de Poisson 2
tiempos2 <- c(0, cumsum(tau2))
N2 <- 0:length(tau2)

# Definimos los tiempos y los valores correspondientes del proceso de superposición
tiempos <- union(tiempos1, tiempos2)
tiempos <- sort(tiempos)
N <- 0:(length(tiempos) - 1)

# Dibujamos la trayectoria del proceso 1
plot(tiempos1, N1, type = "s",
     xlab = "Tiempo", ylab = "Llegadas", xlim = c(0, 10), ylim = c(0, max(N)))
```

```
# Dibujamos la trayectoria del proceso 2
lines(tiempos2, N2, type = "s", col="blue")

# Dibujamos la trayectoria del proceso superposición
lines(tiempos, N, type = "s", col="red")

# Añadimos una leyenda
legend(0, 25, legend = c("Proceso 1", "Proceso 2", "Superposición"),
      col=c("black", "blue", "red"), lty=c(1, 1, 1))
```

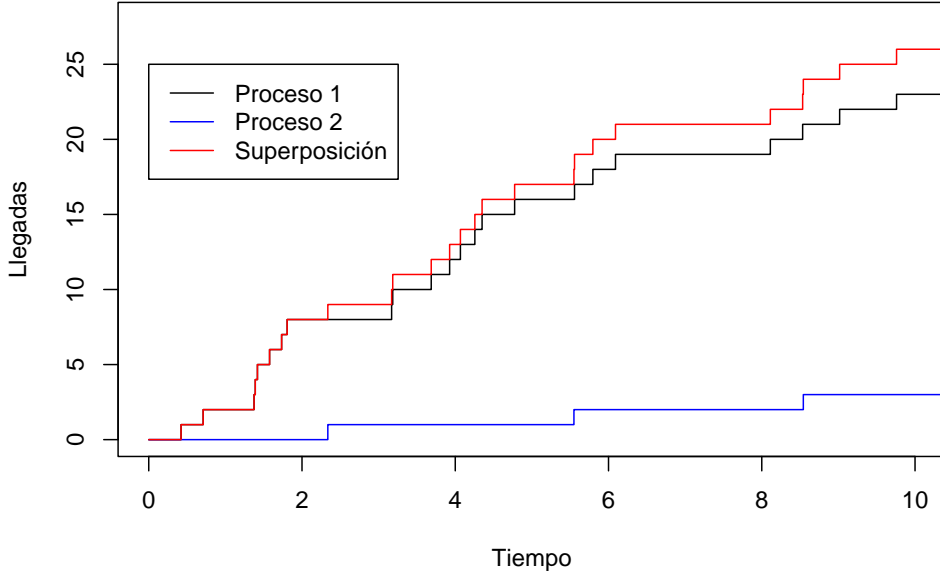


Figure 7: Superposición de dos procesos de Poisson

3.4.2) Separación de procesos de Poisson

Imaginemos una cafetería en los Pirineos donde los clientes, de España y de Francia, van llegando de acuerdo a un proceso de Poisson $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ con tasa de 10 clientes por hora. Supongamos además que el 60% de los clientes son españoles y el 40% de los clientes son franceses. De esta manera, los clientes españoles tendrán su propio proceso de conteo $(N_t^1)_{t \in [0, \infty)}$ y, de la misma manera, los clientes franceses tendrán otro proceso de conteo $(N_t^2)_{t \in [0, \infty)}$. Nos preguntamos qué tipo de procesos son $(N_t^1)_{t \in [0, \infty)}$ y $(N_t^2)_{t \in [0, \infty)}$.

En general, un proceso de Poisson $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ puede ser separado en dos procesos $(N_t^1)_{t \in [0, \infty)}$ y $(N_t^2)_{t \in [0, \infty)}$ contando llegadas de "tipo 1" y "tipo 2", de acuerdo a una sucesión Y_1, Y_2, \dots de variables aleatorias independientes entre sí, e independientes del proceso $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$, tal que

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = p \text{ y } \mathbb{P}(Y_i = 2) = 1 - p.$$

De esta manera, si $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ es el tiempo transcurrido hasta la n -ésima llegada, entonces los procesos $(N_t^1)_{t \in [0, \infty)}$ contando las llegadas de tipo 2 hasta tiempo t vendrán respectivamente dados por

$$N_t^1 = \#\{n : Y_n = 1, T_n \leq t\}, \quad N_t^2 = \#\{n : Y_n = 2, T_n \leq t\}, \quad (10)$$

donde $\#$ denota el cardinal de un conjunto.

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4.2 (Separación) Sea $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ un proceso de Poisson con tasa λ . Consideremos que cada llegada es de tipo

1 con probabilidad p o de tipo 2 con probabilidad $1 - p$, independientemente de las demás llegadas y de $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$. Entonces, los procesos $(N_t^1)_{t \in [0, \infty)}$ y $(N_t^2)_{t \in [0, \infty)}$ contando las llegadas de tipo 1 y las llegadas de tipo 2, respectivamente, verifican:

- 1) $(N_t^1)_{t \in [0, \infty)}$ es un proceso de Poisson con tasa λp .
- 2) $(N_t^2)_{t \in [0, \infty)}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda(1 - p)$.
- 3) $(N_t^1)_{t \in [0, \infty)}$ y $(N_t^2)_{t \in [0, \infty)}$ son procesos de Poisson independientes.

Volvamos al ejemplo de la cafetería en los Pirineos. Dijimos que llegan una media de 10 clientes por hora, por lo que el correspondiente proceso de Poisson $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ tendrá tasa $\lambda = 10$. Al ser el 60% de los clientes que llegan españoles y el 40% franceses, tendremos que los clientes españoles llegarán a la cafetería siguiendo un proceso de Poisson con tasa $10 \cdot 0.6 = 6$, y los clientes franceses llegarán a la cafetería siguiendo un proceso de Poisson con tasa $10 \cdot 0.4 = 4$.

A continuación simulamos en R la separación del proceso de clientes en españoles y franceses:

```
# Valores para simulación de los procesos
lambda <- 10 # tasa del proceso de Poisson
p <- 0.6 # tasa del segundo proceso de Poisson
T <- 10 # Intervalo de tiempo en el que observamos el proceso

# Simulación de los tiempos entre llegadas y tipos de llegadas
set.seed(123)
tau <- NULL
y <- NULL

i <- 1
while (sum(tau) < T) {
  tau[i] <- rexp(n = 1, rate = lambda)
  y[i] = sample(c(1, 2), size = 1)
  i <- i+1
}

# Definimos los tiempos y los valores de N
tiempos <- c(0, cumsum(tau))
N <- 0:length(tau)

# Definimos los valores del proceso de Poisson 1
N1 <- NULL
N1[y==1] <- 1
N1[y==2] <- 0
N1 <- c(0, cumsum(N1))

# Definimos los valores del proceso de Poisson 2
N2 <- NULL
N2[y==2] <- 1
N2[y==1] <- 0
N2 <- c(0, cumsum(N2))

# Dibujamos la trayectoria del proceso 1
plot(tiempos, N1, type = "s",
     xlab = "Tiempo", ylab = "Llegadas", xlim = c(0, 10), ylim = c(0, max(N)))
```

```
# Dibujamos la trayectoria del proceso 2
lines(tiempos, N2, type = "s", col = "blue")

# Dibujamos la trayectoria del proceso 2
lines(tiempos, N, type = "s", col = "red")

# Añadimos una leyenda
legend(0, 18, legend = c("Españoles", "Franceses", "Totales"),
      col = c("black", "blue", "red"), lty = c(1, 1, 1))
```

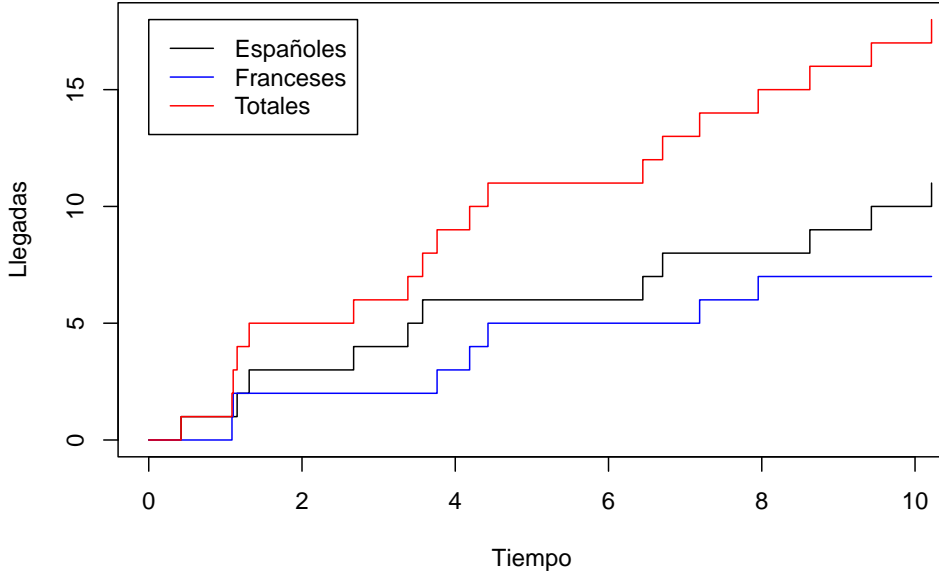


Figure 8: Separación del proceso de Poisson

3.5) Procesos de renovación

Hemos visto anteriormente que los procesos de Poisson son caracterizados como el proceso de conteo cuando los tiempos entre llegadas dados por una sucesión $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ de variables independientes y exponenciales con la misma tasa λ . Una generalización de los procesos de Poisson son los procesos de renovación donde los tiempos entre llegadas son independientes e idénticamente distribuidos, pero no necesariamente siguen una distribución exponencial. Dicho concepto es definido formalmente como sigue.

Definición 3.5.1 Sean $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ variables aleatorias no negativas (es decir, $\tau_n \geq 0$), independientes, e idénticamente distribuidas, de modo que $\mathbb{P}(\tau_n = 0) < 1$ para todo n . Llamamos **proceso de renovación** con tiempos entre llegadas $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ al proceso estocástico $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ verificando $N_0 = 0$ y

$$N_t = \max\{n : T_n \leq t\} \quad (11)$$

donde $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$.

Al igual que con los proceso de Poisson interpretamos $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ como los tiempos entre llegadas, por lo que $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ es el tiempo de la n -ésima llegada. La condición (11) implica que si $N_t = n$, entonces

$$T_n \leq t < T_{n+1}.$$

Ejemplo: Imaginemos una máquina que funciona durante un tiempo α y, tras fallar, tarda un tiempo β en ser separada. Si la máquina falla y es reparada reiteradas veces, obtendremos variables aleatorias independientes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots$ con los correspondientes tiempos de fallo y reparación. El tiempo total de cada ciclo donde la máquina empieza a funcionar, falla y es reparada viene dado por $\tau_i = \alpha_i + \beta_i$. Las variables $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ son i.i.d. Podemos, por tanto, considerar el proceso de renovación $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ contando el número total de ciclos hasta tiempo t .

Una importante propiedad de los procesos de renovación es la siguiente versión de la ley de los grandes números.

Teorema 3.5.1 (Ley de los grandes números para procesos de renovación) Sea $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ un proceso de renovación con tiempos entre llegadas $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$. Si $\mathbb{E}(\tau_i) = \mu$, entonces con probabilidad 1 se verifica que

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

La interpretación del anterior resultado es sencilla. Si el tiempo medio entre llegadas (ciclos consecutivos) de un proceso de renovación es de μ horas, entonces en el largo plazo se producirán $\frac{1}{\mu}$ llegadas (ciclos) por hora. En el caso de un proceso de Poisson con tasa λ se tendrá que

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

ya que los tiempos entre llegadas tienen media $\frac{1}{\lambda}$.

La demostración del anterior resultado se basa en la ley fuerte de los grandes números la cual recordamos a continuación.

Lema 3.5.1 (Ley fuerte de los grandes números) Sean $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ variables aleatorias i.i.d. con $\mathbb{E}(\tau_i) = \mu$. Entonces con probabilidad 1 se verifica que

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \mu \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

A continuación damos la demostración de la ley de los grandes números para procesos de renovación.

Demostración del Teorema 3.5.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$. Como las variables $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ son i.i.d. con media μ , la ley de los grandes números nos dice que, con probabilidad 1, se verifica

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \mu \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Ahora, por definición de proceso de renovación tenemos que

$$T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}.$$

Dividiendo entre N_t tenemos que

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{T_{N_t+1}}{N_t}.$$

De ahí se sigue que

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}. \quad (13)$$

Puesto que las trayectorias de N_t son crecientes, dando infinitos saltos de longitud 1, tendremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty$. Como consecuencia de (12) se verifica, con probabilidad 1, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T_{N_t}}{N_t} = \mu.$$

Por las mismas razones también se cumplirá, con probabilidad 1, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t} = \mu.$$

Finalmente, tomando límite en (13) cuando $t \rightarrow \infty$, y teniendo en cuenta lo anterior, llegamos a la conclusión deseada, ya

que $\frac{t}{N_t}$ se encuentra, con probabilidad 1, entre dos sucesiones las cuales convergen a μ .

Volvamos al ejemplo donde una máquina se estropea y es reparada reiteradas veces. Supongamos que, de media, la máquina tarda una hora en estropearse, y quince minutos en ser reparada. Supongamos, además, que cada tiempo de fallo α_i y cada tiempo en reparación β_i siguen distribuciones exponenciales. De este modo, $\alpha_i \sim \text{Exp}(1)$ y $\beta_i \sim \text{Exp}(4)$. El proceso de renovación resultante puede ser simulado fácilmente en R.

```
# Dijemos los valores de los parámetros
lambda_1 <- 1 # tasa de fallo
lambda_2 <- 4 # tasa de reparación
T <- 10      # Intervalo de tiempo en el que observamos el proceso

# Simulación de los tiempos entre llegadas
set.seed(13)
tau <- NULL
i <- 1
while (sum(tau) < T) {
  alpha <- rexp(n = 1, rate = lambda_1)
  beta <- rexp(n = 1, rate = lambda_2)
  tau[i] <- alpha + beta
  i <- i + 1
}

# Calculamos los valores del proceso de renovación
tiempos <- c(0, cumsum(tau))
N <- 0:length(tiempos)

# Dibujamos la trayectoria
plot(tiempos, N, type = "s",
     xlab = "Tiempo", ylab = "Ciclos", xlim = c(0, 10))
```

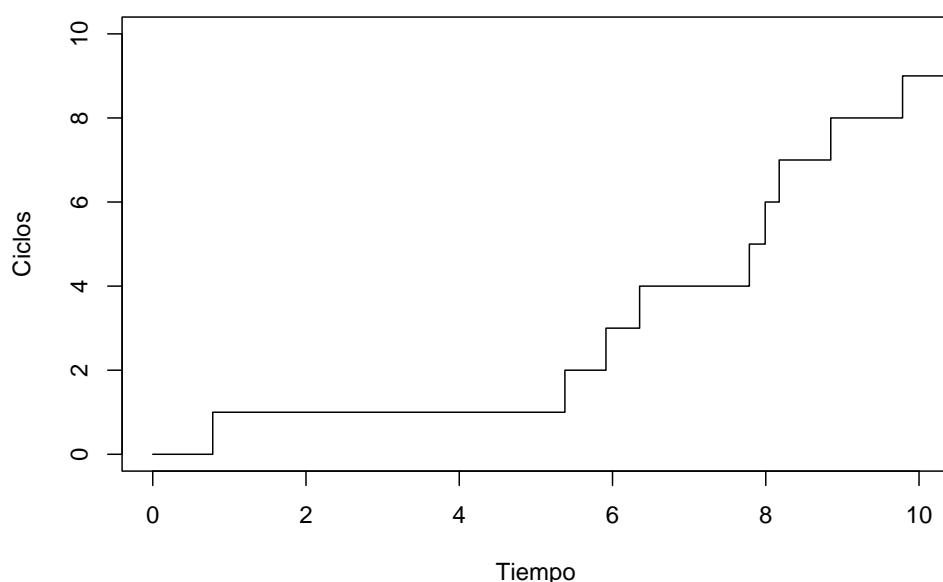


Figure 9: Simulación del proceso de renovación donde una máquina se estropea y repara reiteradamente

El tiempo medio de cada ciclo es $\mathbb{E}(\tau_i) = \mathbb{E}(\alpha_i) + \mathbb{E}(\beta_i) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Por tanto, la ley de los grandes números para procesos de renovación nos dice que

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{4}{5} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Vamos a comprobar dicho resultado simulando una trayectoria a un plazo elevado de tiempo (por ejemplo, $T = 1000$), y dibujando la gráfica del cociente $\frac{N_t}{t}$.


```

# Dijemos los valores de los parámetros
lambda_1 <- 1 # tasa de fallo
lambda_2 <- 4 # tasa de reparación
T <- 1000     # Intervalo de tiempo en el que observamos el proceso

# Simulación de los tiempos entre llegadas
set.seed(13)
tau <- NULL
i <- 1
while (sum(tau) < T) {
  alpha <- rexp(n = 1, rate = lambda_1)
  beta <- rexp(n = 1, rate = lambda_2)
  tau[i] <- alpha + beta
  i <- i + 1
}

# Calculamos los valores del proceso de renovación
tiempos <- c(0, cumsum(tau))
N <- 0:length(tiempos)
cociente <- N / tiempos

# Dibujamos la trayectoria
plot(tiempos, cociente, type = "S",
     xlab = "Tiempo", ylab = "N_t/t", xlim = c(0, 1000))

# Dibujamos una línea horizontal a la altura de la inversa de la media
abline(h=4/5, col="blue")

```

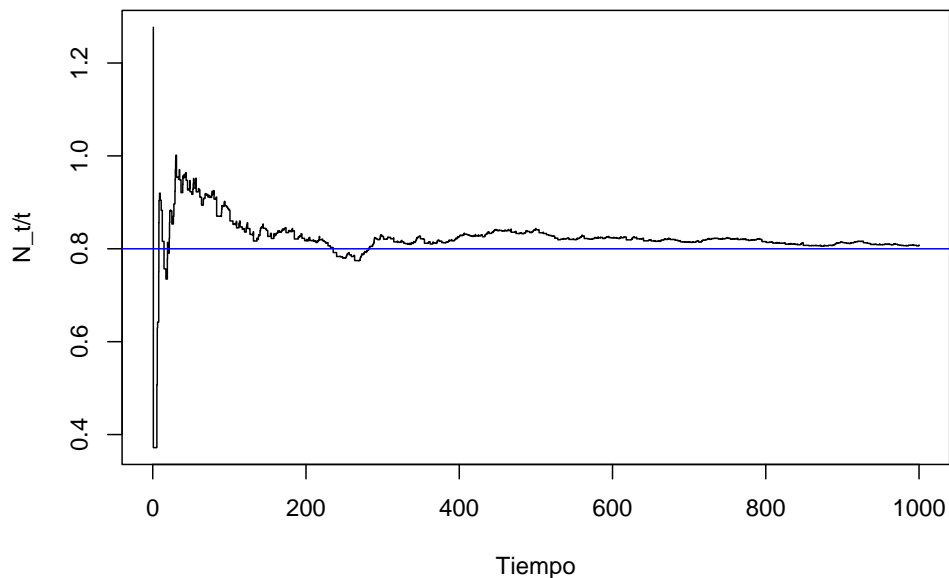


Figure 10: El cociente entre el proceso de renovación y el tiempo se va aproximando a una constante, debido a la ley de los grandes números