

Álgebra Lineal

Francisco Javier Mercader Martínez

Índice

1	Números reales y complejos	1
1.1	Números reales y su representación en el ordenador	1
1.2	Algunos números complejos destacados	2
1.3	Representación matemática de una onda	4
1.4	Raíces n -ésimas y raíces de polinomios	5
2	Vectores, matrices y tensores	12
2.1	Vectores	12
2.1.1	Dependencia lineal	12
2.1.2	Normas de vectores	14
2.1.3	Producto escalar	15
2.1.4	Ortogonalidad	16
2.2	Matrices	17
2.2.1	Operaciones con matrices	18
2.2.2	Operaciones con matrices por bloques	20
2.2.3	Matrices ortogonales	22
2.2.4	Tensores	23
3	Sistemas de ecuaciones y determinantes	34
3.1	Operaciones elementales en una matriz	34
3.2	Sistemas de ecuaciones	37
3.2.1	Método de Gauss para la resolución de sistemas lineales	38
3.2.2	Cálculo de la inversa de una matriz mediante eliminación Gaussiana	39
3.3	Determinantes	40
3.3.1	Propiedades básicas	42
3.3.2	Propiedades de los determinantes y las operaciones elementales	42
3.3.3	Resolución de sistemas lineales usando determinantes	42
3.3.4	Cálculo de la inversa mediante determinantes	43
4	Subespacios vectoriales, bases y coordenadas	50
4.1	Suma de subespacios vectoriales	51
4.2	Ortogonal a un subespacio	52

4.3	Subespacios asociados a una matriz. Rango	52
4.4	Coordenadas respecto de una base	53
4.5	Coordenadas en bases ortonormales	55
5	Álgebra Lineal Computacional	68
5.1	Factorizaciones LU , PLU y $Cholesky$	68
5.1.1	Factorización PU (PLU)	68
5.2	Análisis de errores	72
5.3	Ejercicios	77
6	Transformaciones lineales	79
6.1	Introducción	79
6.2	Aplicaciones lineales	80
6.3	Cambio de coordenadas (o de base en las aplicaciones lineales)	81
6.4	Proyecciones	84
6.5	Cálculo de la matriz asociada a la proyección sobre un subespacio vectorial	86
6.6	Proyección sobre $\text{Col}(A)$	88
7	Valores y vectores propios	95
7.1	Interpretación en términos de aplicaciones lineales	96
7.2	Cálculo numérico de valores propios	98
7.3	Algoritmo QR para el cálculo de valores propios	99
7.4	Matrices semidefinidas positivas	101
7.5	Factorización en Valores Singulares (SVD)	101
7.5.1	Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz y la SVD	107

Tema 1: Números reales y complejos

1.1) Números reales y su representación en el ordenador

Recordemos los conjuntos de números habituales:

- Números naturales: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Números enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Números racionales: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

Los números racionales se pueden expresar en forma decimal, con un número finito de cifras decimales (por ejemplo, $\frac{1}{2} = 0.5$) o bien con un número infinito de cifras decimales periódicas (por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0.333\dots$).

- Números reales: \mathbb{R} incluye a todos los anteriores más números irracionales (que contienen un número infinito de cifras decimales no periódicas) como π , e , $\sqrt{2}$, etc.



Ejemplo

$$\underbrace{1}_s \quad \underbrace{10000000010}_e \quad \underbrace{100\dots0}_{f, 52 \text{ bits}}$$

$$s = 1 \longrightarrow (-1)^s = -1$$

$$e = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + \dots + 1 \cdot 2^{10} = 1026$$

$$f = 1 \cdot \frac{1}{2^1} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 0 \cdot \frac{1}{2^{52}} = 0.5$$

$$x = (-1)^1 \cdot 2^{1026-1023} (1 + 0.5) = -8 \cdot \frac{3}{2} = \boxed{-12}$$

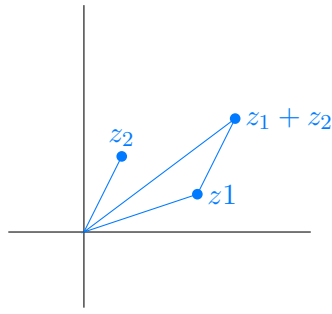
Debido a este sistema de representación:

- 1) El rango de números representables es $[-1 = 2^{-300}, 10^{300}]$ con una precisión de 15 dígitos.
- 2) Números no uniformemente distribuidos. Están más juntos los números pequeños.
- 3) El número más pequeño que se puede representar el llamado **epsilon de la máquina** (en Python) es $\varepsilon \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$.

En \mathbb{C} tenemos definidas las dos siguientes operaciones:

- a) Suma: $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



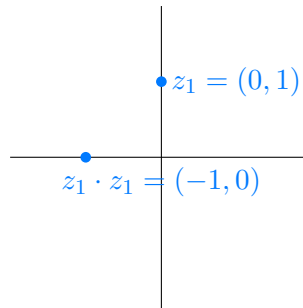
b) Producto: $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Ejemplo

$$z_1 = (0, 1), \quad z_2 = z_1 = (0, 1)$$

$$z_1 \cdot z_1 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$



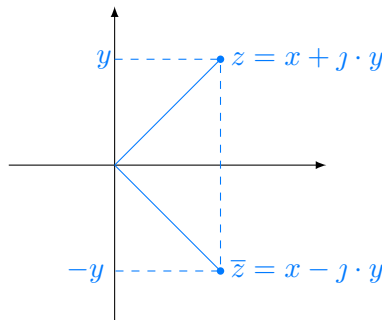
1.2) Algunos números complejos destacados

- Los números complejos de la forma $(x, 0)$ se identifican con el número real, es decir, $x \equiv (x, 0)$.

$$\begin{aligned} \underbrace{(x_1 + iy_1)}_{(x_1, y_1)} + \underbrace{(x_2 + iy_2)}_{(x_2, y_2)} &= x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\ \underbrace{(x_1 + iy_1)}_{(x_1, y_1)} \cdot \underbrace{(x_2 + iy_2)}_{(x_2, y_2)} &= x_1 x_2 + iy_1 y_2 + iy_1 x_2 - y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

- Definición (conjugado)**

Dado $z = x + iy$, se llama conjugado de z , denotado \bar{z} , al número complejo $\bar{z} = x - iy$.



- Propiedades del conjugado**

- $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $z \cdot \overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$
- Se llama módulo de $z = x + iy$ al número real

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se define el argumento de z denotado $\arg z$, como el conjunto

$$\arg z = \{\theta \in \mathbb{R} : \operatorname{Re} z = |z| \cos \theta, \operatorname{Im} z = |z| \sin \theta\}$$

Obviamente, si $\theta \in \arg z$ entonces $\theta + 2k\pi \in \arg z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Al único $\theta \in \arg z$ tal que $\theta \in [0, 2\pi[$ se le llama **argumento principal** de z .

Por tanto,

$$\begin{aligned} z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z &= |z| \cos \theta + i \cdot |z| \sin \theta \quad (\text{forma trigonométrica}) \\ &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= |z|e^{i\theta} \quad (\text{forma exponencial}) \end{aligned}$$

donde $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

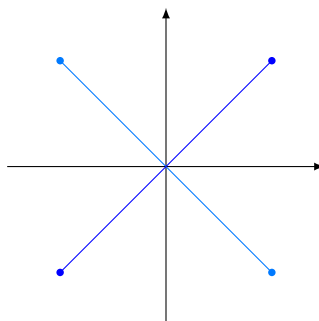
También podemos expresar $z \in \mathbb{C}$ como

$$|z|_{\theta} \equiv \text{formal polar.}$$

¿Cómo pasar de una forma a otra?

Binómica	\Rightarrow	Polar
$z = x + iy$		$ z = +\sqrt{x^2 + y^2}$
		$\theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x}$

¡! La calculadora sólo devuelve valores entre -90° y 90° . Dependiendo de la localización del número complejo hay que sumar 180° .

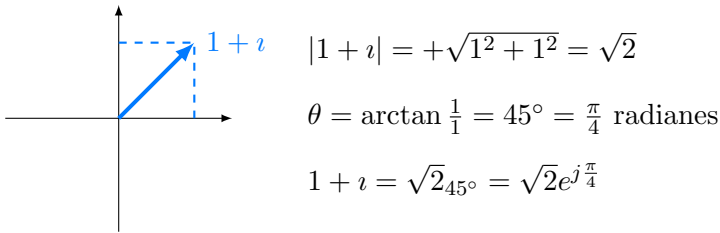


Polar \longrightarrow Binómica

$$|z|_{\theta} \longrightarrow z = |z| \cos \theta + \imath |z| \sin \theta$$

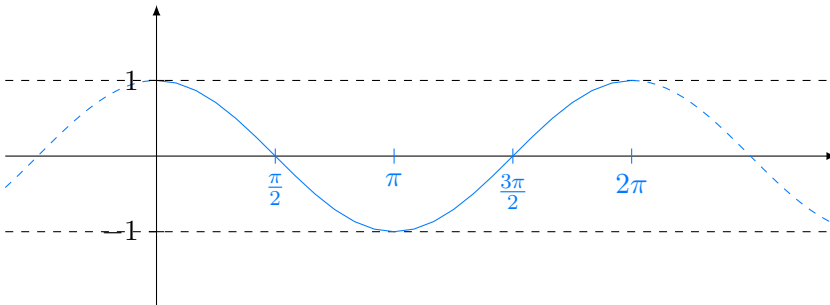
Ejemplo

- $1 + \imath$



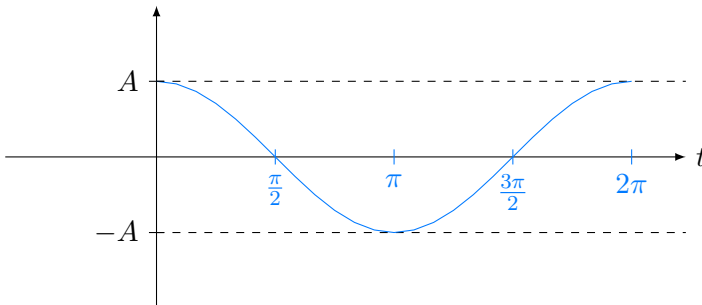
1.3) Representación matemática de una onda

- La función $\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$, $t \equiv$ tiempo.



Periodo $T = 2\pi$

- La función $A \cos t = \frac{Ae^{jt} + Ae^{-jt}}{2}$

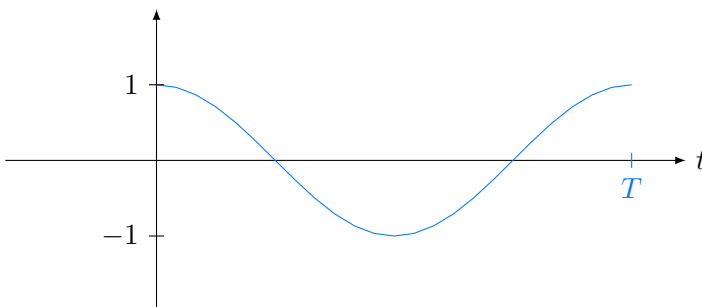


$A \equiv$ Amplitud de la onda

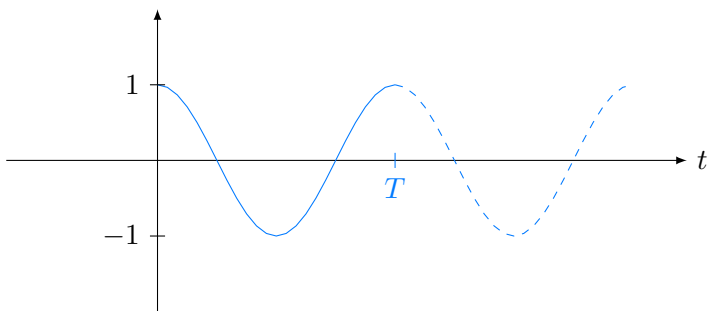
- La función $\cos(wt) = \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2}$

$$wt = 2\pi \longrightarrow t = \frac{2\pi}{w} = T \text{ período}$$

Si w es pequeño $\longrightarrow T$ es grande (pocas oscilaciones)



Si w es grande $\longrightarrow T$ es pequeño (muchas oscilaciones)



Las ondas también se suelen manipular usando números complejos a partir de las identidades.

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

$$e^{-jt} = \cos(-t) + j \sin(-t) = \begin{cases} \cos x \text{ es par} \\ \sin x \text{ es impar} \end{cases} = +\cos t - j \sin t$$

$$\text{Sumando: } 2 \cos t = e^{jt} + e^{-jt} \longrightarrow \cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$

$$\text{Restando: } e^{jt} - e^{-jt} = 2j \sin t \longrightarrow \sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

Por tanto:

$$\text{Onda} = f(t) = A \cos(\omega t - \varphi) = \frac{A \cdot (e^{j(\omega t - \varphi)} + e^{-j(\omega t - \varphi)})}{2}$$

1.4) Raíces n -ésimas y raíces de polinomios

Consideremos la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

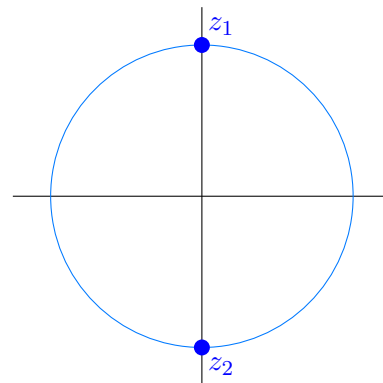
Buscamos $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|e^{j\theta}$ tal que $z^2 + 1 = 0$; $z^2 = |z|^2 e^{2j\theta} = -1 = e^{j\pi}$

$$\begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 2\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |z| = +\sqrt{1} = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

$$k = 0 \longrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 1 \longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$k = 2 \longrightarrow \theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$



Hoja de ejercicios Tema 1: Números complejos

1) Calcula las siguientes operaciones de números complejos:

$$a) (-2 + j) + \left(-\frac{1}{2} - 3j\right) = -2 + j - \frac{1}{2} - 3j = \boxed{-\frac{5}{2} - 2j}$$

$$b) (-2 - j) - \left(-3 + \frac{1}{2}j\right) = -2 - j + 3 - \frac{1}{2}j = \boxed{1 - \frac{3}{2}j}$$

$$c) -2 \cdot (-1 - j) - 3 \cdot (-2 + j) + 2 \cdot (1 - 2j) = 2 + 2j + 6 - 3j + 2 - 4j = \boxed{10 - j}$$

$$d) j \cdot (-1 + j) = -j + j^2 = \boxed{j + 1}$$

$$e) (-2 - j) \cdot \left(-3 + \frac{1}{2}j\right) = 6 - j + 3j - \frac{1}{2}j^2 = 6 - j + 3j + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{13}{2} + 2j}$$

$$f) \frac{1}{-1 - 2j} = \frac{1}{2j + 1} \cdot \frac{2j - 1}{2j - 1} = \frac{2j - 1}{4j^2 - 1} = \frac{2j - 1}{-4 - 1} = \boxed{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j}$$

$$g) \frac{-j}{2 - 3j} = \frac{-j}{2 - 3j} \cdot \frac{2 + 3j}{2 + 3j} = \frac{-j \cdot (2 + 3j)}{4 - 9j^2} = \frac{-2j - 3j^2}{4 + 9} = \frac{2j - 3}{13} = \boxed{-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}j}$$

$$h) \frac{-1 - j}{-2 + j} = \frac{-1 - j}{j - 2} \cdot \frac{j + 2}{j + 2} = \frac{(-1 - j) \cdot (j + 2)}{j^2 - 4} = \frac{-j - 2 - j^2 - 2j}{-1 - 4} = \frac{-3j - 2 + 1}{-5} = \frac{-3j - 1}{-5} = \boxed{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}j}$$

$$i) \frac{1 - j}{j} - \frac{j}{1 - j} = \frac{j - 1}{j} \cdot \frac{j}{j} - \frac{j}{1 - j} \cdot \frac{1 + j}{1 + j} = \frac{(j - 1) \cdot j}{j^2} - \frac{j(1 + j)}{1 - j^2} = \frac{j^2 - j}{j^2} - \frac{j + j^2}{1 - j^2} = \frac{1 + j}{-1} - \frac{j - 1}{1 + 1} = -1 - j - \frac{j - 1}{2} = \frac{-2 - j - j + 1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j}$$

2) Obtén las formas polares y trigonométricas de los siguientes números complejos:

a) $1 + j$

– Polar: $\sqrt{2} \frac{\pi}{4}$

– Trigonométrica: $|z| \cdot (\cos(\theta) + j \sin(\theta)) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{1}{1} = 45^\circ \equiv \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$

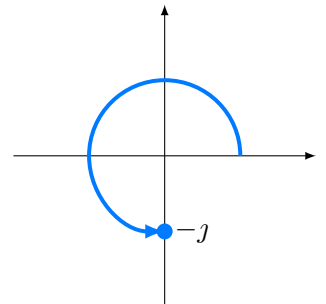
b) $-j$

$$z_1 = -j$$

Polar: $1 \frac{3\pi}{2}$

Trigonométrica: $|z_1| \cdot (\cos(\theta_1) + j \sin(\theta_1)) = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

$$z_1 = \begin{cases} |z_1| = 1 \\ \theta_1 = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{-1}{0} = 90 \longrightarrow \theta = 90 + 180 = 270 \equiv \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



c) $-1 + \sqrt{3}j$

– Polar: $2 \cdot e^{j(\frac{2\pi}{3})}$

– Trigonométrica: $|z| \cdot (\cos(\theta) + j \sin(\theta)) = 2 \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

d) $2\sqrt{3} - 2j \rightarrow 4 \cdot e^{j\frac{11}{6}\pi}$

$$|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

$$\theta = \arctan \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{11}{6}\pi = 330^\circ$$

e) $-1 - j$

– Polar:

– Trigonométrica: $|z| \cdot (\cos(\theta) + j \sin(\theta))$

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

f) $-2 + j$

– Polar:

– Trigonométrica:

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{1}{-2} = \end{cases}$$

3) Obtén la forma binómica de los siguientes números complejos:

a) $2\frac{\pi}{2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{2j}$

b) $1\pi = \cos(\pi) + j \sin(\pi) = \boxed{-1}$

c) $3\frac{5\pi}{4} = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 3j \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}j}$

4) Calcula las siguientes operaciones de números complejos, expresando el resultado en forma polar:

a) $2\frac{5\pi}{3} \cdot 3\frac{\pi}{2} = (1 - \sqrt{3}j) \cdot 3j = 3 - 3\sqrt{3}j = (*) = \boxed{6\frac{2\pi}{3}}$

$$\begin{cases} 2\frac{5\pi}{3} = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 2j \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}j \\ 3\frac{\pi}{2} = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3j \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6 \\ \theta = \arctan \frac{-3\sqrt{3}}{3} = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } 1_{\frac{7\pi}{4}} \cdot 2_{\frac{7\pi}{3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \right) \cdot (1 + \sqrt{3}j) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}j = (*) = \boxed{2_{\frac{\pi}{12}}}$$

$$\begin{cases} 1_{\frac{7\pi}{4}} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \\ 2_{\frac{7\pi}{3}} = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + 2j \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}j \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2 \\ \theta = \arctan \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} = \arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$\text{c) } 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot 3_{\frac{11\pi}{6}} = 2j \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}j\right) = 3 + 3\sqrt{3}j = (*) = \boxed{6_{\frac{\pi}{4}}}$$

$$\begin{cases} 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 \cdot (0 + j) = 2j \\ 3_{\frac{11\pi}{6}} = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}j \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6 \\ \theta = \arctan \frac{3\sqrt{3}}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{d) } \frac{4_{\frac{5\pi}{2}}}{2_{\frac{2\pi}{3}}} = \frac{4j}{-1 + \sqrt{3}j} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}j}{-1 + \sqrt{3}j} = \frac{4j \cdot (-1 - \sqrt{3}j)}{(-1 + \sqrt{3}j) \cdot (-1 - \sqrt{3}j)} = \frac{4\sqrt{3} - 4j}{4} = \sqrt{3} - j = (*) = \boxed{2_{\frac{2\pi}{3}}}$$

$$\begin{cases} 4_{\frac{5\pi}{2}} = 4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) = 4 \cdot (0 + j) = 4j \\ 2_{\frac{2\pi}{3}} = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -1 + \sqrt{3}j \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{e) } \frac{1_{\pi}}{2_{\frac{7\pi}{6}}} = \frac{-1}{-\sqrt{3} - j} = \frac{1}{\sqrt{3} + j} \cdot \frac{\sqrt{3} - j}{\sqrt{3} - j} = \frac{\sqrt{3} - j}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j = (*) = \boxed{1_{\frac{\pi}{6}}}$$

$$\begin{cases} 1_{\pi} = 1 \cdot (\cos \pi + j \sin \pi) = -1 \\ 2_{\frac{7\pi}{6}} = 2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + j \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right) = -\sqrt{3} - j \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ \theta = \arctan \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{f) } \frac{12\left(\cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4}\right)}{8_{\frac{5\pi}{4}}} = \frac{-6\sqrt{2} - 6\sqrt{2}j}{-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}j} = \frac{6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}j}{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}j} \cdot \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}j}{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}j} = \frac{96}{64} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} 12 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \right) = -6\sqrt{2} - 6\sqrt{2}j \\ 8 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 8 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \right) = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}j \end{cases}$$

5) Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $(1 - \sqrt{3}j)^6$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$(1 - \sqrt{3}j)^6 = 2^6 \cdot \left(\cos \left(6 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) + j \sin \left(6 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \right) = 2^6 \cdot \underbrace{(\cos(-2\pi))}_1 + j \underbrace{\sin(-2\pi)}_0 = 2^6 = 64$$

$$(1 - \sqrt{3}j)^6 = \boxed{64}$$

b) $(1 - j)^8$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(1 - j)^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot \left(\cos \left(8 \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) + j \sin \left(8 \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = 2^4 \cdot \underbrace{(\cos(-2\pi))}_1 + j \underbrace{\sin(-2\pi)}_0 = 2^4 = 16$$

$$(1 - j)^8 = \boxed{16}$$

c) $(-\sqrt{3} + j)^{10}$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{1} \right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$(-\sqrt{3} + j)^{10} = 2^{10} \cdot \left(\cos \left(8 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) + j \sin \left(8 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \right) = 2^{10} \cdot \left(\cos \left(-\frac{8\pi}{3} \right) + j \sin \left(-\frac{8\pi}{3} \right) \right) =$$

$$2^{10} \cdot \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) j \right) = -2^9 - 2^9 \sqrt{3}j$$

$$(-\sqrt{3} + j)^{10} = \boxed{-512 - 512\sqrt{3}j}$$

6) Expresar los siguientes números complejos en forma binómica y en forma polar:

a) $(1 + j)^3 = -2 + 2j$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \theta = \arctan \left(\frac{-2}{2} \right) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$-2 + 2j = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \right)$$

b) $j^5 + j^{16} = (-1)^8 + (-1)^2 \cdot j = 1 + j$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$1 + j = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

c) $1 + 3e^{j\pi}$

d) $\frac{2 + 3j}{3 - 4j} =$

e) $2\frac{3\pi}{2} + j$

f) $\frac{1}{j}$

7) Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $2j$

b) $1 - j$

c) -1

d) $\frac{1 + j}{1 - j}$

e) $\frac{1}{j\pi}$

f) $-3 + j\sqrt{3}$

8) Representa gráficamente los siguientes subconjuntos del plano complejo:

a) Números complejos cuyo módulo es igual a 1

b) $\{z^k \in \mathbb{C} : z = e^{\frac{2\pi j}{8}}, 1 \leq k \leq 8\}$

c) $\{z^k \in \mathbb{C} : z = e^{-\frac{2\pi j}{8}}, 1 \leq k \leq 8\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : z - \bar{z} = j\}$

9) Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa el resultado en forma binómica:

a) $3 + 4j + 10e^{\frac{\pi}{3}j} = ze^{\frac{\pi}{3}j}$

b) $5 - \frac{\pi}{6} + z + 4 + \sqrt{2}j = 6e^{-\frac{\pi}{4}j}z$

c) $2\frac{\pi}{3} + j + ze^{-\frac{\pi}{3}j} = 0$

d) $z + 4jz = 1$

10) Dados los números complejos $z_1 = -1 - j$, $z_2 = 2\frac{\pi}{3}$, $z_3 = 4e^{100\pi j}$, representa gráficamente los números $z_1, z_2, z_3, z_1 + z_2 + z_3, z_2 \cdot z_3, z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

11) Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(t) = 4e^{-t}e^{100\pi t j}$. Representa gráficamente $\text{Re}f(t)$ e $\text{Im}f(t)$. Idem con la función $g(t) = 4e^{100\pi t j} + 7e^{(100\pi t + \frac{\pi}{3})j}$. Indica e interpreta físicamente las siguientes magnitudes asociadas a las gráficas anteriores: amplitud de la oscilación, periodo, frecuencia y fase.

12) Números complejos en Teoría de Sistemas Eléctricos. Supongamos que tenemos una circuito de corriente alterna tipo RLC con una resistencia con valor $R = 20\Omega$, un condensador con valor $C = 33.3\mu F$ y una bobina con valor $L = 0.01H$. Se supone que la fuente de voltaje (o fuerza electro motriz) viene dada por $\varepsilon(t) = 353.5 \cos(\omega t + \phi)$, con $\omega = 3000\text{rad/s}$ y $\phi = -10^\circ$. Nótese que la frecuencia ω está expresada en radianes mientras que la fase inicial ϕ en grados. Por tanto, al hacer cálculos hemos de expresar **ambas** magnitudes en radianes o grados, pero no una en radianes y la otra en grados. También hemos de tener en cuenta las unidades físicas en que expresamos las distintas magnitudes del problema. Por ejemplo, en el enunciado anterior, la Capacitancia del capacitador está dada en microfaradios por lo que hemos de multiplicar por 10^{-6} para expresarla en Faradios y que de esta forma todas las magnitudes estén expresadas en unidades del Sistema Internacional (S.I). Se pide:

- a) Calcula la impedancia compleja del circuito, la cual se define como $\vec{z} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)j$.

$$\vec{z} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)j = 20 + \left(3000 \cdot 0.01 - \frac{1}{3000 \cdot 33.3 \cdot 10^{-6}}\right)j = (10 + 10j)\Omega$$

- b) Sabiendo que $\vec{E} = 353.35e^{-10j}$ y que $\vec{E} = \vec{I}\vec{z}$, calcula \vec{I} expresando el resultado en forma polar.

Empezamos escribiendo \vec{z} en forma polar. Se tiene $\vec{z} = 20 + 20j = \sqrt{20^2 + 20^2} \angle \arctan \frac{20}{20} = 28.845^\circ$.

Por tanto, $\vec{I} = \frac{353.5 \angle -10^\circ}{28.845} = 12.5 \angle -55^\circ$

- c) Calcula las siguientes magnitudes físicas:

i) $\vec{V}_R = R\vec{I}$

$$\vec{V}_R = R\vec{I} = 20 \cdot 12.5 \angle -55^\circ = 250 \angle -55^\circ$$

- ii) $\vec{V}_L = \vec{I}\vec{X}_L$, donde $\vec{X}_L = \omega Lj$ se llama reactancia inductiva.

$$\vec{V}_L = \vec{I}\vec{X}_L = 12.5 \angle -55^\circ \cdot 30 \angle 90^\circ = 375 \angle 35^\circ$$

- iii) $\vec{V}_C = \vec{I}\vec{X}_C$, donde $\vec{X}_C = -\frac{1}{\omega C}j$ se llama reactancia del capacitador.

$$\vec{V}_C = \vec{I}\vec{X}_C = 12.5 \angle -55^\circ \cdot 10 \angle -90^\circ = 125 \angle -145^\circ$$

Tema 2: Vectores, matrices y tensores

2.1) Vectores

- Definición

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Definimos $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}$.

A los elementos $u \in \mathbb{K}^n$ se les llama vectores de n -componentes. En \mathbb{K}^n definimos las dos siguientes operaciones:

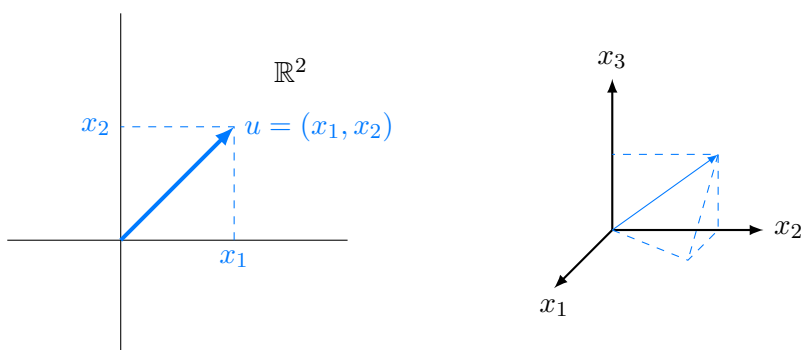
- Suma: Si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$u + v = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- Producto por escalares: Sean $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

El conjunto \mathbb{K}^n dotado de las dos operaciones anteriores se dice que es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .



2.1.1) Dependencia lineal

- Definición (Combinación lineal)

Una combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{K}^n$ es un vector que se escribe como

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_m u_m,$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ escalares llamados [coeficientes de la combinación lineal](#)

Ejemplo

$$\underbrace{1}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{(-1, 0)}_{u_1} + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cdot \underbrace{(1, 2)}_{u_2} = \underbrace{(1, 4)}_u$$

$$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \quad u \text{ es combinación lineal de } u_1 \text{ y } u_2$$

- Definición (Independencia lineal)

Se dice que los vectores $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{K}^n$ son [linealmente independientes](#) si una combinación lineal suya

nula sólo puede ocurrir cuando todos los coeficientes son nulos, es decir, si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

En caso contrario, se dice que u_1, \dots, u_m son **linealmente dependientes**, es decir, $0 = (0, 0, \dots, 0)$ vector nulo.

Ejemplo

$$u_1 = (1, 1), u_2 = (-1, 1)$$

¿Son linealmente independientes?

$$\lambda_1 \cdot (1, 1) + \lambda_2 \cdot (-1, 1) = (0, 0)$$

$$(\lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 \longrightarrow \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \end{array}$$

Son linealmente independientes

$$u_1 = (1, 1), u_2 = (2, 2)$$

¿Son linealmente independientes?

$$\lambda_1 \cdot (1, 1) + \lambda_2 \cdot (2, 2) = (0, 0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}$$

Proporciona una combinación lineal nula con coeficientes no nulos.

Son linealmente dependientes.

• **Proposición**

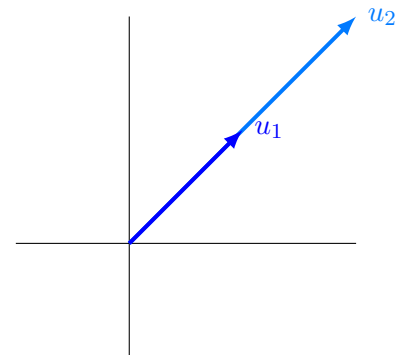
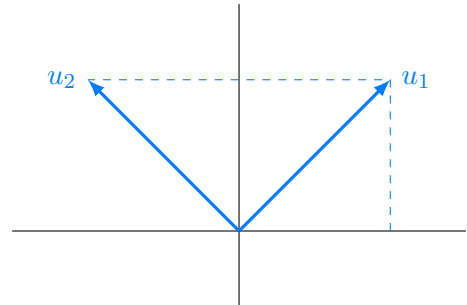
Sean $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores y $u \in \mathbb{K}^n$. Entonces:

- 1) Todo subconjunto no vacío de S es linealmente independiente.
- 2) El conjunto $S \cup \{u\}$ es linealmente independiente si y sólo si u no es combinación lineal de u_1, \dots, u_m .

• **Demostración**

- 1) Trivial
- 2) Si $S \cup \{u\}$ es linealmente independiente y $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$, entonces

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m u_m - 1 \cdot u = 0$$



es una combinación lineal nula con al menos un coeficiente no nulo. Por tanto, $S \cup \{u\}$ no es linealmente independiente (contradicción).

Recíprocamente, si $S \cup \{u\}$ es linealmente dependiente, existen escalones r, r_1, \dots, r_m , no todos nulos tales que $ru + r_1u_1 + \dots + r_mu_m = 0$.

r no puede ser cero pues si lo fuera entonces

$$r_1u_1 + r_2u_2 + \dots + r_mu_m = 0$$

y así $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 0$.

Por tanto, $u = -r^{-1}r_1u_1 - \dots - r^{-1}r_mu_m$ y así u es combinación lineal de u_1, \dots, u_m .

• Definición (Base canónica de \mathbb{K}^n)

Se llama base canónica de \mathbb{K}^n al conjunto de vectores

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Nótese que todo vector $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ se puede expresar como combinación lineal de $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

En efecto:

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{e_1} + x_2 \underbrace{(0, 1, 0, \dots, 0)}_{e_2} + \dots + x_n \underbrace{(0, \dots, 0, 1)}_{e_n}.$$

2.1.2) Normas de vectores

• Definición

Sea $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces se definen:

$$1) \|u\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

- $p = 1$

- $p = 2$ norma euclídea

$$2) \|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \text{ norma del máximo.}$$

Ejemplo

$$u = (1, -2, -1)$$

$$\|u\|_1 = |1| + |-2| + |-1| = 4$$

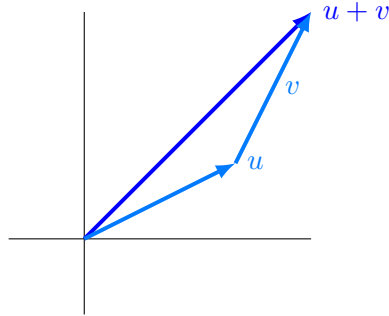
$$\|u\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |-1|^2} = \sqrt{6}$$

$$\|u\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |-1|\} = 2$$

• Proposición

Sean $\|\cdot\|$ cualquiera de las normas anteriores, $u \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

- 1) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \iff u = 0$.
- 2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$.
- 3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular)



2.1.3) Producto escalar

- Definición

Dado $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define el **producto escalar euclídeo** de u por v como

$$u \cdot v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Nótese que $\|u\|_2 = \sqrt{u \cdot u}$

- Proposición (Propiedades del producto escalar)

- 1) $u \cdot v = v \cdot u \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$
- 2) $u \cdot (v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2 \quad \forall u, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$.
- 3) $(\alpha u) \cdot v = u \cdot (\alpha v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{R}^n$
- 4) $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0 \iff u = 0$.

- Proposición (Propiedades de la norma)

- 1) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$
- 2) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v)$
- 3) $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz).

De la propiedad (3) se tiene que si $u, v \neq 0$, entonces

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1;$$

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Por tanto, existe un ángulo $0 \leq \varphi \leq \pi$ tal que

$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|v\| \cdot \|u\|}.$$

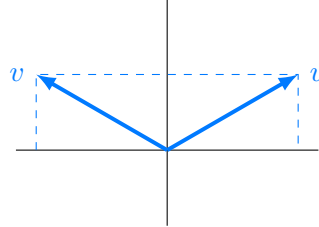
A este ángulo se le llama ángulo formado por los vectores u, v . Escribimos $\cos(u, v)$. De aquí se tiene:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(u, v).$$

Ejemplo

$$u = (\sqrt{3}, 1), v = (-\sqrt{3}, 1)$$

$$\begin{aligned} \cos(u, v) &= \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{(\sqrt{3}, 1) \cdot (-\sqrt{3}, 1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} \\ &= \frac{-3 + 1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.} \end{aligned}$$

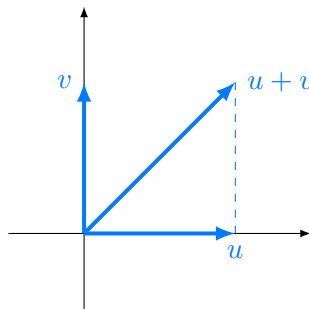


2.1.4) Ortogonalidad

- Se dice que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $u \cdot v = 0$.

Por tanto, por la proposición anterior se tiene que si u y v son ortogonales, entonces

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras})$$



Definición

Un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ se dice ortogonal si $u_i \cdot u_j = 0$ si $i \neq j$. Si además los vectores son unitarios ($\|u_i\| = 1, \leq i \leq m$), entonces el conjunto se dice ortonormal.

Ejemplo

La base canónica de $\mathbb{R}^n \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es un conjunto ortonormal.

1) Proposición

Si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es ortogonal, entonces es un conjunto linealmente independiente.

Demostración

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_m u_m = 0$$

Si multiplicamos por u_j :

$$\lambda_1 u_1 \cdot u_j + \dots + \lambda_j u_j \cdot u_j + \dots + \lambda_m u_m \cdot u_j = 0 \rightarrow \lambda_j = 0$$

2.2) Matrices

- Una matriz es un conjunto de números reales o complejos ordenados por filas (o columnas).

Denotaremos por $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ al conjunto de todas las matrices de m -filas y n -columnas.

Si $m = n$ la matriz se dice cuadrada.

Ejemplo

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de Hilbert}$$

Algunos tipos de matrices destacados:

- Diagonal:

$$D = (d_{ij}), \quad d_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$= \text{diag}[a, b, c, \dots]$$

$$= \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & b & \\ & & c \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

- Si $a = b = c \dots$, la matriz se llama escalar.
- Si $a = b = c \dots = 1$, la matriz se llama identidad y se denota I .
- Matriz triangular superior (inferior) si $a_{ij} = 0 \quad i > j \quad (i < j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Triangular superior}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Triangular inferior}$$

2.2.1) Operaciones con matrices

- Suma:

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij})$$

$$A + B = C \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Producto por escalares: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, $\lambda = j$, $\lambda A = \begin{bmatrix} 3j & -2j \\ 0 & 6j \end{bmatrix}$

- Producto de matrices:

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \longrightarrow A \cdot B \in M_{m \times n}$$

$$\cap \quad \cap$$

$$M_{m \times p} \quad M_{p \times n}$$

– Si denotamos $C = A \cdot B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$A \cdot B = [2]$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de matrices **no es conmutativo**.

- **Propiedades**

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$4) \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$$

$$5) A \cdot I = I \cdot A = A$$

• Definición (Matriz traspuesta y matriz simétrica)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$. Se llama traspuesta de A , denotado A^T , a la matriz

$$A^T = (b_{ij}) \in M_{n \times m} \text{ con } b_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

- Una matriz cuadrada se dice simétrica si $A = A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

• Propiedades de la traspuesta

$$1) (A^T)^T = A$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$3) (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$4) (A B)^T = B^T A^T$$

• Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se dice que A es invertible si existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

A la matriz B se le llama inversa de A y se denota $B = A^{-1}$.

Propiedades

$$1) \text{ Si } A \text{ y } B \text{ son invertibles, entonces } A \cdot B \text{ es invertible y } (A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

$$2) \text{ Si } A \text{ es invertible, entonces } A^T \text{ es invertible y}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

2.2.2) Operaciones con matrices por bloques

— Notación

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \\ u_n^T \end{matrix} & = & \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \\ v_1 & v_2 & & v_m & & & \end{array}$$

— Producto como filas por columnas

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \\ A \cdot B &= \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = \underbrace{u_i^T \cdot v_j}_{\text{producto escalar}} \end{aligned}$$

— Producto matriz por columna

$$B = [v_1, \dots, v_m]_{n \times m} \quad X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$$\begin{aligned} B \cdot X &= \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}}_{n \times 1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \\ &= \alpha v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} -1 \cdot a + 1 \cdot b \\ 2 \cdot a + 3 \cdot b \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

El producto por la derecha de una matriz A por una columna X es una combinación lineal de las columnas de A con los elementos de X como coeficientes.

— Producto de fila por matriz

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} &= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m^T \\ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}_{1 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} &= [-1 \cdot a + 2 \cdot b, 1 \cdot a + 3 \cdot b] \\ &= a \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{u_1^T} + b \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}}_{u_2^T} \end{aligned}$$

El producto por la izquierda de una fila X por una matriz A es una combinación lineal de las filas de A con los elementos de X como coeficientes.

— Producto como suma de matrices de rango 1

Cuando multiplicamos una columna por una fila

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & b_p \end{bmatrix}_{1 \times p} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_p \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_p \end{bmatrix}_{m \times p}$$

obtenemos una matriz cuyas filas son proporcionales, es lo que llamaremos una matriz de rango 1.

Por tanto, el producto matricial

$$A \cdot B = [v_1, \dots, v_n]_{n \times m} \cdot \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}_{m \times n} = \underbrace{v_1 u_1^T}_{\text{rango 1}} + \cdots + \underbrace{v_n u_n^T}_{\text{rango } n}$$

se puede expresar como suma de matrices de rango 1.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 14 & 16 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & 44 & 48 \\ 50 & 55 & 60 \\ 60 & 66 & 72 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 47 & 52 & 57 \\ 64 & 71 & 78 \\ 81 & 90 & 99 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.2.3) Matrices ortogonales

• Definición

Una matriz cuadrada Q se dice ortogonal si es no singular y su inversa es su traspuesta, es decir, $Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I$.

Si $Q = [u_1, \dots, u_m]$

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & \cdots & u_1^T u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, una matriz es ortogonal si y sólo si sus filas (columnas) forman un conjunto ortonormal de vectores

• Proposición

Sean P, Q ortogonales. Entonces:

- 1) $P \cdot Q$ es ortogonal
- 2) $Q u \cdot Q v = u \cdot v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^4$
- 3) $\|Q u\| = \|u\| \quad \forall u \in \mathbb{R}^4$

• Demostración

- 1) $(PQ)^T = Q^T P^T = I^{-1} P^{-1} = (PQ)^{-1}$
- 2) $Q u_{n \times n} \cdot Q v_{n \times 1} = (Q u)_{1 \times n}^T \cdot Q v_{n \times 1} = u^T \cdot Q^T \cdot Q v = u^T \cdot v = u \cdot v$
- 3) $\|Q u\|^2 = Q u \cdot Q u = u \cdot u = \|u\|^2$.

2.2.4) Tensores

- Definición (Tensor de orden 3)

Un tensor de orden 3 es una colección finita de matrices. Por tanto, el tensor T lo indexamos como

$$T = (t_{ijk}), \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq I \\ 1 \leq j \leq J \\ 1 \leq k \leq K \end{array}$$

De manera recurrente se define un tensor de cualquier orden n . En particular, un vector es un tensor de orden 1, y una matriz un tensor de orden 2.

Hoja de ejercicios Tema 2: Vectores, matrices y tensores

- 1) Determina la verdad o falses de la siguiente afirmación: si u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3 , entonces u_3 es combinación lineal de u_1 y u_2
- 2) Consideremos los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$. Encuentra un vector w ortogonal a u y v . Comprueba que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v . Encuentra ahora un vector que no sea combinación lineal de u , v y comprueba que no es ortogonal a w .
- 3) Haz un dibujo de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_1 = 1\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_2 = 1\}$$

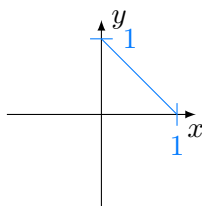
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_\infty = 1\}$$

$$\{x, y \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_1 = 1\}$$

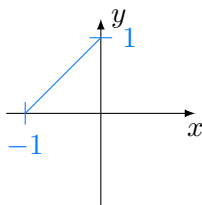
$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$$

- Posibles casos

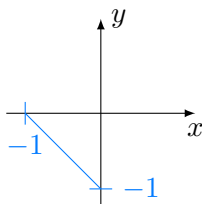
1) $x, y \geq 0 \rightarrow \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = x + y = 1 \rightarrow y = -x + 1$



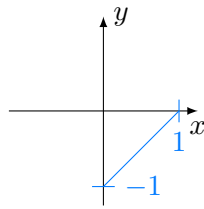
2) $x \leq 0, y \geq 0 \rightarrow \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = -x + y = 1 \rightarrow y = x + 1$



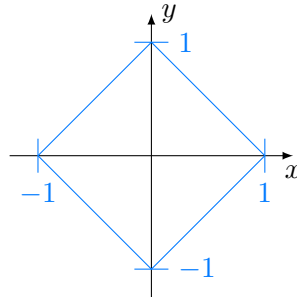
3) $x, y \leq 0 \rightarrow \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = -x - y = 1 \rightarrow y = -x - 1$



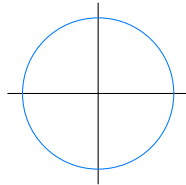
4) $x \geq 0, y \leq 0 \rightarrow \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = x - y = 1 \rightarrow y = x - 1$



En resumen:



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 = 1\}, \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \longleftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

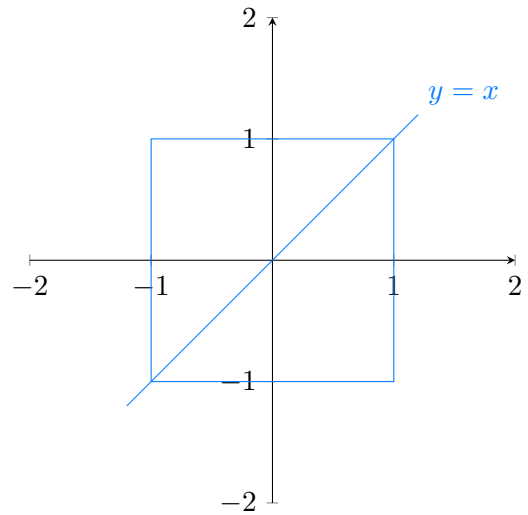


$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_\infty = 1\}$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

• Posibles casos

- 1) $x \geq 0, y \geq 0 \quad \|(x, y)\|_\infty = \max\{x, y\} = 1$
- 2) $x \leq 0, y \geq 0 \quad \|(x, y)\|_\infty = \max\{-x, y\} = 1$
- 3) $x \leq 0, y \leq 0 \quad \|(x, y)\|_\infty = \max\{-x, -y\} = 1$



4) Prueba que $\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty}$

$$\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty}, \quad u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\|u\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$\|u\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

$$\|u\|_2^2 = |x_1| |x_1| + |x_2| |x_2| + \dots + |x_n| |x_n|$$

$$\leq |x_1| \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} + |x_2| \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} + \dots + |x_n| \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

$$\leq (|x_1| + \dots + |x_n|) \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

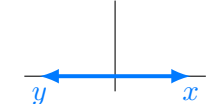
$$= \|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty$$

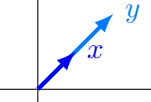
- 5) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero, pero ¿qué pasa si su producto es próximo a cero? Sean $x = [1, -0.75]$ e $y = [0.3, 0.3]$. Calcular el producto escalar $x \cdot y$ y el ángulo que forman. ¿Qué conclusión puedes sacar?

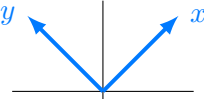
Si dos vectores x, y son unitarios, entonces $-1 \leq x \cdot y \leq 1$ (¿por qué?). En este caso, ¿qué podemos decir si $x \cdot y$ es aproximadamente $-1, 1$ o cero?

$$\|x\| = \|y\| = 1 \quad -1 \leq x \cdot y \leq 1 \quad \text{¿Por qué?}$$

$$-1 \leq x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cos(x, y) = \cos(x, y) \leq 1$$

Si $x \cdot y \simeq -1 \rightarrow$  Paralelos y de sentido contrario

Si $x \cdot y \simeq 1 \rightarrow$  Paralelos y del mismo sentido

Si $x \cdot y \simeq 0 \rightarrow$  Ortogonales

- 6) Sean u, v dos vectores unitarios de \mathbb{R}^n que forman un ángulo de 60° . Calcula $\|2u + v\|$.

$$\begin{aligned} \|2u + v\|^2 &= (2u + v) \cdot (2u + v) \\ &= 4u \cdot u + 2u \cdot v + 2v \cdot u + v \cdot v \\ &= 4 \underbrace{\|u\|^2}_1 + \underbrace{2u \cdot v + 2v \cdot u}_{(*)} + \underbrace{\|v\|^2}_1 \\ (*) &= 4u \cdot v = 4 \underbrace{\|u\|}_1 \cdot \underbrace{\|v\|}_1 \underbrace{\cos(u, v)}_{\cos 60^\circ} \end{aligned}$$

- 7) Sean u, v dos vectores de \mathbb{R}^n de norma 2 y 3 respectivamente que forman un ángulo de 60° . ¿Qué ángulo forman los vectores u y $2u - v$?

8) Calcula $A + B$, $(A + B)^T$, AB , BA , $(AB)^T$, $A^T B^T$ y $B^T A^T$ para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9) Prueba que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} u_1^T \\ u_2^T \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix}$$

$$A \cdot A =$$

$$u_1^T \cdot v_1 = 0 \rightarrow u_1^T \text{ y } v_1 \text{ son ortogonales}$$

$$u_2^T \cdot v_1 = 0 \rightarrow u_2^T \text{ y } v_1 \text{ son ortogonales}$$

$$u_2^T \cdot v_2 = 0 \rightarrow u_2^T \text{ y } v_2 \text{ son ortogonales}$$

$$\left. \begin{matrix} u_1^T \cdot v_2 = 1 \\ u_1^T \cdot v_2 = u_1^T \cdot \lambda v_1 = \lambda u_1^T \cdot v_1 = 0 \end{matrix} \right\} \text{ NO}$$

10) ¿Es cierta para matrices la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$?

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$$

Para que fuese cierto, el producto de matrices debería ser conmutativo. Sabemos que no lo es. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11) ¿Existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A \cdot A^T = 0$? ¿y si son matrices complejas?

¿Existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A \cdot A^T = 0$? ¿Y complejas?

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1^\top \\ \leftarrow u_2^\top \end{matrix} \quad A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1^\top \\ \leftarrow u_2^\top \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 \end{matrix}$

$$A \cdot A^\top = \begin{bmatrix} u_1^\top \\ u_2^\top \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^\top \cdot u_1 & u_1^\top \cdot u_2 \\ u_2^\top \cdot u_1 & u_2^\top \cdot u_2 \end{bmatrix}$$

$$u_1^\top \cdot u_1 = \|u_1\|^2 = 0 \rightarrow u_1^\top = [0, 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2^\top \cdot u_2 = \|u_2\|^2 = 0 \rightarrow u_2^\top = [0, 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \quad A^\top = \begin{bmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^\top = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^2 + z_2^2 & z_1 z_3 + z_2 z_4 \\ z_2 z_1 + z_4 z_2 & z_3^2 + z_4^2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} z_1 = j & z_3 = j \\ z_2 = 1 & z_4 = 1 \\ z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_4 = j^2 + 1 = 0 \end{matrix}$$

12) Sean A, B matrices tales que $I+AB$ es invertible y sea S la inversa de $I+AB$. Prueba que $I+BA$ también es invertible y su inversa es $I - BSA$.

Hipótesis: ¿qué es lo que sabemos?

$$\begin{aligned} (I + AB) \cdot S &= I \\ S(I + AB) &= I \end{aligned}$$

Tesis: lo que queremos probar

$$(I + BA) \cdot (I - BSA) \stackrel{?}{=} I$$

$$(I - BSA) \cdot (I + BA) \stackrel{?}{=} I$$

$$\begin{aligned} (I + BA) \cdot (I - BSA) &= I - \overline{BSA} + BA - BA\overline{BSA} \stackrel{?}{=} I \\ &= I + BA - B(SA + ABSA) \\ &= I + BA - B \underbrace{(S + ABS)}_{I \text{ por hipótesis}} A \\ &= I + \cancel{BA} - \cancel{BA} \\ &= I \end{aligned}$$

- 13) Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Si llamamos **flop** a una operación, ya sea una suma, resta, multiplicación o división, prueba que para calcular

$$A_{n \times p} \quad B_{p \times m}$$

$A \cdot B$ requiere $m \times n(2p - 1)$ flops

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$$

$$\text{fila} \times \text{columna} = p + p - 1 = 2p - 1$$

$$\text{fila} \times \text{todas columnas} = m(2p - 1)$$

$$\text{todas las filas} \times \text{todas columnas} = \boxed{nm(2p - 1)}$$

$$A_{\substack{10 \times 2 \\ n \quad p}} \quad B_{\substack{2 \times 10 \\ p \quad m}} \quad C_{10 \times 10}$$

$$\underbrace{(A \cdot B)_{n \times m} \cdot C}_{\text{backward}} = A \cdot \underbrace{(B \cdot C)_{2 \times 10}}_{\text{backward}}$$

- 14) Dadas dos matrices cuadradas A, B , se define el **conmutador** de A, B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por otra parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguientes tres matrices, llamadas matrices de Pauli:

$$S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, S_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ matrices de Pauli}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, h \text{ constante de Plank}$$

$$[S_x, S_y] = \hbar S_z [S_x, S_y] = S_x S_y - S_y S_x = \frac{1}{4} \hbar^2 \begin{bmatrix} 2j & 0 \\ 0 & -2j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \hbar^2 j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = j \hbar \frac{1}{2} \hbar \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{S_z}$$

$$S_x S_y = \frac{1}{2} \hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \hbar^2 \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

$$S_y S_x = \frac{1}{2} \hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \hbar^2 \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

15) Si A es una matriz simétrica, ¿son las matrices $B^T A B$, $A + A^T$ y $A - A^T$ simétricas?

$$(B^T A B)^T = (A \cdot B)^T (B^T)^T$$

$$= B^T A^T B$$

$$= B^T A B$$

por ser A simétrica

Por tanto, $B^T A B$ es simétrica.

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T \text{ Si es simétrica}$$

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A \neq A - A^T \text{ No es simétrica}$$

16) Prueba que si A es una matriz invertible simétrica, entonces A^{-1} es también simétrica.

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = \{A \text{ simétrica}\} = A^{-1}$$

17) Sean u_1, \dots, u_m vectores de \mathbb{K}^n y supongamos que para ciertos escalares x_1, \dots, x_m se tiene $x_1 u_1 + \dots + x_m u_m = 0$. Expresa esta última igualdad en forma matricial.

$$x_1 u_1 + \dots + x_m u_m = 0 \iff A x = 0 \text{ donde } A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

18) Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Observa que $1 + v^T u$ es un escalar, que suponemos no nulo. Prueba que la matriz $I + u v^T$ es no singular y su inversa es

$$(I + u v^T)^{-1} = I - \frac{u v^T}{1 + v^T u}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$v^\top \cdot u = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$I + u v^\top \in M_{n \times n}$$

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{u v^\top}{1 + v^\top u} \right) (I + u v^\top) &= I + u v^\top - \frac{u v^\top}{1 + v^\top u} - \frac{u v^\top}{1 + v^\top u} \cdot u v^\top \\ &= I + u v^\top - \frac{u v^\top}{1 + v^\top u \cdot u \cdot v^\top} \\ &= I + u v^\top - \frac{(u + u \cdot v^\top \cdot u) v^\top}{1 + v^\top u} \\ &= I + u v^\top - \frac{u(1 + v^\top u) \cdot v^\top}{1 + v^\top} \\ &= I + u v^\top - u v^\top = I \end{aligned}$$

De igual manera se prueba que

$$(I + u v^\top) \cdot \left(I - \frac{u v^\top}{1 + v^\top u} \right) = I$$

19) Sea A la matriz dada por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} invertible. Prueba que existen matrices X, Y tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ e I es la matriz identidad del tamaño adecuado (la matriz S se denomina **complemento de Schur** de A_{11}).

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ X A_{11} & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11} Y \\ X A_{11} & X A_{11} Y + S \end{bmatrix}$$

$$A_{11} Y = A_{12} \longrightarrow Y = A_{11}^{-1} A_{12}$$

$$X A_{11} = A_{21} \longrightarrow X = A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= X A_{11} Y + S = A_{21} \underbrace{A_{11}^{-1} A_{11}}_I A_{11}^{-1} A_{12} + A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \\ &= A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} + A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \\ &= A_{22} \end{aligned}$$

20) Expresa la matriz AB como suma de matrices de rango 1, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B$ como suma de matrices de rango 1.

$$A \cdot B_{2 \times 3} = v_1 u_1^T + v_2 u_2^T + v_3 u_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 4 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

21) Sea $u^T = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$, $v^T = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$ y $w^T = [a, b, c]$. Halla a, b, c para que la matriz $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal de determinante 1.

$$u^T = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$v^T = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$w^T = [a, b, c]$$

$$0 = u^T \cdot w^T = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cdot [a, b, c]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}c$$

$$0 = v^T \cdot w^T = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cdot [a, b, c]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}a + \frac{1}{\sqrt{3}}b + \frac{1}{\sqrt{3}}c$$

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

Se resuelve el sistema:

$$\left. \begin{array}{rclcl}
 a & + & c & = & 0 \\
 -a & + & b & + & c & = & 0 \\
 -a & - & 2b & + & c & = & \sqrt{2}\sqrt{3}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow c = -a \\ \\ \longrightarrow 3b = -\sqrt{2}\sqrt{3} \longrightarrow b = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{array}$$

$$2c = -b \longrightarrow c = -\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \longrightarrow a = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$$

Tema 3: Sistemas de ecuaciones y determinantes

3.1) Operaciones elementales en una matriz

Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ llamaremos **operaciones elementales** de filas en A a cualquiera de las siguientes operaciones:

- 1) Intercambiar dos filas
- 2) Multiplicar una fila por un escalar.
- 3) Añadir a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Estas operaciones se pueden llevar a cabo multiplicando A por una determinada matriz que llamaremos **elemental**. Hay tres tipos de matrices elementales:

- 1) Matriz de permutación simple P_{ij} : se obtiene permutando las filas i y j en la identidad.

Ejemplo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ P_{12} \cdot A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 2) Matriz de dilatación $D_s(r)$: se obtiene multiplicando la fila S de la identidad por r .

Ejemplo

$$D_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad D_2(5) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \end{bmatrix}$$

- 3) Matriz de adición $S_{ij}(r)$: se obtiene sumando a la fila i la j multiplicada por r .

Ejemplo

$$\begin{aligned} S_{12}(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Propiedades

Las matrices elementales son invertibles. Además:

- 1) $P_{ij}^{-1} = P_{ji}$
- 2) $D_s(r)^{-1} = D_s\left(\frac{1}{r}\right)$
- 3) $S_{ij}(r)^{-1} = S_{ij}(-r)$

• **Definición (Matriz de permutación)**

Llamaremos matriz de permutación P a aquella que se expresa como producto de matrices de permutación elementales.

Ejemplo

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{12}P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Definición (Matrices equivalentes)**

Se dice que dos matrices A y B son **equivalentes** si existen matrices invertibles P y Q de modo que

$$B = P A Q$$

• **Definición**

Dada una matriz, se llama **pivote** de una fila a la primera entrada (contando de izquierda a derecha) no nula de esa fila.

Se dice que la **matriz escalonada** por filas si:

- 1) El pivote de cada fila no nula está estrictamente a la derecha del pivote de la fila anterior.
- 2) Las filas nulas, si las hay, son las últimas.

La matriz escalonada reducida por filas si además:

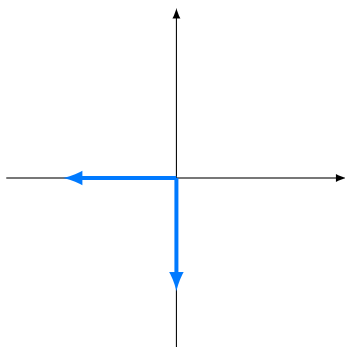
- 1') El pivote de cada fila no nula vale 1.
- 2') Cada pivote es el único elemento no nulo de su columna.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

No escalonada
Escalaonada pero no reducida
Escalaonada reducida

• **Teorema (Factorización PAQ)**



Toda matriz A es equivalente a una matriz de la forma

$$B = \left[\begin{array}{c|c} Ir & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

Nota: La forma de llegar de A a B es utilizando operaciones elementales. Este proceso se llama **eliminación gaussiana**.

es decir, existen matrices invertibles P y Q de modo que

$$B = PAQ$$

Al número r , es decir, al número de filas no nulas que resultan después de escalonar una matriz se le llama rango de A y se denota $r = \text{rg}(A)$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hacemos operaciones elementales fila con la matriz.

$$\begin{aligned} (A|I_3) &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1}]{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \\ &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \rightarrow \frac{1}{3}F_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + F_2} \\ &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = PA,$$

con

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora realizamos operaciones elementales columna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 \rightarrow C_3 - 2C_1 \\ C_4 \rightarrow C_4 - C_1}]{C_3 \rightarrow C_3 - 2C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene que $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = PAQ$$

$$\text{rg}(A) = 2$$

3.2) Sistemas de ecuaciones

- Definición

Un sistema lineal de m -ecuaciones con n -incógnitas es un sistema del tipo:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que en forma matricial escribimos como

$$(*) \quad Ax = n$$

donde:

- $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es la matriz del sistema.
- $b = (b_i) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es el término independiente.
- $x = (x_j)$ es el vector incógnita.

El sistema $(*)$ se dice:

- Homogéneo si $b = 0$
 - Incompatible: si no tiene solución.
 - Compatible determinado: si tiene una única solución.
 - Compatible indeterminado: infinitas soluciones.
 - Teorema (Rouché-Frobenius)
- Consideremos el sistema $(*)$ y sea $(A|b)$ la llamada matriz. Entonces:
- 1) Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = n^0$ de incógnitas, entonces el sistema $(*)$ es compatible determinado. (SCD)
 - 2) Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) < n^0$ de incógnitas, entonces $(*)$ es compatible indeterminado (SCI). La solución depende de $n^0 - \text{rg}(A)$ parámetros.
 - 3) Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$, el sistema $(*)$ es incompatible.

3.2.1) Método de Gauss para la resolución de sistemas lineales

Consiste en hacer operaciones elementales fila sobre la matriz $(A|b)$ hasta conseguir una matriz escalonada cuyo sistema asociado se resuelva fácilmente.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 3t = 6 \\ x + 2y - 2z - t = 3 \\ 4x + 5y - 2z + t = 12 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 12 \end{array} \right] \xleftrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 < 4 = n^0 \text{ de incógnitas. SCI}$$

La solución depende de 2 parámetros.

$$\left. \begin{array}{l} t = \lambda \quad x + 2y - 2\mu - \lambda = 3 \\ z = \mu \quad -3y + 6\mu + 5\lambda = 0 \end{array} \right\}$$

$$y = 2\mu + \frac{5}{3}\lambda$$

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2y + 2\mu + \lambda = 3 - 2\left(2\mu + \frac{5}{3}\lambda\right) + 2\mu + \lambda \\ &= 3 - 4\mu - \frac{10}{3}\lambda + 2\mu + \lambda \\ &= \boxed{3 + 2\mu - \frac{7}{3}\lambda} \end{aligned}$$

3.2.2) Cálculo de la inversa de una matriz mediante eliminación Gaussiana

- Método

Realizar operaciones elementales fila sobre la matriz $(A|I)$ hasta conseguir que a la izquierda aparezca la identidad. A la derecha tendremos A^{-1} .

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[A|I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1}]{\substack{F_2 \leftrightarrow F_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 \rightarrow \frac{1}{3}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] \\
A &= \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3.3) Determinantes

- Definición

Sea $A \in M_2(\mathbb{K})$. Se define el determinante de A , denotado $|A|$ o $\det(A)$, como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Si $A \in M_3(\mathbb{K})$, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Para matrices de mayor tamaño, el determinante se define de manera recursiva. Veámoslo:

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} al determinante ($|A_{ij}|$) de la submatriz A_{ij}

que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de la matriz original A .

Se llama **adjunto de a_{ij}** , denotado Δ_{ij} , al escalar

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|.$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 24 - (3 + 8) = 21$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} A_{23} = -21$$

• Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. El determinante de A se define de manera recurrente como:

$$n = 1, \quad |(a)| = a$$

$$n > 1 \quad |A| = a_{i1} \Delta_{i1} + a_{i2} \Delta_{i2} + \cdots + a_{in} \Delta_{in}$$

Nota: También se puede definir eligiendo una columna. La definición no depende de la fila o columna elegidas.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -3 - 2 \cdot (4 - 4) + 4 \cdot 6 = 21 \end{aligned}$$

Desarrollando por la segunda columna:

$$2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(4 - 4) + 0 - 3 \cdot (1 - 8) = 21$$

3.3.1) Propiedades básicas

- 1) $|A| = |A^T|$
- 2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- 3) A es no singular (invertible) si y sólo si $|A| \neq 0$. En este caso

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

3.3.2) Propiedades de los determinantes y las operaciones elementales

- 1) $\left| [u_1, \dots, u_j + u'_j, \dots, u_n] \right| = \left| [u_1, \dots, u_j, \dots, u_n] \right| + \left| [u_1, \dots, u'_j, \dots, u_n] \right|$
- 2) $\det[u_1, \dots, \alpha u_j, \dots, u_n] = \alpha \cdot \det[u_1, \dots, u_j, \dots, u_n]$
- 3) $\det[u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n] = -\det[u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n]$
- 4) Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un escalar, el determinante no cambia.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 & a+5 \\ a+6 & a+7 & a+8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \rightarrow F_3 - F_1}]{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} 2 \cdot \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.3.3) Resolución de sistemas lineales usando determinantes

Consideremos el sistema $Ax = b$. Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución que viene dada por

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}, \quad (\text{regla de Cramer})$$

donde Δ_i es el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo la columna i -ésima de A por el término independiente b .

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -x + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{array} \right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - (1 + 1) = -2 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - (1 - 1) = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - 1 - (1 + 1 + 1) = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - (1 - 1) = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = 0$$

3.3.4) Cálculo de la inversa mediante determinantes

- Definición (Matriz adjunta)

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se llama matriz adjunta de A , denotado \hat{A} , a la matriz cuyas entradas son los adjuntos de la entrada de A , es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces $\hat{A} = (\Delta_{ij})$.

- Proposición

Si A es invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \hat{A}^T.$$

Ejemplo

Sea $Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ortogonal con $|Q| = +1$. Vamos a calcular su inversa.

$$\Delta_{11} = |d| = d \quad \Delta_{12} = -|b| = -b$$

$$\Delta_{21} = -|c| = -c \quad \Delta_{22} = |a| = a$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \hat{Q}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Como } |Q| = +1 \longrightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Recordaremos que como Q es ortogonal, $Q^{-1} = Q^T$.

Por tanto

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} a = d \\ b = -c \end{matrix}$$

En resumen:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

Hoja de ejercicios Tema 3: Sistemas de ecuaciones y determinantes

- 1) Sea $\{w_1, w_2, w_3\}$ un conjunto independiente de vector de \mathbb{R}^3 . Se definen los vectores $v_1 = w_1 + w_2, v_2 = w_1 + 2w_2 + w_3$ y $v_3 = w_2 + cw_3$. Si $V = [v_1, v_2, v_3]$ y $W = [w_1, w_2, w_3]$, entonces se tiene $V = WC$ con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Qué condición debe cumplir c para que los vectores v_1, v_2, v_3 sean linealmente independientes?

- 2) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Halla matriz de permutación P tal que $PA = B$ y escribe P como producto de matrices de permutación simples.

- 3) Se tiene una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño 5×5 , donde a_{ij} es la cantidad de mensajes que la persona i manda a la persona j . Las filas y columnas siguen el orden: Juan, Ana, Pedro, María, Maite. Halla una matriz de permutación P tal que las columnas y filas de PAP^T sigan el orden: Ana, María, Juan, Maite, Pedro.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A \longleftrightarrow J \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} P \longrightarrow J & P_{34} \\ P \longrightarrow \text{MAY} & P_{45} \end{array}$$

$$P_{ij} = \text{permutación entre la fila } i \text{ y la } j \quad J \longleftrightarrow M \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P_{45} P_{34} P_{24} P_{12}$$

- 4) Consideremos la matriz por bloques $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ con A una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times p$. Supongamos que haciendo operaciones elementales de filas se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}$. Prueba que $X = A^{-1}B$.

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{fila}} \begin{bmatrix} I & X \end{bmatrix} \longrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} A & IB \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I & \underbrace{A^{-1}B}_X \end{bmatrix}$$

Cada operación fila se traduce es el producto de una matriz elemental por I . B permanece inalterada.

- 5) Halla una relación de dependencia entre los vectores $u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (2, 1, 0, 1), u_3 = (0, 2, -1, 1)$ y

$$u_4 = (3, -1, 2, 0).$$

- 6) Sean A y B matrices del mismo tamaño. Sea A' la matriz que resulta de A después de intercambiar las columnas i, j y sea B' la matriz que resulta de B después de intercambiar las filas i, j . Escribe las matrices A' y B' en términos de A, B y matrices elementales. ¿Por qué se verifica que $AB = A'B'$?

$$\begin{aligned} A' &= AP_{ij}^{\text{columna}} \\ B' &= P_{ij}^{\text{fila}} B \\ A'B' &= A_{ij}^c P_{ij}^f B \end{aligned} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}^c = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad P_{ij}^f = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}^c \cdot P_{ij}^f = I$$

- 7) Calcular el rango de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

en función de los parámetros a y b .

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Calcula el rango de B

Posibles casos:

1) $a = b = 0 \rightarrow B = [0] \rightarrow \text{rg}(B) = 0$

2) $a \neq 0, b = 0 \rightarrow \text{rg}(B) = 4$

3) $a = 0, b \neq 0 \rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \text{rg}(B) = 4$

$$a \neq 0, b \neq 0$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - \frac{b}{a} F_1} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\frac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - \frac{b}{a} F_2} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\frac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & \frac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{F_4 \rightarrow F_4 - \frac{b}{a} F_3} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\frac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & \frac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \frac{b^4}{a^3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Si } a - \frac{b^4}{a^3} = 0 = \{a^4 - b^4 = 0 \longleftrightarrow a = \pm b\} = \text{rg}(B) = 3$$

$$\text{Si } a \neq \pm b \longrightarrow \text{rg}(B) = 4$$

8) Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ calcula matrices invertibles P y Q tales que

$$PMQ = \left[\begin{array}{c|c} 1_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

con r el rango de M .

9) Halla la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y expresa A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

10) Determina el valor del parámetro a para el cual la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$ es invertible y calcula su inversa.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - aF_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - a^3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - a^2F_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a & 1 & -a^3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{F_3 \rightarrow F_3 - aF_2 \\ F_4 \rightarrow F_4 - a^2F_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a^4 - a^3 & 0 & -a^2 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{F_4 \rightarrow F_4 - aF_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a^4 - 2a^3 & a^2 & -a^2 + a & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

11) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 2y - z - 2t & = & 5 \\ -2x - 4y + 2z + 4t & = & -10 \\ y + t & = & 1 \\ x + 3y - z - t & = & 6 \\ x - z - 4t & = & 3 \end{array} \right\}$$

12) Discute en el cuerpo de los números reales los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro a

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & ay & & + & at & = & a \\ ax & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & + & y & + & az & + & t & = & 1 \end{array} \right.$$

13) Si $A = [u_1, \dots, u_n]$, expresa el determinante de $B = [u_n u_1 \dots u_{n-1}]$ en función del determinante de A .

14) Una matriz A que cumple $A = -A^T$ se llama **antisimétrica**. Prueba que una matriz antisimétrica de tamaño impar tiene determinante nulo.

A antisimétrica de tamaño n impar

$$A = -A^T \longrightarrow |A| = 0$$

$$|A| = |-A^T| = (-1)^n |A^T| = (-1)^n |A| \longrightarrow |A| = 0$$

15) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \hline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1}]{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} = 0$$

16) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + y + & = & 0 \\ 4x - 6y - 2z & = & 2 \\ -2x + 15y + 7z & = & -4 \end{array} \right\}$$

Observa que podemos eliminar la última ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras. Considerando ahora los términos en z como si fuesen términos independientes, observa que el sistema es un sistema de Cramer en x, y . Resuélvelo con la fórmula de Cramer y después expresa las soluciones en la forma $x_0 + u$ (x_0 solución particular y u solución genérica del sistema homogéneo).

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= -z \\ 4x - 6y &= 2 + 2z \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -16$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 2 + 2z & -6 \end{vmatrix}}{-16} = -\frac{1}{16}(6z - 2 - 2z) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 4 & 2 + 2z \end{vmatrix}}{-16} = -\frac{1}{16}(4 + 4z + 4z) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}z$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}z \\ y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}z \\ z = z \end{cases} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistema homogéneo

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 4x - 6y - 2z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -4x - 2y + 2z &= 0 \\ 4x - 6y - 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Solución genérica del homogéneo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{1}{2}z \\ z = z \end{cases} \quad \begin{aligned} -8y &= 4z \rightarrow y = -\frac{1}{2}z \\ 2x &= -y - z = +\frac{1}{2}z - z = -\frac{1}{2}z \\ x &= -\frac{1}{4}z \end{aligned}$$

Tema 4: Subespacios vectoriales, bases y coordenadas

• Definición (Subespacio vectorial)

Un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n es un subconjunto W de \mathbb{K}^n que cumple:

- 1) Si $w, w' \in W \longrightarrow w + w' \in W$
- 2) Si $w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K} \longrightarrow \alpha w \in W$

Nota: Nótese que el vector 0 siempre pertenece a todo subespacio vectorial W . En efecto dado $w \in W$ se tiene que $-1 \cdot w = -w \in W$. Además $w + (-w) = 0 \in W$

Ejemplo

Sean $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y W el conjunto de soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces, W es un subespacio vectorial. En efecto: si $w, w' \in W$, entonces $Aw = 0, Aw' = 0$. Por tanto, $A(w + w') = Aw + Aw' = 0 + 0 = 0$, lo que implica que $w + w' \in W$.

Si $w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $Aw = 0$ y $A(\alpha w) = \alpha Aw = 0$. Por tanto, $\alpha w \in W$.

A este subespacio se le llama núcleo de A y se denota $\text{nuc}(A)$.

Ejemplo 1

Sea $W = \mathbb{K}^n$. Entonces los vectores

$$B = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

son una base de W . En efecto:

- 1) B es un conjunto generador ya que si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$\begin{aligned} v &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n \\ &= v_1(1, 0, \dots, 0) + v_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + v_n(0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

- 2) B es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} \sum \alpha_i e_i = 0 &\iff \alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\text{Sean } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } W = \text{nuc}(A).$$

Vamos a obtener una base de W .

$$Ax = 0 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \text{rg}(A) = 2 < 3 = n^{\circ} \text{ de incógnitas}$$

Desde un punto de vista computacional interesa disponer de bases ortonormales. El Algoritmo de Gram-Schmidt proporciona un método sistemático para construir una base ortonormal a partir de otra dada.

- **Teorema (Algoritmo de Gram-Schmidt)**

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un conjunto de vectores lineales independiente de \mathbb{R}^n . Entonces, existe un conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ de modo que

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$$

- **Demostración**

1) Sea $v'_1 = v_1$

2) $v'_2 = v_2 + \alpha v_1$. Imponemos

$$0 = v'_1 \cdot v'_2 = v_1 \cdot v_2 + \alpha v_1 \cdot v'_1 = v'_1 \cdot v_2 + \alpha \|v'_1\|^2 \longrightarrow \alpha = -\frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} \longrightarrow v'_2 = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} v_1$$

obviamente $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v'_1, v'_2 \rangle$

3) $v'_3 = v_3 + \alpha v'_2 + \beta v'_1$. Imponemos

$$0 = v'_3 \cdot v'_2 = v_3 \cdot v'_2 + \alpha v'_2 \cdot v'_2 + \beta \cancel{v'_1 \cdot v'_2}^0 \longrightarrow \alpha = -\frac{v_3 \cdot v'_2}{\|v'_2\|^2}$$

$$0 = v'_3 \cdot v'_1 = v_3 \cdot v'_1 + \cancel{\alpha v'_2 \cdot v'_1}^0 + \beta v'_1 \cdot v'_1 \longrightarrow \beta = -\frac{v_3 \cdot v'_1}{v'_1 \cdot v'_1} = -\frac{(0, 1, 1) \cdot (1, 1, 0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$v'_3 = (0, 1, 1) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) - \frac{1}{2} (1, 1, 0)$$

Finalmente:

$$u_1 = \frac{v'_1}{\|v_1\|}, \quad u_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|}, \quad u_3 = \frac{v'_3}{\|v'_3\|}$$

4.1) Suma de subespacios vectoriales

- **Definición (Suma de subespacios)**

Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ dos subespacios vectoriales. Se llama suma de los subespacios u y v , denotado,

$$U + V = \{w = u + v, u \in U, v \in V\}$$

obviamente, $U + V$ es un subespacio vectorial.

Además, si $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle, V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ entonces

$$U + V = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle.$$

- **Proposición**

La suma $U + V$ es directa si y sólo si $U \cap V = \{0\}$. En este caso, cada vector $w \in U \oplus V$ se escribe de forma única como $w = u + v, u \in U, v \in W$.

4.2) Ortogonal a un subespacio

- **Definición**

Dado un subespacio vectorial $U \subset \mathbb{R}^n$, se define su subespacio ortogonal como

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : u \cdot v = 0 \forall u \in U\}$$

- **Proposición**

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial. Entonces

$$U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$$

- **Demostración**

Es fácil ver que U^\perp es un subespacio vectorial. Además, si $u \in U \cap U^\perp$ entonces $u \cdot u = 0 \rightarrow u = 0$.

Sea B una base ortogonal de U y la ampliamos a una base ortogonal $B \cup B'$ de \mathbb{R}^n . Entonces

$$\mathbb{R}^n = \langle B \rangle \oplus \langle B' \rangle \subseteq U \oplus U^\perp \subset \mathbb{R}^n$$

4.3) Subespacios asociados a una matriz. Rango

- **Definición**

Dada $A \in M_{m \times n}$, definimos los siguientes subespacios, llamados fundamentales, de A :

- 1) $\text{Col}(A)$ = subespacio generado por las columnas de A .
- 2) $\text{Fil}(A)$ = subespacio generado por las filas de A .
- 3) $\text{nuc}(A)$ = subespacio generado por las soluciones del sistema $Ax = 0$. (núcleo por la derecha)
- 4) $\text{nuc}(A^\top)$ = subespacio generado por las soluciones del sistema $A^\top x = 0$, que también se escribe como $x^\top A = 0$.

- **Proposición**

$$\text{rg}(A) = \dim \text{Fil}(A) = \dim \text{Col}(A).$$

- Demostración

1) Veamos que si P es invertible, entonces

$$\dim \text{Col}(PA) = \dim \text{Col}(A)$$

Sea $r = \dim \text{Col}(A)$ y $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ una base de $\text{Col}(A)$.

Entonces $\{Pu_1, \dots, Pu_r\}$ son linealmente independientes. Por tanto, $r \leq \dim \text{Col}(PA)$.

Recíprocamente, si $\{Pu_1, \dots, Pu_s\}$ es una base de $\text{Col}(PA)$ entonces $\{P^{-1}Pu_1, \dots, P^{-1}Pu_s\}$ son linealmente independientes. Por tanto, $s \leq r$ y así $\dim \text{Col}(A) = \dim \text{Col}(PA)$.

2) De igual modo se prueba que si Q es invertible, entonces $\dim \text{Fil}(AQ) = \dim \text{Fil}(A)$.

3) Consideremos la factorización PAQ de A , es decir,

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} Ir & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

y recordemos que el rango es el número de pivotes no nulos.

Por lo visto anteriormente se tiene el resultado.

- Teorema (Rank-nullity)

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Entonces

$$\text{rg}(A) = \dim \text{nuc}(A) = n$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = 2$

4.4) Coordenadas respecto de una base

Sean $W \subset \mathbb{K}^n$ un subespacio vectorial y $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ una base de W .

Entonces, todo vector de W se expresa de modo único como combinación lineal de los vectores de B .

En efeto: sea $w \in W$ y supongamos que

$$w = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^m \beta_i u_i.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0 \xrightarrow[\substack{\{u_i\} \\ \text{lin. ind.}}]{} \alpha_i - \beta_i = 0$$

- Definición

Sea W un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n y $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ una base de W .

Dado $w \in W$, se llaman **coordenadas** de w en la base B a los únicos escalares $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^n$ tales que $w = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$. Se denota:

$$[w]_B = (x_1, \dots, x_m)$$

Ejemplo

$$W = \mathbb{R}^2$$

$$B = \{v_1 = (1, 2), v_2 = (2, -1)\}$$

$$B' = \{v'_1 = (1, -3), v'_2 = (0, 1)\}$$

Vamos a calcular $M_{B \rightarrow B'}$

$$v_1 = (1, 2) = a_{11} \cdot v'_1 + a_{21} \cdot v'_2 = a_{11}(1, -3) + a_{21}(0, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = a_{11} \\ 2 = -3a_{11} - a_{21} \end{array} \right\} \rightarrow a_{21} = -3a_{11} - 2 = -5$$

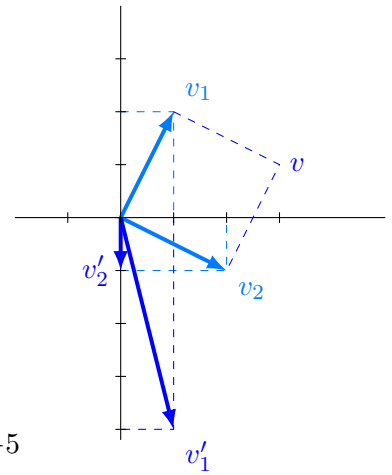
$$v_2 = (2, -1) = a_{12} \cdot v'_1 + a_{22} \cdot v'_2 = a_{12}(1, -3) + a_{22}(0, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = a_{12} \\ -1 = -3a_{12} - a_{22} \end{array} \right\} \rightarrow a_{22} = 1 - 3a_{12} = -5$$

$$M_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Sea ahora $[v]_B = (1, 1)$, ¿ $[v]_{B'}$?

$$\begin{aligned} [v]_{B'} &= M_{B \rightarrow B'} \cdot [v]_B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



4.5) Coordenadas en bases ortonormales

Supongamos que $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ es una base ortonormal de W , es decir,

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{delta de Kronecker}$$

$$\|u_i\| = 1, \quad 1 \leq i \leq m$$

Vamos a calcular la forma que tiene $[w]_B$, siendo $w \in W$. Se tiene:

$$w = \sum x_i u_i$$

Por tanto:

$$w \cdot u_j = \sum x_i \cdot u_i \cdot u_j = x_j$$

es decir,

$$[w]_B = (w \cdot u_j)$$

Además, como

$$\begin{aligned} w \cdot u_j &= \|w\| \cdot \|u_j\| \cos(w, u_j) \\ &= \|w\| \cos(w, u_j) \end{aligned}$$

con lo que si $\|w\| = 1 \rightarrow [w]_B = \underbrace{(\cos(w, u_j))}_{\text{cosenos directores del vector } w}$

• Resumen: Subespacios fundamentales de una matriz y resolución de sistemas lineales

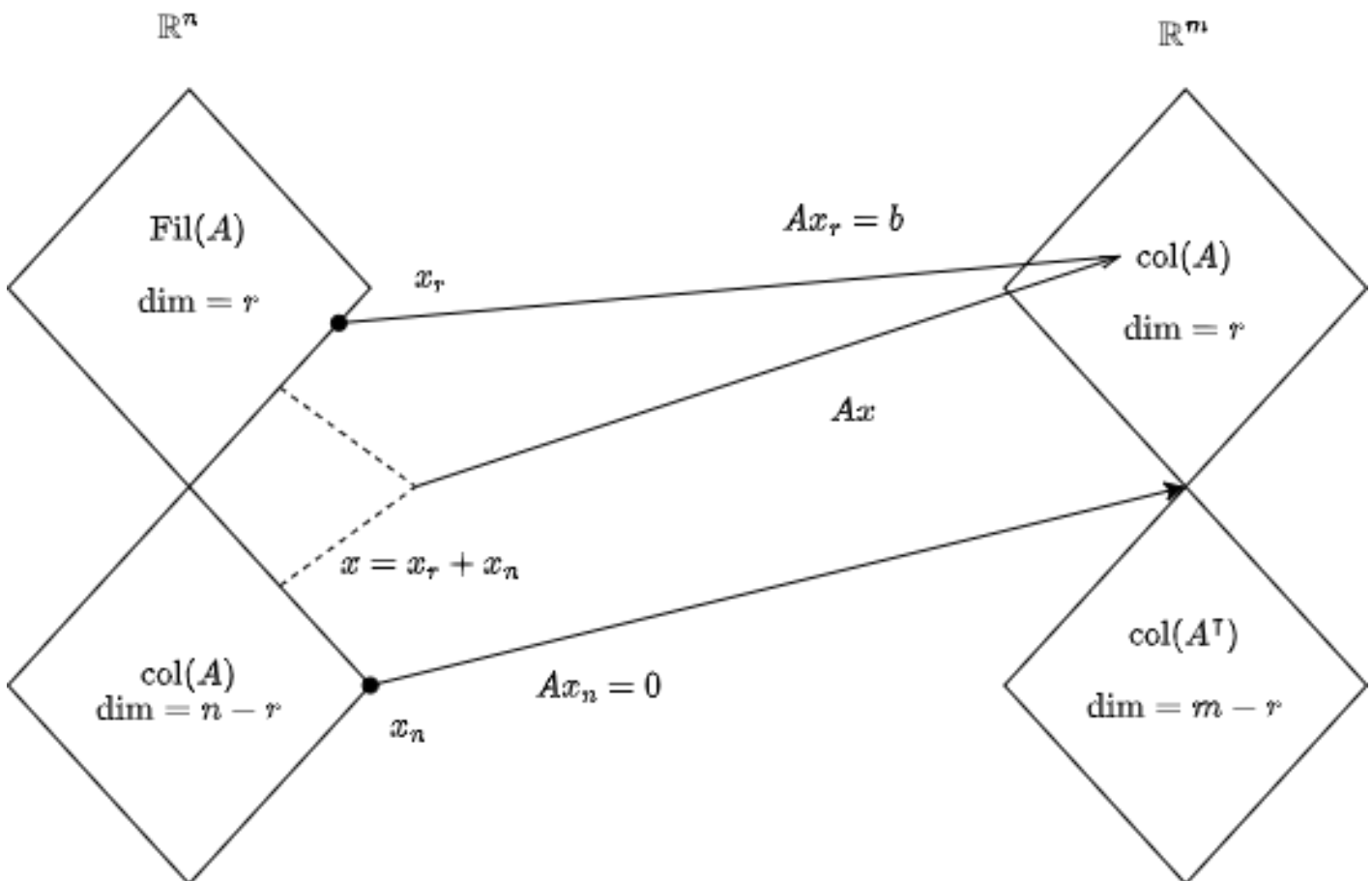
$A \in M_{m \times n}$

- $\text{Fil}(A), \text{nuc}(A)$ son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n
- $\text{Fil}(A) \perp \text{nuc}(A)$

$$Av = \begin{bmatrix} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \vdots \\ \text{fila } m \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} \text{fila 1} \cdot v \\ \text{fila 2} \cdot v \\ \vdots \\ \text{fila } m \cdot v \end{bmatrix} = 0$$

Por tanto, si $v \in \text{nuc}(A) \rightarrow v \perp$ todas las filas de A

$$\left. \begin{array}{l} \text{rg}(A) = \dim \text{Fil}(A) = r \\ \text{rg}(A) + \dim \text{nuc}(A) = n \end{array} \right\} \rightarrow \text{Fil}(A) \oplus \text{nuc}(A) = \mathbb{R}^n$$



- $\text{Col}(A), \text{nuc}(A^T)$ son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^m
- $\text{Col}(A) \perp \text{nuc}(A^T)$

$$A^T v = \begin{bmatrix} \text{Col } 1^T \\ \text{Col } 2^T \\ \vdots \\ \text{Col } m^T \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} \text{Col } 1^T \cdot v \\ \text{Col } 2^T \cdot v \\ \vdots \\ \text{Col } n^T \cdot v \end{bmatrix} = 0$$

Por tanto, si $v \in \text{nuc}(A^T) \longrightarrow v \perp \text{columnas de } A$

$$\text{rg}(A^T) + \dim \text{nuc}(A^T) = m \longrightarrow \text{Col}(A) \oplus \text{nuc}(A^T)$$

Hoja de ejercicios Tema 4: Subespacios vectoriales, bases y coordenadas

1) Determina cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 son subespacios vectoriales:

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$

No porque el vector $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ pertenece al subespacio pero $(1, 0, 0) + (1, 1, 0) = (2, 1, 0)$ no pertenece.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$

No porque al comprobar los la suma de vectores $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$ vemos que no cumple la condición a pesar de que los vectores sí lo hagan.

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) \in W &\longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W \\ (x_2, y_2, z_2) \in W &\longrightarrow x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1, z_1) &\longrightarrow \underbrace{\alpha(x_1, y_1, z_1)}_{(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)} \in W \\ \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 &= \alpha \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1)}_0 = 0 \end{aligned}$$

2) Comprueba que, en \mathbb{R}^3 , el subespacio generado por los vectores $(1, 2, 1)$ y $(6, 1, -16)$ coincide con el subespacio generado por los vectores $(-2, 7, 20)$ y $(4, 9, 6)$.

3) Usando determinantes, halla una base del subespacio W del ejercicio anterior que esté contenida en el conjunto generador dado.

4) Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ con $n \geq 3$. Pon un ejemplo de una matriz A tal que los sistemas de ecuaciones $Ax = v_1$ y $Ax = v_2$ tengan solución pero el sistema $Ax = v_3$ no la tenga.

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \text{columnas} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & \cdots \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_x = v_1 \quad \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_x = v_2$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = v_1 x_1 + v_2 x_2 = v_3$$

5) Completar la frase: "el vector b pertenece a $\text{Col}(A)$ cuando tiene solución".

El sistema $Ax = b$ tiene solución

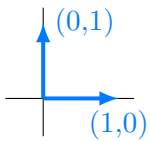
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

$$\text{Col}(A) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$$

- 6) Cierta o falso: "si el vector cero pertenece a $\text{Fil}(A)$, entonces las filas de A son linealmente independientes".

Si $0 \in \text{Fil}(A) \longrightarrow$ las filas de A son linealmente independientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Fil}(A) = \langle \underbrace{(1, 0), (0, 1)}_{\text{lin. indep.}} \rangle = \mathbb{R}^2$$



$$(0, 0) \in \text{Fil}(A) = \mathbb{R}^2$$

- 7) Halla una base del subespacio vectorial W de \mathbb{R}^5 generado por los vectores

$$(-1, 0, 0, 1, -2) \quad (2, 1, 0, -1, 2) \quad (1, 3, 1, 0, -1) \quad (0, 2, 1, 0, -1) \quad (3, 1, 0, -2, 4)$$

- 8) Amplía el conjunto $\{(1, -1, 1)\}$ a una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

- 9) En \mathbb{R}^5 , si las ecuaciones del subespacio U son $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t + u = 0 \\ x - y + z - t + u = 0 \end{array} \right\}$, encuentra las de U^\perp .

$$V \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t + u = 0 \\ x - y + z - t + u = 0 \end{array} \right. \quad \text{ecuaciones implícitas} \quad u^\perp$$

Calcular una base de u

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rg}(A) = 2 < 5 = n^o \text{ de incógnitas} \longrightarrow 3 \text{ parámetros } SCI$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \alpha \\ t = \beta \\ z = \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = -\varphi - \beta - \alpha \\ x - y = -\varphi + \beta - \alpha \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x = -2\gamma - 2\alpha \longrightarrow x = -\varphi - \alpha \\ y = -x - \varphi - \beta - \alpha = \cancel{\varphi} + \cancel{\alpha} - \cancel{\varphi} - \beta - \cancel{\alpha} = -\beta \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\alpha - \gamma \\ y = -\beta \\ z = \gamma \\ t = \beta \\ u = \alpha \end{array} \right. \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de } u} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v \in u^\perp \iff v \cdot u = 0 \forall u \in U \iff v \cdot u_j = 0, \{u_1, \dots, u_m\} \text{ base de } U$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, t, u) \cdot (-1, 0, 0, 0, 1) = 0 \\ (x, y, z, t, u) \cdot (0, -1, 0, 1, 0) = 0 \\ (x, y, z, t, u) \cdot (-1, 0, 1, 0, 0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + u = 0 \\ -y + t = 0 \\ -x + z = 0 \end{array} \right\} \text{ ecuaciones implícitas de } u^\perp. \text{ 2 parámetros}$$

$$\underbrace{u}_3 \oplus \underbrace{u^\perp}_2 = \mathbb{R}^5 \quad \left. \begin{array}{l} u = \alpha \\ t = \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = u = \alpha \\ y = t = \beta \\ z = -x = -\alpha \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Base de u^\perp

10) Halla una base de siguientes subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4 :

a) $\{(x, y, z) | x = y = z = t\}$

b) $\{(x, y, z, t) | x + y + z + t = 0\}$

11) Dados los subespacios

$$U = \{(a, b, a - b, a - 2b)\} \quad W = \{(x, x - y, -x + y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

calcula la base de cada uno de ellos y determina si están en suma directa.

12) Dada la matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ calcula:

a) Tres bases distintas de $\text{Col}(U)$.

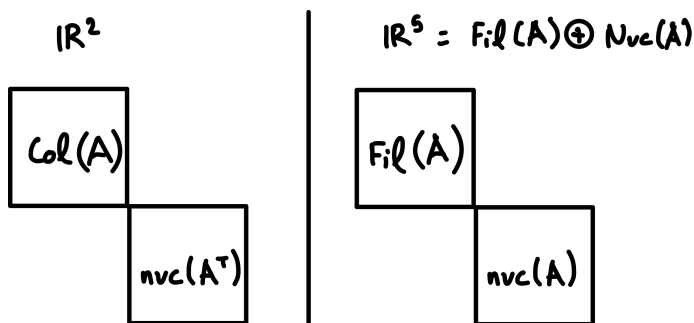
b) Dos bases distintas de $\text{Fil}(U)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 5} \quad \text{Fil}(A), \text{Col}(A), \text{nuc}(A), \text{nuc}(A^T)$$

$$\text{rg}(A) = \dim \text{Fil}(A) = \dim \text{Col}(A) = 2$$

$$\text{Fil}(A) = \langle (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0) \rangle$$

$$\text{Col}(A) = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$$



$$\underbrace{\text{rg}(A)}_2 + \underbrace{\dim \text{Nuc}(A)}_3 = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x + z + u = 0 \\ y + t = 0 \end{array} \right\} \text{ecuaciones implícitas de } \text{nuc}(A)$$

Tomamos 3 parámetros

$$\left. \begin{array}{l} u = \alpha \\ t = \beta \\ z = \gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -z - u = -\alpha - \gamma \\ y = -t = -\beta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Base de $\text{nuc}(A)$

13) Sea S un conjunto de 6 vectores de \mathbb{R}^4 . De las opciones entre paréntesis escoge la(s) correcta(s):

a) S (es) (no es) (no necesariamente es) un conjunto generador de \mathbb{R}^4 .

b) S (es) (no es) (puede ser) un conjunto linealmente independiente.

c) Un subconjunto de S con 4 vectores (es) (no es) (puede ser) una base de \mathbb{R}^4

14) Determina los valores que faltan en la siguiente matriz sabiendo que tiene rango 1:

$$\begin{bmatrix} 7 & - & - \\ - & 8 & - \\ - & 12 & 6 \\ - & - & 2 \\ 21 & 6 & - \end{bmatrix}$$

15) Dadas dos matrices A y B , prueba las siguientes afirmaciones:

- a) $\text{rg}(A + B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$ (usa que el rango es la dimensión de $\text{Col}(A)$ y lo visto en la página 72 de los apuntes).
- b) $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A), \text{rg}(B)$ (usa los resultados 4.26 y 4.28 de los apuntes).

16) Sea A una matriz $m \times n$ de rango k . Prueba que existe una matriz B de tamaño $m \times k$ y rango k y una matriz C de tamaño $k \times n$ tales que $A = BC$ (esta factorización se llama **full rank factorization**). Si k es mucho menor que n y m , razona si es mejor, en términos de memoria, almacenar A o almacenar B y C .

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \dim \text{Col}(A) = k \longrightarrow \text{Sea } B = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_k \end{bmatrix} \text{ una base de } \text{Col}(A).$$

Por tanto, todo vector de $\text{Col}(A)$ se escribe como combinación lineal de los vectores $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. En particular, las columnas de A .

$$a_j = c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{kj}b_k \quad C = [c_{ij}]_{k \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_k \end{bmatrix}_{n \times k} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}_{k \times n}$$

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{ll} m = 10^2 & A \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10^2 = 10^4 = 10,000 \text{ datos} \\ n = 10^2 & B \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10 = 10^3 = 1,000 \text{ datos} \\ k = 10 & C \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10 = 10^3 = 1,000 \text{ datos} \end{array} \right\} 2,000 \text{ datos}$$

17) Calcula la "full rank factorization" para la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

base de $\text{Col}(A)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = c_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = c_{13} \\ 1 = -c_{13} - 3c_{23} \end{array} \right\} \quad 3c_{23} = -1 - c_{13} = -3 \longrightarrow c_{23} = -1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = c_{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{24} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = c_{14} \\ 0 = -c_{14} - 3c_{24} \end{array} \right\} \quad 3c_{24} = -c_{14} = 3 \longrightarrow c_{24} = -1$$

Comprobación

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A$$

18) Utiliza la "full rank factorization" y el ejercicio 15 para ver que una matriz A tiene rango k si y sólo si se puede expresar como suma de k matrices de rango 1, pero no se puede expresar como suma de menos de k matrices de rango 1. Expresa la matriz del ejercicio anterior como suma de 2 matrices de rango 1.

19) Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde B se obtiene restando la fila uno a la fila tres. ¿Qué relación hay entre los cuatro subespacios fundamentales de las dos matrices? Calcula una base para cada uno de ellos.

20) Pon un ejemplo de una matriz cuadrada A en la que $\text{Col}(A) = \text{Fil}(A)$ y otro en el que $\text{Col}(A) \neq \text{Fil}(A)$

21) Sea A una matriz 10×10 que cumple $A^2 = 0$. Prueba que $\text{Col}(A) \subseteq \text{Nuc}(A)$ y, en consecuencia, el rango de A es menor o igual a 5.

$$\text{Sea } v \in \text{Col}(A) \stackrel{?}{\Rightarrow} Av = 0$$

Como $v \in \text{Col}(A) \longrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^{10}$ tal que

$$v = Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{bmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_{10}x_{10}$$

$$Av = A \cdot (Ax) = A^2x = 0 \longrightarrow v \in \text{nuc}(A)$$

Nota: $\text{rg}(A) + \dim_{\text{nuc}}(A) = 10$, $\text{rg}(A) = \dim \text{Col}(A)$
 ≤ 5

22) Sea A una matriz cuadrada invertible. Calcula una base para cada uno de los subespacios fundamentales de las matrices A y $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$.

23) Sin calcular la matriz A , encuentra bases para sus cuatro subespacios fundamentales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

24) Halla una base del subespacio \mathbb{R}^4 dado por el núcleo de A , donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprueba que el vector $(1, 1, 1 - 2)$ pertenece a $\text{Nuc}(A)$ y calcula sus coordenadas respecto de la base obtenida.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + z + 2t \\ x + y + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + z + 2t = 0 \\ x + y + t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rg}(A) = 2 \\ \text{rg}(A) + \dim \text{Nuc}(A) = 4 \longrightarrow \dim \text{Nuc}(A) = 2 \end{array}$$

Tomamos 2 parámetros:

$$\left. \begin{array}{l} t = \alpha \\ z = \beta \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} 3x = -2t - z = -2\alpha - \beta \longrightarrow x = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta \\ y = -t - x = -\alpha + \frac{2}{3}\beta = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow \times 3 \qquad \qquad \downarrow \times 3$

$$B_{\text{nuc}(A)} = \{(-2, -1, 0, 3), (-1, 1, 3, 0)\}$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 1 - 4 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (1, 1, 1, -2) \in \text{nuc}(A)$$

$$(1, 1, 1, -2) = \alpha(-2, -1, 0, 3) + \beta(-1, 1, 3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = -2\alpha - \beta \\ 1 = \alpha + \beta \\ 1 = 3\beta \\ -2 = 3\alpha \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = -\frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$[1, 1, 1, -2]_{B_{\text{nuc}(A)}} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

25) Dadas las siguientes bases de \mathbb{R}^4

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 1, 1), v_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = (1, 2, 0, 0), w_2 = (0, 1, 2, -1), w_3 = (0, 1, 1, 1), w_4 = (0, 1, 2, 0)\}$$

encuentra la matriz de cambio de base de \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 y la de l cambio inverso. ¿Qué coordenadas tiene el vector $3w_1 - w_3 + 2w_2$ con respecto a la base \mathcal{B}_1 ?

$$M_{B_1 \rightarrow B_2} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ -2 & \\ -2 & \\ 3 & \end{array} \right] \quad M_{B_2 \rightarrow B_1} = [M_{B_1 \rightarrow B_2}]^{-1}$$

$$v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 + a_{41}w_4$$

$$= a_{11}(1, 2, 0, 0) + a_{21}(0, 1, 2, -1) + a_{31}(0, 1, 1, 1) + a_{41}(0, 1, 2, 0)$$

$$= (1, 1, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = a_{11} \cdot 1 \\ 1 = 2a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} \\ 0 = 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ 0 = -a_{21} + a_{31} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 = \overset{-2}{a_{21}} + \overset{-2}{a_{31}} + a_{41} \\ 0 = 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ 0 = -a_{21} + a_{31} \end{array} \xrightarrow{F_1 \rightarrow 2F_1} \begin{array}{rcl} -2 & = & 2a_{21} + 2a_{31} + 2a_{41} \\ 0 & = & 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ -2 & = & a_{31} \end{array}$$

$$3v_1 - v_3 + v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$[3v_1 - v_3 + v_2]_{B_2} = M_{B_1 \rightarrow B_2} [3v_1 - v_3 + v_2]_{B_1} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

26) Calcula una base y unas ecuaciones implícitas de $U + V$, donde

$$U = \langle (1, 2, 3, 4, 5), (5, 4, 3, 2, 1), (-1, 0, 1, 2, 3) \rangle$$

$$V = \left\{ (x, y, z, r, s) : \begin{array}{l} 2x + r = 2y \\ 3x + s = 2y \end{array} \right\}$$

$$V \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + r = 2y \\ 3x + s = 2y \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 2x - 2y + r = 0 \\ 3x - 2y + s = 0 \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow S.C.I$$

Tomamos 3 parámetros

$$\left. \begin{array}{l} s = \alpha \\ r = \beta \\ z = \gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x - 2y = -\beta \\ 3x - 2y = \alpha \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \alpha + \beta \\ y = \frac{1}{2}(3\alpha + 3\beta - \alpha) = \alpha + \frac{3}{2}\beta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ r \\ s \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \langle (1, 1, 0, 0, 1), \left(1, \frac{3}{2}, 0, 1, 0\right), (0, 0, 1, 0, 0) \rangle$$

$$U + V = \langle (1, 2, 3, 4, 5), (5, 4, 3, 2, 1), (-1, 0, 1, 2, 3), (1, 1, 0, 0, 1), \left(1, \frac{3}{2}, 0, 1, 0\right), (0, 0, 1, 0, 0) \rangle$$

Base de $U + V$ se obtiene haciendo operaciones elementales sobre la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de igual forma a como lo hacemos para calcular el rango. Las columnas que resulten con pivotes no nulos constituyen una base de $U + V$.

Las ecuaciones implícitas los podemos obtener a partir de las paramétricas, eliminando los parámetros. También se puede hacer con determinantes.

Tema 5: Álgebra Lineal Computacional

5.1) Factorizaciones LU , PLU y $Cholesky$

5.1.1) Factorización PU (PLU)

Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, se llama factorización LU a una factorización (o descomposición) de la forma

$$A = LU$$

donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{bmatrix}}_U$$

L triangular inferior con 1s en la diagonal principal

U triangular superior

L =Lower, U =Upper

- Aplicaciones

1) Cálculo de determinantes

$$|A| = |L \cdot U| = |L| \cdot |U| = 1 \prod_{j=1}^n u_{jj}$$

2) Resolución de sistemas lineales

$$Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ux = z \\ Lz = b \end{cases}$$

son dos sistemas fácilmente resolubles porque U y L son triangulares superior e inferior, respectivamente.

En efecto:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$u_{nn}x_n = z_n \longrightarrow x_n = \frac{z_n}{u_{nn}}$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = z_{n-1}$$

$$x_{n-1} = \frac{z_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

En general,

$$x_i = \frac{z_1 - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}}$$

Para que esto funciones $u_{ii} \neq 0$

- Coste computacional

Consideremos el caso $n = 4$

$$\left. \begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 &= z_1 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 &= z_2 \\ u_{33}x_3 + u_{34}x_4 &= z_3 \\ u_{44}x_4 &= z_4 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{z_4}{u_{44}} && 1 \text{ operación} \\ x_3 &= \frac{z_3 - u_{34}x_4}{u_{33}} && 3 \text{ operaciones} \\ x_2 &= \frac{z_2 - u_{23}x_3 - u_{24}x_4}{u_{22}} && 5 \text{ operaciones} \\ x_1 &= \frac{z_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - u_{14}x_4}{u_{11}} && 7 \text{ operaciones} \\ \text{Total} &= 16 = 4^2 = n^2 \end{aligned}$$

En general, esto es cierto para un sistema de orden n , es decir, el coste computacional de resolver un sistema triangular es del orden n^2 , escribimos $O(n^2)$.

¿Cómo se calculan L y U tales que $A = LU$?

Haciendo eliminación Gaussiana. Veamos un ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ matriz de Toeplitz de dimensión 3.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + \frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + \frac{2}{3}F_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

La matriz U es

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

¿Dónde está L ? Una vez conocemos el pivot de la fila j , y la entrada que se desea eliminar en la fila i , el **multiplicador** l_{ij} se define como

$$l_{ij} = \frac{\text{entrada a eliminar en la fila } i\text{-ésima}}{\text{pivot en la fila } j}$$

Así, en el ejemplo anterior:

$$l_{21} = -\frac{1}{2}, \quad l_{31} = \frac{0}{2} = 0, \quad l_{32} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Nota 1: (Factorización PLU)

En ocasiones es preciso permutar algunas filas de A para conseguir pivotes no nulos o llevar filas nulas al final. Todo ello se consigue a través de una matriz de permutación P .

A la factorización $PA = LU$ se le llama factorización PLU . Nótese que $P^{-1} = P^T$. Por tanto,

$$A = P^T LU.$$

Nota 2: (Coste computacional)

Se puede probar que el coste computacional de resolver un sistema lineal $Ax = b$, mediante factorización LU , es decir,

$$LUx = b \longrightarrow \begin{cases} Ux = z \\ Lz = b \end{cases}$$

es $\frac{n^3 + 3n^2 - 1}{3}$, siendo n el tamaño de A .

Volviendo a la factorización

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

se observa que el carácter simétrico de A se pierde en la factorización LU . Esta simétrica se puede recuperar separando los pivots (diagonal de U) en una matriz diagonal D y dividiendo cada fila de U por su correspondiente pivot. Se obtiene así:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & & \\ & \frac{2}{3} & \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_D \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & -\frac{2}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

A una factorización del tipo $A = LDL^T$ se le llama de Cholesky.

Además, D se puede factorizar como

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & & \\ & \frac{2}{3} & \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_D = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}}$$

Se llega así a la factorización

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^\top$$

la cual se puede simplificar como:

$$\begin{aligned} L\sqrt{D} &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} \\ \sqrt{D}L^\top &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & -\frac{2}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es decir,

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^\top,$$

que es una nueva forma simplificada de la factorización de Cholesky.

Nota 1:

Nótese que este último procedimiento ha funcionado porque los pivots son positivos. Esto siempre sucede para una clase particular de matrices, llamadas **definidas positivas**. Éstas son matrices que satisfacen la condición

$$x^\top Ax > 0 \forall x \neq 0.$$

Las estudiaremos en detalle más adelante.

Nota 2:

Nótese que en la factorización Cholesky sólo tenemos \tilde{L} y su traspuesta \tilde{L}^\top . Por tanto, el coste computacional de Cholesky es la mitad que LU , es decir, del orden $\frac{n^3}{6}$

• Recomendación

$$Ax = b$$

- Si A es simétrica y definida positiva, usar [Cholesky](#).
- Para el resto, usar LU .

5.2) Análisis de errores

Analizamos la cuestión de la estabilidad en la resolución de un sistema lineal $Ax = b$.

Supongamos que b se ve afectado por errores de maldición, representación y/o redondeo. La solución cambiará también, es decir, la entrada será $b + \Delta b$ y la salida $x + \Delta x$.

¿Cómo podemos estimar o cuantificar Δx en la función de Δb ?

Obviamente, la matriz A juega un papel clave.

Necesitamos introducir normas de matrices. Recordemos que para vectores tenemos las normas:

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ x &= (x_1, \dots, x_n) \quad \|x\|_1^p = \sum x_i^p, \quad p = 1, \dots \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \end{aligned}$$

Consideraremos la norma

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

con $\|\cdot\|$ cualquiera de las normas de vectores anterior, por ejemplo, la norma $\|\cdot\|_2$.

Obviamente, $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$, $\forall x \neq 0$, y así

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

• **Definición (Número de condicionamiento de A).**

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ se llama número de condicionamiento de A al número

$$c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Obviamente, suponemos A invertible.

Volvemos al sistema $Ax = b$, que suponemos compatible determinado, es decir, tiene una única solución

$$x = A^{-1}b.$$

Si el término de la derecha es $b + \Delta b$, entonces se tiene

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

de modo que

$$Ax + A\Delta x = b + \Delta b$$

con lo que

$$A\Delta x = \Delta b,$$

es decir,

$$\Delta x = A^{-1}(\Delta b),$$

y así

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}(\Delta b)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|,$$

lo que nos da una cota superior del error absoluto Δx . Más importante que el error absoluto es el relativo, el cual estimamos del siguiente modo:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \frac{\|Ax\|}{\|b\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

de donde

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = c(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Esta desigualdad se lee: "el error relativo en la solución es del orden de $c(A)$ veces el error relativo en el input b ".

Si $c(A)$ es grande, se dice que la matriz A está mal condicionada.

La **regla básica a tener en cuenta** es que para el sistema $Ax = b$, el ordenador pierde $\log_{10}(c(A))$ decimales en errores de redondeo.

Nota: Se puede probar que si el error inicial viene asociado a la matriz A , es decir, tenemos $A + \Delta A$, la estimación anterior en términos del número de condición sigue siendo válida.

Veamos un ejemplo concreto.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \iff \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 7x_2 = 7 \\ x_2 = 1 \end{array} \right\} \longrightarrow x_1 = 0$$

Solución: $(x_1, x_2) = (0, 1)$

Supongamos ahora que $\Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, es decir, una

$$\begin{array}{l} A(\Delta x) = \Delta b \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\ \left. \begin{array}{l} \Delta x_1 + 7\Delta x_2 = 0 \\ \Delta x_2 = 0.1 \end{array} \right\} \longrightarrow \Delta x_1 = -7\Delta x_2 = -0.7 \end{array}$$

El error relativo en x es:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{(-0.7)^2 + (0.1)^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 0.1\sqrt{50}$$

Comparando con el error relativo en b :

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{\sqrt{0^2 + 0.1^2}}{7^2 + 1^2} = \frac{0.1}{\sqrt{50}}$$

Por tanto:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 0.1\sqrt{50} = 0.1\sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 50 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{50}} = 50 \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Si calculamos en Python $c(A) = 51$ para la norma de Frobenius.

Observamos que $c(A)$ de una estimación bastante precisa de la propagación del error.

[¿Qué hacer si \$c\(A\) \gg 1\$?](#)

En lugar de resolver el sistema $Ax = b$, resolvemos el sistema equivalente

$$C^{-1}Ax = C^{-1}b$$

de modo que la matriz C haga que

$$c(C^{-1}A) \ll c(A)$$

[¿Cómo elegir \$C\$?](#)

• **Opción naive (ingenua):**

Tomar $C = A$. En este caso, $C^{-1}A = A^{-1}A = I$ cuyo número de condición es 1. Sin embargo, calcular A^{-1} es igual de costoso que resolver $Ax = b$.

El intento $C = A$ no resuelve el problema, pero nos sugiere que C debe ser **próxima** a A .

Otras dos opciones más prácticas son:

1) Si A no tiene cero en la diagonal, tomamos

$$C = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

[Ejemplo](#)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 50 \end{bmatrix} \quad \text{Python} \longrightarrow c(A) = 6.3371$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{50} \end{bmatrix}$$

$c(C^{-1}A) = 2.084$ para la suma de Frobenius

2) Tomar $C^{-1} = p(A)$, un polinomio en A que resulta de **truncar** la serie de A^{-1} . Es decir,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (I - (I - A))^{-1} \equiv \frac{1}{I - (I - A)} \\ &= I + (I - A) + (I - A)^2 + \dots \end{aligned}$$

que resulta de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

la cual converge si $0 < x < 1$, $\|I - A\| < 1$.

Por tanto,

$$C^{-1} = I + \sum_{k=1}^N (I - A)^k$$

Estas ideas conducen a los llamados [métodos iterativos](#), que estudiamos a continuación:

Dado que $Ax = b$, para toda matriz P del mismo tamaño que A , que llamamos [precondicionador](#), se tiene que

$$Px = (P - A)x + b$$

Esta descomposición sugiere el algoritmo iterativo siguiente:

1) Inicialización: tomar $x_0 \in \mathbb{R}^n$

2) Iteración hasta convergencia

$$Px_{k+1} = (P - A)x_k + b.$$

El éxito del algoritmo está garantizado si se cumple:

1) x_{k+1} se calcula fácilmente a partir de x_k .

2) Los errores $e_k = x - x_k$ se aproximan a cero cuando $k \rightarrow +\infty$, es decir, el algoritmo converge.

Veamos qué se ha de cumplir para que el algoritmo sea convergente:

$$Px_{k+1} = (P - A)x_k + b$$

$$Px = (P - A)x + b$$

Si restamos:

$$P(x - x_{k+1}) = (P - A) \cdot (x - x_k)$$

$$P \cdot e_{k+1} = (P - A)e_k$$

de donde, suponiendo que P es invertible:

$$e_{k+1} = P^{-1}(P - A)e_k = \underbrace{(I - P^{-1}A)}_M e_k$$

Repitiendo el proceso:

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| &= \|M \cdot e_k\| \leq \|M\| \cdot \|e_k\| \\ &\leq \|M\| \cdot \|M\| \cdot \|e_{k-1}\| \\ &\leq \dots \\ &\leq \|M\|^{k+1} \cdot \|e_0\| \end{aligned}$$

lo que implica que $\|e_{k+1}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ si $\|M\| < 1$.

La pregunta ahora es: [¿Cómo elegir \$P\$?](#)

- Jacobi propuso tomar $P = D$, la parte diagonal de A . Esto conduce al llamado método de Jacobi.
- Gauss-Seidel proponen descomponer A en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ a_{21} & 0 & \\ a_{31} & a_{32} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_L + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}}_D + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}}_U$$

y tomar como $P = L + D$ de modo que el algoritmo queda

$$Px_{k+1} = -Ux_k + b, \quad P = L + D.$$

Ejemplo

$$A = T_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = L + D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El algoritmo queda: $Px_{k+1} = -Ux_k + b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\text{new}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\text{old}} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \\ -x_2 + 2x_3 \\ -x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}}^{\text{new}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}^{\text{old}} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\text{new}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}^{\text{old}} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Resolución: $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$

Recordemos que el método converge cuando

$$\|M\| < 1, \quad M = (I - P^{-1}A)$$

Esta condición siempre se cumple para matrices que son **diagonal dominantes**.

- **Definición**

Una matriz $A = (a_{ij})$ se dice **estrictamente diagonal dominante** si para cada fila i se cumple

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} |a_{11}| = 2 > 1 \\ |a_{22}| = 4 > 2 + 1 = 3 \\ |a_{33}| = 3 > 2 \end{array}$$

- **Teorema**

Supongamos que A es estrictamente diagonal dominante. Entonces, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes.

5.3) Ejercicios

- 1) Cálculo de la inversa de una matriz usando factorización LU o Cholesky.

$A \in M_n(\mathbb{R})$. Sea $X \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces $X = A^{-1}$ si se cumple

$$AX = I$$

Si x^1, x^2, \dots, x^n son las columnas de X , entonces se tiene:

$$\begin{array}{l} Ax^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ Ax^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dots \\ Ax^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por tanto, para calcular A^{-1} hemos de resolver n sistemas lineales. Cualquiera de ellas se resuelve como

$$\left. \begin{array}{l} Ax^j = b^j \\ LUx^j = b^j \\ \downarrow \\ Ux^j = z^j \\ Lz^j = b^j \end{array} \right\} \quad b^j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow j\text{-ésimo}$$

Tema 6: Transformaciones lineales

6.1) Introducción

$A \in M_{m \times n}$ tiene asociada los espacios vectoriales \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m . Así, dado $v \in \mathbb{R}^n$, $Av \in \mathbb{R}^m$.

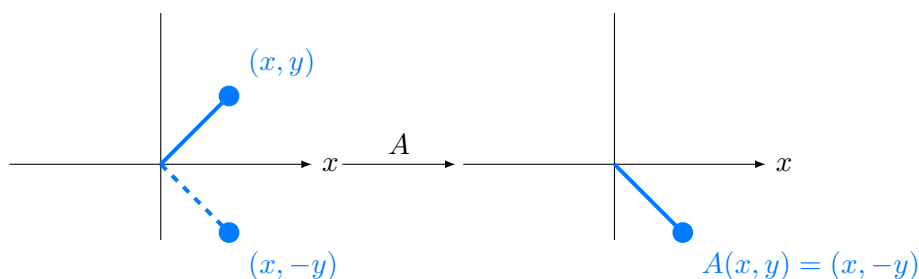
Podemos ver A como una forma de transformar vectores de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , es decir,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m \\ v & \longmapsto & Av \end{array}$$

Veamos algunos ejemplos:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow Av = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



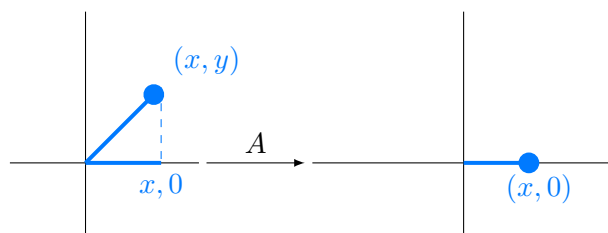
A es una simetría respecto del eje OX .

Tenemos pues la aplicación

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x, -y)$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$



A es una proyección sobre el eje OX .

A induce una aplicación

$$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x, 0)$$

$$3) \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}$$

A reescala las variables e induce la aplicación

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

Nota: Nótese que las transformaciones inducidas por matrices satisfacen

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$$

6.2) Aplicaciones lineales

• Definición

Una aplicación o transformación lineal es una aplicación $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ que cumplen que

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall u, v \in \mathbb{K}^n$$

Veamos ahora que fijadas bases de \mathbb{K}^n y \mathbb{K}^m , toda aplicación lineal tiene una matriz asociada o que la representa.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ en la base canónica de \mathbb{R}^n .

SI $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$$

$$= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$

Supongamos que $f(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ y que $f(x) = (y_1, \dots, y_m)$. Entonces

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

A la matriz (a_{ij}) se le llama matriz de la aplicación lineal f en las bases canónicas y se denota $M_{C \rightarrow C}(f)$, es decir,

$$M_{C \rightarrow C}(f) = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1^a & 2^a & & n\text{-esima} \\ \text{columna} & \text{columna} & & \text{columna} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

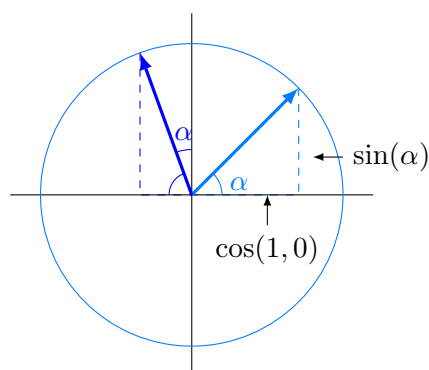
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha), x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha))$$

$$f(1, 0) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

$$f(0, 1) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

$$M_{C \rightarrow C}(f) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$



f es un giro de ángulo α .

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin(\alpha)\end{aligned}$$

- Definición

Una transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice ortogonal si su matriz asociada es ortogonal.

Ejemplo

La aplicación anterior es ortogonal ya que

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha), -\sin(\alpha)] \cdot [\sin(\alpha), \cos(\alpha)] = \cos(\alpha) \sin \alpha - \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0 \\ [& \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \\ & (-\sin(\alpha))^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

6.3) Cambio de coordenadas (o de base en las aplicaciones lineales)

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y sea $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base de \mathbb{R}^n . La matriz cuyas columnas son las coordenadas de $f(u_j)$ en la base B se llama matriz asociada a la aplicación lineal f en la base B y se

denota $M_{B \rightarrow B}(f)$, es decir,

$$M_{B \rightarrow B}(A) = \begin{bmatrix} f(u_1)_B & f(u_2)_B & \cdots & f(u_n)_B \end{bmatrix}$$

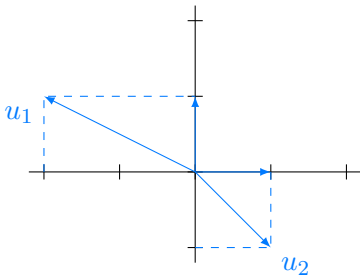
Ejemplo

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (5x + 6y, -3x - 4y)$$

Vamos a calcular $M_{C \rightarrow C}(f)$, $M_{B \rightarrow B}(f)$ y la relación entre estas dos matrices, donde

$$B = \{u_1 = (-2, 1), u_2 = (1, -1)\}$$



$$f(e_1) = f(1, 0) = (5, -3) = 5 \cdot e_1 + (-3) \cdot e_2$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = (6, -4) = 6 \cdot e_1 + (-4) \cdot e_2$$

$$M_{C \rightarrow C}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$f(u_1) = f(-2, 1) = (-4, 2) = a_{11}(-2, 1) + a_{21}(1, -1)$$

$$\begin{array}{rcl} -4 & = & -2a_{11} + a_{21} \\ 2 & = & a_{11} - a_{21} \\ -2 & = & -a_{11} \end{array} \longrightarrow a_{21} = 0$$

$$M_{B \rightarrow B}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = f(1, -1) = (-1, 1) = 0 \cdot (-2, 1) + (-1) \cdot (1, -1)$$

Importante!!

La aplicación lineal es la misma pero las matrices asociadas son distintas, porque las bases cambian. El esquema es como sigue

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & C \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 B & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & B
 \end{array}$$

$$M_{B \rightarrow B}(f) = M_{C \rightarrow B} M_{C \rightarrow C}(f) M_{B \rightarrow C}$$

donde $M_{C \rightarrow B}$ es la matriz de cambio de base de base de C a B y $M_{B \rightarrow C}$ es la matriz de cambio de base de B a C . Obviamente, estas matrices son una la inversa de otra. Por tanto, la fórmula anterior queda

$$M_{B \rightarrow B}(f) = [M_{B \rightarrow C}]^{-1} M_{C \rightarrow C}(f) M_{B \rightarrow C}$$

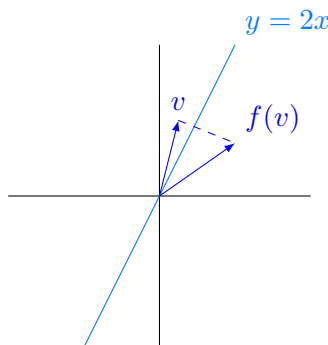
$$M_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_{C \rightarrow B} = [M_{B \rightarrow C}]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{F_3 \rightarrow (-1) \cdot F_3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 [M_{B \rightarrow C}]^{-1} M_{C \rightarrow C}(f) M_{B \rightarrow C} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \\
 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &= M_{B \rightarrow B}(f)
 \end{aligned}$$

Ejemplo (Simetría respecto a una recta)

Consideremos la recta $y = 2x$



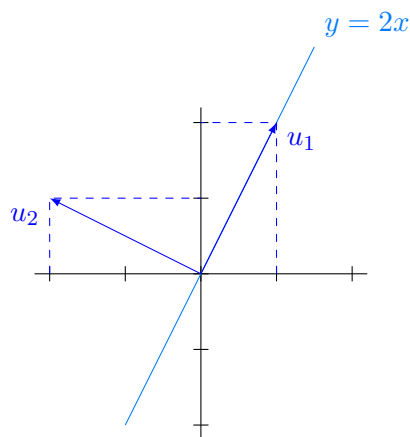
Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal que hace corresponder a vector v su simétrico respecto a dicha recta.

Vamos a calcular $M_{C \rightarrow C}(f)$, es decir, la matriz asociada a dicha aplicación lineal en la base canónica de \mathbb{R}^2 , $C = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$.

Se tiene $M_{C \rightarrow C}(f) = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{bmatrix}$.

Como es difícil de calcular $f(e_1)$ y $f(e_2)$ consideramos una base distinta

$$B = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (-2, 1)\}$$



Nótese que u_1 está en la recta ya que $2 = 2 \cdot 1$ y u_2 es perpendicular a la recta ya que

$$(1, 2) \cdot (-2, 1) = 0.$$

Por tanto, $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = -u_2$.

Además, la matriz de cambio de base

$$M_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la inversa de esta matriz

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 \rightarrow \frac{1}{5}F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + 2F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$

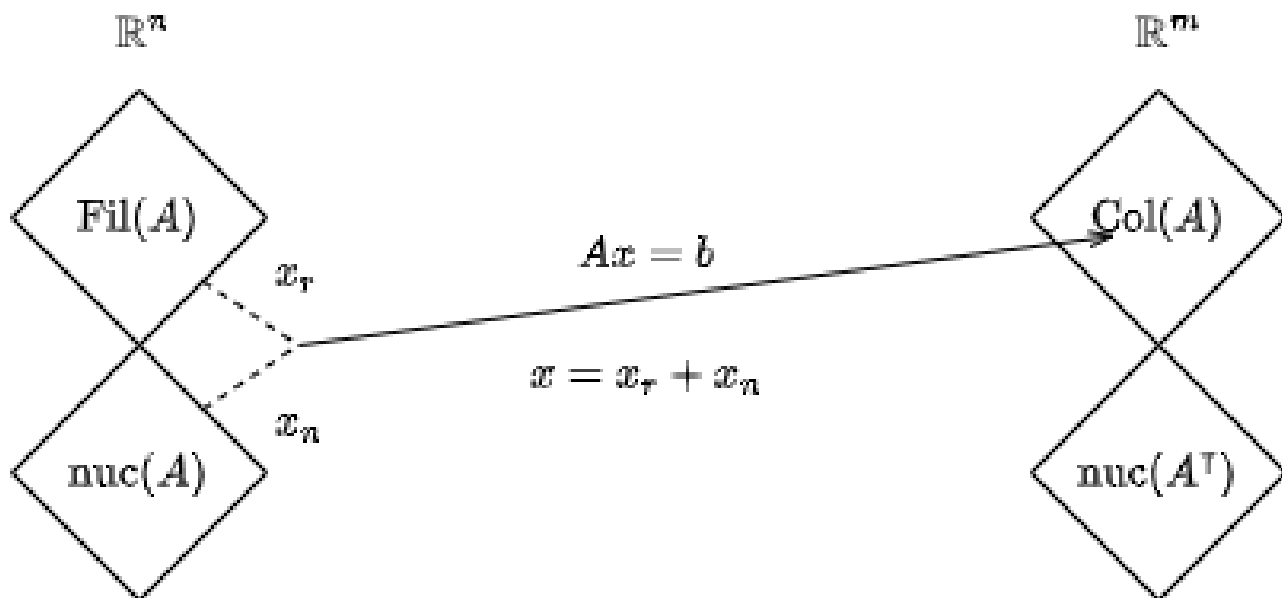
Tenemos el esquema

$$\begin{array}{ccccc} C & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & C \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ B & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & B \end{array}$$

$$\begin{aligned} M_{C \rightarrow C}(f) &= M_{B \rightarrow C} M_{B \rightarrow B}(f) M_{C \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \\ & \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.4) Proyecciones

Supongamos que el sistema $Ax = b$ es incompatible. Por tanto, $b \notin \text{Col}(A)$



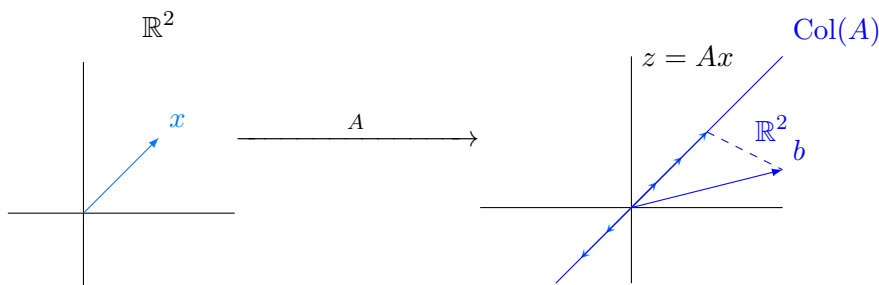
Nos planteamos el problema de encontrar el vector $z \in \text{Col}(A)$ que esté más próximos a b , es decir, $z = Ax$ y buscamos minimizar $\|Ax - b\|$, que también puede escribirse como

$$\{\min \|z - b\|^2 = (z_1 - b_1)^2 + \cdots + (z_n - b_n)^2$$

con $z = (z_1, \dots, z_m)$ y $b = (b_1, \dots, b_m)$.

El problema anterior se llama [aproximación por mínimos cuadrados](#).

Vamos a ver que el z buscado es la proyección ortogonal de b sobre $\text{Col}(A)$. Gráficamente



• Recordatorio

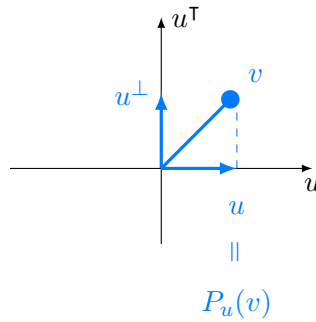
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial y $v \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $v = u + u^\perp$, con $u \in U, u^\perp \in U^\perp$.

Recordemos $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$. Al vector $u \in U$ se le llama proyección ortogonal de v en U y se denota $P_u(v)$.

Podemos pues considerar la aplicación lineal

$$\begin{aligned} P_u : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto P_u(v) \end{aligned}$$



Por tanto, si $U = \text{Col}(A)$ y $v \in U$ entonces

$$\begin{aligned}\|v - b\|^2 &= \|v - P_u(b) + (-b + P_u(b))\|^2 \\ &= \underbrace{\|v - P_u(b)\|^2}_u + \underbrace{\| -b + P_u(b)\|^2}_{u^\perp}\end{aligned}$$

Así, el vector v que minimiza la norma anterior es $v = P_u(b)$.

[¿Cómo se calcula la proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial?](#)

• **Proposición**

Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base ortogonal de \mathbb{R}^n de la forma $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$, donde

$$U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle, \quad u^\perp = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$$

Entonces

$$x = \sum_{j=1}^n x_j u_j$$

y multiplicando por u_k , $1 \leq k \leq m$

$$x \cdot u_k = x_k \cdot u_k \cdot u_k$$

de donde

$$x_k = \frac{x \cdot u_k}{\|u_k\|^2}$$

6.5) Cálculo de la matriz asociada a la proyección sobre un subespacio vectorial

Supongamos que $U = \langle (1, 0, 1), (2, 1, -1) \rangle$.

Buscamos una matriz A tal que si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$P_u(v) = Av.$$

Veamos varias formas de hacerlo:

$$\begin{aligned}1) \quad A &= \begin{bmatrix} P_u(e_1) & P_u(e_2) & P_u(e_3) \end{bmatrix} \\ e_1 &= (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)\end{aligned}$$

Consideramos una base ortogonal de U . Lo hacemos por Gram-Schmidt:

$$u_1 = (1, 0, 1)$$

$$u_2 = (2, 1, -1) + \alpha(1, 0, 1)$$

$$0 = u_1 \cdot u_2 = (1, 0, 1) \cdot (2, 1, -1) + \alpha(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)$$

$$= 1 + 2\alpha \longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = (2, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$$

Para evitar fracciones, consideramos la base de U

$$\{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (3, 2, -3)\}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P_u(e_1) &= \frac{e_1 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{e_1 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &= \frac{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 1)}{2} (1, 0, 1) + \frac{(1, 0, 0) \cdot (3, 2, -3)}{9 + 4 + 9} \cdot (3, 2, -3) \\ &= \frac{1}{2} (1, 0, 1) + \frac{3}{22} (3, 2, -3) \\ &= \frac{1}{11} (10, 3, 1) \\ P_u(e_2) &= \frac{e_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{e_2 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{1}{11} (3, 2, -3) \\ P_u(e_3) &= \frac{e_3 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \frac{e_3 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 = \frac{1}{11} (1, -3, 10) \\ P_u &\equiv A = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2) Otra forma de hacerlo.

Tomamos una base de \mathbb{R}^3 $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de modo que $u_1, u_2 \in U$ y $u_3 \in U^\perp$

$$u_1 = (1, 0, 1)$$

$$u_2 = (2, 1, -1)$$

$$u_3 = (x, y, z)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= u_1 \cdot u_3 = x + z \\ 0 &= u_2 \cdot u_3 = 2x + y - z \end{aligned} \right\}$$

Tomamos un parámetro:

$$z = \alpha$$

$$x = -\alpha$$

$$u = -2x + z = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

$$u_3 = (-1, 3, 1)$$

Por tanto,

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ de modo que $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $U^\perp = \langle u_3 \rangle$.

Así,

$$\begin{aligned}P_u(u_1) &= u_1 \\P_u(u_2) &= u_2 \\P_u(u_3) &= 0 \text{ ya que } u_3 \in U^\perp\end{aligned}$$

$$\text{Por tanto } M_{B \rightarrow B}(P_u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hacemos ahora el cambio de base con la canónica.

$$\begin{aligned}M_{C \rightarrow C}(P_u) &= M_{B \rightarrow C} M_{B \rightarrow B}(P_u) M_{C \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

6.6) Proyección sobre $\text{Col}(A)$

• Proposición

Sea $A \in M_{m \times n}$, $\text{rg}(A) = m$ y sea $U = \text{Col}(A)$.

Entonces $M_{C \rightarrow C}(P_u) = A(A^\top A)^{-1}A^\top$.

• Demostración

1) $A^\top A$ (matrices de Gram) es simétrica y definida positiva.

$$x^\top A^\top A x = (Ax)^\top Ax = \|Ax\|^2 = 0 \longleftrightarrow Ax = 0 \xrightarrow[\text{rg}(A)=m]{} x = 0$$

2) Dado $b \in \mathbb{R}^n$, $P_u(b) = Ax$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

Como $b - P_u(b) = b - Ax \in U^\perp = \text{nuc}(A^\top)$ se cumple

$$\begin{aligned}0 &= A^\top(b - Ax) = A^\top b - A^\top Ax \\ &\longrightarrow A^\top Ax = A^\top b \longrightarrow x = (A^\top A)^{-1}A^\top b \\ &\longrightarrow P_u(b) = A(A^\top A)^{-1}A^\top b\end{aligned}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{C \rightarrow C}(P_u(b)) = A(A^\top A)^{-1}A^\top = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

El sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ y = 1 \\ x - y = -2 \end{array} \right\} \text{ es incompatible}$$

El vector x minimiza $\|Ax - b\|$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ viene dado por

$$(A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} -\frac{15}{11} \\ \frac{8}{11} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{F_2 \rightarrow \frac{1}{11} F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 6F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{6}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{array} \right] \end{array}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -6 & 17 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hoja de ejercicios Tema 6: Transformaciones Lineales

- 1) Comprueba que si $v = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación $T_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T_v(x) = x + v$ no es lineal. Este tipo de aplicación se llama una **traslación de vector** v y no se puede representar por medio de una matriz 3×3 . Sin embargo, esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la traslación de vector $v = (a_1, a_2, a_3)$ se calcula por medio de la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ a_3 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las 4 coordenadas $(x_1, x_2, X - 3, 1)$ del vector tridimensional x se llaman coordenadas homogéneas de x .

$$T_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

no es lineal, $v \neq 0$.

$$x \longmapsto T_v(x) = v + x$$

$$T_v(0) = v \neq 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad v = (a_1, a_2, a_3)$$

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ a_3 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1, x_2, x_3, 1) \equiv \text{coordenadas homogéneas.}$$

- 2) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (-2, 3, -2)$, $v_2 = (-4, 5, -3)$ y $v_3 = (5, -6, 4)$ una base de \mathbb{R}^3 . Calcula la matriz en la base \mathcal{B} de la transformación lineal cuya matriz en las bases canónicas es

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

$$M_{B \rightarrow B}(f) = M_{C \rightarrow B} \cdot M_{C \rightarrow C}(f) \cdot M_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{C \rightarrow C}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix}, \quad M_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{C \rightarrow B} = (M_{B \rightarrow C})^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} {}_C f : \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{M_{C \rightarrow C}(f)} & \mathbb{R}_C^3 \\ \uparrow M_{B \rightarrow C} & & \downarrow M_{C \rightarrow B} \\ f : \mathbb{R}_B^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_B^3 \end{array}$$

3) Las llamadas **rotaciones de Givens** son las transformaciones lineales que vienen dadas por las matrices

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}, \quad R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix}, \quad R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $c = \cos \alpha$ y $s = \sin \alpha$ para un cierto ángulo α . ¿Qué interpretación geométrica tienen?

Dada la transformación lineal que tiene por matriz en las bases canónicas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcula la matriz en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, 0)$$

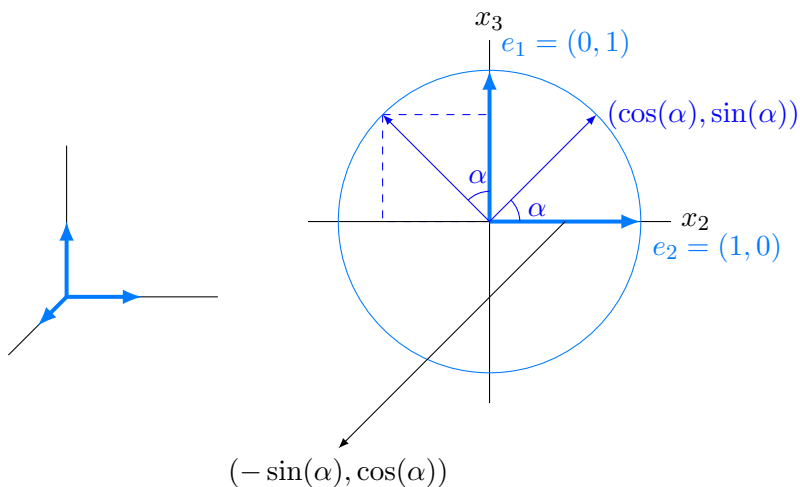
A la vista del resultado, ¿cuál es la interpretación geométrica de la transformación lineal dada por la matriz A ?

Rotaciones de Givens

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$$

$$x = \cos(\alpha)$$

$$s = \sin(\alpha)$$



$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} e_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} e_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{giro de ángulo } \alpha \text{ en el plano } x_2x_3 \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} e_3 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{matrix} A \\ \parallel \\ M_{C \rightarrow C}(f) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 0)\}$$

$$\begin{aligned}
M_{B \rightarrow B}(f) &= M_{C \rightarrow B} \underbrace{M_{C \rightarrow C}(f)}_A \underbrace{M_{B \rightarrow C}}_{\parallel} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- 4) Consideremos un plano de \mathbb{R}^3 que pasa por el origen, es decir, un subespacio y recibe el nombre de **reflexión de Householder**. Para verlo, prueba que si x es un vector arbitrario, entonces $x + Hx$ es ortogonal a v (es decir, $x + Hx$ pertenece al plano) y $x - Hx$ es proporcional a v (estas dos cosas prueban de Hx es el simétrico de x respecto del plano dado).

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\} \quad v \cdot v^\top = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{bmatrix}$$

$$H = I - \frac{2v \cdot v^\top}{v^\top \cdot v}$$

Simetría ortogonal respecto del plano (reflexión de Householder)

$$0 \stackrel{?}{=} v^\top(x + Hx) = v^\top x + v^\top Hx = v^\top x + v^\top \left(x - \frac{2vv^\top}{v^\top v} \right) = v^\top x + v^\top x - \frac{2\cancel{v^\top}v\cancel{v}^\top}{\cancel{v^\top}v} = 0$$

$x - Hx$ proporcional a x

$$x - Hx = x - x + \frac{2vv^\top}{v^\top v} \cdot x = v \frac{2v^\top x}{v^\top v} \equiv \text{proporcional a } v$$

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + Hx)}_{\cap_u} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - Hx)}_{\cap_{u^\top}} \quad Hx = \underbrace{\frac{1}{2}(x + Hx)}_{\cap_u} + \frac{1}{2}(x - Hx)$$

- 5) Calcula la proyección del vector (2,3,4) sobre el subespacio $\text{Col}(A)$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hazlo de tres

formas disitntas: como en el ejemplo 5.17, como en el ejemplo 5.18 y como en el ejemplo 5.21.

$$u = \text{Col}(A) = \langle (1, 0, 0), (1, 1, 0) \rangle$$

$$M_{C \rightarrow C}(P_u) = \begin{bmatrix} P_u(e_1) & P_u(e_2) & P_u(e_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

$\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ base ortogonal de u , entonces

$$P_u(u) = \frac{u \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots + \frac{u \cdot u_m}{\|u_m\|^2} u_m$$

1) Calculamos por Gram-Schmidt una base ortogonal de $u = \text{Col}(A)$

a) $u_1 = (1, 0, 0)$

b) $u_2 = (1, 1, 0) + \alpha(1, 0, 0)$

Imponemos la condición

$$0 = u_1 \cdot u_2 = (1, 0, 0) \cdot (1, 1, 0) + \alpha(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) \longrightarrow \alpha = -\frac{(1, 0, 0) \cdot (1, 1, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} = -1$$

$$P_u(1, 0, 0) = \underbrace{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)}_1 \cdot (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$P_u(0, 1, 1) = (0, 1, 0)$$

$$P_u(0, 0, 1) = \underbrace{(0, 0, 1) \cdot (1, 0, 0)}_0 \cdot u_1 + (0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0) \cdot u_2 = (0, 0, 0)$$

$$P_u(2, 3, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6) ¿Qué combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(1, 0, 1)$ está más "cerca" del vector $(2, 1, 1)$?

$$\|(1, 2, 1)x_1 + (1, 0, 1)x_2 - (2, 1, 1)\| \text{ mínima.}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x \quad \parallel \underbrace{Ax}_{P_{\text{Col}(A)}(b)} - b \parallel \text{ minimizar.} \quad Ax = A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T b}_x$$

7) Encuentra una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}^3 tal que $\text{Col}(A)$ sea el subespacio generado por u_1, u_2 donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de los cuatro subespacios fundamentales de A contiene a u_3 ? Calcula la proyección ortogonal de $b^T = (1, 2, 7)$ sobre $\text{Col}(A)$ y explica por qué esta proyección es la solución aproximada del sistema de ecuaciones $Ax = b$.

Se tiene que cumplir que $\text{Col}(A) = \langle u_1, u_2 \rangle$

Gram-Schmidt

$$1) \ u_1 = (1, 2, -2) \longrightarrow \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$2) \ u_2 = (1, -1, 4) + \alpha(1, 2, -2)$$

$$0 = u_1 \cdot u_2 \longrightarrow \alpha = ?$$
$$\frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$3) \ u_3 = \underbrace{(1, 0, 0)}_{\substack{(0,1,0) \\ (0,0,1)}} + \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \longrightarrow \begin{array}{l} 0 = u_1 \cdot u_3 \longrightarrow \alpha \\ 0 = u_2 \cdot u_3 \longrightarrow \beta \end{array}$$

$$\text{Col}(A) \oplus \text{nuc}(A^\top) = \mathbb{R}^3$$

Tema 7: Valores y vectores propios

• Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio o autovalor (eigenvalue) de A si existe un vector **no nulo** $v \in \mathbb{K}^n$, llamado vector propio o autovector (eigenvector) de modo que $Av = \lambda v$.

Al conjunto de todos los valores propios de A se le llama espectro de A . Al mayor, en valor absoluto, de los autovalores se le llama radio espectral, denotado $\rho(A)$.

¿Cómo calculamos los autovalores y autovectores de una matriz?

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0 \iff v \in \text{nuc}(A - \lambda I) \iff \text{nuc}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \dim \text{nuc}(A - \lambda I) = n - \text{rg}(A - \lambda I) \geq 1 \iff \text{rg}(A - \lambda I) < n \iff \det(A - \lambda I) = 0$$

• Definición (Polinomio característico)

Sea $A \in M_n(\mathbb{K}^n)$. Se llama polinomio característico de A , denotado $P_A(\lambda)$, al polinomio

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Por tanto, las raíces del polinomio característico son los valores propios de A .

Ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ P_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 16 \\ &= 25 + \lambda^2 - 10\lambda - 16 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \\ \lambda &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Valores propios $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$

Espectro de $A = \{9, 1\}$

Radio espectral $\rho(A) = 9$.

Vectores propios.

$$\bullet \lambda_1 = 9 \quad \ker(A - 9I) = \ker \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left. \begin{aligned} -4x + 4y &= 0 \\ 4x - 4y &= 0 \end{aligned} \right\} y = \alpha \longrightarrow x = \alpha \\ \ker(A - 9I) &= \langle (1, 1) \rangle \end{aligned}$$

- $\lambda_2 = 1$, $\ker(A - I) = \ker \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 4y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{array} \right\} y = \alpha \longrightarrow x = -\alpha$$

$$\ker(A - I) = \langle (-1, 1) \rangle$$

Consideremos la matriz formada por lo valores propios anteriores, pero unitarios, es decir,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Nótese que P es ortogonal. Por tanto, $P^{-1} = P^T$.

Además, si denotamos por D la matriz diagonal formada por los valores propios de A , es decir,

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces se cumple:

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ \frac{9}{\sqrt{2}} & \frac{9}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

Es decir, $A = PDP^{-1}$ y también $D = P^{-1}AP$

7.1) Interpretación en términos de aplicaciones lineales

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (5x + 4y, 4x + 5y)$$

$$C = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

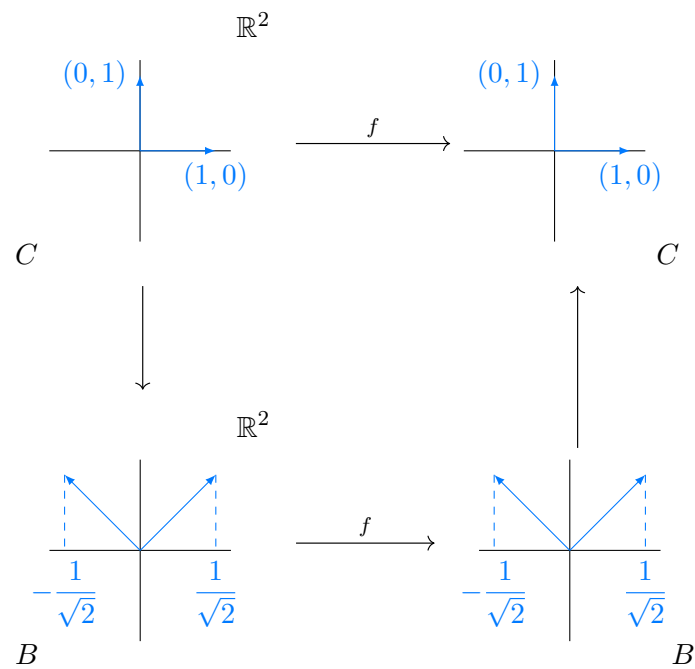
$$f(1, 0) = (5, 4)$$

$$f(0, 1) = (4, 5)$$

$$M_{C \rightarrow C}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(-5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 4 \cdot -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
M_{B \rightarrow B}(f) &= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
M_{B \rightarrow C} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv P \\
M_{C \rightarrow B} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



$$A = M_{C \rightarrow C}(f) = M_{B \rightarrow C} M_{B \rightarrow B}(f) M_{C \rightarrow B} = P D P^{-1}$$

• Conclusiones

- 1) Los valores propios dependen de la aplicación lineal, no de la matriz. Es decir, son invariantes por cam-

bio de base. En efecto, las matrices A y $Q^{-1}AQ$ tienen los mismos valores propios.

$$\begin{aligned}\det(Q^{-1}AQ - \lambda I) &= \det[Q^{-1}AQ - Q^{-1}(\lambda I)Q] \\ &= \det[Q^{-1}(A - \lambda I)Q] \\ &= \det[Q^{-1}] \cdot \det[A - \lambda I] \cdot \det(Q) \\ &= \det(A - \lambda I)\end{aligned}$$

- 2) La base de vectores propios nos permite expresar la aplicación lineal f de la forma más sencilla posible (a través de una matriz diagonal)

7.2) Cálculo numérico de valores propios

• Teorema (Factorización QR)

Sean $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto de n -vectores de \mathbb{R}^m linealmente independientes. Entonces existe un conjunto ortonormal de vectores $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ de \mathbb{R}^m de modo que

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle.$$

Además, si denotamos por $A = [a_1, \dots, a_n]$ la matriz cuyas columnas son los vectores $\{a_1, \dots, a_n\}$ y por Q la matriz cuyas columnas son $\{q_1, \dots, q_n\}$, entonces existe una matriz R , triangular superior de modo que

$$A = QR,$$

es decir,

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & & q_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} & \cdot & \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & & \\ & & r_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ a_1 & a_2 & & a_n & & & \end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & = & \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}^Q & \cdot & \overbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}}^R \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & & q_1 & q_2 & q_3 \end{array}$$

$$1^\circ) \quad q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad \|a_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_1 \longrightarrow a_1 = \underbrace{\sqrt{2}}_{r_{11}}q_1 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3$$

$$2^\circ) \quad v_2 = a_2 + \alpha q_1$$

$$\begin{aligned} 0 = v_2 \cdot q_1 &= a_2 \cdot q_1 + \alpha q_1 \cdot q_1 \longrightarrow \alpha = -a_2 \cdot q_1 \\ &= -(1, 0, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= a_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}q_1 \\
 &= (1, 0, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\
 \|v_2\| &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
 q_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\
 a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}q_1 + v_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{r_{12}} q_1 + \underbrace{\|v_2\|}_{r_{22}} q_2 + 0 \cdot q_3 \\
 &\qquad\qquad\qquad \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}
 \end{aligned}$$

3°) $v_3 = a_3 + \alpha q_1 + \beta q_2$

$$\begin{aligned}
 0 &= q_1 \cdot v_3 \longrightarrow \alpha = -a_3 \cdot q_1 = -(0, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 0 &= q_2 \cdot v_3 \longrightarrow \beta = -a_3 \cdot q_2 = -(0, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\
 v_3 &= (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \\
 &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \\
 \|v_3\| &= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \\
 q_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
 a_3 &= \underbrace{-\alpha q_1}_{r_{13}} + \underbrace{-\beta q_2}_{r_{23}} + \underbrace{\|v_3\| q_3}_{r_{33}}
 \end{aligned}$$

7.3) Algoritmo QR para el cálculo de valores propios

1°) Inicialización: tomar $A_0 = A$

2°) Iteración: para $k \geq 0$ d_0 :

2.1) $A_0 = Q_1 R_1$ factorización QR de A_0

2.2) $A_1 = R_1 Q_1$

$$\text{Nota: } A_1 = Q_1^T Q_1 R_1 Q_1 = Q_1^T A_0 Q_1$$

$$2.3) \quad A_1 = Q_2 R_2$$

$$2.4) \quad A_2 = R_2 Q_2$$

$$\begin{aligned} \text{Nota: } A_2 &= Q_2^T Q_2 R_2 Q_2 = Q_2^T A_1 Q_2 \\ &= Q_2^T Q_1^T A_0 Q_1 Q_2 \\ &\text{y así sucesivamente.} \end{aligned}$$

Se observa que A_k converge a una matriz triangular superior que tiene en su diagonal principal los valores propios de A .

Una vez el algoritmo ha convergido, los vectores propios están en la columnas de $Q = Q_1, \dots, Q_n$.

Nota: El algoritmo es estable (los errores no se propagan) porque Q es ortogonal. Por tanto, su número de condición es 1.

- Definición (Factorización en valores propios)

Sea $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$. Se dice que A es diagonalizable o factorizable en valores propios si existen una diagonal D , que contiene en su diagonal los valores propios de A , y una matriz invertible P , cuyas columnas están formadas por los vectores propios de A , de modo que

$$A = PDP^{-1}$$

A esta factorización se le llama factorización en valores propios.

¿Qué matrices cuadradas son factorizables en valores propios?

- Proposición

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si A tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

- Teorema

Si A es simétrica, entonces

$$A = PDP^{-1}$$

con $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, λ_j valores propios y $P = [u_1, \dots, u_n]$ es una base ortonormal de vectores propios.

Nota: Nótese que, en esta situación

$$\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_n^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_n^\top \end{bmatrix} \\ = \lambda_1 u_1 u_1^\top + \cdots + \lambda_n u_n u_n^\top$$

La expresión $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^\top$ se le llama descomposición espectral de A .

Nótese que

$$u_i u_i^\top = \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \cdots & \hat{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \hat{u}_1 & \hat{u}_1 \hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_1 \hat{u}_n \\ \hat{u}_2 \hat{u}_1 & \hat{u}_2 \hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_2 \hat{u}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{u}_n \hat{u}_1 & \cdots & \cdots & \hat{u}_n \hat{u}_n \end{bmatrix}$$

son matrices simétricas y de rango 1

7.4) Matrices semidefinidas positivas

• Definición

$A \in M_n(\mathbb{R})$ se dice semidefinida positiva si $x^\top A x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

Si $x^\top A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ no nulo. A se dice definida positiva.

• Proposición

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica. Son equivalentes:

- i) A es definida positiva
- ii) Todos los valores propios de A son estrictamente positivos.

Si A es semidefinida positiva, entonces los valores propios son ≥ 0 .

7.5) Factorización en Valores Singulares (SVD)

Los principales inconvenientes de la factorización en valores propios es que la matriz A ha de ser cuadrada y simétrica. Sin embargo, en Ciencia de Datos aparecen muchas matrices que no son cuadradas ni simétricas.

La factorización *SVD* soluciona ambos problemas y, para muchos, **es el resultado más importante en Ciencia de Datos**.

• Definición

Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, se llama factorización en valores singulares *SVD* (Singular Value Decomposition) de A a una factorización de la forma

$$A = U \Sigma V^\top$$

con $U \in M_m(\mathbb{R})$, $V \in M_n(\mathbb{R})$, ambas ortogonales y $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, una matriz diagonal.

¿Cómo se obtiene?

$A^T A$ es simétrica y semidefinida positiva. En efecto, $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$.

$$x^T A^T A x = (Ax)^T Ax = \|Ax\|^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, sus valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.

• **Definición (Valores Singulares)**

Se llaman valores singulares de A , denotados $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, a las raíces cuadradas de los valores propios de $A^T A$, es decir,

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

• **Teorema (Factorización SVD)**

Sea $A \in M_{m \times n}$, con $n \leq m$. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ los valores singulares de A . Entonces existen matrices ortogonales $U \in M_m(\mathbb{R})$ y $V \in M_n(\mathbb{R})$ tales que

$$A = U \Sigma V^T$$

con $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ diagonal con $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ en la diagonal principal.

Nota: El resultado también es válido si $m \leq n$. En este caso $A^T = U \Sigma V^T$ y por tanto, tomando traspuestas,

$$A = V \Sigma^T U^T$$

El esquema queda:

$$\boxed{A} = \boxed{U} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \cdot \boxed{V^T}$$

En forma compacta: si $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ son los valores singulares no nulos, entonces

$$\begin{aligned} U \Sigma V^T &= [u_1, \dots, u_m] \cdot [\sigma_1 e_1, \dots, \sigma_r e_r, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} = [\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_r u_r, 0, \dots, 0] \cdot \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \\ &= \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T = U_r \Sigma_r V_r^T \end{aligned}$$

• **Demostración del Teorema**

Paso 1: Como $A^T A$ es simétrica y semidefinida positiva todos sus valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ y asociados a ellos tenemos una base ortonormal de vectores propios $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sea $V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}$

Paso 2: Definimos $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$, $i = 1, \dots, r$, valores singulares asociadas a los $\lambda_j \geq 0$.

2.1) Veamos que $\{u_1, \dots, u_r\}$ es un conjunto ortonormal de vectores. En efecto:

$$\begin{aligned} u_i^\top u_j &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (Av_i)^\top (Av_j) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^\top \underbrace{A^\top A}_{\lambda_j v_j} v_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

ya que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de vectores propios de $A^\top A$.

2.2) Completamos (por ejemplo, usando Gram-Schmidt) el conjunto $\{u_1, \dots, u_r\}$ a una base ortonormal de \mathbb{R}^m $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$

Definimos $U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_m \end{bmatrix}$

Paso 3: Calculamos $U^\top A V$

$$\begin{aligned} U^\top A V &= \begin{bmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_m^\top \end{bmatrix} \cdot A \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_m^\top \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_m^\top \end{bmatrix} \cdot [\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_r u_r, 0, \dots, 0] \\ &= (\sigma_1 u_1^\top u_1, \dots, \sigma_r u_r^\top u_r, 0, \dots, 0) \equiv \Sigma \end{aligned}$$

Multiplicando a la derecha por $V^{-1} = V^\top$ y a la izquierda por U se tiene

$$A = U \Sigma V^\top$$

- **Notas importantes**

1) ¿Qué son los vectores u_1, \dots, u_n ?

Son los autovectores de AA^T . En efecto

$$\begin{aligned}
 AA^T u_k &= AA^T \left(\frac{1}{\sigma_k} A v_k \right) \\
 &= A \left(\frac{A^T A v_k}{\sigma_k} \right) \\
 &= A \frac{\sigma_k^2 \cdot v_k}{\sigma_k} \\
 &= \sigma_k A v_k \\
 &= \sigma_k \sigma_k u_k \\
 &= \lambda_k u_k
 \end{aligned}$$

2) Por tanto, los u_s son los vectores propios de AA^T asociados a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, y los v_s son los vectores propios de $A^T A$ asociados a los mismos valores propios $\lambda, \dots, \lambda_m$.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Valores propios de $A^T A$

$$\det(A^T A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot ((3-\lambda)^2 - 9) = 0$$

$$\lambda_1 = 6 > \lambda_2 = 3 > \lambda_3 = 0$$

Valores singulares: $\sigma_1 = \sqrt{6}$, $\sigma_2 = \sqrt{3}$

Valores propios de $A^T A$:

- $\lambda_1 = 6$

$$\ker(A^T A - 6I) \iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

- $\lambda_2 = 3$

$$\ker(A^T A - 3I) \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_2 = (1, 0, 0)$$

- $\lambda_3 = 0$

$$\ker(A^T A - 0 \cdot I) \iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Por tanto,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora los vectores que forman las columnas de U :

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Hemos de completar a una base ortonormal de \mathbb{R}^4 :

Lo podemos hacer de manera sistemáticamente usando Gram-Schmidt a partir de los vectores

$$\left\{ u_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \right\}$$

o bien directamente se ve

$$u_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), u_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La matriz U es

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$A = U \Sigma V^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

que también podemos escribir de manera más compacta:

$$\begin{aligned}
A = U_2 \Sigma_2 V_2^T &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1^T \\ \leftarrow v_2^T \end{matrix} \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
&\quad u_1 \quad u_2 \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \end{bmatrix}}_{\sigma_1 u_1 v_1^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot 0 \\ 0 \cdot \sqrt{2} & 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot 0 & 1 \cdot 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot 0 & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \cdot 0 \end{bmatrix}}_{\sigma_2 u_2 v_2^T}
\end{aligned}$$

Suma de matrices de rango 1.

[¿Por qué es importante la SVD en Ciencia de Datos?](#)

• Teorema (Eckart-Young-Mirsky)

Sea $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$.

Entonces, para toda matriz de rango k se tiene que

$$\|A - A_k\| \leq \|A - B\|$$

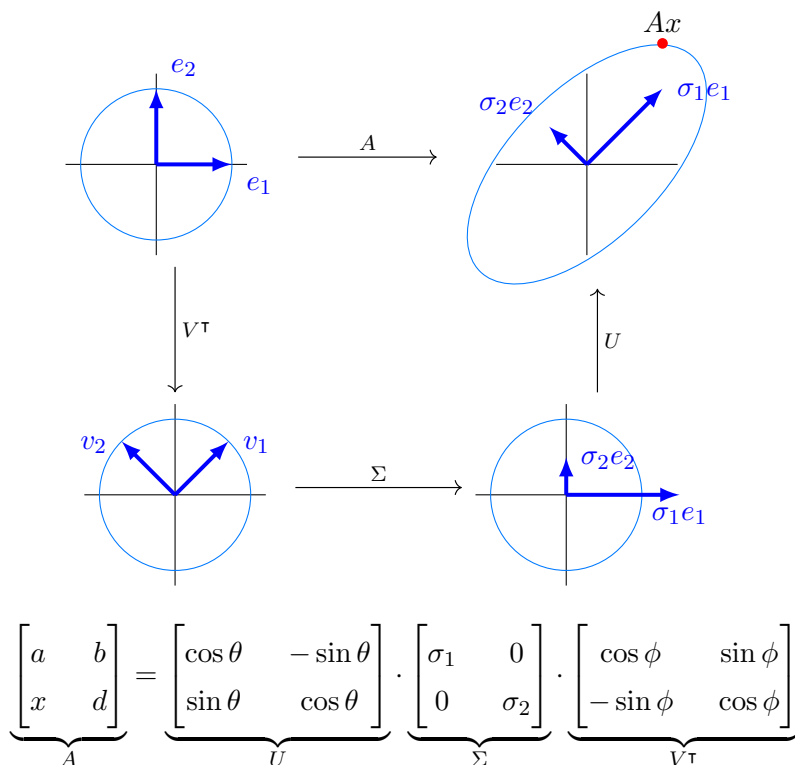
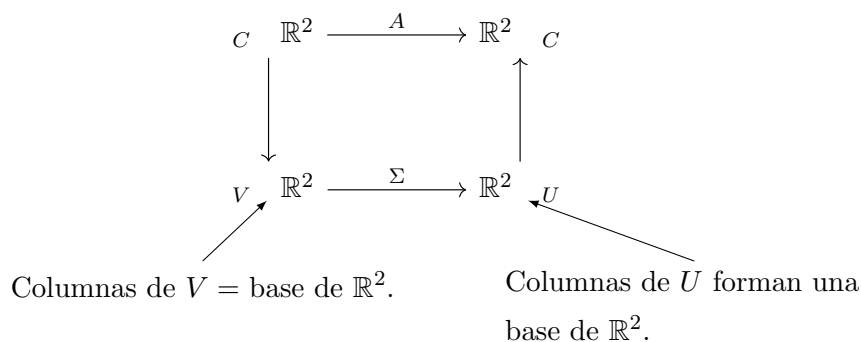
donde $\|\cdot\|$ norma de Frobenius. Es decir, A_k es la mejor aproximación posible de A con matrices de rango menor o igual que k .

[Aplicaciones:](#) Compresión de imágenes, eliminación de ruido en señales, etc...

[Geometría de la SVD:](#) $A = U \Sigma V^T$

- U : Ortogonal
- Σ : Dilatación
- V^T : Ortogonal

Veámoslo en dimensión 2.



V produce un cambio de base ortonormal.

Σ define las dos direcciones principales y cuánto éstas se alargan o acortan.

U es un nuevo cambio de base ortonormal que marca precisamente las direcciones principales.

7.5.1) Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz y la SVD

• Lema

Se tiene que $\text{nuc}(A^T A) = \text{nuc}(A)$.

• Demostración

Sea $u \in \text{nuc}(A^T A) \longrightarrow A^T A u = 0$

Multiplicando por u^T

$$0 = u^T A^T A u = (A u)^T A u = \|A u\|^2 \longrightarrow A u = 0 \longrightarrow u \in \text{nuc}(A)$$

Recíprocamente, si $A u = 0 \longrightarrow A^T A u = 0$.

• Proposición

Sea $A \in M_{m \times n}$, $n \leq m$ y sea $r = \text{rg}(A)$. Entonces:

$$1) \text{ nuc}(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$$

$$2) \text{ Col}(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$$

$$3) \text{ Fil}(A) = \text{nuc}(A)^\perp = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$$

$$4) \text{ nuc}(A^\top) = \text{Col}(A)^\perp = \langle u_{r+1}, \dots, u_m \rangle$$

• **Demostración**

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de vectores propios de $A^\top A$, por la factorización en valores propios se tiene que

$$V^\top A^\top A V = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0]$$

ya que $\text{rg}(A) = \text{rg}(U \Sigma V^\top) = \text{rg}(\Sigma)$

Por el lema anterior $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de $\text{nuc}(A) = \text{nuc}(A^\top A)$. Nótese que $A^\top A V = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0] \cdot V$.

Por la definición de los vectores $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$, $1 \leq i \leq r$, se tiene que $\text{Col}(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$.

El resto se prueba teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{ccc} \text{Col}(A) \oplus \text{nuc}(A^\top) & \longrightarrow & \{u_{r+1}, \dots, u_m\} \\ \text{Fil}(A) & \oplus & \text{nuc}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{v_1, \dots, v_r\} & & \{v_{r+1}, \dots, v_n\} \end{array}$$

que dichos espacios son ortogonales dos a dos y que U y V son ortogonales.

Hoja de ejercicios Tema 7: Vectores y Valores Propios

- 1) Halla la matriz real más general posible que tiene como vectores propios los vectores $(1, 1)$ y $(1, -1)$

$$A = P^{-1}DP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}}$$

\mathbb{R}

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \equiv \text{valores propios}$$

- 2) Dada la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$, explica por qué no existe ninguna matriz invertible P tal que para la matriz $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal. ¿Puedes generalizar este resultado para matrices de tamaño mayor?

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \quad b \neq 0 \quad \text{No existe } P \text{ invertible tal que } P^{-1}AP = D$$

$$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & 0 \\ b & a - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)^2 = 0$$

Valor propio $\lambda = a$ multiplicidad 2.

$$\text{nuc}(A - aI) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow bx = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$\dim \text{nuc}(A - aI) = 1 \quad v = (0, 1)$$

Conclusión: para que $P^{-1}AP = D$ es necesario que la dimensión de los subespacios de vectores propios coincidan con la multiplicidad de los correspondientes valores propios.

- 3) Sea A una matriz diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Prueba que la matriz A^2 también es diagonalizable con valores propios $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$

A diagonalizable, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores propios $\longrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ base de vectores propios A^2 diagonalizable, $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ valores propios.

$$Av_j = \lambda_j v_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad A^2 v_j = \lambda_j A v_j = \lambda_j \lambda_j v_j = \lambda_j^2 v_j$$

$$A^2 v_j = \lambda_j^2 v_j?$$

$$A^2 \text{ tiene valores propios } \lambda_j^2$$

$$A^2 \text{ tiene vectores propios los mismo que } A$$

- 4) Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A . ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1} ?

$$\exists v_j \neq 0 \quad Av_j = \lambda_j v_j$$

$$= \underbrace{A^{-1}A}_{I} v_j = \lambda_j A^{-1} v_j \longrightarrow \boxed{A^{-1} v_j = \frac{1}{\lambda_j} v_j}$$

$$Av = 0 \longrightarrow \text{nuc}(A) \neq \{0\}$$

$$\dim \text{nuc}(A) \geq 1$$

$$v \neq 0$$

+

$$\dim \text{rg}(A) = n$$

5) Determina los valores a para los cuales la matriz $\begin{bmatrix} 5 & -3 & a \\ 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & a \\ 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad a \text{ para que } A \text{ sea diagonalizable.}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I] &= \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & -3 & a \\ 6 & -4 - \lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (5 - \lambda)(-4 - \lambda)(2 - \lambda) + 18(2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda) \underbrace{((5 - \lambda)(-4 - \lambda) + 18)}_{-20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18} \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \\ \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Valores propios

$\lambda_1 = 2$ multiplicidad 2

$\lambda_2 = -1$ multiplicidad 1

$$\text{nuc}(A - 2I)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & a \\ 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y + az &= 0 \\ 6x - 6y + 6z &= 0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & a \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix},$$

$a = 3 \longrightarrow \text{rango } 1 \longrightarrow 2 \text{ parámetros} \longrightarrow 2 \text{ vectores propios} \longrightarrow A \text{ diagonalizable.}$

$a \neq 3 \longrightarrow \text{rango } 2 \longrightarrow 1 \text{ parámetro} \longrightarrow 1 \text{ vector propio} \longrightarrow A \text{ no diagonaliza.}$

6) Una empresa comercializa dos marcas de un producto. Entre los usuarios de estas marcas la empresa ha podido determinar que la probabilidad de que un usuario de la marca 1 se pase a la marca 2 después de un mes es de 0.4, y la probabilidad de que un usuario de la marca 2 se pase a la marca 1 después de un mes es de 0.2. Con esta información, observa que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

es tal que a_{ij} es la probabilidad de que un usuarios de la marca j se pase a la marca i después de un mes.

Este tipo de matrices se llaman **matrices de Markov**.

Si inicialmente hay, por ejemplo, un 20% de usuarios que prefieren la marca 1 y un 80% que prefieren la marca 2, se puede ver, usando argumentos probabilísticos, que las preferencias de los usuarios después de n meses vienen dadas por

$$A^n \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Determina cuáles serán las preferencias por cada marca en el futuro.

¿Cómo calcular $A^n, n \in \mathbb{N}, n$ grande?

$$A = P^{-1}DP \quad A^2 = \underbrace{P^{-1}DP}_A \underbrace{P^{-1}DP}_A = P^{-1}D^2P$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad A^n = P^{-1}D^nP$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

- 7) **El secreto de Google y el Álgebra Lineal.** El teorema que sugiere es una pieza clave en el algoritmo *PageRank* que usa (o usaba) *Google* para ordenar las búsquedas de las páginas de Internet. En su versión más sencilla, el Teorema de Perron-Frobenius se enuncia así: Sea A una matriz cuadrada con entradas positivas, es decir, $a_{ij} > 0$. Entonces existe un autovalor simple (es decir, de multiplicidad 1) cuyo autovector asociado puede elegirse con todas sus componentes estrictamente positivas. Calcula los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

y comprueba que se satisface el Teorema de Perron-Frobenius. Se recomienda la lectura del artículo <https://sct.> a aquellos alumnos que tengan curiosidad por saber las Matemáticas en el algoritmo *PageRank* de Google. En particular, se podrá apreciar el papel destacado del Teorema de Perron-Frobenius.

autovalores, autovectores = $\text{eig}(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{valor propio dominante} = 6.1933$$

$$v = (0.69, 0.5, 0.53)$$

- 8) Calcula y compara los valores propios y los valores singulares de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué conclusión puedes sacar?

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^4 = 0$$

$$\det[B - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 - \frac{6}{60000} = 0$$

$$\lambda^4 = 10^{-4} \begin{cases} \lambda = \pm 0.1 \\ \lambda = \pm 0.1j \end{cases}$$

Valores propios y singulares de A y B

Valores propios de $A \rightarrow \lambda = 0$ multiplicidad 4

Valores propios de $B \rightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 0.1 \\ \lambda = \pm 0.1j \end{cases}$

$$\begin{cases} A^T A \rightarrow \text{valores propios} \rightarrow \text{valores singulares } \sigma_1 = 3, \sigma_2 = \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0 \\ B^T B \rightarrow \text{valores propios} \rightarrow \text{valores singulares } \sigma_1 = 3, \sigma_2 = \sigma_3 = 1, \sigma_4 \approx 2.27 \cdot 10 \end{cases}$$

Son simétricas \rightarrow valores propios son reales.

9) Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

a) Calcula los valores propios y los valores singulares de A

$$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 8 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

$\lambda = 3$ multiplicidad 2

b) ¿Es A diagonalizable?

$$\boxed{\lambda = 3} \quad \text{nuc}(A - 3I) = \text{nuc} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 8y = 0 \rightarrow y = 0 \\ \boxed{v = (1, 0)} \end{cases}$$

$\dim \text{nuc}(A - 3I) = 1 \neq 2$ multiplicidad de $\lambda = 3$

A no factoriza, no diagonaliza.

c) Calcula las matrices U y V ortogonales tales que $A = U \Sigma V^T$, donde $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ con σ_1, σ_2 los valores singulares de A .

Calcular los valores y vectores propios de $A^T A$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 \\ 24 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 9 - \lambda & 24 \\ 24 & 73 - \lambda \end{bmatrix} = (9 - \lambda)(73 - \lambda) - 576 = \lambda^2 - 82\lambda + 81 = 0$$

$$\lambda = \frac{82 \pm \sqrt{82^2 - 4 \cdot 81}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 81 \longrightarrow \sigma_1 = 9 \\ \lambda_2 = 1 \longrightarrow \sigma_2 = 1 \end{cases} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 81} \quad \text{nuc}(A^T A - 81I) = \text{nuc} \begin{bmatrix} -72 & 24 \\ 24 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -72 & 24 \\ 24 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -72x + 24y = 0 \\ 24x - 8y = 0 \end{cases} \longrightarrow 8y = 24\alpha \longrightarrow y = 3\alpha$$

$$v = (1, 3) \longrightarrow \|v\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1} \quad \text{nuc}(A^T A - I) = \text{nuc} \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 72 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 72 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 8x + 24y = 0 \\ 24x + 72y = 0 \end{cases} \longrightarrow y = \alpha \longrightarrow x = -\frac{24\alpha}{8} = -3\alpha; \boxed{\alpha = 1}$$

$$v = (-3, 1)$$

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Cálculo de U

$$U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = U \Sigma V^T}$$

10) Encuentra la factorización SVD de la matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la primera de ellas, escribe la matriz como suma de matrices de rango 1, según se explica en la página 121 de los apuntes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P_{A^T A} = \det(A^T A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 9 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)(9 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 9 \longrightarrow \sigma_1 = \sqrt{9} = 3$$

$$\lambda_2 = 4 \longrightarrow \sigma_2 = \sqrt{4} = 2$$

$$\boxed{\lambda_1 = 9} \text{ nuc}(A^T A - 9I) \longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5x = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow y = 1 \longrightarrow v_1 = (0, 1)$$

$$\boxed{\lambda_2 = 4} \text{ nuc}(A^T A - 4I) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 5y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow x = 1 \longrightarrow v_2 = (1, 0)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de U :

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Completamos $u_1 = (0, 1, 0), u_2 = (0, 0, -1)$ a una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Basta tomar

$$u_3 = (1, 0, 0)$$

Por tanto:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el número de condicionamiento de B es 3 y el de filas es 2, hemos de hacer la factorización SVD de B^T y a partir de ella deduciremos la de B .

Empezamos Pues considerando la matriz

$$A = B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1°) Cálculo de los autovalores y autovectores de $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Valores propios de $A^T A$: Valores singulares de A :

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 5 & \sigma_1 = \sqrt{5} \\ \lambda_2 = 4 & \sigma_2 = \sqrt{2} \end{array}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 5} \text{ nuc}(A^T A - 5I) = \text{nuc} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow -y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow v_1 = (1, 0)$$

$$\boxed{\lambda_2 = 4} \text{ nuc}(A^T A - 4I) = \text{nuc} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x = 0 \longrightarrow v_2 = (0, 1)$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de U :

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Completamos $\{u_1, u_2\}$ a una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

Se puede calcular el tercer vector u_3 usando Gram-Schmidt, pero de manera directa se puede ver que podemos tomar

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)$$

Por tanto:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

En resumen:

$$B^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{V^T}$$

Tomando la traspuesta:

$$B = V \Sigma^T U^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

- 11) Sea A una matriz real y simétrica. Prueba que los valores singulares de A son los valores absolutos de los valores propios de A . ¿Qué pasa si A es semidefinida positiva?

Nota: Antisimétrica.

Valores singulares de A son los valores absolutos de los valores propios de A . ¿ A semidefinida positiva?

Valores singulares de A son las raíces cuadradas de los valores propios de $A^T A$.

$$\underbrace{A^T A v_j} \longrightarrow \sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$$

$$A^2 v_j = \lambda_j^2 v_j \longrightarrow \sigma_j = \sqrt{\lambda_j^2} = |\lambda_j|$$

donde λ_j son los valores propios de A . $A \geq 0 \longrightarrow \lambda_j \geq 0$

Ejercicios Tipo Examen

- 1) En una red eléctrica se tienen dos fuentes de tensión \vec{V}_1 y \vec{V}_2 , siendo $\vec{V}_2 = 5_{45^\circ}$, esto es, el número complejo de módulo 5 y argumento 45° . La ley de Ohm conduce al sistema de ecuaciones lineales $\vec{V} = R\vec{I}$, donde

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ 0 \\ \vec{V}_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1+j & -5j & 0 \\ -5j & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{I} = \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Calcula el valor que debe tomar \vec{V}_1 de modo que \vec{I}_2 sea igual a cero.

Por la regla de Cramer se tiene que

$$\vec{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+j & \vec{V}_1 & 0 \\ -5j & 0 & -3 \\ 0 & \vec{V}_2 & 1 \end{vmatrix}}{|R|}$$

Por tanto, $\vec{I}_2 = 0$ si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1+j & \vec{V}_1 & 0 \\ -5j & 0 & -3 \\ 0 & 5_{45^\circ} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}_{45^\circ} & \vec{V}_1 & 0 \\ 5_{-90^\circ} & 0 & 3_{180^\circ} \\ 0 & 5_{45^\circ} & 1_{0^\circ} \end{vmatrix} \\ \left. \begin{aligned} |1+j| &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta &= \arctan \frac{1}{1} = 45^\circ \end{aligned} \right\} &\longrightarrow 1+j = \sqrt{2}_{45^\circ} \\ -5j &= 5(-j) = 5_{-90^\circ} = 5_{270^\circ} \\ -3 &= 3_{180^\circ} \end{aligned}$$

Hemos tomado el argumento principal en $[0, 360^\circ[$. Así:

$$0 = \begin{vmatrix} \sqrt{2}_{45^\circ} & \vec{V}_1 & 0 \\ 5_{270^\circ} & 0 & 3_{180^\circ} \\ 0 & 5_{45^\circ} & 1_{0^\circ} \end{vmatrix} = -(5_{45^\circ} \cdot 3_{180^\circ} \cdot \sqrt{2}_{45^\circ} + 1 \cdot 5_{270^\circ} \cdot \vec{V}_1) = -15\sqrt{2}_{270^\circ} - 5_{270^\circ} \cdot \vec{V}_1$$

Despejando:

$$\vec{V}_1 = \frac{-15\sqrt{2}_{270^\circ}}{5_{270^\circ}} = \frac{15\sqrt{2}_{270^\circ} \cdot 1_{180^\circ}}{5_{270^\circ}} = 3\sqrt{2}_{180^\circ} = \boxed{-3\sqrt{2}}$$

- 2) Sea

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

una matriz ortogonal con determinante $|Q| = 1$. Consideremos la norma matricial

$$\|Q\|_2 = \max_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2},$$

donde $\|v\|_2^2 = v_1^2 + v_2^2$ para todo $v = [v_1, v_2] \in \mathbb{R}^2$. Se pide:

- a) Demuestra que el número de condicionamiento de Q , para la norma anterior, es igual a 1.

$$c(Q) = \|Q\|_2 \cdot \|Q^{-1}\|_2$$

Recordemos que este tipo de matrices tienen la forma $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$.

También se tiene que

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \|Q\|_2 &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\left\| \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\|(ax_1 + bx_2 - bx_1 + ax_2)\|_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{(ax_1 + bx_2)^2 + (-bx_1 + ax_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + 2abx_1x_2 + b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - 2abx_1x_2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(x_1^2 + x_2^2)}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 1 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\|Q^{-1}\|_2 &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\|Q^{-1}x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\left\| \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_2}{\|(x_1, x_2)\|_2} \\
&= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\|(ax_1 - bx_2, bx_1 + ax_2)\|_2}{\|(x_1, x_2)\|_2} \\
&= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{(ax_1 - bx_2)^2 + (bx_1 + ax_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2 - 2abx_1x_2 + b^2x_1^2 + a^2x_2^2 + 2abx_1x_2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2)}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 1
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$c(Q) = \|Q\|_2 \cdot \|Q^{-1}\|_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

- b) Se puede probar que la propiedad anterior es cierta si la matriz Q del apartado anterior es de orden n , siendo $n \geq 2$ un número natural. Supongamos que queremos resolver un sistema lineal de la forma $Qx = b$ y que, debido a errores de redondeo o de medida, cometemos un error relativo en el término independiente de aproximadamente 10^{-3} . Obtén una cota del error relativo que se cometería en la solución x . Se ha de justificar la respuesta.

Recordemos que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq c(Q) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Como $c(Q) = 1$, si $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 10^{-3}$, entonces

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 1 \cdot 10^{-3} = 10^{-3}.$$

- 3) Explica en qué consisten las factorizaciones LU , PLU y Cholesky de una matriz cuadrada A . Explica también cómo se resolvería un sistema lineal de la forma $Ax = b$ usando ambas factorizaciones. Finalmente, supongamos que la matriz A es simétrica y definida positiva. ¿Cuál de las factorizaciones usarías para resolver el sistema $Ax = b$? ¿Por qué?

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Una factorización LU de A es una factorización de la forma

$$A = LU$$

con $L \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ triangular inferior con unos en la diagonal, y U una matriz triangular superior de tamaño $m \times n$.

Se llama factorización PLU de A a toda factorización de la forma

$$PA = LU$$

con L y U como antes y P una matriz de permutación.

Se llama factorización Cholesky de A a toda factorización de la forma

$$A = L \cdot L^T$$

con L una matriz triangular inferior.

Dado el sistema $Ax = b$, si A se factoriza en la forma $A = LU$, entonces

$$LUx = b$$

y llamando $z = Ux$, se tiene que el sistema $Ax = b$ es equivalente a los dos sistemas

$$\left. \begin{array}{l} Lz = b \\ Ux = z \end{array} \right\}$$

Para el caso Cholesky, donde $A = L \cdot L^T$,

$$L \cdot L^T x = z$$

y llamando $L^T x = z$ se tiene los sistemas

$$\left. \begin{array}{l} Lz = b \\ L^T x = z \end{array} \right\}$$

Si A es simétrica y definida positiva, entonces la factorización Cholesky es posible.

Debemos usar la factorización Cholesky en este caso ya que su coste computacional para resolver $Ax = b$ es $\frac{n^3}{6}$, justo la mitad que si usamos la factorización LU .

- 4) Una clase de matrices que aparecen en varias aplicaciones en Ciencia de Datos (por ejemplo, en el famoso PageRank de Google) son las llamadas *matrices de Markov*. Se caracterizan porque todas sus entradas son no negativas y además la suma de las entradas de cada columna siempre da como resultado 1. La siguiente matriz es un ejemplo de matriz de Markov:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se pide:

- a) Encuentra matrices P y Q de modo que $B = PMQ$, con B una matriz por bloques que tiene a la identidad I_r en el primer bloque, y en el resto de bloques vale cero.

Para obtener la factorización pedida empezamos haciendo operaciones elementales fila de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hacemos ahora operaciones elementales columna:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 + \frac{1}{2}C_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 - \frac{3}{2}C_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{C_1 \rightarrow 2C_1 \\ C_2 \rightarrow 3C_2}} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_B = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right]}_P \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_M \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_Q$$

- b) ¿Cuál es el rango de M ?

El rango de M es 2.

c) Resuelva el sistema lineal $Mx = x$, donde $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ es la incógnita.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= x_2 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= x_3 \end{aligned} \right\}$$

De las 2 primeras ecuaciones se tiene que $x_1 = x_2$ y la tercera ecuación se escribe en la forma más sencilla

$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0.$$

Tenemos pues el sistema homogéneo:

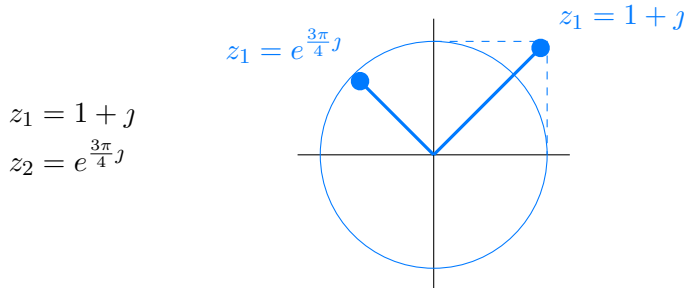
$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Examen Convocatoria Enero 2023

1) Consideremos los números complejos

$$z_1 = -1 - j, \quad z_2 = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} j.$$

Calcula $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ y $\frac{z_2}{z_1}$ y expresa el resultado en forma exponencial.



Para calcular $z_1 + z_2$ escribimos z_2 en forma binómica:

$$\begin{aligned} z_2 &= e^{\frac{3\pi}{4}j} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -0.707 + j \cdot 0.707 \\ z_1 + z_2 &= (1 + j) + (-0.707 + j \cdot 0.707) \\ &= 0.293 + j \cdot 1.707 \end{aligned}$$

Calculamos la forma exponencial de este número

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= \sqrt{0.293^2 + 1.707^2} = 1.732 \\ \theta &= \arctan \frac{1.707}{0.293} = 80.26^\circ = 0.446\pi \text{ radianes} \\ z_1 + z_2 &= 1.732 \cdot e^{j \cdot 0.446\pi} \end{aligned}$$

2) Sea A una matriz. Explica con detalle en qué consiste la factorización en valores singulares (SVD) de A . Por supuesto, se ha de explicar qué son los valores singulares y cómo se calculan las matrices que aparecen en dicha factorización. Pon también un ejemplo de aplicación de la factorización SVD en Ciencia de Datos.

3) Responde a las siguientes preguntas:

- Explica qué es una matriz ortogonal.
- Explica en qué consiste la factorización QR de una matriz cuadrada A .
- ¿Qué propiedad tiene que cumplir A para que se pueda calcular su factorización QR ?

El determinante de A debe ser distinto de 0 $\det(A) \neq 0$

- Razona si la siguiente afirmación es cierta o falsa: sea A una matriz no singular. El sistema lineal $Ax = b$ siempre se puede resolver mediante factorización LU y Cholesky. Además, siempre hemos de elegir el método de Cholesky porque su coste computacional es menor que el de la LU .

La afirmación es falsa porque aunque, en efecto, el coste computacional de Cholesky es menor que el de LU , en cambio no todas las matrices no singulares admiten una factorización Cholesky. Únicamente, las matrices simétricas y definidas positivas admiten una tal factorización de Cholesky.

4) Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}.$$

Calcula la factorización LU de A y utiliza dicha factorización para calcular el determinante de A . Por curiosidad, la matriz L que aparece en la factorización anterior contiene el llamado *triángulo de Pascal*, que se usa, por ejemplo, en Combinatoria.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \\ F_4 \rightarrow F_4 - 3F_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \\ F_4 \rightarrow F_4 - 3F_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_4 \rightarrow F_4 - 3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Nótese que A es simétrica. Además, las entradas de la diagonal de U son todas iguales a 1.

Esto indica que A también es definida positiva y que además $L = U^T$ ya que en este caso particular las factorizaciones LU y Cholesky coinciden.

En cualquier caso, podemos calcular las entradas de L mediante la fórmula.

$$l_{ij} = \frac{\text{entrada a eliminar en la fila } i\text{-ésima}}{\text{pivot de la fila } j}$$

Así:

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{1}{1} = 1 \\ l_{31} &= \frac{1}{1} = 1, \quad l_{32} = \frac{2}{1} = 2 \\ l_{41} &= \frac{1}{1} = 1, \quad l_{42} = \frac{3}{1} = 3, \quad l_{43} = \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \det(A) &= \det(LU) \\ &= \det(L) \cdot \det(U) \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

5) Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Se pide:

a) Calcula los valores propios y una base ortonormal de vectores propios de la matriz $A^T A$. Denotemos

por λ_1, λ_2 dichos vectores y por v_1, v_2 dicha base ortonormal de vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 , respectivamente. Llamaremos V a la matriz cuyas columnas son, en este orden, v_1 y v_2 .

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$$

$$P_\lambda(A^T A) = \begin{vmatrix} 25 - \lambda & 20 \\ 20 & 25 - \lambda \end{vmatrix} = (25 - \lambda)^2 - 400 = 625 + \lambda^2 - 50\lambda - 400$$

$$\lambda^2 - 50\lambda + 225 = 0$$

$$\lambda = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 900}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{2} = \frac{50 \pm 40}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 45 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 45} \quad \ker(A^T A - \lambda_1 I_2)$$

$$\begin{bmatrix} 25 - 45 & 20 \\ 20 & 25 - 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -20x_1 + 20x_2 = 0 \\ 20x_1 - 20x_2 = 0 \end{array} \right\} x_2 = \alpha \longrightarrow x_1 = x_2 = \alpha$$

$$\longrightarrow (1, 1)$$

$$\longrightarrow \|(1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\longrightarrow v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\boxed{\lambda_2 = 5} \quad \ker(A^T A - \lambda_2 I_2)$$

$$\begin{bmatrix} 25 - 5 & 20 \\ 20 & 25 - 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 20x_1 + 20x_2 = 0 \\ 20x_1 + 20x_2 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow x_1 = -x_2 \longrightarrow (-1, 1) \longrightarrow x_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

b) Sean $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$ y $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$. Calcula los vectores $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1$ y $u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2$ y comprueba que forman una base ortonormal de vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 para la matriz $A \cdot A^T$.

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{45}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{5}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{90}} \\ \frac{9}{\sqrt{90}} \end{bmatrix}}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{\frac{9}{90} + \frac{81}{90}} = \sqrt{1} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\frac{9}{10} + \frac{1}{10}} = \sqrt{1} = 1$$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^T u_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 41 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{90}} \\ \frac{9}{\sqrt{90}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{\sqrt{90}} + \frac{108}{\sqrt{90}} \\ \frac{36}{\sqrt{90}} + \frac{369}{\sqrt{90}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{135}{\sqrt{90}} \\ \frac{405}{\sqrt{90}} \end{bmatrix}$$

$$= 45 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{90}} \\ \frac{9}{\sqrt{90}} \end{bmatrix}; \quad u_1 \cdot u_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{90}}, \frac{9}{\sqrt{90}} \right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 0$$

$$A \cdot A^T u_2 = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 41 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

c) Sean U la matriz que tiene por columnas los vectores u_1 y u_2 , en ese orden, y Σ la matriz diagonal que tien en su diagonal los números σ_1 y σ_2 . Comprueba que

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T = U \Sigma V^T.$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{90}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{9}{\sqrt{90}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{45} & 0 \\ 0 & \sqrt{45} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T &= \sqrt{45} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{90}} & \frac{9}{\sqrt{90}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \sqrt{5} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{45} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{180}} & \frac{3}{\sqrt{180}} \\ \frac{9}{\sqrt{180}} & \frac{9}{\sqrt{180}} \end{bmatrix} + \sqrt{5} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{20}} & -\frac{3}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U\Sigma V^T &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{90}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{90}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{45} & 0 \\ 0 & \sqrt{45} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{90}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{90}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{45}\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{10}\sqrt{2}} & \frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{45}\sqrt{2}\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ \frac{9\sqrt{45}}{\sqrt{45}\sqrt{2}\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{2}} & \frac{9\sqrt{45}}{\sqrt{45}\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

d) ¿Cómo se llaman los números σ_1 y σ_2 ? ¿Cómo se llama la factorización de A que hemos hecho en el apartado anterior?

σ_1 y σ_2 se llaman valores singulares, y la factorización anterior se llama factorización SVD .

6) Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcula la dimensión y una base de los cuatro subespacios fundamentales de A , es decir, $\text{Fil}(A)$, $\text{Col}(A)$, $\text{nuc}(A)$ y $\text{nuc}(A^T)$.

$$\text{Fil}(A) = \langle (1, 1, 1), (1, 2, 3) \rangle$$

$(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$ son linealmente independientes pues uno no es múltiplo del otro.

Por tanto, $\dim \text{Fil}(A) = 2$

$$\text{nuc}(A) = \{x = (x_1, x_2, x_3), Ax = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Como $\text{rg}(A) = 2$, tomamos 1 parámetro. Por ejemplo $x_3 = \alpha$. Nos queda:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\alpha \\ x_1 + 2x_2 &= -3\alpha \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} x_2 &= -3\alpha - (-\alpha) = -2\alpha \\ x_1 &= -x_2 - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha \end{aligned}$$

$\text{nuc}(A) = \langle (1, -2, 1) \rangle$ donde hemos tomado $\alpha = 1$.

$$\mathbb{R}^3 = \text{Fil}(A) \oplus \text{nuc}(A)$$

$$\text{Col}(A) = \langle (1, 1), (1, 2), (1, 3) \rangle$$

b) En general, ¿qué relaciones puedes dar entre los subespacios anteriores?

Tres vectores en \mathbb{R}^2 siempre son linealmente dependientes.

Sin embargo $\{(1, 1), (1, 2)\}$ son linealmente independientes. Por tanto, $\dim \text{Col}(A) = 2$ y una base de $\text{Col}(A)$ es $\{(1, 1), (1, 2)\}$

Como $\mathbb{R}^2 = \text{Col}(A) \oplus \text{nuc}(A^\top)$ se tiene que $\text{nuc}(A^\top) = \{0\}$