Señales y Sistemas

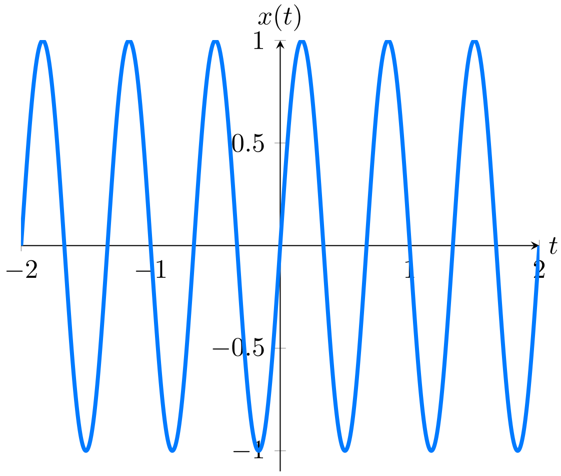
Problemas Unidad 3

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Expresar la señal $x(t) = \sin(3\pi t)$ como una combinación lineal de exponenciales complejas.

$$x(t) = \sin(3\pi t) = \begin{cases} \omega_0 = 3\pi \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\sin(3\pi x) = \frac{e^{j3\pi t} - e^{-j3\pi t}}{2j} = \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_1} e^{j3\pi t} - \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_{-1}}) e^{-j3\pi t} = \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2j} \\ a_{-1} = -\dfrac{1}{2j} \end{cases}$$



2) Expresar la señal $x(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t - nT}{\tau}\right)$ como una combinación lineal de exponenciales complejas.

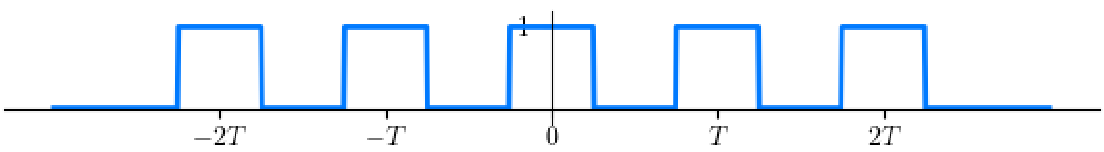
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \prod\left(\frac{t-nT}{\tau}\right) e^{-jk\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jk\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\cdot\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\left[\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{-j\frac{2\pi}{T}}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{T}\cdot\left[\frac{e^{-jk\frac{\pi\tau}{T}}}{-jk\frac{2\pi}{T}} - \frac{e^{jk\frac{\pi\tau}{T}}}{-jk\frac{2\pi}{T}}\right] = \frac{e^{jk\frac{\pi\tau}{T}}}{jk2\pi} - \frac{e^{-jk\frac{\pi\tau}{T}}}{jk2\pi}$$

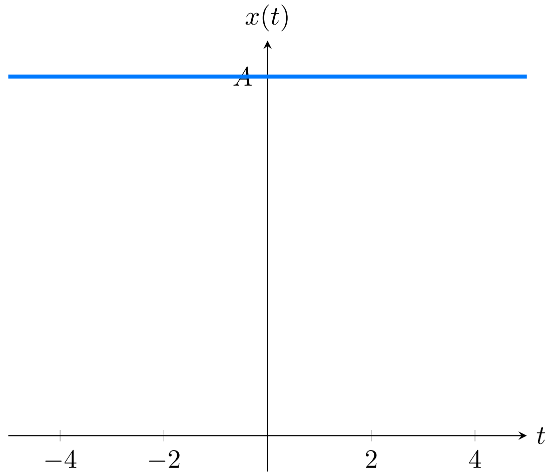
$$= \frac{\sin\left(k\frac{\pi\tau}{T}\right)}{\pi k} = \frac{\tau}{T}\cdot\frac{\sin\left(k\frac{\pi\tau}{T}\right)}{k\frac{\pi\tau}{T}} = \frac{\tau}{T}\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)$$

$$x(t) = \sum_k a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_k \frac{\tau}{T}\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$



3) Calcular los coeficientes del desarrollo en series de Fourier:

$$x(t) = A$$

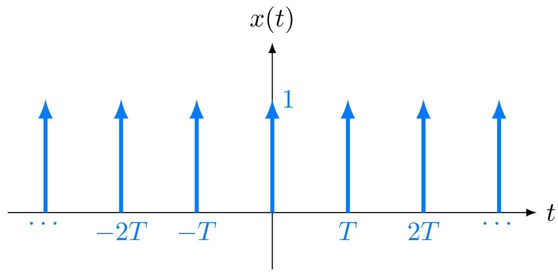


$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cdot e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{A}{T}\cdot\left[\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{-jk\frac{1\pi}{T}}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{T}\cdot\left[\frac{e^{-jk\pi}}{-jk\frac{2\pi}{T}} - \frac{e^{jk\pi}}{jk\frac{2\pi}{T}}\right] = A\cdot\left(\frac{e^{jk\pi}}{jk2\pi} - \frac{e^{-jk\pi}}{jk2\pi}\right) = A\cdot\frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = A\cdot\mathrm{sinc}(k)$$

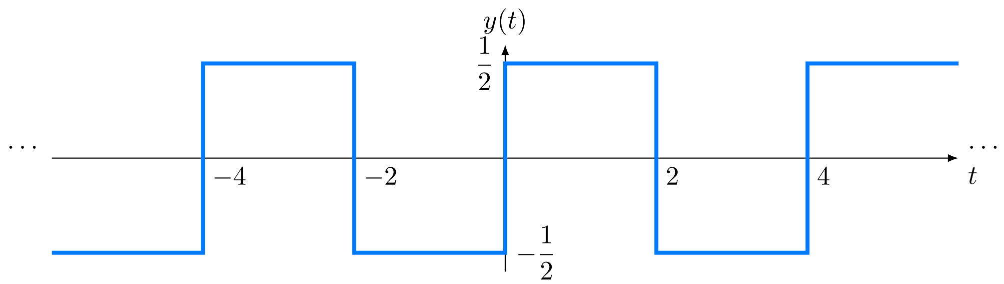
4) Calcular los coeficientes del desarrollo en series de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t = \left\{\delta(t) \to t_0 = 0 \to e^{-jk\frac{2\pi}{T}\cdot 0} = 1\right\} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}$$

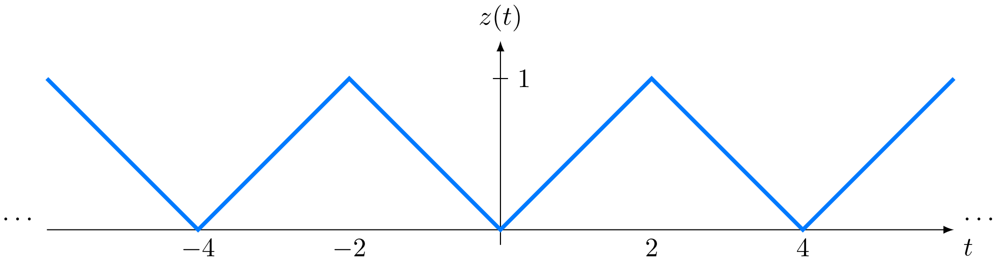
5) Calcular los coeficientes del desarrollo en series de Fourier:



$$a_k = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_{-2}^{0} -\frac{1}{2}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^0}{jk\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{jk\pi}}{-jk\frac{\pi}{2}}\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{-jk\pi}}{-jk\frac{\pi}{2}} - \frac{e^0}{-jk\frac{\pi}{2}}\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{e^0}{jk\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{jk\pi}}{jk\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{-jk\pi}}{jk\frac{\pi}{2}} + \frac{e^0}{jk\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2-2\cdot(-1)^k}{jk\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-(-1)^k}{jk\frac{\pi}{2}} = \frac{1-(-1)^k}{jk2\pi}$$

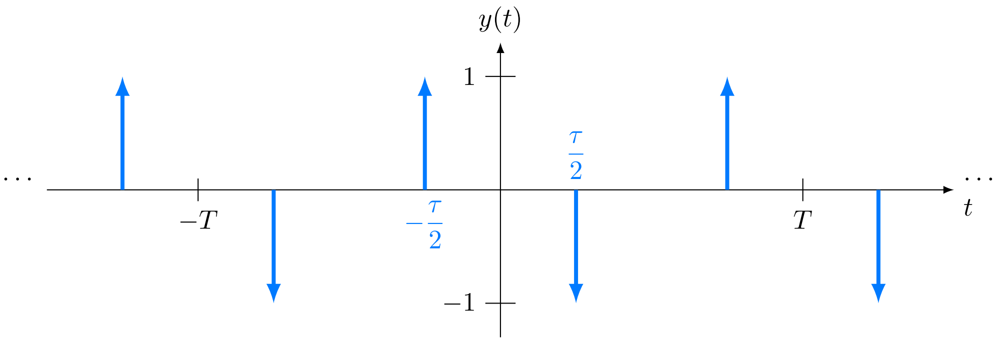
6) Calcular los coeficientes del desarrollo en series de Fourier:



$$\frac{\partial}{\partial t} y(t) = x(t) \implies y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$y(t) \xrightarrow{DSF} \frac{a_k}{jk\omega_0} = \frac{1-(-1)^k}{\frac{jk2\pi}{jk\frac{\pi}{2}}} = \frac{1-(-1)^k}{\frac{jk2\pi}{\frac{jk\pi}{2}}} = \frac{2-2(-1)^k}{-k^2\pi^2 2} = \frac{1-(-1)^k}{-k^2\pi^2}$$

7) Calcular los coeficientes del desarrollo en series de Fourier:



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t-nT+\frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t-nT-\frac{\tau}{2}\right) \xrightarrow{DSF} \frac{1}{T}\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{T}\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\tau}{2}} = \frac{e^{jk\frac{\pi\tau}{T}} - e^{-jk\frac{\pi\tau}{T}}}{T} = \frac{1}{T}\cdot 2j\cdot\frac{e^{jk\frac{\pi\tau}{T}} - e^{-jk\frac{\pi\tau}{T}}}{2j}$$

$$= \frac{2j}{T}\cdot\sin\left(k\frac{\pi}{T}\tau\right)$$

8) Calcular la potencia total de la señal: $x(t) = \sin(3\pi t)$

$$P_\infty = P_T = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} |\sin(3\pi t)|^2\,\mathrm{d}t \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \left|\frac{1}{2j}\right|^2 + \left|-\frac{1}{2j}\right|^2 = \frac{1}{2}W$$

9) Obtener el espectro de la señal

$$x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$$

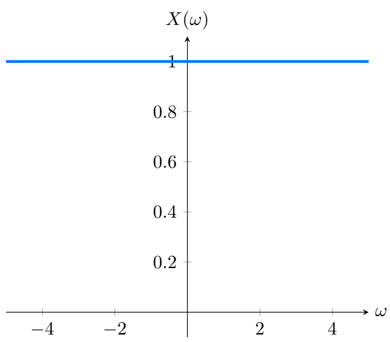
$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{(-a-j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(-a-j\omega)t}}{-a-j\omega}\right]_0^{\infty} = \frac{0}{-a-j\omega} - \frac{1}{-a-j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$$

10) Obtener el espectro de la señal

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \left\{\delta(t) \to t_0 = 0 \to e^{-jk\omega\cdot 0} = 1\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot 1 = 1$$



11) Obtener el espectro de la señal

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \cdot e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t = \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{-1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \cdot \frac{1}{2}\delta(\omega + \omega_0) = \pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

Nota

1) Transformada de Fourier de un coseno

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

Usamos la identidad de Euler:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

Y su transformada es:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

2) Transformada de Fourier de un seno

$$x(t) = \sin(\omega_0 t)$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

3) Fórmula general usando el signo $\pm$

Para compactar estas dos transformadas en una sola fórmula general, usamos:

$$\mathcal{F}\{e^{\pm j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$$

12) Obtener el espectro de la señal

$$x(t) = \sin(\omega_0 t)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t = \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2j} \\ a_{-1} = -\frac{1}{2j} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} \cdot 2\pi\delta(\omega + \omega_0) = \underbrace{\frac{1}{j}}_{-j} \cdot \pi\left(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right) = j\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right)$$

13) Obtener el espectro de la señal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Es una señal periódica con periodo T, por lo que se puede expresar mediante **Series de Fourier**:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \text{ donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Paso 1: Cálculo de los coeficientes c_k

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, \mathrm{d}t$$

Dado que $x(t)$ tiene un solo impulso en cada periodo T, y concretamente uno en $t = 0$, la integral se reduce a evaluar en el impulso:

$$c_k = \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 \cdot 0} = \frac{1}{T},\ \forall k$$

Paso 2: Sustituir en la serie

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t}$$

Ahora, calculamos su **Transformada de Fourier**:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

Paso 3: Transformada de una exponencial compleja

Sabemos que:

$$\mathcal{F}\{e^{jk\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

Aplicamos la linealidad:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot 2\pi\delta(\omega - k\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \text{ con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Nota: Transformada de Fourier de una señal periódica

Sea una señal periódica $x(t)$ de periodo T, con expansión en serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \text{ con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Entonces su transformada de Fourier es:

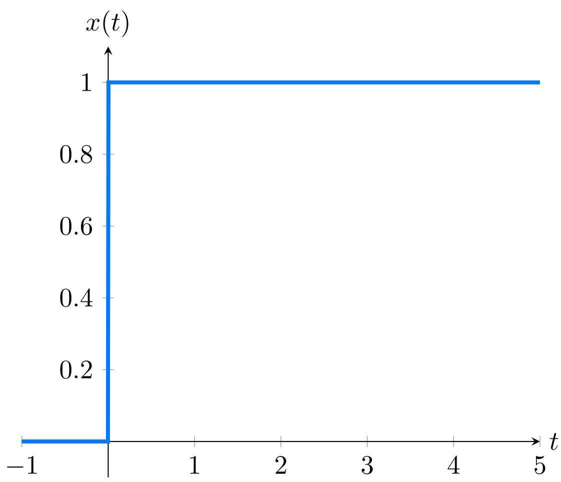
$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

14) Obtener el espectro de la señal

$$x(t) = \bigwedge\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$x(t) = \bigwedge\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{TF} \tau \text{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2\pi} \cdot \omega\right)$$

15) Obtener la expresión del espectro de la señal $x(t) = u(t)$



Utilizamos la propiedad de integración. Recodemos que si una función $x(t)$ se expresa como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau) \mathrm{d}\tau,$$

su transformada de Fourier se relaciona con la de $y(t)$ mediante la siguiente propiedad:

$$X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{j\omega} + \pi Y(0)\delta(\omega),$$

donde $Y(\omega)$ es la transformada de Fourier de $y(t)$.

En nuestro caso se tiene que la función escalón se puede escribir como

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\theta) \mathrm{d}\tau.$$

Como la transformada de Fourier de la delta de Dirac es

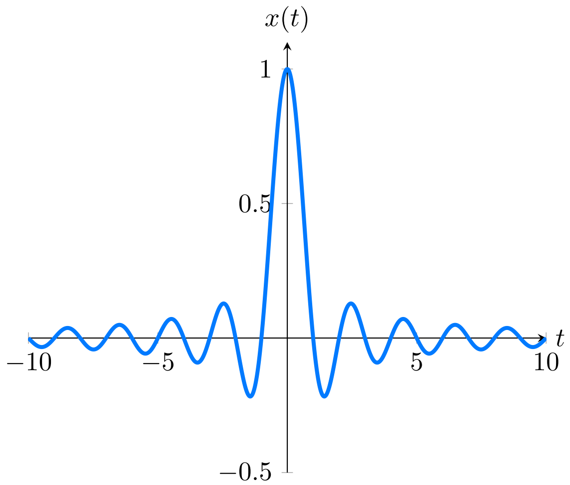
$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1,$$

entonces $Y(\omega) = 1$ para todo ω y, en particular, $Y(0) = 1$.

Aplicando la propiedad de integración se obtiene:

$$X(\omega) = \frac{1}{j\pi} + \pi\delta(\omega).$$

16) Calcular la energía total de la señal $x(t) = \mathrm{sinc}(t)$



Sabemos que:

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Y su transformada de Fourier es:

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(t)\} = \prod(f)$$

Donde:

$$\prod(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La propiedad de Parseval para señales de energía dice:

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f$$

Donde $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

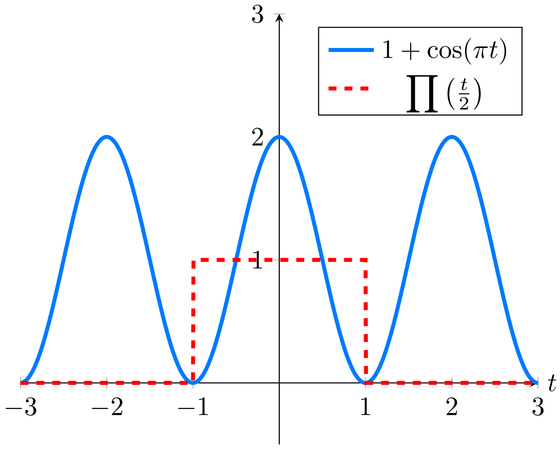
En nuestro caso:

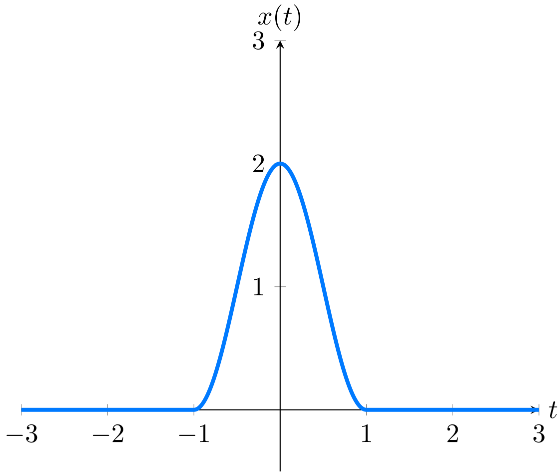
$$X(f) = \prod(f) \implies |X(f)|^2 = \prod(f)$$

Entonces:

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} \prod(f) \mathrm{d}f = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \mathrm{d}f = [f]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1J$$

17) Obtener la transformada de Fourier de $x(t) = (1 + \cos(\pi t)) \prod\left(\frac{t}{2}\right)$





$$x(t) = (1+\cos(\pi t))\prod\left(\frac{t}{2}\right) = \prod\left(\frac{t}{2}\right) + \prod\left(\frac{t}{2}\right)\cos(\pi t) = \underbrace{\prod\left(\frac{t}{2}\right)}_{d(t)} + \underbrace{\prod\left(\frac{t}{2}\right)\frac{e^{j\pi t}}{2}}_{s(t)} + \underbrace{\prod\left(\frac{t}{2}\right)\frac{e^{-j\pi t}}{2}}_{r(t)}$$

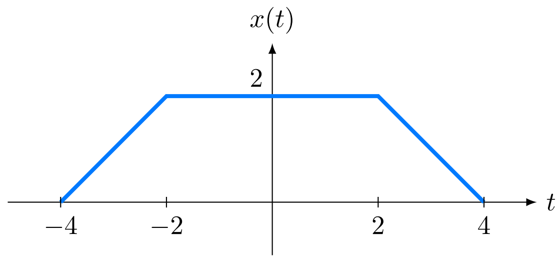
$$d(t) = \prod\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{TF} 2\cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = D(\omega)$$

$$s(t) = \prod\left(\frac{t}{2}\right)\frac{e^{j\pi t}}{2} \xrightarrow{TF} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\text{sinc}\left(\frac{\pi-\omega}{\omega}\right) = S(\omega)$$

$$r(t) = \prod\left(\frac{t}{2}\right)\frac{e^{-j\pi t}}{2} \xrightarrow{TF} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\text{sinc}\left(\frac{\pi+\omega}{\omega}\right) = R(\omega)$$

$$X(\omega) = D(\omega) + S(\omega) + R(\omega) = 2\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\pi-\omega}{\omega}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\pi+\omega}{\omega}\right)$$

18) Obtener de 2 formas distintas la transformada de Fourier de $x(t)$



Forma 1: $x(t) = 4\cdot \bigwedge\left(\frac{t}{4}\right) - 2\cdot \bigwedge\left(\frac{t}{2}\right)$

$$X(\omega) = 4\cdot 4\cdot \text{sinc}^2\left(\frac{4\omega}{2\pi}\right) - 2\cdot 2\cdot \text{sinc}^2\left(\frac{2\omega}{2\pi}\right) = 16\text{sinc}^2\left(\frac{2\omega}{\pi}\right) - 4\cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

Forma 2: $g(t) = \dfrac{\partial x(t)}{\partial t} = 2$