Lógica

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Índice general

1. Lógica **2**
1.1. Proposiciones y declaraciones compuestas . . . 2
1.2. Operaciones lógicas básicas . . . 3
1.2.1. Disyunción $p \vee q$. . . . 3
1.2.2. Conjunción $p \wedge q$. . . . 3
1.2.3. Negación $\neg p$. . . . 4
1.3. Proposiciones y tablas de verdad . . . 4
1.3.1. Tautologías y contradicciones . . . 5
1.3.2. Equivalencia lógica . . . 5
1.3.3. Álgebra de proposiciones . . . 6
1.4. Proposiciones condicionales y bicondicionales . . . 7
1.5. Deducciones lógicas . . . 8
1.5.1. Reglas de inferencia . . . 9
1.6. Lógica de predicados . . . 10
1.6.1. Funciones proposicionales, cuantificadores . . . 10
1.6.2. Negación de funciones proposicionales y cuantificadores . . . 10
1.7. Ejercicios . . . 11

Capítulo 1

Lógica

1.1. Proposiciones y declaraciones compuestas

Una proposición o declaración es una afirmación declarativa que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. A modo de ejemplo, consideramos las siguientes:

1. España está en Europa.
2. El hielo no flota en el agua.
3. 1+1=2.
4. 1+1=3.
5. ¿De dónde vienes?
6. Cómete la cena.

Sólo las cuatro primeras son proposiciones o declaraciones. De ellas, las número 1 y 3 son verdaderas y las otras dos falsas.

Las proposiciones anteriores se caracterizan por su simplicidad, pero es frecuente tener proposiciones más complejas. Estas proposiciones que no hay forma de descomponerlas en otras más pequeñas las llamaremos primitivas. Grosso modo, podemos decir que una proposición es compuesta si esta formada por varias simples o primitivas, junto con conectores o nexos que las ligan, y que veremos posteriormente.

Por ejemplo, son compuestas las proposiciones *España está en Europa y el hielo no flota en el agua* o *1+1=2 o España está en Europa*. Como puede verse, los conectores o nexos que empleamos aquí son *y* y *o*. No está clara la veracidad o falsedad de estas proposiciones compuestas, al contrario de lo que intuitivamente habíamos decidido con las simples o primitivas. Gran parte de este tema estará dedicado a decidir precisamente esta cuestión.

En general, utilizaremos las letras p, q, r para denotar las proposiciones primitivas o compuestas. Podemos decir por ejemplo, sean p y q las proposiciones *2+2=4* y *la sangre es roja*, ambas verdaderas salvo la segunda para miembros de casas reales.

1.2. Operaciones lógicas básicas

Hay tres operaciones lógicas básicas, la conjunción *y*, la disyunción *o* y la negación *no*. En un lenguaje más formal, dadas dos proposiciones p y q, se define la conjunción $p\ o\ q$ como $p \vee q$, la disyunción $p\ y\ q$ como $p \wedge q$, y la negación de p como $\neg p$. Nótese que las proposiciones p y q pueden ser primitivas o complejas, lo único que necesitamos saber es si son verdaderas o falsas. Vamos a estudiar cómo decidir si las proposiciones complejas derivadas del uso de estas operaciones lógicas son verdaderas o falsas mediante el uso de las tablas de verdad.

1.2.1. Disyunción $p \vee q$.

La veracidad o falsedad de la disyunción depende de la veracidad o falsedad de las proposiciones que la forman. Ambas proposiciones p y q pueden ser verdaderas o falsas, por lo que tenemos cuatro posibles casos. La proposición $p \vee q$ será cierta si al menos una de las proposiciones que la forman son ciertas, y sólo será falsa en caso de que ambas proposiciones p y q lo sean. Por ejemplo *la tierra es un planeta o 2+2=5* es verdadera ya que una de las proposciones que la componen es verdadera.

Asignando el símbolo 0 a la falsedad de una proposición y el símbolo 1 a la veracidad, podemos construir la tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Dichos símbolos 0 y 1 reciben el nombre de constantes atómicas, o simplemente átomos.

Como puede apreciarse, en la tabla se resumen todos los casos que permiten estudiar de forma sencilla cuándo la conjunción es verdadera o falsa. Como veremos, estas tablas son de utilidad a la hora de determinar la misma cuestión para proposiciones complejas con más operaciones lógicas.

Nótese que en español la conjunción *o* no siempre sigue el patrón indicado anteriormente. Por ejemplo, la proposición *dormiré bien o mal* excluye la posibilidad de que ambas proposiciones *dormir bien* y *dormir mal* sean ciertas a la vez. Estos problemas lingüisticos son de importancia y no deben despistarnos en la utlización de la conjunción lógica.

1.2.2. Conjunción $p \wedge q$.

La conjunción será cierta sólo cuando ambas proposiciones p y q lo sean. Por ejemplo, *la tierra es un planeta o 2+2=5* es falsa ya que $2 + 2 = 4$. Por lo tanto su tabla de verdad es de la forma

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.2.3. Negación $\neg p$.

La negación será verdadera si p es falsa y viceversa. *La tierra no es un planeta* es falsa ya que es la negación de *la tierra es un planeta* que es cierta. Su tabla de verdad es

p	$\neg p$
1	0
0	1

1.3. Proposiciones y tablas de verdad

Dada una proposición construida a partir de otras proposiciones p, q,...que serán verdaderas o falsas, y los operadores lógicos básicos $\vee$, $\wedge$ y $\neg$, la veracidad o falsedad de la proposición construida dependerá de cómo sean las proposiciones que las componen. Para analizarlas, se construyen tablas de verdad, que son de gran ayuda en esta cuestión. A modo de ejemplo, consideremos la proposición

$$\neg(p \vee \neg q),$$

donde los paréntesis juegan el mismo papel que en el cálculo ordinario. La tabla de verdad será la siguiente

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

No obstante, la tabla de verdad será aquella que nos de la veracidad de la proposición a partir de los valores de p y q, es decir

p	q	$\neg(p \vee \neg q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Es decir, la proposición será cierta si p y q son verdaderos o falsos a la vez, o si p es verdadero y q falso.

En general, por si la proposición consta de n proposiciones p, q, r,... harán falta 2^n filas en la tabla de verdad, lo que puede hacer su elabboración tediosa. Por otro lado, para no poner paréntesis en exceso, se establece una jerarquía a la hora de aplicar los conectores lógicos, de forma que $\neg$ tiene precedencia (se aplica en primer lugar) sobre $\wedge$ que a su vez tiene precedencia sobre $\vee$. De esta forma, la proposición $\neg p \vee q$ significa $(\neg p) \vee q$ y no $\neg(p \vee q)$.

A partir de ahora, vamos a representar por $P(p, q, ...)$ una proposición compuesta por las proposiciones $p, q, ...$

1.3.1. Tautologías y contradicciones

Las tautologías son proposiciones que siempre son verdaderas, es decir, al terminar de construir su tabla de verdad obtenemos únicamente el átomo 1 en la columna final. Las contradicciones son siempre falsas, con 0 en la columa final de su tabla. En otras palabras, la validez o falsedad no depende de las proposiciones que las forman. Por ejemplo

$$p \vee \neg p$$

es una tautología ya que su tabla de verdad es

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

mientras que

$$p \wedge \neg p$$

es una contradicción pues

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Tautologías y contradicciones no aportan conocimiento nuevo. Por ejemplo, la tautología *me gustan las cerezas o no me gustan las cerezas* no aporta realmente ningún valor añadido que no supiéramos ya. Esto motiva el siguiente resultado.

Theorem 1 ***Principio de sustitución***. *Si $P(p_1, q_1, ...)$ es una tautología, también lo es $P(p, q, ...)$ para cualesquiera proposiciones arbitrarias $p, q, ...$.*

1.3.2. Equivalencia lógica

Decimos que dos proposiciones $P_1(p, q, ...)$ y $P_2(p, q, ...)$ son equivalentes, y lo denotaremos por $P_1(p, q, ...) \equiv P_2(p, q, ...)$, si tienen tablas de verdad idénticas. Por ejemplo, la tabla de verdad de

$$\neg(p \wedge q)$$

se construye

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

por lo que su tabla de verdad es

p	q	$\neg(p \wedge q)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Por otro lado, para contruir la tabla de verdad de la proposición

$$\neg p \vee \neg q$$

hacemos

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

y su tabla de verdad es

p	q	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Por lo tanto, podemos afirmar que ambas son equivalentes, esto es

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

1.3.3. Álgebra de proposiciones

La noción de equivalencia de proposiciones permite establecer leyes que permiten simplificar proposiciones cuando estas son largas. Vamos a denotar por $\mathbf{0}$ una proposición que siempre es falsa y por $\mathbf{1}$ una que siempre es verdadera. Para proposiciones p, q, y r, el álgebra de proposiciones se resume en la siguiente tabla:

Leyes idempotentes.	$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
Leyes asociativas.	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
Leyes conmutativas.	$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Leyes distributivas.	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Leyes de identidad.	$p \vee \mathbf{0} \equiv p$ y $p \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$	$p \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$ y $p \wedge \mathbf{1} \equiv p$
Ley de doble negación.	$\neg\neg p \equiv p$	
Leyes de complementos.	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$ y $\neg \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{0}$ y $\neg \mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$
Leyes de DeMorgan.	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

La comprobación de estas leyes de equivalencias se hace a través de sus tablas de verdad. Por ejemplo, tomamos

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

Para construir la tabla de verdad del término de la derecha tomamos

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

por lo que su tabla de verdad es

p	q	$\neg(p \vee q)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Para el término de la derecha construimos

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

siendo entonces su tabla de verdad

p	q	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

probando así la ley de equivalencia.

Por ejemplo, aplicando el álgebra de proposiciones de la tabla anterior, vamos a comprobar que $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$. Aplicando la ley de DeMorgan, tenemos que

$$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q),$$

por la ley distributiva

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q),$$

por la ley de complementos

$$\neg p \wedge (\neg q \vee q) \equiv \neg p \wedge \mathbf{1},$$

y por las leyes de identidad

$$\neg p \wedge \mathbf{1} \equiv \neg p,$$

con lo que queda probada la equivalencia.

1.4. Proposiciones condicionales y bicondicionales

Existen dos conectivos lógicos más, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, que se leen implica y si y sólo si, respectivamente. Por ejemplo, si p es la proposición *llueve* y q *las calles se mojan*, se tiene que $p \rightarrow q$ ya que si llueve las calles se mojan, pero no $p \leftrightarrow q$ ya que las calles pueden estar mojadas sin necesidad de que llueva.

La tabla de verdad de $p \to q$ es

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Puede comprobarse que $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Además, $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$. Este es el fundamento del método de demostración por reducción al absurdo. Nótese que la tabla de verdad de este último es

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

esto es

p	q	$\neg q \to \neg p$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

El conector lógico $p \leftrightarrow q$ tiene tabla de verdad

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Puede comprobarse que $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$. Además, como $p \leftrightarrow q$ consiste en $p \to q$ y $q \to p$, se tiene que $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

Es preciso darse cuenta que estos conectores son útiles para simplificar proposiciones compuestas ya que como hemos visto, son equivalentes a proposiciones complejas utilizando los tres primeros conectores lógicos estudiados.

1.5. Deducciones lógicas

En matemáticas, son frecuentes las expresiones *si n es un numero natural, entonces $2n$ es par* o *$n^2 = n$ si y solo si $n = 0$ o 1*. Este es modo muy habitual de proceder en matemáticas y consiste en dar por válidas varias proposiciones, que se dicen hipótesis o premisas, para ver si se puede llegar a una conclusión o tesis.

Dadas n premisas $p_1, ..., p_n$, decimos que conducen a q mediante un argumento válido si q es verdadera siempre que las premisas $p_1, ..., p_n$ sean verdaderas. Como $p_1, ..., p_n$ son simultáneamente verdaderas si y sólo si $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ es verdarera, se tiene que un argumento es válido si $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \to q$ es una tautología. Por ejemplo, de la familia de premisas $\{p \to q, p\}$ podemos deducir que q es verdadera ya que su tabla de verdad es

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Un argumento no válido se llama falacia. Por ejemplo, el argumento o deducción de la familia de premisas $\{p \to q, q\}$ deducimos p es una falacia ya que su tabla de verdad es

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$(p \to q) \wedge q \to p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

que no es una tautología.

Por ejemplo, un principio fundamental del razonamiento lógico es *si p implica q y q implica r, entonces p implica r*. Veamos que es un razonamiento válido a través de la tabla de verdad de $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ que se trata de una tautología.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

1.5.1. Reglas de inferencia

Otra manera de abordar este tema es, suponendo que determinadas premisas son ciertas, demostrar la validez de la tesis. En este caso, a la hora de hacer las tablas de verdad únicamente tenemos que tener en cuenta los valores 1 en las proposiciones que son ciertas. Se reduce así el tamaño de la tabla de verdad.

Por ejemplo, sabiendo que $p \wedge r$ y $p \to q$ son verdad, deducir la veracidad de q. Como $p \wedge r$

es verdad, tanto p como r son ciertas, y como $p \rightarrow q$ es cierta, lo es q. La tabla de verdad es

p	q	r	$p \wedge r$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge r) \wedge (p \rightarrow q)$	$((p \wedge r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

Como vemos es una tautología, por lo que es un razonamiento válido, pero para darse cuenta sería suficiente ver la primera línea de la tabla de verdad que es donde las proposiciones $p \wedge r$ y $p \rightarrow q$ son verdad.

1.6. Lógica de predicados

1.6.1. Funciones proposicionales, cuantificadores

En la proposición *n es un número natural menor que 5*, que a su vez puede expresarse como la función proposicional $P(n) :=$*n menor que 5*, de manera que $P(1)$ es verdadera, pero $P(6)$ es falsa. En este caso los números naturales constituyen el dominio de P y el conjunto de verdad T_P será el subconjunto del dominio de forma que si $n \in T_P$, entonces $P(n)$ es verdad. En este ejemplo $T_P = \{1, 2, 3, 4\}$. Estas funciones proposicionales pueden tener varios argumentos, es decir, ser de la forma $P(x_1, ..., x_k)$.

En este contexto cobran sentido los cuantificadores para todo o cuantificador universal $\forall$ y existe o cuantificador existencial $\exists$. Relacionada con el ejemplo anterior, podemos escribir *$\forall n$ número natural mayor que 4 $P(n)$ es falsa*, *$\exists n$ número natural tal que $P(n)$ es verdadera*. Estas funciones proposicionales se combinan con los conectores lógicos estudiados anteriormente, y dan lugar a una lógica más rica y flexible.

Así, dada una función proposicional $P(x)$ definida sobre un conjunto X, que se llama conjunto universo, la expresión $\forall x\ P(x)$ se lee *para todo x en X la función proposicional $P(x)$ es verdadera*, que es equivalente a $T_P = X$. Démonos cuenta de que $P(x)$, al ser una proposición abierta carece del valor 0 o 1, pero $\forall x\ P(x)$ tiene el valor 1.

La expresión $\exists x\ P(x)$ se lee *existe x en X tal que la función proposicional $P(x)$ es verdadera*. En este caso sabemos que T_p contiene al menos un elemento y $\exists x\ P(x)$ toma el valor 1.

1.6.2. Negación de funciones proposicionales y cuantificadores

Como hemos comentado anteriormente, la funciones proposicionales se combinan con la lógica proposicional para dar resultados más ricos.

Dadas dos funciones proposicionales P y Q definidas sobre el mismo conjunto X la proposición $P(x) \wedge Q(x)$ es verdadera cuando $P(x)$ y $Q(x)$ lo sean. Similarmente, la proposición

$P(x) \vee Q(x)$ es verdadera cuando $P(x)$ o $Q(x)$ lo sean. Con la negación, hay que tener un poco más de cuidado.

La negación de la proposición $\forall x\ P(x)$ es $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ \neg P(x)$. La existencia de un elemento $x_0 \in X$ tal que $P(x_0)$ es falsa constituye un contraejemplo para la proposición $\forall x\ P(x)$. La existencia de un contraejemplo hace que la proposición $\forall x\ P(x)$ pase a tener el valor 0.

Por otra parte, la negación de la proposición $\exists x\ P(x)$ es $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \neg P(x)$. A menudo $\neg\exists$ suele escribirse como $\nexists$.

Estas negaciones son la leyes de DeMorgan para cuantificadores y pueden dar lugar a confusión cuando las funciones proposicionales tienen más de un argumento. Por ejemplo, si $P(x,y)$ es una función proposicional donde x toma valores en un conjunto X e y lo hace en otro conjunto Y, la negación de $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$, que se lee *para todo x existe y tal que $P(x,y)$ es cierta*, sería

$$\neg(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) \equiv \exists x \neg(\exists y\ P(x,y)) \equiv \exists x\ \forall y \neg P(x,y),$$

que se leería *existe x tal que para todo y $P(x,y)$ es falsa.*

1.7. Ejercicios

1. Consideremos las proposiciones p *me gusta comer* y q *me gusta beber*. Proporcionar una expresión coloquial sencilla para las proposiciones $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \vee \neg q$, $\neg p \wedge q$.

2. Encontrar la tabla de verdad de $\neg p \wedge q$.

3. Encontrar la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $(p \wedge q) \rightarrow p$.
   b) $(p \vee q) \rightarrow q$.
   c) $p \rightarrow (q \vee r)$.
   d) $p \leftrightarrow (p \vee q) \leftrightarrow q$.
   e) $(p \vee q \wedge r) \rightarrow \neg p \vee q$.
   f) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q \vee r)$.

4. Comprobar que $p \vee \neg(p \wedge q)$ es una tautología.

5. Demostrar que las proposiciones $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes.

6. Dada la proposición $p \rightarrow q$, ¿existirá alguna de entre la siguiente lista que sea lógicamente equivalente? La lista es $q \rightarrow p$, $\neg p \rightarrow \neg q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$ que se denominan recíproca, inversa y contrapositiva, respectivamente.

7. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes?

   a) $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee q$.
   b) $p \rightarrow (\neg q)$ y $\neg p \vee \neg q$.

c) $p \land q \lor r \land q$ y $(p \land r) \lor q$.

d) $p \lor q \land r \lor q$ y $(p \lor r) \land q$.

e) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ y $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$.

f) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ y $(p \rightarrow q) \rightarrow r$.

8. Escribir la negación de las siguiente poposiciones de la forma más sencilla posible.

    a) Si ella trabaja, ganará dinero.

    b) Él nada si y solo si el agua está tibia.

    c) Si beben, entonces ellos no conducen.

9. Demostrar que el argumento $\{p \rightarrow q, \neg p\}$ implica $\neg q$ es una falacia.

10. Determinar la validez del argumento $\{p \rightarrow q, \neg p\}$ implica $\neg p$.

11. Demostrar que el argumento $\{p \rightarrow \neg q, r \land q, r\}$ implica $\neg p$.

12. Demostrar que $(p \lor q \land \neg r) \land (p \land q)$ es equivalente a $p \land q$.

13. Demostrar que $(p \lor q \land \neg r) \land (p \lor q)$ es equivalente a $p \lor (q \land \neg r)$.

14. Demostrar que $(p \lor q \land \neg r) \lor (p \lor q)$ es equivalente a $p \lor q$.

15. Comprobar que la proposición $(p \land q) \land \neg(p \lor q)$ es una contradicción o falacia.

16. Deducir mediante razonamientos de inferencia lógica las siguientes cuestiones. En caso de no poderse, explicar porqué no.

    a) Sabiendo que $p \rightarrow q \lor r$, p, y $\neg r$ son verdad, deducir q.

    b) Sabiendo que $r \lor q \rightarrow r$ y p son verdad, deducir r.

    c) Sabiendo que $r \lor q \rightarrow p$, $\neg r$, y $q \lor p$ son verdad, deducir p.

17. Eliminar el símbolo $\leftrightarrow$ en la fórmula $(p \land q \leftrightarrow p \lor \neg r) \lor p$.

18. Eliminar las implicaciones en la fórmula o expresión $(p \land q \rightarrow p \lor \neg r) \land (p \lor \neg r \rightarrow p \land q) \lor p$.

19. Demostrar r a partir de las premisas:

    a) $p \rightarrow q$.

    b) $q \rightarrow r$.

    c) p.

20. Demostrar $p \land q \rightarrow r$ a partir de la premisa $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

21. Demostrar $\neg q$ a partir de las siguientes premisas:

a) $p \to \neg r$.

b) $q \to r$.

c) $s \to \neg q$.

d) $p \vee s$.

22. Demostrar $\neg p$ a partir de las siguientes premisas:

a) $p \to q \vee r$.

b) $\neg q \wedge s$.

c) $r \to \neg s$.

23. Demostrar $\neg(q \leftrightarrow s)$ a partir de las siguientes premisas:

a) $(s \vee q \leftrightarrow r \vee r) \to q \vee s$.

b) $\neg((((s \to p) \wedge r \wedge s) \wedge (\neg s \vee r) \wedge (\neg(p \to s) \to \neg p))$.

c) $s \to r$.

d) $\neg\neg(p \leftrightarrow q)$.

e) $((s \leftrightarrow 0) \to \neg((q \vee r) \vee q \wedge r)) \wedge (p \to r \vee s)$.

24. Demostrar $\neg(r \vee p)$ a partir de las siguientes premisas:

a) $(r \leftrightarrow p) \vee (q \leftrightarrow p)$.

b) $s \to r \leftrightarrow p \wedge q \to r$.

c) $\neg((\neg(p \to s) \leftrightarrow s \vee q) \wedge r)$.

d) $(\neg q \to q) \vee q$.

e) $\neg((q \leftrightarrow s) \wedge p)$.

25. Demostrar $p \wedge q$ a partir de las siguientes premisas:

a) $(r \to r \leftrightarrow s) \to (r \leftrightarrow q)$.

b) $q \to q \leftrightarrow p \vee r$.

c) $(s \wedge p \to \mathbf{0} \wedge \mathbf{1}) \to (r \wedge \mathbf{1} \leftrightarrow \neg\mathbf{1})$.

d) $p \to s$.

e) $(((q \to p \leftrightarrow s) \vee (r \leftrightarrow r) \vee r \leftrightarrow \neg(((\neg q \leftrightarrow q \wedge q) \vee 0 \wedge 1) \vee \neg(s \to r))) \vee (s \to r) \wedge \neg r) \vee \neg(p \to s \leftrightarrow \neg q) \vee (r \vee p \to q)$.

26. Demostrar $s \leftrightarrow r$ a partir de las siguientes premisas:

a) $\neg((1 \vee p) \wedge q \leftrightarrow (r \leftrightarrow 0) \to p \wedge r)$.

b) $\neg(p \wedge q)$.

c) $(r \to (r \vee r) \vee q) \wedge s \to (s \to r) \vee s \wedge p$.

d) $\neg\neg((q \vee s) \wedge q \wedge s \leftrightarrow \neg p \to p) \to q \vee q$.

e) $r \to \neg p$.

27. Determinar la valiez del siguiente argumento: si 7 es menor que 4, entonces 7 no es número primo, 7 no es menor que 4, entonces 7 es un número primo.

28. Dado el conjunto $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determinar el veracidad de las siguientes proposiciones:

    a) $\exists x(x + 3 = 10)$.

    b) $\forall x(x + 3 < 10)$.

    c) $\exists x(x + 3 < 10)$.

    d) $\forall x(x + 3 \leq 7)$.

29. Dado el conjunto universo $X = \{1, 2, 3\}$ ene l que toman sus valores dos variableas, x e y, deteminar la veracidad de las siguientes proposiciones:

    a) $\exists x\ \forall y\ (x^2 < y + 1)$.

    b) $\forall x\ \exists y\ (x^2 + y^2 < 12)$.

    c) $\forall x\ \forall y\ (x^2 + y^2 < 12)$.

30. Negar cada una de las siguientes proposiciones:

    a) $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$.

    b) $\exists x\ \exists y\ P(x, y)$.

    c) $\exists x\ \forall y\ \forall z\ P(x, y, z)$.

31. Deducir $\exists x\ P(x) \wedge Q(x)$ a partir de las siguientes premisas:

    a) $\forall x\ P(x) \leftrightarrow Q(x)$.

    b) $P(a) \vee Q(b)$.

32. Deducir $\exists x\ Q(x)$ a partir de las siguientes premisas:

    a) $\forall x\ \exists y\ P(y) \to Q(x)$.

    b) $P(a) \vee Q(b)$.

33. Deducir $\exists x\ Q(x)$ a partir de las siguientes premisas:

    a) $\forall x\ P(x) \to Q(x) \wedge R(x)$.

    b) $\forall x\ P(x) \leftrightarrow R(x)$.

c) $R(a)$.

34. Deducir $\forall x\ \exists y\ P(y) \rightarrow Q(x)$ a partir de las siguientes premisas:

    a) $\exists x\ \neg(Q(x) \rightarrow P(x))$.

    b) $\forall x\ Q(x)$.

35. Deducir $\exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$ a partir de las siguientes premisas:

    a) $\forall x\ P(x)$.

    b) $\exists x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x))$.

    c) $Q(b)$.

Bibliografía

[1] S. Lipschutz y M. L. Lipson, Matemáticas discretas, McGraw-Hill.

[2] M .Díaz Toca, F. Guil Asensio y L. Marín, Matemáticas para la computación, Ed. Diego Marín.