Fundamentos de Inferencia Estadística
Problemas Examen Mayo 2025

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Sea X una población con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{4}{\theta}x^3 e^{-\frac{x^4}{\theta}} \text{ para } x \in (0, +\infty),$$

donde θ es un parámetro desconocido estrictamente positivo. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de X.

a) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de θ.

Dada una muestra $X_1, \dots, X_n$, la función de verosimilitud es:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{4}{\theta^4} X_i^3 e^{-\frac{X_i}{\theta}} = \left(\frac{4}{\theta^4}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^3 e^{-\frac{X_i}{\theta}}$$

Log-verosimilitud:

$$\ell(\theta) = n\log(4) - 4n\log(\theta) + 3\sum_{i=1}^{n}\log X_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Derivamos:

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{4n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Igualamos a cero:

$$-\frac{4n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \implies \theta = \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{4}\cdot\bar{X} = \frac{\bar{X}}{4}$$

b) Obtener su distribución en el muestreo.

c) Estudiar su sesgo y su error cuadrático medio.

d) Obtener un intervalo de confianza para θ con un nivel de confianza de $100(1-\alpha)\%$.

e) Obtener el test uniforme de máxima potencia y extensión α para el contraste

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

frente a

$$H_1 : \theta > \theta_0.$$