Fundamentos de Inferencia Estadística

Problemas Examen Mayo 2025

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Sea X una población con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{4}{\theta}x^3 e^{-\frac{x^4}{\theta}} \text{ para } x \in (0, +\infty),$$

donde θ es un parámetro desconocido estrictamente positivo. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de X.

a) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de θ.

1) Función de verosimilitud:

Dada una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$, la función de verosimilitud es:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) = \left(\frac{4}{\theta}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i^3 \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^4}{\theta}}$$
$$L(\theta) = \left(\frac{4}{\theta}\right)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} X_i^3\right) \cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum X_i^4}$$

2) Log-verosimilitud

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = n\log 4 - n\log\theta + 3\sum \log X_i - \frac{1}{\theta}\sum X_i^4$$

3) Derivada de la log-verosimilitud:

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta}\sum X_i^4$$

4) Iugalamos a cero:

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum X_i^4 = 0 \implies \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^4$$

Estimador de máxima verosimilitud:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^4$$

b) Obtener su distribución en el muestreo.

Queremos la **distribución muestral** de $\hat{\theta}$. Para ello, veamos cómo se distribuye $Y = X^4$.

1) **Cambio de variable:**

Sea $Y = X^4 \implies X = Y^{\frac{1}{4}} \implies \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{4}Y^{-\frac{3}{4}}$

$$f_Y(y) = f_X(y^{\frac{1}{4}}) \cdot \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^{\frac{1}{4}}\right| = \frac{4}{\theta} \cdot (y\frac{1}{4})^3 \cdot e^{-\frac{y}{\theta}} \cdot \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}\cancelto{1}{y^{(\frac{3}{4}-\frac{3}{4})}}e^{-\frac{y}{\theta}}, \quad y > 0$$

Entonces:

$$Y = X^4 \sim \text{Exponencial}(\theta)$$

Como $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$, donde $Y_i \sim \text{Exp}(\theta)$:

$$\sum Y_i \sim \text{Gamma}(n, \theta) \implies \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum Y_i \sim \text{Gamma}(n, n\theta)$$

Ditribución muestral:

$$\hat{\theta} \sim \text{Gamma}(n, n\theta)$$

c) Estudiar su sesgo y su error cuadrático medio.

- Esperanza:

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta \implies \text{sesgo} = 0$$

- Varianza:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n}$$

- ECM:

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{sesgo})^2 = \frac{\hat{\theta}^2}{n}$$

d) Obtener un intervalo de confianza para θ con un nivel de confianza de $100(1-\alpha)\%$.

Como:

$$\hat{\theta} \sim \text{Gamma}(n, n\theta) \implies \frac{\hat{n}\theta}{\theta} \sim \chi^2_{2n}$$

Entoces, usando cuantiles de la chi-cuadrado:

$$\Pr\left(\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{n\hat{\theta}}{\theta} \leq \chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$
$$\Pr\left(\frac{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}{n\hat{\theta}} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}}{n\hat{\theta}}\right) = 1-\alpha$$
$$\Pr\left(\frac{n\hat{\theta}}{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \theta \leq \frac{n\hat{\theta}}{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza:

$$\left[\frac{n\hat{\theta}}{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{n\hat{\theta}}{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

Este es el intervalo de confianza para θ con nivel de confianza $100(1-\alpha)\%$.

e) Obtener el test uniforme de máxima potencia y extensión α para el contraste

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

frente a

$$H_1 : \theta > \theta_0.$$

Queremos testear:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta > \theta_0$$

Sabemos que:

$$\frac{n\hat{\theta}}{\theta} \sim \chi^2_{2n} \text{ bajo } H_0$$

Por lo tanto, la regla de decisión es:

Rechazar H_0 si:

$$\frac{n\hat{\theta}}{\theta_0} > \chi^2_{2n,1-\alpha} \implies \hat{\theta} > \frac{\theta_0}{n} \cdot \chi^2_{2n,1-\alpha}$$

Es decir:

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } \hat{\theta} > \frac{\theta_0}{n} \cdot \chi_{2n,1-\alpha}$$