1) Contestar razonadamente las siguientes preguntas:

a) Definir con precisión qué se entiende por el plano tangente de una función $z = f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) de su dominio. Como aplicación, obtener el valor de α de forma que la función $f(x, y) = \alpha x^2 + y^2 - 2x - 1$ tenga a $2x - 2y + z = 0$ como plano tangente en el punto $(1, 1)$.

El plano tangen de una función $z = f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) del dominio se define como el plano que mejor aproxima a la superficie $z = f(x, y)$ en ese punto. Este plano está dado por la ecuación:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - 0).$$

Queremos que el plano tangente de la función $f(x, y) = \alpha x^2 + y^2 - 2x - 1$ en el punto $(1, 1)$ sea:

$$2x - 2y + z = 0.$$

Las derivadas parciales de $f(x, y)$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x^2 + y^2 - 2x - 1) = 2\alpha x - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha x^2 + y^2 - 2x - 1) = 2y$$

En $(1, 1)$ evaluamos:

$$f(1, 1) = \alpha \cdot 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = \alpha + 1 - 2 - 1 = \alpha - 2\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2\alpha - 2\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2$$

La ecuación del plano tangente en $(1, 1, f(1, 1))$ es:

$$\begin{aligned} z - f(1, 1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) \\ z - \alpha + 2 &= (2\alpha - 2)x - (2\alpha - 2) + 2y - 2 \\ z &= (2\alpha - 2)x + 2y - 2\alpha + 2 - 2 + \alpha - 2 \\ z &= (2\alpha - 2)x + 2y - \alpha - 2 \\ z &= 2\alpha x - 2x + 2y - \alpha - 2 \end{aligned}$$

El plano tangente debe coincidir con $2x - 2y + z = 0$, que puede reescribirse como:

$$z = -2x + 2y$$

Companado términos:

$$(2\alpha - 2)x = -2x \longrightarrow 2\alpha - 2 = -2 \longrightarrow 2\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = 0.$$

El valor de α para que el plano tangente sea $2x - 2y + z = 0$ en el punto $(1, 1)$ es:

$$\boxed{\alpha = 0}$$

b) Determinar si el conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > 1\}$$

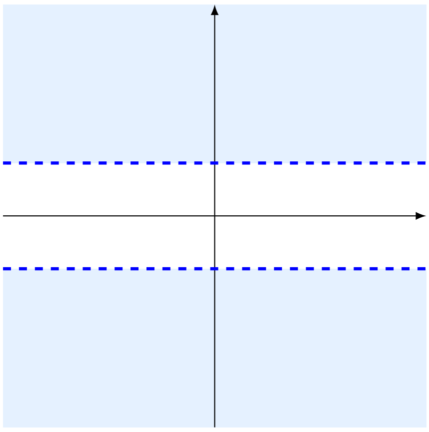
es cerrado o abierto $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea y, al mismo tiempo, calcular el interior de clausura, la frontera y los puntos de acumulación.

El conjunto dado es:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > 1\}.$$

Esto representa los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ cuya coordenada y satisface $y > 1$ o $y < -1$.

El conjunto B es abierto porque para todo punto $\mathbf{x} \in B$ existe un número real positivo $\mathcal{E} > 0$ de manera que la bola abierta $A(\mathbf{x}, \mathcal{E})$ está contenida completamente en B.



El interior del conjunto B es el conjunto de puntos que tienen un vencidad completamente contenida en B. En este caso, el interior es todo el conjunto B ya que todos los puntos en B cumplen $y^2 > 1$ y tienen una vencidad contenida en B

c) Demostrar que para cualquier función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 se cumple que $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = 0$.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función escalar de clase C^2, es decir, sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas. Queremos demostrar que el rotacional del gradiente de $f$es siempre cero:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

El gradiente de f es:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

El rotacional de ∇f es:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$

Como f es de clase C^2, por el **teorema de Schwarz** las derivadas parciales mixtas son iguales y por eso:

$$\mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) = (0, 0, 0)$$

Dado que todas las componentes del rotacional son cero, tenemos:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0.$$

2) Consideramos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 + k(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \sqrt{2} & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

donde k es un número real. Encontrar el valor de k de forma que $f(x, y)$ es una función continua.

Para que $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$ debe cumplir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 + k(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^3 + k(x^2+m^2x^2)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}m^3 + k\cancel{x^2}(1+m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x}{1+m^2} + k = k$$

Dado que el límite de $f(x,y)$ depende únicamente de k, entonces, para que la función sea continua en el punto $(0,0) \longrightarrow \boxed{k = \sqrt{2}}$.

3) Analizar si la ecuación $e^{y^2} + xy - 1 = 0$ define o no implícitamente a y como función de x en el punto $(1,0)$. En caso afirmativo obtener el polinomio de Taylor de grado tres centro en $x = 1$ de dicha función $y(x)$.

Para que y sea una función implícita de x debe cumplir las siguientes condiciones:

- $f(1,0) = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) \neq 0$

Evaluamos la función $f(x,y)$:

$$f(1,0) = e^{0^2} + 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Evaluamos la derivada parcial de $f(x,y)$ respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{y^2} + x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0 + 1 = 1 \neq 0.$$

Dado que cumple las dos condiciones, la variable y puede definirse como una función implícita de x de forma que $y(1) = 0$.

El polinomio de Taylor de grado tres es:

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

$$y(1) = 0$$

$$y'(x) = 2y(x)y'(x)e^{y(x)^2} + y(x) + xy'(x) = 0 \longrightarrow y'(1) = 0 + 0 + xy'(1) = 0 \longrightarrow y'(1) = 0$$

$$y''(x) = (4y(x)^2y'(x)^2 + 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x))e^{y(x)^2} + 2y'(x) + xy''(x) = 0 \longrightarrow y''(1) = 0 + 0 + xy''(1) = 0 \longrightarrow y''(1) = 0$$

$$\begin{aligned} y'''(x) = &(8y(x)y'(x)^3 + 8y(x)^2y'(x)y''(x) + 4y'(x)y''(x) + 2y'(x)y''(x) \\ &+ 2y(x)y'''(x) + 2y(x)y'''(x)(4y(x)^2y'(x)^2 + y'(x)^2 + 2y(x)y''(x)))e^{y(x)^2} + 3y''(x) + xy'''(x) = 0 \longrightarrow y'''(1) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{T_3(x) = 0}$$

4) Haciendo uso de la fórmula de Green, calcular la integral de línea

$$\int_\gamma (e^x \sin(y) - y)\, \mathrm{d}x + (e^x \cos(y) - 1)\, \mathrm{d}y,$$

donde γ es la semicircunferencia inferior de radio 1 y centro $(1,0)$ recorrida de $(2,0)$ a $(0,0)$.

La fórmula de Green establece que para un campo vectorial $\mathbf{F} = (P,Q)$, se cumple:

$$\int_\gamma P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A,$$

donde R es la región delimitada por γ (cerrada al agregar la línea recta $(2,0) \to (0,0)$).

De la integral, identificamos:

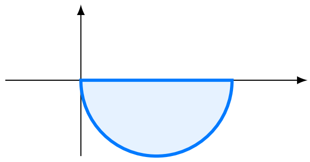
$$P(x,y) = e^x \sin(y) - y, \quad Q(x,y) = e^x \cos(y) - 1.$$

Calculamos las derivadas necesarias:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos(y)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos(y) - 1$$

Entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = e^x \cos(y) - e^x \cos(y) + 1 = 1$$



La integral se convierte en

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^1 1 \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \cdot [\theta]_{\pi}^{2\pi} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

5) Calcular el volumen del cono de helado definido por el cono $x^2 + y^2 = 4z^2$, $0 \leq z \leq 1$, y el casquete superior de las esfera dado por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4, z \geq 1$.

- Volumen del cono:

  La ecuación del cono $x^2 + y^2 = 4z^2$ indica que el radio en cualquier z es:

  $$r = 2z$$

  El volumen del cono se calcula como:

  $$V_{\text{cono}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2z} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = \frac{4\pi}{3}$$

  $$\int_0^{2z} r \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2z} = \frac{(2z)^2}{2} = 2z^2$$
  $$\int_0^{2\pi} 2z^2 \, \mathrm{d}\theta = 2z^2 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 4\pi z^2$$
  $$\int_0^1 4\pi z^2 \, \mathrm{d}z = 4\pi \int_0^1 z^2 \, \mathrm{d}z = \pi \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

- Volumen del casquete esférico superior:

$$V_{\text{casquete}} = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{16\pi}{3}$$

Entonces:

$$V_{\text{total}} = V_{\text{cono}} + V_{\text{casquete}} = \frac{4\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} = \boxed{\frac{20}{3}}$$