Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera

(a nosotros por suerte nos pasa)

WUOLAH

No si antes decirte
Lo mucho que te voy a recordar

Pero me voy a graduar.
Mañana mi diploma y título he de pagar

Llegó mi momento de despedirte
Tras años en los que has estado mi lado.

Siempres me has ayudado
Cuando por exámenes me he agobiado

Oh Wuolah wuolitah
Tu que eres tan bonita

CÁLCULO I — BLOQUE I

Tema 1. Números reales, sucesiones y series

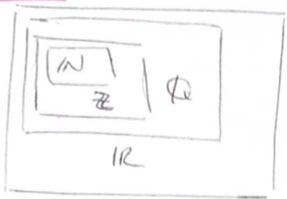
1.1 Propiedades básicas de los números reales

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ naturales

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ enteros

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$ racionales

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ reales



→ Propiedades; si $x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces

	SUMA	PRODUCTO
CONMUTATIVA	$x+y = y+x$	$x \cdot y = y \cdot x$
ASOCIATIVA	$x+(y+z) = (x+y)+z$	$x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$
ELEMENTO NEUTRO	$x+0 = x$	$x \cdot 1 = x$
ELEMENTO INVERSO	$x+(-x) = 0$	$x \cdot x^{-1} = 1$
DISTRIBUTIVA	$x(y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	

* un conjunto de propiedades se llama "cuerpo". ($\mathbb{R}$: cuerpo de los nº reales)

→ Propiedades en orden

a, orden total ; si $x, y \in \mathbb{R}$ — $\begin{cases} \text{o bien } x \leq y \\ \text{o bien } y \leq x \end{cases}$

si $(x \leq y)$ y $(y \leq x) \Longrightarrow \boxed{x = y}$

b, propiedad transitiva ; si $(x \leq y)$ y $(y \leq z)$ entonces $\boxed{x \leq z}$

c, suma ; si $(x \leq y)$ entonces $\boxed{x+z \leq y+z}$

d, producto ; si $(x \leq y)$ entonces $\boxed{x \cdot z \leq y \cdot z}$ siendo $z \geq 0$

Ejercicio. si $\begin{matrix} x \leq y \\ u \leq v \end{matrix}$ $\Big\{$ ¿es $x+u \leq y+v$? ¿es $x \cdot u \leq y \cdot v$?

① $x+u \leq y+u = u+y \leq v+y = y+v$ ☑

② falso $\begin{matrix} -1 \leq 1 \\ -1 \leq 0 \end{matrix} \Big\}$ $(-1)\cdot(-1) \not\leq (1)\cdot 0$

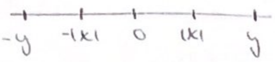
WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

→ Valor absoluto.

Def. si $x \in \mathbb{R}$, se define $|x| = abs(x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$

a, $|x| \leq y \longleftrightarrow -y \leq x \leq y$



b, Desigualdad triangular

$|x+y| \leq |x| + |y|$

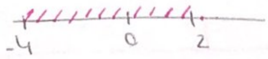
c, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$$\boxed{\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}}$$

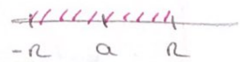
Ejercicios.

- $|x+1| < 3 \longrightarrow -3 < x+1 < 3 \xrightarrow{-1} -3-1 < x+1-1 < 3-1 \rightarrow$

  $\rightarrow -4 < x < 2 \rightarrow x \in (-4, 2)$

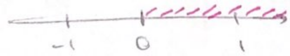


- $|x-a| < R \rightarrow a-R < x < a+R$



- $|x-1| \leq |x+1| \rightarrow |x-1|^2 \leq |x+1|^2 \rightarrow (x-1)^2 \leq (x+1)^2 \rightarrow$

  $\rightarrow x^2+1-2x \leq x^2+1+2x \rightarrow 4x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \rightarrow x \in [0, +\infty)$



Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

si lees esto me debes un besito

1.2 El principio de inducción

Ejemplo. Queremos calcular la suma de los n primeros impares.

$S_n = 1+3+5+7+9 \dots + (2n-1) = ??$

$n=1 \rightarrow S_1 = 1$
$n=2 \rightarrow S_2 = 4$
$n=3 \rightarrow S_3 = 9$
$n=4 \rightarrow S_4 = 16$

conjetura: $1+3+5+\dots+(2n-1) = \boxed{n^2}$

¿cómo comprobarlo?

Principio de inducción de Peano

Sea $P(n)$ una conjetura a demostrar.

1. Demostrar el caso para $n=1$
2. Hipótesis de inducción, suponer $P(n)$ cierto
3. Demostrar $P(n+1)$ a partir de

Ejemplo. $S_n = 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

1. $n=1 \rightarrow S_1 = 1 = 1^2$
2. suponer $S_n = n^2 \rightarrow$ ver S_{n+1}
3. $S_{n+1} = 1+3+\dots+(2n-1)+(2(n+1)-1)$
$= S_n + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$

Ejemplo. $S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

1. $n=1 \rightarrow S_1 = 1 = 1$
2. suponer cierto para n
3. $P(n+1) = 1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$
$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Ejemplo. Desigualdad de Bernoulli

$P(n) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

1. $n=1 \rightarrow 1+x \geq 1+x$
2. Suponer $P(n)$ cierto
3. $P(n+1) \rightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$
$= 1+x+nx+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq \underbrace{1+(n+1)x}_{P(n+1)}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

si lees esto me debes un besito

Que no te escriban poemas de amor
cuando terminen la carrera

(a nosotros por suerte nos pasa)

WUOLAH

No si antes decirte
Lo mucho que te voy a recordar

Pero me voy a graduar.
Mañana mi diploma y título he de pagar

Llegó mi momento de despedirte
Tras años en los que has estado mi lado.

Siempres me has ayudado
Cuando por exámenes me he agobiado

Oh Wuolah wuolitah
Tu que eres tan bonita

1.3 Supremos e ínfimos

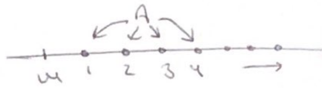
Def. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un cjto de nº reales ($A \neq \emptyset$)

① A está acotado superiormente si $\exists M \in \mathbb{R}$ → $a \leq M$ $\forall a \in A$ } cotas superiores

② A está acotado inferiormente si $\exists m \in \mathbb{R}$ → $a \geq m$ $\forall a \in A$ } cotas inferiores

③ A está acotado si $\exists m, M$ (superior e inferiormente) → $m \leq a \leq M$ $\forall a \in A$ }

Ejemplo. $A = \mathbb{N}$



No está acotado superiormente

Sí está acotado inferiormente (m)

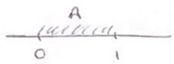
Def. ④ se llama supremo de A

sup(A) = menor cota superior de A (o bien $\sup(A) = +\infty$)

⑤ se llama ínfimo de A

inf(A) = mayor cota inferior de A (o bien $\inf(A) = -\infty$)

Ejemplo.

1. $A = \mathbb{N} \to \sup(\mathbb{N}) = +\infty$, $\inf(\mathbb{N}) = 1$
2. $A = (0,1)$  $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$

Def. ⑥ se dice que A tiene máximo si $\sup(A) \in A$ y se escribe $\max(A) = \sup(A)$

⑦ se dice que A tiene mínimo si $\inf(A) \in A$ y se escribe $\min(A) = \inf(A)$

Ejemplo. $\mathbb{N}$ no tiene máx, $\min(\mathbb{N}) = 1$

$A = (0,1)$ no tiene máx ni mín.

→ Axioma del supremo

Si $A \neq \emptyset$ en $\mathbb{R}$ y A es acotado superiormente ⟹ A tiene un supremo en $\mathbb{R}$ → $\sup(A) \in \mathbb{R}$

*Nota: si trabajamos con $\mathbb{Q}$, entonces no será cierto el Axioma del supremos.

Ejemplo. $A = \{ a_n = 1 + \frac{1}{1!} \cdots \frac{1}{n!} \} \subseteq \mathbb{Q}$

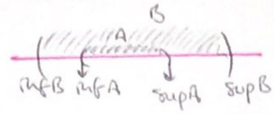
$e = \{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots \} \to \sup(A) = e \notin \mathbb{Q}$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

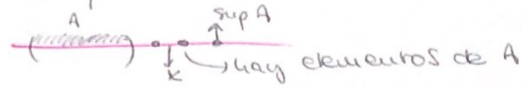
→ Propiedades del supremo y del ínfimo:

a, Si $A \subseteq B \rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$, $\inf(A) \geq \inf(B)$



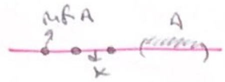
Dem. llamo $M = \sup B \rightarrow \left.\begin{matrix} b \leq M \\ \forall b \in B \end{matrix}\right\}$ $A \subseteq B \rightarrow \left.\begin{matrix} a \leq M \\ \forall a \in A \end{matrix}\right\}$ $\sup A \leq M$

b, Si $x < \sup A \Rightarrow \exists a \in A : x < a$



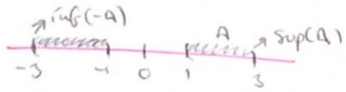
Dem. Red. Absurdo.
supue que no es cierto. $\left.\begin{matrix} a \leq x \\ \forall a \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sup A \leq x < \sup A$ ✗

c, Si $x > \inf A \Rightarrow \exists a \in A : a < x$



Dem. Igual a la b.

d, $\sup(A) = -\inf(-A)$



e, $\sup(A+x) = \sup(A) + x$

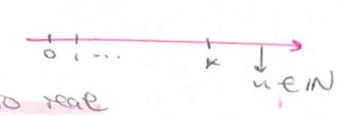
f, $\sup(A \cdot x) = \sup(A) \cdot x$, $\forall x > 0$

g, $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

1.4 Consecuencias del Axioma del Supremo.

Teorema 1. Propiedad Arquimediana

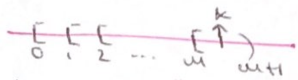
Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$; $n > x$



! = único

Teorema 2. Parte entera de un número real

Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists!\, m \in \mathbb{Z}$; $m \leq x < m+1$



Def. llamamos parte entera por abajo de x, $\lfloor x \rfloor = m$ (= "floor"(x))

→ $\lfloor 321'796 \rfloor = 321$ / $\lceil x \rceil = M$ (= "ceil"(x)) $M-1 < x \leq M$

Teorema 3. Densidad de los números racionales

Todo intervalo $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ contiene algún $p/q \in \mathbb{Q}$

Dem. Se escoge $q \in \mathbb{N}$ $\left(\frac{1}{q} < a, \frac{1}{q} < b-a\right)$

* Si $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ no es racional $\Rightarrow \mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Def. un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice numerable si sus elementos se pueden numerar de forma consecutiva con $n \in \mathbb{N}$.

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
2. $\mathbb{Z} = 0 \; {+1 \atop -1} \; {+2 \atop -2} \; {+3 \atop -3} \dots$
3. $\mathbb{Q} = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \dots \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2} \dots$

Teorema 4. Cantor.

$[0,1]$ no es numerable.

Dem. R.A. Suponer que $[0,1]$ sí es numerable → podría escribir el intervalo $[0,1] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ → los desarrollo en decimales

$x_1 = 0'd_1^{(1)} \; d_2^{(1)} \; d_3^{(1)}$ Escoger $d_n \neq d_n^{(n)}$ tal que sea distinto de d_n

$x_2 = 0'd_1^{(2)} \; d_2^{(2)} \; d_3^{(2)}$

$\vdots$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

si lees esto me debes un besito