Cálculo a mano

La matriz A está definida como la suma de la matriz identidad I y el producto exterior de los vectores u y v:

$$A = I + uv^T$$

Aquí:

- I es la matriz identidad de dimensión $n \times n$.
- u y v son vectores columna de dimensión $n \times 1$.
- uv^T es una matriz de dimensión $n \times n$, donde cada elemento se obtiene mediante el producto del elemento correspondiente de u con el de v^T.

Para demostrar que la matriz A es no singular, necesitamos probar que existe una matriz inversa A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = I$$

En este caso, la afirmación es que la inversa de A está dada por:

$$A^{-1} = I - \frac{uv^T}{1 + v^T u}$$

donde $v^T u$ es un producto escalar y, por lo tanto, un número escalar.

Para verificar esta identidad, multiplicamos A por A^{-1}:

$$AA^{-1} = (I - uv^T) \cdot \left(I - \frac{uv^T}{1 + v^T u} \right)$$

Ahora, expandimos este producto:

$$AA^{-1} = I \cdot I + I \cdot \left(- \frac{uv^T}{1 + v^T u} \right) + uv^T \cdot I + uv^T \cdot \left(- \frac{uv^T}{1 + v^T u} \right)$$

$$= I - \frac{uv^T}{1 + v^T u} + uv^T - \frac{uv^T uv^T}{1 + v^T u}$$

$$= I - \frac{uv^T}{1 + v^T u} + uv^T - \underbrace{\frac{(v^T u) uv^T}{1 + v^T u}}_{uv^T}$$

$$= I - \frac{uv^T}{1 + v^T u} + \cancel{uv^T} - \cancel{uv^T} = I - \cancelto{0}{\frac{uv^T}{1 + v^T u}}$$

$$= I$$

lo cual prueba que A^{-1} es, de hecho, la inversa de A. Por lo tanto, la matriz A es no singular.