Cálculo II

Tema 2: Límites y continuidad de funciones de varias variables

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Calcular el máximo dominio de definición de las funciones siguientes.

a) $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$

Para determinar el dominio de definición de la función $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$, debemos analizar los valores de (x, y) que hacen que la expresión $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ esté bien definida.

La función $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ estará definida siempre que $x^2 + y^2 \neq 0$. Esto ocurre porque si $x^2 + y^2 = 0$, el denominador se anula y la función no está definida. Sabemos que:

$$x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow x = 0 \text{ y } y = 0.$$

Por lo tanto, la única solución en la que $x^2 + y^2 = 0$ ocurre en el punto $(0, 0)$. La función $\cos\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$ estará definida siempre que $x^2 + y^2 \neq =$, lo que significa que el dominio de la función es el conjunto de todos los puntos del plano excepto el origen $(0, 0)$.

El dominio máximo de definición de $f(x, y)$ es:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

La función $f(x, y)$ estará definida siempre que $xy \neq 0$ porque el denominador se anula y la función no está definida. Sabemos que:

$$xy = 0 \longrightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0.$$

Por lo tanto, el dominio de $f(x, y)$ consiste en todos los pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x \neq 0$ y $y \neq 0$.

El dominio de la función es:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0 \text{ ó } y = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x = 0\} \cup \{y = 0\})$$

c) $\vec{f}(x, y) = \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2 - 1}, \dfrac{xy}{x^2 + y^2 - 4}\right)$

Para determinar el dominio de definición de la función vectorial $\vec{f}(x, y)$, debemos analizar las restricciones impuestas por el denominador de cada componente, asegurándonos de evitar divisiones por cero.

<u>Analizar los denominadores</u>

1) Primer denominador: $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$

$$x^2 + y^2 \neq 1.$$

Esto significa que el punto (x, y) no puede estar en el círculo de radio 1 centrado en el origen, ya que en ese caso el denominador sería cero.

2) Segundo denominador: $x^2 + y^2 - 4 \neq 0$

$$x^2 + y^2 \neq 4.$$

Esto significa que el punto (x, y) no puede estar en el círculo de radio 2 centrado en el origen, ya que en ese caso el denominador sería cero.

<u>Analizar el numerador</u>

El numerador en ambos casos en xy, el cual está bien definido para todos los valores de x e y, por lo que no introduce restricciones adicionales al dominio.

<u>Determinar el dominio</u>

El dominio de $\vec{f}(x, y)$ estará definido en todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ excepto aquellos que hagan que alguno de los denominadores sean cero. Esto ocurre en los puntos que satisfacen $x^2 + y^2 = 1$ ó $x^2 + y^2 = 4$.

Por lo tanto, el dominio es el plano $\mathbb{R}^2$ excluyendo los puntos en ls círculos de radio 1 y radio 2.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1 \text{ y } x^2 + y^2 \neq 4\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{x^2 + y^2 = 4\}).$$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

Para determinar el dominio de definición de la función $f(x, y)$, necesitamos asegurarnos de que la expresión dentro de la raíz cuadrada sea mayor o igual a cero, ya que la raíz cuadrada no está definida para números negativos en el dominio real.

- Condición para que la raíz sea válida:

  La raíz está definida si:

  $$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \longrightarrow x^2 + y^2 \geq 1$$

  Esto significa que la función está definida para los puuntos (x, y) que se encuentren en el exterior o sobre el círculo de radio 1 centrado en el origen.

- Determinar el dominio:

  El dominio consiste en todos los puntos (x, y) del plano tal que $x^2 + y^2 \geq 1$.

  $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

e) $\vec{f}(x, y, z) = \left(\dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}, \log(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \right)$

Para determinar el dominio de definición de la función vectorial $\vec{f}(x, y, z)$ debemos analizar las restricciones impuestas por los denominadores y la función logarítmica.

- Condición para el denominador del primer componente

  El denominador del primer componente, $x^2 + y^2 + z^2 - 4$, no puede ser cero, ya que eso haría que la fracción sea definida. Esto implica:

  $$x^2 + y^2 + z^2 \neq 4.$$

  Esto significa que el dominio excluye todos los puntos sobre la esfera de radio 2 centrada en el origen.

- Condición para el argumento del logaritmo:

El argumento del logaritmo, $x^2+y^2+z^2-1$, debe ser estrictamente positivo, ya que el logaritmo solo está definido para valores mayores que cero. Esto implica:

$$x^2+y^2+z^2-1>0 \longrightarrow x^2+y^2+z^2>1.$$

Esto significa que el dominio incluye solo los puntos fuera de la esfera de radio 1 centrada en el origen.

- Combinar restricciones:

El dominio de $\vec{f}(x,y,z)$ está formado por los puntos (x,y,z) que cumplen simultáneamente:

1) $x^2+y^2+z^2>1$ (fuera de la esfera de radio 1).

2) $x^2+y^2+z^2\neq 4$ (excluyendo la esfera de radio 2).

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2>1 \text{ y } x^2+y^2+z^2\neq 4\}.$$

2) Estudiar la existencia de límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+m^4x^4}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}(1+m^4)}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+m^4)}{1+m^2}=0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría cero.

2) Coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^4\theta+r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r^4}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\cancel{r^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}}=\lim_{r\to 0}r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)=0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdría cero.

3) Límites iterados o retirados

- $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^2}=\lim_{y\to 0}y^2=0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^2=0$

4) Definición del límite:

$$\forall\mathcal{E}>0 \quad \exists\delta>0 \text{ tal que } |f(x,y)-L|<\mathcal{E} \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|<\delta$$

En coordenadas polares:

$$\forall\mathcal{E}>0 \quad \exists\delta>0 \text{ tal que } |f(r,\theta)-\underbrace{L}_{0}|<\mathcal{E} \text{ si } r<\delta$$

En todos los caminos considerados, $f(x,y)\to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

3) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$, de la función $\vec{f}:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x,y)=\left(x+y^2,\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

Para que el límite de $\vec{f}(x,y)$ exista en $(0,0)$, deben existir los límites de ambas componentes de forma independiente.

- Primera componente: $f_1(x,y) = x + y^2$

  1) Límites direccionales:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x + y^2 = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} x + m^2x^2 = 0$$

  No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

  2) Cambio por coordenadas polares:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x + y^2 \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta + r^2\sin^2\theta = 0$$

  No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

  3) Límites iterados o reiterados:

     - $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} x + y^2\right) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$
     - $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} x + y^2\right) = \lim\limits_{y\to 0} y^2 = 0$

  En todos los caminos considerados, $f_1(x,y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Segunda componente: $f_(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

  1) Límites direccionales:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}m}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

  No existe el límite, porque el resultado depende de m.

  Por lo tanto, al no haber en $(0,0)$ para $f_2(x,y)$, la función vectorial $\vec{f}(x,y)$ no tendrá límite en $(0,0)$.

4) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+mx}{\underbrace{\sqrt{x^2+m^2x^2}}_{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(\cancelto{0}{x}+m)}{\cancel{x}\sqrt{1+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

No existe el límite, porque el resultado depende de m.

5) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$, de la función $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

1) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+3x^2m^2x^2+2xm^3x^3}{(x^2+m^2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}(1+3m^2+2m^3)}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2} = \frac{1+3m^2+2m^3}{(1+m^2)^2}$$

No existe el límite porque el resultado depende de m.

6) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5 + 4x^2y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^5 + 4x^2m^3x^3 - 2m^5x^5}{(x^2+m^2x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{5}}(2+4m^3-2m^5)}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+4m^3-2m^5)}{(1+m^2)^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá cero.

2) Cambio de coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^5\cos^5\theta + 4r^2\cos^2\theta r^3\sin^3\theta - 2r^5\sin^5\theta}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{2r^{\cancel{5}}(\cos^5\theta + 2\cos^2\theta\sin^3\theta - \sin^5\theta)}{\cancel{r^4}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}_{1}} = \lim_{r\to 0} 2r(\cos^5\theta + 2\cos^2\theta\sin^3\theta - \sin^5\theta) = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá cero.

3) Límites iterados o reiterados:

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{-2y^5}{y^4} = \lim_{y\to 0} -2y = 0$

En todos los caminos considerados, $f(x,y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es 0.

7) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{f}(x,y) = \left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, xy, \sqrt{|xyz|} \right)$$

Para que el límite de $\vec{f}(x,y)$ exista en $(0,0)$, deben existir los límites de las tres componentes independientemente.

- Primera componente: $f_1(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

  1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} xmx\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{4}}m(1-m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2m(1-m^2)}{1+m^2} = 0$$

  No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

2) Cambio por coodenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+^2} = \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta \cdot \frac{\cancel{r^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cancel{r^2}\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}} = \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá 0.

3) Límites iterados o reiterados:

– $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

– $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

En todos los caminos posibles, $f_1(x,y)\to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Segunda componente: $f_2(x,y) = xy$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} xmx = \lim_{x\to 0} x^2 m = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta r\sin\theta = r^2\cos\theta\sin\theta = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

– $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} xy\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

– $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} xy\right) = \lim_{y\to 0} = 0$

En todos los caminos posibles, $f_2(x,y)\to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Tercera componente: $f_3(x,y) = \sqrt{|xyz|}$

(a) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xyz|} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \sqrt{|xmxz|} = \lim_{x\to 0} \sqrt{|x^2 mz|} = 0$$

(b) Cambio de coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xyz|} = \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \sqrt{|r\cos\theta r\sin\theta z|} = \lim_{r\to 0} \sqrt{|r^2\cos\theta\sin\theta z|} = 0$$

(c) Límites iterados o reiterados:

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \sqrt{|xyz|}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \sqrt{|xyz|}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

En todos los caminos posibles, $f_3(x,y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

Para las tres compoenentes, los límites son:

- $f_1(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \to 0$
- $f_2(x,y) = xy \to 0$
- $f_3(x,y) = \sqrt{|xyz|} \to 0$

Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \vec{f}(x,y,z) = (0,0,0)$$

8) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+xmx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(1+m)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{1+m}{1+m^2}$$

No existe el límite porque el resultado depende de m.

9) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{xm^2x^2}{x^2m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}m^2}{\cancel{x^2}(1+m^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{xm^2}{1+m^4x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\cos\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta r^2\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta)} = \lim_{x\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta} = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
- $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

En todos los caminos posibles, $f(x,y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

10) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}.$$

1) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + m^3x^3}{x^2 + m^2x^2 + m^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}(1 + m^3)}{\cancel{x^2}(1 + m^2 + m^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1 + m^3)}{1 + m^2 + m^4x^2} = \frac{0}{1 + m^2} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^4\sin^4\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{\cancel{r^2}(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + r^2\sin^4\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{1 + r^2\sin^4\theta} = \frac{0}{1} = 0$$

3) Límites iterados o reiterados

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$
- $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2 + y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{\cancel{3}}}{\cancel{y^2}(1 + y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{1 + y^2} = \frac{0}{1} = 0$

En todos los caminos posibles, $f(x, y) \to 0$. Por lo tanto , el límite existe y es cero.

11) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0, 0)$ de la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \sin\left(\frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}\right)\right).$$

Para que el límite de $\vec{f}(x, y)$ exista en $(0, 0)$, deben existir los límites de ambas componentes de forma independiente.

- Primera componente: $f_1(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

  1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + m^4x^4}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{4}}(1 + m^4)}{\cancel{x^2}(1 + m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 + m^4)}{1 + m^2} = 0$$

  2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \left\{ \begin{array}{l} x = \cos\theta \\ \\ y = \sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{4}}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}{\cancel{r^2}(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1})} = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta + y^4\theta) = 0$$

  3) Límites iterados o reiterados

  - $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$
  - $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^2} = \lim_{y\to 0} y^2 = 0$

  En todos los caminos posibles, $f_1(x, y) \to 0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Segunda compoenente: $f_2(x, y)$

  1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}\right) = \{y = mx\} = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{x^2 + xmx}{x^2 + m^2x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\cancel{x^2}(1 + m)}{\cancel{x^2}(1 + m^2)}\right) = \sin\left(\frac{1 + m}{1 + m^2}\right)$$

Al depende de m, no existe el límite en la función $f_2(x,y)$, la función $\vec{f}(x,y)$ no tendrá límite en $(0,0)$.

12) Dadas las funciones

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } |x|\neq|y| \\ 0 & \text{si } |x|=|y|\end{cases}$$

y

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

se pide:

a) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$ en los siguientes casos: $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{k}{n}\right)$ y $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2}\right)$, donde k es un número real.

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{k^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1+k^2}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\cancel{3}}}\cdot\cancel{n^2}}{1+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(1+k^2)}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{n^2+1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^3(n^2+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{\text{L'Hôpital}\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{\infty}=0$$

b) ¿Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2-y^2}=\{y=mx\}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2-m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(1-m^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{1-m^2}=0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2-y^2}=\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to0}\frac{r^3\cos\theta}{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to0}\frac{r^{\cancel{3}}\cos^3\theta}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}=\lim_{r\to0}\frac{r\cos^3\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=0$$

3) Límites iterados o reiterados:

- $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x^3}{x^2-y^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}x=0$
- $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x^2-y^2}\right)=\lim\limits_{y\to0}0=0$

En todos los caminos posibles, $f(x,y)\to0$. Por lo tanto, el límite existe y es cero.

c) Comprobar si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y}=\{y=mx\}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+m^3x^3}{x^2+m^2x^2+x^2mx}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\cancel{3}}(1+m^3)}{\cancel{x^2}(1+m^2+mx)}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+m^3)}{1+m^2+mx}=0$$

El límite queda demostrado.

13) Estudiar la continuidad de la siguiente función

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir con $(0,0)$.

Estudiamos la existencia del límite de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to 0}\underbrace{(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)}_{r^2}\sin\frac{1}{\underbrace{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}}_{r}}$$

$$=\lim_{r\to 0}r^2\sin\left(\frac{1}{r}\right)=\overset{\text{Teorema del Sandwich}}{\left\{\left|\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right|\right\}}=\lim_{r\to 0}\left|r^2\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right|\leq\lim_{r\to 0}r^2=0$$

Dado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0).$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto $(0,0)$.

14) ¿Es posible definir las funciones de los ejercicios 1.4.2, 1.4.3,1.4.4,1.4.5,1.4.6,1.4.7,1.4.8,1.4.9,1.4.10,1.4.11 de manera que éstas sean continuas?

15) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Para estudiar la continuidad de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar la existencia del límite en dicho punto y, en casi de que exista, deberá coincidir con $f(0,0)=0$.

Estudiamos la existencia del límite de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta|r\sin\theta|}{\underbrace{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}}_{r}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r}}=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin\theta=0$$

Dado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto $(0,0)$.

b) $f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2},\sin(xy)\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Para estudiar la continuidad de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir con $f(0,0)=(0,0)$.

La función $f(x,y)$ es una función vectorial con dos componentes:

1) $f_1(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta r\sin\theta}{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}}\cos^2\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

2) $f_2(x,y) = \sin(xy)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy) = \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \sin(r\cos\theta r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} \sin(r^2\cos\theta\sin\theta) = \sin(0) = 0$$

Ambas componentes tienden a 0 cuando $(x,y) \to (0,0)$, y por lo tanto, la función es continua en todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } (x,y) = (0,y) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La función será continua si:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,y_0) = y_0$$

Primero consideramos la expresión para $f(x,y)$ cuando $x \neq 0$:

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}$$

Si queremos calcular el límite, debemos fijarnos que pasa cuando $x \to 0$. Empezamos reescribiendo $f(x,y)$ como:

$$f(x,y) = y \cdot \frac{\sin(xy)}{xy}$$

De esta forma, tenemos un término en un límite conocido:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$

Esto implica que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} = y \cdot 1 = y = f(0,y_0)$$

Por lo tanto, $f(x,y)$ es continua en todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Esto incluye la región donde $= 0$, ya que el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,y_0)$ coincide con el valor que toma la función en ese punto.

16) ¿Qué tiene que valor el número real K para que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ K & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sea continua?

Para que la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$, el número real K deberá tener el mismo valor que el límite de la función en dicho punto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta r\sin\theta}{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}}\cos^2\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

Por lo tanto, para que la función sea continua en el punto $(0,0) \longrightarrow K = 0$.

17) ¿Qué tiene que valer el número real K para que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ K & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sea continua?

Para que la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$, el número real K deberá tener el mismo valor que el límite de la función en dicho punto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2\theta}{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\sin^2\theta}{\cancel{r^2}} = \sin\theta$$

Como no existe el límite, porque depende de θ, no habrá ningún valor de K que haga que la función $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$.

18) Estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de dicha función en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en $f(0,0) = 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta(r\cos\theta - r\sin\theta)}{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\cdot r\cdot\cos^2\theta(\cos\theta - \sin\theta)}{\cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta(\cos\theta - \sin\theta) = 0$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto $(0,0)$.

19) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x-y)}{x^2+y^2}\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de dicha función en todo punto de $\mathbb{R}^2$

Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en $f(0,0) = 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta(r\cos\theta - r\sin\theta)}{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}}\sin\left(\frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}\cos\theta}\right)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\cdot r\cdot\cos^2\theta(\cos\theta - \sin\theta)}{\cancel{r^2}}\sin\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta(\cos\theta - \sin\theta)\sin\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = 0$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto $(0,0)$.

20) Determinar si la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(=,0)\end{cases}$$

es continua.

Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en $f(0,0)=0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta}{\underbrace{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}_{r^2}}=\lim_{r\to0}\frac{\cancel{r^2}\cdot r\cdot\cos^2\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}}$$
$$=\lim_{r\to0}r\cos^2\theta\sin\theta=0$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto $(0,0)$.

21) Consideremos la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Estudiar la continuidad de dicha función.

Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en $f(0,0)=0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to0}\frac{r^4\cos^4\theta+r^4\sin^4\theta}{\underbrace{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}_{r^2}}=\lim_{r\to0}\frac{r^{\cancel{4}}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\cancel{r^2}}=\lim_{r\to0}r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)=0$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto $(0,0)$.

22) Dada la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

analizar la continuidad de la función.

Para estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$, deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en $f(0,0)=0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4}=\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to0}\frac{\ln(1+r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta)}{r^4\cos^4\theta+2r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta+r^4\sin^4\theta}=(*)$$
$$=\lim_{r\to0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\underbrace{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}_{r^2})^2}=\lim_{r\to0}\frac{\cancel{r^4}\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cancel{r^4}}=\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$(*)=\ln(1+r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta)\sim r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta$ cuando $r\to0$.

Dado que el límite depende de θ, la función no es continua en $(0,0)$, ya que el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ no existe de forma única.

23) Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con α un número natural. Estudiar para los valores de $\alpha = 3$ y 4 la continuidad de dicha función.