Álgebra Lineal
Examen Convocatoria Enero 2024

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y cuyo rango es r. Se pide:

a) Define los cuatro subespacios fundamentales asociados a A.

b) ¿Qué dimensión tiene cada subespacio fundamental en función de n, m y r? Justifica la respuesta.

c) Suponiendo que $n = m$, decide si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Para las ciertas ¿es la suma directa? Justifica la respuesta. Para las falsas debes dar un contraejemplo:

$$\mathrm{Fil}(A) + \mathrm{Nuc}(A) = \mathbb{R}^n$$

$$\mathrm{Col}(A) + \mathrm{Nuc}(A) = \mathbb{R}^n$$

d) Explica la relación que existe entre dichos subespacios y las soluciones del sistema lineal $Ax = b$, incluyendo el caso $b = 0$.

2) Sea A una matriz cuadrada orden n e invertible. Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Demuestra que la matriz $B = Auv^\intercal$ es invertible, y que su inversa viene dada por

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\intercal A^{-1}}{1 + v^\intercal A^{-1}u}. \tag{1}$$

La expresión (1) se denomina fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury, y es clave en el éxito de los llamados algoritmos de optimización tipo quasi-Newton, que estudiarás en la asignatura Optimización II.

3) Consideremos los números complejos

$$z_1 = -1 + j, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}j}.$$

Calcula $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2$ y $\dfrac{z_2}{z_1}$ y expresa el resultado en forma exponencial.

4) Consideremos la matriz A y el vector b siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Demuestra que el sistema $Ax = b$ no tiene solución y calcula la proyección ortogonal de b sobre el subespacio vectorial $\mathrm{Col}(A)$.

b) Escribe la proyección que has calculado como Az y explica por qué z es una solucion aproximada del sistema $Ax = b$.

5) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(-3x + 4y, 4x + 3y)$$

y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ con $u_1 = (1, 2)$ y $u_2 = (2, -1)$ una base de $\mathbb{R}^2$.

a) Halla la matriz de f en la base $\mathcal{B}$.

b) A la vista de la matriz obtenida en el aparato anterior, ¿puedes dar una interpretación geométrica de la aplicación f?

6) Consideremos la matriz de datos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) Calcula matrices U, V ortogonales y Σ diagonal con los valores singulares de A en la diagonal tales que $A = U\Sigma V^\intercal$ (haz cálculos exactos sin tomar aproximaciones decimales).

b) Calcula una matriz A_1 de rango uno que mejor aproxime a A, es decir, que haga mínima la norma $\|A - A_1\|$.