Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos
HOJA DE PROBLEMAS 1.1

Bibliografía:

- Calculus, M. Spivak. Editorial Reverté.
- Calculus for biology and Medicine. C. Neuhauser.
- University Calculus. Haar, Weir & Thomas. Pearson.

Ejercicios Propuestos

1. Determine de las siguientes sucesiones $(a_n)_n$ cuáles son convergentes y calcule el límite en dicho caso.

   a) $a_n = 2 + 0.1^n$.
   b) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$.
   c) $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}\,\mathrm{sen}(n^n)}{n+1}$.
   d) $a_n = n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}$.
   e) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}, \qquad a, b \geq 0$.
   f) $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
   g) $a_n = \frac{\mathrm{sen}(n)}{n}$.
   h) $a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.
   i) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.
   j) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.
   k) $a_n = \log(n) - \log(n+1)$.
   l) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$.
   m) $a_n = (n+4)^{\frac{1}{n+4}}$.
   n) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log(n)}}$.

2. Calcular los siguientes límites en el caso en el que existan:

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{(1+n)^2}$;
   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3/(n+\sqrt{n})}{\log(n/(n-1))}$;
   c) $\lim_{n\to\infty} e^{(-1)^n}$;
   d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n(n+1)} - \frac{n^2}{n+2}\right)$;
   e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+5}{n}\right)^{2n+1}$;
   f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{n^2-(-1)^n n}$;
   g) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{\log(n)}$;
   h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!^{1/n}}{n}$;
   i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(3+6+\cdots+3n)$;
   j) $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$;
   k) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;
   l) $\lim_{n\to\infty} n - \sqrt[3]{1+n^3}$;
   m) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;
   n) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}$;
   ñ) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;
   o) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3n^2+4n-5)}{\log(n)}$;
   p) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$;
   q) $\lim_{n\to\infty} (5n^3+4n-1)^{\frac{1}{\log(n^2+7n-5)}}$;
   r) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$;
   s) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n}$;
   t) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;
   u) $\lim_{n\to\infty} n^9 \arctan(n^9)$;

3. En un laboratorio un investigador tiene una cepa bacteriana con la propiedad de que cada 50 minutos cada célula bacteria se divide en dos células. Si inicialmente hay 3 bacterias, ¿cuánto tiempo necesitará para obtener 96 bacterias?

4. Un ahorrador dispone de 10.000 euros y le ofrecen un interés del 2 % anual. ¿Cuánto dinero tendrá cuando hayan transcurrido 3 años?

5.
   a) Demuestre que si $0 < a < 2$, entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.
   b) Demuestre que la sucesión
   $$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots,$$
   converge.
   c) Halle el límite.

6. Sea $(x_n)_n$ una sucesión definida por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ para cada $n \geq 1$. Demostrar que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente demostrando que es monótona creciente y acotada superiormente. Hallar $\lim_{n\to\infty} x_n$.

7. Calcula el límite de las siguientes sucesiones recurrentes, comprobando previamente su existencia.
   a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{3x_n+2}{2}}$;
   b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{4}{4-x_n}$;

8. Calcule el **término general** de las sucesiones definidas por recurrencia y calcule el límite.
   $$a) a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n; \qquad b) a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$$

9. Dado $\alpha > 0$, se considera la sucesión recurrente definida por:
   $$a_1 = \alpha; \quad a_{n+1} = \frac{4a_n^2}{1 + 4a_n^2}, \qquad \text{si } n \geq 1.$$
   a) Demuestra que para todo número real $x > 0$ se cumple $\frac{4x^2}{1+4x^2} \leq x$.
   b) Demuestra que la sucesión a_n es decreciente, y que está acotada inferiormente. Deduce justificadamente que existe $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.
   c) Demuestra por inducción que si $\alpha \geq 1/2$ entonces $a_n \geq 1/2$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ Calcula el valor de L en este caso.
   d) Calcula justificadamente el valor de L cuando $\alpha \in (0, 1/2)$.