Álgebra Lineal
Examen Convocatoria Mayo 2024

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Demuestra que existen matrices ortogonales U y V, y una matriz Σ, de tamaño $m \times n$ y diagonal, de modo que $A = U\Sigma V^\intercal$ (factorización SVD).
Tienes que explicar con detalles cuáles son las entradas de la diagonal de Σ y cómo se obtienen las columnas de U y V.

2) Sea u un vector de $\mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$ y consideremos la matriz $A = I - 2uu^\intercal$

- **a)** Prueba que A es simétrica y $A^2 = I$.
- **b)** Prueba que u es un vector propio de A de valor propio -1 y su v es un vectori no nulo orotogonal a u, prueba que v es un vector propio de A de valor propio 1.
- **c)** Si A es 2×2, ¿es A diagonalizable?

3) Consideremos los números complejos $z_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}j$ y $z_2 = \dfrac{1}{-1-\sqrt{3}j}$

- **a)** Calcula la forma exponencial de z_1 y z_2.
- **b)** Prueba que $z_1^{20} + z_2^9 = \dfrac{1}{2^{10}}$

4) En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio vectorial $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$, donde

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (0,1,-1), \quad u_3 = (1,2,0), \quad u_4 = (1,0,2),$$

- **a)** Calcula una base y la dimensión de U
- **b)** Prueba que el vector $u = (-1,2,-4)$ pertence a U y halla sus coordenadas respecto de la base hallada en el apartado anterior.
- **c)** Calcula la proyección ortogonal del vector $(-3,1,3)$ sobre U.
- **d)** ¿Qué ecuaciones debe satisfacer un vector (x,y,z) para pertenecer a U?

5) Sea la matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- **a)** Halla una matriz Q ortogonal tal que $A = QDQ^{-1}$ con D diagonal.
- **b)** Halla la descomposición espectral de A, es decir, escribe A como $A = \lambda_1 u_1 u_1^\intercal + \lambda_2 u_2 u_2^\intercal$ con λ_1, λ_2 los valores propios de A y u_1, u_2 vectores propios adecuados.

6) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones mediante una factorización LU

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ -4x + 9y + 2z &= 4 \\ 6x - 12y - 2z &= -2 \end{aligned}\right\}$$