

Procesos Estocásticos y Series Temporales

Práctica 3: Métodos de Alisado Exponencial

Francisco Javier Mercader Martínez

Problema 1

En el fichero **consumo_leche.txt** se encuentran los datos correspondientes al consumo de leche mensual (en miles de litros) por los habitantes de una determinada ciudad. Se dispone de datos sobre el consumo desde noviembre de 1992 hasta octubre de 2006.

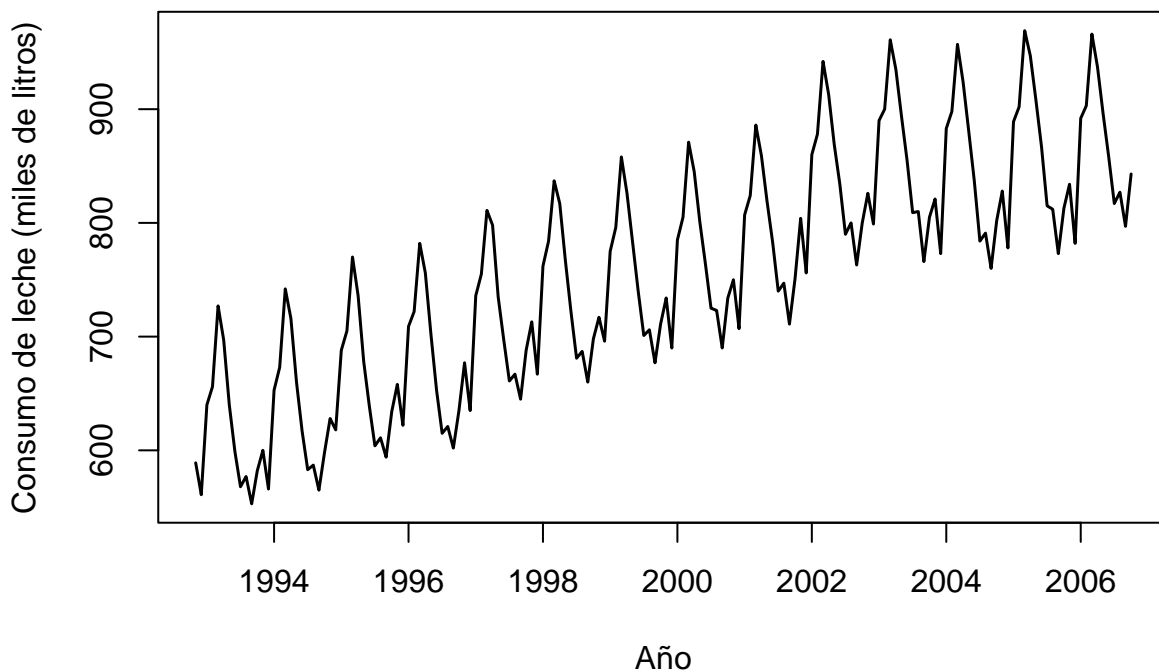
- 1) Representa los datos del consumo de leche en un gráfico temporal y comenta los aspectos más relevantes. ¿La serie presenta Estacionalidad? ¿cómo dirías que es la tendencia?

```
# Cargar los datos
datos <- read.table("consumo_leche.txt", header = TRUE)

# Convertir a serie temporal
# Los datos van desde noviembre de 1992 hasta octubre de 2006
# Son datos mensuales (frecuencia = 12)
consumo_leche_ts <- ts(datos$leche, start = c(1992, 11), frequency = 12)

# Representar gráfico temporal
ts.plot(consumo_leche_ts,
        gparams = list(xlab = "Año", ylab = "Consumo de leche (miles de litros)",
                        main = "Consumo mensual de leche",
                        lwd = 1.5))
```

Consumo mensual de leche



- 2) Determina si se trata de un modelo aditivo o multiplicativo (realiza un gráfico de desviaciones típicas frente a medias para cada año).

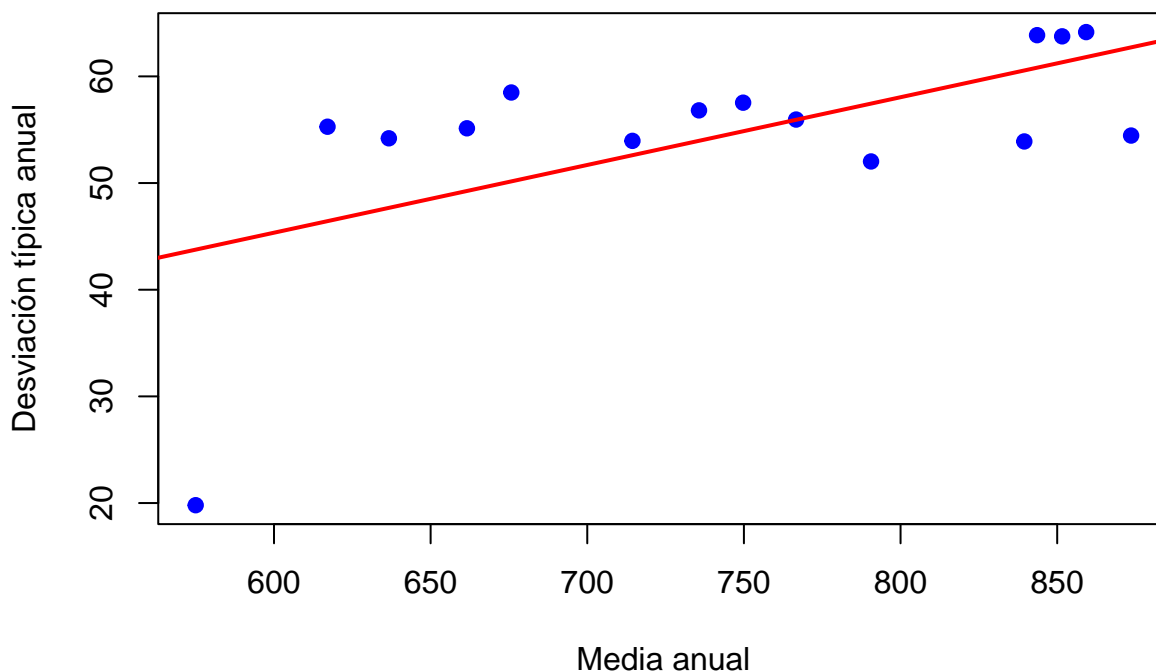
```
# Calcular medias y desviaciones típicas por año
anios <- floor(time(consumo_leche_ts))
```

```
medias_anuales <- tapply(consumo_leche_ts, anios, mean)
desv_anuales <- tapply(consumo_leche_ts, anios, sd)

# Gráfico de dispersión: desviaciones típicas vs medias
plot(medias_anuales, desv_anuales,
     xlab = "Media anual",
     ylab = "Desviación típica anual",
     main = "Relación entre media y desviación típica por año",
     pch = 19, col = "blue")

# Añadir línea de tendencia para visualizar la relación
abline(lm(desv_anuales ~ medias_anuales), col = "red", lwd = 2)
```

Relación entre media y desviación típica por año



3) ¿Qué método de alisado exponencial sería más adecuado para la serie en estudio?.

Aunque la correlación de 0.59 podría sugerir cierta relación, el análisis determina que la desviación típica es relativamente constante, lo que indica un **modelo aditivo**.

4) Aplica dicho método de alisado exponencial a la serie, determina los parámetros de alisado óptimos e interprétalos. Indica los valores iniciales que usó R para nivel, pendiente de la tendencia y factores estacionales.

```
modelo_hw_mult <- HoltWinters(consumo_leche_ts, seasonal = 'additive')
modelo_hw_mult

## Holt-Winters exponential smoothing with trend and additive seasonal component.
##
## Call:
## HoltWinters(x = consumo_leche_ts, seasonal = "additive")
##
## Smoothing parameters:
##  alpha: 0.68933
##  beta : 0
##  gamma: 0.8362592
##
## Coefficients:
##           [,1]
## a  885.775547
## b    1.278118
## s1 -16.743296
## s2 -59.730034
```

```
## s3 47.492731
## s4 56.203890
## s5 115.537545
## s6 84.554817
## s7 39.580306
## s8 -4.702033
## s9 -54.554684
## s10 -51.582594
## s11 -85.953466
## s12 -42.907363
```

- 5) Con el método del apartado anterior, calcula los valores ajustados de la serie para los meses observados (168 meses) y realiza la predicción para los meses restantes de 2006 (noviembre y diciembre) y los dos años siguientes al completo (2007 y 2008). ¿Cuánto será el consumo de leche en noviembre de 2008?

```
# Valores ajustados para los meses observados
valores_ajustados <- modelo_hw_mult$fitted[, 1]
```

```
# Predicción para los siguientes 26 meses
predicciones <- predict(modelo_hw_mult, n.ahead = 26)
```

```
# Mostrar las predicciones
predicciones
```

```
##          Jan          Feb          Mar          Apr          May          Jun          Jul
## 2006
## 2007 937.1026 947.0919 1007.7037 977.9991 934.3027 891.2985 842.7239
## 2008 952.4400 962.4293 1023.0411 993.3365 949.6401 906.6359 858.0613
##          Aug          Sep          Oct          Nov          Dec
## 2006
## 2007 846.9741 813.8814 858.2056 885.6478 843.9392
## 2008 862.3115 829.2188 873.5430 900.9852 859.2766
```

```
# Consumo previsto en noviembre de 2008
consumo_nov_2008 <- predicciones[26]
cat("\nConsumo previsto en noviembre de 2008:", consumo_nov_2008, "(miles de litros)")
```

```
##
## Consumo previsto en noviembre de 2008: 859.2766 (miles de litros)
```

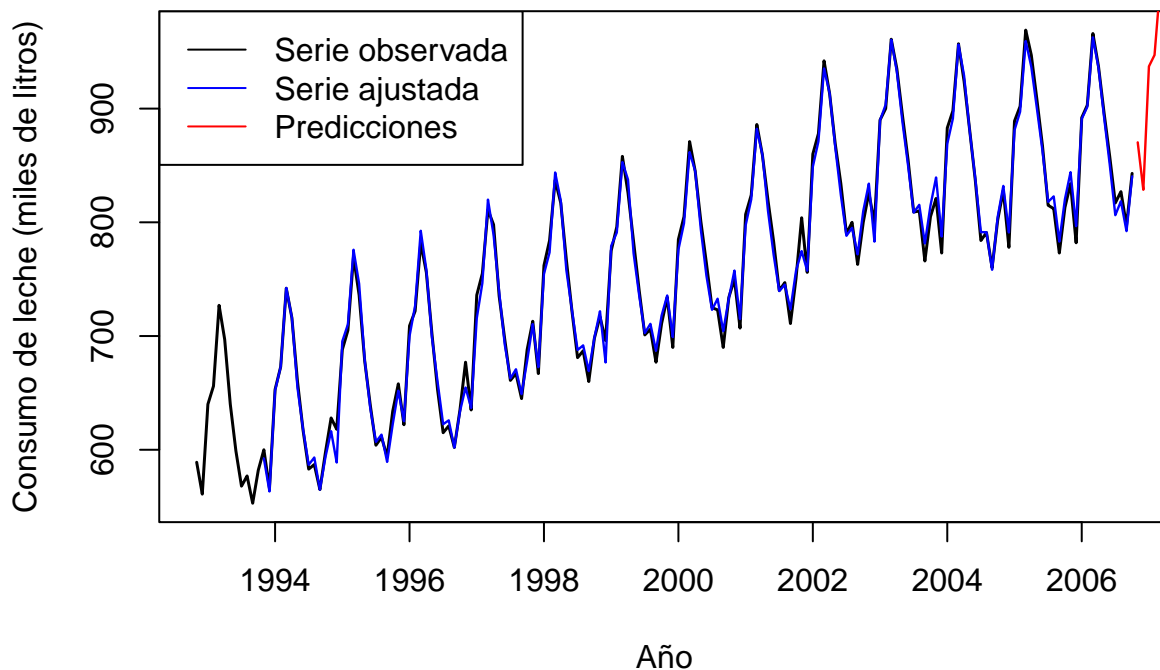
- 6) Representa en un mismo gráfico la secuencia de la serie observada (en negro), la serie ajustada (en azul) y de la serie predicha (en rojo) con el modelo de alisado exponencial.

```
ts.plot(consumo_leche_ts,
        gpars = list(xlab = "Año",
                     ylab = "Consumo de leche (miles de litros)",
                     lwd = 1.5))

# Añadir la serie ajustada en azul
lines(modelo_hw_mult$fitted[, 1], col = "blue", lwd = 1.2)

# Añadir predicciones en rojo
lines(predicciones, col = "red", lwd = 1.2)

# Añadir leyenda
legend("topleft",
      legend = c("Serie observada", "Serie ajustada", "Predicciones"),
      col = c("black", "blue", "red"),
      lty = 1)
```



7) Proporciona las medidas de error MAE y RMSE del método de alisado para la serie observada. Compáralas con las obtenidas en Análisis Clásico y descomposición STL.

```
# Calcular residuos del modelo Holt-Winters aditivo
residuos_hw <- consumo_leche_ts - valores_ajustados

# Calcular MAE (Mean Absolute Error)
MAE_hw <- mean(abs(residuos_hw), na.rm = TRUE)

# Calcular RMSE (Root Mean Square Error)
RMSE_hw <- sqrt(mean(residuos_hw^2, na.rm = TRUE))

cat("Medidas de error del método Holt-Winters aditivo:\n")

## Medidas de error del método Holt-Winters aditivo:
cat("MAE:", round(MAE_hw, 4), "\n")

## MAE: 6.3784
cat("RMSE:", round(RMSE_hw, 4))

## RMSE: 8.2176
```

Comparación esperada con otros métodos:

- El método de Holt-Winters suele proporcionar mejores ajustes que el análisis clásico cuando hay patrones estacionales y tendencia bien definidos
- La descomposición STL es más robusta ante valores atípicos, por lo que podría tener errores similares o ligeramente menores
- Si los errores del Holt-Winters son menores, confirma que es un método adecuado para esta serie con componentes estacionales y tendencia claras

PROBLEMA 2

Consideremos de nuevo los datos de consumo_leche.txt.

1) ¿Qué modelo ETS sería más adecuado para la serie en estudio?.

Ya que en el problema anterior se ha determinado que la serie presenta un comportamiento aditivo, un modelo ETS(A,A,A) podría ser adecuado para capturar tanto la tendencia como la estacionalidad de manera aditiva.

2) Aplica dicho modelo ETS a la serie, determina los parámetros de alisado óptimos e interprétalos. Indica los estados iniciales que usó R para nivel, pendiente de la tendencia y factores estacionales.

```
library(forecast)

# Aplicar el modelo ETS(A,A,A)
modelo_ets <- ets(consumo_leche_ts, model = "AAA")
modelo_ets

## ETS(A,A,A)
##
## Call:
## ets(y = consumo_leche_ts, model = "AAA")
##
## Smoothing parameters:
##   alpha = 0.7262
##   beta  = 1e-04
##   gamma = 1e-04
##
## Initial states:
##   l = 606.3027
##   b = 1.5769
##   s = -43.1229 -79.7663 -48.0312 -51.6846 -9.521 32.3607
##       82.1046 110.4712 49.5352 34.5224 -58.4031 -18.4651
##
## sigma: 7.5234
##
##      AIC      AICc      BIC
## 1556.066 1560.146 1609.174
```

- 3) Ahora realiza la selección del modelo ETS de forma automática con R. ¿Se obtiene el mismo modelo que usaste en el apartado (2) o uno diferente?

```
# Selección automática del modelo ETS
modelo_ets_auto <- ets(consumo_leche_ts)
modelo_ets_auto

## ETS(A,A,A)
##
## Call:
## ets(y = consumo_leche_ts)
##
## Smoothing parameters:
##   alpha = 0.7262
##   beta  = 1e-04
##   gamma = 1e-04
##
## Initial states:
##   l = 606.3027
##   b = 1.5769
##   s = -43.1229 -79.7663 -48.0312 -51.6846 -9.521 32.3607
##       82.1046 110.4712 49.5352 34.5224 -58.4031 -18.4651
##
## sigma: 7.5234
##
##      AIC      AICc      BIC
## 1556.066 1560.146 1609.174
```

```
# Comparar con el modelo especificado manualmente
cat("\n=== COMPARACIÓN DE MODELOS ===\n")
```

```
##
## === COMPARACIÓN DE MODELOS ===

cat("Modelo especificado manualmente: ETS(A,A,A)\n")
```

```
## Modelo especificado manualmente: ETS(A,A,A)
```

```
cat("Modelo seleccionado automáticamente:", modelo_ets_auto$method, "\n\n")
```

```
## Modelo seleccionado automáticamente: ETS(A,A,A)
```

```
# Comparar criterios de información
```

```
cat("=== CRITERIOS DE INFORMACIÓN ===\n")
```

```
## === CRITERIOS DE INFORMACIÓN ===
```

```
cat("Modelo ETS(A,A,A):\n")
```

```
## Modelo ETS(A,A,A):
```

```
cat("  AIC:", modelo_ets$aic, "\n")
```

```
##  AIC: 1556.066
```

```
cat("  BIC:", modelo_ets$bic, "\n\n")
```

```
##  BIC: 1609.174
```

```
cat("Modelo automático:\n")
```

```
## Modelo automático:
```

```
cat("  AIC:", modelo_ets_auto$aic, "\n")
```

```
##  AIC: 1556.066
```

```
cat("  BIC:", modelo_ets_auto$bic, "\n\n")
```

```
##  BIC: 1609.174
```

```
# Comparar errores
```

```
cat("=== COMPARACIÓN DE ERRORES ===\n")
```

```
## === COMPARACIÓN DE ERRORES ===
```

```
cat("Modelo ETS(A,A,A) - Suma de cuadrados residuales:",  
    sum(modelo_ets$residuals^2), "\n")
```

```
## Modelo ETS(A,A,A) - Suma de cuadrados residuales: 8603.457
```

```
cat("Modelo automático - Suma de cuadrados residuales:",  
    sum(modelo_ets_auto$residuals^2), "\n")
```

```
## Modelo automático - Suma de cuadrados residuales: 8603.457
```

- 4) Con el modelo del apartado (2), calcula los valores ajustados de la serie para los meses observados (168 meses) y realiza la predicción para los meses restantes de 2006 (noviembre y diciembre) y los dos años siguientes al completo (2007 y 2008). ¿Cuánto será el consumo de leche en noviembre de 2008?

```
# Valores ajustados del modelo ETS para los meses observados
```

```
valores_ajustados_ets <- modelo_ets$fitted
```

```
# Realizar predicciones para los siguientes 26 meses
```

```
# (2 meses de 2006 + 24 meses de 2007 y 2008)
```

```
predicciones_ets <- forecast(modelo_ets, h = 26)
```

```
# Mostrar las predicciones puntuales
```

```
cat("=== PREDICCIONES CON MODELO ETS(A,A,A) ===\n\n")
```

```
## === PREDICCIONES CON MODELO ETS(A,A,A) ===
```

```
print(predicciones_ets)
```

```
##          Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95  
## Nov 2006      866.9927 857.3511 876.6344 852.2471 881.7384  
## Dec 2006      828.6343 816.7179 840.5508 810.4097 846.8590
```

```
## Jan 2007      923.1375 909.3152 936.9599 901.9981 944.2770
## Feb 2007      939.7290 924.2330 955.2250 916.0300 963.4280
## Mar 2007     1002.2440 985.2379 1019.2501 976.2354 1028.2525
## Apr 2007      975.4559 957.0630 993.8489 947.3263 1003.5856
## May 2007      927.2905 907.6078 946.9733 897.1883 957.3927
## Jun 2007      886.9869 866.0935 907.8803 855.0333 918.9406
## Jul 2007      846.4018 824.3638 868.4397 812.6977 880.1058
## Aug 2007      851.6340 828.5078 874.7601 816.2656 887.0024
## Sep 2007      821.4789 797.3131 845.6446 784.5206 858.4371
## Oct 2007      859.7003 834.5377 884.8629 821.2174 898.1832
## Nov 2007      885.9358 859.8137 912.0578 845.9855 925.8860
## Dec 2007      847.5773 820.5299 874.6248 806.2118 888.9429
## Jan 2008      942.0805 914.1380 970.0230 899.3462 984.8149
## Feb 2008      958.6720 929.8620 987.4820 914.6110 1002.7330
## Mar 2008     1021.1870 991.5347 1050.8393 975.8377 1066.5363
## Apr 2008      994.3990 963.9274 1024.8705 947.7967 1041.0012
## May 2008      946.2335 914.9639 977.5031 898.4108 994.0563
## Jun 2008      905.9299 873.8820 937.9779 856.9168 954.9431
## Jul 2008      865.3448 832.5367 898.1529 815.1691 915.5204
## Aug 2008      870.5770 837.0258 904.1282 819.2648 921.8891
## Sep 2008      840.4219 806.1435 874.7003 787.9976 892.8462
## Oct 2008      878.6433 843.6526 913.6340 825.1297 932.1570
## Nov 2008      904.8788 869.1896 940.5679 850.2969 959.4606
## Dec 2008      866.5203 830.1461 902.8945 810.8908 922.1499
```

```
# Consumo previsto en noviembre de 2008 (mes 26 de las predicciones)
consumo_nov_2008_ets <- predicciones_ets$mean[26]
cat("\n=== CONSUMO PREVISTO EN NOVIEMBRE DE 2008 ===\n")
```

```
##
## === CONSUMO PREVISTO EN NOVIEMBRE DE 2008 ===

cat("Consumo previsto:", round(consumo_nov_2008_ets, 2), "miles de litros\n")
```

```
## Consumo previsto: 866.52 miles de litros
```

```
# Comparación con el método Holt-Winters del Problema 1
cat("\n=== COMPARACIÓN CON HOLT-WINTERS ===\n")
```

```
##
## === COMPARACIÓN CON HOLT-WINTERS ===

cat("Holt-Winters aditivo:", round(consumo_nov_2008, 2), "miles de litros\n")
```

```
## Holt-Winters aditivo: 859.28 miles de litros
```

```
cat("ETS(A,A,A):", round(consumo_nov_2008_ets, 2), "miles de litros\n")
```

```
## ETS(A,A,A): 866.52 miles de litros
```

```
cat("Diferencia:", round(abs(consumo_nov_2008 - consumo_nov_2008_ets), 2),
    "miles de litros\n")
```

```
## Diferencia: 7.24 miles de litros
```

5) Determina los intervalos de predicción para el mismo tramo del apartado (4). Usa nivel de confianza del 90%.

```
# Intervalos de predicción al 90% de confianza para los próximos 26 meses
predicciones_ets_90 <- forecast(modelo_ets, h = 26, level = 90)
```

```
# Mostrar predicciones con intervalos
cat("=== PREDICCIONES CON INTERVALOS AL 90% DE CONFIANZA ===\n\n")
```

```
## === PREDICCIONES CON INTERVALOS AL 90% DE CONFIANZA ===

print(predicciones_ets_90)
```

```
##          Point Forecast      Lo 90      Hi 90
```

## Nov 2006	866.9927	854.6178	879.3677
## Dec 2006	828.6343	813.3397	843.9290
## Jan 2007	923.1375	905.3968	940.8783
## Feb 2007	939.7290	919.8401	959.6179
## Mar 2007	1002.2440	980.4169	1024.0711
## Apr 2007	975.4559	951.8488	999.0631
## May 2007	927.2905	902.0280	952.5531
## Jun 2007	886.9869	860.1706	913.8033
## Jul 2007	846.4018	818.1164	874.6871
## Aug 2007	851.6340	821.9519	881.3161
## Sep 2007	821.4789	790.4625	852.4952
## Oct 2007	859.7003	827.4044	891.9962
## Nov 2007	885.9358	852.4084	919.4631
## Dec 2007	847.5773	812.8623	882.2924
## Jan 2008	942.0805	906.2167	977.9444
## Feb 2008	958.6720	921.6948	995.6492
## Mar 2008	1021.1870	983.1287	1059.2453
## Apr 2008	994.3990	955.2891	1033.5088
## May 2008	946.2335	906.0994	986.3676
## Jun 2008	905.9299	864.7968	947.0631
## Jul 2008	865.3448	823.2360	907.4535
## Aug 2008	870.5770	827.5145	913.6395
## Sep 2008	840.4219	796.4260	884.4177
## Oct 2008	878.6433	833.7332	923.5534
## Nov 2008	904.8788	859.0722	950.6853
## Dec 2008	866.5203	819.8346	913.2061

```
# Gráfico con intervalos de predicción
```

```
plot(predicciones_ets_90,
     main = "Predicciones del modelo ETS(A,A,A) con intervalos al 90%",
     xlab = "Año",
     ylab = "Consumo de leche (miles de litros)",
     shadecols = "lightblue")
```

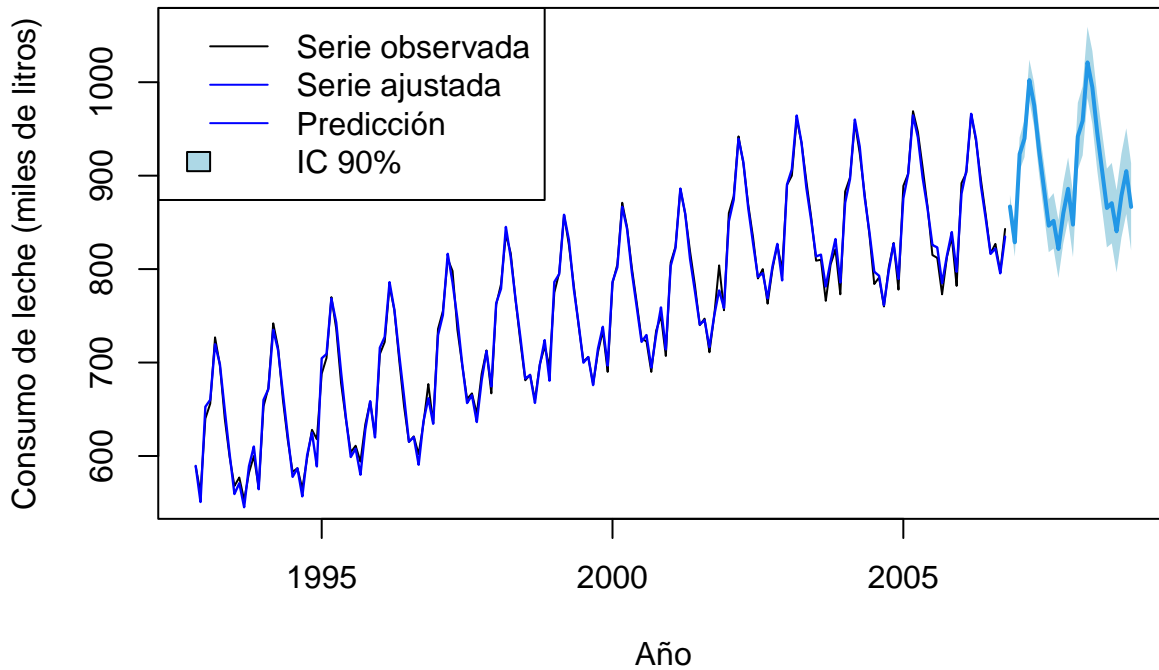
```
# Añadir serie ajustada
```

```
lines(modelo_ets$fitted, col = "blue", lwd = 1.2)
```

```
# Añadir leyenda
```

```
legend("topleft",
     legend = c("Serie observada", "Serie ajustada", "Predicción", "IC 90%"),
     col = c("black", "blue", "blue", "lightblue"),
     lty = c(1, 1, 1, NA),
     fill = c(NA, NA, NA, "lightblue"),
     border = c(NA, NA, NA, "black"))
```


Predicciones del modelo ETS(A,A,A) con intervalos al 90%



```
# Detalles del intervalo para noviembre de 2008
cat("\n=== INTERVALO DE PREDICCIÓN PARA NOVIEMBRE 2008 (90% confianza) ===\n")

##
## === INTERVALO DE PREDICCIÓN PARA NOVIEMBRE 2008 (90% confianza) ===
cat("Predicción puntual:", round(predicciones_ets_90$mean[26], 2), "miles de litros\n")

## Predicción puntual: 866.52 miles de litros
cat("Límite inferior:", round(predicciones_ets_90$lower[26], 2), "miles de litros\n")

## Límite inferior: 819.83 miles de litros
cat("Límite superior:", round(predicciones_ets_90$upper[26], 2), "miles de litros\n")

## Límite superior: 913.21 miles de litros
cat("Amplitud del intervalo:", round(predicciones_ets_90$upper[26] -
  ↪ predicciones_ets_90$lower[26], 2), "miles de litros\n")

## Amplitud del intervalo: 93.37 miles de litros
```

6) ¿A qué se deben las diferencias de resultados entre el modelo ETS y el método de alisado exponencial?

Las diferencias entre el modelo ETS y el método de alisado exponencial (Holt-Winters) se deben principalmente a:

1. Diferencias en la inicialización

- **Holt-Winters:** Utiliza valores iniciales basados en descomposición simple de la serie
- **ETS:** Optimiza también los estados iniciales (nivel, tendencia y factores estacionales) como parámetros del modelo

2. Método de optimización

- **Holt-Winters:** Minimiza la suma de cuadrados residuales (SSE) usando un algoritmo más simple
- **ETS:** Maximiza la verosimilitud logarítmica, lo que puede dar diferentes pesos a las observaciones

3. Criterios de ajuste

- **Holt-Winters:** Se centra únicamente en minimizar el error de ajuste
- **ETS:** Además del ajuste, considera criterios de información (AIC, BIC) que penalizan la complejidad del modelo

4. Flexibilidad del modelo

- **Holt-Winters:** Parámetros de alisado fijos durante la estimación
- **ETS:** Permite explorar diferentes estructuras de error y puede ajustar mejor los parámetros

```

# Comparación numérica de las diferencias
cat("=== ANÁLISIS DE DIFERENCIAS ===\n\n")

## === ANÁLISIS DE DIFERENCIAS ===

# Parámetros de alisado
cat("Parámetros de alisado:\n")

## Parámetros de alisado:
cat("Holt-Winters - :", modelo_hw_mult$alpha,
    ", :", modelo_hw_mult$beta,
    ", :", modelo_hw_mult$gamma, "\n")

## Holt-Winters - : 0.68933 , : 0 , : 0.8362592
cat("ETS(A,A,A) - :", modelo_ets$par["alpha"],
    ", :", modelo_ets$par["beta"],
    ", :", modelo_ets$par["gamma"], "\n\n")

## ETS(A,A,A) - : 0.7262221 , : 0.0001002434 , : 0.0001015463

# Valores iniciales
cat("Estados iniciales:\n")

## Estados iniciales:
cat("Holt-Winters:\n")

## Holt-Winters:
cat(" Nivel inicial:", modelo_hw_mult$coefficients[1], "\n")

## Nivel inicial: 885.7755
cat(" Tendencia inicial:", modelo_hw_mult$coefficients[2], "\n\n")

## Tendencia inicial: 1.278118
cat("ETS(A,A,A):\n")

## ETS(A,A,A):
cat(" Nivel inicial:", modelo_ets$states[1,"l"], "\n")

## Nivel inicial: 606.3027
cat(" Tendencia inicial:", modelo_ets$states[1,"b"], "\n\n")

## Tendencia inicial: 1.576884

# Medidas de bondad de ajuste
cat("Bondad de ajuste:\n")

## Bondad de ajuste:
cat("Holt-Winters - SSE:", round(modelo_hw_mult$SSE, 2), "\n")

## Holt-Winters - SSE: 10534.58
cat("ETS(A,A,A) - SSE:", round(sum(modelo_ets$residuals^2), 2), "\n")

## ETS(A,A,A) - SSE: 8603.46
cat("ETS(A,A,A) - AIC:", round(modelo_ets$aic, 2), "\n")

## ETS(A,A,A) - AIC: 1556.07
cat("ETS(A,A,A) - BIC:", round(modelo_ets$bic, 2), "\n\n")

```

```
## ETS(A,A,A) - BIC: 1609.17
```

```
# Correlación entre predicciones
correlacion_pred <- cor(predicciones, predicciones_ets$mean)
cat("Correlación entre predicciones:", round(correlacion_pred, 4), "\n")
```

```
## Correlación entre predicciones: 0.9966
```

Aunque **Holt-Winters** y **ETS(A,A,A)** son **matemáticamente equivalentes** en su formulación, las diferencias en:

- Los **métodos de estimación de parámetros**
- La **inicialización de estados**
- Los **criterios de optimización**

pueden producir **ligeras diferencias** en los valores ajustados y predicciones. Sin embargo, estas diferencias suelen ser **pequeñas** y ambos modelos proporcionan resultados muy similares cuando se aplican a la misma serie temporal.