RELACIÓN DE PROBLEMAS: ANÁLISIS DISCRIMINANTE
ANÁLISIS ESTADÍSTICO MULTIVARIANTE
GRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE DATOS

1. Dadas tres poblaciones normales bidimensionales con medias $\boldsymbol{\mu}^{(1)} = (1,0)'$, $\boldsymbol{\mu}^{(2)} = (0,1)'$ y $\boldsymbol{\mu}^{(3)} = (0,0)'$ y matrices de covarianzas iguales a

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

   a) Obtener las funciones discriminantes lineales.
   b) Clasificar a $\mathbf{z} = (2,2)'$.
   c) Dibujar las regiones de clasificación para cada grupo.

2. Dadas tres poblaciones normales bidimensionales con medias $\boldsymbol{\mu}^{(1)} = (0,0)'$, $\boldsymbol{\mu}^{(2)} = (1,1)'$ y $\boldsymbol{\mu}^{(3)} = (2,0)'$ y matrices de covarianzas iguales a

$$V = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

   a) Obtener las funciones discriminantes lineales.
   b) Clasificar a $\mathbf{z} = (1,1/2)'$.
   c) Obtener la función discriminante de Fisher, la constante K y el criterio de clasificación para distinguir entre las poblaciones 2 y 3.
   d) Dibujar las regiones de clasificación para cada grupo.

3. Dadas tres poblaciones normales con matriz de covarianzas común

$$V = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y medias $(0,1), (1,0)$ y $(1,1)$, respectivamente, obtener las funciones discriminantes y el criterio de clasificación.

4. Dados dos vectores aleatorios normales bidimensionales con medias $(0,0)$ y $(3,0)$ y matrices de covarianzas
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$
se pide:
   a) Calcular las funciones discriminantes cuadráticas.
   b) Clasificar a $\mathbf{z} = (1,-4)'$ usando dichas funciones.
   c) Representar gráficamente las regiones de clasificación.

5. Dadas dos poblaciones normales bidimensionales con medias $\boldsymbol{\mu}^{(1)} = (1,0)'$ y $\boldsymbol{\mu}^{(2)} = (0,0)'$ y matrices de covarianzas
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ y } V_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
se pide:
   a) Obtener las funciones discriminantes cuadráticas y clasificar a $\mathbf{z} = (1,1)'$.
   b) Clasificar a $\mathbf{z}$ usando el criterio de mínima distancia de Mahalanobis y representar las regiones de clasificación con este criterio para cada grupo.

6. Obtener un criterio de clasificación para dos poblaciones exponenciales unidimensionales con medias distintas usando máxima verosimilitud. Clasificar a $z = 1.5$ entre dos poblaciones exponenciales con medias 2 y 1. (Indicación: La función de densidad de la distribución exponencial es $f(x) = (1/\mu)\exp(-x/\mu)$ para $x \geq 0$).