1) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$f(x) = x - \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

Para empezar, como hay un cociente debemos evitar que el denominador sea cero

$$x - 1 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ No está en el dominio}$$

Por otro lado, tenemos una raíz cuadrado y esto implica que la de dentro, debe ser positivo o cero: $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$

		-2		1	
$x+2$	$- \; - \; -$		$+ \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; +$		$+ \; + \; +$
	$+$		$-$		$+$
$x-1$	$- \; - \; -$		$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$		$+ \; + \; +$

$\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0 \longrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

Por lo tanto el dominio de la función es:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)}$$

2) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x}{\log(x)}}$

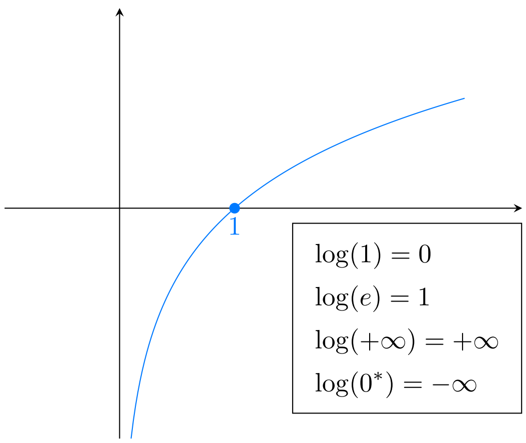
Como hay un cociente entonces el denominador no puede ser cero:

$$\log(x) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ No está en el dominio}$$

Como hay un logaritmo, lo de dentro solo puede ser positivo:

$$\boxed{x > 0}$$

Como tenemos una raíz cuarta (de grado par) entonces lo de dentro no puede ser negativo:



$\dfrac{x}{\log(x)} \geq 0 \longrightarrow x \in (1, +\infty)$

		1	
x	$+ \; + \; +$		$+ \; + \; + \; + \; +$
	$-$		$+$
$\log(x)$	$- \; - \; -$		$+ \; + \; + \; + \; +$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (1, +\infty)}$$

3) Vamos a comprobar si la aplicación

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x + 1$$

es biyectiva, es decir, si es inyectiva y sobreyectiva.

Veamos si la aplicación $f(x)$ es inyectiva:

- Sea:

$$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \longrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Por lo tanto: $f(x)$ es inyectiva.

- Por otro lado: $\forall y \in \mathbb{R} \longrightarrow y = f(x) = 2x + 1$

$2x = 1 - y \longrightarrow x = \dfrac{1-y}{2}$ Por lo tanto $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y \longrightarrow f(x)$ es sobreyectiva.

Nota: Dada una función $y = f(x)$, se dice que esta función tiene inversa $x = f^{-1}(y)$ si cumple que sea inyectiva.
Decimos que $y = f(x)$ es inyectiva si $\forall x_1 \neq x_2$ se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Realmente para comprobar si una función es inyectiva lo que haremos será partir de $f(x_1) = f(x_2)$ y terminar demostrando que $x_1 = x_2$.

Entonces, como $f(x)$ es inyectiva y sobreyectiva en todo $\mathbb{R}$ podemos asegurar que $f(x)$ es biyectiva y por lo tanto existe su función inversa.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$$

4) Comprobar si la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ tiene inversa.

Para que tenga inversa debe ser inyectiva, y esto implica que para elementos diferentes debe tener diferentes y como:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{No es inyectiva} \longrightarrow f(x) \text{ No tiene inversa}$$

5) Dadas las siguientes funciones, averiguar en qué puntos son discontinuas y por qué.

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ si $x \neq 0$, $f(2) = 0$.

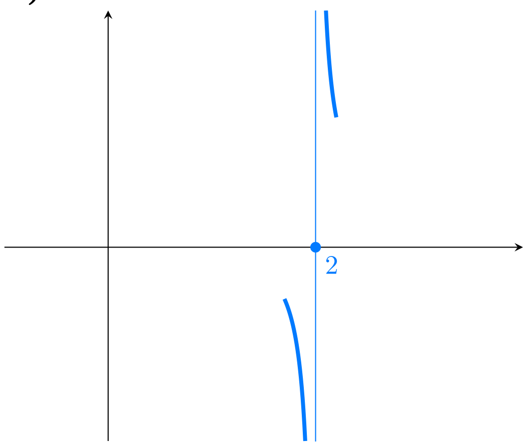
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$\forall x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos ahora si es continua en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$

$f(x)$ No es continua en $x = 2$, en concreto presenta en $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto infinito. Diremos que $f(x)$ presenta en $x = 2$ una asíntota vertical.



6) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^x}}$

Como es un cociente, debemos evitar que el denominador sea cero:

$$1 - e^x = 0 \longrightarrow e^x = 1 \longrightarrow x = \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0} \text{ No pertenece el dominio}$$

Como hay una raíz cuadrada, lo de dentro no puede ser negativo:

$$1 - e^x > 0 \longrightarrow e^x < 1 \longrightarrow x < \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x < 0}$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, el } \mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0)}$

7) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x < 0 \\ xe^{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\forall x < 0 \longrightarrow f(x) = -xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
$\forall x \in (0,1) \longrightarrow f(x) = xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
$\forall x > 1 \longrightarrow f(x) = xe^{1-x}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
Veamos ahora si $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $x = 1$:

<u>En $x = 0$:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (-xe^{x-1}) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (xe^{1-x}) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}$$

Como existe el límite de $f(x)$ en $x = 0$ y coincide con $f(0)$ entonces podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

<u>En $x = 1$:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} xe^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} xe^{1-x} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}$$

Como existe el límite de $f(x)$ en $x = 1$ y coincide con $f(1)$ entonces podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por lo tanto, y resumiendo, diremos que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

8) Determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para los que las siguientes funciones son continuas. Indica su dominio de definición:

a) $f(x) = \begin{cases} ax - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -ax + b & \text{si } \ -1 < x < 2 \\ -2ax + 3b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Para todos los puntos $x \neq -1$ y $x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un polinomio.

<u>Veamos en $x = -1$:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (ax - 5) = -a - 5 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-ax + b) = a + b \\ f(-1) = -a - 5 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, debe cumplirse que

$$-a - 5 = a + b \longrightarrow \boxed{2a + b = -5}$$

<u>Veamos en $x = 2$:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (-ax + b) = -2ab \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (-2ax + 3b) = -4a + 3b \\ f(2) = -4 + 3b \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, debe cumplirse que

$$-2a + b = -4a + 3b \longrightarrow \boxed{2a - 2b = 0}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \longrightarrow 3a = -5 \longrightarrow \\ 2a - 2b = 0 \longrightarrow b = a \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} a = -\dfrac{5}{3} \\ b = -\dfrac{5}{3} \end{array}}$$

Como estos valores de a y b podemos asegurar que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

b) $g(x)=\begin{cases}3x+a & \text{si } -2\leq x<-1\\ bx+a & \text{si } -1\leq x<3\\ 2x-b & \text{si } 3\leq x<5\end{cases}$

Para empezar debemos darnos cuenta de que la función solo está definida para el intervalo: $[-2,5)\longrightarrow \boxed{\mathrm{Dom}(g)=[-2,5)}$

Podemos asegurar que $g(x)$ es continua en $\forall x\in \mathrm{Dom}(g)$ solo en $x=-1$ y $x=3$, que todavía no lo sabemos ya que son los puntos de cambio.

Veamos en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+a)=-3+a\\ \lim\limits_{x\to -1^+}(bx+a)=-bx+a\\ f(-1)=-b+a\end{array}\right\}\quad \text{Para que } g(x) \text{ sea continua en } x=-1 \qquad -3+\cancel{a}=-b+\cancel{a}\longrightarrow \boxed{b=3}$$

Veamos en $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}(bx+a)=9+a\\ \lim\limits_{xto3^+}(2x-b)=3\\ f(3)=3\end{array}\right\}\quad \text{Para que } g(x) \text{ sea continua en } x=3 \qquad 9+a=3\longrightarrow \boxed{a=-6}$$

Por lo tanto, podemos asegurar que si $a=-6$ y $b=3$ entonces $g(x)$ es continua en todo su dominio: $\mathrm{Dom}(g)=[-2,5)$.

9) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{multiplicaremos y dividiremos}\\ \text{por el conjugado de las raíces}\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cancel{1}-x)-(\cancel{1}-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$$

10) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+3x+5}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+4x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{5}{x^2}}}=\boxed{3}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ que sea un cociente de polinomios, lo que haremos para resolverlo será dividir numerada y denominador por x^p siendo p el mayor grado de los términos del denominador.

11) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{x^2+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\cancelto{0}{\frac{3}{x}}}{1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

12) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{x+1}{x-1}-1\right]} = (*) = \boxed{e^{2}}$$

Nota: Siempre que tengamos una indeterminación de la forma 1^{∞}, haremos lo siguiente $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = (1^{\infty}) = e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$

Base:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}{\frac{x}{x}-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}} = 1$$

$$(*) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}} = 2$$

13) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})-(\sqrt{x^2-4})\cdot(\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2-4})}{(\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2-4})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-(\sqrt{x^2-4})^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\cancel{x^2}+1)-(\cancel{x^2}-4)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{+\infty} = \boxed{0}$$

14) Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} & \text{si } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$\forall x\neq 1 \longrightarrow f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos si $f(x)$ es continua en $x=1$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0^-}}+1} = \frac{1}{e^{-\infty}+1} = \left\{e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0\right\} = \frac{1}{1} = 1 \\ &\lim_{x\to 1^+} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0^+}}+1} = \frac{1}{e^{+\infty}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Como los límites laterales no son iguales, entonces no existe el límite en $x=1 \longrightarrow f(x)$ no es continua en $x=1$.

En concreto podemos asegurar que $f(x)$ presenta en $x=1$ una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1ª especie.

$\boxed{\text{Por lo tanto, la conclusión es que } f(x) \text{ es continua } \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}.}$

15) Calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right)^{\frac{x^3}{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right)^{\frac{x^3}{1-x^2}} = (*) = (1^{\infty}) = (**)$$

$$(*)\begin{cases} \text{Base: } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{6}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\frac{4}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}} = 1 \\ \text{Exponente: } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{1-x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}-1} = \dfrac{\infty}{-1} = -\infty \end{cases}$$

$$(**) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-1}-1\right]} = \boxed{e^{7}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-1}-1\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{\cancel{x^2}-3x+6-\cancel{x^2}-4x+1}{x^2+4x-1}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2}\cdot\frac{-7x+7}{x^2+4x-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^3+7x^3}{x^2+4x-1-x^4-4x^3+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^4+7x^3}{-x^4-4x^3+2x^2+4x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{7}{x^4}+\frac{7x^3}{x^4}}{-\frac{x^4}{x^4}-\frac{4x^3}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}+\frac{4x}{x^4}-\frac{1}{x^4}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-7+\cancelto{0}{\frac{7}{x}}}{-1-\cancelto{0}{\frac{4}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{4}{x^3}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^4}}} = \frac{-7}{-1} = 7$$

16) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

Como tenemos:

- $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$
- $\sin\dfrac{1}{x}$ es una función acotada ya que siempre ocurrirá que $-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$

Por lo tanto por el teorema del encaje (Sándwich), tendremos que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$

Nota: Teorema del Sandwich o del encaje

Si tenemos tres funciones tales que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ entonces si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L \longrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = L.$

Una consecuencia de este teorema es la siguiente:

Si tenemos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $g(x)$ está acotada $|g(x)| \le k$ entonces podemos asegurar que

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$$

17) Calcular el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\sin(x)$$

Como se cumple que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$
- La función $\sin(x)$ está acotada, ya que $-1 \le \sin(x) \le 1$

Aplican el teorema del encaje (Sándwich), tendremos que:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\sin(x) = 0}$$

18) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Aplicando la equivalencia: $\sin(x) \rightsquigarrow_0 x$ podemos decir que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

Nota: Hay veces en las que tenemos que hacer límites de funciones conocidas cuando estamos cerca de $x = 0$. En estos casos podemos plantearnos transformar estas funciones en polinomios, mediante las llamadas equivalencias:

$\sin(x) \rightsquigarrow_0 x$	$e^x \rightsquigarrow_0 1+x$	$\arcsin(x) \rightsquigarrow_0 x$
$\cos(x) \rightsquigarrow_0 1-\dfrac{x^2}{2}$	$\log(1+x) \rightsquigarrow_0 x$	$\arctan(x) \rightsquigarrow_0 x$
$\tan(x) \rightsquigarrow_0 x$	$a^x \rightsquigarrow_0 1+x\log(a)$	$(1+x)^n \rightsquigarrow_0 1+nx$

19) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x\sin(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x\sin(2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=(*)$$

Resolveremos este límite aplicando equivalencias:

$$\sin(x)\sim_0 x \longrightarrow \sin(2x)\sim_0 (2x)$$
$$\cos(x)\sim_0 1-\frac{x^2}{2} \longrightarrow \cos(2x)\sim_0 1-\frac{(2x)^2}{2}=1-2x^2$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-2x^2)}{3x\cdot(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

20) Calcular el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)\tan^3(3x)}{(1-\cos^2(x))\cdot(e^x-1)^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)\tan^3(3x)}{\underbrace{(1-\cos^2(x))}_{\sin^2(x)}\cdot(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sin^2(x)}\cdot\tan^3(3x)}{\cancel{\sin^2(x)}\cdot(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(3x)}{(e^x-1)^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=(*)$$

Aplicaremos equivalencias para resolver este límite:

$$\tan(x)\sim_0 x\longrightarrow \boxed{\tan(3x)\sim_0 3x}$$
$$\boxed{e^x\sim_0 1+x}$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^3}{(1+x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{27x^3}{x^3}=\boxed{27}$$

21) Para calcular

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{3-\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}=(0^0)=\lim_{x\to 0^+}e^{\log x^{\frac{2}{3-\ln x}}}=$$
$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{2}{3-\ln x}\cdot\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{3-\ln x}}=(*)=\boxed{e^{-2}}$$

Exponente: $\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3-\ln x}=\{\ln(0^+)=-\infty\}=\frac{2}{\infty}=0$

$$(*)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{3-\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}{\frac{3}{\ln x}-\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}=$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\cancelto{0}{\frac{3}{\ln x}}-1}=-2$$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma 0^0 o ∞^0 que sea indeterminaciones, lo que haremos será aplicar lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=(0^0\text{ ó }\infty^0)=\lim_{x\to a}e^{\log(f(x))^{g(x)}}=$$
$$\lim_{x\to a}e^{g(x)\log f(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)}$$

22) Para calcular

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3)^{\frac{1}{\ln(x^2)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3)^{\frac{1}{\ln x^2}}=(\infty^0)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(5x^3)^{\frac{1}{\ln x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x^2}\ln(5x^3)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(5x^3)}{\ln x^2}}=(*)=e^{\frac{3}{2}}$$

$$(*)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(5x^3)}{\ln x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5+\ln x^3}{\ln x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5+3\ln x}{2\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancelto{0}{\frac{\ln 5}{\ln x}}+3\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}{2\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}=\frac{3}{2}$$

23) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x^3+5x^2+6x+2)}{\ln(x^2+5)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x^3+5x^2+6x+2)}{\ln(x^2+5)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^3\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right)}{\ln\left(x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^3)+\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{2\ln x+\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}=$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}}+\cancel{\frac{\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\ln x}}^{\,0}}{\frac{2\ln x}{\ln x}+\cancel{\frac{\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{\ln x}}^{\,0}}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite que sea un cociente de logaritmos, lo que haremos será sacar en cada logaritmo factor común el término polinómico de mayor grado y mediante reglas de logaritmos lo reduciremos a un cociente de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ donde dividiremos arriba y abajo por $\ln x$.

24) Si queremos calcular A para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ A & \text{si } x=2\end{cases}$$

sea continua en el punto $x_0=2$ lo que tenemos que hacer es calcular.

- Veamos si existe el límite en $x_0=2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4\longrightarrow\lim_{x\to 2}f(x)=4$$

- Como podemos ver en $f(x)$, existe $f(2)$ y vale $f(2)=A$.
- Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$, debe verificarse que $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

$$\boxed{A=4}$$

Nota: Para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x=a$ debe verificar las siguiente condiciones:

i) Exista $\lim_{x\to a}f(x)$

ii) Exista $f(a)$

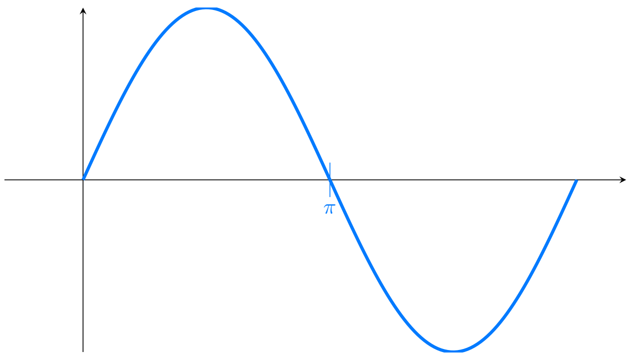
iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

25) Sea $k\in\mathbb{Z}$. Si queremos estudiar la continuidad de la función en el punto $x_0=\pi$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x\neq k\pi\\ 1 & \text{si } x=k\pi,\end{cases}$$

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=\pi$ debemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x}{\sin x}=\left(\frac{\pi}{0}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to\pi^-}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{0^+}=+\infty & \lim_{x\to\pi^+}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{0^-}=-\infty\end{cases}$$



No es continua en $x_0=\pi$ en concreto, podemos asegurar que $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x_0=\pi$. Hay, por lo tanto, una asíntota vertical $x_0=\pi$.

26) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<2\\ x^2 & \text{x } \geq 2\end{cases}$$

en el punto $x_0=2$.

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en el punto $x_0=2$, debemos:

i) Estudiaremos la existencia del límite de $f(x)$ en $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ no es continua en $x = 2$ en concreto presenta una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1ª especie.

27) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

en el punto $x_0 = 1$.

Para estudiar la continuidad, debemos hacer lo primero el límite en $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{0^-}\right)}{e^{\frac{1}{0^-}}+1} = \dfrac{\overbrace{\sin(-\infty)}^{\text{oscilante}}}{\cancelto{0}{e^{-\infty}}+1} = \nexists \lim \text{ ya que es oscilante} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{0^+}\right)}{e^{\frac{1}{0^+}}+1} = \dfrac{\sin(+\infty)}{e^{+\infty}+1} = \dfrac{\sin(+\infty)}{+\infty} = 0 \text{ (Teorema del Sándwich)} \end{cases}$$

No existe el límite ya que hay un límite lateral que no existe $\longrightarrow f(x)$ no es continua en $x_0 = 1$.

28) Consideremos las funciones

$$f(x) = e^{-x}x \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

Estudiar la continuidad de la función $f \circ g$

La composición de funciones $f \circ g$, consiste en realizar la función $g(x)$, y donde esta termine comenzaremos $f(x)$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x)$$

$$\frac{1}{x} \longrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$f(x) = e^{-x} \cdot x$$

Por lo tanto, tenemos que: $\boxed{(f \circ g) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}}$.

Por lo tanto podemos asegurar que $(f \circ g)$ es continua en todos los $\mathbb{R}$ salvo en $x = 0$, donde $\nexists (f \circ g)(0)$

29) Dadas las funciones reales $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Calcular las expresiones de $g \circ f$ y $f \circ g$.

Comenzamos calculando $g \circ f$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g\left(f(x)\right) \longrightarrow \boxed{(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}}$$

$$x \longrightarrow \sin x \longrightarrow \sqrt{\sin x}$$

Calcularemos ahora $f \circ g$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f\left(g(x)\right) \longrightarrow \boxed{(f \circ g)(x) = \sin(\sqrt{x})}$$

$$x \longrightarrow \sqrt{x} \longrightarrow \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

30) Para calcular el límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \left(\frac{0}{0}\right) = (*)$$

$$x^2-x-2=0 \longrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}\begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \longrightarrow (x^2-x-2) = (x-2)(x+1)$$

$$x^3-12x+16=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -12 & 16 \\ 2 & & 2 & 4 & -16 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 8 & \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{0} & \end{array} \qquad (x^3-12x+16) = (x-2)^2(x+4)$$

$$(*) = \lim_{x\to 2} \frac{[(x-2)(x+1)^{20}]}{[(x-2)^2(x+4)]^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)^{20}}\cdot(x+1)^{20}}{\cancel{(x-2)^{20}}\cdot(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{20}}{2^{10}\cdot 3^{10}} = \boxed{\frac{3^{10}}{2^{10}}}$$

31) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}.$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{(x-x_0)}(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$$

32) Calcula la correspondencia inversa de las funciones:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

La función inversa es aquella que verifica que si $f(x) \longrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \longrightarrow \frac{x-1}{x+2} = y^2 \longrightarrow (x-1) = y^2(x+2)$$
$$x-1 = xy^2+2y^2 \longrightarrow x-xy^2 = 1+2y^2 \longrightarrow x(1-y^2) = 1+2y^2$$

$$x = \frac{1+2y^2}{1-y^2} \longrightarrow \boxed{x\cdot f^{-1}(y) = \frac{1+2y^2}{1-y^2}}$$

33) Calcula la correspondencia inversa de las funciones:

$$y = \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$$

La función invertible que verifica que si $y = f(x) \longrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y = \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \longrightarrow (2-\sqrt{x})y = 2+\sqrt{x} \longrightarrow 2t - t\sqrt{x} = 2+\sqrt{x} \longrightarrow 2y-2 = 2\sqrt{x}+\sqrt{x}$$

$$2y-2 = (y+1)\sqrt{x} \longrightarrow \sqrt{x} = \frac{2y-2}{y+1} \longrightarrow x = \left(\frac{2y-2}{y+1}\right)^2 \longrightarrow \boxed{x = f^{-1}(y) = \left(\frac{2y-2}{y+1}\right)^2}$$

34) Calcula el dominio de las siguiente funciones:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Como $f(x)$ está definida mediante un cociente, entonces tenemos que su denominador no puede ser cero

$$x+1=0 \longrightarrow x=-1$$
$$\boxed{\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}}$$

35) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$g(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$

Como tenemos un cociente, el denominador no puede ser cero.

$$x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow x=\pm 2$$
$$\boxed{\mathrm{Dom}(g(x))=\mathbb{R}-\{-2,\,2\}}$$

36) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$l(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

- Lo primero que tenemos es un cociente, el cual no puede tener el denominador igual a cero

$$x+2=0 \longrightarrow \boxed{x=-2} \text{ No está en el dominio}$$

- Como tenemos una raíz cuadrada, entonces lo de dentro no puede ser negativo:

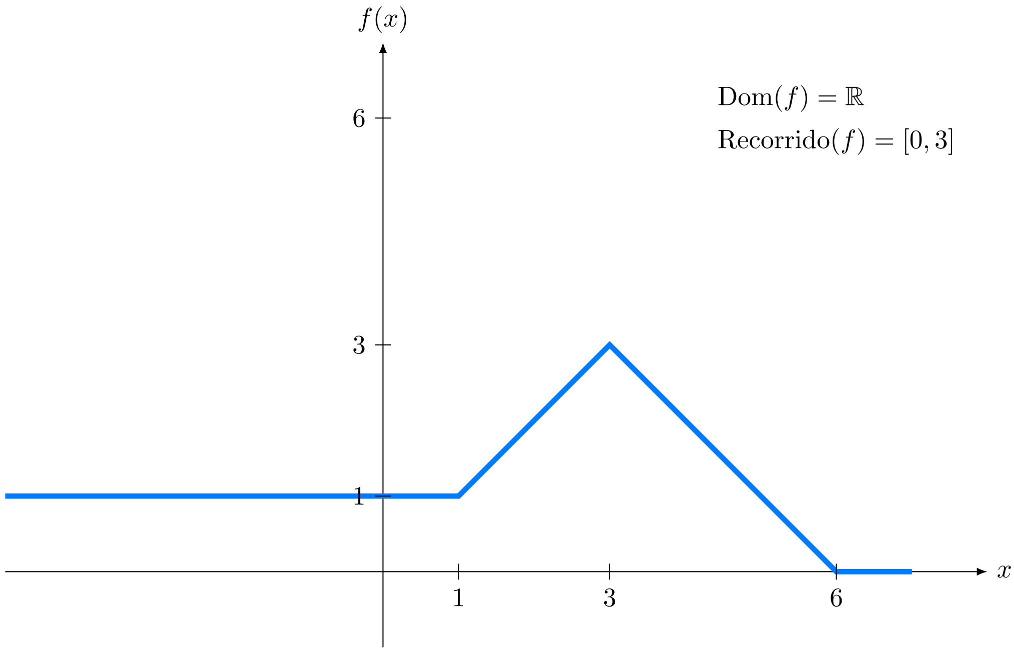
$\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0$

			1
$x-1$	$- \; - \; -$	$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$	$+ \; + \; +$
	$+$	$-$	$+$
$x+2$	$- \; - \; -$	$+ \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; +$	$+ \; + \; +$
	-2		

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)}$$

37) Representa la función

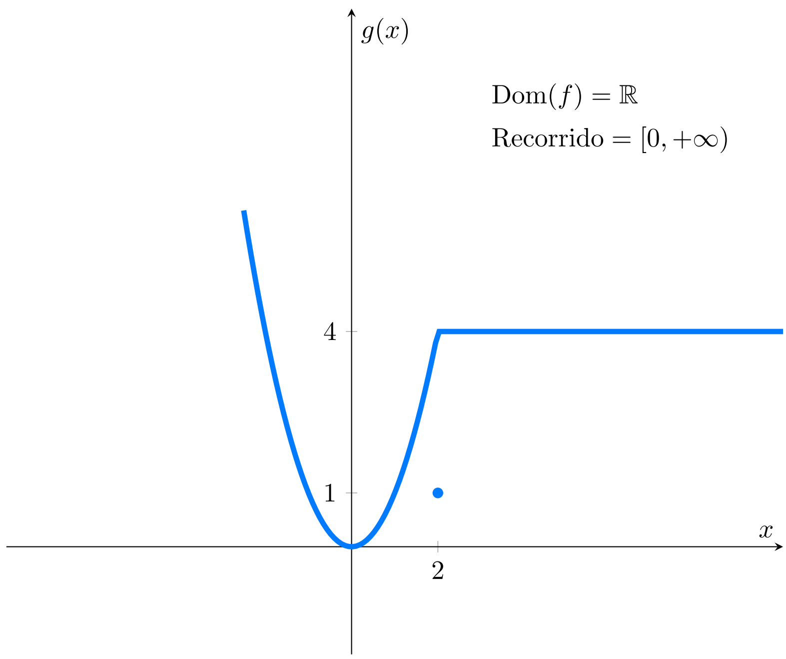
$$y=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leq 1 \\ x & \text{si } 1<x\leq 3 \\ -x+6 & \text{si } 3<x\leq 6 \\ 0 & \text{si } 6<x \end{cases}$$



38) Representa la función

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Escribe su dominio y su recorrido



39) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1}$$

40) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\cancel{(x-1)}\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{2\cdot\frac{2}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$x^2-1=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=\pm 1 \longrightarrow (x^2-1)=(x-1)(x+1)$$

$$2x^2-x-1=0 \longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}\begin{cases}1\\ -\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad 2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

41) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}}{2-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

42) Calcula los siguientes límites:

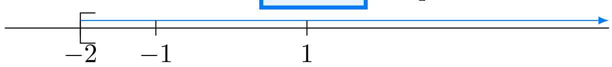
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-4x^2+x-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{+\infty}{\cancel{5x}}-4+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}}{2-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}}=+\infty$$

43) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ y $g(x)=\sqrt{x+2}$ escribe los criterios y dominios de las funciones $f\cdot g$ y $f:g$.

$$f\cdot g=f(x)\cdot g(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}\longrightarrow (f\cdot g)(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$$

- Por la raíz cuadrada tenemos que $x+2\geq 0 \longrightarrow \boxed{x\geq -2}$
- Por el cociente, su denominador debe ser distinto de cero:

$$x^2-1=0\longrightarrow x^2=1\longrightarrow \boxed{x=\pm 1}\ \text{No pertenece al dominio.}$$

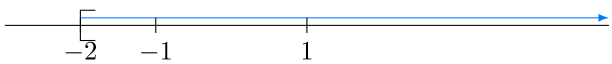


$$\boxed{\mathrm{Dom}(f\cdot g)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}\longrightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}}$$

- Por la raíz tenemos que $x+2\geq 0\longrightarrow \boxed{x\geq -2}$
- Por el cociente:

$$x^2-1=0\longrightarrow x^2=1\longrightarrow \boxed{x=\pm 1}\ \text{No puede ser}$$
$$x+2=0\longrightarrow x=-2\longrightarrow \ \text{No puede ser}$$



$$\boxed{\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)}$$

44) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos 3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}}=(*)$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{Equivalencias}\\ \cos x\sim_0 1-\dfrac{x^2}{2}\\ \cos(3x)\sim_0 1-\dfrac{(3x)^2}{2}\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\frac{9x^2}{2}-\cancel{1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{2}x^2}{x^2}=\boxed{-\frac{9}{2}}$$

Nota: Siempre que tengamos una indeterminación de la forma 1^∞, debemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\,(f(x)-1)}$$

45) Analiza la continuidad de las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4 & x<-2 \\ x+1 & -2\leq x<2 \\ 2x-1 & x\geq 2 \end{cases}$$

$\forall x<-2 \longrightarrow f(x)$ es continua
$\forall x\in(-2,2) \longrightarrow f(x)$ es continua
$\forall x\geq 2 \longrightarrow f(x)$ es continua
Veamos ahora si es continua en los puntos de cambio de trozo:

$x=-2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-}(x^2-4)=0 \\ \lim\limits_{x\to -2^+}(x+1)=-1 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to -2} f(x) \longrightarrow$$

$f(x)$ No es continua en $x=-2$, en concreto presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

$x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}2x-1=3 \\ f(2)=3 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x=2$$

$$\boxed{f(x) \text{ es continua } \forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}}$$

46) Analiza la continuidad de las siguientes funciones

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0 \\ x+1 & 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{1}{x^2-9} & x>3 \end{cases}$$

$\forall x<0 \longrightarrow p(x)$ es continua.
$\forall x\in(0,3) \longrightarrow p(x)$ es continua.
$\forall x>3 \longrightarrow p(x)$ es continua.
Nos falta comprobar si $p(x)$ es continua en $x=0$ y $x=3$.

$\boxed{x=0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} p(x) \longrightarrow$$

$p(x)$ no es continua en $x=0$. En concreto tenemos diremos que presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito. Habrá una asíntota vertical en $x=0$

$\boxed{x=3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 3} p(x) \longrightarrow$$

$p(x)$ no es continua en $x=3$. En concreto diremos que presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito. Habrá una asíntota vertical en $x=3$.

47) Representa la función $y = x^2 + 4x + 4$ e indica cuál es su recorrido.

- Como el coeficiente líder es positivo: $\bigcup$
- Puntos de corte con el eje OX:

$$x^2 + 4x + 4 \longrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm 0}{2} = -2 \text{ (doble)} \longrightarrow P(-2, 0)$$

- El vértice: $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2} = -2 \longrightarrow \underset{y(-2)=0}{V(-2,0)}$

Cuando no tenemos puntos de corte con el eje OC o coincide con el vértice, entonces tomamos la imagen de dos puntos que estén a ambos lados del vértice y a la misma distancia:

$$x = -3 \longrightarrow y(-3) = 9 - 12 + 4 = 1$$

$$x = -1 \longrightarrow y(-1) = 1 - 4 + 4 = 1$$

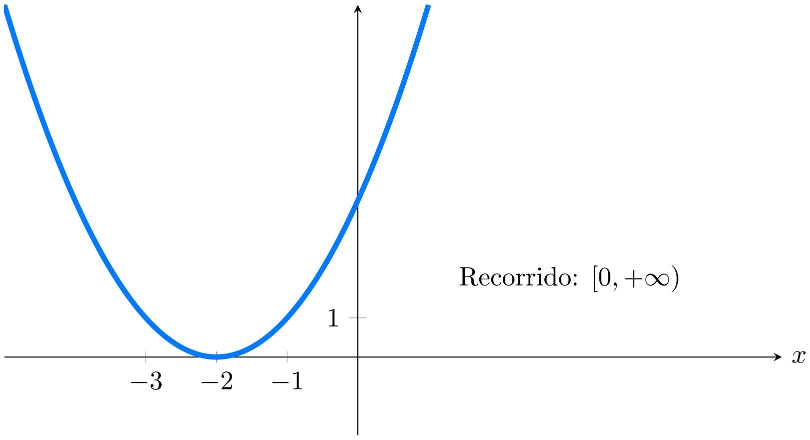
Nota: Para representar gráficamente una parábola $y = ax^2 + bx + c$, debemos siempre tener en cuenta lo siguiente:

i) Si $a > 0$ tiene ramas hacia arriba $\bigcup$. Si $a < 0$ tiene ramas hacia abajo $\bigcap$.

ii) Debemos obtener los puntos de corte con el eje $x \longrightarrow ax^2 + bx + c = 0$

iii) Debemos obtener el vértices:

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$



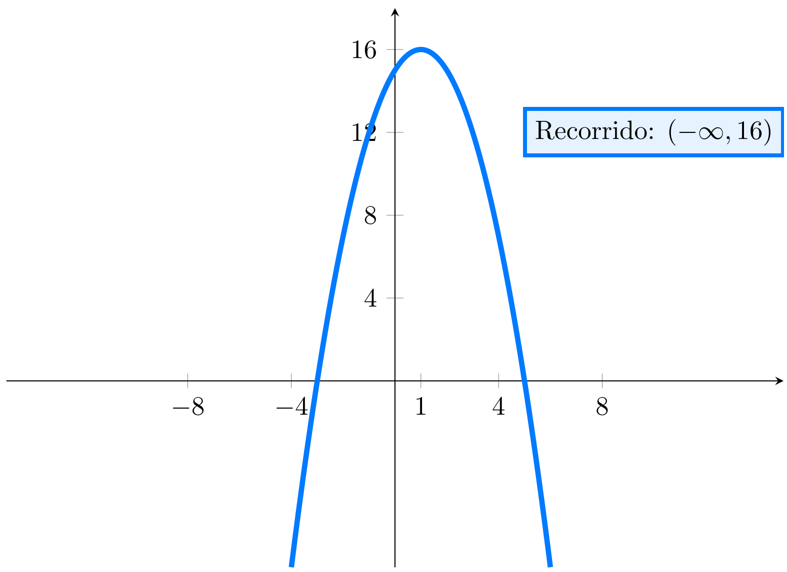
48) Representa la función $y = -x^2 + 2x + 15$ e indica su recorrido.

- Como el coeficiente líder es negativo (-1) entonces la parábola es $\bigcap$.

- Puntos de corte con el eje OX:

$$-x^2 + 2x + 15 = 0 \longrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{-2} = \frac{-2 \pm 8}{-2} \begin{cases} -3 & P(-3, 0) \\ 5 & P(5, 0) \end{cases}$$

- Vértice: $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \longrightarrow \begin{array}{l} x_V = 1 \\ y(1) = -1 + 2 + 15 = 16 \end{array} \quad V = (1, 16)$



49) Dadas las funciones $f(x) = x + 3$, $g(x) = x + 1$, calcula las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

Realizar una composición de funciones consiste en realizar una función, y justo donde termina esta empezaría la otra, tomando las imágenes de lo primero como los elementos de la segunda.

$\boxed{g \circ f}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & g\left(f(x)\right) \\ x \arrow[r] & x+3 \arrow[r] & (x+3)+1 \end{tikzcd}$$

$x + 1$

$$\boxed{(g \circ f)(x) = x + 4}$$

Es Casualidad que salgan iguales. No tiene por qué.

$\boxed{f \circ g}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & f\left(g(x)\right) \\ x \arrow[r] & x+1 \arrow[r] & (x+1)+3 \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(f \circ g)(x) = x + 4}$$

50) Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$. Con las funciones del ejercicio anterior, calcula $g \circ f$ y $f \circ g$.

$\boxed{g \circ f}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & f\left(g(x)\right) \\ x \arrow[r] & \dfrac{1}{x^2-1} \arrow[r] & \sqrt{\dfrac{1}{x^2-1} + 2} = \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(g \circ f)\,(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}}}$$

$\boxed{f \circ g}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & f\left(g(x)\right) \\ x \arrow[r] & \sqrt{x+2} \arrow[r] & \dfrac{1}{(\sqrt{x+2})^2 - 1} = \dfrac{1}{x+1} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(f \circ g)\,(x) = \frac{1}{x+1}}$$

51) Haz lo mismo con las funciones $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, calcula las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

$\boxed{g \circ f}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & f\left(g(x)\right) \\
x \arrow[r] & \sqrt{x+3} \arrow[r] & \dfrac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+2}
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{(g \circ f)\,(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+2}}$$

$\boxed{f \circ g}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & f\left(g(x)\right) \\
x \arrow[r] & \dfrac{x+1}{x+2} \arrow[r] & \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}+3} = \sqrt{\dfrac{4x+7}{x+2}}
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{(f \circ g)\,(x) = \sqrt{\frac{4x+7}{x+2}}}$$

52) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+1}}$$

- Lo primero que tenemos es un cociente, por lo tanto, el denominador no puede ser cero.

$$x^2+1 \neq 0$$

- Como tenemos una raíz cuadrada, entonces lo de dentro no puede ser negativo:

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0$$

		-2		2	
x^2-4	+ + + + + +		− − − − − − − − − − − − −		+ + + + + +
	+		−		+
x^2+1	+ + + + +		+ + + + + + + + + +		+ + + + +

$$\boxed{\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)}$$

53) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-2)}}$$

- Para empezar tenemos un cociente, y debe verificar que su denominador sea distinto de cero:

  $x+2=0 \longrightarrow \boxed{x=-2}$ No pertenece al Dom(f)

  $x-2=0 \longrightarrow \boxed{x=2}$ No pertenece al Dom(f)

- Como tenemos una raíz cuadrada lo de dentro no puede ser negativo:

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty,-2] \cup [1,2] \cup [3,+\infty)}$$

54) Calcular

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = (0^0) = \lim_{x\to 0} e^{\log x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \cdot \log x} = (*) = e^0 = \boxed{1}$$

$$(*) = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \log x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Equivalencias}\\ \sin x \rightsquigarrow_0 x\end{array}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Nota: Siempre que tengamos indeterminaciones de la forma 0^0 o ∞^0 lo que haremos será aplicar e elevando al logaritmo:
$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = (0^0 \text{ o } \infty^0) = \lim_{x\to a} e^{\log(f(x))^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\log(f(x))}$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma $0\cdot\infty$ lo que haremos será bajar dividiendo un de las dos funciones para que así nos quede un límite de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y podamos aplicarle la regla de L'Hôpital que dice:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

55) Calcular

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}.$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x} = (\infty^0) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} e^{\log(\tan x)^{\cos x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} = (*) = e^0 = \boxed{1}$$

$$(*) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \cdot \log(\tan x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\log(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{Regla de}\\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\cancel{\frac{1}{\cos^2 x}}}{\frac{\sin x}{\cancel{\cos^2 x}}} =$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\tan x \cdot \sin x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

56) Calcular

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x\sin(x-1)(1-\cos(x-1))}{(x-1)^3\ln(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x\sin(x-1)(1-\cos(x-1))}{(x-1)^3\ln(x-1)} = \left(\frac{0}{0\cdot\infty}\right) = (*)$$

Podemos aplicar equivalencias:

$$\sin x \rightsquigarrow_0 x \longrightarrow \sin(x-1) \rightsquigarrow_0 (x-1)$$

$$\cos x \rightsquigarrow_0 1-\frac{x^2}{2} \longrightarrow 1-\cos x \rightsquigarrow_0 \frac{x^2}{2} \longrightarrow 1-\cos(x-1) \rightsquigarrow_0 \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$(*) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot \cancel{(x-1)}\cdot \cancel{\frac{(x-1)^2}{2}}}{\cancel{(x-1)^3}\cdot \ln(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{2\ln(x-1)} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0}$$

Lista de derivadas inmediatas

1. $f(x)=x^n \longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$
2. $f(x)=\log x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$
3. $f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x$
4. $f(x)=a^x \longrightarrow f'(x)=a^x\cdot\log a$
5. $f(x)=\sin x \longrightarrow f'(x)=\cos x$
6. $f(x)=\cos x \longrightarrow f'(x)=-\sin x$

   $\mathrm{Sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

   $\mathrm{Ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
7. $f(x)=\tan(x) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $f(x)=\coth x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{\sin x}$
9. $f(x)=\arctan x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
10. $f(x)=\arcsin x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $f(x)=\arccos x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $f(x)=k \longrightarrow f'(x)=0$
13. $f(x)=\mathrm{Sh}x \longrightarrow f'(x)=\mathrm{Ch}x$
14. $f(x)=\mathrm{Ch}x \longrightarrow f'(x)=\mathrm{Sh}x$
15. $f(x)=\tanh x \longrightarrow f'(x)=1-\tanh^2 x$

Reglas básicas de derivación:

1. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
2. $(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x)$
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
5. Regla de la cadena:

   $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
6. Derivada de la inversa:

   $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{(f'(x))}$

57) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4+3x^2 \longrightarrow f'(x)=4x^2+6x$

b) $f(x)=x\sin x$

$$f(x)=\underbrace{x}\cdot\underbrace{\sin x}$$

$$f'(x)=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x \longrightarrow \boxed{f'(x)=\sin x+x\cos x}$$

c) $f(x)=\dfrac{x}{2^x}=x\cdot 2^{-x}$

$$f'(x)=1\cdot 2^{-x}+x\cdot 2^{-x}\cdot\log 2\cdot(-1)=2^{-x}\left[1-x\log 2\right] \longrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{1-x\log 2}{2^x}}$$

58) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x}=(x^2+3x)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+3x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+3)=\frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x)^2}} \longrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x)^2}}}$$

b) $f(x)=\sqrt{\cos x}=(\cos x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}$$

c) $f(x) = \sin(x^3 + 3)$

$$f'(x) = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x \longrightarrow \boxed{f'(x) = 2x\cos(x^2 + 3)}$$

59) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{x+\sin x} \longrightarrow \boxed{f'(x) = e^{x+\sin x} \cdot (1 + \cos x)}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 5} \longrightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot (x^2 + 5) - 2x \cdot \sin x}{(x^2 + 5)^2}}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{\cancel{1-x}}\right)} \cdot \frac{1 \cdot (1 - \cancel{x}) + (1 + \cancel{x}) \cdot 1}{(1 - x)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{(1 + x)(1 - x)} = \boxed{\frac{2}{1 - x^2}}$$

60) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \arcsin(\ln x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}} \cdot \frac{1}{x} \longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}}$$

b) $f(x) = \sin(\arctan x)$

$$f'(x) = \cos(\arctan x) \cdot \frac{1}{1 + x^2} \longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{\cos(\arctan x)}{1 + x^2}}$$

c) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{e^x}\right) = \cos(x \cdot e^{-x})$

$$f'(x) = -\sin(xe^{-x}) \cdot \left[1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1)\right] = \boxed{-e^{-x}\sin(xe^{-x})[1 - x]}$$

61) Calcular la derivada de la función inversa de $y = \sin x$.

Tenemos $\quad f(x) = \sin x \longrightarrow f^{-1}(x) = \arcsin x$

$\qquad\qquad y = \sin x \longrightarrow x = \arcsin y$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \longrightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \longrightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \{y = \sin x\} = \sqrt{1 - y^2}$$

62) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x - 4x^2 - 1}{2x^3 - x - 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{4x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\cancelto{0}{\frac{4}{x}} + \cancelto{0}{\frac{5}{x^2}} - \cancelto{0}{\frac{1}{x^3}}}{2 - \cancelto{0}{\frac{1}{x^2}} - \cancelto{0}{\frac{1}{x^3}}} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ que sea un cociente de polinomios lo que haremos será dividir numerador y denominador por x^p, siendo p el mayor grado del denominador.

63) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 3x}{x(x - 2)\tan 2x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x\underbrace{(x-2)}_{\text{No da problemas}}\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9x^2}{2}}{x(x-2)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}(x-2)} = \boxed{-\frac{9}{8}}$$

Equivalencias:

$$\cos x \rightsquigarrow_0 1 - \cos x \rightsquigarrow_0 \frac{x^2}{2} \longrightarrow 1-\cos(3x) \rightsquigarrow_0 \frac{(3x)^2}{2} = \frac{9x^2}{2}$$

$$\tan x \rightsquigarrow_0 x \longrightarrow \tan(2x) \rightsquigarrow_0 2x$$

64) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-\sqrt{x}}$$

1ª Forma:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \{\text{Regla de L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2}$$

2ª Forma:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\log x\cdot(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{\log x\cdot(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\log x\cdot(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})}{x\cancel{(x-1)}} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

Equivalencias:

$$\log(1+x) \rightsquigarrow_0 x$$
$$\log(x) = \log\left(1+\boxed{(x-1)}\right) \rightsquigarrow_1 \boxed{(x-1)}$$

65) Analiza la continuidad de las siguientes funciones

$$q(x) = \begin{cases} -2x+1 & x \le 0 \\ 2x+3 & 0 < x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x \ge 2 \end{cases}$$

- $\forall x < 0$ $f(x)$ es continua por ser un polinomio.
- $\forall x \in (0,2)$ $f(x)$ es continua por ser un polinomio.
- $\forall x > 2 \longrightarrow f(x)$ es continua por ser un cociente de continuas con denominador $\neq 0$.

Veamos en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} (-2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+3) \end{array}\right\}$$

No es continua en $x = 0$, en concreto presenta una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1ª Especie.

Veamos en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} (2x+3) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$

No es continua en $x = 2$, en concreto presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito o de 2ª especie. Habría una asíntota vertical en $x = 2$.

66) Calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

$\log f(x) = \log(x^{\sin x}) = \sin x \cdot \log x$

Derivo:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \cos x \cdot \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = f(x) \left[\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right]$$
$$\boxed{f'(x) = x^{\sin x} \left[\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right]}$$

Nota: Si tenemos que derivar una función en forma exponencial, donde, tanto base como exponente dependen de x, $(f(x))^{g(x)}$. Lo que haremos será meter logaritmo y bajar el exponente. Derivaremos y despejaremos la derivada. Este tipo de derivación se llama **Derivación logarítmica**.

67) Calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = (\sin x)$$

Realizaremos la derivada de esta función mediante derivación logarítmica:

$$\log f(x) = \log\left(\sin x\right)^{\log x} = \log x \cdot \log(\sin x)$$

Nota: Si tenemos que derivar una función en forma exponencial, donde, tanto base como exponente dependen de x, $(f(x))^{g(x)}$. Lo que haremos será meter logaritmo y bajar el exponente. Derivaremos y despejaremos la derivada. Este tipo de derivación se llama **Derivación logarítmica**.

Por lo tanto, nos queda:

$$\log(f(x)) = \underbrace{\log x}_{} \cdot \underbrace{\log(\sin x)}_{}$$

Derivamos en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log(\sin x) + \log x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\log(\sin x)}{x} + \log x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$f'(x) = f(x) \left[\frac{\log(\sin x)}{x} + \log x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right]$$
$$\boxed{f'(x) = (\sin x)^{\log x} \cdot \left[\frac{\log(\sin x)}{x} + \log x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right]}$$

68) Calcular la recta tangente a la curva dada por $f(x) = x^x$ en $x = 1$.

Como queremos hallar la recta tangente, entonces:

$$y - b = m(x - a) \begin{cases} b = f(a) \\ m = f'(a) \end{cases}$$
$$\boxed{a = 1}$$
$$b = f(1) = 1^1 = 1 \longrightarrow \boxed{b = 1}$$

Nota: Dada una curva $y = f(x)$, para hallar la recta tangente a dicha curva en el punto $x = a$, debemos obtener la expresión:

Recta tangente	Recta normal
$y - b = m(x - a)$ $b = f(a)$ $m = f'(a)$	$y - b = m(x - a)$ $b = f(a)$ $m = -\dfrac{1}{f'(a)}$

Para hallar la derivada, debemos aplicar derivación logarítmica:

$$\log f(x) = \log(x^x) = x \log x$$

Derivo:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \log x \longrightarrow f'(x) = f(x)(1 + \log x)$$
$$\boxed{f'(x) = x^x \left[1 + \log x\right]} \longrightarrow f'(1) = 1^1 \left[1 + \cancelto{0}{\log 1} \right] = 1 \longrightarrow \boxed{m = f'(1) = 1}$$

Por lo tanto, la recta tangente viene dada por:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \longrightarrow \boxed{y = x}$$

69) Determinar la derivada de $h(x) = x^{x^2+1}$.

Como la expresión de $h(x)$ es una exponencial donde tanto la base como el exponente dependen de x, entonces debemos derivar esta expresión mediante derivación implícita:

$$\log(h(x)) = \log\left(x^{x^2+1}\right) = (x^2+1)\cdot\log x$$

Derivando:

$$\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x) = 2x\log x + (x^2+1)\cdot\frac{1}{x} = 2x\log x + \left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$h'(x) = h(x)\left[2x\log x + \left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = x^{x^2+1}\left[2x\log x + x + \frac{1}{x}\right]$$

$$\boxed{h'(x) = x^{x^2+1}\left[2x\log x + x + \frac{1}{x}\right]}$$

70) Utilizando las reglas de L'Hôpital vamos a calcular los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{e^x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{e^x} = \boxed{3}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite que sea el cociente de dos funciones y nos de una indeterminación de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ o $\left(\frac{0}{0}\right)$ podemos plantearnos resolverlo mediante la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\text{ ó }\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

71) Utilizando las reglas de L'Hôpital vamos a calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{3x^3+2x^4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{3x^3+2x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{9x^2+8x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{18x+24x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \{\text{L'Hôpital}\} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{18+48x} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

72) Utilizando las reglas de L'Hôpital vamos a calcular los siguientes límites

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

73) Calcular el polinomio de Taylor de orden 5 de la función $f(x) = e^x$ centrado en el punto $x_0 = 0$.

Nota: Cuando calculamos el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ entonces tiene un nombre especial para este caso, que es desarrollo de McLaurin.

Como nos piden el desarrollo de McLaurin de orden 5 entonces:

$$T_5(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{\text{iv}}(0)}{4!} + \frac{f^{\text{v}}(0)}{5!}x^5$$

$f(x) = e^x \to f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \to f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \to f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x \to f'''(0) = 1$

$f^{\text{iv}}(x) = e^x \to f^{\text{iv}}(0) = 1$

$f^{\text{v}}(x) = e^x \to f^{\text{iv}}(0) = 1$

$$\boxed{T_5(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5}$$

Nota: Dada una función $f(x)$, se define su polinomio de Taylor de orden n, centrado en un punto $x_0 = a$, como:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Debemos ver que un desarrollo de Taylor es una aproximación de cualquier función mediante un polinomio. La función y el polinomio son parecidas pero no iguales, por eso existe una expresión que nos permitirá dar una cota del error que se comete en la aproximación. Resto de Lagrange:

$$R_n(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|_{a<c<x}$$

74) Determinar el polinomio de Taylor de grado menor o igual que de la función $f(x) = \sin x$ en el punto $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Nos están pidiendo que construyamos:

$$T_5(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cancel{\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3} + \frac{f^{\text{iv}}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \cancel{\frac{f^{\text{v}}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}$$

$f(x) = \sin x \longrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f'(x) = \cos x \longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f''(x) = -\sin x \longrightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$f'''(x) = -\cos x \longrightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f^{\text{iv}}(x) = \sin x \longrightarrow f^{\text{iv}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f^{\text{v}}(x) = \cos x \longrightarrow f^{\text{v}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\boxed{T_5(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{24}\right)^4}$$

75) Hallar el desarrollo de McLaurin de orden 4 de la función $f(x) = \log(1+x)$

Como nos piden el desarrollo de McLaurin, quiere decir, que queremos el desarrollo de Taylor pero centrado en el punto $x_0 = 0$. Por lo tanto queremos obtener:

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{\text{iv}}(0)}{4!}x^4$$

$f(x) = \log(1+x) \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2} = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \longrightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} = \dfrac{2}{(1+x)^3} \longrightarrow f'''(0) = 2$

$f^{\text{iv}}(x) = (-6)(1+x)^{-4} = -\dfrac{6}{(1+x)^4} \longrightarrow f^{\text{iv}}(0) = -6$

$$T_4(x) = \frac{1}{1}x + \frac{(-1)}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + \frac{(-6)}{24}x^4$$

$$\boxed{T_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4}$$

76) Hallar el desarrollo de McLaurin de orden 5 de la función $f(x) = \sin x$. Utilizando para dar un valor aproximado de $\sin(0.2)$ y acotar el error cometido en dicha aproximación.

Como queremos hacer el desarrollo de McLaurin (Taylor con $x_0 = 0$) hasta orden 5, tendremos que:

$$T_5(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{\text{iv}}(0)}{4!} + \frac{f^{\text{v}}(0)}{5!}x^5$$

Vamos a hacer hasta la derivada sexta, pues la necesitaremos para luego acotar el resto de Lagrange (cota de error).

<u>Nota:</u> Siempre que a partir de un desarrollo de Taylor nos piden que luego acotemos el error, lo que haremos será utilizar la expresión del resto de Lagrange, esto implica que necesitaremos hacer una derivada más de las que haremos para Taylor. Si queremos Taylor hasta orden n, necesitaremos hacer hasta la derivada $(n+1)$.

$f(x) = \sin x \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \longrightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \longrightarrow f'''(0) = -1$

$f^{\text{iv}}(x) = \sin x \longrightarrow f^{\text{iv}}(0) = 0$

$f^{\text{v}}(x) = \cos x \longrightarrow f^{\text{v}}(0) = 1$

$f^{\text{vi}}(x) = -\sin x$

$$\boxed{T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5}$$

Desarrollo de McLaurin hasta orden 5

Como queremos dar un valor aproximado de $\sin(0.2)$, utilizando el desarrollo de $f(x) = \sin x \longrightarrow f(x) = \sin(x) = \sin(0.2) \rightsquigarrow \boxed{x = 0.2}$

$$T_5(x = 0.2) = 0.2 - \frac{1}{6}(0.2)^3 + \frac{1}{120}(0.2)^5 = 0.19866933 \longrightarrow \boxed{\sin(0.2) \simeq 0.19866933}$$

Para calcular la cota del error cometido en esta aproximación, utilizaremos la expresión del resto de Lagrange de orden 5:

$$R_5 = \left|\frac{f^{\text{vi}}(c)}{6!}(x-a)^6\right|_{a<c<x} = \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ x = 0.2 \end{array}\right\} = \left|\frac{-\sin(c)}{720}(0.2)^6\right|_{0<c<0.2} = \left\{\begin{array}{l} \text{Como sabemos que:} \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ en-} \\ \text{tonces: } |-\sin c| \leq 1 \end{array}\right\} = \frac{|-\sin c|}{720}(0.2)^6 \leq \frac{1}{720}(0.2)^6 =$$

$88.88 \cdot 10^{-9} \longrightarrow$ Cota superior del error cometido en la aproximación será:

$$\boxed{E < 88.88 \cdot 10^{-9}}$$

77) Calcular $\sin(0.3)$ mediante la fórmula de McLaurin. Acotar el error cometido al tomar los siete primeros términos del desarrollo anterior.

Para calcular $\sin(0.3)$, utilizaremos $f(x) = \sin x$, que luego evaluaremos en $x = 0.3$. Como nos piden que utilicemos el desarrollo de McLaurin con los 7 primeros términos ($n = 7$), haremos lo siguiente:

$$T_7(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{\text{iv}}(0)}{4!} + \frac{f^{\text{v}}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{\text{vi}}(0)}{6!}x^6 + \frac{f^{\text{vii}}(0)}{7!}x^7$$

Realizaremos las derivadas de $f(x)$ hasta orden 8, debido a que la última será la que utilizaremos para la expresión de resto de Lagrange (cota de error).

$f(x) = \sin x \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \longrightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \longrightarrow f'''(0) = -1$

$f^{\text{iv}}(x) = \sin x \longrightarrow f^{\text{iv}}(0) = 0$

$f^{\text{v}}(x) = \cos x \longrightarrow f^{\text{v}}(0) = 1$

$f^{\text{vi}}(x) = -\sin x \longrightarrow f^{\text{vi}}(0) = 0$

$f^{\text{vii}}(x) = -\cos x \longrightarrow f^{\text{vii}}(0) = -1$

$f^{\text{viii}}(x) = \sin x$

$$T_7(x) = \frac{1}{1!} \cdot x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

$$\boxed{T_7(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7}$$

Ahora para calcular un valor aproximado de $\sin(0.3)$, lo que haremos será evaluar $T_7(x)$ en $x = 0.3$

$$T_7(x = 0.3) = 0.3 - \frac{1}{6}(0.3)^3 + \frac{1}{120}(0.3)^5 - \frac{1}{5040}(0.3)^7$$

$$T_7(x = 0.3) = 0.2955202$$

$$\boxed{\sin(0.3) \simeq 0.2955202}$$

Para calcular la cota del error cometido en la aproximación, lo que haremos será utilizar el resto de Lagrange:

$$R_7(X) = \left| \frac{f^{\text{viii}}(c)}{8!}(x-a)^8 \right| = \left| \frac{\sin c}{40320}(0.3)^8 \right| = \frac{\sin c}{40320}(0.3)^8 \underset{|\sin c| \leq 1}{\leq} \frac{1}{40320}(0.3)^8 = 1.627 \cdot 10^{-9}$$

$\boxed{\text{La aproximación calculada tiene una cota de error del orden de } E < 1.627 \cdot 10^{-9}.}$

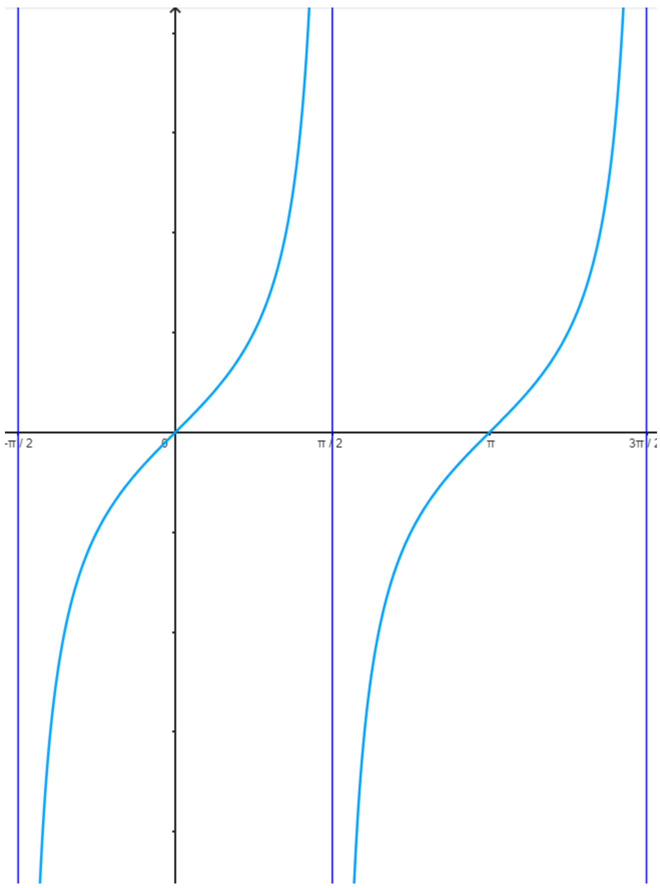
78) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$$

en $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Para empezar $x_0 = \dfrac{\pi}{2} \notin \text{Dom}(f)$ con lo cual no sería continua en dicho punto. Pero vamos a hacer los límites laterales, para comprobar si, en caso de que sean iguales, podríamos ampliar la función añadiéndole un valor $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ para que sea continua.

La gráfica de $\tan x$:



$$\tan\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = +\infty$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = -\infty$$

Hacemos los límites laterales: