Tema 4. Derivabilidad

4.1 Concepto de derivada

intervalo abierto

Def: 1. Decimos que $f: I \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in I$ cuando
$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

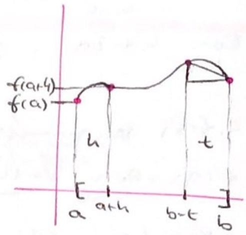
* A veces se escribe $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(h)}{h}$

2. f es derivable en I, $f \in D(I)$ cuando $\exists f'(a), \forall a \in I$.

3. Se definen las derivadas laterales

$$f'(a)^+ = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \Delta f$$

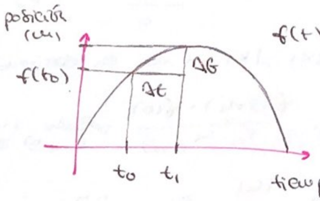
$$f'(b)^- = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \underset{h=-t}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(b)-f(b-t)}{t}$$



* Nota que f es derivable en $a \iff \exists f'(a)^+ = f'(a)^-$

Tres interpretaciones:

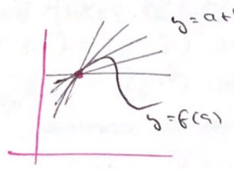
① Velocidad instantánea.



$f(t)$ = posición de partida en tiempo t

- veloc. media en $[t_0, t_1] = \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$
- veloc. instantánea en $t_0 = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} = f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$

② Recta tangente en un punto

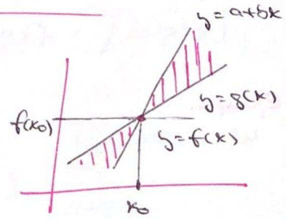


si $y = f(x)$

la recta tg en $P=(x_0, f(x_0))$ se define como límite de las rectas secantes por P y $P_1 = (x_1, f(x_1))$ con $P_1 \to P$

la secante por PP_1
$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

si tomo $\lim_{x_1 \to x_0} \to y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$



③ Mejor aproximación lineal en x_0.

¿Cuál es la recta $g(x) = a+bx$ que mejor aproxima a $f(x)$ cerca de $(x_0, f(x_0))$?
Es decir, busca a, b tal que el error $= |f(x) - (a+bx)|$ sea mínimo en $x \to x_0$
Para que $g(x) = a+bx$ pase por el pto $(x_0, f(x_0))$, lo escribo como $g(x) = f(x_0) + m(x-x_0)$
Para determinar m busco el error y sustituyo.

Para determinar m:

$$\text{Error} = |f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)| = |x - x_0| \cdot \Bigg| \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m}_{\text{busco } m \text{ que minimice esta parte en } x \to x_0} \Bigg|$$

$$\to \lim_{x \to x_0} |f'(x_0) - m| \text{ mínimo} \to m = f'(x_0)$$

Cálculo práctico de derivadas.

1. $f(x) = x^2 \to (x^2)' = 2x$

En efecto:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^2} + h^2 + 2ah - \cancel{a^2}}{h} =$$

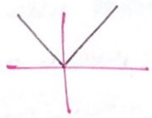
$$\lim_{h \to 0} h + 2a = 2a \to (x^2)' = 2x$$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x \to (\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos h + \cos a \cdot \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} a}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \Bigg(\operatorname{sen} a \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos a \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{1} \Bigg) = \cos a$$

3. $f(x) = |x| \to$ no es derivable en $x = 0$



$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = 1$$

pero

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \to f'(0)^+ = 1 \neq f'(0)^- = -1 \to \nexists f'(x)$$

Propiedades.

1. Suma. $(f + g)' = f' + g'$
2. Producto. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. Cociente. $(f/g)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
4. Regla de la cadena.

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo.

$$h(x) = \underbrace{\operatorname{sen} (\underbrace{x^2}_{g(x)})}_{f(g(x))} \qquad h'(x) = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

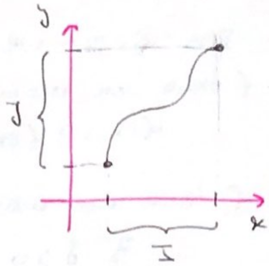
$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ f(x) = \operatorname{sen} x \end{array}\right\} \to h(x) = g \cdot f(x) = g(f(x)) = g(\operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen} x)^2$$

$$h'(x) = g'(\operatorname{sen} x) \cdot (\operatorname{sen} x)' = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

Teorema. Derivada de la función inversa.

Si $f: I \to J$ es inyectiva, derivable y $f'(x) \neq 0$
$x \mapsto y = f(x)$

$\Longrightarrow f^{-1}$ es derivable en $y \in J$ y $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$



Ejemplos.

① $y = \operatorname{sen} x \to$ hallar la derivada de la función inversa de $f(x)$

$y = \operatorname{sen} x \Longrightarrow x = \operatorname{arcsen} y$ (= "$\operatorname{asin}(y)$")

$$(f^{-1})(y) = (\operatorname{arcsen} y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\operatorname{sen} x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \to \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$$

$$(\operatorname{arcsen} y)' = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$$

② $y = \cos x \to x = \arccos y$

$$(f^{-1})'(y) = (\arccos y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$$

③ $$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

Derivación logarítmica.

Sea $f(x) = g(x)^{h(x)} \to \ln(f(x)) = h(x) \cdot \ln(g(x))$

$$\to \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = [h(x) \cdot \ln(g(x))]' \to f'(x) = f(x) \cdot [h(x) \cdot \ln(g(x))]'$$

$$\to f'(x) = f(x)\left[h'(x) \cdot \ln(g(x)) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)}\right]$$

Ejemplo.

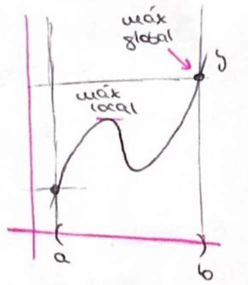
$y = x^{\operatorname{sen} x}$

$\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x} \to y' = y\left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

$$y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

4.2 Máximos y mínimos locales



Def. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$

a. f tiene un máximo global (absoluto) en x_0 si

$$f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \in I$$

b. f tiene un máximo local (relativo) en x_0 si

$$\exists\, \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

c. IDEM mínimo local y global.

* Nota: si $f \in C([a,b]) \Rightarrow$ siempre existen máx y mín global
Puede ocurrir

- o bien están en los extremos del intervalo $\to x = a, x = b$
- o bien están en el interior $x \in (a,b)$
  ↳ se buscan con $f'(x) = 0$

Teorema 1. Criterio de existencia de extremos locales.

Si $f \in D(a,b)$ y $x_0 \in (a,b)$

si f tiene un máx o mín local en $x_0 \to f'(x_0) = 0$

Dem. RA suponer que f tiene $\frac{\text{MÁX}}{\text{MÍN}}$ local en x_0 y $f'(x_0) \neq 0$

→ caso 1 $f'(x_0) > 0$

como $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \Rightarrow \exists$ intervalo $(-\delta, \delta)$ / $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$

$h \in (0, \delta) \to f(x_0+h) > f(x_0) \to$ no MÁX local

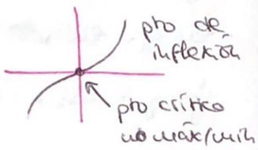
$h \in (-\delta, 0) \to f(x_0+h) < f(x_0) \to$ no MÍN local

→ caso 2 $f'(x_0) < 0$

análogo → concluimos que $f'(x_0) = 0$

Def. Los puntos tales que $f'(x) = 0$ se llaman puntos críticos de f.

Los punto críticos podrían no ser máx/mín locales.



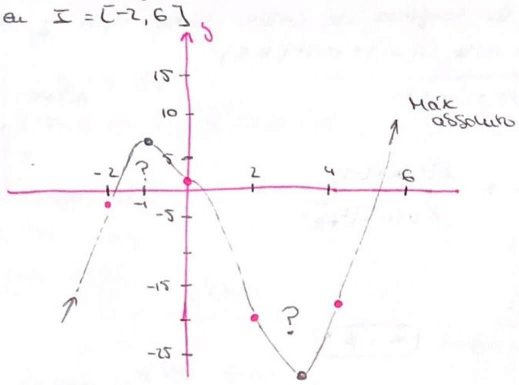
si lees esto me debes un besito

Ejemplo. Hallar máx/mín globales y locales de

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en $I = [-2, 6]$

Paso 1

x	$f(x)$
-2	-1
0	1
2	-21
4	-19
6	55



Paso 2 → ptos críticos

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Ptos críticos en $x = -1$ y $x = 3$

$x = -1 \rightarrow f(x) = 6 \rightarrow$ MÁX LOCAL $x = 3 \rightarrow f(x) = -26 \rightarrow$ MÍN LOCAL

Paso 3 → comprobar extremos

$f(-2) = -1 \rightarrow$ no es máx/mín

$f(6) = 55 \rightarrow$ máx global

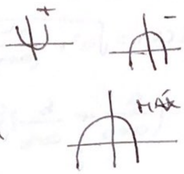
$\rightarrow x = 3,\ f(3) = -26 \rightarrow$ mín global

* Paso 4 (opcional)

$f''(x) = 6x - 6$

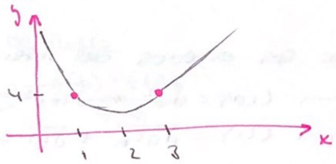
$f''(-1) = -12 < 0$

$f''(3) = 12 > 0 \rightarrow$ mín



Ejemplo 3. $f(x) = x + \frac{3}{x}$, $x \in (0, \infty)$

x	$f(x)$
0	$+\infty$
1	4
3	4
∞	$+\infty$



Puntos críticos

$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} = 0$

$x^2 = 3 \rightarrow x = \cancel{\pm}\sqrt{3}$

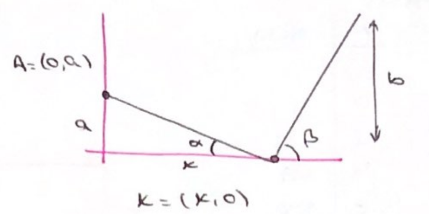
$x = \sqrt{3} = 1{,}73 \rightarrow$ en $x = 3$ hay un mín local

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

En el intervalo no hay máximos absolutos ni locales.

Ejercicios optimización.

11. Hay que minimizar la longitud de cable entre A, x y x, B



longitud $= L(x) = \text{dist}(A,X) + \text{dist}(X,B)$

$$= \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{(1-x)^2+b^2}$$

Ptos críticos

$$L'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{\cancel{2}(1-x)(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(1-x)^2+b^2}} = 0$$

$\downarrow$

$$\underbrace{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}_{\cos\alpha} = \underbrace{\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}}}_{\cos\beta} \rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

Cálculo de x:

$$x\sqrt{(1-x)^2+b^2} = (1-x)\sqrt{a^2+x^2} \rightarrow x^2((1-x)^2+b^2) = ((1-x)^2(a^2+x^2)$$

$$\rightarrow x^2\cancel{(1-x)^2} + x^2b^2 = (1-x)^2a^2 + \cancel{(1-x)^2x^2} \rightarrow x^2b^2 = (1-x)^2a^2$$

$$\rightarrow xb = (1-x)a \rightarrow xb = a - xa \rightarrow a = xb + xa \rightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

Distancia:

$$1-x = \frac{b}{a+b}$$

$$L(x) = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{(a+b)^2}} + \sqrt{b^2+\frac{b^2}{(a+b)^2}} = \frac{a}{a+b}\sqrt{(a+b)^2+1} + \frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2+1}$$

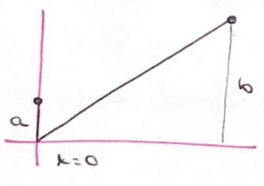
$$= \underbrace{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)}_{1}\sqrt{(a+b)^2+1} = \sqrt{(a+b)^2+1}$$

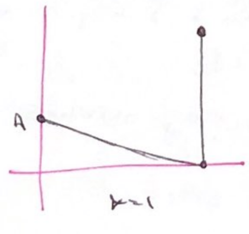
* Notar que con la observación geométrica sale la misma longitud en el caso de la línea recta $\quad \text{long} = \sqrt{1^2+(a+b)^2}$

Comprobar los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \rightarrow L(0) = \sqrt{a^2} + \sqrt{1+b^2} \\ x=1 \rightarrow L(1) = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2} \end{array}\right\rangle > \sqrt{1+(a+b)^2}$$

$\rightarrow$ el mín absoluto en $x = \frac{a}{a+b}$, $L(x) = \sqrt{1+(a+b)^2}$



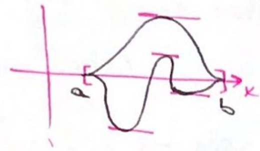


4.3 Teoremas sobre derivadas

Teorema 1. Rolle

Sea $f \in C([a,b]) \cap D(a,b)$

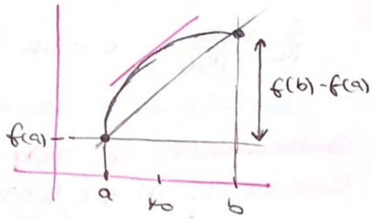
si $f(a) = f(b) \to \exists\, x_0 \in (a,b) / f'(x_0) = 0$



Teorema 2. TVM de Lagrange

si $f \in C([a,b]) \cap D(a,b)$

$\exists\, x_0 \in (a,b) / \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$



misma pendiente de b tgte de a f en $(x_0, f(x_0))$ de la recta tgte por $(a, f(a)), (b, f(b))$

* El TVM dice si $V_{media} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = v_b$

$\to \exists\, t_0 \in (a,b)$ / la veloc. instantánea

$f'(t_0) = v_0$

Dem. caso $c_1, c_2 \in \{a,b\} \to f(c_1) = f(c_2)$

$f(c_2) \leq f(x) \leq f(c_1) \quad \forall x \in [a,b]$

$\to f(x) \equiv f(c_1) = f(c_2) = cte \quad \forall x \in [a,b]$

$\to f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dem. Aplicar Rolle

$h(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]}_{\text{recta secante}}$

$h \in C([a,b]) \cap D(a,b)$

$h(a) = 0 = h(b) \to$ cumple hipótesis de Rolle

$\exists\, x_0 \in (a,b) / h'(x_0) = 0 \to f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

Ejemplos.

① Raíces de polinomios

$f(x) = 6x^4 - 3x - 1 = 0$ ¿Cuántas raíces tiene?

$f'(x) = 24x^3 - 3 = 0 \to x^3 = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8} \to x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}$

$\to f(x) = 0$ (tiene a lo sumo 2 raíces)

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\}$ Bolzano $\to \exists\, x_0 \in (0,1) / f(x_0) = 0$

$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 8 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\}$ Bolzano $\to \exists\, x_0 \in (-1,0) / f(x_0) = 0$

② Probar $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$

Defino $f(x) = \sqrt{x}$ y aplico el TVM con $a = 64$, $b = 66$

$$\sqrt{66} - 8 = f(66) - f(64) \overset{TVM}{=} f'(c)\cdot(66-64) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{c}}\cdot \cancel{2} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

$\hookrightarrow c \in (64,66)$

$$c > 64 \to \frac{1}{c} < \frac{1}{64} \to \sqrt{\frac{1}{c}} < \sqrt{\frac{1}{64}} \to \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{8}$$

Por el otro lado:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} > \frac{1}{\sqrt{66}} \qquad c < 66 < 81 \to \frac{1}{c} > \frac{1}{66} > \frac{1}{81} \to \frac{1}{\sqrt{c}} > \frac{1}{\sqrt{66}} > \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$$

Consecuencias de TVM

Corolario 1. Si $f \in D(I)$ y $\sup_I |f'| \le M$

$\to |f(x) - f(y)| \le M\cdot|x-y|$

Corolario 2. Si $f \in D(I)$ y $f'(x) \equiv 0, \forall x \in I$

$\to f \equiv cte.$

Corolario 3. Sea $f \in D(I)$

a. Si $f'(x) > 0 \to f$ es estrictamente creciente en I.

b. Si $f'(x) < 0 \to f$ es " decreciente en I.

Dem. a.

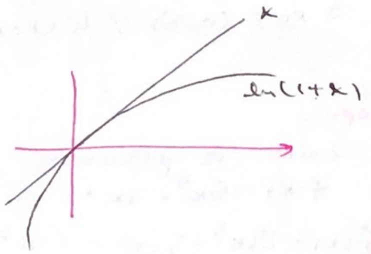
Si $x_1 < x_2$ en $I \to$ ¿$f(x_1) < f(x_2)$?

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \to f(2) > f(1) \to$ creciente

Idem en caso 2.

Desigualdades de funciones.

1. $\ln(1+x) < x$



Tomo $f(x) = \ln(1+x)$

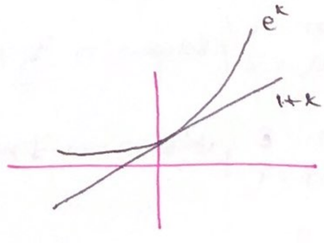
$f(x) - f(0) = \ln(1+x) - \cancel{\ln(1)}^{\,0} \to c \in (0,x)$

$= f'(c)\cdot(x-0)$

$= \frac{1}{1+c}\cdot x < 1\cdot x = x$

$c > 0 \to 1+c > 1 \to \frac{1}{1+c} < 1$

2. $e^x > 1+x$



Modo 1 → como TVM con $f(x) = e^x$ en $[0,x]$

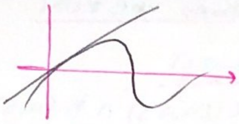
Modo 2 → Definir $h(x) = e^x - (1+x)$

$\to h'(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0$

$\to h$ estric. creciente en $(0,\infty)$

$\to h(x) > h(0) = 0 \to e^x - (1+x) > 0 \quad \forall x > 0$

4. $\operatorname{sen} x \leq x, \ \forall x \geq 0$



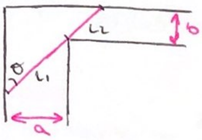
Tomo $h(x) = x - \operatorname{sen} x, \ x \geq 0$

$h'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow h$ es creciente en $[0, \infty)$

$h(x) \geq h(0) = 0 \rightarrow x - \operatorname{sen} x \geq 0 \rightarrow x \geq \operatorname{sen} x, \ \forall x \in [0, \infty)$

Ejercicio de optimización 12.



$L(\theta)$ = longitud del segmento cuando el ángulo del dibujo es θ

Busco el mínimo $L(\theta), \ \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$L(\theta) = L_1(\theta) + L_2(\theta)$

$\operatorname{sen} \theta = \frac{a}{L_1(\theta)} \rightarrow L_1(\theta) = \frac{a}{\operatorname{sen} \theta}$

$\cos \theta = \frac{b}{L_2(\theta)} \rightarrow L_1(\theta) = \frac{b}{\cos \theta}$

$L'(\theta) = -\frac{a}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \cos \theta + \frac{b}{\cos^2 \theta} \cdot \operatorname{sen} \theta = 0$

$\rightarrow \frac{a \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{b \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} \rightarrow a \cos^3 \theta = b \operatorname{sen}^3 \theta$

$\rightarrow \frac{a}{b} = \tan^3 \theta \rightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

$\rightarrow \theta = \arctan\left(\sqrt[3]{a/b}\right)$

$\left(\operatorname{sen} \theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \cos \theta\right)$

¿$L(\theta)$?

$L(\theta) = \frac{a}{\sqrt[3]{a/b} \cos \theta} + \frac{b}{\cos \theta} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{a/b}} + b\right) \frac{1}{\cos \theta}$

$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{a}{b})^{2/3}}} = \frac{\sqrt{b^{2/3}}}{\sqrt{b^{2/3} + a^{2/3}}}$

$L(\theta) = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{a/b}} + b\right) \cdot \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}} = \cancel{b^{1/3}}(a^{2/3} + b^{2/3}) \cdot \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{\cancel{b^{1/3}}}$

$= (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

4.4 Aplicaciones del TVM

TVM 2 (Cauchy)

si $f, g \in C([a,b]) \cap D(a,b) \to \exists\, x_0 \in (a,b) \;/\; \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

(si $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0$ en (a,b))

Teorema 1. Regla de L'Hôpital

si $f, g \in D(a,b) \;/\; f(a)^+ = g(a)^+ = 0$ y $g'(x) \neq 0\ (a,b)$

$\to \lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0} \to \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ siempre que el 2^{do} lim. exista.

※ El Tma también vale si

- $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $f, g \in D(b,a)$
- $a = \pm\infty$
- $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Dem. Como $f(a) = g(a) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xrightarrow{TV2} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{donde } x_0 \in (a,x)$$

si $x \to a^+ \Longrightarrow x_0 \to a^+$ de modo que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplos.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2/2} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp.} \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x/2} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

   $\Longrightarrow 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, si $x \to 0$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{ax^2} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{2ax} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2a} = \dfrac{1}{2a}$

   si $a = \frac{1}{2} \Longrightarrow e^x-1-x \sim \dfrac{x^2}{2}$, si $x \to 0$

3. $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0 \cdot (-\infty) = \text{indet} \to \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{+\infty} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} =$

   $\to \lim_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0} -x = 0$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{2} = 0$

   $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

   $\operatorname{sen} x \sim x$

Def. Infinitésimos equivalentes.

Decimos que $a(x) \sim b(x)$ si $x \to x_0$ si $\lim_{x\to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$

En este caso siempre podemos hacer

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot a(x)}{g(x)\cdot b(x)}$$

* Solo se usan multiplicando

Ejemplos. si $x \to 0$

- $\operatorname{sen} x \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arctan x \sim x$

Ejemplos.

1. $x - \operatorname{sen} x \sim \frac{x^3}{6}$

Demostrar por L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3/6} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2/6} = 1$$

2. $\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6} \sim \frac{x^5}{5!}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5/5!} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + (\cancel{3}x^2/\cancel{6})}{5x^4/5!} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}}}{\frac{20x^3}{5!}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{\frac{60x^2}{5!}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{+\operatorname{sen} x}{\frac{120x}{5!}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{120/5!} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2\cdot \operatorname{sen} x}{(\tan x)^3} = \frac{0}{0}$$ ← no conviene L'Hôpital (infinitésimos)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x}{x^3} = 1$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cdot \arctan(x^2)}{x^5+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}\cdot x^2}{x^5+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/2}{x^4(x+1)} = \frac{1/2}{0+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Aplicación 2. Aproximación numérica de raíces

Busco $r \in (a,b)$ / $f(r)=0$ donde $f \in C([a,b])$

→ El método de Newton (o de la tangente)

Paso 0: $f(a)\cdot f(b) < 0$

Paso 1: Tomo $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$ busco una raíz de la recta tangente en $P_0 = (x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) = 0 \to x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Llamo $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Paso 2: itero y defino:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ejemplo ① $f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x$ $\qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1'5	0'25
1	$1'41\hat{6}$	$7\cdot10^{-3}$
2	1'414	$6\cdot10^{-6}$
3	1'414	$5\cdot10^{-12}$

$\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \to \ominus \\ f(2) = 2 \to \oplus \end{array}\right\} \to$ busco raíz en $(1,2)$

$\exists\, r \in (1,2)$

Ejercicio ② Usar $f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right) - 1$ para hallar una aprox. de π con 12 decimales.

$f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right) - 1 = 0 \leftarrow \tan\frac{x}{4} = 1 \to \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \to x = \pi$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2\left(1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$

$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \to x_{n+1} = x_n - \tan\left(\frac{x_n}{4}\right) \cdot 2\left(1 + \cos\left(\frac{x_n}{2}\right)\right)$

Aplicación 3. Puntos fijos y recurrencias.

$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \text{ donde } f \in C(\underset{\text{intervalo}}{I}) \\ x_0 \in I \end{cases}$

¿Cuándo existe $\lim x_n = L$?

Si $\exists \lim x_n = L \to L = f(L) \to L$ es un punto fijo de f en I

Teorema.

Sea $f \in C^1([a,b]) \cap D(a,b)$ (con f' continua) $\to I$

Sea $L \in (a,b)$ un punto fijo: $f(L) = L$

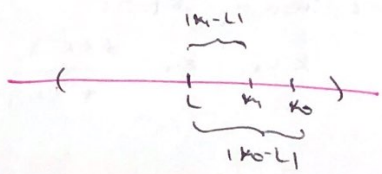
Entonces si $|f'(L)| < 1 \to \exists$ intervalo $I' \subseteq (a,b)$ tal que

- $x_0 \in I' \to x_n \in I'$
- $\exists \lim x_n = L$
- Cota del error: $|x_n - L| \leq M^n \cdot |x_0 - L|$
  donde $M = \max_{x \in I'} |f'(x)| < 1$

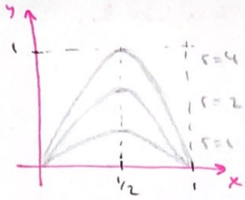
Dem. Como $\left.\begin{array}{l} |f'(L)| < 1 \\ f' \text{ es cont} \end{array}\right\} \to \exists$ intervalo I'. $M := \max_{x \in I'} |f'(x)| < 1$

$\to |x_n - L| = |f(x_{n-1}) - f(L)| \overset{TVM}{=} |f'(\theta)| \cdot |x_{n-1} - L| \leq M \cdot |x_{n-1} - L| \leq$

$\leq M \cdot M \cdot |x_{n-2} - L| \leq \dots \leq M^n \cdot |x_0 - L| \xrightarrow[n\to\infty]{M<1} 0$



Ejemplo. Sucesión logística $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1-x_n)$



$x_{n+1} = f(x_n)$, donde $f(x) = r \cdot x \cdot (1-x) = rx - rx^2$

$f'(x) = r - 2rx = 0 \to x = 1/2 \qquad f(1/2) = r/4$

$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ en } [0,1] \\ \text{si } x \in [0,1] \end{array}\right\} \leftrightarrow 0 \leq \frac{r}{4} \leq 1 \to r \in [0,4]$

En este caso $f: [0,1] \to [0,1]$

$x_0 \to f(x_0) = x_1$

$L=0$ es contable si $|f'(0)|<1$, $|f'(0)| = r < 1 \to L=0$ estable $\leftrightarrow r \in (0,1)$

$\to \exists \lim x_n = 0$

$L = 1 - \frac{1}{r} \quad |f'(L)| = |r - 2r(1-\frac{1}{r})| = |r-2r+2| = |2-r| < 1 \leftrightarrow -1 < 2-r < 1$

$1 < r < 3$

$\to \lim x_n = 1 - \frac{1}{r}$

4.5 El polinomio de Taylor

$$P_n(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\to f(x) = P_n(x,a) + E_n(x) = P_n(x,a) + \Theta(|x-a|^{n+1})$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x-a)^{n+1} \qquad \theta \in (a,x)$$

Ejemplo 5.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \text{ si } |x|<1$$

Dem $\to$ si tomo n fijo $\quad 1 + x + x^2 \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + \dots + x^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \overset{|x|<1}{=} \frac{1-0}{1-x} \to \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Aplicación 1. Cálculo de límites.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - a - bx - cx^2 - dx^3}{x^3} = 0 \to \text{Hallar } a, b, c, d.$$

$$\ln(1+x^2) \overset{x^2=u}{=} \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + O(u^4) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + O(x^8) = x^2 + O(x^4)$$

$\Rightarrow$ escojo $a + bx + cx^2 + dx^3 = P_3(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - a - bx - cx^2 - dx^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^4) - P_3(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{O(x^4)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} O(x) = 0$$

Aplicación 2. Aproximación con márgenes de error.

① Usar $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$

para aproximar el valor de e^1 con 5 decimales.

Busco $n \,/\, |e^1 - P_n(1)| < 10^{-6}$

Sabemos que $|\overset{\shortparallel}{E_n(1)}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (1-0)^{n+1} \right| = \frac{e^\theta}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$

Busco $n \,/\, 3 \cdot 10^6 < (n+1)!$

si pruebo con $n = 9 \to 10! = 3628800 > 3 \cdot 10^6$

$\Rightarrow P_9(1) \pm 10^{-6} = e \to$

$\to 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{9!} \pm 10^{-6}$

$\to \underbrace{2{,}71828}_{\text{exactos}}15\ldots$

② Hallar $\cos(0{,}5)$ con error $\leq 10^{-8}$

sea $f(x) = \cos x \to$ piden $f(0{,}5) = P_{2n}(0'5) + E_{2n}(0{,}5)$

$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_{2n}(x)$

Busco $n \,/\, |E_{2n}(0{,}5)| \leq 10^{-8}$

$|E_{2n}(0'5)| = \left| \frac{f^{(2n+1)}(\theta)}{(2n+1)!} \cdot 0'5^{2n+1} \right|$

$\downarrow$

* $|f^{(j)}\theta| = \left| \begin{cases} \pm\cos\theta \\ \pm\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \right| \leq 1$

$|E_{2n}(0'5)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \leq 10^{-8}$

Busco $n \,/\, 10^8 < (2n+1)! \cdot 2^{2n+1}$

$n = 3 \to 7! \cdot 2^7 \Rightarrow$ menor que 10^{+8}

$n = 4 \to 9! \cdot 2^9 \Rightarrow 1'8 \cdot 10^8 > 10^8$

$\cos(0{,}5) = 1 - \frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^4}{4!} - \frac{0{,}5^6}{6!} + \frac{0{,}5^8}{8!} \pm 10^{-8} \simeq \underbrace{0'87758256}_{\text{exactos}}22\ldots$

③ Hallar $\sqrt[3]{1{,}02}$ usando P_3 y estimando el error.

Tomo $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = P_3(x, a=0) = E_3(x)$

$f(x) = (1+x)^{1/3} \to f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \to f'(0) = 1/3$

$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3} \to f''(0) = -\frac{2}{9}$

$f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3} \to f'''(0) = \frac{10}{27}$

$P_3(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{10}{27}x^3 \to P_3(0'02) = 1 + \frac{0{,}02}{3} + \frac{2}{2 \cdot 9} 0{,}02^2 + \frac{10}{3! \cdot 27} 0{,}02^3 =$

$= 1 + \frac{0{,}02}{3} + \frac{0{,}02^2}{9} + \frac{5}{81} \cdot 0{,}02^3 =$

$= \underbrace{1{,}00662}_{\text{exacto}}27160\ldots$

$|E_3(0{,}02)| \underset{\uparrow}{=} \left| \frac{f^{IV}(\theta)}{4!} (0{,}02)^4 \right| \to$

$\theta \in (0{,}0{,}02)$

$\to |f^{IV}(\theta)| = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{(1+\theta)^{11/3}} \leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4} \cdot 1 \leq$

$\leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{50^4} = 6'6 \cdot 10^{-9} < 10^{-8}$