Tema 3. Funciones

BLOQUE II

3.1 Propiedades de funciones

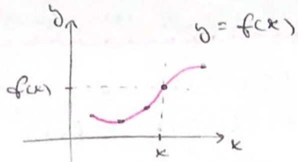
Def. Una función es una aplicación

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \in D \to f(x)$

Dom (f)

Se suele dibujar en el eje cartesiano



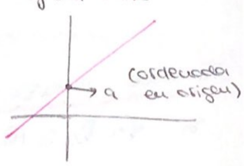
Al conjunto de partida se le llama dominio (f), Dom (f). Y al conjunto de llegada se le llama imagen o rango de (f).

$Im(f) = \{ y = f(x) / x \in D \}$

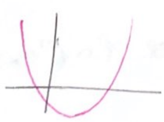
Ejemplos.

1. Polinomios $\to P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

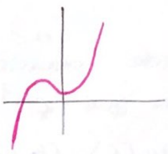
$y = a + bx$ → pendiente



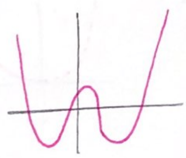
grado 2



grado 3

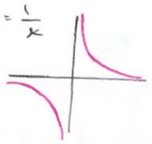


grado 4

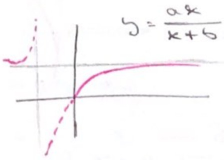


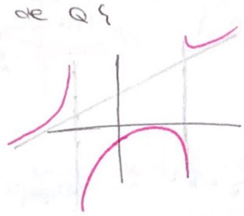
2. Racionales $\to R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con P, Q = polinomios donde $Dom(R) = \mathbb{R} - \{\text{ceros de } Q\}$

$y = \frac{1}{x}$



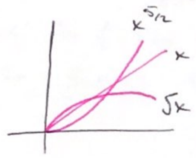
$y = \frac{ax}{x+b}$

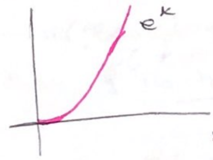




3. Potencias y exponenciales

$f(x) = x^a$, $f(x) = a^x$ (donde $a > 0$)





$e^x >>> x^4$

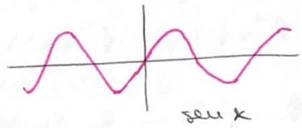
$Dom(a^x) = \mathbb{R}$

$Dom(x^a) = [0, \infty)$

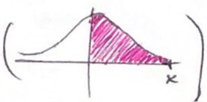
4. Trigonométricas

$f(x) = \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen}(ux), \cos(ux)$, etc.

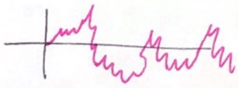
Tienen $Dom(f) = \mathbb{R}$ y son periódicas.



5. Otras.

- $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = $ Área ()

- Movimiento browniano
  Continuas pero no derivables



1

Operaciones básicas con funciones.

Suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

producto $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

dividir $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f}(x)$, $f(x) \neq 0$

composición $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$D_1 \xrightarrow{f} D_2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(x)$$

* $g \circ f \neq f \circ g$

↳ Ejemplo. $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = e^x \end{array}\right\}$ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = e^{x^2}$

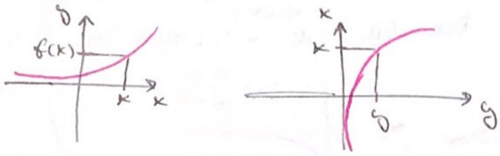
$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ ($e^{x^2} \neq e^{2x}$)

Función inversa:

Si $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se denota $x \longrightarrow f(x)$

$f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$

Prop. $f \circ f^{-1}(x) = x$



Ejemplo. $f(x) = x^2 \to y = x^2 \to$ despejo $x \to x = \pm\sqrt{y}$

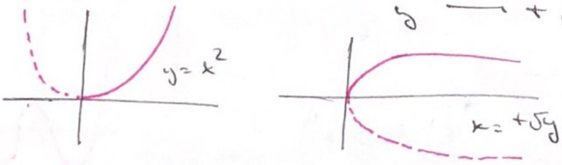
↳ $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$

Puede ocurrir que $f^{-1}(x)$ tome múltiples valores.

Para que f^{-1} tome un solo valor, debo restringir el Dom(f)

Dom (f) : $[0, +\infty) \to f^{-1} : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

$y \longrightarrow +\sqrt{y}$

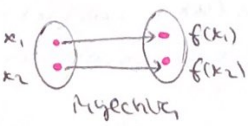


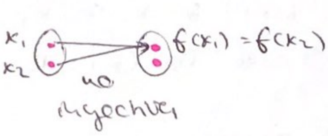
* $f \circ f^{-1}(y) = f(\pm\sqrt{y}) = (\pm\sqrt{y})^2 = y$

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(x^2) = +\sqrt{x^2} = x$

Def. $f: D \to \mathbb{R}$ es inyectiva si

$\forall x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

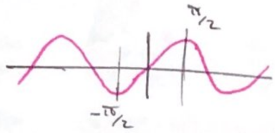




Propiedad. Si $f: D \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente o decreciente $\longrightarrow$ f es inyectiva en D

En particular $f^{-1}: Im(f) \to Dom(f)$ está unívocamente definida
$y \longrightarrow f^{-1}(y)$ (toma un único valor)

Ejemplo. $f(x) = \text{sen } x,\ x \in \mathbb{R}$

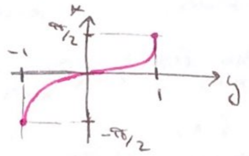


no es inyectiva pues:
$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$

Si tomo $Dom\ f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to$ sen x es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva

$\text{sen}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

$\text{arcsen}: [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



3.2 Límites de funciones

Sea $a \in \mathbb{R}$, y sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $a \in I$ = intervalo

Def. 1: Decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$\left.\begin{array}{l} |f(x) - L| < \varepsilon \\ \forall |x-a| < \delta \end{array}\right\}$ este intervalo garantiza que la dist $(f(x), L) < \varepsilon$

Def. 2: Si $f: (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, decimos que:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M_0 = M_0(\varepsilon) \,/\, |f(x) - L| < \varepsilon$
$\forall x \in (M_0, +\infty)$

Teorema 1. Caracterización de límite con sucesiones

Son equivalentes

- $\exists \lim_{x \to a} f(x) = L$
- $\forall$ sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq I$, si $\lim x_n = a \to \lim f(x_n) = L$

Ejemplo.

$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \cdot \text{sen } \frac{1}{x} = 0$

Para probar que el lim $\exists$ y vale $L = 0$

Tomo $\varepsilon > 0 \to$ busco $\delta = \delta(\varepsilon)$, cuando $x \in (0, \delta)$ t.q

$|f(x) - 0| < \varepsilon \to |f(x) - 0| = |\sqrt{x} \cdot \text{sen } \frac{1}{x}| \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$ — escojo $\delta = \varepsilon^2$

$|\text{sen } \theta| \leq 1$

Ejemplo.

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ → Dibujando parece que $\nexists$

Para demostrarlo, uso el Tma 1, busco $x_n \to 0$ t.q $\nexists \lim f(x_n)$

busco $x_n / f(x_n) = \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = (-1)^n \to \frac{1}{x_n} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$x_n = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2}{\pi} \to x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ y $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim (-1)^n$

$\to \nexists \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Teorema 2. Operaciones con límites

Si existen los lím de la derecha, entonces

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ salvo $\infty - \infty$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$ salvo $0\cdot\infty$
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ salvo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ salvo 0^0, ∞^0 ó 1^∞

Teorema 3. Del bocadillo.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } A(x) \le f(x) \le B(x) \\ \text{y } \exists \lim\limits_{x\to a} A(x) = \lim\limits_{x\to a} B(x) = l \end{array}\right\} \to \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$$

Ejemplo.

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Sea $f(x) = x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} \to$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \le \operatorname{sen}\frac{1}{x} \le 1 \\ -x \le x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} \le x \end{array}\right\} A(x) \le f(x) \le B(x)$$

como

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} A(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} B(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Ejemplos.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$

- $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{0}{0}$ Ruffini $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$\lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{12}{-4} = -3$

- Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$\lim_{x\to\infty} (\underbrace{\sqrt{x^2+x+1}-ax}_{\infty-\infty}-b) = 0$

$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-ax) = b \to \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-ax)(\sqrt{x^2+x+1}+ax)}{\sqrt{x^2+x+1}+ax} = b$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-a^2x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+ax} = b \to \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = b$

para descartar el grado 2 $\to a^2x^2 = x^2 \to a=1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+1} = b \to \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2} = b$

3.3 Funciones continuas

Def. Una función $f: I \to \mathbb{R}$ se dice continua en $x_0 \in I$ si

$\exists \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = f(x_0)$

En la práctica, f es continua si:

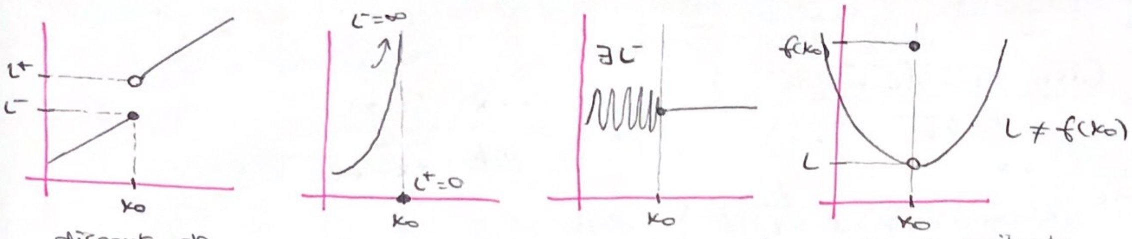
a, $\exists \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = L^{\pm}$

b, son iguales $L^+ = L^- = L$

c, coinciden con $f(x_0) = L$

Si esto falla: a. discontinua esencial
b. discontinua de salto
c. discontinua evitable

Ejemplos.



discont. de salto — discont. de salto infinito — discont. esencial — discont. evitable

* Función Dirichlet: discontinua en todo $x \in \mathbb{R}$

Def. Decimos que.

① $f \in C(a,b)$ si f continua en todo punto $x_0 \in (a,b)$

② $f \in C([a,b])$ si $f \in C(a,b)$ y $\begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \\ \exists \lim_{x \to b^+} f(x) = f(b) \end{cases}$

Propiedades.

1. Si f, g son continuas en x_0 → $f+g$, $f \cdot g$, f/g son continuas en x_0.
2. Composición de funciones continuas.

Si $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, con f cont en x_0 y g cont en $y_0 = f(x_0)$

$x_0 \longrightarrow y_0 = f(x_0)$

$\Longrightarrow g \circ f(x) = g(f(x))$ es continua en x_0

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

3.4 Tres teoremas fuertes (sobre funciones continuas)

* Recordar el Tma Bolzano Weierstrass: "Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada $\rightarrow \exists$ una subsucesión $(x_{p_n})_{n=1}^{\infty}$ convergente $\rightarrow \lim x_{p_n} = x_0$"

Teorema 1. Weierstrass I

Si $f \in C([a,b]) \rightarrow f$ es acotada

Dem. Suponer por RA que no es cierto y que $f \in C([a,b])$ pero no es acotada.

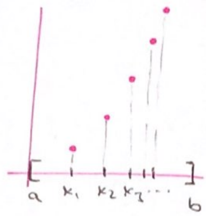
Suponer que no es acotada superiormente. Entonces existen $x_n \in [a,b]$ tal que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \ldots \quad f(x_n) \nearrow +\infty$

Pero $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq [a,b] \leftarrow$ intervalo acotado

$\hookrightarrow \exists (x_{p_n})_{n=1}^{\infty}$ subsuc. tal que $\exists \lim_{n\to\infty} x_{p_n} = x_0 \in [a,b]$

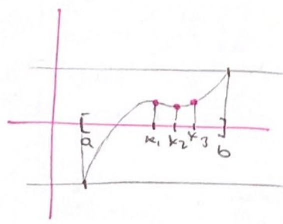
$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_{p_n}) = \underline{f(x_0)} \in \mathbb{R}$ por otro lado hemos puesto

$\exists \lim f(x_n) = +\infty \rightarrow \exists \lim f(x_{p_n}) = \underline{+\infty}$



Teorema 2. Weierstrass II

Si $f \in C([a,b]) \rightarrow f$ tiene MÁX y MÍN en $[a,b]$



Dem. Por Tma 1, f es acotada $\rightarrow$ son finitos

$M := \sup \{ f(x) / x \in [a,b] \} \in \mathbb{R}$

$m := \inf \{ f(x) / x \in [a,b] \} \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \in [a,b] \ / \ f(x_n) \nearrow M$

como (x_n) es sucesión acotada, $(a \leq x_n \leq b)$

$\hookrightarrow$ Tma BW $\exists$ subsucesión x_{p_n} : $\exists \lim x_{p_n} = x_0 \in [a,b]$

$\underline{\text{def. cont}}$ $\exists \lim f(x_{p_n}) = \underline{f(x_0)}$

Por otro lado habíamos supuesto que,

$\lim f(x_n) = M \rightarrow \lim f(x_{p_n}) = \underline{M}$

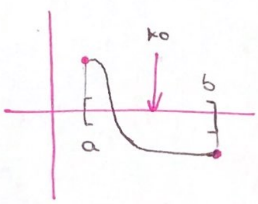
$M = f(x_0) \rightarrow$ el supremo se alcanza en x_0 $[a,b]$ $\quad M = \max f \ [a,b]$

Teorema 3. (~~Weierstrass III~~) Bolzano

Si $f \in C([a,b])$ y $\left.\begin{matrix} f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \exists x_0 \in (a,b) \ / \ f(x_0) = 0$

Dem.

Sabemos $\left.\begin{matrix} f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{matrix}\right\}$ tomo el punto medio $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$



- Si $f(x_0) = 0 \rightarrow$ ya está

- Si $f(x_0)>0 \to$ repito con el intervalo $I_1=[x_0,b]$
- Si $f(x_0)<0 \to$ repito con el intervalo $I_1=[a,x_0]$

→ De este modo construyo una colección de intervalos encajados.

$I_0=[a,b]\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$

Donde $\text{long}(I_n)=\dfrac{\text{long}(I_{n-1})}{2}=\cdots=\dfrac{\text{long}(I_0)}{2^n}=\dfrac{b-a}{2^n}$

Si $I_n=[a_n,b_n]\to a_0=a\le a_1\le a_2\cdots\to\exists\lim a_n=A$

$\xrightarrow{f\text{ cont}}\exists\lim f(a_n)=f(A)$ como $f(a_n)>0\to \underline{f(A)\ge 0}$

Análogamente:

$b_0=b\le b_1\le b_2\cdots$ $\exists\lim b_1=B\to\exists\lim f(b_n)=f(B)$

y $f(B)\le 0$

Como $[A,B]\subseteq[a,b],\ \forall n$ $\left(\begin{array}{l}\text{pq } a_n\le A\\ \quad b_n\ge B\end{array}\right)$ y $\text{long}[A,B]=B-A$

$\le \text{long}[a_n,b_n]=b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2}\to 0$

Si $0\le B-A\le\dfrac{b-a}{2^n}\to 0 \implies B=A=x_0$

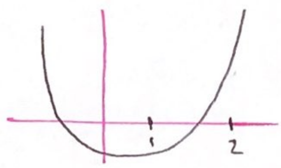
$\left.\begin{array}{l}f(x_0)=f(A)\ge 0\\ f(x_0)=f(B)\le 0\end{array}\right\}\to f(x_0)=0$

Ejemplo. $f(x)=x^2-2\to$ Probar que $\exists\, x_0\in[1,2]\ /\ f(x_0)=0$

Vemos que si $f(x_0)=0$

$\hookrightarrow x_0^2-2=0\to x_0^2=2\to x_0=\pm\sqrt2$

$x_0\in[1,2]\to x_0=+\sqrt2$



$\left.\begin{array}{l}-\ f\in C([1,2])\\ -\ f(1)=1-2=-1<0\\ -\ f(2)=4-2=2>0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Bolzano}}\exists\, x_0\in(1,2)\ /\ f(x)=0$

$\to f(1)\cdot f(2)<0$

Tomo $x_0=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac32$ ⊕

$\to f\left(\frac32\right)=\frac94-2=\frac14\to$ repito con $I_1=[1,\ \frac32=1{,}5]$

Tomo $x_1=1{,}25$ y $f(1{,}25)=\ominus\to$ repito con $I_2=[1{,}25,\ 1{,}50)$

¿Cuántas veces tengo que iterar el algoritmo para que $|x_n-\sqrt2|\le 10^{-9}$?

x_n: pto medio; $\sqrt2 = x_0$

Si sabemos $|x_n-x_0|\le\text{long}(I_n)=b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}<10^{-9}$ ($x_n\in I_n$, $x_0\in I_n$)

→ busco $n\ /\ \dfrac{1}{2^n}\le 10^{-9}\iff 10^9\le 2^n\iff \ln 10^9\le\ln 2^n\to$

$\to 9\cdot\ln 10\le n\cdot\ln 2\to n\ge\dfrac{9\ln 10}{\ln 2}\to n\ge 29'89\simeq 30$ iteraciones