1) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$f(x) = x - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

Para empezar, como hay un cociente debemos evitar que el denominador sea cero

$$x - 1 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ No está en el dominio}$$

Por otro lado, tenemos una raíz cuadrado y esto implica que la de dentro, debe ser positivo o cero: $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$

$x+2$	$- \; - \; -$	$+++++++++$	$++++$
	$+$	$-$	$+$
$x-1$	$- \; - \; -$	$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$	$+++$

$$\frac{x+2}{x-1} \geq 0 \longrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

Por lo tanto el dominio de la función es:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)}$$

2) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{\log(x)}}$$

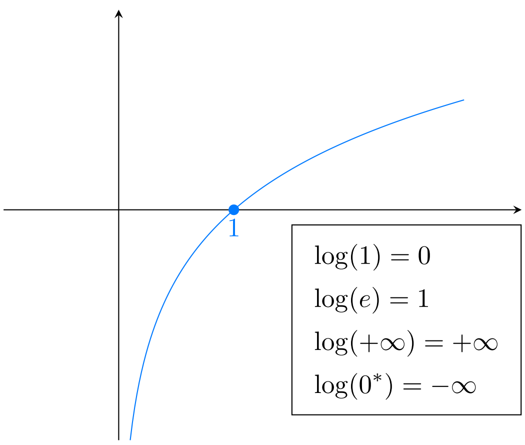
Como hay un cociente entonces el denominador no puede ser cero:

$$\log(x) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ No está en el dominio}$$

Como hay un logaritmo, lo de dentro solo puede ser positivo:

$$\boxed{x > 0}$$

Como tenemos una raíz cuarta (de grado par) entonces lo de dentro no puede ser negativo:



$$\frac{x}{\log(x)} \geq 0 \longrightarrow x \in (1, +\infty)$$

x	$+ \; + \; +$	$+ \; + \; + \; + \; +$
	$-$	$+$
$\log(x)$	$- \; - \; -$	$+ \; + \; + \; + \; +$
	1	

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (1, +\infty)}$$

3) Vamos a comprobar si la aplicación

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x + 1$$

es biyectiva, es decir, si es inyectiva y sobreyectiva.

Veamos si la aplicación $f(x)$ es inyectiva:

- Sea:

$$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \longrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Por lo tanto: $f(x)$ es inyectiva.

- Por otro lado: $\forall y \in \mathbb{R} \longrightarrow y = f(x) = 2x + 1$
  $2x = 1 - y \longrightarrow x = \dfrac{1-y}{2}$ Por lo tanto $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y \longrightarrow f(x)$ es sobreyectiva.

Nota: Dada una función $y = f(x)$, se dice que esta función tiene inversa $x = f^{-1}(y)$ si cumple que sea inyectiva.
Decimos que $y = f(x)$ es inyectiva si $\forall x_1 \neq x_2$ se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Realmente para comprobar si una función es inyectiva lo que haremos será partir de $f(x_1) = f(x_2)$ y terminar demostrando que $x_1 = x_2$.

Entonces, como $f(x)$ es inyectiva y sobreyectiva en todo $\mathbb{R}$ podemos asegurar que $f(x)$ es biyectiva y por lo tanto existe su función inversa.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$$

4) Comprobar si la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ tiene inversa.

Para que tenga inversa debe ser inyectiva, y esto implica que para elementos diferentes debe tener diferentes y como:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{No es inyectiva} \longrightarrow f(x) \text{ No tiene inversa}$$

5) Dadas las siguientes funciones, averiguar en qué puntos son discontinuas y por qué.

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ si $x \neq 0$, $f(2) = 0$.

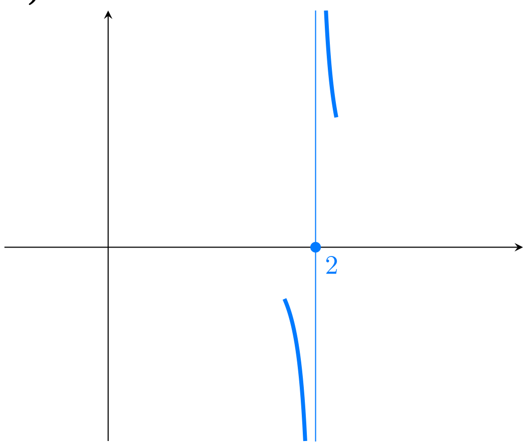
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$\forall x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos ahora si es continua en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$

$f(x)$ No es continua en $x = 2$, en concreto presenta en $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto infinito. Diremos que $f(x)$ presenta en $x = 2$ una asíntota vertical.



6) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^x}}$

Como es un cociente, debemos evitar que el denominador sea cero:

$$1 - e^x = 0 \longrightarrow e^x = 1 \longrightarrow x = \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0} \text{ No pertence el dominio}$$

Como hay una raiz cuadrada, lo de dentro no puede ser negativo:

$$1 - e^x > 0 \longrightarrow e^x < 1 \longrightarrow x < \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x < 0}$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, el Dom}(f) = (-\infty, 0)}$

7) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x < 0 \\ xe^{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\forall x < 0 \longrightarrow f(x) = -xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
$\forall x \in (0,1) \longrightarrow f(x) = xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
$\forall x > 1 \longrightarrow f(x) = xe^{1-x}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
Veamos ahora si $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $x = 1$:

<u>En $x = 0$:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} (-xe^{x-1}) = 0 \\ &\lim_{x\to 0^+} (xe^{1-x}) = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}$$

Como existe el límite de $f(x)$ en $x = 0$ y coincide con $f(0)$ entonces podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

<u>En $x = 1$:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} xe^{x-1} = 1 \\ &\lim_{x\to 1^+} xe^{1-x} = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \\ &f(1) = 1 \end{aligned}$$

Como existe el límite de $f(x)$ en $x = 1$ y coincide con $f(1)$ entonces podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por lo tanto, y resumiendo, diremos que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

8) Determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para los que las siguientes funciones son continuas. Indica su dominio de defición:

a) $$f(x) = \begin{cases} ax - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -ax + b & \text{si } -1 < x < 2 \\ -2ax + 3b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para todos los puntos $x \neq -1$ y $x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un polinomio.

<u>Veamos en $x = -1$:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} (ax - 5) = -a - 5 \\ &\lim_{x\to 1^+} (-ax + b) = a + b \\ &f(-1) = -a - 5 \end{aligned}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, debe cumplirse que

$$-a - 5 = a + b \longrightarrow \boxed{2a + b = -5}$$

<u>Veamos en $x = 2$:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^-} (-ax + b) = -2ab \\ &\lim_{x\to 2^+} (-2ax + 3b) = -4a + 3b \\ &f(2) = -4 + 3b \end{aligned}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, debe cumplirse que

$$-2a + b = -4a + 3b \longrightarrow \boxed{2a - 2b = 0}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \longrightarrow 3a = -5 \longrightarrow \\ 2a - 2b = 0 \longrightarrow b = a \end{cases} \boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{5}{3} \\ b &= -\frac{5}{3} \end{aligned}}$$

Como estos valores de a y b podemos asegurar que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

b) $g(x)=\begin{cases} 3x+a & \text{si } -2\leq x<-1 \\ bx+a & \text{si } -1\leq x<3 \\ 2x-b & \text{si } 3\leq x<5 \end{cases}$

Para empezar debemos darnos cuenta de que la función solo está definida para el intervalo: $[-2,5) \longrightarrow \boxed{\text{Dom}(g)=[-2,5)}$

Podemos asegurar que $g(x)$ es continua en $\forall x\in \text{Dom}(g)$ solo en $x=-1$ y $x=3$, que todavía no lo sabemos ya que son los puntos de cambio.

Veamos en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}(3x+a)=-3+a \\ \lim\limits_{x\to -1^+}(bx+a)=-bx+a \\ f(-1)=-b+a \end{array}\right\}$$

Para que $g(x)$ sea continua en $x=-1$

$$-3+\cancel{a}=-b+\cancel{a}\longrightarrow \boxed{b=3}$$

Veamos en $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}(bx+a)=9+a \\ \lim\limits_{xto3^+}(2x-b)=3 \\ f(3)=3 \end{array}\right\}$$

Para que $g(x)$ sea continua en $x=3$

$$9+a=3\longrightarrow \boxed{a=-6}$$

Por lo tanto, podemos asegurar que si $a=-6$ y $b=3$ entonces $g(x)$ es continua en todo su dominio: $\text{Dom}(g)=[-2,5)$.

9) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{multiplicaremos y dividiremos}\\ \text{por el conjugado de las raíces}\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cancel{1}-x)-(\cancel{1}-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$$

10) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+3x+5}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+4x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{5}{x^2}}}=\boxed{3}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ que sea un cociente de polinomios, lo que haremos para resolverlo será dividir numerada y denominador por x^p siendo p el mayor grado de los terminos del denominador.

11) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{x^2+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\cancelto{0}{\frac{3}{x}}}{1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

12) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{x+1}{x-1}-1\right]} = (*) = \boxed{e^2}$$

Nota: Siempre que tengamos una indeterminación de la forma 1^∞, haremos lo siguiente $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = (1^\infty) = e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$

Base:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}}{\frac{x}{x}-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}} = 1$$

$$(*) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}} = 2$$

13) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4})$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})-(\sqrt{x^2-4})\cdot(\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2-4})}{(\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2-4})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-(\sqrt{x^2-4})^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\cancel{x^2}+1)-(\cancel{x^2}-4)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{+\infty} = \boxed{0}$$

14) Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} & \text{si } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$\forall x \neq 1 \longrightarrow f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos si $f(x)$ es continua en $x=1$: