Álgebra Lineal

Francisco Javier Mercader Martínez

Índice

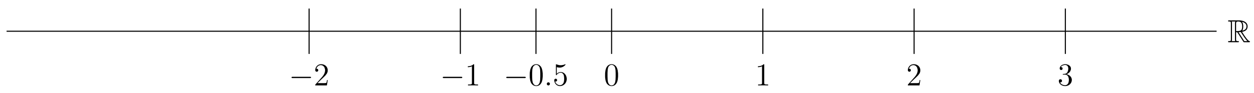
Tema 1: Números reales y complejos

1.1) Números reales y su representación en el ordenador

Recordemos los conjuntos de números habituales:

- Números naturales: $\mathbb{N} = \{01, 2, 3, \ldots\}$
- Números enteros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Números racionales: $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}$

  Los números racionales se pueden expresar en forma decimal, con un número finito de cifras decimales $\left(\text{por ejemplo, } \dfrac{1}{2} = 0.5\right)$ o bien con un número infinito de cifras decimales periódicas $\left(\text{por ejemplo, } \dfrac{1}{3} = 0.333\ldots\right)$.
- Números reales: $\mathbb{R}$ incluye a todos los anteriores más números irracionales (que contienen un número infinito de cifras decimales no periódicas) como $\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}$, etc.



Ejemplo

$$\underbrace{1}_{s} \quad \underbrace{10000000010}_{e} \quad \underbrace{\overbrace{100\ldots0}^{52 \text{ bits}}}_{f}$$

$$s = 1 \longrightarrow (-1)^s = -1$$

$$e = 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^3 + \cdots + 1\cdot 2^{10} = 1026$$

$$f = 1\cdot\frac{1}{2^1} + 0\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots + 0\cdot\frac{1}{2^{52}} = 0.5$$

$$x = (-1)^1\cdot 2^{1026-1023}(1+0.5) = -8\cdot\frac{3}{2} = \boxed{-12}$$

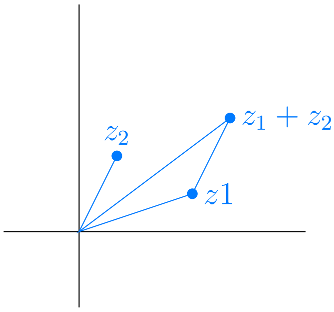
Debido a este sistema de representación:

1) El rango de números representables es $[-1 =^{300}, 10^{300}]$ con una precisión de 15 dígitos.
2) Números no uniformemente distribuidos. Están más juntos los números pequeños.
3) El número más pequeño que se puede representar el llamado epsilon de la máquina (en Python) es $\varepsilon \approx 2.22\cdot 10^{-16}$.

En $\mathbb{C}$ tenemos definidas las dos siguientes operaciones:

a) Suma: $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$

$z_1 + x_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$



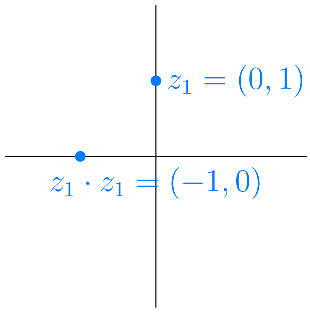
b) Producto: $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Ejemplo

$z_1 = (0, 1),\ z_2 = z_1 = (0, 1)$

$z_1 \cdot z_1 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$



1.2) Algunos números complejos destacados

- Los números complejos de la forma $(x, 0)$ se identifican con el número real, es decir, $x \equiv (x, 0)$.

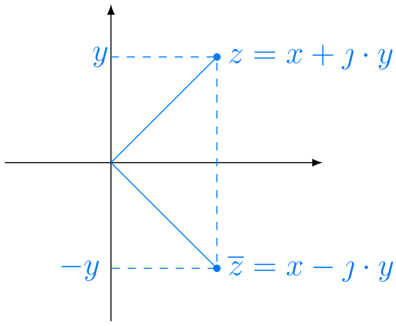
$$\underbrace{(x_1 + \imath y_1)}_{(x_1,y_1)} + \underbrace{(x_2 + \imath y_2)}_{(x_2,y_2)} = x_1 + x_2 + \imath(y_1 + y_2)$$

$$\underbrace{(x_1 + \imath y_1)}_{(x_1,y_1)} \cdot \underbrace{(x_2 + \imath y_2)}_{(x_2,y_2)} = x_1 x_2 + \imath y_1 y_2 + \imath y_1 x_2 - y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + \imath(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

- Definición (conjugado)

Dado $z = x + \imath y$, se llama conjugado de z, denotado $\overline{z}$, al número complejo $\overline{z} = x - \imath y$.



- Propiedades del conjugado

- $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

- $z \cdot \overline{z} = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2$

- Se llama módulo de $z = x + \imath y$ al número real

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Dado $z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0$, se define el argumento de z denotado $\arg z$, como el conjunto

$$\arg z = \{\theta \in \mathbb{R} : \mathrm{Re}z = |z| \cos\theta, \mathrm{Im}z = |z| \sin\theta\}$$

Obviamente, si $\theta \in \arg z$ entonces $\theta + 2k\pi \in \arg z \ \forall k \in \mathbb{Z}$. Al único $\theta \in \arg z$ tal que $\theta \in [0, 2\pi[$ se le llama argumento principal de z.

Por tanto,

$$\begin{aligned} z = \mathrm{Re}z + \imath\, \mathrm{Im}z &= |z| \cos\theta + \imath \cdot |z| \sin\theta \quad \text{(forma trigonométrica)} \\ &= |z|(\cos\theta + \imath \sin\theta) \\ &= |z| e^{\imath\theta} \quad \text{(forma exponecial)} \end{aligned}$$

donde $e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath \sin\theta$

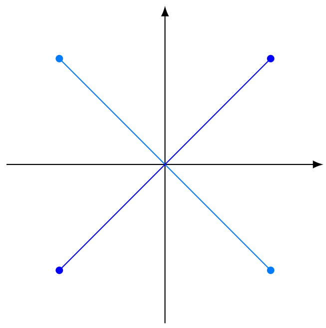
También podemos expresar $z \in \mathbb{C}$ como

$$|z|_\theta \equiv \text{formal polar.}$$

¿Cómo pasar de una forma a otra?

$$\begin{array}{lcl} \text{Binómica} & \Rightarrow & \text{Polar} \\ z = x + \imath\, y & & |z| = +\sqrt{x^2+y^2} \\ & & \theta = \arg z = \arctan \dfrac{y}{x} \end{array}$$

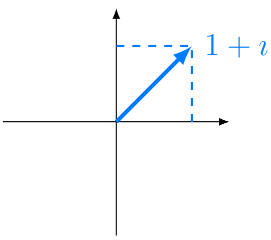
¡! La calculardora sólo devuelve valores entre $-90°$ y $90°$. Dependiendo de la localización del número complejo hay que sumar $180°$.



$$\begin{array}{lcl} \text{Polar} & \longrightarrow & \text{Binómica} \\ |z|_\theta & \longrightarrow & z = |z|\cos\theta + \imath|z|\sin\theta \end{array}$$

Ejemplo

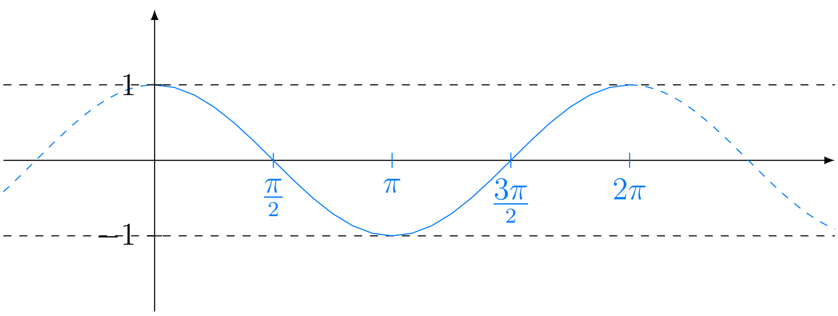
- $1+\imath$



$$|1+\imath| = +\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta = \arctan\frac{1}{1} = 45° = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$
$$1+\imath = \sqrt{2}_{45°} = \sqrt{2}e^{\jmath\frac{\pi}{4}}$$

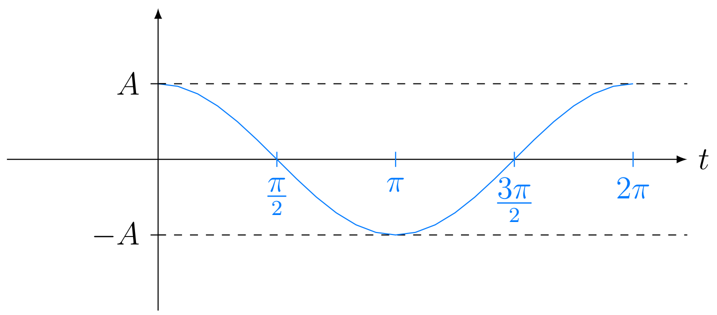
1.3) Representación matemática de una onda

- La función $\cos t = \dfrac{e^{\jmath t}+e^{-\jmath t}}{2}$, $t \equiv$tiempo.



$\boxed{\text{Periodo } \; T = 2\pi}$

- La función $A\cos t = \dfrac{Ae^{\jmath t}+Ae^{-\jmath t}}{2}$

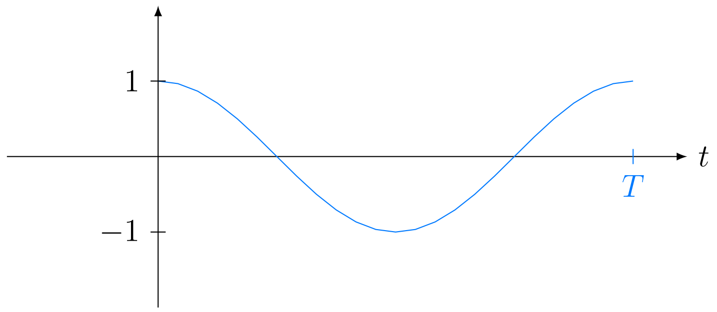


$\boxed{A \equiv \text{Amplitud de la onda}}$

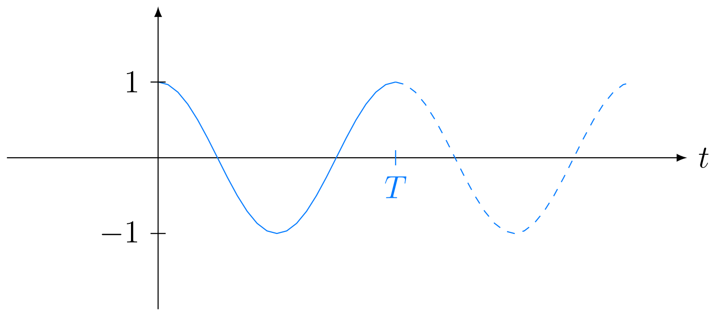
- La función $\cos(wt) = \dfrac{e^{jwt} + e^{-\jmath wt}}{2}$

$wt = 2\pi \longrightarrow t = \dfrac{2\pi}{w} = t$ período

Si w es pequeño$\longrightarrow$ T es grande (pocas oscilaciones)



Si w es grande$\longrightarrow$ T es pequeño (muchas oscilaciones)



Las ondas también se suelen manipular usando números complejos a partir de las identidades.

$$e^{\jmath t} = \cos t + \jmath \sin t$$

$$e^{-\jmath t} = \cos(-t) + \jmath \sin(-t) = \left\{ \begin{array}{l} \cos x \text{ es par} \\ \\ \sin x \text{ es impar} \end{array} \right\} = +\cos t - \jmath \sin t$$

Sumando: $2\cos t = e^{\jmath t} + e^{-\jmath t} \longrightarrow \cos t = \dfrac{e^{\jmath t + e^{-\jmath t}}}{2}$

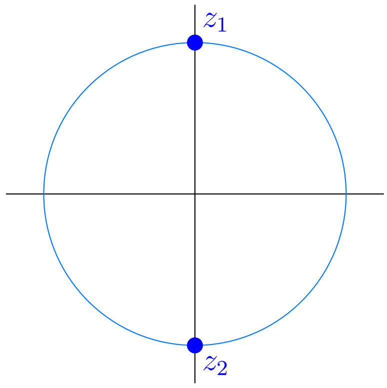
Restando: $e^{\jmath t} - e^{-\jmath t} = 2\jmath \sin t \longrightarrow \sin t = \dfrac{e^{\jmath t - e^{-\jmath t}}}{2\jmath}$

Por tanto:

$$\text{Onda} = f(t) = A\cos(wt - \varphi) = \frac{A \cdot \left(e^{\jmath(wt-\varphi)} + e^{-\jmath(wt-\varphi)}\right)}{2}$$

1.4) Raíces n-ésimas y raíces de polinomios

Consideremos la ecuación $x^2 + 1 = 0$.



Buscamos $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|e^{\imath\theta}$ tal que $z^2 + 1 = 0$; $z^2 = |z|^2 e^{2\imath\theta} = -1 = e^{\imath\pi}$

$$\left\{\begin{array}{l} |z|^2 = 1 \\ 2\theta = \pi + 2k\pi \end{array}\right. \longrightarrow \begin{array}{l} |z| = +\sqrt{1} = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \; k = 0, 1, \ldots \end{array}$$

$$k = 0 \longrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$k = 1 \longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$
$$k = 2 \longrightarrow \theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

Titulación: Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos
Asignatura: Álgebra Lineal
Profesores: Claudi Busqué (UMU) y Francisco Periago (UPCT)

Hoja de ejercicios. Números complejos

1. Calcula las siguientes operaciones de números complejos:

   $(a)\ (-2+j)+\left(\frac{-1}{2}-3j\right)$ $(b)\ (-2-3j)-\left(-3+\frac{1}{2}j\right)$ $(c)\ -2\cdot(-1-j)-3\cdot(-2+j)+2\cdot(1-2j)$

   $(d)\ j\cdot(-1+j)$ $(e)\ (-2-j)\cdot\left(-3+\frac{1}{2}j\right)$ $(f)\ \dfrac{1}{-1-2j}$

   $(g)\ \dfrac{-j}{2-3j}$ $(h)\ \dfrac{-1-j}{-2+j}$ $(i)\ \dfrac{1-j}{j}-\dfrac{j}{1-j}$

2. Obtén las formas polares y trigonométricas de los siguientes números complejos:

   $(a)\ 1+j$ $(b)\ -j$ $(c)\ -1+\sqrt{3}j$

   $(d)\ 2\sqrt{3}-2j$ $(e)\ -1-j$ $(f)\ -2+j$

3. Obtén la forma binómica de los siguientes números complejos:

   $(a)\ 2_{\frac{\pi}{3}}$ $(b)\ 1_{\pi}$ $(c)\ 3_{\frac{5\pi}{4}}$

4. Calcula las siguientes operaciones de números complejos, expresando el resultado en forma polar:

   $(a)\ 2_{\frac{5\pi}{3}}\cdot 3_{\frac{\pi}{2}}$ $(b)\ 1_{\frac{7\pi}{4}}\cdot 2_{\frac{7\pi}{3}}$ $(c)\ 2(\cos\frac{\pi}{2}+j\ \mathrm{sen}\ \frac{\pi}{2})\cdot 3_{\frac{11\pi}{6}}$

   $(d)\ \dfrac{4_{\frac{5\pi}{2}}}{2_{\frac{2\pi}{3}}}$ $(e)\ \dfrac{1_{\pi}}{2_{\frac{7\pi}{6}}}$ $(f)\ \dfrac{12(\cos\frac{5\pi}{4}+j\ \mathrm{sen}\ \frac{5\pi}{4})}{8_{\frac{5\pi}{4}}}$

5. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

   $(a)\ (1-\sqrt{3}j)^6$ $(b)\ (1-j)^8$ $(c)\ (-\sqrt{3}+j)^{10}$

6. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica y en forma polar:

   $(a)\ (1+j)^3$ $(b)\ j^5+j^{16}$ $(c)\ 1+3e^{\mathbf{i}\pi}$

   $(d)\ \frac{2+3j}{3-4j}$ $(e)\ 2_{\frac{3\pi}{2}}+j$ $(f)\ \frac{1}{j}$

7. Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

   $(a)\ 2j$ $(b)\ 1-j$ $(c)\ -1$

   $(d)\ \frac{1+j}{1-j}$ $(e)\ \frac{1}{j\pi}$ $(f)\ -3+j\sqrt{3}$

8. Representa gráficamente los siguientes subconjuntos del plano complejo:

   (a) Números complejos cuyo módulo es igual a 1
   $(b)\ \left\{z^k\in\mathbb{C} : z=e^{2\pi j/8}, 1\le k\le 8\right\}$
   $(c)\ \left\{z^k\in\mathbb{C} : z=e^{-2\pi j/8}, 1\le k\le 8\right\}$
   $(d)\ \{z\in\mathbb{C} : z-\overline{z}=j\}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones algebraicas y expresa el resultado en forma binómica:

$$(a)\ 3+4j+10e^{\frac{\pi}{3}j}=ze^{\frac{\pi}{3}j} \qquad (b)\ 5_{-\frac{\pi}{6}}+z+4+\sqrt{2}j=6e^{-\frac{\pi}{4}j}z$$

$$(c)\ 2_{\frac{\pi}{3}}+j+ze^{-\frac{\pi}{3}j}=0 \qquad (d)\ z+4jz=1$$

10. Dados los números complejos $z_1=-1-j$, $z_2=2_{\frac{\pi}{3}}$, $z_3=4e^{100\pi j}$, representa gráficamente los números z_1, z_2, z_3, z_1+z_2+ z_3, $z_1\cdot z_2$, $z_1\cdot z_2\cdot z_3$.

11. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida como $f(t)=4e^{-t}e^{100\pi tj}$. Representa gráficamente Re $f(t)$ e Im $f(t)$. Idem con la función $g(t)=4e^{100\pi tj}+7e^{\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)j}$. Indica e interpreta físicamente las siguientes magnitudes asociadas a las gráficas anteriores: amplitud de la oscilación, periodo, frecuencia y fase.

12. **Números complejos en Teoría de Sistemas Eléctricos**. Supongamos que tenemos un circuito de corriente alterna tipo RLC con una resistencia con valor $R=20\Omega$, un condensador con valor $C=33{,}3\mu F$ y una bobina con valor $L=0{,}01H$. Se supone que la fuente de voltaje (o fuerza electromtriz) viene dada por $\mathcal{E}(t)=353{,}5\cos(\omega t+\phi)$, con $\omega=3000$ rad/s y $\phi=-10°$. Nótese que la frecuencia ω está expresada en radianes mientras que la fase inicial ϕ en grados. Por tanto, al hacer cálculos hemos de expresar **ambas** magnitudes en radianes o grados, pero no una en radianes y la otra en grados. También hemos de tener en cuenta las unidades físicas en que expresamos las distintas magnitudes del problema. Por ejemplo, en el enunciado anterior, la Capacitancia del capacitador está dada en microfaradios por lo que hemos de multiplicar por 10^{-6} para expresarla en Faradios y que de esta forma todas las magnitudes estén expresadas en unidades del Sistema Internacional (S.I). Se pide:

   (a) Calcula la impedancia compleja del circuito, la cual se define como $\vec{z}=R+(\omega L-\frac{1}{\omega C})j$.

   (b) Sabiendo que $\vec{E}=353{,}5e^{-10j}$ y que $\vec{E}=\vec{I}\vec{z}$, calcula $\vec{I}$ expresando el resultado en forma polar.

   (c) Calcula las siguientes magnitudes físicas: (i) $\vec{V}_R=R\vec{I}$, $\vec{V}_L=\vec{I}\vec{X}_L$, donde $\vec{X}_L=\omega Lj$ se llama reactancia inductiva, (iii) $\vec{V}_C=\vec{I}\vec{X}_C$, donde $\vec{X}_C=-\frac{1}{\omega C}j$ se llama reactancia del capacitador.

   Solución: *(a)* $\vec{z}=R+(\omega L-\frac{1}{\omega C})j=20+(3000\cdot 0{,}01-\frac{1}{3000\cdot 33{,}3\cdot 10^{-6}})j=(20+20j)\Omega$

   (b) Empezamos escribiendo $\vec{z}$ en forma polar. Se tiene $\vec{z}=20+20j=\sqrt{20^2+20^2}_{\arctan\frac{20}{20}}=28{,}8_{45°}$.

   Por tanto, $\vec{I}=\frac{353{,}5_{-10}}{28{,}8_{45}}=12{,}5_{-55°}$.

   (c) $\vec{V}_R=R\vec{I}=20\cdot 12{,}5_{-55°}=250_{-55°}$

   $\vec{V}_L=\vec{I}\vec{X}_L=12{,}5_{-55°}\cdot 30_{90°}=375_{35°}$

   $\vec{V}_C=\vec{I}\vec{X}_C=12{,}5_{-55°}\cdot 10_{-90°}=125_{-145°}$

1) Calcula las siguientes operaciones de números complejos:

a) $(-2+\jmath)+\left(-\frac{1}{2}-3\jmath\right) = -2+\jmath-\frac{1}{2}-3\jmath = \boxed{-\frac{5}{2}-2\jmath}$

b) $(-2-\jmath)-\left(-3+\frac{1}{2}\jmath\right) = -2-\jmath+3-\frac{1}{2}\jmath = \boxed{1-\frac{3}{2}\jmath}$

c) $-2\cdot(-1-\jmath)-3\cdot(-2+\jmath)+2\cdot(1-2\jmath) = 2+2\jmath+6-3\jmath+2-4\jmath = \boxed{10-\jmath}$

d) $j\cdot(-1+\jmath) = -\jmath+\jmath^2 = \boxed{j+1}$

e) $(-2-\jmath)\cdot\left(-3+\frac{1}{2}\jmath\right) = 6-\jmath+3\jmath-\frac{1}{2}\jmath^2 = 6-\jmath+3\jmath+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{13}{2}+2\jmath}$

f) $\frac{1}{-1-2\jmath} = \frac{1}{2\jmath+1}\cdot\frac{2\jmath-1}{2\jmath-1} = \frac{2\jmath-1}{4\jmath^2-1} = \frac{2\jmath-1}{-4-1} = \boxed{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\jmath}$

g) $\frac{-\jmath}{2-3\jmath} = \frac{-\jmath}{2-3\jmath}\cdot\frac{2+3\jmath}{2+3\jmath} = \frac{-\jmath\cdot(2+3\jmath)}{4-9j^2} = \frac{-2\jmath-3\jmath^2}{4+9} = \frac{2\jmath-3}{13} = \boxed{-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}\jmath}$

h) $\frac{-1-\jmath}{-2+\jmath} = \frac{-1-\jmath}{\jmath-2}\cdot\frac{\jmath+2}{\jmath+2} = \frac{(-1-\jmath)\cdot(j+2)}{\jmath^2-4} = \frac{-\jmath-2-\jmath^2-2\jmath}{-1-4} = \frac{-3\jmath-2+1}{-5} = \frac{-3\jmath-1}{-5} =$
$\boxed{\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\jmath}$

i) $\frac{1-\jmath}{\jmath}-\frac{\jmath}{1-\jmath} = \frac{\jmath-1}{\jmath}\cdot\frac{\jmath}{\jmath}-\frac{\jmath}{1-\jmath}\cdot\frac{1+\jmath}{1+\jmath} = \frac{(j-1)\cdot j}{\jmath^2}-\frac{j(1+\jmath)}{1-\jmath^2} = \frac{\jmath^2-\jmath}{\jmath^2}-\frac{\jmath+\jmath^2}{1-\jmath^2} =$
$\frac{1+\jmath}{-1}-\frac{\jmath-1}{1+1} = -1-\jmath-\frac{\jmath-1}{2} = \frac{-2-\jmath-\jmath+1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\jmath}$

2) Obtén las formas polares y trigonométricas de los siguientes números complejos:

a) $1+\jmath$

- Polar: $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$
- Trigonométrica: $|z|\cdot(\cos(\theta)+\jmath\sin(\theta)) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\jmath\sin\frac{\pi}{4}\right)$

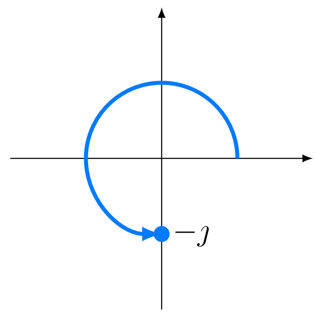
$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{1}{1} = 45^\circ \equiv \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$

b) $-\jmath$

$z_1 = -\jmath$

Polar: $1_{\frac{3\pi}{2}}$

Trigonométrica: $|z_1| \cdot (\cos(\theta_1) + \jmath \sin(\theta_1)) = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + \jmath \cdot \sin\frac{3\pi}{2}\right)$



$$z_1 = \begin{cases} |z_1| = 1 \\ \theta_1 = \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan\dfrac{-1}{0} = 90 \longrightarrow \theta = 90 + 180 = 270 \equiv \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

c) $-1 + \sqrt{3}\jmath$

- Polar: $2 \cdot e^{\left(\frac{2\pi}{3}\right)\jmath}$

- Trigonométrica: $|z| \cdot (\cos(\theta) + \jmath \sin(\theta)) = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \jmath \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

d) $2\sqrt{3} - 2\jmath \longrightarrow 4 \cdot e^{j\frac{11}{6}\pi}$

$|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

$\theta = \arctan\dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{11}{6}\pi = 330°$

e) $-1 - \jmath$

- Polar:

- Trigonométrica: $|z| \cdot (\cos(\theta) + \jmath \sin(\theta))$

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan\dfrac{-1}{-1} = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

f) $-2 + \jmath$

- Polar:

- Trogonométrica:

$$z = \begin{cases} |z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} = \arctan\dfrac{1}{-2} = \end{cases}$$

3) Obtén la forma binómica de los siguientes números complejos:

a) $2_{\frac{\pi}{2}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\jmath \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{2\jmath}$

b) $1_{\pi} = \cos(\pi) + \jmath\sin(\pi) = \boxed{-1}$

c) $3_{\frac{5\pi}{4}} = 3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 3\,\jmath\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\jmath}$

4) Calcula las siguientes operaciones de números complejos, expresando el resultado en forma polar:

a) $2_{\frac{5\pi}{3}} \cdot 3_{\frac{\pi}{2}} = \left(1 - \sqrt{3}\,\jmath\right) \cdot 3\,\jmath = 3 - 3\sqrt{3}\,\jmath = (*) = \boxed{6_{\frac{2\pi}{3}}}$

$$\begin{cases} 2_{\frac{5\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 2\,\jmath\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\,\jmath \\ 3_{\frac{\pi}{2}} = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \jmath\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\,\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6 \\ \theta = \arctan\frac{-3\sqrt{3}}{3} = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

b) $1_{\frac{7\pi}{4}} \cdot 2_{\frac{7\pi}{3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\jmath\right) \cdot (1 + \sqrt{3}\,\jmath) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\,\jmath = (*) = \boxed{2_{\frac{\pi}{12}}}$

$$\begin{cases} 1_{\frac{7\pi}{4}} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \jmath\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\jmath \\ 2_{\frac{7\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + 2\,\jmath\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}\,\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2 \\ \theta = \arctan\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = \arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

c) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \jmath\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot 3_{\frac{11\pi}{6}} = 2\,\jmath \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\jmath\right) = 3 + 3\sqrt{3}\,\jmath = (*) = \boxed{6_{\frac{\pi}{4}}}$

$$\begin{cases} 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \jmath\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\cdot(0 + \jmath) = 2\,\jmath \\ 3_{\frac{11\pi}{6}} = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \jmath\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\jmath\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6 \\ \theta = \arctan\frac{3\sqrt{3}}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

d) $\frac{4_{\frac{5\pi}{2}}}{2_{\frac{2\pi}{3}}} = \frac{4\,\jmath}{-1+\sqrt{3}\,\jmath} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}\,\jmath}{-1+\sqrt{3}\,\jmath} = \frac{4\,\jmath\cdot\left(-1-\sqrt{3}\,\jmath\right)}{(-1+\sqrt{3}\,\jmath)\cdot(-1-\sqrt{3}\,\jmath)} = \frac{4\sqrt{3} - 4\,\jmath}{4} = \sqrt{3} - \jmath = (*) = \boxed{2_{\frac{2\pi}{3}}}$

$$\begin{cases} 4_{\frac{5\pi}{2}} = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \jmath\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) = 4\cdot(0+\jmath) = 4\,\jmath \\ 2_{\frac{2\pi}{3}} = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \jmath\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\jmath\right) = -1+\sqrt{3}\,\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \\ \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

e) $$\frac{1_\pi}{2_{\frac{7\pi}{6}}} = \frac{-1}{-\sqrt{3}-\jmath} = \frac{1}{\sqrt{3}+\jmath}\cdot\frac{\sqrt{3}-\jmath}{\sqrt{3}-\jmath} = \frac{\sqrt{3}-\jmath}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\jmath = (*) = \boxed{1_{\frac{\pi}{6}}}$$

$$\begin{cases} 1_\pi = 1\cdot(\cos\pi + \jmath\sin\pi) = -1 \\ 2_{\frac{7\pi}{6}} = 2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \jmath\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \cancel{2}\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\,\jmath\right) = -\sqrt{3}-\jmath \end{cases}$$

$$(*) = \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ \theta = \arctan\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

f) $$\frac{12\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \jmath\sin\frac{5\pi}{4}\right)}{8_{\frac{5\pi}{4}}} = \frac{-6\sqrt{2}-6\sqrt{2}\,\jmath}{-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,\jmath} = \frac{6\sqrt{2}+6\sqrt{2}\,\jmath}{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,\jmath}\cdot\frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,\jmath}{4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,\jmath} = \frac{96}{64} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} 12\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \jmath\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\jmath\right) = -6\sqrt{2}-6\sqrt{2}\,\jmath \\ 8\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \jmath\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 8\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\jmath\right) = -4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,\jmath \end{cases}$$

5) Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $(1-\sqrt{3}\,\jmath)^6$

b) $(1-\jmath)^8$

c) $(-\sqrt{3}+\jmath)^{10}$

6) Expresar los siguientes números complejos en forma binómica y en forma polar:

a) $(1+\jmath)^3$

b) $\jmath^5 + \jmath^{16}$

c) $1+3e^{\imath\pi}$

d) $\dfrac{2+3\jmath}{3-4\,\jmath}$

e) $2_{\frac{3\pi}{2}} + \jmath$

f) $\dfrac{1}{\jmath}$

7) Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $2\,\jmath$

b) $1 - \jmath$

c) -1

d) $\dfrac{1+\jmath}{1-\jmath}$

e) $\dfrac{1}{\jmath\,\pi}$

f) $-3 + \jmath\sqrt{3}$

Tema 2: Vectores, matrices y tensores

2.1) Vectores

- Definición

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Definimos $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}$.

A los elementos $u \in \mathbb{K}^n$ se les llama vectores de n-componentes. En $\mathbb{K}^n$ definimos las dos siguientes operaciones:

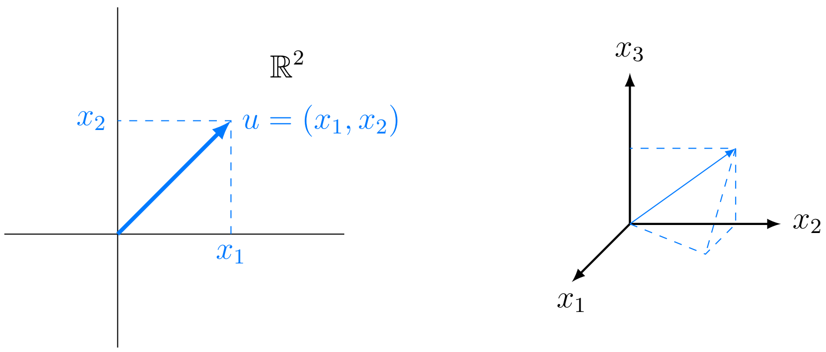
- Suma: Si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y,y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$u + v = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, , x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- Producto por escalares: Sean $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

El conjunto $\mathbb{K}^n$ dotado de las dos operaciones anteriores se dice que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.



2.1.1) Dependencia linea

- Definición (Combinación lineal)

Una combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{K}^n$ es un vector que se escribe como

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m,$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ escalares llamados coeficientes de la combinación lineal

Ejemplo

$$\underset{\lambda_1}{1} \cdot \underbrace{(-1,0)}_{u_1} + \underset{\lambda_2}{2} \cdot \underbrace{(1,2)}_{u_2} = \underbrace{(1,4)}_{u}$$

$$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \quad u \text{ es combinación lineal de } u_1 \text{ y } u_2$$

- Definición (Independencia lineal)

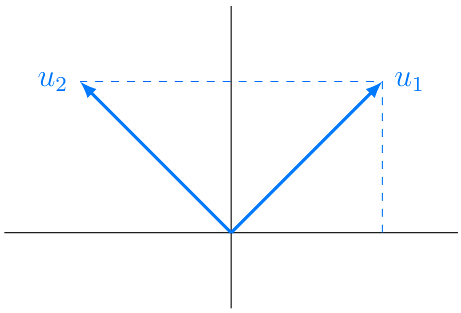
Se dice que los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{K}^n$ son linealmente independientes si una combinación lineal suya nula sólo puede ocurrir cuando todos los coeficientes son nulos, es decir, si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

En caso contrario, se dice que $u_1, \ldots, u_m$ son linealmente dependientes, es decir, $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ vector nulo.

Ejemplo

$u_1 = (1,1),\ u_2 = (-1,1)$

¿Son linealmente independientes?



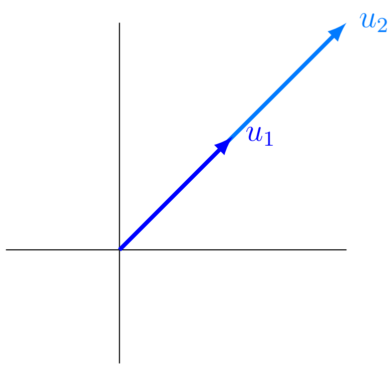
$$\lambda_1 \cdot (1,1) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (0,0)$$
$$(\lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2) = (0,0)$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 \longrightarrow \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \end{array}$$

Son linealmente independientes

$u_1 = (1,1),\ u_2 = (2,2)$

¿Son linealmente independientes?



$$\lambda_1 \cdot (1,1) + \lambda_2 \cdot (2,2) = (0,0)$$
$$(\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}$$

Proporciona una combinación lineal nula con coeficientes no nulos.

Son linealmente dependientes.

- Proposición

Sean $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores y $u \in \mathbb{K}^n$. Entonces:

1) Todo subconjunto no vacío de S es linealmente independiente.

2) El conjunto $S \cup \{u\}$ es linealmente independiente si y sólo si u no es combinación lineal de $u_1, \dots, u_m$.

- Demostración

1) Trivial

2) Si $S \cup \{u\}$ es linealmente independiente y $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$, entonces

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m u_m - 1 \cdot u = 0$$

es una combinación lineal nula con al menos un coeficiente no nulo. Por tanto, $S \cup \{u\}$ no es linealmente independiente (contradicción).

Recíprocamente, si $S \cup \{u\}$ es linealmente dependiente, existen escalones $r, r_1, \dots, r_m$, no todos nulos tales que $ru + r_1 u_1 + \cdots + r_m u_m = 0$.

r no puede ser cero pues si lo fuera entonces

$$r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_m u_m = 0$$

y así $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$.

Por tanto, $u = -r^{-1} r_1 u_1 - \cdots - r^{-1} r_m u_m$ y así u es combinación lineal de $u_1, \dots, u_m$.

- Definición (Base canónica de $\mathbb{K}^n$)

Se llama base canónica de $\mathbb{K}^n$ al conjunto de vectores

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Nótese que todo vector $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ se puede expresar como combinación lineal de $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. En efecto:

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{e_1} + x_2 \underbrace{(0, 1, 0, \dots, 0)}_{e_2} + \cdots + x_n \underbrace{(0, \dots, 0, 1)}_{e_n}.$$

2.1.2) Normas de vectores

- Definición

Sea $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces se definen:

1) $\|u_1\|_p = (|x_1|p + |x_2|p + \cdots + |x_n|p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$

   - $p = 1$
   - $p = 2$ norma euclídea

2) $\|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ norma del máximo.

Ejemplo

$u = (1, -2, -1)$

$\|u\|_1 = |1| + |-2| + |-1| = 4$

$\|u_2\| = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |1|^2} = \sqrt{6}$

$\|u\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |1|\} = 2$

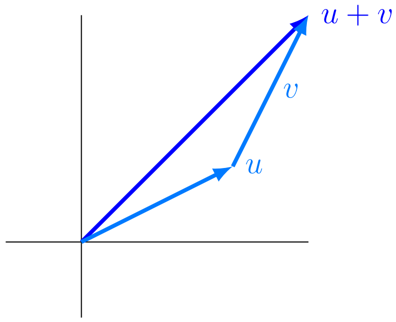
- Proposición

Sean $\|\cdot\|$ cualquiera de las normas anteriores, $u \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \longleftrightarrow u = 0$.

2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$.

3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular)



2.1.3) Producto escalar

- Definición

Dado $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define el producto escalar euclídeo de u por

v como

$$u \cdot v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Nótese que $\|u\|_2 = \sqrt{u \cdot u}$

- Proposición (Propiedades del producto escalar)

  1) $u \cdot v = v \cdot u \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

  2) $u \cdot (v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2 \qquad \forall u,\ v_1,\ v_2 \in \mathbb{K}^n$.

  3) $(\alpha\, u) \cdot v = u \cdot (\alpha\, v) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u,\ v \in \mathbb{K}^n$

  4) $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0 \longleftrightarrow u = 0$.

- Proposición (Propiedades de la norma)

  1) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$

  2) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v)$

  3) $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (desigualdad de Cauchy-Shwarz).

De la propiedad (3) se tiene que si $u, v \neq 0$, entonces

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1;$$
$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Por tanto, existe un ángulo $0 \leq \varphi \leq \pi$ tal que

$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|v\| \cdot \|u\|}.$$

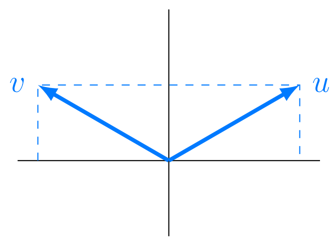
A este ángulo se le llama ángulo formado por los vectores u, v. Escribimos $\cos(u, v)$. De aquí se tiene:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(u, v).$$

Ejemplo

$u = (\sqrt{3}, 1),\ v = (-\sqrt{3}, 1)$

$$\cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{(\sqrt{3}, 1) \cdot (-\sqrt{3}, 1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2}}$$
$$= \frac{-3 + 1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.}$$

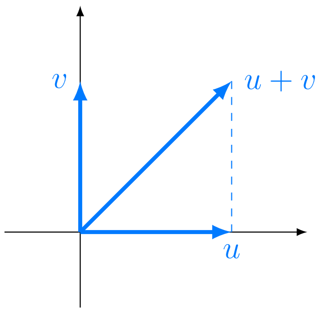


2.1.4) Ortogonalidad

- Se dice que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales so $u \cdot v = 0$.

Por tanto, por la proposición anterior se tiene que si u y v son ortogonales, entonces

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$



- Definición

Un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ se dice ortogonal si $u_i \cdot u_j = 0$ si $i \neq j$. Si además los vectores son unitarios ($\|u_i\| = 1, \leq i \leq m$), entonces el conjunto se dice ortogonal.

Ejemplo

La base canónica de $\mathbb{R}^n$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un conjunto ortonormal.

1) Proposición

Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es ortogonal, entonces es un conjunto linealmente independiente.

- Demostración

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$$

Si multiplicamos por u_j:

$$\cancelto{0}{\lambda_1 u - 1 \cdot u_j} + \cdots + \cancelto{\lambda_j \|u_j\|^2}{\lambda_j u_j \cdot u_j} + \cdots + \cancelto{0}{\lambda_m u_m \cdot u_j} = 0 \longrightarrow \lambda_j = 0$$

2.2) Matrices

- Una matriz es un conjunto de números reales o complejos ordenados por filas (o columnas).

Denotaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto de todas las matrices de m-filas y n-columnas.

Si $m = n$ la matriz se dice cuadrada.

Ejemplo

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz de Hilbert}$$

Algunos tipos de matrices destacados:

- Diagonal:

$$D = (d_{ij}), \qquad d_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$
$$= \text{diag}[a, b, c, \ldots]$$
$$= \begin{bmatrix} \text{a} & & & 0 \\ & \text{b} & & \\ & & \text{c} & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

- Si $a = b = c \ldots$, la matriz se llama escalar.

- Si $a = b = c \ldots, = 1$, la matriz se llama identidad y se denota I.

- Matriz triangular superior (inferior) si $a_{ij} = 0 \qquad i > j \quad (i < j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Triangular superior}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Triangular inferior}$$

2.2.1) Operaciones con matrices

- Suma:

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

$$A + B = C \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Producto por escalares: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, $\quad \lambda = j$, $\quad \lambda A = \begin{bmatrix} 3j & -2j \\ 0 & 6j \end{bmatrix}$

- Producto de matrices:

$$\underset{M_{m\times p}}{\underset{\Cap}{A = (a_{ij})}} \qquad \underset{M_{p\times n}}{\underset{\Cap}{B = (b_{ij})}} \longrightarrow A \cdot B \in M_{m\times n}$$

  - Si denotamos $C = A \cdot B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$A \cdot B = [2]$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de matrices no es conmutativo.

- Propiedades

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

4) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$

5) $A \cdot I = I \cdot A = A$

- Definición (Matriz traspuesta y matriz simétrica)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$. Se llama transpuesta de A, denotado A^T, a la matriz

$$A^T = (b_{ij}) \in M_{n\times m} \text{ con } b_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

- Una matriz cuadrada se dice simétrica si $A = A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Propiedades de la traspuesta

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

4) $(A\,B)^T = B^T\,A^T$

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se dice que A es invertible si existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

A la matriz B se le llama inversa de A y se denota $B = A^{-1}$.

Propiedades

1) Si A y B son invertibles, entonces $A \cdot B$ es invertible y $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2) Si A es invertible, entonces A^T es invertible y

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

2.2.2) Operaciones con matrices por bloques

– Notación

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1^T \\ u_2^T \\ \\ u_n^T \end{array} \\
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & & v_m \end{array} &
\end{array}
= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$$

– Producto como filas por columnas

$$A = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = \underbrace{u_i^T \cdot v_j}_{\text{producto escalar}}$$

– Producto matriz por columna

$$B = [v_1, \ldots, v_m]_{n \times m} \qquad X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$$B \cdot X = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}}_{n \times 1}$$

$$= \alpha v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} -1\cdot a + 1\cdot b \\ 2\cdot a + 3\cdot b \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

El producto por la derecha de una matriz A por una columna X es una combinación lineal de las columnas de A con los elementos de X como coeficientes.

- Producto de fila por matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m^T$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} &= [-1\cdot a + 2\cdot b,\ 1\cdot a + 3\cdot b] \\ &= a \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{u_1^T} + b \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}}_{u_2^T} \end{aligned}$$

El producto por la izquierda de una fila X por una matriz A es una combinación lineal de las filas de A con los elementos de X como coeficientes.

- Producto como suma de matrices de rango 1

Cuando multiplicamos una columna por una fila

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & b_p \end{bmatrix}_{1\times p} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_p \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_p \\ \hdashline a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_p \end{bmatrix}_{m\times p}$$

obtenemos una matriz cuyas filas son proporcionales, es lo que llamaremos una matriz de rango 1.

Por tanto, el producto matricial

$$A \cdot B = [v_1, \ldots, v_n]_{n\times m} \cdot \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}_{m\times n} = \underbrace{v_1 u_1^T}_{\text{rango } 1} + \cdots + \underbrace{v_n u_n^T}_{\text{rango } n}$$

se puede expresar como suma de matrices de rango 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 14 & 16 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & 44 & 48 \\ 50 & 55 & 60 \\ 60 & 66 & 72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 47 & 52 & 57 \\ 64 & 71 & 78 \\ 81 & 90 & 99 \end{bmatrix}$$

2.2.3) Matrices ortogonales

- Definición

Una matriz cuadrada Q se dice ortogonal si es no singular y su inversa es su traspuesta, es decir, $Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I$.

Si $Q = [u_1, \ldots, u_m]$

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & \cdots & u_1^T u_n \\ & & \\ u_n^T u_1 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, una matriz es ortogonal si y sólo si sus filas (columnas) forman un conjunto ortonormal de vectores

- Proposición

Sean P, Q ortogonales. Entonces:

1) $P \cdot Q$ es ortogonal

2) $Q\,u \cdot Q\,v = u \cdot v \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^4$

3) $\|Q_u\| = \|u\| \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}^4$

- Demostración

1) $(PQ)^T = Q^T P^T = !^{-1} P^{-1} = (PQ)^{-1}$

2) $Qu_{n\times n} \cdot Qv_{n\times 1} = (Qu)^T_{1\times n} \cdot Qv_{n\times 1} = u_T \cdot Q^T \cdot Qv = u^T \cdot v = u \cdot v$

3) $\|Qu\|^2 = Qu \cdot Qu = u \cdot u = \|u\|^2$.

2.2.4) Tensores

- Definición (Tensor de orden 3)

Un tensor de orden 3 es una colección finita de matrices. Por tanto, el tensor T lo indexamos como

$$T = (t_{ijk}), \qquad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq I \\ 1 \leq j \leq J \\ 1 \leq k \leq K \end{array}$$

De manera recurrente se define un tensor de cualquier orden n. En particular, un vector es un tensor de orden 1, y una matriz un tensor de orden 2.

Titulación: Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos
Asignatura: Álgebra Lineal
Profesores: Claudi Busqué (UMU) y Francisco Periago (UPCT)

Hoja de ejercicios tema 2: vectores, matrices y tensores

1. Determina la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: si u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3, entonces u_3 es combinación lineal de u_1 y u_2.

2. Consideremos los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$. Encuentra un vector w ortogonal a u y v. Comprueba que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v. Encuentra ahora un vector que no sea combinación lineal de u, v y comprueba que no es ortogonal a w.

3. Haz un dibujo de los siguientes sunconjuntos de $\mathbb{R}^2$:
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } ||(x, y)||_1 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } ||(x, y)||_2 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } ||(x, y)||_\infty = 1\}$$

4. Prueba que $||u||_2 \leq \sqrt{||u||_1 ||u||_\infty}$.

5. Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero, pero ¿qué pasa si su producto escalar es próximo a cero? Sean $x = [1, -0.75]$ e $y = [0.3, 0.3]$. Calcula el producto escalar $x \cdot y$ y el ángulo que forman. ¿Qué conclusión puedes sacar?

   Si dos vectores x, y son unitarios, entonces $-1 \leq x \cdot y \leq 1$ (¿por qué?). En este caso, ¿que podemos decir si $x \cdot y$ es aproximadamente -1, 1 o cero?

6. Sean u, v dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$ que forman un ángulo de $60°$. Calcula $||2u + v||$.

7. Sean u, v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ de norma 2 y 3 respectivamente que forman un ángulo de $60°$. ¿Qué ángulo forman los vectores u y $2u - v$?

8. Calcula $A + B$, $(A + B)^\top$, AB, BA, $(AB)^\top$, $A^\top B^\top$ y $B^\top A^\top$ para las matrices:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Prueba que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10. ¿Es cierta para matrices la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$?

11. ¿Existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A \cdot A^\top = 0$? ¿y si son matrices complejas?

12. Sean A, B matrices tales que $I + AB$ es invertible y sea S la inversa de $I + AB$. Prueba que $I + BA$ también es invertible y si inversa es $I - BSA$.

13. Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Si llamamos **flop** a una operación, ya sea una suma, resta, multiplicación o división, prueba que para calcular AB son necesarios $mn(2p-1)$ flops (haciendo la multiplicación de forma estándar). Si A es una matriz 10×2, B una matriz 2×10 y C una matriz 10×10 y queremos calcular ABC, ¿qué es mejor desde el punto de vista computacional, calcular $(AB)C$ o $A(BC)$? .

14. Dadas dos matrices cuadradas A, B, se define el **conmutador** de A, B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por otra parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguientes tres matrices, llamadas matrices de Pauli:

$$S_x = \frac{1}{2}\bar{h}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_y = \frac{1}{2}\bar{h}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2}\bar{h}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\bar{h} = \frac{h}{2\pi}$, con h la constante de Plank. Comprueba que

$$[S_x, S_y] = j\bar{h}S_z, \quad [S_y, S_z] = j\bar{h}S_x, \quad [S_z, S_x] = j\bar{h}S_y$$

y que

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\bar{h}^2 I_3$$

con I_3 la matriz identidad 3×3.

15. Si A es una matriz simétrica, ¿son las a matrices $B^\top AB$, $A + A^\top$ y $A - A^\top$ simétricas?

16. Prueba que si A es una matriz invertible simétrica, entonces A^{-1} es también simétrica.

17. Sean $u_1, \ldots, u_m$ vectores de $\mathbb{K}^n$ y supongamos que para ciertos escalares $x_1, \ldots, x_m$ se tiene $x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0$. Expresa esta última igualdad en forma matricial

18. Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Observa que $1 + v^\top u$ es un escalar, que suponemos no nulo. Prueba que la matriz $I + uv^\top$ es no singular y su inversa es

$$(I + uv^\top)^{-1} = I - \frac{uv^\top}{1 + v^\top u}$$

19. Sea A la matriz dada por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} invertible. Prueba que existen matrices X, Y tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ e I es la matriz identidad del tamaño adecuado (la matriz S se denomina el **complemento de Schur** de A_{11}).

20. Expresa la matriz AB como suma de matrices de rango 1, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

21. Sea $u^\top = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$, $v^\top = [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ y $w^\top = [a, b, c]$. Halla a, b, c para que la matriz $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal de determinante 1.

1) Determina la verdad o falses de la siguiente afirmación: si u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3, entonces u_3 es combinación lineal de u_1 yu_2

2) Consideremos los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$. Encuentra un vector w ortogonal a u y v. Comprueba que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v. Encuentra ahora un vector que no sea combinación lineal de u, v y comprueba que no es ortogonal a w.

3) Haz un dibujo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_1 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_2 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_\infty = 1\}$$

$\{x, y \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_1 = 1\}$

$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = 1$

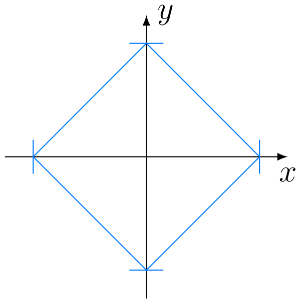
- Posibles casos

1) $x, y \geq 0 \to \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = x + y = 1 \to y = -x + 1$

2) $x \leq 0, y \geq 0 \to \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = -x + y = 1 \to y = x + 1$

3) $x, y \leq 0 \to \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = -x - y = 1 \to y = -x - 1$

4) $x \geq 0, y \leq 0 \to \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = x - y = 1 \to y = x - 1$

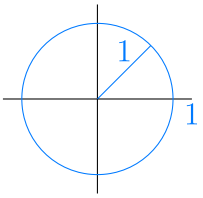


$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 = 1\}$

$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \longleftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_\infty = 1\}$

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$



- Posibles casos

1) $x \geq 0, y \geq 0 \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{x,y\} = 1$

2) $x \leq 0, y \geq 0 \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{-x,y\} = 1$

3) $x \leq 0, y \leq 0 \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{-x,-y\} = 1$

4) Prueba que $\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty}$

$$\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty}, \qquad u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\|u\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\|u\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\|u\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

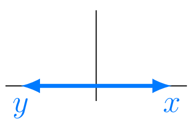
$$\begin{aligned}
\|u\|_2^2 &= |x_1|\,|x_1| + |x_2|\,|x_2| + \cdots + |x_n|\,|x_n| \\
&\leq |x_1| \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} + |x_2| \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} + \cdots + |x_n| \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \\
&\leq (|x_1| + \cdots + |x_n|) \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \\
&= \|u\|_1 \cdot \|u\|_\infty
\end{aligned}$$

5) Dos vectores son ortogonales cuando su podructo escalar es cero, pero ¿qué pasa si su producto es próximo a cero? Sean $x = [1, -0.75]$ e $y = [0.3, 0.3]$. Calcular el producto escalar $x \cdot y$ y el ángulo que forman. ¿Qué conclusión puedes sacar?
Si dos vectores x, y son unitarios, entonces $-1 \leq x \cdot y \leq 1$ (¿por qué?). En este caso, ¿qué podemos decir si $x \cdot y$ es aproximadamente $-1, 1$ o cero?

$\|x\| = \|y\| = 1 \qquad -1 \leq x \cdot y \leq 1 \qquad$ ¿Por qué?

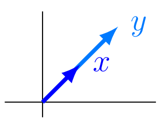
$-1 \leq x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cos(x,y) = \cos(x,y) \leq 1$

Si $x \cdot y \simeq -1 \longrightarrow$



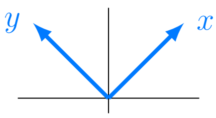
Paralelos y de sentido contrario

Si $x \cdot y \simeq 1 \longrightarrow$



Paralelos y del mismo sentido

Si $x \cdot y \simeq 0 \longrightarrow$ Ortogonales



6) Sean u, v dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$ que forman un ángulo de $60°$. Calcula $\|2u+v\|$.

$$
\begin{aligned}
\|2u+v\|^2 &= (2u+v)\cdot(2u+v) \\
&= 4u\cdot u + 2u\cdot v + 2v\cdot u + v\cdot v \\
&= 4\underbrace{\|u\|^2}_{1} + \underbrace{2u\cdot v + 2v}_{(*)}\cdot u + \underbrace{\|v\|^2}_{1}
\end{aligned}
$$

$$(*) = 4u\cdot v = 4\underbrace{\|u\|}_{1}\cdot\underbrace{\|v\|}_{1}\underbrace{\cos(u,v)}_{\cos 60°}$$

7) Sean u, v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ de norma 2 y 3 repectivamente que forman un ángulo de $60°$. ¿Qué angulo forman los vectores u y $2u - v$?

8) Calcula $A+B$, $(A+B)^\intercal, AB, BA, (AB)^\intercal, A^\intercal B^\intercal$ y $B^\intercal A^\intercal$ para las matrices:

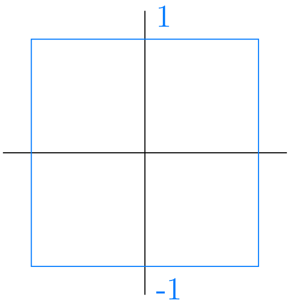
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9) Prueba que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe A

$$A = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1^\intercal \\ u_2^\intercal \end{array} \\ \begin{array}{cc} u_1 & \quad u_2 \end{array} & \end{array}$$

$A \cdot A =$



$u_1^\intercal \cdot v_1 = 0 \to u_1^\intercal$ y v_1 son ortogonales

$u_2^\intercal \cdot v_1 = 0 \to u_2^\intercal$ y v_1 son ortogonales

$u_2^\intercal \cdot v_2 = 0 \to u_2^\intercal$ y v_2 son ortogonales

$$\left.\begin{aligned} & u_1^\intercal \cdot v_2 = 1 \\ & u_1^\intercal \cdot v_2 = u_1^\intercal \cdot \lambda v_1 = \lambda u_1^\intercal \cdot v_1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{NO}$$

10) ¿Es cierta para matrices la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$?

$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + A\cdot B + b\cdot A + B^2$

Para que fuese cierto, el producto de matrice debería ser conmutativo. Sabemos que no lo es. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11) ¿Existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A\cdot A^\intercal = 0$? ¿y si son matrices complejas?

¿Existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A\cdot A^\intercal = 0$? ¿Y complejas?

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow u_1^\intercal \\ \leftarrow u_2^\intercal \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \quad & \quad \uparrow \\ u_1 \quad & \quad u_2 \end{matrix} & \end{array} \qquad A^\intercal = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow u_1^\intercal \\ \leftarrow u_2^\intercal \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \quad & \quad \uparrow \\ u_1 \quad & \quad u_2 \end{matrix} & \end{array}$$

$$A\cdot A^\intercal = \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ u_2^\intercal \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^\intercal \cdot u_1 & u_1^\intercal \cdot u_2 \\ u_2^\intercal \cdot u_1 & u_2^\intercal \cdot u_2 \end{bmatrix}$$

$$u_1^\intercal \cdot u_1 = \|u_1\|^2 = 0 \to u_1^\intercal = [0,0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$u_2^\intercal \cdot u_2 = \|u_2\|^2 = 0 \to u_2^\intercal = [0,0]$

$$A = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \qquad A^\intercal = \begin{bmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^\intercal = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z1^2 + z_2^2 & z_1 z_3 + z_2 z_4 \\ z_2 z_1 + z_4 z_2 & z_3^2 + z_4^2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &z_1 = j \quad z_3 = j \\ &z_2 = 1 \quad z_4 = 1 \\ &z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_4 = j^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

12) Sean A, B matrices tales que $I + AB$ es invertible y sea S la inversa de $I + AB$. Prueba que $I + BA$ también es invertible y su inversa es $I - BSA$.

Hipótesis: ¿qué es lo que sabemos?

$$\boxed{\begin{aligned} &(I + AB) \cdot S = I \\ &S(I + AB) = I \end{aligned}}$$

Tesis: lo que queremos probar

$$(I + BA) \cdot (I - BSA) \stackrel{?}{=} I$$
$$(I - BSA) \cdot (I + BA) \stackrel{?}{=} I$$

$$\begin{aligned} (I + BA) \cdot (I - BSA) &= I - \overline{BSA} + BA - BA\overline{BSA} \stackrel{?}{=} I \\ &= I + BA - B(SA + ABSA) \\ &= I`BA - B\underbrace{(S + ABS)}_{I \text{ por hipótesis}} A \\ &= I + \cancel{BA} - \cancel{BA} \\ &= I \end{aligned}$$

13) Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Si llamamos **flop** a una operación, ya sea una suma, resta, multiplicación o división, prueba que para calcular

$A_{n\times p} \quad B_{p\times m}$

$A \cdot B$ requiere $m \times n(2p - 1)$ flops

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \\ b_{p1} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$$

$$\text{fila} \times \text{columna} = p + p - 1 = 2p - 1$$

$$\text{fila} \times \text{todas columnas} = m(2p - 1)$$

$$\text{todas las filas} \times \text{todas columnas} = \boxed{nm(2p - 1)}$$

$$A_{\underset{n}{10}\times\underset{p}{2}} \qquad B_{\underset{p}{2}\times\underset{m}{10}} \qquad C_{10\times 10}$$

$$\underset{\text{backward}}{\underrightarrow{(A \cdot B)_{n\times m} \cdot C}} = \underset{\text{backward}}{\underleftarrow{A \cdot (B \cdot C)_{2\times 10}}}$$

14) Dadas dos matrices cuadradas A, B, se define el **conmutador** de A, B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por otra parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguientes tres matrices, llamadas matrices de Pauli:

$$S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \ S_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ matrices de Pauli}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \ h \text{ constante de Plank}$$

$$[S_x, S_y] = \hbar S_z [S_x, S_y] = S_x S_y - S_y S_x = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} 2j & 0 \\ 0 & -2j \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\hbar^2 j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = j\hbar \underbrace{\frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{S_z}$$

$$S_x S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

$$S_y S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

15) Si A es una matriz simétrica, ¿son las matrices $B^\intercal AB, A+A^\intercal$ y $A-A^\intercal$ simétricas?

$$\begin{aligned}(B^\intercal AB)^\intercal &= (A\cdot B)^\intercal (B^\intercal)^\intercal \\ &= B^\intercal A^\intercal B \\ &= B^\intercal AB \\ &\text{por ser } A \text{ simétrica}\end{aligned}$$

Por tanto, $B^\intercal AB$ es simétrica.

$(A+A^\intercal)^\intercal = A^\intercal + (A^\intercal)^\intercal = A^\intercal + A = A + A^\intercal$ Si es simétrica

$(A-A^\intercal)^\intercal = A^\intercal - (A^\intercal)^\intercal = A^\intercal - A \neq A - A^\intercal$ No es simétrica

16) Prueba que si A es una matriz invertible simétrica, entonces A^{-1} es también simétrica.

$(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1} = \{A \text{ simétrica}\} = A^{-1}$

17) Sean $u_1, \ldots, u_m$ vectores de $\mathbb{K}^n$ y supongamos que para ciertos escalares $x_1, \ldots, x_m$ se tiene $x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0$. Expresa esta última igualdad en forma matricial.

$$x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0 \longleftrightarrow Ax = 0 \text{ donde } A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

18) Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Observa que $1 + v^\intercal u$ es un escalar, que suponemos no nulo. Prueba que la matriz $I + u\,v^\intercal$ es no singular y su inversa es

$$(I + u\,v^\intercal)^{-1} = I - \frac{u\,v^\intercal}{1 + v^\intercal u}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$v^\intercal \cdot u = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$I + u\,v^\intercal \in M_{n\times n}$

$$\begin{aligned}\left(I - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u}\right)(I + u\,v^\intercal) &= I + u\,v^\intercal - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u} - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u} \cdot u\,v^\intercal \\ &= I + u\,v^\intercal - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u \cdot u \cdot v^\intercal} \\ &= I + u\,v^\intercal - \frac{(u + u\cdot v^\intercal \cdot u)v^\intercal}{1+v^\intercal u} \\ &= I + u\,v^\intercal - \frac{u\cancel{(1+v^\intercal u)}\cdot v^\intercal}{\cancel{1+v^\intercal}} \\ &= I + u\,v^\intercal - u\,v^\intercal = I\end{aligned}$$

De igual manera se prueba que

$$(I + u\,v^\intercal)\cdot\left(I - \frac{u\,v^\intercal}{1+v^\intercal u}\right) = I$$

19) Sea A la matriz dada por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} invertible. Prueba que existen matrices X, Y tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ e I es la matriz identidad del tamaño adecuado (la matriz S se denomina **complemento de Schur** de A_{11}).

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A.11 & 0 \\ XA_{11} & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{bmatrix}$$

$$A_{11}Y = A_{12} \longrightarrow Y = A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$XA_{11} = A_{21} \longrightarrow X = A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$\begin{aligned} A_{22} = XA_{11}Y + S &= A_{21}\underbrace{A_{11}^{-1}A_{11}}_{1}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \\ &= A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \\ &= A_{22} \end{aligned}$$

20) Expresa la matriz AB como suma de matrices de rango 1, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B$ como suma de matrices de rango 1.

$$A \cdot B_{2\times 3} = v_1u_1^{\intercal} + v_2u_2^{\intercal} + v_3u_3^{\intercal} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 4 & 0 & 20 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}}$$

21) Sea $u^{\intercal} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $v^{\intercal} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ y $w^{\intercal} = [a, b, c]$. Halla a, b, c para que la matriz $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal de determinante 1.

$$
\begin{aligned}
u^{\intercal} &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\\
v^{\intercal} &= \left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\\
w^{\intercal} &= [a,\ b,\ c]\\
0 = u^{\intercal}\cdot w^{\intercal} &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cdot[a,\ b,\ c]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}c\\
0 = v^{\intercal}\cdot w^{\intercal} &= \left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cdot[a,\ b,\ c]\\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}a+\frac{1}{\sqrt{3}}b+\frac{1}{\sqrt{3}}c\\
0 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{3}}-\frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}}-\frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Se resuelve el sistema:

$$
\left.\begin{array}{rcrcrcr}
a & & & + & c & = & 0\\
-a & + & b & + & c & = & 0\\
-a & - & 2b & + & c & = & \sqrt{2}\sqrt{3}
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\longrightarrow c=-a\\
\\
\longrightarrow 3b=-\sqrt{2}\sqrt{3}\longrightarrow b=-\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}
\end{array}
$$

$$
2c=-b\longrightarrow c=-\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\cdot 3}\longrightarrow a=-\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\cdot 3}
$$

Tema 3: Sistemas de ecuaciones y determinantes

3.1) Operaciones elementales en una matriz

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ llamaremos operaciones elementales de filas en A a cualquiera de las siguientes operaciones:

1) Intercambiar dos filas

2) Multiplicar una fila por un escalar.

3) Añadir a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Estas operaciones se pueden llevar a cabo multiplicando A por una determinada matriz que llamaremos elemental. Hay tres tipos de matrices elementales:

1) Matriz de permutación simple P_{ij}: se obtiene permutando las filas $\imath$ y $\jmath$ en la identidad.

   Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_{12} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

2) Matriz de dilatación $D_s(r)$: se obtiene multiplicando la fila S de la identidad por r.

   Ejemplo

$$D_2(5) = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{matrix}, \quad D_2(5) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \end{bmatrix}$$

3) Matriz de adición $S_{ij}(r)$: se obtiene sumando a la fila $\imath$ la $\jmath$ multiplicada por r.

   Ejemplo

$$S_{12}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- Propiedades

La matrices elementales son invertibles. Además:

1) $P_{ij}^{-1} = P_{ji}$

2) $D_s(r)^{-1} = D_s\left(\frac{1}{r}\right)$

3) $S_{ij}(r)^{-1} = S_{ij}(-r)$

- Definición (Matriz de permutación)

Llamaremos matriz de permutación P a aquella que se expresa como producto de matrices de permutación elementales.

Ejemplo

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{12}P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Definición (Matrices equivalentes)

Se dice que dos matrices A y B son equivalentes si existen matrices invertibles P y Q de modo que

$$\boxed{B = P\,A\,Q}$$

- Definición

Dada una matriz, se llama pivote de una fila a la primera entrada (contando de izquierda a derecha) no nula de esa fila.

Se dice que la matriz escalonada por filas si:

1) El pivote de cada fila no nula está estrictamente a la derecha del pivote de la fila anterior.

2) Las filas nulas, si las hay, son las últimas.

La matriz escalonada reducida por filas si además:

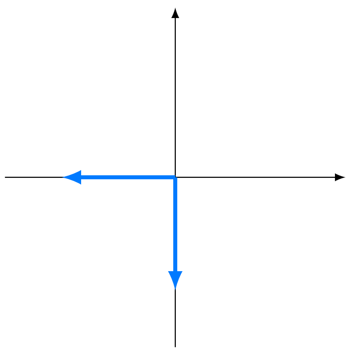
1') El pivote de cada fila no nula vale 1.

2') Cada pivote es el único elemento no nulo de su columna.

Ejemplo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{No escalonada}} \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Escalonada pero no reducida}} \qquad C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{Escalonada reducida}}$$

- Teorema (Factorización PAQ)



Toda matriz A es equivalente a un matriz de la forma

$$B = \left[\begin{array}{c|c} Ir & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

> Nota: La forma de llegar de A a B es utilizando operaciones elementales. Este proceso se llama **eliminación gaussiana**.

es decir, existen matrices invertibles P y Q de modo que

$$B = PAQ$$

Al número r, es decir, al número de filas no nulas que resultan después de escalonar una matriz se le llama rango de A y se denota $r = \text{rg}(A)$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hacemos operaciones elementales fila con la matriz.

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2-2F_1} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3\to F_3-F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\to \frac{1}{3}F_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1\to F_1+F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = PA,$$

con

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora realizamos operaciones elementales columna:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2\longleftrightarrow C_3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4\to C_4-C_1]{C_3\to C_3-2C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se tiene que $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = PAQ$$

$\text{rg}(A) = 2$

3.2) Sistemas de ecuaciones

- Definición

Un sistema lineal de m-ecuaciones con n-incógnitas es un sistema del tipo:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que en forma matricial escribimos como

$$(*) \qquad Ax = n$$

donde:

- $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz del sistema.
- $b = (b_i) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el término independiente.
- $x = (x_j)$ es el vector incógnita.

El sistema $(*)$ se dice:

- Homogéneo si $b = 0$
- Incompatible: si no tiene solución.
- Compatible determinado: si tiene una única solución.

- Compatible indeterminado: infinitas soluciones.

- Teorema (Rouché-Frobenius)

Consideremos el sistema $(*)$ y sea $(A|b)$ la llamada matriz. Entonces:

1) Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) =n^{\text{o}}$ de incógnitas, entonces el sistema $(*)$ es compatible determinado. (SCD)

2) Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) <n^{\text{o}}$ de incógnitas, entonces $(*)$ es compatible indeterminado (SCI). La solución depende de n$^{\text{o}}$ de incógnitas$-\text{rg}(A)$ parámetros.

3) Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$, el sistema $(*)$ es incompatible.

3.2.1) Método de Gauss para la resolución de sistemas lineales

Consiste en hacer operaciones elementales fila sobre la matriz $(A|b)$ hasta conseguir una matriz escalonada cuyo sistema asociado se resuelva fácilmente.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 3t = 6 \\ x + 2y - 2z - t = 3 \\ 4x + 5y - 2z + t = 12 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right] \xleftrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_3 - 4F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 < 4 = \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas. SCI}$$

La solución depende de 2 parámetros.

$$\left.\begin{array}{ll} t=\lambda & x+2y-2\mu-\lambda=3 \\ z=\mu & -3y+6\mu+5\lambda=0 \end{array}\right\}$$

$$y=2\mu+\frac{5}{3}\lambda$$

$$\begin{aligned} x=3-2y+2\mu+\lambda &= 3-2\left(2\mu+\frac{5}{3}\lambda\right)+2\mu+\lambda \\ &= 3-4\mu-\frac{10}{3}\lambda+2\mu+\lambda \\ &= \boxed{3+2\mu-\frac{7}{3}\lambda} \end{aligned}$$

3.2.2) Cálculo de la inversa de una matriz mediante eliminación Gaussiana

- Método

Realizar operaciones elementales fila sobre la matriz $(A|I)$ hasta conseguir que a la izquierda aparezca la identidad. A la derecha tendremos A^{-1}.

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3\to\frac{1}{3}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1\to F_1+F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\to F_2-3F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1\to F_1-2F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

3.3) Determinantes

- Definición

Sea $A \in M_2(\mathbb{K})$. Se define el determinante de A, denotado $|A|$ o $\det(A)$, como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Si $A \in M_3(\mathbb{K})$, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{array}$$

Para matrices de mayor tamaño, el determinante se define de manera recursiva. Veámoslo:

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se llama menor complementario del elemento a_{ij} al determinante $(|A_{ij}|)$ de la submatriz A_{ij} que se obtiene eliminando la fila $\imath$ y la columna $\jmath$ de la matriz original A.

Se llama adjunto de a_{ij}, denotado $\triangle_{ij}$, al escalar

$$\triangle_{ij} = (-1)^{\imath+\jmath}|A_{ij}|.$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 24 - (3 + 8) = 21$$

$$\triangle_{23} = (-1)^{2+3} A_{23} = -21$$

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. El determinante de A se define de manera recurrente como:

$n = 1, \quad |(a)| = a$

$n > 1 \quad |A| = a_{i1}\triangle_{i1} + a_{i2}\triangle_{i2} + \cdots + a_{in}\triangle_{in}$

Nota: También se puede definir eligiendo una columna. La definición no depende de la fila o columna elegidas.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}$$

$$= -3 - 2\cdot(4-4) + 4\cdot 6 = 21$$

Desarrollando por la segunda columna:

$$2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} + 0\cdot|\quad| + 3\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -2(4-4) + 0 - 3\cdot(1-8) = 21$$

3.3.1) Propiedades básicas

1) $|A| = |A^{\intercal}|$

2) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

3) A es no singular (invertible) si y sólo si $|A| \neq 0$. En este caso

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

3.3.2) Propiedades de los determinantes y las operaciones elementales

1) $\big|[u_1,\dots,u_j+u_j',\dots,u_n]\big| = |[u_1,\dots,u_j,\dots,u_n]| + \big|[u_1,\dots,u_j',\dots,u_n]\big|$

2) $\det[u_1,\dots,\alpha u_j,\dots,u_n] = \alpha\cdot\det[u_1,\dots,u_j,\dots,u_n]$

3) $\det[u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_n] = -\det[u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_n]$

4) Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un escalar, el determinante no cambia.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix}a & a+1 & a+2\\ a+3 & a+4 & a+5\\ a+6 & a+7 & a+8\end{vmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F-2\to F_2-F_1} \begin{vmatrix}a & a+1 & a+2\\ 3 & 3 & 3\\ 6 & 6 & 6\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}a & a+1 & a+2\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix} \xrightarrow{F_3\to F_3-F_2}$$

$$2\cdot\begin{vmatrix}a & a+1 & a+2\\ 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

3.3.3) Resolución de sistemas lineales usando determinantes

Consideremos el sistema $Ax = b$. Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución que viene dada por

$$x_i = \frac{\triangle_i}{|A|}, \qquad \text{(regla de Cramer)}$$

donde $\triangle_i$ es el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo la columna i-ésima de A por el término independiente b.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -x+z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1-1-(1+1) = -2 \neq 0.$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1-(1-1) = 2$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1-1-(1+1+1) = -4$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1-(1-1) = 0$$

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1,\ x_2 = \frac{\triangle_2}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2,\ x_3 = \frac{\triangle_3}{|A|} = 0$$

3.3.4) Cálculo de la inversa mediante determinantes

- Definición (Matriz adjunta)

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se llama matriz adjunta de A, denotado $\hat{A}$, a la matriz cuyas entradas son los adjuntos de la entrada de A, es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces $\hat{A} = (\triangle_{ij})$.

- Proposición

Si A es invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\hat{A}^{\intercal}.$$

Ejemplo

Sea $Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ortogonal con $|Q| = +1$. Vamos a calcular su inversa.

$\triangle_{11} = |d| = d \qquad \triangle_{12} = -|b| = -b$

$\triangle_{21} = -|c| = -c \qquad \triangle_{22} = |a| = a$

$\hat{Q} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \hat{Q}^{\intercal} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

Como $|Q| = +1 \longrightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

Recordaremos que como Q es ortogonal, $Q^{-1} = Q^{\intercal}$.

Por tanto

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} a = d \\ b = -c \end{matrix}$$

En resumen:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$|Q| = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 = 1$

1) Sea $\{w_1, w_2, w_3\}$ un conjunto independiente de vector de $\mathbb{R}^3$. Se definen los vectores $v_1 = w_1 + w_2$, $v_2 = w_1 + 2w_2 + w_3$ y $v_3 = w_2 + cw_3$. Si $V = [v_1, v_2, v_3]$ y $W = [w_1, w_2, w_3]$, entonces se tiene $V = WC$ con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Qué condición debe cumplir c para que los vectores v_1, v_2, v_3 sean linealmente independientes?

2) Dadas las matrices

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Halla matriz de permutación P tal que $PA = B$ y escribe P como producto de matrices de permutación simples.

3) Se tiene una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño 5×5, donde a_{ij} en la cantidad de mensajes que la persona $\imath$ manda a la persona $\jmath$. Las filas y columnas siguen el orden: Juan, Ana, Pedro, María, Maite. Halla una matriz de permutación P tal que las columnas y filas de $PAP^{\intercal}$ sigan el orden: Ana, María, Juan, Maite, Pedro.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \longleftrightarrow J \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} P \longrightarrow J & P_{34} \\ P \longrightarrow \text{MAY} & P_{45} \end{matrix}$$

$$P_{ij} = \text{permutación entre la fila } i \text{ y la } j \qquad J \longleftrightarrow M \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P_{45}\, P_{34}\, P_{24}\, P_{12}$$

4) Consideremos la matriz por bloques $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ con A una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times p$. Supongamos que haciendo operaciones elementales de filas se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}$. Prueba que $X = A^{-1}B$.

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{fila}]{} \begin{bmatrix} I & X \end{bmatrix} \longrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} A & I\,B \end{bmatrix} \longrightarrow [I \quad \underbrace{A^{-1}B}_{X}]$$

Cada operación fila se traduce es el producto de una matriz elemental por I. B permanece inalterada.

5) Halla una relación de dependencia entre los vectores $u_1 = (1,0,1,0), u_2 = (2,1,0,1), u_3 = (0,2,-1,1)$ y $u_4 = (3,-1,2,0)$.

6) Sean A y B matrices del mismo tamaño. Sea A' la matriz que resulta de A después de intercambiar las columnas $\imath, \jmath$ y sea B' la matriz que resulta de B después de intercambiar las filas $\imath, \jmath$. Escribe las matrices A' y B' en términos de A, B y matrices elementales. ¿Por qué se verifica que $AB = A'B'$?

$$A' = AP_{ij}^{\text{columna}}$$

$$B' = P_{ij}^{\text{fila}}B$$

$$A'B' = A_{ij}^{c}P_{ij}^{f}B$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}^{c} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{ij}^{f} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}^{c} \cdot P_{ij}^{f} = I$$

7) Calcular el rango de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

en función de los parámetros a y b.

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Calcula el rango de B

Posibles casos:

1) $a = b = 0 \longrightarrow B = [0] \longrightarrow \text{rg}(B) = 0$

2) $a \neq 0, b = 0 \longrightarrow \text{rg}(B) = 4$

3) $a = 0, b \neq 0 \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \text{rg}(B) = 4$

$a \neq 0, b \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{b}{a}F_1} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{b}{a}F_2} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & \dfrac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 \to F_4 - \frac{b}{a}F_3} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\dfrac{b^2}{a} \\ 0 & b & a & \dfrac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \dfrac{b^4}{a^3} \end{bmatrix}$$

Si $a - \dfrac{b^4}{a^3} = 0 = \left\{ a^4 - b^4 = 0 \longleftrightarrow a = \pm b \right\} = \text{rg}(B) = 3$

Si $a \neq \pm b \longrightarrow \text{rg}(B) = 4$

8) Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ calcula matrices invertibles P y Q tales que

$$PMQ = \left[\begin{array}{c|c} 1_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

con r el rango de M.

9) Halla la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y expresa A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

10) Determina el valor del parámetro a para el cual la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$ es invertible y calcula su inversa.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_4 \to F_4 - a^3 F_1 \\ F_3 \to F_3 - a^2 F_1}]{F_2 \to F_2 - aF_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a & 1 & -a^3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - a^2 F_2]{F_3 \to F_3 - aF_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a^4 - a^3 & 0 & -a^2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_4 \to F_4 - aF_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a^4 - 2a^3 & a^2 & -a^2 + a & 1 \end{array}\right.$$

11) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z-2t&=5\\ -2x-4y+2z+4t&=-10\\ y+t&=1\\ x+3y-z-t&=6\\ x-z-4t&=3 \end{aligned}\right\}$$

12) Discute en el cuerpo de los números reales los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & ay & & & + & at & = & a\\ ax & + & y & + & z & + & t & = & a\\ x & + & y & + & az & + & t & = & 1 \end{array}\right.$$

13) Si $A=[u_1,\dots,u_n]$, expresa el determinante de $B=[u_n u_1\cdots u_{n-1}]$ en función del determinante de A.

14) Una matriz A que cumple $A=-A^\intercal$ se llama **antisimétrica**. Prueba que una matriz antisimétrica de tamaño impar tiene determinante nulo.

A antisimétrica de tamaño n impar

$$A=-A^\intercal \longrightarrow |A|=0$$

$$|A|=|-A^\intercal|=(-1)^n|A^\intercal|=(-1)^n|A|\longrightarrow |A|=0$$

15) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2\\ \hdashline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \hdashline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hdashline n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} = 0$$

16) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x+y+ & = & 0 \\ 4x-6y-2z & = & 2 \\ -2x+15y+7z & = & -4 \end{array}\right\}$$

Observa que podemos eliminar la última ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras. Considerando ahora los términos en z como si fuesen términos independientes, observa que el sistema es un sistema de Cramer en x, y. Resuélvelo con la fórmula de Cramer y después expresa las soluciones en la forma $x_0 + u$ (x_0 solución particular y u solución genérica del sistema homogéneo).

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=-z \\ 4x-6y=2+2z \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -16$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 2+2z & -6 \end{vmatrix}}{-16} = -\frac{1}{16}(6z-2-2z) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 4 & 2+2z \end{vmatrix}}{-16} = -\frac{1}{16}(4+4z+4z) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}z$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & \frac{1}{8} - \frac{1}{4}z \\ y = & -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}z \\ z = & z \end{array}\right. \qquad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Sistema homogéneo</u>

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=0 \\ 4x-6y-2z=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} -4x-2y+2z=0 \\ 4x-6y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Solución genérica del homogéneo

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}z \\ y = -\dfrac{1}{2}z \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{aligned} &-8y = 4z \to y = -\frac{1}{2}z \\ &2x = -y - z = +\frac{1}{2}z - z = -\frac{3}{2}z \\ &x = -\frac{1}{4}z \end{aligned}$$

Tema 4: Subespacios vectoriales, bases y coordenadas

- Definición (Subespacio vectorial)

Un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ es un subconjunto W de $\mathbb{K}^n$ que cumple:

1) Si $w, w' \in W \longrightarrow w + w' \in W$

2) Si $w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K} \longrightarrow \alpha w \in W$

Nota: Nótese que el vector 0 siempre pertence a todo subespacio vectoria W. En efecto dado $w \in W$ se tiene que $-1 \cdot w = -w \in W$. Además $w + (-w) = 0 \in W$

Ejemplo

Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y W el conjunto de soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces, w es un subespacio vectorial. En efecto: si $w, w^{\perp} \in W$, entonces $Aw = 0, Aw' = 0$. Por tanto, $A(w + w') = Aw + Aw' = 0 + 0 = 0$, lo que implica que $w + w' \in W$.

Si $w \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $Aw = 0$ y $A(\alpha w) = \alpha Aw = 0$. Por tanto, $aw \in W$.

A este subespacio se le llama núcleo de A y se denota $\text{nuc}(A)$.

Ejemplo 1

Sea $W = \mathbb{K}^n$. Entonces los vectores

$$B = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)\}, \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

son una base de W. En efecto:

1) B es un conjunto generador ya que si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$\begin{aligned} v &= v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n \\ &= v_1(1, 0, \dots, 0) + v_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + v_n(0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

2) B es linealmente independiente:

$$\sum \alpha_i e_i = 0 \longleftrightarrow \alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + a_n(0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$$

Ejemplo 2

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $W = \text{nuc}(A)$.

Vamos a obtener una base de W.

$$Ax = 0 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas}$$

Desde un punto de vista computacional interesa disponer de bases ortonormales. El Algoritmo de Gram-Schmidt proporciona un método sistemático para construir una base ortonormal a partir de otra dada.

- Teorema (Algoritmo de Gram-Schmidt)

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un conjunto de vectores lineales independiente de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe un conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ de modo que

$$< v_1, v_2, \ldots, v_m > = < u_1, u_2, \ldots, u_m >$$

- Demostración

1) Sea $v_1' = v_1$

2) $v_2' = v_2 + \alpha v_1$. Imponemos

$$0 = v_1' \cdot v_2' = v_1 \cdot v_2 + \alpha v_1 \cdot v_1' = v_1' \cdot v_2 + \alpha \|v_1'\|^2 \longrightarrow \alpha = -\frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} \longrightarrow v_2' = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} v_1$$

obviamente $< v_1, v_2 > = < v_1', v_2' >$

3) $v_3' = v_3 + \alpha v_2' + \beta v_1'$. Imponemos

$$0 = v_3' \cdot v_2' = v_3 \cdot v_2' + \alpha v_2' v_2' + \cancelto{0}{\beta v_1' v_2'} \longrightarrow \alpha = -\frac{v_3 \cdot v_2'}{\|v_2'\|^2}$$

$$0 = v_3' \cdot v_1' = v_3 \cdot v_1' + \cancelto{0}{\alpha v_2' \cdot v_1'} + \beta v_1' \cdot v_1' \longrightarrow \beta = -\frac{v_3 \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'} = -\frac{(0,1,1) - (1,1,0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$v_3' = (0,1,1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) - \frac{1}{2}(1,1,0)$$

Finalmente:

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1\|}, \quad u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \quad u_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|}$$

4.1) Suma de subespacios vectoriales

- Definición (Suma de subespacios)

Sean $U, V \subset \mathbb{K}^n$ dos subespacios vectoriales. Se llama suma de los subespacios u y v, denotado,

$$U + V = \{w = u + v, u \in U, v \in W\}$$

obviamente, $U + V$ es un subespacio vectorial.

Además, si $U =< u_1, \ldots, u_r >, V =< v_1, \ldots, v_s >$ entonces

$$U + V =< u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s > .$$

- Proposición

La suma $U + V$ es directa si y sólo si $U \cap V = \{0\}$. En este caso, cada vector $w \in U \oplus V$ se escribe de forma única como $w = u + v, u \in U, v \in W$.

4.2) Ortogonal a un subespacio

- Definición

Dado un subespacio vectorial $U \subset \mathbb{R}^n$, se define su subespacio ortogonal como

$$U^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n : u \cdot v = 0 \, \forall u \in U\}$$

- Proposición

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial. Entonces

$$U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^n$$

- Demostración

Es fácil ver que $u^{\perp}$ es un subespacio vectorial. Además, si $u \in U \cap U^{\perp}$ entonces $u \cdot u = 0 \longrightarrow u = 0$.

Sea B una base ortogonal de U y la ampliamos a una base ortogonal $B \cup B'$ de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\mathbb{R}^n = < B > \oplus < B' > \subseteq U \oplus U^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$$

4.3) Subespacios asociados a una matriz. Rango

- Definición

Dada $A \in M_{m\times n}$, definimos los siguientes subespacios, llamados fundamentales, de A:

1) $\mathrm{Col}(A)$ = subespacio generado por las columnas de A.

2) $\mathrm{Fil}(A)$ = subespacio generado por las filas de A.

3) $\mathrm{nuc}(A)$ = subespacio generado por las soluciones del sistema $Ax = 0$. (núcleo por la derecha)

4) $\mathrm{nuc}(A^\intercal)$ = subespacio generado por las soluciones del sistema $A^\intercal x = 0$, que también se escribe como $x^\intercal A = 0$.

- Proposición

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{dimFil}(A) = \mathrm{dimCol}(A).$$

- Demostración

1) Veamos que si P es invertible, entonces

$$\mathrm{dimCol}(PA) = \mathrm{dimCol}(A)$$

Sea $r = \mathrm{dimCol}(A)$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ una base de $\mathrm{Col}(A)$.

Entonces $\{Pu_1, \ldots, Pu_r\}$ son linealmente independientes. Por tanto, $r \leq \mathrm{dimCol}(PA)$.

Recíprocamente, si $\{Pu_1, \ldots, Pu_s\}$ es una base de $\mathrm{Col}(PA)$ entonces $\{P^{-1}Pu_1, \ldots, P^{-1}Pu_s\}$ son linealmente independientes. Por tanto, $s \leq r$ y así $\mathrm{dimCol}(A) = \mathrm{dimCol}(PA)$.

2) De igual modo se prueba que si Q es invertible, entonces $\mathrm{dimFil}(AQ) = \mathrm{dimFil}(A)$.

3) Consideremos la factorización PAQ de A, es decir,

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} Ir & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

y recordemos que el rango es el número de pivotes no nulos.

Por lo visto anteriormente se tiene el resultado.

- Teorema (Rank-nullity)

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces
$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{dimnuc}(A) = n}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\mathrm{rg}(A) = 2$

4.4) Coordenadas respecto de una base

Sean $W \subset \mathbb{K}^n$ un subespacio vectorial y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de W.

Entonces, todo vector de W se expresa de modo único como combinación lineal de los vectores de B.

En efeto: sea $w \in W$ y supongamos que

$$w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_1 u_1.$$

Entonces,
$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0 \xrightarrow[\substack{\{u_i\} \\ \text{lin. ind.}}]{} \alpha_i - \beta_i = 0$$

- Definición

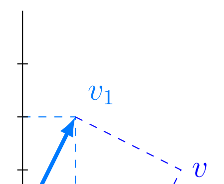
Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de W.

Dado $w \in W$, se llaman coordenadas de w en la base B a los únicos escalares $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^n$ tales que $w = x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m$. Se denota:

$$[w]_B = (x_1, \ldots, x_m)$$

Ejemplo

$W = \mathbb{R}^2$



$B = \{v_1 = (1,2), v_2 = (2,-1)\}$

$B' = \{v_1' = (1,-3), v_2' = (0,1)\}$

Vamos a clauclar $M_{B\to B'}$

$v_1 = (1,2) = a_{11} \cdot v_1' + a_{21} \cdot v_2' = a_{11}(1,-3) + a_{21}(0,-1)$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_{11} \\ 2 &= -3a_{11} - a_{21} \end{aligned}\right\} \longrightarrow a_{21} = -3a_{11} - 2 = -5$$

$v_2 = (2,-1) = a_{12} \cdot v_1' + a_{22} \cdot v_2' = a_{12}(1,-3) + a_{22}(0,-1)$

$$\begin{cases} 2 = a_{12} \\ -1 = -3a_{12} - a_{22} \qquad \longrightarrow a_{22} = 1 - 3a_{12} = -5 \end{cases}$$

$$M_{B\to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Sea ahora $[v]_B = (1,1)$, ¿$[v]_{B'}$?

$$\begin{aligned} [v]_{B'} &= M_{B\to B'} \cdot [v]_b \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.5) Coordenadas en bases ortonormales

Supongamos que $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ es una base ortonormal de W, es decir,

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases} \text{ delta de Kronecker}$$

$$\|u_i\| = 1,\ 1 \leq i \leq m$$

Vamos a calcular la forma que tiene $[w]_B$, siendo $w \in W$. Se tiene:

$$w = \sum x_i u_i$$

Por tanto:

$$w \cdot u_j = \sum x_i \cdot u_i \cdot u_j = x_j$$

es decir,

$$[w]_B = (w \cdot u_j)$$

Además, como

$$\begin{aligned} w \cdot u_j &= \|w\| \cdot \|u_j\| \cos(w, u_j) \\ &= \|w\| \cos(w, u_j) \end{aligned}$$

con lo que si $\|w\| = 1 \longrightarrow [w]_B = \underbrace{(\cos(w, u_j))}_{\substack{\text{cosenos directores} \\ \text{del vector } w}}$

- Resumen: Subespacios fudamentales de una matriz y resolución de sistemas lineales

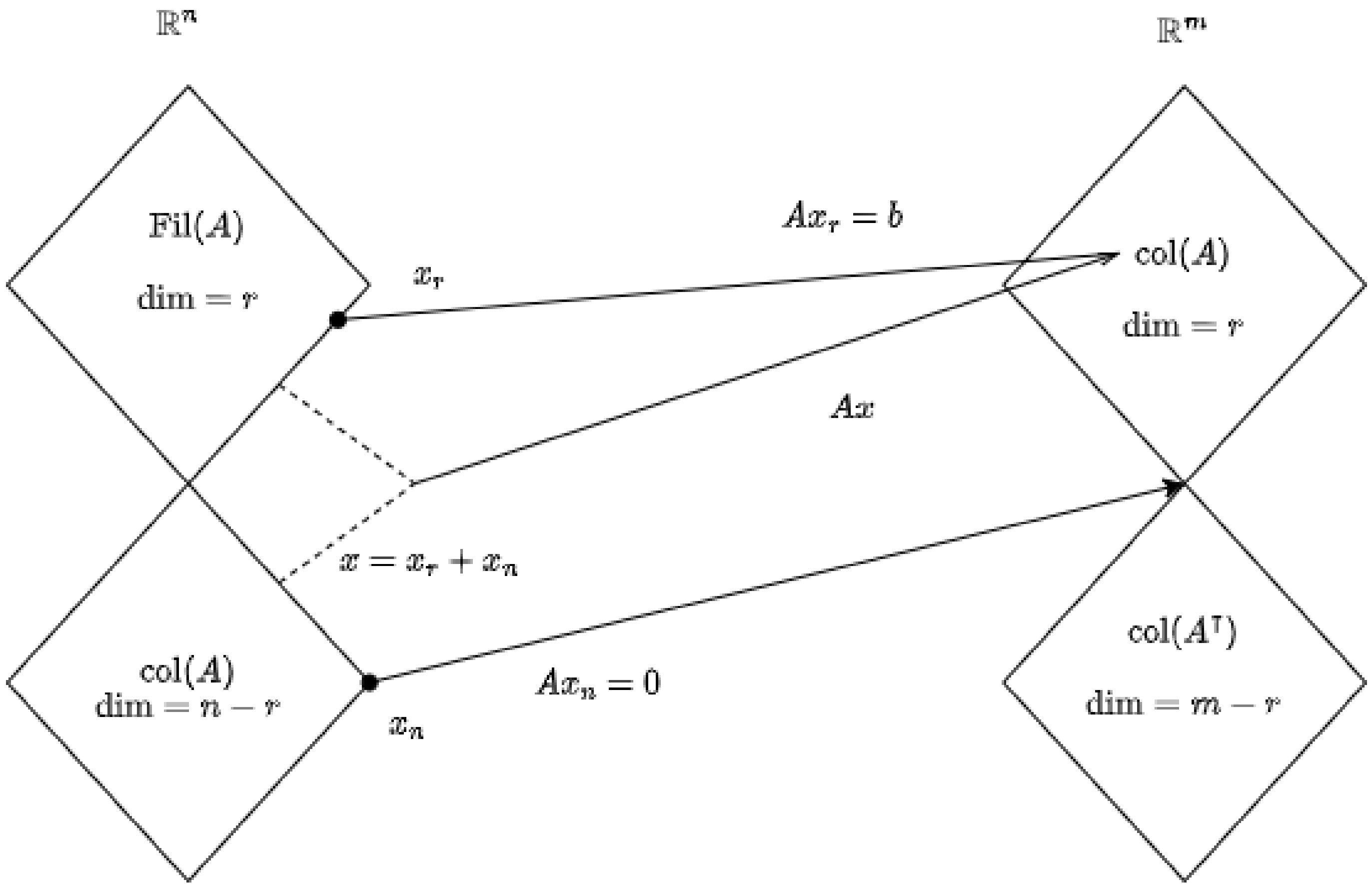
$A \in M_{m \times n}$

- $\text{Fil}(A), \text{nuc}(A)$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$
- $\text{Fil}(A) \perp \text{nuc}(A)$

$$Av = \begin{bmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \hdashline \text{fila } m \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} \text{fila } 1 \cdot v \\ \text{fila } 2 \cdot v \\ \hdashline \text{fila } m \cdot v \end{bmatrix} = 0$$

Por tanto, si $v \in \text{nuc}(A) \longrightarrow v \perp$ todas las filas de A

$$\left.\begin{aligned} \text{rg}(A) = \text{dimFil}(A) = r \\ \text{rg}(A) + \text{dimnuc}(A) = n \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{Fil}(A) \oplus \text{nuc}(A) = \mathbb{R}^n$$



- $\mathrm{Col}(A), \mathrm{nuc}(A^\intercal)$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^m$

- $\mathrm{Col}(A) \perp \mathrm{nuc}(A^\intercal)$

$$A^\intercal v = \left[\begin{array}{c} \text{Col } 1^\intercal \\ \text{Col } 2^\intercal \\ \hdashline \text{Col } m^\intercal \end{array}\right] \qquad v = \left[\begin{array}{c} \text{Col } 1^\intercal \cdot v \\ \text{Col } 2^\intercal \cdot v \\ \hdashline \text{Col } n^\intercal \cdot v \end{array}\right] = 0$$

Por tanto, si $v \in \mathrm{nuc}(A^\intercal) \longrightarrow v \perp$ columnas de A

$\mathrm{rg}(AP_{\mathsf{T}}) + \mathrm{dimnuc}(A^\intercal) = m \longrightarrow \mathrm{Col}(A) \oplus \mathrm{nuc}(A^\intercal)$

1) Determina cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$

No porque el vector $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ pertenece al subespacio pero $(1, 0, 0) + (1, 1, 0) = (2, 1, 0)$ no pertenece.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$

No porque al comprobar los la suma de vectores $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$ vemos que no cumple la condición a pesar de que los vectores sí lo hagan.

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0$

$$\begin{matrix} (x_1, y_1, z_1) \in w \\ (x_2, y_2, z_2) \in W \end{matrix} \longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 0$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1, z_1) \longrightarrow \underbrace{\alpha(x_1, y_1, z_1)} \in W$$

$$(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

$$\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha \underbrace{(x_1, y_1, z_1)}_{0} = 0$$

2) Comprueba que, en $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por los vectores $(1, 2, 1)$ y $(6, 1, -16)$ coincide con el subespacio generado por los vectores $(-2, 7, 20)$ y $(4, 9, 6)$.

3) Usando determinantes, halla una base del subespacio W del ejercicio anterior que esté contenida en el conjunto generador dado.

4) Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ con $n \geq 3$. Pon un ejemplo de una matriz A tal que los sistemas de ecuaciones $Ax = v_1$ y $Ax = v_2$ tengan solución pero el sistema $Ax = v_3$ no la tenga.

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_1 & \underset{\text{columnas}}{\cdots} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{x} = v_1 \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{x} = v_2$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = v_1x_1 + v_2x_2 = v_3$$

5) Completar la frase: "el vector b pertenece a Col(A) cuando ...... tiene solución".

El sistema $Ax = b$ tiene solución

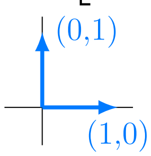
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

$\text{Col}(A) =< a_1, a_2, \ldots, a_n >$

6) Cierto o falso: "si el vector cero pertenece a Fil(A), entonces las filas de A son linealmente independientes".

Si $0 \in \text{Fil}(A) \longrightarrow$ las filas de A son linealmente independientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Fil}(A) =< \underbrace{(1,0),(0,1)}_{\text{lin. indep.}} >= \mathbb{R}^2$$



$(0,0) \in \text{Fil}(A) = \mathbb{R}^2$

7) Halla una base del subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores

$$(-1,0,0,1,-2) \quad (2,1,0,-1,2) \quad (1,3,1,0,-1) \quad (0,2,1,0,-1) \quad (3,1,0,-2,4)$$

8) Amplía el conjunto $\{(1,-1,1)\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

9) En $\mathbb{R}^5$, si las ecuaciones del subespacio U son $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t+u=0 \\ x-y+z-t+u=0 \end{array} \right\}$, encuentra las de $U^{\perp}$.

$$V \equiv \begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ x-y+z-y+u=0 \end{cases} \quad \text{ecuaciones implícitas} \qquad u^{\perp}$$

Calcular una base de u

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rg}(A) = 2 < 5 = \text{nº de incógnitas} \longrightarrow 3 \text{ parámetros } SCI$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\alpha \\ t=\beta \\ z=\varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} x+y=-\varphi-\beta-\alpha \\ x-y=-\varphi+\beta-\alpha \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x=-2\gamma-2\alpha \longrightarrow x=-\varphi-\alpha \\ y=-x-\varphi-\beta-\alpha=\cancel{\varphi}+\cancel{\alpha}-\cancel{\varphi}-\beta-\cancel{\alpha}=-\beta \end{array}$$

$$\begin{cases} x=-\alpha-\gamma \\ y=-\beta \\ z=\gamma \\ t=\beta \\ u=\alpha \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de } u}$$

$$v \in u^{\perp} \longleftrightarrow v \cdot u = 0 \,\forall\, u \in U \longleftrightarrow v \cdot u_j = 0, \ \{u_1, \dots, u_m\} \text{ base de } U$$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,z,t,u)\cdot(-1,0,0,0,1)=0 \\ (x,y,z,t,u)\cdot(0,-1,0,1,0)=0 \\ (x,y,z,t,u)\cdot(-1,0,1,0,0)=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x+u=0 \\ -y+t=0 \\ -x+z=0 \end{array}\right\} \text{ecuaciones implícitas de } u^{\perp}.\ 2 \text{ parámetros}$$

$$\underbrace{u}_{3} \oplus \underbrace{u^{\perp}}_{2} = \mathbb{R}^5 \qquad \left.\begin{array}{l} u = \alpha \\ t = \beta \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = u = \alpha \\ y = t = \beta \\ z = -x = -\alpha \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de } u^{\perp}}$$

10) Halla una base de siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

a) $\{(x, y, z) | x = y = z = t\}$

b) $\{(x, y, z, t) | x + y + z + t = 0\}$

11) Dados los subespacios

$$U = \{(a, b, a - b, a - 2b)\} \qquad W = \{(x, x - y, -x + y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

calcula la base de cada uno de ellos y determina si están en suma directa.

12) Dada la matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ calcula:

a) Tres bases distintas de $\text{Col}(U)$.

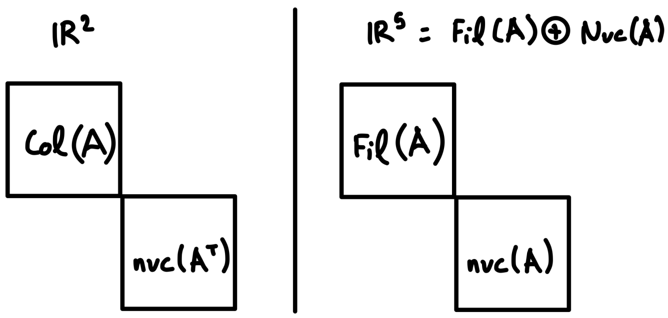
b) Dos bases distintas de $\text{Fil}(U)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 5} \qquad \text{Fil}(A), \text{Col}(A), \text{nuc}(A), \text{nuc}(A^{\intercal})$$

$\text{rg}(A) = \dim\text{Fil}(A) = \dim\text{Col}(A) = 2$

$\text{Fil}(A) =< (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0) >$

$\text{Col}(A) =< (1, 0), (0, 1) >$



$$\underbrace{\mathrm{rg}(A)}_{2} + \underbrace{\mathrm{dimNuc}(A)}_{3} = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} x+z+u=0 \\ y+t=0 \end{array}\right\} \text{ ecuaciones implícitas de nuc}(A)$$

Tomamos 3 parámetros

$$\left.\begin{array}{l} u=\alpha \\ t=\beta \\ z=\gamma \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=-z-u=-\alpha-\gamma \\ y=-t=-\beta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de nuc}(A)}$$

13) Sea S un conjunto de 6 vectores de $\mathbb{R}^4$. De las opciones entre paréntesis escoge la(s) correcta(s):

a) S (es) (no es) (no necesariamente es) un conjunto generador de $\mathbb{R}^4$.

b) S (es) (no es) (puede ser) un conjunto linealmente independiente.

c) Un subconjunto de S con 4 vectores (es) (no es) (puede ser) una base de $\mathbb{R}^4$

14) Determina los valores que faltan en la siguiente matriz sabiendo que tiene rango 1:

$$\begin{bmatrix} 7 & - & - \\ - & 8 & - \\ - & 12 & 6 \\ - & - & 2 \\ 21 & 6 & - \end{bmatrix}$$

15) Dadas dos matrices A y B, prueba las siguientes afirmaciones:

a) $\mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$ (usa que el rango es la dimensión de $\mathrm{Col}(A)$ y lo visto en la página 72 de los apuntes).

b) $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)$ (usa los resultados 4.26 y 4.28 de los apuntes).

16) Sea A una matriz $m \times n$ de rango k. Prueba que existe una matriz B de tamaño $m \times k$ y rango k y una matriz C de tamaño $k \times n$ tales que $A = BC$ (esta factorización se llama **full rank factorization**). Si k es mucho menor que n y m, razona si es mejor, en términos de memoria, almacenar A o almacenar B y C.

$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}}_{\text{vectores de tamaño } m}$ $\dim \mathrm{Col}(A) = k \longrightarrow$ Sea $B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_k \end{bmatrix}}_{\text{vectores de tamaño } m}$ una base de $\mathrm{Col}(A)$.

Por tanto, todo vector de $\mathrm{Col}(A)$ se escribe como combinación lineal de los vectores $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. En particular, las columnas de A.

$$a_j = c_{ij}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{kj}b_k \quad C = [c_{ij}]_{k\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_k \end{bmatrix}_{n\times k} \cdot \left[\begin{array}{cc:c} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{kn} \end{array}\right]_{k\times n}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ll} m = 10^2 & A \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10^2 = 10^4 = 10,000 \text{ datos} \\ n = 10^2 & \left.\begin{array}{l} B \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10 = 10^3 = 1,000 \text{ datos} \\ C \text{ necesita almacenar } 10^2 \cdot 10 = 10^3 = 1,000 \text{ datos} \end{array}\right\} 2,000 \text{ datos} \\ k = 10 & \end{array}$$

17) Calcula la "full rank factorization" para la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rg}(A) = 2$$

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}}_{\text{base de Col}(A)} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = c_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = c_{13} \\ 1 = -c_{13} - 3c_{23} \end{array}\right\} \quad 3c_{23} = -1 - c_{13} = -3 \longrightarrow c_{23} = -1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = c_{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{24} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = c_{14} \\ 0 = -c_{14} - 3c_{24} \end{array}\right\} \quad 3c_{24} = -c_{14} = 3 \longrightarrow c_{24} = -1$$

Comprobación

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}$$

18) Utiliza la "full rank factorization" y el ejercicio 15 para ver que una matriz A tiene rango k si y sólo si se puede expresar como suma de k matrices de rango 1, pero no se puede expresar como suma de menos de k matrices de rango 1. Expresa la matriz del ejercicio anterior como suma de 2 matrices de rango 1.

19) Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

en donde B se obtiene restando la fila uno a la fila tres. ¿Qué relación hay entre los cuatro subespacios fundamentales de las dos matrices? Calcula una base para cada uno de ellos.

20) Pon un ejemplo de una matriz cuadrada A en la que $\text{Col}(A) = \text{Fil}(A)$ y otro en el que $\text{Col}(A) \neq \text{Fil}(A)$

21) Sea A una matriz 10×10 que cumple $A^2 = 0$. Prueba que $\text{Col}(A) \subseteq \text{Nuc}(A)$ y, en consecuencia, el rango de A es menor o igual a 5.

Sea $v \in \text{Col}(A) \overset{?}{\Rightarrow} Av = 0$

Como $v \in \text{Col}(A) \longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}^{10}$ tal que

$$v = Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{bmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_{10}x_{10}$$

$Av = A \cdot (Ax) = A^2x = 0 \longrightarrow v \in \text{nuc}(A)$

$\boxed{\underline{\text{Nota:}}\ \underbrace{\text{rg}(A)}_{\leq 5} + \text{dimnuc}(A) = 10,\ \text{rg}(A) = \text{dimCol}(A)}$

22) Sea A una matriz cuadrada invertible. Calcula una base para cada uno de los subespacios fundamentales de las matrices A y $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$.

23) Sin calcular la matriz A, encuentra bases para sus cuatro subespacios fundamentales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

24) Halla una base del subespacio $\mathbb{R}^4$ dado por el núcleo de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprueba que el vector $(1, 1, 1 - 2)$ pertenece a $\text{Nuc}(A)$ y calcula sus coordenadas respecto de la base obtenida.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + z + 2t \\ x + y + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + z + 2t = 0 \\ x + y + t = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{rg}(A) = 2 \\ \mathrm{rg}(A) + \mathrm{dimNuc}(A) = 4 \longrightarrow \mathrm{dimNuc}(A) = 2 \end{array}$$

Tomamos 2 parámetros:

$$\left.\begin{array}{l} t = \alpha \\ z = \beta \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} 3x = -2t - z = -2\alpha - \beta \longrightarrow x = -\dfrac{2}{3}\alpha - \dfrac{1}{3}\beta \\ y = -t - x = -\alpha + \dfrac{2}{3}\beta = -\dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{1}{3}\beta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \alpha \underset{\downarrow\times 3}{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} + \beta \underset{\downarrow\times 3}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$B_{\mathrm{nuc}(A)} = \{(-2, -1, 0, 3), (-1, 1, 3, 0)\}$$

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 1 - 4 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (1, 1, 1, 1 - 2) \in \mathrm{nuc}(A)$$

$$(1, 1, 1, -2) = \alpha(-2, -1, 0, 3) + \beta(-1, 1, 3, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -2\alpha - \beta \\ 1 = \alpha + \beta \\ 1 = 3\beta \\ -2 = 3\alpha \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{2}{3} \\ \beta = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

$$[1, 1, 1, -2]_{B_{\mathrm{nuc}(A)}} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

25) Dadas las siguientes bases de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 1, 1), v_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = (1, 2, 0, 0), w_2 = (0, 1, 2, -1), w_3 = (0, 1, 1, 1), w_4 = (0, 1, 2, 0)\}$$

encuentra la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ y la de l cambio inverso. ¿Qué coordenadas tiene el vector $3w_1 - w_3 + 2w_2$ con respecto a la base $\mathcal{B}_1$?

$$M_{B_1\to B_2} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ -2 & \\ -2 & \\ 3 & \end{array}\right] \qquad M_{B_2\to B_1} = \left[M_{B_1\to B_2}\right]^{-1}$$

$$v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 + a_{41}w_4$$
$$= a_{11}(1,2,0,0) + a_{21}(0,1,2,-1) +_{31}(0,1,1,1) + a_{41}(0,1,2,0)$$
$$= (1,1,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a_{11}\cdot 1 \\ 1 = 2a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} \\ 0 = 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ 0 = -a_{21} + a_{31} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -1 = \overset{-2}{a_{21}} + \overset{-2}{a_{31}} + a_{41} \\ 0 = 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ 0 = -a_{21} + a_{31} \end{array}\right\} \xRightarrow{F_1\to 2F_1} \begin{array}{rcl} -2 & = & 2a_{21} + 2a_{31} + 2a_{41} \\ 0 & = & 2a_{21} + a_{31} + 2a_{41} \\ \hline -2 & = & a_{31} \end{array}$$

$$3v_1 - v_3 + v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$[3v_1 - v_3 + v_2]_{B_2} = M_{B_1\to B_2}[3v_1 - v_3 + v_2]_{B_1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ -2 & \\ -2 & \\ 3 & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

26) Calcula una base y unas ecuaciones implícitas de $U + V$, donde

$$U = \langle (1,2,3,4,5,),(5,4,3,2,1),(-1,0,1,2,3)\rangle$$
$$V = \left\{ (x,y,z,r,s) : \begin{array}{c} 2x + r = 2y \\ 3x + s = 2y \end{array} \right\}$$

$$V \equiv \begin{cases} 2x + r = 2y \\ 3x + s = 2y \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{matrix} 2x - 2y + r = 0 \\ 3x - 2y + s = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{ n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de incógnitas } \longrightarrow S.C.I$$

Tomamos 3 parámetros

$$\left.\begin{matrix} s = \alpha \\ r = \beta \\ z = \gamma \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} 2x - 2y = -\beta \\ 3x - 2y = \alpha \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} x = \alpha + \beta \\ y = \dfrac{1}{2}(3\alpha + 3\beta - \alpha) = \alpha + \dfrac{3}{2}\beta \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ r \\ s \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = < (1, 1, 0, 0, 1), \left(1, \frac{3}{2}, 0, 1, 0\right), (0, 0, 1, 0, 0) >$$

$$U + V = < (1, 2, 3, 4, 5), (5, 4, 3, 2, 1), (-1, 0, 1, 2, 3), (1, 1, 0, 0, 1), \left(1, \frac{3}{2}, 0, 1, 0\right), (0, 0, 1, 0, 0) >$$

Base de $U + V$ se obtiene haciendo operaciones elementales sobre la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de igaul forma a como lo hacemos para calcular el rango. Las columnas que resulten con pivotes no nulos constituyen una base de $U + V$.

Las ecuaciones implícitas los podemos obtener a partir de las paramétricas, eliminando los parámetros. También se puede hacer con determinantes.

Tema 5: Álgebra Lineal Computacional. Parte 1

5.1) Factorizaciones LU, PLU y Cholesky

5.1.1) Factorización LU

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se llama factorización LU de A a una factorización del tipo

$$A = L \cdot U$$

donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline l_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} \end{bmatrix}}_{\substack{L = \text{Lower} \\ \text{triangular inferior}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}}_{\substack{U = \text{Upper} \\ \text{triangular superior}}}$$

- Aplicaciones

  1) Cálculo de determinantes: $\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = \Pi_{ij}$

  2) Resolución de sistemas lineales:

$$Ax = b \qquad A = LU$$

$$Ax = b \longleftrightarrow L\underbrace{Ux}_{z} = b \longleftrightarrow \begin{cases} Lz = b \\ Ux = z \end{cases} \qquad L, U \text{ triangulares}$$

Resolución de un sistema triangular (caso $n = 4$)

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
u_{11}x_1+u_{12}x_2+u_{13}x_3+u_{14}x_4&=z_1\\
u_{22}x_2+u_{23}x_3+u_{24}x_4&=z_2\\
u_{33}x_3+u_{34}x_4&=z_3\\
u_{44}x_4&=z_4
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}
x_4&=\frac{z_4}{u_{44}} && \text{1 operación}\\
x_3&=\frac{z_3-u_{34}x_4}{u_{33}} && \text{3 operaciones}\\
x_2&=\frac{z_2-u_{23}x_3-u_{24}x_4}{u_{22}} && \text{5 operaciones}\\
x_1&=\frac{z_1-u_{12}x_2-x_{13}x_3-u_{14}x_4}{u_{11}} && \text{7 operaciones}
\end{aligned}$$

Total $= 16 = 4^2$

En general, resolver una sistema de orden n triangular tiene un coste computacional triangular tiene un coste computacional del orden de n^2. Se denota $O(n^2)$ "Landau"

- ¿Cómo calculamos L y U?

Haciendo eliminación Gaussiana.

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2+\frac{1}{2}F_1}\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3+\frac{2}{3}F_2}\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-1\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}=U$$

Topelitz. ¿Donde está L?

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&-\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}l_{21}&=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}\\ l_{31}&=0\\ l_{32}&=\frac{-1}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Comprobación

$$LU=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}=A$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{U}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^\intercal}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^\intercal}$$

Nótese que la simetría de A se ha perdido en la factorización LU.

Nota 1 (Factorización PLU)

En ocasiones, es necesario permutar algunas filas antes de empezar la factorización LU. A una factorización de la forma $PA = LU$.

Se le llama factorización PLU, donde P es una matriz de permutación.

Recordemos que $P^{-1} = P^\intercal$. Por lo tanto

$$A = P^{-1}LU = P^\intercal LU$$

Nota 2 (Coste computacional de resolver un sistema $Ax = b$ por factorización LU)

$$\begin{matrix} Ax = b \\ LUx = b \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} Lz = b \\ Ux = z \end{cases}$$

Se puede probar que el coste de resolver $Ax = b$ por la factorización LU es

$$\frac{n^3 + 3n^2 - 1}{3} = O\left(\frac{n^3}{3}\right) \qquad \text{O grande de } \frac{n^3}{3}$$

donde n es el tamaño de A.

$$L\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} = \tilde{L}$$

$$\sqrt{D}L^{\intercal} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} = \tilde{L}^{\intercal}$$

A es una factorización del tipo $A = LDL^{\intercal}$ o $A = \tilde{L}\tilde{L}^{\intercal}$ se le llama factorización de Cholesky

El coste computacional de resolver un sistema vía factorización Cholesky es $O\left(\frac{n^3}{6}\right)$, es decir, la mitad de LU.

Nota: Para que la factorización Cholesky funcione los pivotes han de ser positivos

Los pivots son siempre positivos para una clase de matrices llamadas definidas positivas que son aquellas que cumplen

$$x^{\intercal}Ax > 0 \quad \forall\, x \neq 0$$

- Recomendación

Si la matriz es simétrica y definida positiva, usar Cholesky. En caso contrario usar LU.

- Análisis de errores

Objetivo: Resolver un sistema $Ax = b$

Supongamos que en lugar de b tenemos $b + \triangle b$, con $\triangle b$ pequeño error (de representación, redondeo, medición, etc...).

La solución es $x + \triangle x$, $\triangle x$ error en la solución.

Por tanto, $x + \triangle x$ es solución del sistema $A(x + \triangle x) = b + \triangle b \iff Ax + A\triangle x = b + \triangle b$.

Así, $A \cdot \triangle x = \triangle b \longrightarrow \triangle x = A^{-1}\triangle b$

5.1.2) Normas de matrices

Si $x \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\ \|x\|_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_j| \\ \|x\|_\infty = \max\{|x_j|,\ 1 \le j \le n\} \end{cases}$

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$. se introduce la norma de A como

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquiera de las normas anteriores.

Nótese que $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|\ \forall\, x \neq 0$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|$$

- Definición

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ e invertible, se llama número de condición de A al número

$$c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\|\triangle x\| = \|A^{-1}\triangle b\| = \|A^{-1}\|\|\triangle b\| \cdot \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\|\triangle b\| \frac{\|A\|\|x\|}{\|b\|}$$

- Error absoluto en $\triangle x \le \|A^{-1}\|$
- Error absoluto en $\triangle b$

$$\underbrace{\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|}}_{\substack{\text{error relativo} \\ \text{en el output}}} \le \|A\|\|A^{-1}\| \underbrace{\frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}}_{\substack{\text{error relativo} \\ \text{en el input}}}$$

$$\le c(A)$$

Conclusión: Si el número de condición es grande, los errores también. A las matrices que tiene número de condición alto se les llama matrices mal condicionadas.

- Análisis de errores

$$Ax = b$$

error en $b : \triangle b \longrightarrow$ error en $x = \triangle x$.

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} \le c(A) \cdot \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}$$

$\boxed{c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$ número de condición.

- Conclusión

Si $c(A) >> 1 \longrightarrow$ error grande. La regla básica es que perdemos $\log(c(A))$ decimales en errores de redondeo.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{x_1=0,\, x_2=1}{Ax = b} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 7 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow x_1 = 0$$

Supongamos que $\triangle b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

El error en x es solución de

$$A \cdot \triangle x = \triangle b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \triangle x_1 \\ \triangle x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle x_1 + 7\triangle x_2 &= 0 \\ \triangle x_2 &= 0.1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \triangle x_1 = -7\triangle x_2 = -0.7$$

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{(-0.7)^2 + (0.1)^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{1}{10}\sqrt{50} = 0.1 \cdot \sqrt{50} = 0.1 \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 50 \cdot \frac{\|\triangle x\|}{\|x\|}$$

$$\frac{\|\triangle b\|}{\|b\|} = \frac{\sqrt{0^2 + (0.1)^2}}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = 0.1 \cdot \frac{1}{\sqrt{50}}$$

- Conclusión

Si $c(A) >> 1$ no se deben usar métodos directos para resolver $Ax = b$ ¿Qué hacer si $c(A) >> 1$?

$$Ax = b$$

La idea es multiplicar todo por una matriz invertible en la forma

$$c^{-1}Ax = c^{-1}b$$

y de nuevo que $\text{cond}(c^{-1}A) << c(A)$

- ¿Cómo elegir C?

- Primera idea *naive* (inocente)

  Tomar $C = A \longrightarrow C^{-1} = A^{-1}$

$$\underbrace{A^{-1}A}\, x = A^{-1}b$$
$$Ix = A^{-1}b$$

Tomar C próxima a A.

Otras dos opciones son:

1) $C = \operatorname{diag}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$, $a_{jj} \neq 0$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 50 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

- Python $\rightarrow c(A) \approx 6.4$
- Python $\rightarrow c(C^{-1}A) \approx 2.084$

2) Tomar $C^{-1} = p(A)$ que resulta de truncar la serie geométrica

$$
\begin{aligned}
&A^{-1} = (I-(I-A))^{-1} \equiv \frac{1}{I-(I-A)} = I + (I-A) + (I-A)^2 + \cdots \\
&\|I-A\| < 1 \qquad C^{-1}p(A) = I + \sum_{k=1}^{n}(I-A)^k \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = I + (I-A) + (I-A)^2 \\
&\frac{1}{1-x} = 1 + x +^2 + x^3 + \cdots \\
&|x| < 1
\end{aligned}
$$

- Definición (Precondicionador)

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se llama precondicionador de A a toda matriz invertible tal que $c(C^{-1}A) < c(A)$

Estas ideas conducen a los llamados métodos iterativos para resolver sistemas lineales.

$$
Ax = b \Longleftrightarrow Px = (P-A)x + b
$$

donde P es una matriz dada (precondicionador).

El esquema general de estos métodos es el segmento:

1) Inicialización: tomar $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario

2) Iteración hasta convergencia:

$$
Px_{k+1} = (P \cdot A)x_k + b
$$

3) Criterio de parada $\|x_{k+1} - x_k\| \leq$ tolerancia $(\delta = 10^{-8}) \longrightarrow$ Solución: $\boxed{x_k}$

Para que el esquema tenga exito se ha de cumplir:

1) Sea fácil de calcular x_{k+1} en función de x_k. $(= P$ es fácilmente invertible).

2) Los errores $e_k = \|x_k - x_k^*\|$ tienden a cero, cuando $k \longrightarrow +\infty$ (x solución de $Ax = b$). Es decir, que el algoritmo sea convergente.

$$
\begin{aligned}
&P_{k+1} = (P-A)x_k + b \\
&Px = (P-A)x + b \\
\hline
&P(x - x_{k+1}) = (P-A)(x-x_k) \\
&x - x_{k+1} = \underbrace{(I -^{-1} A)}_{M}(x - x_k) = M(x - x_k)
\end{aligned}
$$

$$e_{k+1} = \|x - x_{k+1}\| = \|M(x-x_k)\| \leq \|M\| \cdot \|x - x_k\| \leq \|M\| \cdot \|M\| \underbrace{\|x - x_{k+1}\|}_{e^{k-1}}$$

$$= \|M\|^2 e^{k+1} \leq \cdots \leq \|M\|^{k+1} \cdot \|e_0\| = \|M\|^{k+1} \cdot \|x - x_0\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \text{ si } \|M\| < 1$$

En resumen:

$$Px_{k+1} = (P-A)x_k + b$$

$$M = I - P^{-1}A$$

$$\|M\| < 1$$

- ¿Cómo elegir P?

  1) $P = \text{diag}(A)$, $a_{jj} \neq 0$ método de Jacobi

  2) Método de Gauss-Seidel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ a_{11} & 0 & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{m1} & & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

Ejemplo

$$A \equiv T_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad P = L + D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = L + D + U, P = L + D$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \\ -x_2 + 2x_3 \\ -x_2 + 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$2x_j^{\text{new}} = x_2^{\text{old}} + b_1 \to x_1^{\text{new}} \to x_2^{\text{new}} \to x_3^{\text{new}} \to x_4^{\text{new}}$

$2x_i^{\text{new}} = x_3^{\text{old}} + b_2 + x_1^{\text{new}}$

Convergencia: $\|M\| = \|I - P^{-1}A\| < 1$

- Definición (Matriz diagonalmente dominante)

Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se dice que es diagonalmente dominante si para cada fila $\imath$ se cumple

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} |2| > |-1| + |0| = 1 \\ |4| > |-1| + |2| = 3 \\ |3| > |0| + |2| = 2 \end{matrix}$$

A es estrictamente diagonal dominante

- Teorema

Si A es estrictamente diagonal dominante. los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes.

- Recomendación

$A \in M_n(\mathbb{R}) \qquad Ax = b$

$n < 10^4 \longrightarrow$ Factorizaciones LU, Cholesky

$n > 10^3 \longrightarrow$ Métodos iterativos

Ejercicios

1) Cáclulo de la inversa de una matriz usando factorización LU o Cholesky.

$A \in M_n(\mathbb{R})$. Sea $X \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces $X = A^{-1}$ si se cumple:

$$AX = I$$

Si $x^1, x^2, \ldots, x^n$ son las columnas de X, entonces se tiene

$$Ax^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, para calcular A^{-1} hemos de resolver n sistemas lineales. Cualquiera de ellos se resuelve como

$$\begin{aligned} Ax^j &= b^j \\ LUx^j &= b^j \\ &\downarrow \\ \left.\begin{aligned} Ux^j &= z^j \\ Lz^j &= b^j \end{aligned}\right\} \end{aligned} \qquad b^j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \jmath-\text{ésimo}$$

2) Matriz de Toeplitz de orden n. Calcula su *sparsity* y demuestra que T_3 es definida positiva.

$$T_n = \left[\begin{array}{ccccccc} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} \text{density} &= \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de entradas no nulas}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de entradas totales}} \\ &= \frac{3n-2}{n^2} \end{aligned}$$

$$\text{sparsity} = 1 - \text{density} = 1 - \frac{3n-2}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ es definida positiva si

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 2x_2 - x_3 & -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 x_2 x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0$$

La igualdad se da si

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad x_1 = x_2 = 0 \qquad \textbf{No}$$

1) Comprueba que si $v = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación $T_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T_v(x) = x + v$ no es lineal. Este tipo de aplicación se llama una **traslación de vector** v y no se puede representar por medio de una matriz 3×3. Sin embargo, esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la traslación de vector $v = (a_1, a_2, a_3)$ se calcula por medio de la matriz

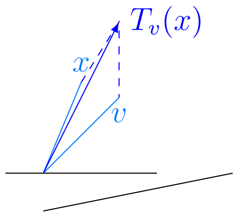
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ a_3 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las 4 coordenadas $(x_1, x_2, X-3, 1)$ del vector tridiemensional x se llaman coordenadas homogéneas de x.

$$\begin{aligned} &v = (a_1, a_2, a_3) \\ &T_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &\quad x \longmapsto T_v(x) v + x \end{aligned} \qquad \text{Traslación del vector } v$$



2) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (-2, 3, -2)$, $v_2 = (-4, 5, -3)$ y $v_3 = (5, -6, 4)$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula la matriz en la base $\mathcal{B}$ de la transformación lineal cuya matriz en las bases canónicas es

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

$$M_{B\to B}(f) = M_{C\to B} \cdot M_{C\to C}(f) \cdot M_{B\to C} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{C\to C}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix}, \; M_{B\to C} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}}_{M_{C\to B} = (M_{B\to C})^{-1}}$$

$$\begin{tikzcd} {}_C f : \mathbb{R}^3 \arrow[r, "M_{C\to C}(f)"] & \mathbb{R}^3_C \arrow[d, "M_{C\to B}"] \\ f : \mathbb{R}^3_B \arrow[u, "M_{B\to C}"] \arrow[r] & \mathbb{R}^3_B \end{tikzcd}$$

3) Las llamadas **rotaciones de Givens** son las transformaciones lineales que vienes dadas por las matrices

$$R - x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}, \qquad R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix}, \qquad R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $c = \cos\alpha$ y $s = \sin\alpha$ para un cierto ángulo α. ¿Qué interpretación geométrica tienen? Dada la transformación lineal que tiene por matriz en las bases canónicas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcula la matriz en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde

$$u_1 = (1,1,1), \qquad u_2 = (0,1,1), \qquad u_3 = (1,1,0)$$

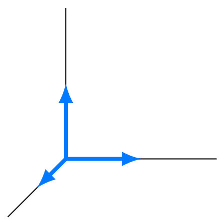
A la vista del resultado, ¿cuál es la interpretación geométrica de la transformación lineal dada por la matriz A?

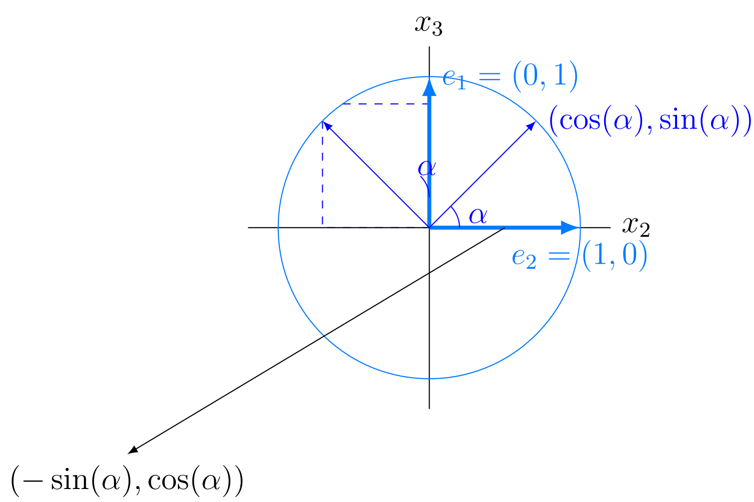
Rotaciones de Givens

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$$

$x = \cos(\alpha)$

$s = \sin(\alpha)$





$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c&-s\\0&s&c\end{bmatrix}\cdot\begin{array}{c}e_1\\\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c&-s\\0&s&c\end{bmatrix}\cdot\begin{array}{c}e_2\\\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}0\\\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\end{bmatrix}\qquad \text{giro de ángulo } \alpha \text{ en el plano } x_2x_3$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c&-s\\0&s&c\end{bmatrix}\cdot\begin{array}{c}e_3\\\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}1\\-\sin(\alpha)\\\cos(\alpha)\end{bmatrix}$$

$$\underset{M_{C\to C}(f)}{\underset{\|}{A}}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&-1&2\\-1&0&1\end{bmatrix}\qquad B=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,1,0)\}$$

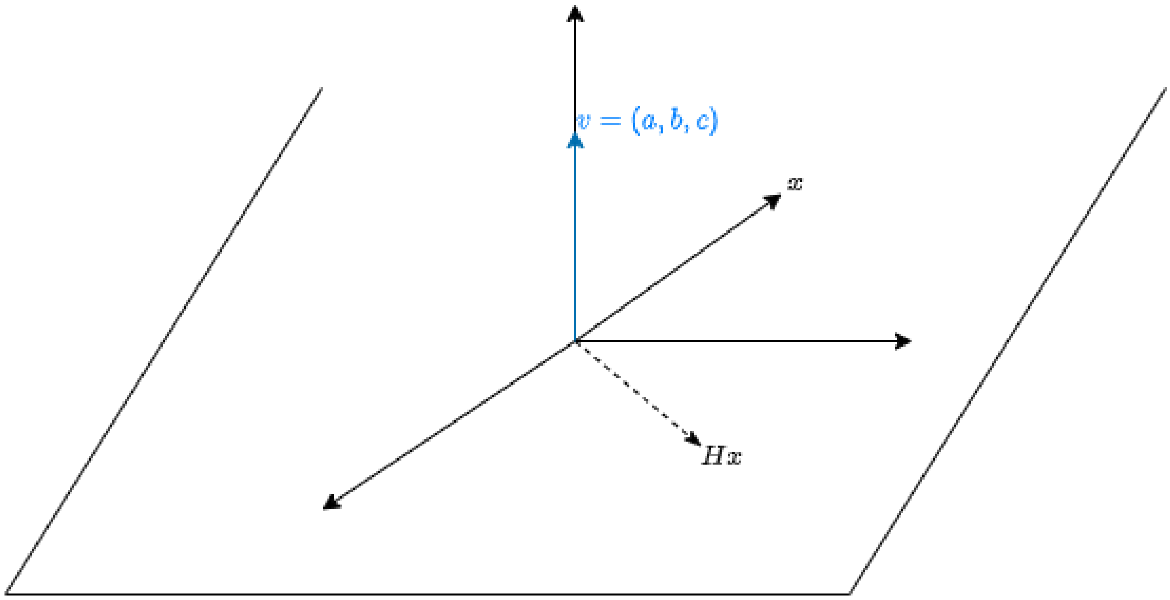
$$M_{B\to B}(f)=M_{C\to B}\,\underbrace{M_{C\to C}(f)}_{A}\quad\underbrace{M_{B\to C}}_{\substack{\|\\ \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}}}$$

4) Consideremos un plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, es decir, un subespacio y recibe el nombre de **reflexión de Householder**. Para verlo, prueba que si x es un vector arbitrario, entonces $x+Hx$ es ortogonal a v (es decir, $x+Hx$ pertenece al plano) y $x-Hx$ es proporcional a v (estas dos cosas prueban de Hx es el simétrico de x respecto del plano dado).

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ax+by+cz=0\}\qquad v\cdot v^{\intercal}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2&ab&ac\\ba&b^2&bc\\ca&cb&c^2\end{bmatrix}$$

$$H=I-\frac{2v\cdot v^{\intercal}}{v^{\intercal}\cdot v}$$

Simetría ortogonal respecto del plano (reflexión de Householder)



$$\underbrace{[a,b,c]}_{v^\intercal}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}}_{v}$$

$$0 \overset{?}{=} v^\intercal(x+Hx) = v^\intercal x + v^\intercal Hx = v^\intercal x + v^\intercal\left(x - \frac{2vv^\intercal}{v^\intercal v}\right) = v^\intercal x + v^\intercal x - \frac{2\cancel{v^\intercal v}v^\intercal}{\cancel{v^\intercal v}} = 0$$

$x - Hx$ proporcional a x

$$x - Hx = x - x + \frac{2vv^\intercal}{v^\intercal v}\cdot x = v\frac{2v^\intercal x}{v^\intercal v} \equiv \text{ proporcional a } v$$

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x+Hx)}_{\substack{\cap\\ u}} + \underbrace{\frac{1}{2}(x-Hx)}_{\substack{\cap\\ u^\intercal}} \qquad Hx = \underbrace{\frac{1}{2}(x+Hx)}_{\substack{\cap\\ u}} + \frac{1}{2}(x-Hx)$$

5) Calcula la proyección del vector (2,3,4) sobre el subespacio Col(A), donde $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Hazlo de tres formas disitntas: como en el ejemplo 5.17, como en el ejemplo 5.18 y como en el ejemplo 5.21.

$u = \text{Col}(A) =< (1,0,0),(1,1,0) >$

$$M_{C\to C}(P_u) = \left[\begin{array}{c:c:c} P_u(e_1) & P_u(e_2) & P_u(e_3) \end{array}\right]$$

$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$

$\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ base ortogonal de u, entonces

$$P_u(u) = \frac{u\cdot u_1}{\|u_1\|^2}u_1 + \cdots + \frac{u\cdot u_m}{\|u_m\|^2}u_m$$

1) Calculamos por Gram-Schmidt una base ortogonal de $u = \text{Col}(A)$

a) $u_1 = (1,0,0)$

b) $u_2 = (1,1,0) + \alpha(1,0,0)$

Imponemos la condición

$$0 = u_1 \cdot u_2 = (1,0,0)\cdot(1,1,0) + \alpha(1,0,0)\cdot(1,0,0) \longrightarrow \alpha = -\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,0)}{(1,0,0)\cdot(1,0,0)} = -1$$

$$P_u(1,0,0) = \underbrace{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}_{1}\cdot(1,0,0) = (1,0,0)$$

$$P_u(0,1,1) = (0,1,0)$$

$$P_u(0,0,1) = \underbrace{(0,0,1)\cdot(1,0,0)}_{0}\cdot u_1 + (0,0,1)\cdot(0,1,0)\cdot u_2 = (0,0,0)$$

$$P_u(2,3,4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6) ¿Qué combianción lienal de los vectores $(1,2,-1)$ y $(1,0,1)$ está más "cerca" del vector $(2,1,1)$?

$\|(1,2,1)x_1 + (1,0,1)x_2 - (2,1,1)\|$ mínima.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} \qquad \|\underbrace{Ax}_{P_{\mathrm{Col}(A)(b)}} - b\| \text{ minimizar.} \quad Ax = A\underbrace{(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal b}_{x}$$

7) Encuentra una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Col}(A)$ sea el subespacio generado por u_1, u_2 donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de los cuatro subespacios fundamentales de A contiene a u_3? Calcula la proyección orotogonal de $b^\intercal = (1,2,7)$ sobre $\mathrm{Col}(A)$ y explica por qué esta proyección es la solución aproximada del sistema de ecuaciones $Ax = b$.

Se tiene que cumplor que $\mathrm{Col}(A) =< u_1,\ u_2 >$

Gram-Schmidt

1) $u_1 = (1,2,-2) \longrightarrow \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

2) $u_2 = (1,-1,4) + \alpha(1,2,-2)$

$$0 = u_1 \cdot u_2 \longrightarrow \alpha =?$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|}$$

3) $u_3 = \underbrace{(1,0,0)}_{\substack{(0,1,0)\\(0,0,1)}} + \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \longrightarrow$ $\begin{array}{l} 0 = u_1 \cdot u_3 \longrightarrow \alpha \\ 0 = u_2 \cdot u_3 \longrightarrow \beta \end{array}$

$$\mathrm{Col}(A) \oplus \mathrm{nuc}(A^{\intercal}) = \mathbb{R}^3$$

Tema 6: Transformaciones Lineales

- Introducción

$A \in M_{m\times n}$ tiene asociada los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$

$v \in \mathbb{R}^n, \qquad Av \in \mathbb{R}^m$

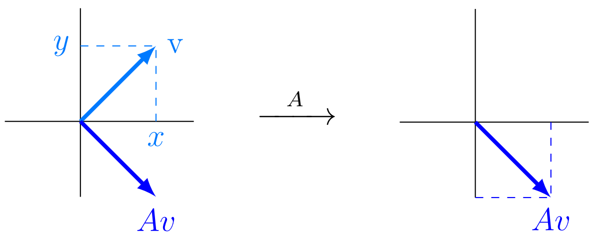
Podemos ver una matriz como una transformación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\xrightarrow{A} \mathbb{R}^m \\ v &\longmapsto Av \end{aligned}$$

Ejemplo

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow Av = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



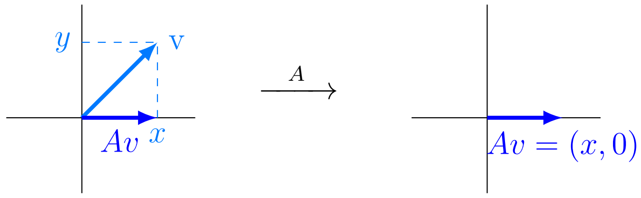
Av es una simétrica respecto al eje OX.

La matriz A induce una aplicación:

$$\begin{aligned} lf : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (x, -y) \end{aligned}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad Av = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$



A es una proyección sobre el eje OX e induce una aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (x, 0) \end{aligned}$$

3) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad Av = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}$$

A reescala las variables e induce una aplicación.

Una propiedad común a estas transformaciones matriciales es

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v \, \forall \, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \\ \forall \, u, v \in \mathbb{R}^n$$

- Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que f es lineal si cumple

$$f(\alpha u,\ \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \forall \, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \, \forall \, u, v \in \mathbb{K}^n$$

Toda matriz $A \in M_{m\times n}$ tiene asociada un aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\longmapsto f(v) = Av \end{aligned}$$

Veamos que dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ entonces existe una matriz que representa a dicha aplicación lineal.

Consideremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$

$$C_n = \{e_1 = (1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^n$$
$$C_m = \{e_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\}$$

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$

$f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \underset{f \text{ es lineal}}{=} x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_nf(e_n)$

Supongamos que $f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$

Construimos la matriz

$$M_{C_n \to C_m}(f) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \quad & f(e_n) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{f(e_1)} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{f(e_2)} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{f(e_n)} = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n)$$

Se cumple que $f(v) = M_{C_n \to C_m}(f) \cdot v$

Ejemplo

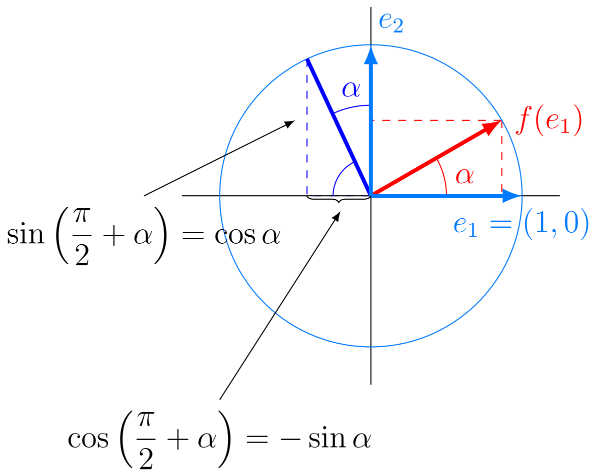
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad , \alpha > 0 \text{ un ángulo fijo}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

Vamos a calcular la matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $C = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$

$$
\begin{aligned}
f(e_1) = f(1,0) &= (\cos\alpha, \sin\alpha) \\
&= \cos\alpha(1,0) + \sin\alpha(1,0) \\
f(e_2) = f(0,1) &= (-\sin\alpha, \cos\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
M_{C\to C}(f) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \equiv \text{ Matriz de un giro}
$$

$$
\underbrace{M_{C\to C}(f)v}_{\substack{\| \\ f(v)}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ x\sin\alpha - y\cos\alpha \end{bmatrix}
$$



f ha girado e_1 un ángulo α

f ha girado e_2 un ángulo α

- Definición

Se dice que una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es ortogonal si su matriz asociada es ortogonal.

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicación lineal

$C = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$
M_{C\to C}(f) = \left[\begin{array}{c:c:c:c} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array}\right]
$$

$f(v) = Av$

Cambio de coordenadas en las aplicaciones lineales

Sea $B = \{u_1, \ldots, U - n\}$ otra base de $\mathbb{R}^n$.

Se llama matriz asociada a f en la base B a la matriz simétrica.

$$M_{B\to B}(f) = \left[\begin{array}{c:c:c:c} [f(u_1)]_B & [f(u_2)]_B & \cdots & [f(u_n)]_B \end{array}\right]$$

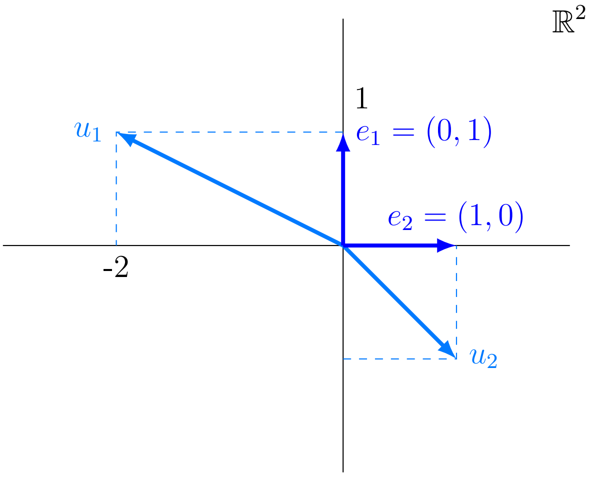
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Ejemplo

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (5x + 6y, -3x - 4y)$

$B = \{u_1 = (-2, 1),\ u_2 = (1, -1)\}$



$$M_{B\to B}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(u_1) = f(-2, 1) = (4, -2) &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \\ &= a_{11}(-2, 1) + a_{21}(1, -1) \\ &= (-2a_{11} + a_{21}, a_{11} - a_{21}) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -4 &= -2a_{11} + a_{21} \\ 2 &= a_{11} - a_{21} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \begin{aligned} -a_{11} = -2 &\longrightarrow a_{11} = 2 \\ a_{21} = a_{11} - 2 &= 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(u_2) = f(1,-1) = (-1,1) &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \\
&= a_{12}(-2,1) + a_{22}(1,-1) \\
&= (-2a_{12} + a_{22}, a_{12} - a_{22})
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
-1 &= -2a_{12} + a_{22} \\
1 &= a_{12} - a_{22}
\end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
-a_{12} &= 0 \\
a_{22} &= -1
\end{aligned}
$$

¿Qué relación existe entre $M_{C\to C}(f)$ y $M_{B\to B}(f)$?

$$
\begin{array}{ccc}
\underset{C}{\mathbb{R}^n} & \xrightarrow{f} & \underset{C}{\mathbb{R}^n} \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
\underset{B}{\mathbb{R}^n} & \xrightarrow{f} & \underset{B}{\mathbb{R}^n}
\end{array}
$$

$$
M_{C\to C}(f) = \underbrace{M_{B\to C}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{cambio de base} \\ \text{de } B \text{ a } C}} \quad M_{B\to B} \quad \underbrace{M_{C\to B}}_{\substack{\text{Matriz de cambio} \\ \text{de base de } C \text{ a } B}}
$$

$$
M_{C\to B} = [M_{B\to C}]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{cc:cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to -F_2]{F_1 \to F_1 - F_2}
$$

$$
\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]
$$

$$
M_{B\to B}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad M_{B\to C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad M_{C\to C}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}
$$

$$
f(e_1) = f(1,0) = (5,-3) = 5(1,0) - 3(0,1)
$$

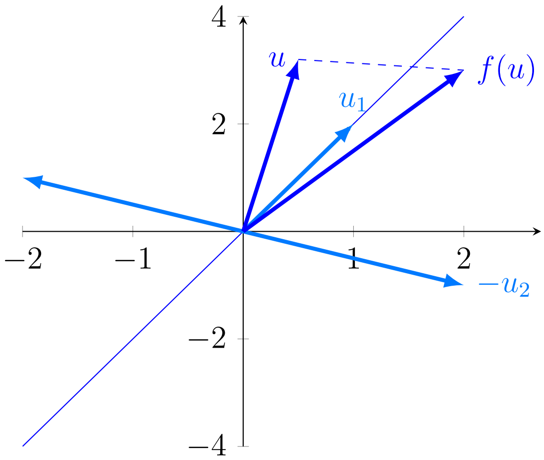
$$
f(e_2) = f(0,1) = (6,-4) = 6(1,0) - 4(0,1)
$$

- Comprobación

$$
\begin{aligned}
M_{C\to B} \cdot M_{C\to C} \cdot M_{B\to C} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo(Simetría respecto a una recta)

Consideremos la recta de ecuación $y = 2x$



Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal respecto a dicha recta, es decir, si $u \in \mathbb{R}^2$, $f(u)$ es simétrico respecto a la recta $y = 2x$

Considero la base

$$B = \{u_1 = (\quad), u_2 = (\quad)\}$$

$$f(u_1) = u_1$$

$$f(u_2) = u_2$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{C}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \underset{C}{\mathbb{R}^n} \arrow[d] \\
\underset{B}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "f"] & \underset{B}{\mathbb{R}^n}
\end{tikzcd}$$

$$M_{B\to B}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

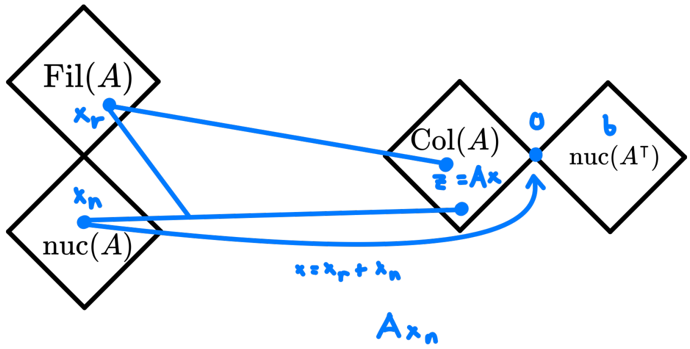
$$\begin{aligned}
M_{C\to C} &= M_{B\to C} \cdot M_{B\to B}(f) \cdot M_{C\to B} \\
&= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \boxed{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F-2\to F_2-2F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\to\frac{1}{5}F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1\to F_1+2F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

6.1) Proyecciones

Supongamos que el sistema $Ax = b$ es incompatible, es decir, b



$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Fil}(A) \oplus \mathrm{nuc}(A)$$

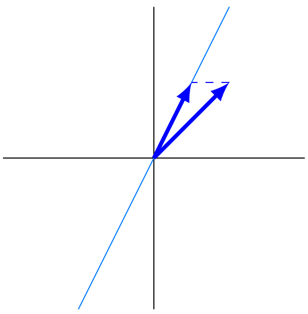
$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Col}(A) \oplus \mathrm{nuc}(A^{\intercal})$$

$A(x_r + x_n) = Ax_r + Ax_n$

En Ciencia de Datos se plantea el problema (llamado mínimos cuadrados) que consiste en encontrar el vector $z = Ax$ que esté más próximo a b es decir, buscamos

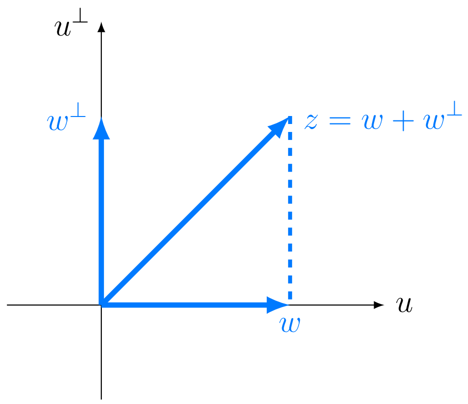
$$\text{Minimizar } \|Ax - b\|^2 = \|z - b\|^2 = (z_1 - b_1)‘2 + (z_2 - b_2)^2 + \cdots + (z_n - b_n)^2$$

Vamos a ver que z es la proyección ortogonal de b sobre Col(A).



- Recordatorio

Sea u un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\mathbb{R}^n = U \oplus U^{\perp}$. Por tanto, dado $z \in \mathbb{R}^n$, $z = w + w^{\perp}$, donde $w \in U$, $w^{\perp} \in u^{\perp}$. Al vector w se le llama proyección ortogonal de z sobre u.



Podemos considerar la aplicación lineal

$$P_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \text{ Proyección ortogonal sobre } u$$

$$z = w + w^{\perp} \longmapsto P_u(z) = w$$

Sea $U = \mathrm{Col}(A)$, $z = Ax \in U$

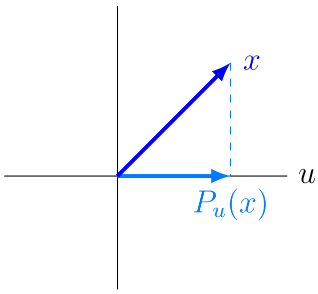
$$\underbrace{\|z-b\|^2}_{\text{Minimizar}} = \|\underbrace{z - P_u(b)}_{\substack{\cap \\ u}} + \underbrace{P_u(b) - b}_{\substack{\cap \\ u^{\perp}}}\|^2 = \underbrace{\|z - P_u(b)\|^2}_{\substack{\text{Minimizar} \\ z=P_u(b)}} + \|P_u(b) - b\|^2$$

¿Cómo se calcula la proyección orotogonal de un vector sobre un espacio?

- Propoisición

Sea $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ una base orotogonal de un subespacio vectorial U. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$P_u(x) = \frac{x \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{x \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2 + \cdots + \frac{x_m \cdot u_n}{\|u_n\|^2} u_n$$



- Demostración

$\mathbb{R}^n = u \oplus u^{\perp}$

Ampliamos la base $\{u_1, \dots, u_m\}$ de u a una base de $\mathbb{R}^n$.

Sea $\{\underbrace{u_1, \dots, u_m}_{\substack{\cap \\ u}}; \underbrace{u_{m+1}, \dots, u_n}_{\substack{\cap \\ u^{\perp}}}\}$ dicha base.

Por tanto, $\qquad x = x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m + x_{m+1} u_{m+1} + \cdots + x_n u_n$

$1 \leq j \leq m, \qquad x \cdot u_j = x_j \cdot u_j \cdot u_j \longrightarrow x_j = \dfrac{x \cdot u_j}{\underbrace{u_j \cdot u_j}_{\|u_j\|^2}}$

- Cálculo de la matriz asociada a la proyección sobre un subespacio vectorial

Supongamos que

$$u =< \overbrace{(1,0,1)}^{u_1}, \overbrace{(1,1,-1)}^{u_2} >$$

$$P_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \longmapsto P_u(x)$$

Buscamos una matriz $A \in M_{3\times 3}$ tal que

$$P_u(x) = \underline{A}x$$

Dos formas de hacerlo

1) $$A = M_{C\to C}(P_u) = \left[\begin{array}{c:c:c} \\ P_u(e_1) & P_u(e_2) & P_u(e_3) \\ \\ \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_u(e_1) &= \frac{e_1 \cdot u_1}{\|u_1\|} \cdot u_1 + \frac{e_1 \cdot u_2}{\|u_2\|} \cdot u_2 = \frac{(1,0,0)\cdot(1,0,1)}{2}(1,0,1) + \frac{(1,0,0)\cdot(1,1,-1)}{3}(1,1,-1) \\
&= \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right) \\
P_u(e_2) &= \frac{e_2 \cdot u_1}{\|u_1\|} \cdot u_1 + \frac{e_2 \cdot u_2}{\|u_2\|} \cdot u_2 = \frac{(0,1,0)\cdot(1,0,1)}{2}(1,0,1) + \frac{(0,1,0)\cdot(1,1,-1)}{3}(1,1,-1) \\
&= \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \\
P_u(e_3) &= \frac{e_3 \cdot u_1}{\|u_1\|} \cdot u_1 + \frac{e_3 \cdot u_2}{\|u_2\|} \cdot u_2 = \frac{(0,0,1)\cdot(1,0,1)}{2}(1,0,1) + \frac{(0,0,1)\cdot(1,1,-1)}{3}(1,1,-1) \\
&= \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right)
\end{aligned}$$

2) Consideramos la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,-1), \underset{\substack{\Cap \\ u^\perp}}{u_3} = (-1,2,1)\}$

$$\mathbb{R}^3 = u \oplus U^\perp$$

$u_3 = (x,y,z)$ Imponenmos que $u_3 \in e^\perp$ es decir:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= u_1 \cdot u_3 = (1,0,1)\cdot(x,y,z) = x + z = 0 \\ 0 &= u_2 \cdot u_3 = (1,1,-1)\cdot(x,y,z) = (z + y - z) = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \begin{aligned} & z = \alpha \longrightarrow x = -\alpha \\ & y = -x + z = \alpha + \alpha = 2\alpha \end{aligned} \quad \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{B\to B}(P_u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_u(u_1) = u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$P_u(u_2) = u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$P_u(u_3) = 0 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$\begin{tikzcd}
{}_C\mathbb{R}^3 \arrow[r, "P_u"] \arrow[d] & \mathbb{R}^3_C \arrow[d] \\
{}_B\mathbb{R}^3 \arrow[r, "P_u"'] & \mathbb{R}^3_B
\end{tikzcd}$$

$$\underline{M_{C\to C}(P_u)} = M_{B\to C}M_{B\to B}(P_u) \qquad \underbrace{M_{C\to B}}_{\text{Matriz de cambio de base}}$$

- Matriz asociada a la proyección sobre $\mathrm{Col}(A) = u$

$A \in M_{m\times n}$, cuyas columnas son linealmente independientes vamos a calcular la matriz asociada a la proyección sobre $\mathrm{Col}(A)$. En concreto, veamos que

$$M_{C\to C}(P_u) = A(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal$$

Dado $b \in \mathbb{R}^n$, $\underbrace{P_u(b)}_{\mathrm{Col}(A)} = \underbrace{Ax}_{x_1}$ para cierto $x \in \mathbb{R}^n$, $\qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

$x_1 \cdot 1^{\underline{a}}\ \mathrm{Col}(A) + x_2 \cdot 2^{\underline{a}}\ \mathrm{Col}(A) + \cdots + x_n \cdot n\text{-ésima } \mathrm{Col}(A)$

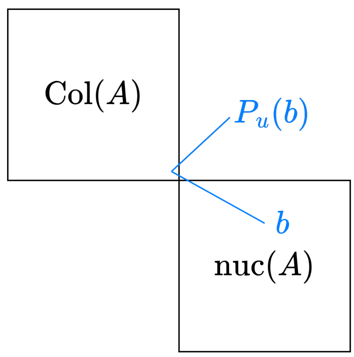
Por tanto,

$$b - P_u(b) \in u^\perp = \mathrm{nuc}(A^\intercal)$$

Así:

$$A^\intercal(b - Ax) = 0,\ A^\intercal b - A^\intercal Ax \longleftrightarrow A^\intercal Ax = A^\intercal b \longleftrightarrow x = (A^\intercal \cdot A)^{-1}A^\intercal b$$

De aquí, $\boxed{P_u(b) = ax = \underline{A(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal}\, b}$



Proyección sobre Col(A)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz de la proyección sobre Col(A) $= u$

$$M_{C\to C}(P_u) = A(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal$$

El sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ y &= 1 \\ x - y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 - (-1) = 1 \neq 0$$

$$\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A|b)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to -\frac{1}{11}F_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 6F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

$$(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal b = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -15 \\ 8 \end{bmatrix}$$

1) Halla la matriz real más general posible que tiene como vectores propios los vectores $(1,1)$ y $(1,-1)$

$$A = P^{-1}DP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix}} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \lambda_1, \lambda_2 \equiv \text{valores propios}$$

2) Dada la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$, explica por qué no existe ninguna matriz invertible P tal que para la matriz $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal. ¿Puedes generalizar este resultado para matrices de tamaño mayor?

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \quad b \neq 0 \text{ No existe } P \text{ invertible tal que } P^{-1}AP = D$$

$$P_A(\lambda) = \det[A-\lambda_i] = \det\begin{bmatrix} a-\lambda & 0 \\ b & a-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)^2 = 0$$

Valor propio $\lambda = a$ multiplicidad 2.

$$\text{nuc}(A-aI) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \qquad bx = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$\text{dimnuc}(A-aI) = 1 \qquad\qquad v = (0,1)$$

<u>Conclusión:</u> para que $P^{-1}AP = D$ es necesario que la dimensión de los subespacios de vectores propios coincidan con la multiplicidad de los correspondientes valores propios.

3) Sea A una matriz diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Prueba que la matriz A^2 también es diagonalizable con valores propios $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$

A diagonalizable, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios $\longrightarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de vectores propios A^2 diagonalizable, $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ valores propios.

$$Av_j = \lambda_j v_j, \ 1 \leq j \leq n \qquad A^2 v_j = \lambda_j A v_j = \lambda_j \lambda_j v_j = \lambda_j^2 v_j$$

¿$A^2 v_j = \lambda_j^2 v_j$?

A^2 tiene valores propios λ_j^2

A^2 tiene vectores propios los mismo que A

4) Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A. ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1}?

$\exists v_j \neq 0 A v_j = \lambda_j v_j$

$$= \underbrace{A^{-1}A}_{I} v_j = \lambda_j A^{-1} v_j \longrightarrow \boxed{A^{-1} v_j = \frac{1}{\lambda_j} v_j}$$

$Av = 0 \longrightarrow \mathrm{nuc}(A) \neq \{0\}$

$$\mathrm{dimnuc}(A) \geq 1$$

$v \neq 0$

$$+$$

$$\mathrm{dimrg}(A) = n$$

5) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & a \\ 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad a$ para que A sea diagonalizable.

$$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 & a \\ 6 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda)(2-\lambda) + 18(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda) \quad \underbrace{((5-\lambda)(-4-\lambda)+18)}$$

$$-20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right.$$

Valores propios

$\lambda_1 = 2$ multiplicidad 2

$\lambda_2 = -1$ multiplicidad 1

$\boxed{\mathrm{nuc}(A-2I)}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & a \\ 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 3x-2y+az=0 \\ 6x-6y+6z=0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & a \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix},$$

$a=3 \longrightarrow$ rango $1 \longrightarrow$ 2 parámetros $\longrightarrow$ 2 vectores propios $\longrightarrow$ A diagonalizable.

$a \neq 3 \longrightarrow$ rango $2 \longrightarrow$ 1 parámetro $\longrightarrow$ 1 vector propio $\longrightarrow$ A no diagonaliza.

6) $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$

¿Cómo calcular $A^n, n \in \mathbb{N}, n$ grande?

$$A = P^{-1}DP \qquad A^2 = \underbrace{P^{-1}DP}_{A}\,\underbrace{P^{-1}DP}_{A} = P^{-1}D^2P$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad A^n = P^{-1}D^nP$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \qquad D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

7)

autovalores, autovectores= eig(A)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{valor propio dominante} = 6.1933$$

$v = (0.69, 0.5, 0.53)$

8)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^4 = 0$$

$$\det[B-\lambda I]\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 - \frac{6}{60000} = 0$$

$$\lambda^4 = 10^{-4} \left\langle \begin{array}{l} \lambda = \pm 0.1 \\ \lambda = \pm 0.1j \end{array} \right.$$

Valores propios y singulares de A y B

Valores propios de $A \longrightarrow \lambda = 0$ multiplicidad 4

Valores propios de $B \longrightarrow \left\langle \begin{array}{l} \lambda = \pm 0.1 \\ \lambda = \pm 0.1j \end{array} \right.$

$$\begin{cases} A^{\intercal}A \longrightarrow \text{ valroes propios } \longrightarrow \text{ valores singulares } \sigma_1 = 3, \sigma_2 = \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0 \\ B^{\intercal}B \longrightarrow \text{ valroes propios } \longrightarrow \text{ valores singulares } \sigma_1 = 3, \sigma_2 = \sigma_3 = 1, \sigma_4 \approx 2.27 \cdot 10 \end{cases}$$

Son simétricas$\longrightarrow$valores propios son reales.

9)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Valores propios y valores singulares

$P_A(\lambda) = \det[A-\lambda I] = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \longrightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6\pm}{2} = 3$

$\lambda = 3$ multiplicidad 2

b) ¿Es A diagonalizable?

$\boxed{\lambda = 3}$ $\quad \text{nuc}(A - 3I) = \text{nuc}\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} 8y = 0 \longrightarrow y = 0 \\ \boxed{v = (1,0)} \end{array}$$

$\text{dimnuc}(A - 3I) = 1 \neq 2$ multiplicidad de $\lambda = 3$

A no factoriza, no diagonaliza.

c) Calcula la factorización SVD

Calcular los alores y vectores propios de $A^\intercal A$

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 \\ 24 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 9 - \lambda & 24 \\ 24 & 73 - \lambda \end{bmatrix} = (9 - \lambda)(73 - \lambda) - 576 = \lambda^2 - 82\lambda + 81 = 0$$

$$\lambda = \frac{82 \pm \sqrt{82^2 - 4 \cdot 81}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 81 \longrightarrow \sigma_1 = 9 \\ \lambda_2 = 1 \longrightarrow \sigma_2 = 1 \end{array} \right. \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_1 = 81}$ $\quad \text{nuc}(A^\intercal A - 81I) = \text{nuc}\begin{bmatrix} -72 & 24 \\ 24 & -8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -72 & 24 \\ 24 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -72x + 24y = 0 \\ 24x - 8y = 0 \end{cases} \longrightarrow 8y = 24\alpha \longrightarrow y = 3\alpha$$

$v = (1,3) \longrightarrow \|v\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ $\quad \text{nuc}(A^\intercal A - I) = \text{nuc}\begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 72 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 72 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} 8x + 24y = 0 \\ 24x + 72y = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow y = \alpha \longrightarrow x = -\frac{24\alpha}{8} = -3\alpha; \boxed{\alpha = 1}$$

$v = (-3, 1)$

$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

<u>Cálculo de U</u>

$$U = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = U \Sigma V^{\intercal}}$$

10)

11) Sea A una matriz real y simétrica. Prueba que los valores singulares de A son los valores absolutos de los valores propios de A. ¿Qué pasa si A es semidefinida positiva?

<u>Nota:</u> Antisimétrica.

Valores singulares de A son los valores absolutos de los valores propios de A. ¿A semidefinida positiva?

Valores singulares de A son las raíces cuadradas de los valores propios de $A^{\intercal} A$.

$$\underbrace{A^{\intercal} A v_j}_{} \longrightarrow \sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$$

$$A^2 v_j = \lambda_j^2 v_j \longrightarrow \sigma_j = \sqrt{\lambda_j^2} = |\lambda_j|$$

donde λ_j son los valores propios de A. $A \geq 0 \longrightarrow \lambda_j \geq 0$

Tema 7: Valores y vectores propios

- Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{K}^n)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio o autovalor (eigenvalue) de A si existe un vector **no nulo** $x \in \mathbb{K}^n$, llamado vector propio o autovector (eigenvector), tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Al conjunto de los valores propios de A se le llama espectro de A. Al mayor, en valor absoluto, de los valores propios se le llama radio espectral de A, y se denota $\rho(A)$.

¿Cómo calculamos autovalores y autovectores?

(λ, x) autovalor, autovector para A

$$\begin{aligned} Ax = \lambda &\longleftrightarrow (A-\lambda I)x = 0 \\ &\longleftrightarrow x \in \mathrm{nuc}(A-\lambda I) \\ &\longleftrightarrow \mathrm{nuc}(A-\lambda I) \neq \{0\} \\ &\longleftrightarrow \mathrm{dimnuc}(A-\lambda I) \geq 1 \\ &\longleftrightarrow \mathrm{rg}(A-\lambda I) < n \\ &\longleftrightarrow \boxed{\det(A-\lambda I) = 0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{dimnuc}(A) + \mathrm{rg}(A) = n}$$

Fil(A)

nuc(A)

- Definición (Polinomio característico)

Sea $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$. Se llama polinomio característico de A al polinomio

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Nótese que las raíces del polinomio característico nos dan los autovalores de A.

Ejemplo

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ Vamos a calcular los autovalores y autovectores

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 25 + \lambda^2 - 10\lambda - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right.$$

Calculo de valores propios.

$$\lambda_1 = 9,\ (A-9I)x = 0 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \left. \begin{array}{r} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow x_1 = x_2 = \alpha$$

$$\alpha = 1,\ v_1 = (1,1)$$

$$\lambda_2 = 1,\ (A-1I)x = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \left. \begin{array}{r} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x_2 = \alpha \longrightarrow x_1 = -\alpha \\ \alpha = 1 \longrightarrow v_2 = (-1,1) \end{array}$$

$$\alpha = 1,\ v_1 = (1,1) \longrightarrow \|v_1\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Valores propios	Vectores propios
$\lambda_1 = 9$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\lambda_2 = 1$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = P^{\intercal} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{9}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así obtenemos la matriz diagonal con los autovalores en la diagonal principal.

7.1) Interpretación en términos de aplicaciones lineales

Consideremos la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (5x+4y,\, 4x+5y)$$

$$C = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\} \qquad f(e_1) = f(1,0) = (5,4) = 5 \cdot (1,0) + 4 \cdot (0,1)$$

$$f_{e_2} = f(0,1) = (4,5) = 4 \cdot (1,0) + 5 \cdot (0,1)$$

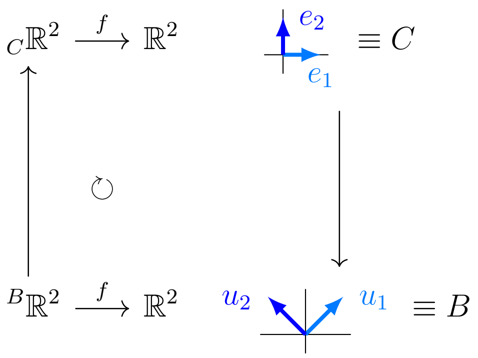
Consideremos ahora la base $B = \left\{ u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),\ u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$$f(u_1) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}} \right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 9 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$$

$$f(u_2) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$$

$$D = M_{B\to B}(f) = \underbrace{M_{C\to B}}_{P^{-1}} \cdot \underbrace{M_{C\to C}(f)}_{A} \cdot \underbrace{M_{B\to C}}_{P}$$

$$M_{B\to B}(f) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Conclusiones

1) Los valores propios son invariantes por cambios de base, es decir, las matrices A y $Q^{-1}AQ$ tienen los mismos valores propios. Es decir, los valores propios dependen de la aplicación lineal subyacente

$$A = M_{C\to C}(f)$$
$$Q = M_{B\to C}$$
$$\begin{aligned} \det\left[Q^{-1}AQ - \lambda I\right] &= \det\left[Q^{-1}AQ - Q^{-1}(\lambda I)Q\right] \\ &= \det\left[Q^{-1}(A - \lambda I)Q\right] \\ &= \underbrace{\det \cdot \det(Q)}_{1}\det(A - \lambda I) = \det\left[A - \lambda I\right] = 0 \end{aligned}$$
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$
$$\det(A^{-1}) =_{\det(A)}^{\perp}$$

2) La base de vectores propios nos permite escribir la aplicación lineal como una matriz diagonal.

7.2) Cálculo número de valores propios

- Teorema (Factorización QR)

Sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ n-vectores linealmente independiente de $\mathbb{R}^m$. Entonces existe un conjunto ortonormal de vectores

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \text{ de } \mathbb{R}^m$$

de modo que

$$< a_1, \ldots, a_n > = < q_1, \ldots, q_n > .$$

Además, si

$$A = [a_1, \ldots, a_n]$$

y

$$Q = [q_1, \ldots, q_n]$$

entonces existe una matriz triangular superior R, con entradas positivas en la diagonal de modo que

$$\boxed{A = QR}$$

7.3) Algoritmo QR para el cálculo de valores propios

1) Inicialización. Tomar $A_0 = A$

2) Iteración: para $k \geq 0$ d_0:

   2.1) $A_0)Q_1R_1$ (factorización QR de A_0)

   2.2) $A_1 = R_1Q_1$ (nótese que $A_1 = Q_1^\intercal \underline{Q_1R_1} Q_1 = Q_1^\intercal A_0 Q_1$)

   Se repite el proceso:

$$\begin{aligned} A_1 &= Q_2R_2 \\ A_2 &= R_2Q_2 \end{aligned} \qquad A_2 = Q_1^\intercal Q_2R_2Q_2 = Q_2^\intercal A_1 Q_2 = Q_2^\intercal Q_2^\intercal A_0 Q_1 Q_2$$

   Se observa que

$$A_k \longrightarrow \begin{array}{l} \text{matriz triangular superior que tiene en su} \\ \text{diagonal los valores propios de } A. \end{array}$$

   Los vectores propios aparecen en las columnas de $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_k$

7.4) Factorización QR

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \quad & a_n \end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \quad & q_n \end{array}\end{array} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A = Q \cdot R \\ \{a_1, \dots, a_n\}\text{L.I} \end{array}$$

Ejemplo

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ Método de } \perp \text{ de Grand-Schmidt. } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

No es unitario

$$a_1(1,1,0) \longrightarrow q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} \longrightarrow a_1 = \sqrt{2}q_1 \longrightarrow q_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\|a_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$q_2' = a_2 + \alpha q_1,\ 0 = q_1 \cdot a_2 = q_1 \cdot a_2 + \alpha \underbrace{q_1 \cdot q_1}_{1} \longrightarrow \alpha = \frac{-q_1 \cdot a_2}{\|q_1 \cdot q_1\|^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$q_2' = a_2 + \alpha q_1 = (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$q_2 = \frac{q_2'}{\|q_2\|'} = \frac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$a_2 = q_2' - \alpha q_1 = \|q_2'\| \cdot q_2 - \alpha q_1 = -\alpha q_1 + \|q_2'\| q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}q_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}q_2$$

$$q_3' = a_3 + \alpha q_1 + \beta q_2$$

1) $q_1 \cdot q_3' = q_1 \cdot a_3 + \alpha \overbrace{q_1 \cdot q_1}^{0} = q_1 \cdot a_3 + \alpha \longrightarrow \alpha = -q_1 \cdot a_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $q_2 \cdot q_2' = q_2 \cdot a_3 + \alpha \overbrace{q_1 \cdot q_2}^{0} + \beta \overbrace{q_2 \cdot q_2}^{1} = q_2 \cdot a_3 + \beta \longrightarrow \beta = -q_2 \cdot a_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$q_3' = (0,1,1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\|q_3\|' = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$q_3 = \frac{q_3'}{\|q_3'\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- Definición (Factorización en valores propios)

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se dice que A es diagonalizable si es factorizable en valores propios y, por tanto, si existen una matriz diagonal D, en cuya diagonal están los valores propios de A y, una matriz invertible P, cuyas columnas son los vectores propios de A, de modo que: $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

¿Qué matrices son diagonalizables?

- Proposición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y supongamos que sus valores propios son reales y distintos, entonces, A es diagonalizable.

- Teorema

Toda matriz simétrica es diagonalizable. Nótese que si A es diagonalizable.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ u_2^\intercal \\ \vdots \\ u_n^\intercal \end{bmatrix}}_{P^{-1}=P^\intercal} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = [\lambda_1 u_1 u_1^\intercal + \lambda_2 u_2 u_2^\intercal + \cdots + \lambda_n u_n u_n^\intercal]$$

Todas estas matrices son simétricas $\mathrm{rg} = 1$

$u_1 \cdot u_1^\intercal = \mathrm{Rg}(1)$

- Definición (Matrices semidefinidas positivas)

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es:

- semidefinida positiva si $x^\intercal A x \geq 0 \, \forall \, x \in \mathbb{R}^n$
- definida positiva si $x^\intercal A x > 0 \, \forall \, x \in \mathbb{R}^n$

Toda matriz simétrica de x semidefinida positiva es diagonalizable y sus valores propios $\lambda_j \geq 0$. Si A es definida positiva $\lambda > 0$.

7.5) Factorización en Valores Singulares (SVD)

- Definición

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se llama factorización en valores singulares a toda factorización de la forma

$$A = U\Sigma V^{\intercal}$$

donde $U \in M_m(\mathbb{R}), \Sigma = \text{diagonal}, V^{\intercal} \in M_n(\mathbb{R})$.

Además, $U, V^{\intercal}$ son ortogonales.

Recordatorio: $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y semidefinida positiva. Entonces todos los valores propios de A

$$\lambda_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq n$$

¿Cómo se calcula? ¿Por qué es tan útil en Ciencia de Datos?

$A^{\intercal}A$ es simétrica y semidefinida positiva. En efecto:

$$(A^{\intercal}A)^{\intercal} = A^{\intercal}(A^{\intercal})^{\intercal} = A^{\intercal}A$$

$$x^{\intercal}\underline{A^{\intercal}A}x = (Ax)^{\intercal}Ax = \|Ax\|^2 \geq 0$$

Por tanto, todos los valores propios de $A^{\intercal}A$. $\lambda_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq n$

- Definición

Se llaman valores propios singulares de A a los números

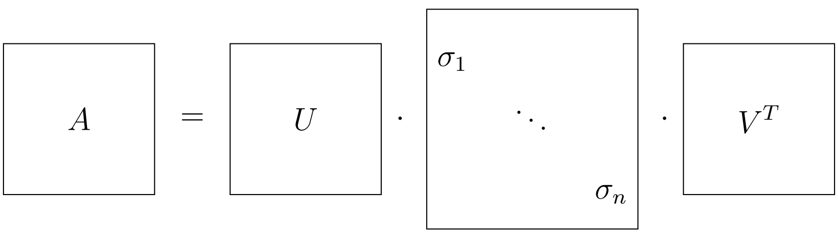
$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j},\ 1 \leq j \leq n.$$

- Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, con $n \leq m$. Sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ los valores singulares de A. Entonces existen matrices ortogonales $U \in M_m(\mathbb{R})$, y $V \in M_n(\mathbb{R})$ y una matriz diagonal $\Sigma)\text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in M_{m\times n}$ de modo que

$$A = U\Sigma V^{\intercal}$$

El esquema es



Nota: El resultado también es válido si $n \geq m$. En ese caso $A^{\intercal}$ cumple que $m \geq n$. Por tanto, la que se factoriza SVD es $A^{\intercal} = U\Sigma V^{\intercal}$. Aplicando $(A^{\intercal})^{\intercal} = (U\Sigma V^{\intercal})^{\intercal} = (V^{\intercal})^{\intercal}\Sigma^{\intercal}U^{\intercal} = V\Sigma^{\intercal}U^{\intercal}$

- Demostración

$A^\intercal A$ es simétrica y semidefinida positiva. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ sus valores propios y sean $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sus vectores propios ortonormalizados.

Definimos $V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}$. Sean $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ los valores singulares positivos.

Para $1 \leq i \leq r$, definimos $\boxed{u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i}$

Veamos que $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ es ortonormal.

$$u_i^\intercal \cdot u_j = \underbrace{\frac{1}{\sigma_i}(Av_i)^\intercal}\frac{1}{\sigma_j}Av_j = \overbrace{\frac{1}{\sigma_i \cdot \sigma_j}}^{\frac{\lambda_i}{\sigma_i \sigma_i}} v_i^\intercal \boxed{A^\intercal A v_j} = \frac{1}{\sigma_i \cdot \sigma_j} v_i^\intercal \overline{\lambda_j v_j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(Porque son ortonormales y al ser diferentes los vectores son perpendiculares $\longrightarrow$ vale 0)

Completamos el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ a una base orotonormal de $\mathbb{R}^m$ $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

Definimos $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}$

Calculamos

$$\begin{aligned} U^\intercal A V &= \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ u_2^\intercal \\ \vdots \\ u_m^\intercal \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ u_2^\intercal \\ \vdots \\ u_m^\intercal \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ u_2^\intercal \\ \vdots \\ u_m^\intercal \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 & \sigma_2 u_2 & \cdots & \sigma_r u_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{diag}(\underline{\sigma_1, \dots, \sigma_r}, 0, \dots, 0) = \Sigma \end{aligned}$$

$U^\intercal A V = \Sigma$

$U^\intercal A \underbrace{V \cdot V^\intercal}_{I} = \Sigma \cdot V^\intercal$

$\underbrace{U \cdot U^\intercal}_{I} A = U \Sigma V^\intercal \longrightarrow \boxed{A = U \Sigma V^\intercal}$

- Demostración

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & \cdots & u_{2m} \\ \hdashline u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} u_1^\intercal \\ \vdots \\ u_m^\intercal \end{bmatrix}} \cdot \left[\begin{array}{cc:ccc} \sigma_1 u_{11} & \sigma_2 u_{21} & \sigma_r u_{r1} & 0 & 0 \\ \sigma_1 u_{12} & \sigma_2 u_{22} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_1 u_{1m} & \sigma_2 u_{2m} & \sigma_r u_{rm} & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_1 \overbrace{u_1^\intercal u_1}^{1} & u_1^\intercal \overbrace{\sigma_2 u_2}^{0} & \cdots & \overbrace{u_1^\intercal \sigma_r}^{0} u_r & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_1 \overbrace{u_2^\intercal u_1}^{0} & \sigma_2 \overbrace{u_2^\intercal u_2}^{1} & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

Forma reducida de la factorización SVD.

$$A = U\Sigma V^\intercal = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 e_1 & \sigma_2 e_2 & \cdots & \sigma_r e_r & \underline{0 \cdots 0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^\intercal \\ v_2^\intercal \\ \vdots \\ v_n^\intercal \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 v_1^\intercal \\ \sigma_2 v_2^\intercal \\ \hdashline \sigma_r v_r^\intercal \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\sigma_1 u_1 v_1^\intercal + \sigma_2 u_2 v_2^\intercal + \cdots + \sigma_r u_r v_r^\intercal}_{\substack{\text{Suma de matrices simétricas de rango 1.} \\ \text{Descomposición espectral de } A.}}$$

¿Qué son los vectores u_i, $1 \leq j \leq r$?

$\boxed{u_i = \dfrac{1}{\sigma_i} A v_i}$ $(\lambda_i,\, v_i)$ autovalor - autovector de $A^\intercal \cdot A$

$$\underline{AA^\intercal u - i} = AA^\intercal \left(\frac{1}{\sigma_i} A v_i\right) = \frac{1}{\sigma_i} A\underline{(A^\intercal A) v_i} = \frac{1}{\sigma_i} A \sigma_i^2 v_i$$

$$= \sigma_i A v_i = \sigma_i \sigma_i u_i = \lambda_i u_i$$

(λ_i, u_i) son autovalores-autovectores de $AA^\intercal$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Vamos a calcular la factorización SVD de A.

1) Autovalores, autovectores de $A^{\intercal}A$

$$A^{\intercal}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{\intercal}A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 9\right) = (3-\lambda)\underbrace{(\lambda^2 + \cancel{9} - 6\lambda - \cancel{9})}_{\lambda(\lambda-6)} = 0$$

$\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$

$$\underset{v_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\underset{\downarrow}{\lambda_1 = 6}} \quad \text{nuc}(A^{\intercal}A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \left.\begin{aligned} -3x &= 0 \\ -3y + 2z &= 0 \\ 3y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\longrightarrow x = 0$$

$$y = z$$

$$z = \mu \qquad \longrightarrow (0, \mu, \mu)$$

$$\lambda_2 = 3 \quad \text{nuc}(A^{\intercal}A - 3I) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{aligned} 3z &= 0 \\ 3y &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow (\alpha, 0, 0) \xrightarrow{\alpha \neq 0} \alpha = 1$$

$$\lambda_3 = 0 \quad \text{nuc}(a^{\intercal}A - 0I) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \left.\begin{aligned} 3 &= 0 \\ 3y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x = 0 \\ &y = -z \longrightarrow (0, -\alpha, \alpha) \end{aligned}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}, \ \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3},$$

$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} u_1 & \quad u_2 & \quad u_3 & \quad u_4 \end{matrix} \end{array}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{12}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Completamos $\{u_1, u_2\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$

$A = U \Sigma V^{\intercal}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{U} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\Sigma} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}^{V^\intercal}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{U_r} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \overset{SVD}{\boxed{U_2 \Sigma_2 V_2^\intercal}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{4\times 2} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \sqrt{6}\cdot 0 & \sqrt{6}\cdot 1 & \sqrt{6}\cdot 1 \\ \sqrt{3}\sqrt{2} & \sqrt{3}\cdot 0 & \sqrt{3}\cdot 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \sigma_1 v_1^\intercal \\ \leftarrow \sigma_2 v_2^\intercal \end{array}$$

$$A = U_{4\times 4}\Sigma_{4\times 3}V_{3\times 3}^\intercal$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0\cdot\sqrt{6}\cdot 0 & 0\cdot\sqrt{6}\cdot 1 & 0\cdot\sqrt{6}\cdot 1 \\ 1\cdot\sqrt{6}\cdot 0 & 1\cdot\sqrt{6}\cdot 1 & 1\cdot\sqrt{6}\cdot 1 \\ & & \end{bmatrix}}_{u_1\sigma_1 v_1^\intercal} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} & 1\cdot\sqrt{3}\cdot 0 & 1\cdot\sqrt{3}\cdot 0 \\ 0\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} & 0\cdot\sqrt{3}\cdot 0 & 0\cdot\sqrt{3}\cdot 0 \\ & & \end{bmatrix}}_{u_2\sigma_2 v_2^\intercal}$$

- Teorema(Eckart-Young-Mirsky)

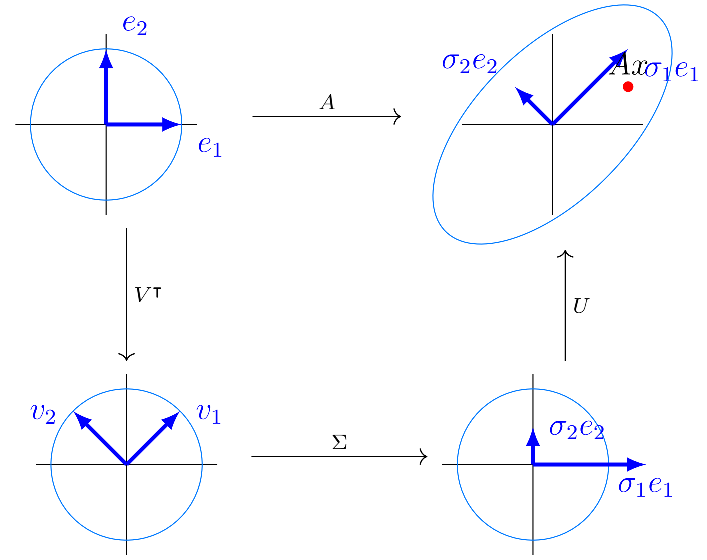
Sea $A_k = U_k \Sigma_k V_k^\intercal = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\intercal$ la forma reducida de la descomposición SVD de A. Entonces, para toda matriz B de rango k se tiene que

$$\|A \cdot A_k\| \leq \|A \cdot B\|$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma de Fribenius. Es decir, A_k es la mejor aproximación de A entre las matrices de rango menor o igual a k.

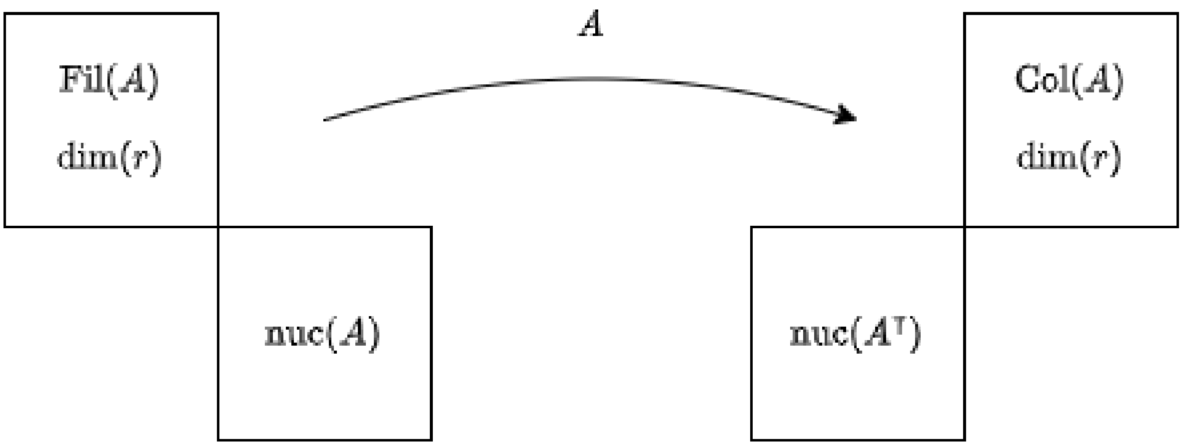
- Geometría de la SVD. Dimensión 2.

$$\begin{tikzcd} {}_C\mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"] \arrow[d] & \mathbb{R}^2_C \\ {}_V\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\Sigma"] & \mathbb{R}^2_U \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \left.\begin{array}{l} e_1 = (1,0) \\ e_1 = (0,1) \end{array}\right\} \mathcal{C}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\substack{U \\ \text{giro}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{\text{dilatación}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}_{\text{giro}}$$

Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz



¿Dónde están escondidos los cuatro subespacios fundamentales en la factorización SVD?

- Lema

$\text{nuc}(A^\intercal A) = \text{nuc}(A)$

- Demostración

A $\subset \text{nuc}(A^\intercal A)$. Si $Ax = 0 \longrightarrow A^\intercal Ax = A^\intercal 0 = 0$

$\text{nuc}(A^\intercal A) \subset \text{nuc}(A)$. Supongamos $A^\intercal Ax = 0$

Por tanto,

$$\underbrace{x^\intercal A^\intercal A x}_{(Ax)^\intercal Ax = \|Ax\|^2} = 0$$

$$(Ax)^\intercal Ax = \|Ax\|^2 \longrightarrow Ax = 0$$

- Proposición

Sea $A \in M_{m\times n}, n \leq m$, y sea $r = \text{rg}(A)$. Entonces:

1) $\text{nuc}(A) =< \sigma_{r+1}, \dots, v_n >$

2) $\text{col}(A) =< u_1, \dots, u_r >$

3) $\text{Fil}(A) = \text{nuc}(A)^\perp =< v_1, \dots, v_r >$

4) $\text{nuc}(A^\intercal) = \text{col}(A)^\perp =< u_{r+1}, \dots, u_m >$

- Demostración

Como $A^\intercal A$ factoriza en valores propios.

$V^\intercal A^\intercal AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$

Multiplicando por $V : A^\intercal AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)V$

$\{v_{r+1}, \dots, v_n\},\ A^\intercal A \underset{j\geq r}{v_j} = \underset{\lambda_j v_j}{0} \longrightarrow v_j \in \text{nuc}(A^\intercal A) = \text{nuc}(A)$

$P^{-1}AP = D$

$$Av = \lambda v$$

$A = PDP^{-1}$

$\text{Fil}(A) \oplus \text{nuc}(A) = \mathbb{R}^n\ \text{nuc}(A) \perp \text{Fil}(A)$