

1) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$f(x) = x - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

Para empezar, como hay un cociente debemos evitar que el denominador sea cero

$$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1 \text{ No está en el dominio}$$

Por otro lado, tenemos una raíz cuadrada y esto implica que la de dentro, debe ser positivo o cero: $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$

	-2	
$x+2$	- - -	+ + + + + + + + + + +
	(+)	(-)
$x-1$	- - - - - - - - - - -	+ + +
		1

$$\frac{x+2}{x-1} \geq 0 \longrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

Por lo tanto el dominio de la función es:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

2) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{\log(x)}}$$

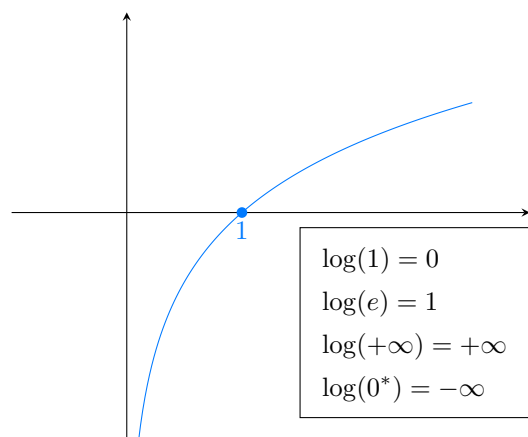
Como hay un cociente entonces el denominador no puede ser cero:

$$\log(x) = 0 \longrightarrow x = 1 \text{ No está en el dominio}$$

Como hay un logaritmo, lo de dentro solo puede ser positivo:

$$x > 0$$

Como tenemos una raíz cuarta (de grado par) entonces lo de dentro no puede ser negativo:



	$\frac{x}{\log(x)} \geq 0 \longrightarrow x \in (1, +\infty)$	
x	+ + + + + + + + +	
	(-)	(+)
$\log(x)$	- - -	+ + + + +
		1

Por lo tanto:

$$\text{Dom}(f) = (1, +\infty)$$

3) Vamos a comprobar si la aplicación

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = 2x + 1$$

es biyectiva, es decir, si es inyectiva y sobreyectiva.

Veamos si la aplicación $f(x)$ es inyectiva:

- Sea:

$$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \longrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Por lo tanto: $f(x)$ es inyectiva.

- Por otro lado: $\forall y \in \mathbb{R} \longrightarrow y = f(x) = 2x + 1$
 $2x = 1 - y \longrightarrow x = \frac{1-y}{2}$ Por lo tanto $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un
 $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y \longrightarrow f(x)$ es sobreyectiva.

Entonces, como $f(x)$ es inyectiva y sobreyectiva en todo \mathbb{R} podemos asegurar que $f(x)$ es biyectiva y por lo tanto existe su función inversa.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$$

Nota: Dada una función $y = f(x)$, se dice que esta función tiene inversa $x = f^{-1}(y)$ si cumple que sea inyectiva.

Decimos que $y = f(x)$ es inyectiva si $\forall x_1 \neq x_2$ se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Realmente para comprobar si una función es inyectiva lo que haremos será partir de $f(x_1) = f(x_2)$ y terminar demostrando que $x_1 = x_2$.

4) Comprobar si la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ tiene inversa.

Para que tenga inversa debe ser inyectiva, y esto implica que para elementos diferentes debe tener diferentes y como:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array} \right\} \text{No es inyectiva} \longrightarrow f(x) \text{ No tiene inversa}$$

5) Dadas las siguientes funciones, averiguar en qué puntos son discontinuas y por qué.

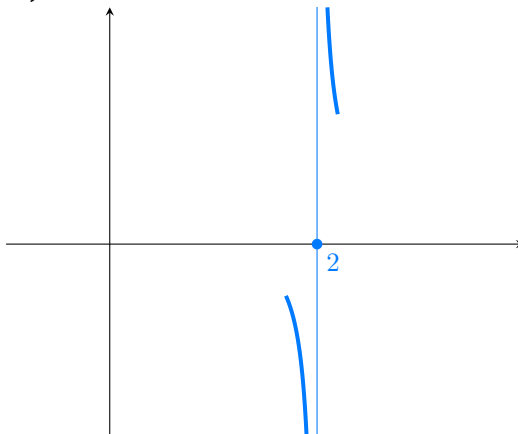
$$f(x) = \frac{x^2}{x-2} \text{ si } x \neq 2, f(2) = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$\forall x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos ahora si es continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ No es continua en } x = 2, \text{ en concreto presenta en } x = 2 \\ \text{una discontinuidad inevitable de salto infinito. Diremos que} \\ f(x) \text{ presenta en } x = 2 \text{ una asíntota vertical.} \end{array}$$



6) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$$

Como es un cociente, debemos evitar que el denominador sea cero:

$$1 - e^x = 0 \longrightarrow e^x = 1 \longrightarrow x = \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0} \text{ No pertenece al dominio}$$

Como hay una raíz cuadrada, lo de dentro no puede ser negativo:

$$1 - e^x > 0 \longrightarrow e^x < 1 \longrightarrow x < \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x < 0}$$

Por lo tanto, el $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0)$

7) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x < 0 \\ xe^{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\forall x < 0 \longrightarrow f(x) = -xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas

$\forall x \in (0, 1) \longrightarrow f(x) = xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas

$\forall x > 1 \longrightarrow f(x) = xe^{1-x}$ es continua por ser un producto de funciones continuas

Veamos ahora si $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $x = 1$:

En $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-xe^{x-1}) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^{x-1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Como existe el límite de } f(x) \text{ en } x = 0 \text{ y coincide con } f(0) \\ &\text{entonces podemos asegurar que } f(x) \text{ es continua en } x = 0. \end{aligned}$$

En $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} xe^{x-1} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} xe^{1-x} &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 1 \\ f(1) &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Como existe el límite de } f(x) \text{ en } x = 1 \text{ y coincide con } f(1) \\ &\text{entonces podemos asegurar que } f(x) \text{ es continua en } x = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, y resumiendo, diremos que $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

8) Determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para los que las siguientes funciones son continuas. Indica su dominio de definición:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} ax - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -ax + b & \text{si } -1 < x < 2 \\ -2ax + 3b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para todos los puntos $x \neq -1$ y $x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un polinomio.

Veamos en $x = -1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax - 5) &= -a - 5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (-ax + b) &= a + b \\ f(-1) &= -a - 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = -1, \text{ debe cumplirse que} \\ &-a - 5 = a + b \longrightarrow \boxed{2a + b = -5} \end{aligned}$$

Veamos en $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-ax + b) &= -2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2ax + 3b) &= -4a + 3b \\ f(2) &= -4a + 3b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 2, \text{ debe cumplirse que} \\ &-2a + b = -4a + 3b \longrightarrow \boxed{2a - 2b = 0} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} , debe cumplirse que:

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \longrightarrow 3a = -5 \longrightarrow \\ 2a - 2b = 0 \longrightarrow b = a \end{cases} \quad \boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{5}{3} \\ b &= -\frac{5}{3} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\text{Como estos valores de } a \text{ y } b \text{ podemos} \\ &\text{asegurar que } f(x) \text{ es continua en todo} \\ &\mathbb{R} \end{aligned}$$

$$b) \ g(x) = \begin{cases} 3x + a & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ bx + a & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2x - b & \text{si } 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

Para empezar debemos darnos cuenta de que la función solo está definida para el intervalo: $[-2, 5) \rightarrow \text{Dom}(g) = [-2, 5)$

Podemos asegurar que $g(x)$ es continua en $\forall x \in \text{Dom}(g)$ solo en $x = -1$ y $x = 3$, que todavía no lo sabemos ya que son los puntos de cambio.

Veamos en $x = -1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + a) = -3 + a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (bx + a) = -b + a \\ f(-1) = -b + a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } g(x) \text{ sea continua en } x = -1 \\ -3 + a = -b + a \rightarrow \boxed{b = 3} \end{array}$$

Veamos en $x = 3$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} (bx + a) = 9 + a \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - b) = 3 \\ f(3) = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } g(x) \text{ sea continua en } x = 3 \\ 9 + a = 3 \rightarrow \boxed{a = -6} \end{array}$$

Por lo tanto, podemos asegurar que si $a = -6$ y $b = 3$ entonces $g(x)$ es continua en todo su dominio: $\text{Dom}(g) = [-2, 5)$.

9) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{multiplicaremos y dividiremos} \\ \text{por el conjugado de las raíces} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \end{aligned}$$

10) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 3x + 5}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 4x + 5} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} &= \boxed{3} \end{aligned}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ que sea un cociente de polinomios, lo que haremos para resolverlo será dividir numerada y denominador por x^p siendo p el mayor grado de los términos del denominador.

11) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

12) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{x+1}{x-1} - 1 \right]} = (*) = e^2$$

Base:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = 1$$

Nota: Siempre que tengamos una indeterminación de la forma 1^∞ , haremos lo siguiente

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x)-1)}$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{x+1}{x-1} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = 2$$

13) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4}) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}) - (\sqrt{x^2-4}) \cdot (\sqrt{x^2+1}) + (\sqrt{x^2-4})}{(\sqrt{x^2+1}) + (\sqrt{x^2-4})} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{x^2-4})^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-4}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1) - (x^2-4)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

14) Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$\forall x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos si $f(x)$ es continua en $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} &= \frac{1}{e^{\frac{1}{0^-}} + 1} = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = \left\{ e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \right\} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} &= \frac{1}{e^{\frac{1}{0^+}} + 1} = \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Como los límites laterales no son} \\ \text{iguales, entonces no existe el límite} \\ \text{en } x = 1 \rightarrow f(x) \text{ no es continua en} \\ x = 1. \end{array} \right\}$$

En concreto podemos asegurar que $f(x)$ presenta en $x = 1$ una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1^a especie.

Por lo tanto, la conclusión es que $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

15) Calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 + 4x - 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 + 4x - 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x^2}} = (*) = (1^\infty) = (**)$$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Base: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 + 4x - 1} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1 \\ \text{Exponente: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} - \frac{x^3}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty \end{array} \right.$$

$$(**) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} \left[\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 + 4x - 1} - 1 \right]} = e^7$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} \left[\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-1} - 1 \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} \left[\frac{x^2-3x+6-x^2-4x+1}{x^2+4x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} \cdot \frac{-7x+7}{x^2+4x-1} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^3+7x^3}{x^2+4x-1-x^4-4x^3+x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4+7x^3}{-x^4-4x^3+2x^2+4x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{7}{x^4} + \frac{7x^3}{x^4}}{-\frac{x^4}{x^4} - \frac{4x^3}{x^4} + \frac{2x^2}{x^4} + \frac{4x}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7 + \frac{7}{x}}{-1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^4}} &= \frac{-7}{-1} = 7 \end{aligned}$$

16) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

Como tenemos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$
- $\sin \frac{1}{x}$ es una función acotada ya que siempre ocurrirá que $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

Por lo tanto por el teorema del encaje (Sandwich), tendremos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Nota: Teorema del Sandwich o del encaje

Si tenemos tres funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ entonces si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Una consecuencia de este teorema es la siguiente:

Si tenemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $g(x)$ está acotada $|g(x)| \leq k$ entonces podemos asegurar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

17) Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$$

Como se cumple que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- La función $\sin(x)$ está acotada, ya que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Aplicand el teorema del encaje (Sandwich), tendremos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

18) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Aplicando la equivalencia: $\sin(x) \sim_0 x$ podemos decir que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

Nota: Hay veces en las que tenemos que hacer límites de funciones conocidas cuando estamos cerca de $x = 0$. En estos casos podemos plantearnos transformar estas funciones en polinomios, mediante las llamadas equivalencias:

$$\begin{array}{lll} \sin(x) \sim_0 x & e^x \sim_0 1+x & \arcsin(x) \sim_0 x \\ \cos(x) \sim_0 1 - \frac{x^2}{2} & \log(1+x) \sim_0 x & \arctan(x) \sim_0 x \\ \tan(x) \sim_0 x & a^x \sim_0 1+x \log(a) & (1+x)^n \sim_0 1+nx \end{array}$$

19) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x \sin(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x \sin(2x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = (*)$$

Resolveremos este límite aplicando equivalencias:

$$\begin{aligned} \sin(x) \sim_0 x &\longrightarrow \sin(2x) \sim_0 (2x) \\ \cos(x) \sim_0 1 - \frac{x^2}{2} &\longrightarrow \cos(2x) \sim_0 1 - \frac{(2x)^2}{2} = 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2x^2)}{3x \cdot (2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{6x^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

20) Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) \tan^3(3x)}{(1 - \cos^2(x)) \cdot (e^x - 1)^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) \tan^3(3x)}{(1 - \cos^2(x)) \cdot (e^x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin^2(x)} \cdot \tan^3(3x)}{\cancel{\sin^2(x)} \cdot (e^x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3(3x)}{(e^x - 1)^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = (*)$$

Aplicaremos equivalencias para resolver este límite:

$$\begin{aligned} \tan(x) \sim_0 x &\longrightarrow \tan(3x) \sim_0 3x \\ e^x \sim_0 1 + x \end{aligned}$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^3}{(1 + x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{27x^3}{x^3} = \boxed{27}$$

21) Para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2}{3 - \ln x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log x \cdot \frac{2}{3 - \ln x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2}{3 - \ln x} \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{3 - \ln x}} = (*) = \boxed{e^{-2}}$$

$$\text{Exponente: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3 - \ln x} = \{\ln(0^+) = -\infty\} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{3 - \ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x} - \cancel{\ln x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\frac{3}{\ln x} - 1} = -2$$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma 0^0 o ∞^0 que sea indeterminaciones, lo que haremos será aplicar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} &= (0^0 \text{ ó } \infty^0) = \lim_{x \rightarrow a} e^{\log(f(x))^{g(x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \log f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \log f(x)} \end{aligned}$$

22) Para calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3)^{\frac{1}{\ln(x^2)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3)^{\frac{1}{\ln x^2}} = (\infty^0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(5x^3) \cdot \frac{1}{\ln x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x^2} \ln(5x^3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x^3)}{\ln x^2}} = (*) = e^{\frac{3}{2}}$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x^3)}{\ln x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 5 + \ln x^3}{\ln x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 5 + 3 \ln x}{2 \ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln 5}{\ln x} + 3 \frac{\ln x}{\ln x}}{2 \frac{\ln x}{\ln x}} = \frac{3}{2}$$

23) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^3 + 5x^2 + 6x + 2)}{\ln(x^2 + 5)}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite que sea un cociente de logaritmos, lo que haremos será sacar en cada logaritmo factor común el término polinómico de mayor grado y mediante reglas de logaritmos lo reduciremos a un cociente de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ donde dividiremos arriba y abajo por $\ln x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^3 + 5x^2 + 6x + 2)}{\ln(x^2 + 5)} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^3\left(2 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\right)}{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)\right)} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3) + \ln\left(2 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x + \ln\left(2 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} = \\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3 \ln x}{\ln x} + \frac{\ln\left(2 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{\ln x}}{\frac{2 \ln x}{\ln x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{\ln x}} = \boxed{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

24) Si queremos calcular A para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

sea continua en el punto $x_0 = 2$ lo que tenemos que hacer es calcular.

- Veamos si existe el límite en $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

- Como podemos ver en $f(x)$, existe $f(2)$ y vale $f(2) = A$.
- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, debe verificarse que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\boxed{A = 4}$$

Nota: Para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = a$ debe verificar las siguientes condiciones:

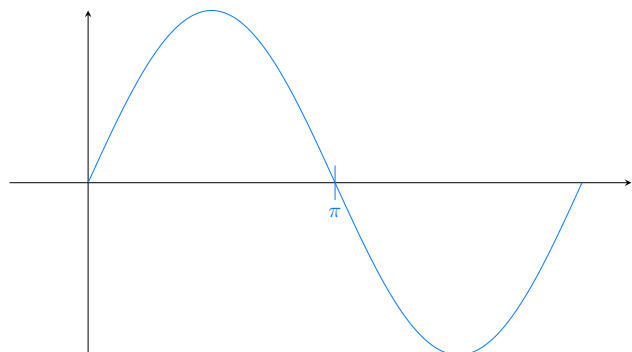
- Exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- Exista $f(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

25) Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si queremos estudiar la continuidad de la función en el punto $x_0 = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{si } x \neq k\pi \\ 1 & \text{si } x = k\pi, \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = \pi$ debemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\sin x} = \left(\frac{\pi}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



No es continua en $x_0 = \pi$ en concreto, podemos asegurar que $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x_0 = \pi$. Hay, por lo tanto, una asíntota vertical $x_0 = \pi$.

26) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

en el punto $x_0 = 2$.

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en el punto $x_0 = 2$, debemos:

i) Estudiaremos la existencia del límite de $f(x)$ en $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{Por lo tanto } f(x) \text{ no es continua en } x = 2 \text{ en concreto presenta una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1ª especie.}$$

27) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

en el punto $x_0 = 1$.

Para estudiar la continuidad, debemos hacer lo primero el límite en $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} = \frac{\sin\left(\frac{1}{0^-}\right)}{e^{\frac{1}{0^-}} + 1} = \frac{\overbrace{\sin(-\infty)}^{\text{oscilante}}}{e^{-\infty} + 1} = \nexists \lim \text{ ya que es oscilante} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} = \frac{\sin\left(\frac{1}{0^+}\right)}{e^{\frac{1}{0^+}} + 1} = \frac{\sin(+\infty)}{e^{+\infty} + 1} = \frac{\sin(+\infty)}{+\infty} = 0 \text{ (Teorema del Sandwich)} \end{cases}$$

No existe el límite ya que hay un límite lateral que no existe $\longrightarrow f(x)$ no es continua en $x_0 = 1$.

28) Consideremos las funciones

$$f(x) = e^{-x}x \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Estudiar la continuidad de la función $f \circ g$

La composición de funciones $f \circ g$, consiste en realizar la función $g(x)$, y donde esta termine comenzaremos $f(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x) & & \\ \frac{1}{x} & \longrightarrow & f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} & & \\ & & f(x) = e^{-x} \cdot x & & \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que: $(f \circ g) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

Por lo tanto podemos asegurar que $(f \circ g)$ es continua en todos los \mathbb{R} salvo en $x = 0$, donde $\nexists (f \circ g)(0)$

29) Dadas las funciones reales $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Calcular las expresiones de $g \circ f$ y $f \circ g$.

Comenzamos calculando $g \circ f$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & & \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) & \longrightarrow & (g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x} \\ x & \longrightarrow & \sin x & \longrightarrow & \sqrt{\sin x} & & \end{array}$$

Calcularemos ahora $f \circ g$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & & \\ x & \longrightarrow & g(x) & \longrightarrow & f(g(x)) & \longrightarrow & (f \circ g)(x) = \sin(\sqrt{x}) \\ x & \longrightarrow & \sqrt{x} & \longrightarrow & \sin(\sqrt{x}) & & \end{array}$$

30) Para calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} = \left(\frac{0}{0} \right) = (*)$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \longrightarrow (x^2 - x - 2) = (x-2)(x+1)$$

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

2	1	0	-12	16
2	2	4	-16	
2	1	2	-8	0
2	2	8		
2	1	4	0	

$$(x^3 - 12x + 16) = (x-2)^2(x+4)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(x-2)(x+1)]^{20}}{[(x-2)^2(x+4)]^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}^{20} \cdot (x+1)^{20}}{\cancel{(x-2)}^{20} \cdot (x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{20}}{2^{10} \cdot 3^{10}} = \boxed{\frac{3^{10}}{2^{10}}}$$

31) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{x - x_0}}{\cancel{(x - x_0)}(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$$

32) Calcula la correspondencia inversa de las funciones:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

La función inversa es aquella que verifica que si $f(x) \longrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \longrightarrow \frac{x-1}{x+2} = y^2 \longrightarrow (x-1) = y^2(x+2)$$

$$x-1 = xy^2 + 2y^2 \longrightarrow x - xy^2 = 1 + 2y^2 \longrightarrow x(1 - y^2) = 1 + 2y^2$$

$$x = \frac{1 + 2y^2}{1 - y^2} \longrightarrow \boxed{x \cdot f^{-1}(y) = \frac{1 + 2y^2}{1 - y^2}}$$

33) Calcula la correspondencia inversa de las funciones:

$$y = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$$

La función invertible que verifica que si $y = f(x) \longrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} \longrightarrow (2 - \sqrt{x})y = 2 + \sqrt{x} \longrightarrow 2y - t\sqrt{x} = 2 + \sqrt{x} \longrightarrow 2y - 2 = 2\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$$2y - 2 = (y+1)\sqrt{x} \longrightarrow \sqrt{x} = \frac{2y-2}{y+1} \longrightarrow x = \left(\frac{2y-2}{y+1} \right)^2 \longrightarrow \boxed{x = f^{-1}(y) = \left(\frac{2y-2}{y+1} \right)^2}$$

34) Calcula el dominio de las siguiente funciones:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Como $f(x)$ está definida mediante un cociente, entonces tenemos que su denominador no puede ser cero

$$x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

35) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$g(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$$

Como tenemos un cociente, el denominador no puede ser cero.

$$x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$$

$$\text{Dom}(g(x)) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

36) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$l(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

- Lo primero que tenemos es un cociente, el cual no puede tener el denominador igual a cero

$$x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2 \text{ No está en el dominio}$$

- Como tenemos una raíz cuadrada, entonces lo de dentro no puede ser negativo:

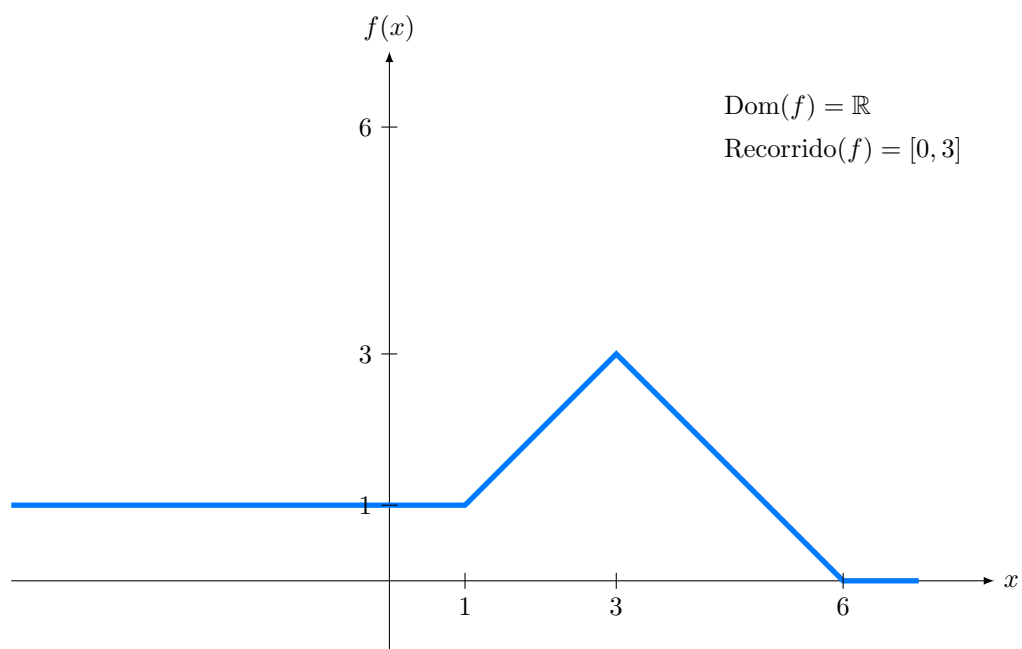
$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

	1														
$x - 1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	+			-											+
	+			-											+
$x + 2$	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	-2														

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$$

37) Representa la función

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x + 6 & \text{si } 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{si } 6 < x \end{cases}$$



38) Representa la función

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Escribe su dominio y su recorrido

