# Álgebra Lineal

# Examen Convocatoria Mayo 2023

Francisco Javier Mercader Martínez

**1)** Se pide:

**a)** Expresa en forma binomial y exponencial el número complejo

$$z = \frac{3+i}{1+2i}$$

**b)** Calcula y expresa en forma binomial el número complejo $z^7$.

**2)** Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$.

**a)** Recordemos que la norma 1 de una matriz $B = (b_{ij})$ se define como

$$\|B\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \right\}$$

Calcula el número de condición de $A$ utilizando la norma 1.

**b)** Supongamos que queremos resolver el sistema lineal $Ax = b$ y que, debido a errores de redondeo o medida, cometemos un error relativo en el término independiente de aproximadamente $10^{-2}$. Obtén una cota del error relativo que se cometería en la solución $x$.

**3)** Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

**a)** Calcula una base ortogonal de $\mathrm{Col}(A)$ (subespacio de columnas de $A$) ¿Cuál es el rango de $A$?

**b)** ¿Qué ecuaciones debe cumplor un vector $(x, y, z)$ para pertenecer a $\mathrm{Col}(A)$?

**c)** Calcula la proyección ortogonal del vector $b = (1, 1, 0)$ sobre el subespacio $\mathrm{Col}(A)$.

**4)** Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**a)** Calcula una matriz de permutación $P$, una matriz triangular inferior $L$ y una matriz triangular superior $U$ tales que $PA = LU$ (factorización $PLU$).

**b)** Utilizando la factorización anterior, explica cómo resolverías el sistema de ecuaciones $Ax = b$.

**5)** Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

**a)** Calcula los valores propios y los valores singulares de $A$.

**b)** ¿Es $A$ diagonalizable? Justifica la respuesta.

**c)** Calcula matrices $U$ y $V$ ortogonales tales que $A = U\Sigma V^{\intercal}$, donde $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ con $\sigma_1, \sigma_2$ los valores singulares de $A$.