Álgebra Lineal
Examen Junio 2024

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Sea A una matriz. Explica en qué consisten, cuándo se pueden calcular, y dónde se pueden utilizar las siguientes factorizaciones de A.

a) Factorización LU y Cholesky.

b) Factorización QR.

c) Factorización en valores propios.

d) Factorización en valores singulares.

2) Sean u y v dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$. Consideremos la matriz $A = uu^\intercal + vv^\intercal$. Supongamos que u es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 1$. Demuestra que los vectores u y v son ortogonales.

3) Consideremos los números complejos $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j$ y $z_2 = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}j}$

a) Calcula la forma exponencial de z_1 y z_2.

b) Calcula $z_1 \cdot z_2$ y expresa el resultado en forma binómica.

4) Consideremos el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

a) Comprueba que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ no tiene solución, y calcula la proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio $\mathrm{Col}(A)$.

b) Calcula la factorización SVD de la matriz A, es decir, calcula matrices ortogonales U y V, y una matriz diagonal Σ, de modo que $A = U\Sigma V^\intercal$.

c) Se define la pseudo-inversa de Moore-Penrose como la matriz

$$A_{-1} = V\Sigma_{-1}U^\intercal$$

donde la matriz diagonal Σ_{-1} contiene en su diagonal, los inversos de los valores singulares de A no nulos. Calcula A_1.

d) Halla todos los vectores $X^\intercal = (x, y)$ tales que $Ax = u$, donde u es la proyección ortogonal que has calculado en el primer apartado, y comprueba que el que tiene la forma mínimia es precisamente $A_{-1}b$.

5) Consideremos la base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,2), v_2 = (-2,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$, y una aplicación lineal que cumple que $f(v_1) = v_2$ y $f(v_2) = v_1$. Se pide:

a) Encuentra la matriz asociada a la aplicación lineal f en la base $\mathcal{B}$.

b) Encuentra la matriz asociada a la aplicación lineal f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) Si A es la matriz del apartado anterior, halla la descomposición espectral de A, es decir, escribe A como $\lambda_1 u_1 u_1^\intercal + \lambda_2 u_2 u_2^\intercal$ con λ_1, λ_2 los valores propios de A y u_1, u_2 vectores propios adecuados.