

# Numeros-reales.pdf



**Jorge\_Ballesta**



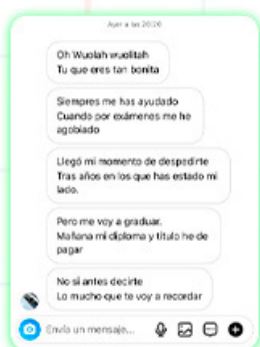
**Cálculo I**



**1º Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos**



**Facultad de Informática  
Universidad de Murcia**



**Que no te escriban poemas de amor  
cuando terminen la carrera**



*(a nosotros por  
suerte nos pasa)*

**WUOLAH**



(a nosotros por suerte nos pasa)

Oh Wuolah wuolilah  
Tu que eres tan bonita

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

# NATURALES

Denotaremos dicho conjunto como  $\mathbb{N}$

## PROPIEDADES :

- ① Es infinito . Su cardinal es el infinito "más pequeño". Un conjunto para el que existe una biyección con el de los números naturales recibe el nombre de **conjunto numerable**
- ② Todo subconjunto  $\mathbb{N}$  tiene un elemento mínimo. En esta propiedad, se basa el "Principio de Inducción"

## P. INDUCCIÓN

Supongamos que de una determinada propiedad  $P(n)$  en la cual interviene un número genérico  $n$ , si:

- ① La propiedad es cierta para  $n=1$
- ② Se supone que la propiedad es cierta para  $n$  (hipótesis de inducción). Se deduce que  $P(n+1)$  es cierta

Entonces, la propiedad  $P(n)$  es cierta para todo  $n \in \mathbb{N}$

Ej Establecer la igualdad  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(1)$   $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$  ;  $1=1$  es cierto. Nuestra H. I es cierta para  $n$ . Por tanto, se deduce que la propiedad satisface a  $n+1$

$$P(n+1) \quad \underline{1+2+\dots+n+n+1} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} ;$$
$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + n+1 = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \rightarrow \text{es cierto}$$

**Que no te escriban poemas de amor  
cuando terminen la carrera ▶▶▶▶▶▶▶▶**  
(a nosotros por suerte nos pasa) 😊



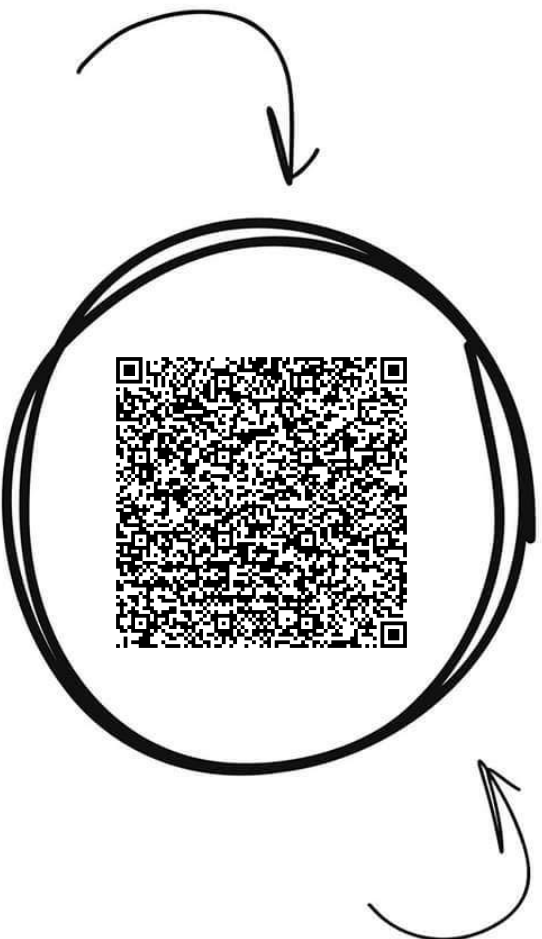
**WUOLAH**



# Cálculo I



**Comparte estos flyers en tu clase y consigue más dinero y recompensas**



**Banco de apuntes de la**

**MUOLAH**

- 1** Imprime esta hoja
- 2** Recorta por la mitad
- 3** Coloca en un lugar visible para que tus compis puedan escanar y acceder a apuntes

- 4** Llévate dinero por cada descarga de los documentos descargados a través de tu QR



$$\underline{a + a^2 + \dots + a^n} = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a} \quad a \neq 1, n \geq 1$$

$$P(1) \quad a = \frac{a - a^2}{1 - a} = \frac{a \cdot \cancel{(1-a)}}{\cancel{(1-a)}} \text{ es cierto}$$

Suponiendo que la propiedad se cumple para  $n$ , se deduce mediante la H.I. que también satisface a  $n+1$

$$P(n+1) \quad \underline{a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1}} = \frac{a - a^{n+2}}{1 - a}$$

$$\frac{a - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} = \frac{a - a^{n+2}}{1 - a}, \frac{a - a^{n+1} + (1-a) \cdot a^{n+1}}{1 - a} = \frac{a - a^{n+2}}{1 - a}$$

$$\cancel{a - a^{n+1}} + \cancel{a^{n+1}} - a \cdot a^n \cdot a, \quad \frac{a - a^n \cdot a \cdot a}{1 - a} = \frac{a - a^n \cdot a \cdot a}{1 - a}$$

Principio de inducción - Demostración de desigualdades

$$\underline{(1+x)^n} \geq \underline{1+nx} \quad P(1) \quad 1+x \geq 1+x \text{ es cierto}$$

$$P(n+1) \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot x$$

$$(1+x) \cdot \underline{(1+x)^n} \geq \underline{(1+nx)} \cdot (1+x) \geq 1+(n+1) \cdot x$$

$$(1+x)^{n+1} \geq \underline{1+x+nx+nx^2} \geq \underline{1+nx+x} \quad \checkmark$$

$$4n < n^2 - 7; \quad n \geq 6 \quad P(6) \quad 24 < 35 - 7; 24 < 29$$

$$P(n+1) \quad 4(n+1) < (n+1)^2 - 7$$

$$4n+4 < n^2 - 7 + 3 + 1 + 2n - 2n < (n+1)^2 - 7$$

$$4n+4 < n^2 + 2n + 1 - 7 + 3 - 2n < (n+1)^2 - 7$$

$$4n+4 < \underline{(n+1)^2 - 7 - 2n + 3} < \underline{(n+1)^2 - 7}$$

Que no te escriban poemas de amor  
cuando terminen la carrera ▶▶▶▶▶▶



WUOLAH

(a nosotros por suerte nos pasa)

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto ordenado  $B \subseteq A$

$a$  es **cota superior** de  $B$  si  $b \leq a$  para todo  $b \in B$  ("cualquier elemento igual o mayor que  $b \in B$ ")  
 $a$  es **cota inferior** de  $B$  si  $a \leq b$  para todo  $b \in B$

$a$  es el **supremo** de  $B$  si:

$a$  es **cota superior** de  $B$

Si  $a'$  es otra **cota superior** de  $B$ , entonces  $a \leq a'$

$a$  es el **ínfimo** de  $B$  si:

$a$  es **cota inferior** de  $B$

Si  $a'$  es otra **cota superior** de  $B$  entonces  $a' \leq a$

Sea  $A$  un conjunto ordenado  $B \subseteq A, b \in B$

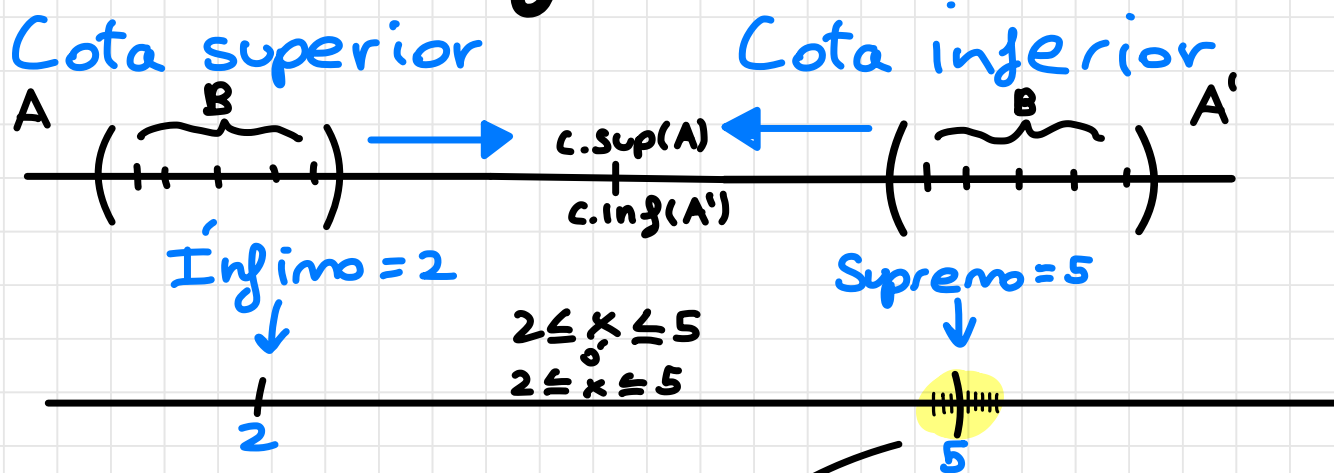
$b$  es el **máximo** de  $B$  si no existe  $b' \in B$  con  $b \leq b'$  y  $b \neq b'$

$b$  es el **mínimo** de  $B$  si no existe  $b' \in B$  con  $b' \leq b$  y  $b \neq b'$

WUOLAH

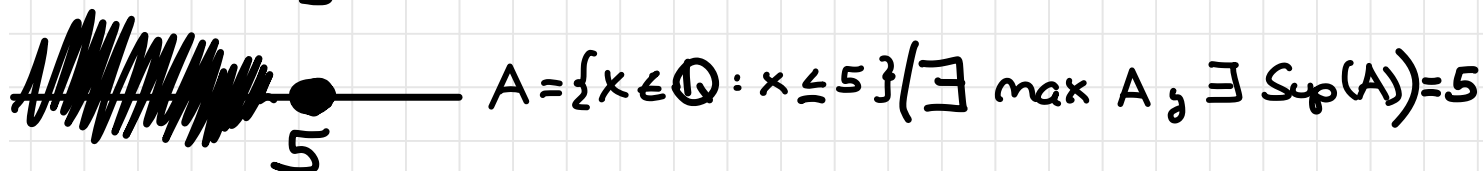
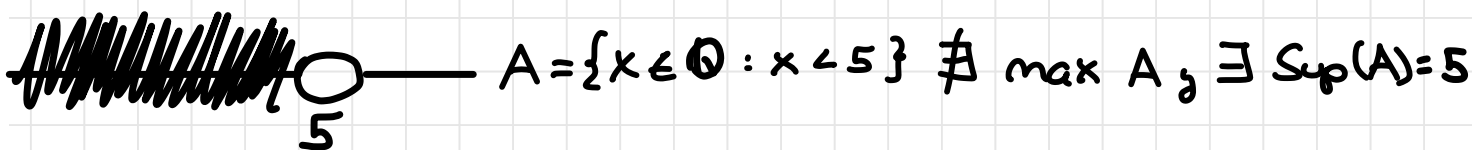


# Gráficamente

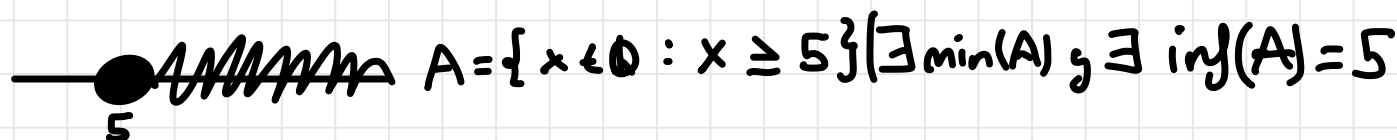
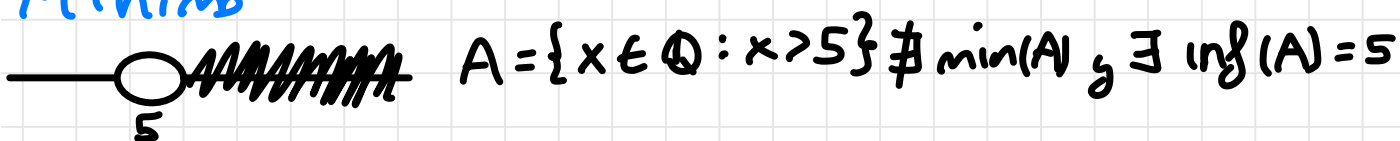


## Máximo

$\text{max} = \text{supremo} \rightarrow \text{supremo} = \text{máximo}$



## Mínimo



En el momento que existe un máximo, todos los máximos son supremos y el supremo es el más pequeño de los cotas superiores



# VALOR ABSOLUTO

$$|x| = \max\{-x, x\} \quad \bullet \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad |x-y| \geq |x| - |y|$$

$$\bullet \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\bullet \quad |x^{-1}| = |x|^{-1}$$

$$\bullet \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

# FUNCIONES

## Definición

Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es:

- par si  $f(x) = f(-x)$  para cada  $x \in I$ .
- impar si  $f(x) = -f(-x)$  para cada  $x \in I$ .
- creciente si para  $x < y$  entonces  $f(x) \leq f(y)$ .
- estrictamente creciente si para  $x < y$  entonces  $f(x) < f(y)$ .
- decreciente si para  $x < y$  entonces  $f(x) \geq f(y)$ .
- estrictamente decreciente si para  $x < y$  entonces  $f(x) > f(y)$ .

Que no te escriban poemas de amor  
cuando terminen la carrera ▶▶▶▶▶▶



WUOLAH

(a nosotros por suerte nos pasa)

No si antes decirte  
Lo mucho que te voy a recordar

Pero me voy a graduar.  
Mañana mi diploma y título he de  
pagar

Llegó mi momento de despedirte  
Tras años en los que has estado mi  
lado.

Siempre me has ayudado  
Cuando por exámenes me he  
agobiado

Oh Wuolah wuolah  
Tu que eres tan bonita

### Proposición (Propiedades) $f(x) = x^n$

- Si  $n > 0$  entonces  $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ .
- Si  $n = 0$ ,  $x^0 = 1$ .
- Si  $n < 0$  entonces  $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ .
- $(xy)^n = x^n \cdot y^n$ .
- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ .
- $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ .
- Si  $n > 0$ , entonces  $x^n$  es monótona creciente en  $(0, +\infty)$ .
- Si  $n < 0$ ,  $x^n$  es monótona decreciente en  $(0, -\infty)$ .

### Proposición (Propiedades) $f(x) = a^x$

- Si  $a = 1$ , la función es constantemente igual a 1.
- $a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y$ ,  $a^0 = 1$ .
- Si  $x < y$  y  $a > 1$ , entonces  $a^x < a^y$ .
- Si  $x < y$  y  $0 < a < 1$ , entonces  $a^y < a^x$ .
- Si  $a > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .
- Si  $0 < a < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .

### Proposición (Propiedades) $f(x) = \log_a(x)$

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ .
- $\log_a 1 = 0$ .
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ .
- $\log_a x^n = n \log_a(x)$ .
- Si  $a > 1$ , y  $x < y$  entonces  $\log_a(x) < \log_a(y)$ .
- Si  $0 < a < 1$  y  $x < y$  entonces  $\log_a(x) > \log_a(y)$ .
- Si  $b > 0$ , entonces  $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ .

WUOLAH

