HOJA DE EJERCICIOS. PARTE III: PROBLEMAS CON RESTRICCIONES

1. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar en } (x_1, x_2) & f(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a} & x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ & (x_1, x_2) \in X = \{(0,0), (0,4), (4,4), (4,0), (1,2), (2,1)\} \end{cases}$$

Se pide:

a) Comprueba que $(x_1, x_2) = (2, 1)$ es la solución de dicho problema.

b) Comprueba que la función dual $\Theta(\lambda)$ viene dada por

$$\begin{cases} -4 + 5\lambda, & \lambda \leq -1 \\ -8 + \lambda, & -1 \leq \lambda \leq 2 \\ -3\lambda, & \lambda \geq 2 \end{cases}$$

c) Calcula la solución del problema dual y el *duality group*

2. **Ejercicio para entrega.** En este ejercicio estudiaremos una versión sencilla del problema de clasificación con máquinas de vector soporte. Consideremos un conjunto de datos con sólo dos datos

$$X = \{(-1, -, 1; -1), (1, 1; 1)\}$$

donde las dos primeras componentes de cada uno de los vectores anteriores representa sus características, y la tercera componente sirve para clasificar dicho dato dentro de dos clases $y = +1$ e $y = -1$. Supongamos que el hiperplano de separación de las dos clases de datos se escribe como

$$x_1 + x_2 x + x_3 y = 0$$

Se pide:

a) Demuestra que el problema de clasificación con SVD para estos datos se formula como

$$(Primal) \begin{cases} \text{Minimizar en } (x_1, x_2, x_3) & f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) \\ \text{Sujeto a} & -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

b) Escribe el problema (Primal) en su forma estándar y demuestra que se satisfacen las condiciones de convexidad adecuadas para que dicho problema sea equivalente a su dual, el cual calcularemos a continuación.

c) Demuestra que el problema dual asociado a (Primal) viene dado por

$$(Dual) \begin{cases} \text{Maximizar} & \Theta(\mu) = -4\mu^2 + 2\mu \\ \text{Sujeto a} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

d) Resuelve el problema dual anterior e infiere de ello que la solución del problema original es $x_1 = 0, x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$.

3. Consideremos el problema

$$(Primal) \begin{cases} \text{Minimizar en } (x_1, x_2) & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ \text{Sujeto a} & x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Escribe y resuelve las condiciones necesarias de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker de problema anterior.

b) Deduce que el problema dual asociado al primal anterior viene dado por

$$(Dual) \begin{cases} \text{Maximizar} & \Theta(\mu) = -\mu^2 + 3\mu - 1 \\ \text{Sujeto a} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x_1, , x_2; \mu) = x_1 + x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \mu(1 - x_1 - x_2)$$

Calcular el coste dual $\Theta(\mu) = \inf_{(x_1,x_2)} \mathcal{L}(x_1, x_2; \mu) \longrightarrow \mathcal{L}$ tiene mínimo (respecto a x_1, x_2) y anula su gradiente al ser estrictamente convexo.

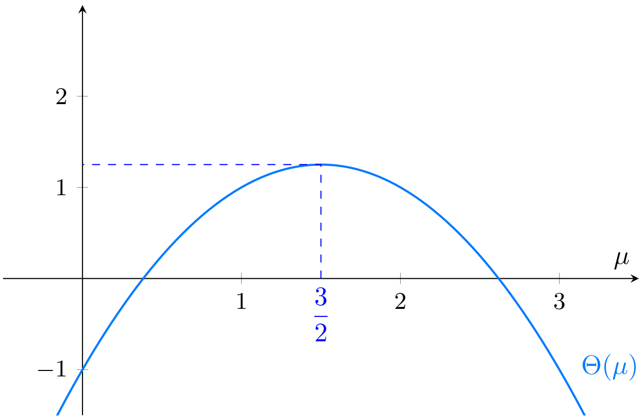
$$\nabla_{(x_1,x_2)} = (1 + x_1 - \mu, 1 + x_2 - \mu) = (0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + x_1 - \mu = 0 \\ 1 + x_2 - \mu = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{x_1 = x_2 = \mu - 1}$$

$$\Theta(\mu) = \mathcal{L}(\mu - 1, \mu - 1, \mu) = \mu - 1 + \mu - \mu + \frac{1}{2}\left[(\mu 1)^2 + (\mu - 1)^2\right] + \mu(1 - \mu + 1 - \mu + 1) = -\mu^2 + 3\mu - 1$$

$$(Dual) = \begin{cases} \text{Maximizar} & \Theta(\mu) = -\mu^2 + 3\mu - 1 \\ \text{Sujeto a} & \mu \geq 0 \end{cases}$$

$$\Theta'(\mu) = -2\mu + 3 = 0 \longrightarrow \boxed{\mu* = \frac{3}{2}}$$



c) Resuelve el problema dual anterior e infiere de ello que la solución del problema original es $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

$x_1^* = x_2^* = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

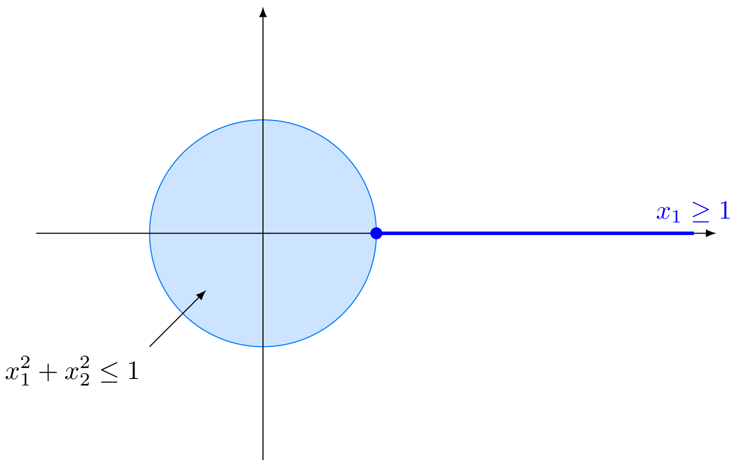
4. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar en } (x_1, x_2) & f(x_1, x_2) = x_2 \\ \text{Sujeto a} & x_1 \geq 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Comprueba que $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ es solución del problema anterior.

$x_1 = 1, x_2 = 0$ es solución.



$(1, 0)$ es solución porque es el único admisible

b) Comprueba que la función dual viene dada por

$$\Theta(\mu) = \mu - \sqrt{1 - \mu^2}.$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = x_2 + \mu_1(1 - x_1) + \mu_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Existe el mínimo de $\mathcal{L}$ y anula su gradiente.

$$\nabla_{(x_1,x_2)} = (-\mu_1 + 2\mu_2\mu_1 + 2\mu_2 x_1, 1 + 2\mu_2 x_2) = (0, 0)$$

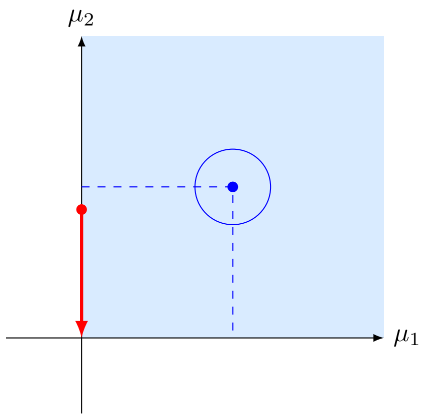
$$\left.\begin{array}{l} -\mu_1 + 2\mu_2 x_1 = 0 \\ 1 + 2\mu_2 x_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x_1 = \dfrac{\mu_1}{2\mu_2}, \mu_2 \neq 0 \\ \longrightarrow x_2 = -\dfrac{1}{2\mu_2}, \mu_2 \neq 0 \end{array}$$

Si $\mu_2 = 0 \longrightarrow \boxed{1 = 0 \text{ No}}$

$$\Theta(\mu_1, \mu_2) = \mathcal{L}\left(\frac{\mu_1}{2\mu_2}, -\frac{1}{2\mu_2}, \mu_1, \mu_2\right) = -\frac{1}{2\mu_2} + \mu_1\left(1 - \frac{\mu_1}{2\mu_2}\right) + \mu_2\left(\frac{\mu_1^2}{4\mu_2^2} + \frac{1}{4\mu_2^2} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu_2^2} + \mu_1 - \frac{\mu_1^2}{2\mu_2} - \mu_2 + \frac{\mu_1^2}{4\mu_2} + \frac{1}{4\mu_2} = -\frac{1}{4\mu_2} - \frac{\mu_1^2}{4\mu_2} + \mu_1 + \mu_2$$

$$(Dual) \begin{cases} \text{Maximizar} & \Theta(\mu_1, \mu_2) = -\dfrac{1}{4\mu_2} - \dfrac{\mu_1^2}{4\mu_2} + \mu_1 + \mu_2 \\ \text{Sujeto a} & \mu_1 \geq 0 \\ & \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$



Miramos si hay máximo en la región $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$.

$$\nabla_{(\mu_1,\mu_2)}\Theta = \left(-\frac{\mu_1}{2\mu_2} + 1, \frac{1}{4\mu_2^2} + \frac{\mu_1^2}{4\mu_2^2} - 1\right) = (0, 0)$$

$1 - \dfrac{\mu_1}{2\mu_2} \longrightarrow \mu_1 = 2\mu_2$

$$\Theta(\mu_1 = 0, \mu_2) = -\frac{1}{\mu_2} - \mu_2 \begin{cases} -\infty & \mu_2 \to 0 \\ -\infty & \mu_2 \to +\infty \end{cases}$$

$\lim\limits_{\mu_1 \to 0} (\mu_1, \mu_2) =$

Chequeamos la condición de rango maximal

$$\nabla_{g_1} = (-1, 0) \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\ \nabla_{g_1} \ \vdots \ \nabla_{g_2}\ \right] \longrightarrow \boxed{\text{rg} = 1 \text{ No}}$$
$$\nabla_{g_2} = (2x_1, 2x_2) = \{(1, 0)\} = (2, 0)$$

El problema dual no tiene solución.

c) Calcula $\sup\{\Theta(\mu) : \mu \geq 0\}$ y deduce de ello que el problema dual no tiene solución. Razona a qué es debido esto. *Indicación: comprueba que no se cumple alguna de las hipótesis del teorema de dualidad fuerte.*

5. Consideremos al problema de complementariedad lineal asociado a los datos siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad q = (1, 1)^\intercal.$$

Escribe las 4 matrices complementarias, dibuja los 4 conos complementarios, y deduce de ello que el problema

$$\begin{cases} \omega - Mz = q \\ \omega, z \geq 0 \\ \omega_j \cdot z_j = 0, \quad 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

tiene 4 soluciones y calcúlalas.

$$\omega \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Variables nulas	Variables complementarias	Matriz complementaria	Cono complementario	Solución
$\omega_1 = \omega_2 = 0$	(z_1, z_2)	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$		$z_1 = z_2 = 1$
$\omega_1 = z_2 = 0$	(z_1, ω_2)	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$		$z_1 = \frac{1}{2}; \omega_2 = \frac{3}{2}$
$z_1 = z_2 = 0$	(ω_1, ω_2)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		$\omega_1 = \frac{3}{2}, z_2 = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{matrix} 2z_1 - z_2 = 1 \\ -z_1 + 2z_2 = 1 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix} 4z_1 - 2z_2 = 2 \\ -z_1 + 2z_2 = 1 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} 3z_1 = 3 \longrightarrow z_1 = 1 \\ z_2 = 2 \cdot z_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{matrix}$$

$$z_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \omega_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} 2z_1 = 1 \\ -z_1 + \omega_2 = 1 \end{matrix}\right\}$$

6. Utiliza el algoritmo de Lemke para resolver el problema de complementariedad lineal asociado a los datos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad q = (1, -1)^\intercal.$$

7. **El problema de la distancia mínima.** Sea K la región poligonal que aparece en la Figura 1 y fijemos el punto $P_0 = (-2, -1)$. Nos planteamos de encontrar el punto de K que está más cerca de P_0, en la distancia Euclídea usual.

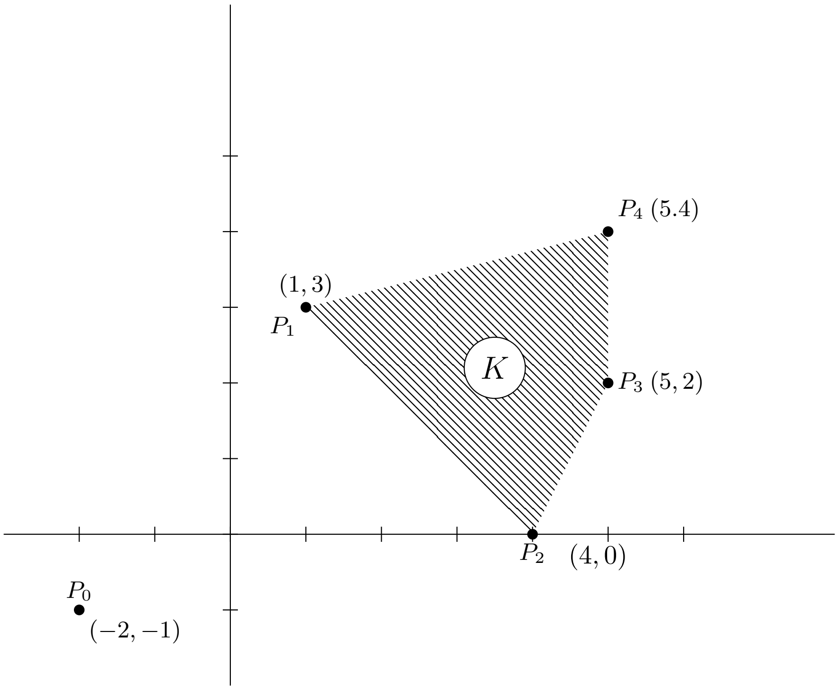


Figura 1: Problema de la distancia mínima

El problema puede formularse de la siguiente forma[1]:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(\lambda_1, \cdots, \lambda_4) = (\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 - (-2))^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 - (-1)^2) \\ \text{Sujeto a} & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 4 \end{cases}$$

Se pide:

a) Utiliza la sustitución $\lambda_4 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ para comprobar que el problema anterior se puede reescribir como el problema cuadrático siguiente:

$$(\text{PQ}) \begin{cases} \text{Minimizar} & (-66, -54, -20)\lambda + \frac{1}{2}\lambda^\intercal \begin{bmatrix} 34 & 16 & 4 \\ 16 & 34 & 16 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \lambda \\ \text{Sujeto a} & -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \geq 1 \\ & \lambda_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 3 \end{cases} \tag{1}$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\intercal$.

b) Comprueba que el problema (1) es equivalente al problema de complementariedad lineal

$$(\text{PCL}) \begin{cases} \omega - Mz = q \\ \omega, z \geq 0 \\ \omega_j \cdot z_j = 0, \quad 1 \leq j \leq 4 \end{cases} \tag{2}$$

donde, siguiendo la notación de clase,

$$\omega = (y, v_1, v_2, v_3)^\intercal, \quad z = (y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\intercal, \quad q = (1, -66, -54, -20)^\intercal$$

y

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 34 & 16 & 4 \\ 1 & 16 & 34 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}.$$

[1] El vector $(\lambda_1, \cdots, \lambda_4)$ representa un punto de K y surge del Teorema de representación de un conjunto poliédrico. Para el caso sencillo en que K es un triángulo, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ son las coordenadas baricéntricas, que se calculan del siguiente modo: si $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ $P_3 = (x_3, y_3)$ son los vértices de un triángulo y $P = (x, y)$ es un punto del triángulo, entonces las coordenadas baricéntricas de P son:

$$\lambda_1 = \frac{\text{área del triángulo } PP_1P_2}{\text{área del triángulo } P_1P_2P_3}, \quad \lambda_2 = \frac{\text{área del triángulo } PP_2P_3}{\text{área del triángulo } P_1P_2P_3}, \quad \lambda_3 = \frac{\text{área del triángulo } PP_1P_3}{\text{área del triángulo } P_1P_2P_3}.$$

c) Resuelve el problema (2) en Python mediante el algoritmo de Lemke y usando el módulo `lemkelep`.

8. Consideremos el problema de optimización cuadrática siguiente:

$$(\text{PQ}) \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Comprueba que el problema de complementariedad lineal asociado es el correspondiente al sistema:

$$(\text{PCL}) \quad \begin{bmatrix} y \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Resuelve por el método de Lemke en Python, y usando el módulo `lemkelep`, el problema (PCL) anterior.

9. Consideremos el problema de optimización cuadrática siguiente:

$$(\text{PQ}) \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = 23x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_1 + 5x_2 + 8 \\ \text{Sujeto a} & x_1 - x_2 - 3 \geq 0 \\ & -4x_1 - 5x_2 \leq 13 \\ & 8x_1 + 14x_2 \geq -9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudia la convexidad del problema.

b) Escribe las ecuaciones de Karush-Kuhn-Tucker y el problema de complementariedad lineal asociados.

c) Resuelve el método de Lemke en Python, y usando el módulo de `lemkelep`, el problema de complementariedad lineal.