Álgebra Lineal

Ejercicios Tema 4: Subespacios vectoriales, bases y coordenadas

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Determina cuáles de ls siguientes subonjunto de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

a) $\{(x, y, z|x = 1)\}$

No es un subespacio vectorial porque no contiene al $(0, 0, 0)$.

b) $\{(x, y, z)|xyz = 0\}$

$W = \{(x, y, z)|xyz = 0\}$

Tomamos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W \longrightarrow \underbrace{(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)}_{(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)} \in W$

$(x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) \cdot (z_1 + z_2) = 0$

Claramente no es un subespacio vectorial porque *"las tres componentes están multiplicando"*

Para verlo más claramente:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0) \in W \text{ ya que } 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\ v_2 &= (0, 0, 1) \in W \text{ ya que } 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, $v_1 + v_2 = (1, 1, 1) \notin W$ ya que

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

c) $\{(x, y, z)|x + y + z = 0\}$

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W \longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$

$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1)}_{=0} + \underbrace{(x_2 + y_2 + z_2)}_{=0} = 0$

Sean ahora $(x_1, y_1, z_1) \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha(x_1, y_1, z_1) \in W$

$$\begin{aligned} &\alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \\ &\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

2) Comprueba que, en $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por los vectores $(1, 2, 1)$ y $(6, 1, -16)$ coincide con el subespacio generador por los vectores $(-3, 7, 20)$ y $(4, 9, 6)$.

Para verificar si el subespacio generador po $\{(1, 2, 1), (6, 1, -16)\}$ coincide con el generado por $\{(-3, 7, 20), (4, 9, 6)\}$ en $\mathbb{R}^3$, debemos comprobar si cada conjunto de vectores puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores del otro conjunto. Esto implica que ambos subconjuntos generan el mismo campo vectorial.

Paso a seguir:

1) **Matriz ampliada:** Consideramos todos los vectores como filas de una matriz y verificamos si los vectores de un

conjunto son combinación lineal de los del otro. Esto se hace calculando las filas escalonadas (rango).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -16 \\ -3 & 7 & 20 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Reducimos la matriz a su forma escalonada para identificar si el rango es igual a 2 (dimensión de un plano en $\mathbb{R}^3$).

2) **Dependencia lineal:** Si se confirma que el rango es 2, probamos si los vectores de un conjunto pertenecen al subespacio generado por los vectores del otro. Para esto, verificamos si existe una relación lineal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -16 \\ -3 & 7 & 20 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 + 3F_1 \\ F_4 \to F_4 - 4F_1}]{F_2 \to F_2 - 6F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -22 \\ 0 & 13 & 23 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 23 \\ 0 & -11 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 - 13F_2 \\ F_4 \to F_4 - F_2}]{F_1 \to F_1 - 2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to -\frac{1}{3}F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_3]{F_1 \to F_1 + 3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz tiene rango 3, lo cual indica que los cuatro vectores son linealmente independientes. Por lo tanto, los subespacios generados por los conjuntos $\{(1,2,1),(6,1,-16)\}$ y $\{(-3,7,20),(4,9,6)\}$ **no coinciden**, ya que el espacio generado por los cuatro vectores abarca todo $\mathbb{R}^3$.

3) Usando determinantes, halla una base del subespacio W del ejercicio anterior que esté contenida en el conjunto generador dado.

4) Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ con $n \geq 3$. Pon un ejemplo de una matriz A tal que los sistemas de ecuaciones $Ax = v_1$ y $Ax = v_2$ tengan solución pero el sistema $Ax = v_3$ no lo tenga.

Para encontrar un ejemplo de una matriz A en $\mathbb{K}^{n\times n}$ (donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo, como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), junto con vectore $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$, tal que:

1) $Ax = v_1$ y $Ax = v_2$ tienen solución.

2) $Ax = v_3$ no tiene solución.

Seguimos estos pasos:

Construcción del ejemplo:

1) Para que $Ax = v_1$ y $Ax = v_2$ tengan solución, los vectores v_1 y v_2 deber pertenecer al espacio columnas de A, es decir, $\mathrm{Im}(A)$.

2) Para que $Ax = v_3$ no tenga solución, v_3 debe estar fuera del espacio columna de A.

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, con rango 2 (por simplicidad). Esto implica que $\mathrm{Im}(A)$ es un subespacio de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$.

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) **Espacio columna de A:** El espacio columna de A está generado por $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.

2) **Elegir v_1 y v_2 dentro de $\mathrm{Im}(A)$:** Escogemos $v_1 = (1,1,0)$ y $v_2 = (2,-1,0)$, ambos en $\mathrm{Im}(A)$.

3) **Elegir v_3 fuera de $\mathrm{Im}(A)$:** Escogemos $v_3 = (0, 0, 1)$, que no pertenece a $\mathrm{Im}(A)$, ya que su componente en la tercera coordenada es no nula y la tercera fila de A es cero.

Verificación

1) **Sistemas $Ax = v_1$ y $Ax = v_2$:** El sistema $Ax = v_1$ tiene solución porque $v_1 \in \mathrm{Im}(A)$. Por ejemplo, una solución es:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Similarmente, $Ax = v_2$ tiene solución, como:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2) **Sistema $Ax = v_3$:** No tiene solución porque $v_3 = (0, 0, 1)$ no pertence al espacio columna de A, que está contenido en el plano $\{(x, y, 0)|x, y \in \mathbb{R}\}$.

5) Completa la frase "el vector b pertenece a $\mathrm{Col}(A)$ cuando ...... tiene solución".

El vector b pertenece a $\mathrm{Col}(A)$ cuando **el sistema de ecuaciones lineales** $Ax = b$ tiene solución.

6) Cierto o falso: "si el vector cero pertenece a $\mathrm{Fil}(A)$, entonces las filas de A son linealmente dependientes".

Cierto.

Si el vector cero pertenece a $\mathrm{Fil}(A)$ (el espacio fila de A), significa que al menos una de las filas de A es el vector cero. Esto implica automáticamente que las filas de A son linealmente dependientes, porque cualquier conjunto de vectores que incluya el vector cero no puede ser linealmente independiente.

7) Halla una base del subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores

$$(-1, 0, 0, 1, -2) \quad (2, 1, 0, -1, 2) \quad (1, 3, 1, 0, -1) \quad (0, 2, 1, 0, -1) \quad (3, 1, 0, -2, 4).$$

Para hallar una base del subespacio $W \subset \mathbb{R}^5$ generado por los vectores dados, necesitamos determinar un conjunto de vectores linealmente independientes que generen W. Esto lo logramos aplicando reducción por filas a la matriz formada por estos vectores.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \to -F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_5 \to F_5 - 3F_1}]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_4 \to F_4 - 2F_2 \\ F_5 \to F_5 - F_2}]{F_3 \to F_3 - 3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 - F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomamos las filas originales correspondientes a las posiciones de los pivotes (v_1, v_2, v_3):

$$\text{Base de } W = \{(-1,0,0,1,-2), (2,1,0,-1,2), (1,3,1,0,-1)\}.$$

8) Amplía el conjunto $\{(1,-1,1)\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Para ampliar el conjunto $\{(1,-1,1)\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, seguiremos los pasos utilizando el proceso de **Gram-Schmidt** y la normalización. El objetivo es encontrar dos vectores ortogonales adicionales, completar la base y normalizar todos los vectores.

Paso 1: Normalizamos el primer vector

El vector dado es $v_1 = (1,-1,1)$. Calculamos su norma:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Normalizamos v_1:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Paso 2: Escogemos un vector independiente para construir el siguiente

Escogemos $v_2 = (1,1,0)$, que no es paralelo a v_1. Proyectamos v_2 sobre e_1 y restamos para garantizar ortogonalidad:

$$\text{Proyección de } v_2 \text{ sobre } e_1 = \langle v_2, e_1\rangle\, e_1.$$

Calculamos:

$$\langle v_2, e_1\rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Dado que la proyección es cero, v_2 ya es ortogonal a v_1. Continuamos con v_2 sin cambios:

$$u_2 = v_2 = (1,1,0).$$

Normalizamos u_2:

$$\|u_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Paso 3: Encontramos el tercer vector ortogonal

Escogemos $v_3 = (0,0,1)$, que es independiente de v_1 y v_2. Proyectamos v_3 sobre e_1 y e_2 para garantizar ortogonalidad:

$$\text{Proyección de } v_3 \text{ sobre } e_1 = \langle v_3, e_1\rangle\, e_1, \quad \text{Proyección de } v_3 \text{ sobre } e_2 = \langle v_3, e_2\rangle\, e_2.$$

Calculamos:

$$\langle v_3, e_1\rangle = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$
$$\langle v_3, e_2\rangle = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 = 0.$$

Entonces:

$$\text{Proyección total: } \frac{1}{\sqrt{3}} e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Restamos esta proyección de v_3:

$$u_3 = v_3 - \text{Proyección total} = (0,0,1) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Normalizamos u_3:

$$\|u_3\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Base ortonormal completa:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}.$$

9) En $\mathbb{R}^5$, si las ecuaciones del subespacio U son $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t+u=0 \\ x-y+z-t+u=0 \end{array} \right\}$, encuentra las de $U^\perp$.

Propiedades de U y $U^\perp$:

1) Un vector $v = (x, y, z, t, u) \in U^\perp$ pertenece al subespacio ortogonal si y solo si satisface:

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in U.$$

Es decir, v es ortogonal a todos los vectores de U.

2) Si U está definido por m ecuaciones, el rago del sistema de ecuaciones es m, y la dimensión de U es $n-m$, donde $n = 5$ en este caso. El subespacio ortogonal $U^\perp$ tendrá dimensión m.

Paso 1: Escribir las ecuaciones de U en forma matricial

Las ecuaciones de U puede escribirsr como un sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Paso 2: Calcular el espacio nulo de A

El subespacio $U^\perp$ está generado por los vectores que forma una base del espacio fila de A. Esto corresponde a calcular el espacio nulo de $A^\intercal$, donde:

$$A^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos $A^\intercal v = 0$, es decir:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 0$$

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0$$

Paso 3: Simplificar el sistema

Sumamos ambas ecuaciones:

$$2v_1 + 2v_3 + 2v_5 = 0 \longrightarrow v_1 + v_3 + v_5 = 0.$$

Restamos ambas ecuaciones:

$$2v_2 + 2v_4 = 0 \longrightarrow v_2 + v_4 = 0.$$

El sistema simplificado es:

$$\begin{aligned} v_1 + v_3 + v_5 &= 0 \\ v_2 + v_4 &= 0 \end{aligned}$$

Paso 4: Conclusión

Las ecuaciones del subespacio $U^{\perp}$ son:

$$\begin{aligned} x + z + u &= 0 \\ y + t &= 0 \end{aligned}$$

10) Halla una base de siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

a) $\{(x, y, z, t)|x = y = z = t\}$

El subespacio está formado por los vectores de la forma (x, x, x, x), donde $x \in \mathbb{R}$. Esto indica que cualquier vector en este subespacio es un múltiplo del vector $(1, 1, 1, 1)$.

El subespacio es unidimensional, ya que cualquier vector puede escribirse como:

$$(x, x, x, x) = x \cdot (1, 1, 1, 1).$$

Por lo tanto, una base del subespacio es:

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1)\}.$$

b) $\{(x, y, z, t)|x + y + z + t = 0\}$

El subespacio U está definido por una ecuación lineal homogénea en $\mathbb{R}^4$, por lo que es un subespacio de dimensión $4 - 1 = 3$. Queremos encontrar una base para este subespacio.

Paso 1: Representación de los vectores en U

La ecuación $x + y + z + t = 0$ implica que:

$$x = -y - z - t.$$

Podemos parametrizar los vectores en U en términos de y, z, y t:

$$(x, y, z, t) = (-y - z - t, y, z, t).$$

Reescribiendo:

$$(x, y, z, t) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1).$$

Paso 2: Vectores generados

Los vectores generadores de U son:

$$v_1 = (-1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (-1, 0, 1, 0), \quad v_3 = (-1, 0, 0, 1).$$

Paso 3: Conclusión

Una base del subespacio U es:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}.$$

11) Dados los subespacios

$$U = \{(a, b, a - b, a - 2b) : a, b \in \mathbb{R}\} \qquad W = \{(x, x - y, -x + y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

calcula una base de cada uno de ellos y determina si están en suma directa.

Paso 1: Determinar una base para U

El subespacio U está definido como:

$$U = \{(a, b, a - b, a - 2b) | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Escribimos un vector genérico en U:

$$(a, b, a - b, a - 2b) = a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, -2).$$

Por lo tanto, los vectores generadores de U son:

$$v_1 = (1, 0, 1, 1), \quad v_2 = (0, 1, -1, -2).$$

Ambos vectores son linealmente independientes, pues ninguno es múltiplo del otro. Por lo tanto, una base de U es:

$$\mathcal{B}_U = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, -2)\}.$$

Paso 2: Determinar una base para W

El subespacio W está definido como:

$$W = \{(x, x - y, -z + y, y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Escribimos un vector genérico en W:

$$(x, x - y, -x + y, y) = x(1, 1, -1, 0) + y(0, -1, 1, 1).$$

Ambos vectores son linealmente independientes, pues ninguno es múltiplo del otro. Por lo tanto, una base de W es:

$$\mathcal{B}_W = \{(1, 1, -1, 0), (0, -1, 1, 1)\}.$$

Paso 3: Verificar si U y W están en suma directa

La suma de los subespacios U y W está en suma directa si $U \cap W = \{0\}$, es decir, si la intersección de U y W solo contiene el vector nulo.

Para comprobar esto, resolvemos el sistema $u = w$, donde:

$$(a, b, a - b, a - 2b) = (x, x - y, -x + y, y).$$

Esto nos da las ecuaciones:

$$a = x, \quad b = x - y, \quad a - b = -x + y, \quad a - 2b = y.$$

Sustituyendo $b = x - y$ en las demás ecuaciones:

1) $a - b = -x + y$ implica $a - (x - y) = -x + y$, lo cual es siempre cierto.

2) $a - 2b = y$ implica $a - 2(x - y) = y$, o $a - 2x = +2y = y$, lo que simplifica a $a = 2x - y$.

Sustituyendo $a = 2x - y$ y $b = x - y$ en $(a, b, a - b, a - 2b)$, verificamos que el único vector que satisface ambas estructuras es el vector nulo $(0, 0, 0, 0)$.

12) Dada la matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ calcula:

a) tres bases distintas de $\text{Col}(U)$.

Paso 1: Determinar una base canónica de $\text{Col}(U)$

La matriz U tiene dos filas, por lo que el espacio columna estará en $\mathbb{R}^2$. Las columnas de U son:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eliminando repeticiones, las columnas $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forman una base de $\text{Col}(U)$.

Primera base:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Paso 2: Construir otras base de $\text{Col}(U)$

Dado que cualquier base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes que genera el espacio, podemos construir otras bases tomando combinacines lineales de las columnas originales.

Segunda base:

Combinamos las columnas originales:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tercera base:

Tomamos combinaciones no triviales de las columnas, como:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) dos bases distintas de $\text{Fil}(U)$.

Paso 1: Comprobar la independencia lineal de las filas

La matriz tiene dos filas:

$$v_1 = (1, 0, 1, 0, 1), \quad v_2 = (0, 1, 0, 1, 0).$$

Notamos que v_1 y v_2 son linealmente independientes, ya que no son proporcionales. Por lo tanto, estas dos filas generan el subespacio $\text{Fil}(U)$ y forman una base.

Primera base:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0)\}.$$

Paso 2: Generar una base distinta

Podemos generar nuevas bases del subespacio $\text{Fil}(U)$ tomando combinaciones lineales de las filas originales que sean linealmente independientes.

Elegimos combinacines lineales de v_1 y v_2 que mantengan independencia:

$$v_3 = v_1 + v_2 = (1, 1, 1, 1, 1), \quad v_4 = v_2 = (0, 1, 0, 1, 0).$$

Comprobamos que v_3 y v_4 son linealmente independientes (no proporcionales).

Segunda base:

$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 0)\}.$$

Paso 3: Generar otra base distinta

Ahora tomamos otra combinación lineal. Por ejemplo:

$$v_5 = v_1 - v_2 = (1, -1, 1, -1, 1), \quad v_6 = v_1 = (1, 0, 1, 0, 1).$$

Comprobamos que v_5 y v_6 son linealmente independientes.

Tercera base:

$$\mathcal{B}_3 = \{(1, -1, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0, 1)\}.$$

13) Sea S un conjunto de 6 vectores de $\mathbb{R}^4$. De las opciones entre paréntesis escoge la(s) correcta(s):

a) S (es)(no es)(no necesariamente es) un conjunto generadr de $\mathbb{R}^4$.

S **no necesariamente es** un conjunto conjunto generador $\mathbb{R}^4$.

b) S (es)(no es)(puede ser) un conjunto linealmente independiente.

S **no es** un conjunto linealmente independiente.

c) Un subconjunto de S con 4 vectores (es)(no es)(puede ser) una base de $\mathbb{R}^4$.

Un subconjutno de S con 4 vectores **puede ser** una base de $\mathbb{R}^4$.

14) Determina los valores que faltan en la siguiente matriz sabiendo que tiene rango 1:

$$\begin{bmatrix} 7 & - & - \\ - & 8 & - \\ - & 12 & 6 \\ - & - & 2 \\ 21 & 6 & - \end{bmatrix}$$

Si la matriz tiene rango 1, esto implica que todas las filas (o columnas) de las matriz son **linealmente dependientes**. En otras palabras, cada fila es un múltiplo de cualquier otra fila no nula. Usaremos esta propiedad para determinar los valores que faltan.

Matriz inicial

$$A = \begin{bmatrix} 7 & a & b \\ c & 8 & d \\ e & 12 & 6 \\ f & g & 2 \\ 21 & 6 & h \end{bmatrix}.$$

Paso 1: Relación entre las filas.

Tomamos la primera fila como referencia: $(7, a, b)$. Cada fila debe ser un múltiplo de esta primera fila. Es decir:

1) Fila 2: $(c, 8, d) = k_1(7, a, b)$.

2) Fila 3: $(e, 12, 6) = k_2(7, a, b)$.

3) Fila 4: $(f, g, 2) = k_3(7, a, b)$.

4) Fila 5: $(21, 6, h) = k_4(7, a, b)$.

Paso 2: Determinar los múltiplos usando los datos conocidos

Relación entre la fila 1 y la fila 5

La fila 5 es un múltiplo de la fila 1. Como el primer elemento de la fila 5 es 21, y el primer elemento de la fila 1 es 7, el factor de proporcionalidad es:

$$k_4 = \frac{21}{7} = 3.$$

Por lo tanto:

$$(21, 6, h) = 3(7, a, b).$$

Esto implica:

$$6 = 3a \longrightarrow a = 2,$$
$$h = 3b.$$

Relación entre la fila 1 y la fila 3:

El tercer elemento de la fila 3 es 6. Como el tercer elemento de la fila 1 es b, el factor de proporcionalidad es:

$$k_2 = \frac{6}{b}.$$

Esto implica:

$$e = 7k_2 = 7\left(\frac{6}{b}\right) = \frac{42}{b},$$
$$12 = ak_2 = 2\left(\frac{6}{b}\right) = \frac{12}{b}.$$

Por tanto:

$$b = 1.$$

Paso 3: Sustitución de $b = 1$ y $a = 2$

Sustituyendo estos valores en las relaciones anteriores:

1) Para la fila 5:

$$h = 3b = 3 \cdot 1 = 3.$$

2) Para la fila 3:

$$e = \frac{42}{b} = \frac{42}{1} = 42.$$

Relación entre la fila 1 y la fila 2:

La segunda entrada de la fila 2 es 8, y la regunda entreada de la fila 1 es $a = 2$. El factor de proporcionalidad es:

$$k_1 = \frac{8}{2} = 4.$$

Entonces:

$$c = 7k_1 = 7 \cdot 4 = 28, \quad d = 1k_1 = 1 \cdot 4 = 4$$

Relación entre la fila 1 y la fila 4:

El tercer elemento de la fila 4 es 2, y el tercer elemento de la fila 1 es 1. El factor de proporcionalidad es:

$$k_3 = \frac{2}{1} = 2.$$

Entonces:

$$f = 7k_3 = 7 \cdot 2 = 14, \quad g = 2k_3 = 2 \cdot 2 = 4$$

3) Matriz final

Sustituyendo todos los valores encontrados, la matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 28 & 8 & 4 \\ 42 & 12 & 6 \\ 14 & 4 & 2 \\ 21 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

15) Dadas dos matrices A y B, prueba las siguientes afirmaciones:

a) $\text{rango}(A + B) \leq \text{rango}(A) + \text{rango}(B)$

b) $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(A), \text{rango}(B)$

16) Sea A una matriz $m \times n$ de rango k. Prueba que existe una matriz B de tamaño $m \times k$ y rango k y una matriz C de tamaño $k \times n$ tales que $A = BC$ (esta factorización se llama **full rank factorization**). Si k es mucho menor que n y m, razona si es mejor, en términos de memoria, almacenar A o almacenar B y C.

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y rango k. Por definición del rango, k es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes de A. Seguimos los paso para construir las matrices B y C:

Paso 1: Descomposición de A en bases de sus filas y columnas

1) Existen matrices de permutación P y Q (por reordenamiento de filas y columnas) tales que:

$$A = P \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q,$$

donde R es una matriz $k \times k$ invertible, y los ceros corresponden a entradas no relevantes debido al rango.

2) Usando esta permutación, podemos descomponer A como:

$$A = URV^\intercal,$$

donde $U(m \times k)$ y $V^\intercal(k \times n)$ son submatrices formadas por columnas y filas independientes de A, respectivamente.

Paso 2: Definición de las matrices B y C

Definimos:

- $B = UR$, una matriz $m \times k$ con rango k porque R es invertible.
- $C = V^\intercal$, una matriz $k \times n$.

Entonces:

$$A = BC,$$

donde B tiene tamaño $m \times k$ y rango k, y C tiene tamaño $k \times n$.

Si $k \ll m, n$, es **más eficiente en términos de memoria** almacenar las matrices B y C en lugar de A, ya que se requieren aproximadamente

$$(m \times k) + (k \times n) = k(m+n)$$

elementos frente a $m \times n$.

17) Calcula la "full rank factorization" para la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Determinar el rango de A

Calculamos el rango de A. Si las filas de A son linealmente independientes, el rango será 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to -\frac{1}{3}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta forma escalonada muestra que las dos filas son independientes, así que, el rango de $A = 2$.

Paso 2: Descomponer A en BC

Dado que el rango de A es 2, buscamos:

- B de tamaño 2×2 con rango 2.
- C de tamaño 2×4 con rango 2, de forma de que $A = BC$.

Seleccionar submatrices independientes

Tomamos como pivotes las columnas 1 y 2 de A:

$$\text{Submatriz independiente: } A_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$$

donde:

$$|A_p| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3 \neq 0.$$

Por lo tanto, la matriz tiene rango 2 y es invertible.

Construir B y C

La matriz B corresponde a las columnas independientes de A:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

La columna C se calcula como:

$$C = B^{-1}A.$$

Calculamos B^{-1}:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}(A^*)^{\intercal}$$

, donde $\det(B) = -3$ y $(A^*)^{\intercal}$ es:

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{\intercal} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Multiplicamos:

$$C = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

18) Utiliza la "full rank factorization" y el ejercicio 15 para ver que una matriz A tiene rango k si y solo si se puede expresar como suma de k matrices de rango 1, pero no se puede expresar como suma de menos de k matrices de rango 1. Expresa la matriz del ejercicio anterior como suma de 2 matrices de rango 1.

19) Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde B se obtiene de A restando la fila uno a la fila tres. ¿Qué relación hay entre los cuatro subespacios fundamentales de las dos matrices? Calcula una base para cada uno de ellos.

Dado que B se obtiene de A restando la primera fila de A a la tercera fila, las matrices comparten algunas propiedades:

1) **Espacio columna (**$\text{Col}(A)$ **y** $\text{Col}(B)$**):** Como la operación realizada para obtener B no afecta a las combinaciones lineales de las columnas de A, el espacio columna de A y B son **iguales**:

$$\text{Col}(A) = \text{Col}(B).$$

2) **Espacio nulo (**$\text{nuc}(A)$ **y** $\text{Nul}(B)$**):** Las matrices A y B tienen diferentes ecuaciones en el espacio nulo, ya que el rango de B es menor que el rango de A. Por lo tanto:

$$\text{nuc}(A) \subseteq \text{Nul}(B).$$

3) **Espacio fila (**$\text{Fil}(A)$ **y** $\text{Fil}(B)$**):** Dado que B se obtiene por una operación elemental sobre las filas de A, el espacio fila de A y B son **iguales**:

$$\text{Fil}(A) = \text{Fil}(B).$$

4) **Espacio nulo a la izquierda (**$\text{nuc}(A^\intercal) = \text{nuc}(B^\intercal)$**):** Como las filas de B son combinaciones lineales de A, el espacio nulo a la izquierda de A y B también son **iguales**:

$$\text{nuc}(A^\intercal) = \text{nuc}(B^\intercal).$$

Bases para los subespacioes fundamentales

Paso 1: Calcular el rango de A y B

La matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El rango de A es 2.

La matriz B es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El rango de B también es 2, ya que la tercera fila es nula.

Paso 2: Bases de los subespacios fundamentales

1) $\mathrm{Col}(A)$ y $\mathrm{Col}(B)$: Las columnas pivote de A (o B) son las columnas 1 y 2. Por tanto, una base es:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Col}(A)} = \mathcal{B}_{\mathrm{Col}(B)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

2) $\mathrm{Fil}(A)$ y $\mathrm{Fil}(B)$: Tomamos las filas no nulas de la matriz escalonada por filas:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}(A)} = \mathcal{B}_{\mathrm{Fil}(B)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3) $\mathrm{nuc}(A)$: Resolviendo $Ax = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \longrightarrow z = \alpha \to y = -\alpha \to x = -3y - 2z = 3\alpha - 2\alpha =$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{nuc}(A) = \mathrm{nuc}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4) $\mathrm{nuc}(A^\intercal)$ y $\mathrm{nuc}(B^\intercal)$: Como las filas de A y B son las mismas, el espacio nulo a la izquierda también es el mismo. Calculando:

$$\mathrm{nuc}(A^\intercal) = \mathrm{Col}(A)^\perp = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{c} (x,y,z) \cdot (1,0,1) = 0 \\ (x,y,z) \cdot (3,1,3) = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} x - z & = 0 \\ 3x + y + 3z & = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow z = \alpha \to x = \alpha \to y = -3x - 3z = -6\alpha$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{nuc}(A^\intercal)} = \mathcal{B}_{\mathrm{nuc}(B^\intercal)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

20) Pon un ejemplo de una matriz cuadradada A en la que $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Fil}(A)$ y otro en el que $\mathrm{Col}(A) \neq \mathrm{Fil}(A)$.

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

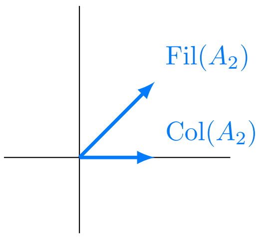
$\mathrm{Fil}(A_1) = \langle (1,0), (0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Col}(A_1) = \langle (1,0), (0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathrm{Fil}(A_2) =< (1,1) >$

$\mathrm{Col}(A_2) =< (1,0) >$



21) Sea A una matriz 10×10 que cumple $A^2 = 0$. Prueba que $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(A)$ y en consecuencia, el rango de A es menor o igual que 5.

Sea $v \in \mathrm{Col}(A) \longrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^{10} : Ax = v$

Por tanto:

$$\underbrace{A(Ax)}_{A^2x=0} = Av,$$

es decir, v es solución de $Av = 0 \longrightarrow v \in \mathrm{Nuc}(A)$.

Por el **teorema de la dimensión**, tenemos:

$$\dim\mathrm{Col}(A) + \dim\mathrm{Nuc}(A) = 10.$$

Llamemos:

$$\dim\mathrm{Col}(A) = r \quad \text{(el rango de } A\text{)}.$$

Entonces:

$$\dim\mathrm{Nuc}(A) = 10 - r.$$

Dado que $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(A)$, se cumple:

$$r \leq \dim\mathrm{Nuc}(A).$$

Sustituyendo $\dim\mathrm{Nuc}(A)$, se cumple:

$$r \leq \dim\mathrm{Nuc}(A).$$

Sustituyendo $\dim\mathrm{Nuc}(A) = 10 - r$, obtenemos:

$$r \leq 10 - r \longrightarrow 2r \leq 10 \longrightarrow r \leq 5.$$

Por lo tanto, el rango de A es como máximo 5.

22) Sea A una matriz cuadrada invertible. Calcula una base para cada uno de los subespacios fundamentales de las matrices A y $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$.

Subespacios fundamentales de A

Dado que A es invertible:

1) $\mathrm{Col}(A)$:
   - Como A es invertible, sus columnas forman una base de $\mathbb{R}^n$.
   - Base: Las columnas de A.
2) $\mathrm{Fil}(A)$:
   - Dado que A es invertible, sus filas abarcan también todo $\mathbb{R}^n$.
   - Base: Las filas de A.
3) $\mathrm{nuc}(A)$;
   - Dado que A es invertible, $Ax = 0$ solo tiene la solución trivial $x = 0$.
   - Base: $\varnothing$ (dimensión 0).
4) $\mathrm{nuc}(A^\intercal)$:
   - Dado que A es invertible, $A^\intercal y = 0$ también tiene solo la solución trivial $y = 0$
   - Base: $\varnothing$ (dimensión 0).

Subespacios fundamentales de $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$

La matriz B tiene tamaño $n \times 2n$. Analices sus subespacios fundamentales:

1) $\mathrm{Col}(B)$:

- Las columans de B son combinaciones lineales de las columnas de A. Como A es invertible, sus columnas ya abarcan todo $\mathbb{R}^n$.
- Base: Las columnas de A.

2) Fil(B):

- Las filas de B son las mismas que las filas de A duplicadas, pero no generan un espacio mayor que el de A.
- Base: Las filas de A.

3) Nuc(B):

- Resolviendo $Bx = 0$, donde $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow A(x_1 + x_2) = 0.$$

Como A es invertible, $x_1 + x_2 = 0$, es decir, $x_1 = -x_2$. Esto implica que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Base: $\langle(-1, 1)\rangle$.

4) Nuc$(B^\intercal)$:

- Resolviendo $B^\intercal y = 0$, donde:

$$B^\intercal = \begin{bmatrix} A^\intercal \\ A^\intercal \end{bmatrix}.$$

Esto implica que:

$$\begin{bmatrix} A^\intercal \\ A^\intercal \end{bmatrix} y = 0 \longrightarrow A^\intercal y_1 = 0 \text{ y } A^\intercal y_2 = 0.$$

Como A es invertible, $A^\intercal y = 0$ solo tiene la solución trivial. Por lo tanto, el espacio nulo a la izquierda es trivial.

- Base: $\varnothing$.

23) Sin calcular la matriz A, encuentra bases para sus cuatro subespacios fundamentales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

24) Halla una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por el núcleo de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprueba que el vector $(1, 1, 1-2)$ pertenece a Nuc(A) y calcula sus coordenadas respecto de la base obtenida.

Paso 1: Calcular el núcleo de A

El núcleo de A es el conjunto de vectores $x \in \mathbb{R}^4$ tales que $Ax = 0$. Resolvemos el sistema homogéneo $Ax = 0$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Paso 2: Resolver el sistema

De la segunda ecuación:

$$x_2 = -x_1 - x_4.$$

Sustituyendo x_2 en la primera ecuación:

$$3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \longrightarrow x_3 = -3x_1 - 2x_4.$$

Ahora expresamos x en función de x_1 y x_4:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_4 \\ -3x_1 - 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Paso 3: Base del núcleo de A

Los vectores generadores del núcleo son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una base del núcleo de A es:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}(A)} =< (1, -1, -3, -0), (0, -1, -2, 1) > .$$

Paso 4: Verficiar que $(1, 1, 1, -2) \in \mathrm{Nuc}(A)$

Sea $x = (1, 1, 1, -2)$. Comprobamos si $Ax = 0$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 1 - 4 \\ 1 + 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $x \in \mathrm{Nuc}(A)$.

Paso 5: Coordenadas de $(1, 1, 1, -2)$ respecto de la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}(A)}$

Queremos expresar $(1, 1, 1, -2)$ como combinación lineal de v_1 y v_2:

$$(1, 1, 1, -2) = c_1 v_1 + c_2 v_2,$$

donde:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 - c_2 = 1 \\ -3c_1 - 2c_2 = 1 \\ c_2 = -2 \end{cases}.$$

De la primera y cuarta ecuación:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -2.$$

Verificamos con las demás ecuaciones:

$$-1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = -1 + 2 = 1 \quad \checkmark$$
$$-3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = -3 + 4 = 1 \quad \checkmark$$

Por lo tanto, las coordenadas de $(1, 1, 1, -2)$ respecto de la base son:

$$(1, 1, 1, -2) = 1 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2.$$

25) Dadas las siguientes bases de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 1, 1), v_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = (1, 2, 0, 0), w_2 = (0, 1, 2, -1), w_3 = (0, 1, 1, 1), w_4 = (0, 1, 2, 0)\}$$

encuentra la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ y la del cambio inverso. ¿Qué coordenadas tiene el vector $3v_1 - v_3 + 2v_2$ con respecto a la base $\mathcal{B}_2$? ¿Qué coordenadas tiene el vector $3w_1 - w_3 + 2w_2$ con respecto a la base $\mathcal{B}_1$?

Paso 1: Matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$

Sea $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Para calcularla:

1) Expresamos cada vector $v_i \in \mathcal{B}_1$ como combinación lineal de los vectores $w_j \in \mathcal{B}_2$:

$$v_i = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4,$$

y los coeficientes c_1, c_2, c_3, c_4 forman las columnas de $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$.

2) Esto equivale a resolver el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = v_i, \quad \text{para cada } v_i.$$

Definimos las matrices:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos:

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = W^{-1} V.$$

Paso 2: Matriz de cambio de base inversa

La matriz de cambio de base inversa, $P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}$, es:

$$P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}.$$

Paso 3: Coordenadas del vector $3v_1 - v_3 + 2v_2$ en la base $\mathcal{B}_2$

1) Escribimos el vector en $\mathcal{B}_1$ como:

$$x = 3v_1 - v_3 + 2v_2 = 3\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

2) Multiplicamos $P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$ por x para encontrar las coordenadas en $\mathcal{B}_2$:

$$[x]_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}x.$$

3) Coordenadas del vector $3w_1 - w_3 + 2w_2$ en la base $\mathcal{B}_1$

1) Escribimos el vector en $\mathcal{B}_2$ como:

$$y = 3w_1 - w_3 + 2w_2 = 3\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\\4\\-5\end{bmatrix}.$$

2) Multiplicamos $P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}$ por y para encontrar las coordenadas en $\mathcal{B}_1$:

$$[y]_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}y.$$

Calculamos las matrices $P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$ y $P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}$:

$$P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = W^{-1}\cdot V = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-4 & 2 & -1 & -1\\-4 & 2 & -1 & 0\\6 & -3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-2 & 2 & -2 & -1\\-2 & 2 & -1 & 0\\3 & -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 1 & 2\\0 & -3 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$[x]_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}x = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-2 & 2 & -2 & -1\\-2 & 2 & -1 & 0\\3 & -3 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\\5\\-10\end{bmatrix}$$

$$[y]_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 1 & 2\\0 & -3 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\4\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\8\\6\\-8\end{bmatrix}$$

26) Calcula una base y unas ecuaciones implícitas de $U+V$, donde

$$U = \langle (1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1),(-1,0,1,2,3)\rangle$$
$$V = \left\{ (x,y,z,r,s) : \begin{array}{c} 3x+r=2y \\ 3x+s=2y \end{array} \right\}$$

Paso 1: Determinar una base para U

El subespacio U está generado por los vectores:

$$U = \langle (1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1),(-1,0,1,2,3)\rangle \, .$$

Escribimos estos vectores como filas de una matriz y determinamos las filas linealmente independientes:

$$M_U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3+F_1]{F_2 \to F_2-5F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to -\frac{1}{3}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_3 \to F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{2}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{B}_U = \{(1,2,3,4,5),(0,1,2,3,4)\}$$

Paso 2: Determinar una base para V

El subespacio V etá definido por las ecuaciones:

$$3x+r=2y$$
$$3x+s=2y$$

Resolvemos el sistema para encontrar las relaciones entr las variables:

$$r = 2y-3x, \quad s = 2y-3x.$$

Entonces, V está parametrizado como:

$$(x,y,z,r,s) = (x,y,z,2y-3,2y-3).$$

Podemos expresar los vectores de V en términos de x,y,z:

$$(x,y,z,r,s) = x(1,0,0,-3,-3) + y(0,1,0,2,2) + z(0,0,1,0,0).$$

Por lo tanto, una base de V es:

$$\mathcal{B}_V = \{(1,0,0,-3,-3),(0,1,0,2,2),(0,0,1,0,0)\}.$$

Paso 3: Determinar una base para $U+V$

Los vectores $U+V$ son combinaciones lineales de las bases de U y V. Por lo tanto, los generadores de $U+V$ son las uniones de las bases de U y V:

$$\mathcal{S} = \{(1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1),(-1,0,1,2,3),(1,0,0,-3,-3),(0,0,1,0,0)\}.$$

Escribimos estos vectores como filas de una matriz:

$$M_{U+V}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\\-1&0&1&2&3\\1&0&0&-3&-3\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

Reducimos M_{U+V} por filas para encontrar una base para $U+V$.

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\\-1&0&1&2&3\\1&0&0&-3&-3\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{F_3\to F_3+F_1\\F_4\to F_4-F_1}]{F_2\to F_2-5F_1}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&-6&-12&-18&-24\\0&2&4&6&8\\0&-2&-3&-7&-8\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[F_3\leftrightarrow F_6]{F_2\leftrightarrow F_5}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\\0&-2&-3&-7&-8\\0&-6&-12&-18&-24\\0&2&4&6&8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_5\to F_5+6F_2\\F_6\to F_6-2F_2}]{F_4\to F_4+2F_2}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\\0&0&-3&-3&-4\\0&0&-12&-6&-12\\0&0&4&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{F_5\to F_5+12F_3\\F_6\to F_6-4F_3}]{F_4\to F_4+3F_3}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-3&-4\\0&0&0&-6&-12\\0&0&0&2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_5\leftrightarrow F_6]{F_4\leftrightarrow F_5}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&-3&-4\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[F_6\to -\frac{1}{4}F_6]{F_5\to F_5+3F_4}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_5\to\frac{1}{2}F_5]{F_6\to F_6-\frac{1}{2}F_5}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&0&2&2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_5\\F_4\to F_4-2F_5}]{F_1\to F_1-5F_5}\begin{bmatrix}1&2&3&4&0\\0&1&0&2&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2\to F_2-2F_4]{F1\to F_1-4F_4}\begin{bmatrix}1&2&3&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1\to F_1-3F_3}\begin{bmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1\to F_1-2F_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Paso 4: Determinar las ecuaciones implícitas para $U+V$

Si $\dim(U+V) = k$, el espacio nulo de M_{U+V} tiene dimensión $5-k$. Las ecuaciones implícitas de $U+V$ son las relaciones lineales que definen el espacio nulo de M_{U+V}.

Resultados

1) Base de $U+V$:

   La matriz tiene rango completo ($\dim(U+V) = 5$). Por lo tanto, los vectores generadores $(1,2,3,4,5)$, $(5,4,3,2,1)$, $(-1,0,1,2,3)$, $(1,0,0,-3,-3)$, y $(0,1,0,2,2)$ forman una base para $U+V$.

2) Ecuaciones implícitas de $U+V$:

   Como el espacio tiene dimensión completa ($\dim(U+V) = 5$), no hay restricciones adicionales, y el espacio es $\mathbb{R}^5$. Por lo tanto, no hay ecuaciones implícitas no triviales para $U+V$.