Bibliografía:

- Calculus, M. Spivak. Editorial Reverté.
- Calculus for biology and Medicine. C. Neuhauser.
- University Calculus. Haar, Weir & Thomas. Pearson.

Ejercicios Propuestos

1. *a*) Demuestre por inducción que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ para $n \geq 1$.

   b) Utilice la fórmula del apartado anterior para calcular, utilizando la definición de integral, que
$$\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4}.$$

2. Halle sin realizar ningún cálculo:
$$(a)\ \int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (b)\ \int_{-1}^{1} (x^5+3)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

3. Decida si las siguientes funciones son integrables en $[0,2]$, y calcule la integral cuando sea posible:
$$a) f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \qquad b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$
$$c) f(x) = x + [x], \qquad d) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[\frac{1}{x}]}, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}.$$

   e) f es la función representada en la Figura 1

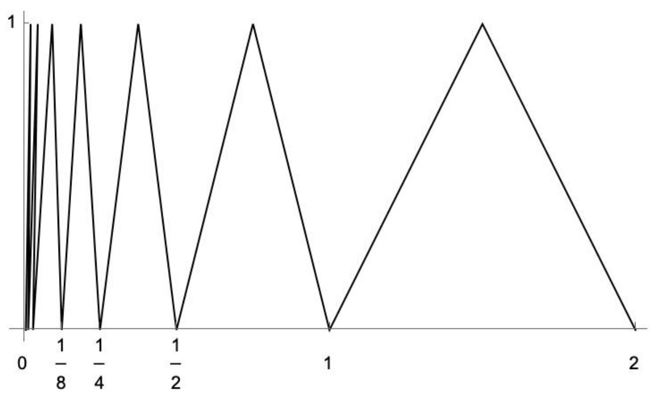

Figura 1: Ejercicio 3 d)

4. Demuestre que
$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t+1}\,dt > 0.$$

5. Demuestre que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)\,dt = c\int_{a}^{b} f(ct)\,dt.$$

6. Sabiendo que $I = \int_{\infty}^{\infty} e^{\cdot -x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, calcule la siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx.$

   Observación: Integra por partes. $u = x$, $dv = xe^{-x^2}\,dx$. La función $f(x) = e^{-x^2}$ es par.

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$

   Observación: Haz el cambio de variable $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$.

   (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

   Observación: Haga el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

7. Se define la función $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$, si $\alpha > 0$.

   a) Justifique la convergencia de la integral cuando $\alpha > 0$.

   b) Demuestre (integrando por partes) que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, para todo $\alpha > 0$. Deduzca, utilizando inducción, que $\Gamma(n+1) = n!$.

   c) Calcule en términos de la función $\Gamma(\alpha)$:

$$(a)\int_0^{\infty} e^{\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad (b)\int_0^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$

8. Halle las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

$$(a)F(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3(t)\,dt, \qquad (b)F(x) = \int_y^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3(t)\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^6(t)+t^2}\,dt.$$

$$(c)F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt,$$

$$(d)\text{ Halle } (F^{-1})'(x) \text{ en términos de } F^{-1}(x) \text{ siendo } F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

9. Halle $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$.

10. Si f es continua en $[0,1]$, calcule $\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$.

11. Utilice el criterio de comparación para determinar si las integrales siguientes convergen:

$$(a)\int_{\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}\,dx. \qquad (b)\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx.$$

12. Sea $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo. Determinar el valor medio de f en el intervalo $[a,b]$.