Álgebra Lineal

Ejercicios Tema 5: Transformaciones lineales

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Comprueba que si $v = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación $T_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_V(x) = x + v$ no es lineal. Este tipo de aplicación se llama una **traslación de vector** v y no se puede representar por medio de una matriz 3×3. Sin embargo, esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la traslación de vector $v = (a_1, a_2, a_3)$ se calcula por medio de la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es decir, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ a_3 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las 4 coordenadas $(x_1, x_2, x_3, 1)$ del vector tridimensional x se llaman coordenadas homogéneas de x.

Verificación de que $T_V(x) = x + v$ no es una transformación lineal:

Una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es lineal si satisface las siguientes dos propiedades para todos $u, w \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $T(u + w) = T(u) + T(w)$ (preserva la suma de vectores).

2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ (preserva la multiplicación por escalar).

En caso de $T_V(x) = x + v$, con $v = (a_1, a_2, a_3)$, veamos si estas propiedades se cumplen:

1) Preservación de la suma:

$$T_V(u + w) = (u + w) + v,$$

pero

$$T_V(u) + T_V(w) = (u + v) + (w + v) = u + w + 2v.$$

Como $T_V(u + w) \neq T_V(u) + T_V(w)$ (debido al término extra v), T_V preserva la suma de vectores.

2) Preservación de la multiplicación por escalar:

$$T_V(\lambda u) = \lambda u + v,$$

pero

$$\lambda T_V(u) = \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

Como $T_V(\lambda u) \neq \lambda T_V(u)$ (debido al término $\lambda v \neq v$), T_V no preserva la multiplicación por escalar.

Por lo tanto, T_V **no es lineal**.

Representación de la traslación mediante una matriz en coordenadas homogéneas

Para resolver la dificultad de que T_V no es lineal, se utiliza un truco geométrico añadiendo una coordenada adicional para representar los punto en $\mathbb{R}^3$ como vectores en $\mathbb{R}^4$. Este sistema se llama **coordenadas homogéneas**.

Dado $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, su representación en coordenadas homogéneas es $(x_1, x_2, x_3, 1)$.

La traslación por un vector $v = (a_1, a_2, a_3)$ se puede representar mediante la matriz T en coordenadas homogéneas:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, aplicando T a un vector homogéneo $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtenemos:

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \\ x_3 + a_3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, la traslación de x se representa linealmente en el espacio de coordenadas homogéneas.

2) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (-2, 3, -2), v_2 = (-4, 5, -3)$ y $v_3 = (5, -6, 4)$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula la matriz en la base $\mathcal{B}$ de la transformación lineal cuya matriz en las bases canónicas es

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación linea T en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, procedemos como sigue:

Paso 1: Transformación de la base $\mathcal{B}$ mediante A

Sabemos que la matriz de la transformación en la base $\mathcal{B}$, que llamaremos $[T]_{\mathcal{B}}$, está relacionada con la matriz en la base canónica A por la fórmula:

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1} A P,$$

donde P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica. Esto significa que las columnas de P son los vectores de la base $\mathcal{B}$ expresados en la base canónica, es decir:

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Paso 2: Calcular P^{-1}

Invertimos la matriz P para obtener P^{-1}.

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} (\operatorname{adj}(P))^{\intercal} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{es invertible}$$

Paso 3: Calcular $[T]_{\mathcal{B}}$

Una vez obtenida P^{-1}, calculamos:

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & - \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Las llamadas **rotaciones de Givens** son las transformaciones lineales que vienen dadas por las matrices

$$R_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}, \quad R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix}, \quad R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $c = \cos\alpha$ y $s = \sin\alpha$ para un cierto ángulo α. ¿Qué interpretación geométrica tienen? Dada la transformación lineal que tiene por matriz en las bases canónicas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcula la matriz en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (0,1,1), \quad u_3 = (1,1,0)$$

A la vista del resultado, ¿cuál es la interpretación geométrica de la transformación lineal dada por la matriz A?

Interpretación geométrica de las rotaciones de Givens

Las matrices $R_X(\alpha), R_Y(\alpha), R_Z(\alpha)$ representan **rotaciones en** R^3 alrededor de los ejes coordenados X, Y, y Z, respectivamente:

1. $R_X(\alpha)$: Rotación en el plano YZ alrededor del eje X por un ángulo α.
2. $R_Y(\alpha)$: Rotación en el plano XZ alrededor del eje Y por un ángulo α.
3. $R_Z(\alpha)$: Rotación en el plano XY alrededor del eje Z por un ángulo α.

Estas matrices preservan las nromas de los vectores (son ortogonales) y no cambian volúmenes, lo que significa que son **transformaciones isométricas** (rotaciones propiamente dichas).

Cálculo de la matriz en la base $\mathcal{B}$

La matriz de la transformación lineal en la base $\mathcal{B}$, denotada como $[T]_{\mathcal{B}}$, se calcula con la fórmula:

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP,$$

donde:

- A es la matriz en la base canónica

- P es la matriz de cambio de base, cuyas columnas son los vectores de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$:

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Procedemos a calcular $[T]_{\mathcal{B}}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}(\operatorname{adj}(P))^{\intercal} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Consideremos un plano $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, es decir, un subespacio vectorial de ecuación $ax + by + cz = 0$. Sea $v = (a, b, c)$ el vector normal al plano y consideremos la matriz

$$H = I - \frac{2uv^{\intercal}}{v^{\intercal}v}$$

Entonces, H es la matriz de la simetría ortogonal respecto del plano y recibe el nombre de **reflexión de Householder**. Para verlo, prueba que si x es un vector arbitrario, entonces $x + Hx$ es ortogonal a v (es decir, $x + HX$ pertenece al plano) y $x - Hx$ es proporcional a v (estas dos cosas prueba que Hx es el simétrico de x respecto del plano dado).

5) Calcula la proyección del vector $(2, 3, 4)$ sobre el subespacio $\operatorname{Col}(A)$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hazlo de tres formas distintas: como en el ejemplo 5.17, como en el ejemplo 5.18 y como en el ejemplo 5.21.

6) ¿Qué combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(1, 0, 1)$ está más "cerca" del vector $(2, 1, 1)$?

7) Encuentra una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de R^3 tal que $\operatorname{Col}(A)$ sea el subespacio generado por u_1, u_2, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de los cuatro subespacios fundamentales de A contiene u_3? Calcula la proyección ortogonal de $b^{\intercal} = (1, 2, 7)$ sobre $\operatorname{Col}(A)$ y explica por qué esta proyección es una solución aproximada del sistema de ecuaciones $Ax = b$.