Problemas de la Unidad 2

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

1. Obtenga la convolución de las señales $x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ y $h(t) = t\prod\left(\frac{t-T}{2T}\right)$

2. Calcule $\left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right) * \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$, con $T_2 > T_1$.

3. Calcule la convolución de $x(t) = e^{2t}u(-t)$ con $h(t) = u(t-3)$.

4. Sea $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ y $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$.
   Calcule y dibuje cada una de las siguientes convoluciones:

   a) $y_1[n] = x[n] * h[n]$
   b) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$
   c) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

5. Un sistema lineal S relaciona su entrada $x[n]$ y su salida $y[n]$ como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

   donde $g[n] = u[n] - u[n-4]$.

   a) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-1]$.
   b) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-2]$.
   c) ¿Es S un sistema LTI?
   d) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$.

6. Determine y esboce la convolución de las siguientes señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

7. Sean

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases} \qquad h(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right), \text{ donde } 0 < \alpha \le 1$$

   a) Determine y esboce $y(t) = x(t) * h(t)$.
   b) Si $\frac{dy(t)}{dt}$ contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de α.

8. Sean

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \qquad\qquad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

a) Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$.
b) Calcule $g(t) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$.
c) Establezca una relación entre $g(t)$ e $y(t)$.

9. Calcule la convolución de los siguientes pares de señales:

a) $x[n] = \alpha^n u[n], \quad h[n] = \beta^n u[n], \quad \alpha \neq \beta$
b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$
c) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4], \quad h[n] = 4^n u[2-n]$
d) $x[n] = 2^n u[-n], \quad h[n] = u[n]$

10. ¿Cuál/es de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas LTI estables?

a) $h(t) = e^{-(1-2j)t}\, u(t)$ b) $h(t) = e^{-t}\cos(2t)\, u(t)$

11. ¿Cuál/es de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas LTI estables?

a) $h[n] = n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]$ b) $h[n] = 3^n u[-n+10]$

12. Para las siguientes respuestas al impulso de sistemas LTI, determine si cada sistema es causal y/o estable, justificando la respuesta.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$
b) $h[n] = 0.8^n u[n+2]$
c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$
d) $h[n] = 5^n u[3-n]$
e) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1.01^n u[n-1]$
f) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1.01^n u[1-n]$
g) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

13. Considere un sistema LTI que se encuentra inicialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

b) Si $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$, calcule $y(t)$.

14. Considere un sistema LTI que se encuentra inicialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

a) Si $x(t) = \cos(2t)\,u(t)$, calcule $y(t)$.
b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

15. Obtenga la respuesta al impulso, así como las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad de los siguientes sistemas:

a) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} 3x(\tau-5)d\tau$
c) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}3x(\tau-2)d\tau$
d) $y(t) = \int_{t}^{\infty} e^{t-\tau}x(\tau+5)d\tau$
e) $y(t) = \int_{t-3}^{t+2} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$

16. Un sistema discreto viene determinado por la relación entrada – salida

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x[n-2].$$

Analice las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad del sistema.

17. Considere la señal $x[n] = \Lambda\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right)$. Obtenga y represente la parte par e impar de esta señal. Calcule la energía y potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

18. Calcule la convolución de las señales

$x_1[n] = (n-6)\prod\left(\frac{n-6}{13}\right)$ $\qquad\qquad$ $x_2[n] = \prod\left(\frac{-n-3}{5}\right)$

<u>Nota</u>: la suma de una progresión aritmética $a_{n_i}, a_{n_i+1}, \dots, a_{n_f}$, con $a_{n_i+1} = a_{n_i} + d$, $a_{n_i+2} = a_{n_i} + 2d, \dots$ es

$$\sum_{k=n_i}^{n_f} a_k = \frac{(n_f-n_i+1)\left(a_{n_i}+a_{n_f}\right)}{2}.$$

19. Se pretende procesar la señal $x(t)$ de la figura con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = t\prod\left(\frac{2t-4}{8}\right) - 2\delta(t+12)$$

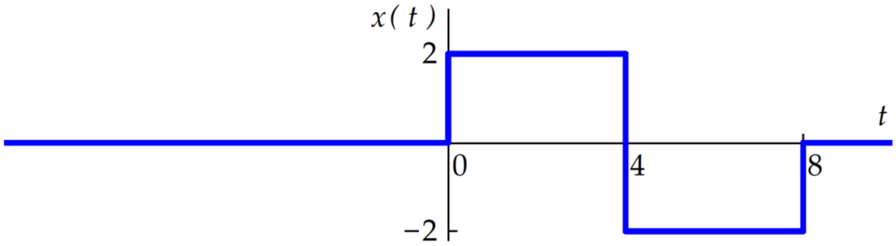

Figura 1

a) Obtenga la salida del sistema $y(t)$.
b) Indique razonadamente si este sistema posee las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad.
c) Calcule la energía total y la potencia media de $x(t)$, e indique si está definida en energía o en potencia.
d) A partir del resultado del apartado a), y utilizando únicamente propiedades de la convolución, obtenga la salida del sistema frente a la entrada

$$z(t) = 8\Lambda\left(\frac{t-4}{4}\right)$$

20. Se pretende procesar la señal $x[n] = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n] = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n+2]$.

a) Represente en detalle $x[n]$ y $h[n]$.
b) Indique razonadamente si este sistema definido por $h[n]$ posee las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad.
c) Calcule la señal de salida del sistema.
d) Calcule la energía total y la potencia media de $x[n]$, e indique si está definida en energía o en potencia.
e) Indique si la señal $z[n] = x[n] + x^*[-n]$ es periódica y, en su caso, obtenga el valor de su periodo.

21. Sean la señal de entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LTI las siguientes:

$$x(t) = \text{sen}(3\pi t) \qquad\qquad h(t) = \prod\left(\frac{t-2}{6}\right)$$

a) Razone si el sistema tiene memoria, si es causal y si es estable.
b) Calcule analíticamente la señal de salida.
c) Calcule la energía total y la potencia media de $x(t)$, e indique si está definida en energía o en potencia.

d) A partir del resultado del apartado b), y aplicando únicamente propiedades de la convolución, obtenga la señal de salida producida por la entrada $z(t) = \cos(3\pi t)$.

22. Sea

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$$

Demuestre que $y(t) = Ae^{-t}$ para $0 \leq t < 3$, y determine el valor de A.

23. Sea un sistema discreto S_1 con respuesta al impulso $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$.

a) Determine el número real A tal que $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$.
b) A partir del resultado del apartado anterior, determine la respuesta al impulso del sistema inverso de S_1.

24. Sea la conexión en cascada de dos sistemas S_1 y S_2 LTI causales tal que:
En S_1 la relación entre entrada $x[n]$ y salida $w[n]$ es $w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n]$.
En S_2 la relación entre entrada $w[n]$ y salida $y[n]$ es $y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n]$.
Si la ecuación en diferencias que relaciona $y[n]$ y $x[n]$ es

$$y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$$

a) Determine α y β.
b) Obtenga la respuesta al impulso de la conexión en cascada de S_1 y S_2.

25. La salida de un sistema viene dada por $y[n] = x[2+n] + x[2-n]$.

a) Indique razonadamente si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y/o linealidad.
b) Considere la señal $x[n] = \wedge\left(\frac{n}{3}\right) + \wedge\left(\frac{n-6}{3}\right)$. Obtenga y represente la parte par e impar de dicha señal. Asimismo, calcule la energía y potencia de la señal $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.
c) Realice la convolución discreta $x_1[n] * x_2[n]$, siendo

$$x_1[n] = \prod\left(\frac{n-6}{13}\right) + u[n-13]$$
$$x_2[n] = \wedge\left(\frac{n-3}{5}\right).$$

Ver <u>nota</u> del ejercicio 18.

26. Se pretende filtrar la señal $x(t)$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$.

$$x(t) = \left(1 + \Lambda\left(\frac{t-4}{1}\right)\right) \prod\left(\frac{t-1{,}5}{5}\right)$$
$$h(t) = \frac{9}{2}\Lambda\left(\frac{t-4}{3}\right) u(t-5) + 2\delta(t)$$

a) Represente detalladamente las señales $x(t)$ y $h(t)$.
b) Indique razonadamente si el sistema definido por $h(t)$ cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad y/o invarianza.
c) Calcule de forma analítica la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$. (Nota: puede hacer uso de las propiedades de la convolución).
d) Calcule la energía y la potencia de $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

27. Considere un sistema LTI cuya señal de salida $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = \int_{1}^{\infty} 3e^{-(2+j5)\tau} x(t-\tau) d\tau$$

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema LTI.
b) Indique razonadamente si el sistema posee las propiedades de memoria, causalidad y/o estabilidad.
c) Calcule la señal de salida del sistema cuando la señal de entrada es un escalón unitario.
d) Calcule la energía y potencia de la señal $y(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

28. Se pretende filtrar la señal $x[n]$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n]$:

$$x[n] = (u[n+6] - u[n-7] + \delta[-n+7])\, u[-n+10]$$
$$h[n] = 0{,}4^{n-2} u[n-2] u[n]$$

a) Represente detalladamente $x[n]$ y $h[n]$.
b) Indique razonadamente si el sistema definido por $h[n]$ cumple las propiedades de memoria, causalidad y/ estabilidad.
c) Utilizando la definición, calcule la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$.
d) Calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si es una señal definida en energía o en potencia.

29. Considere el siguiente diagrama de bloques de un sistema causal (figura 2).

a) Obtenga la ecuación en diferencias con coeficientes constantes que relaciona la señal de entrada $x[n]$ con la señal de salida $y[n]$.
b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema e indique razonadamente si se trata de un sistema FIR o IIR. Justifique si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad y/o estabilidad.

c) Considere la señal de entrada $x[n] = \prod\left(\frac{n-2}{5}\right) + u[2n - 20]\, u[-n + 14]$. Represente la señal y calcule su energía total y potencia media.

d) Determine la señal de salida del sistema $y[n]$ cuando se introduce la señal $x[n]$ del apartado anterior como señal de entrada.

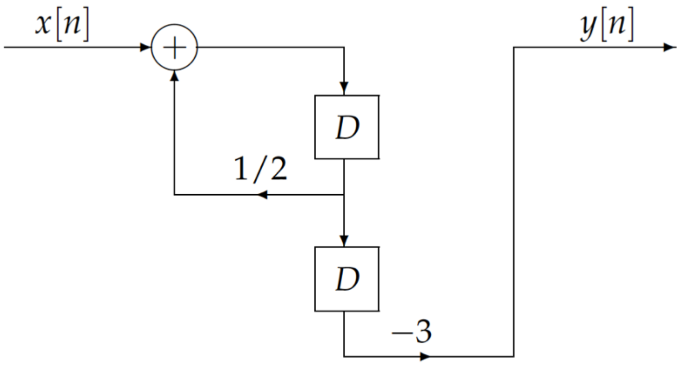

Figura 2

30. Considere el sistema descrito por la siguiente relaci ´on entre la entrada y la salida:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k - 1]$$

a) Indique razonadamente si el anterior sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invertibilidad, linealidad y/o invarianza temporal.

b) ¿Se trata de un sistema LTI? En caso afirmativo, obtenga y represente su respuesta al impulso $h[n]$.

c) Utilizando la definición de convolución, obtenga la salida del sistema del enunciado, $y[n]$, cuando a su entrada se tiene la señal $x[n] = (n + 1)u[n]$.

d) Calcule la energía total y la potencia media de la señal $x[n]$ del apartado anterior, indicando de qué tipo de señal se trata según estos valores.

31. Considere el sistema LTI discreto consistente en la conexión en serie de los subsistemas LTI descritos por

$$h_1[n] = n\delta[n - 1]$$
$$h_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n + 1]$$

Obtenga la salida del sistema $y[n]$ cuando la entrada es

$$x[n] = (-1)^n(u[2 - n] - u[-n - 1])$$

32. Represente el diagrama de bloques en forma canónica del sistema dado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} - 8y(t) = x(t) - \frac{dx(t)}{dt}$$

33. Dibuje el diagrama de bloques de los siguientes sistemas LTI causales descritos mediante sus ecuaciones en diferencias:

    a) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$
    b) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + x[n-1]$

34. Dibuje el diagrama de bloques de los siguientes sistemas LTI causales descritos mediante sus ecuaciones diferenciales:

    a) $y(t) = -\frac{1}{2}\frac{dy(t)}{dt} + 4x(t)$
    b) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$

35. Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante la ecuación en diferencias

$$y[n] = -ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1]$$

36. Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante la ecuación diferencial

$$a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t) + b_1\frac{dx(t)}{dt}$$

37. Demuestre que la ecuación diferencial del ejercicio anterior se puede escribir en forma de ecuación integral como

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau + Bx(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

    expresando las constantes A, B y C en términos de las constantes a_0, a_1, b_0 y b_1.

    Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal expresado según esta ecuación integral.