PROBLEMAS. RELACIÓN 7: Vectores aleatorios, independencia y modelos multivariantes
FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD Y ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS
GRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE DATOS.

1. Determinar el valor de c de tal manera que las siguientes funciones representen funciones puntuales de probabilidad conjunta de X e Y.

$$a)p(x,y) = c \cdot x \cdot y \text{ para } x = 1,2,3 \text{ e } y = 1,2,3$$
$$b)p(x,y) = c \mid x - y \mid \text{ para } x = -2,0,2 \text{ e } y = -2,3$$

2. Dos variables aleatorias tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y^2) \text{ , } 0 \leq x \leq 2 \text{ ;} 1 \leq y \leq 4 \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcular el valor de la constante k, su distribución, las densidades marginales y $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$, $P(1 < X < 2)$.

3. En una red de supermercados, en un mes dado, se recogen los datos siguientes : para cada supermercado, la proporción de clientes que compra sólo una vez en el mes, y por otra parte, el beneficio del supermercado al cabo del mes. Podemos así definir dos variables aleatorias , X : proporción de clientes que compra sólo una vez en el mes; Y : beneficio del supermercado (en millones de euros), y obtenemos la siguiente función de densidad conjunta para (X,Y) :

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y)e^{-y} \text{ , si } 0 < x < 1 \text{ ; } y > 0 \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

   a) Describir el experimento aleatorio junto con el espacio muestral.
   b) Determinar el valor de k para que $f_{(X,Y)}$ sea efectivamente una función de densidad conjunta.
   c) ¿Son las v.a X y Y independientes?
   d) En un supermercado dado, se sabe que el porcentaje de clientes que compra sólo una vez en el mes es menor que 25 %, ¿cuál es la probabilidad de que el beneficio supere el millón de euros?

4. El índice anual de subida de precios X, y el índice anual de subida de salarios Y son un par de v.a. que se distribuyen conjuntamente según la función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k \cdot y^2 \cdot x \text{ , si } 0 < x < 7 \text{ ; } 0 < y < 6 \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

   a) Determinar el valor de la constante k para que $f_{(X,Y)}$ sea efectivamente una función de densidad.
   b) Si en un año la subida de los precios ha sido del 5 %, calcular cuál habrá sido la función de densidad del índice de subida de salarios. Comparar el resultado obtenido con el que se obtendría con una subida de precios de 4 %. ¿Se puede afirmar que la subida de salarios está influida o condicionada por la subida de precios?

5. Probar que no pueden existir dos variables aleatorias X e Y tales que: $E(X) = 3$, $E(Y) = 2$, $E(X^2) = 10$, $E(Y^2) = 29$ y $E(XY) = 0$.

6. Supongamos que X e Y son dos variables aleatorias con $Var(X) = 9$, $Var(Y) = 4$ y $\rho(X,Y) = -1/6$. Calcular $Var(X+Y)$ y $Var(X-3Y+4)$.

7. Consideremos una variable aleatoria bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k \cdot y \cdot (1 - x^2) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ y si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Determinar el valor de la constante k para que $f_{(X,Y)}(x, y)$ sea una función de densidad.

(b) Calcular la función de densidad marginal de Y. ¿Puede decirse que X y Y son independientes?

(c) Calcular la siguiente probabilidad condicionada $\Pr(0 < X < 1 | Y \geq 0.5)$.

8. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta con función puntual de probabilidad conjunta:

	Y=-1	Y=0	Y=1
X=-1	1/8	1/8	1/8
X=0	1/8	0	1/8
X=1	1/8	1/8	1/8

a) Calcular las f.p.p. marginales de X e Y.

b) Calcular el coeficiente de correlación de Pearson entre X e Y.¿Existe relación lineal entre X e Y? ¿Puede afirmarse que son independientes?

c) Calcular $\Pr(Y > -1 \mid X > -1)$

9. Cierta enfermedad genética se caracteriza por la carencia de una enzima. Algunas personas son portadoras de la enfermedad, lo que significa que pueden transmitirla potencialmente a sus hijos. De acuerdo con las leyes de la herencia genética, un hijo cuyos padres son portadores de dicha enfermedad tiene probabilidad 0.25 de no tener la enfermedad, 0.5 de ser portador y 0.25 de padecer la enfermedad. En una muestra de diez hijos de portadores de dicha enfermedad ¿cuál es la probabilidad de que tres no la tengan, cinco sean portadores y dos la padezcan?

10. De los clientes que compran cierto tipo de ordenadores, el 20 % piden una tarjeta gráfica actualizada, el 30 % piden memoria extra, el 15 % piden tanto tarjeta gráfica actualizada como memoria extra y el resto no pide nada. Se eligen de forma aleatoria 15 clientes. Calcular:

a) Probabilidad de que, entre los 15 clientes seleccionados, 3 pidan tarjeta gráfica, 4 pidan memoria extra, 2 pidan tanto tarjeta gráfica como memoria y el resto no pida nada.

b) Probabilidad de que, entre los 15 clientes seleccionados, 3 pidan tarjeta gráfica.