Problemas de la Unidad 1

Conceptos Básicos de Señales y Sistemas

1. Exprese cada uno de los siguientes números complejos en su parte real e imaginaria $(a + jb)$:

$$\frac{1}{2}e^{j\pi}, \frac{1}{2}e^{-j\pi}, e^{j\frac{\pi}{2}}, e^{-j\frac{\pi}{2}}, e^{j\frac{5\pi}{2}}, \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{j\frac{9\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

2. Exprese cada uno de los siguientes números complejos en su módulo y fase ($|z|e^{j\varphi(z)}$ con $\varphi(z) \in [-\pi, \pi]$):

$$5, -2, -3j, -j\frac{\sqrt{3}}{2}, 1+j, (1-j)^2, j(1-j), \frac{1+j}{1-j}, \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}}$$

3. Calcule los valores de potencia media y de energía de las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$ b) $x(t) = e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}$ c) $x(t) = \cos(t)$
d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ e) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{8}\right)}$ f) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

4. Considere una señal $x[n]$ en la que $x[n] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de n en los que se garantiza que la señal es cero.

a) $x[n-3]$ b) $x[n+4]$ c) $x[-n]$ d) $x[-n+2]$ e) $x[-n-2]$

5. Considere una señal $x(t)$ en la que $x(t) = 0$ para $t < 3$. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de t en los que se garantiza que la señal es cero.
a) $x(1-t)$ b) $x(1-t) + x(2-t)$ c) $x(1-t)x(2-t)$
d) $x(3t)$ e) $x\left(\frac{t}{3}\right)$

6. Determine si cada una de las siguientes señales es periódica:

a) $x(t) = 2e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}u(t)$ b) $x[n] = u[n] + u[-n]$
c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k])$

7. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de la variable independiente en los que se garantice que la parte par de la señal es cero.

a) $x[n] = u[n] - u[n-4]$ b) $x(t) = \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$

c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$ d) $x(t) = e^{-5t}u(t+2)$

8. Exprese la parte real de cada una de las siguientes señales de la forma $Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$, donde A, a, ω y φ son números reales con $A \geq 0$ y $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

a) $x(t) = -2$ b) $x(t) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cos(3t + 2\pi)$
c) $x(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(3t + \pi)$ d) $x(t) = je^{(-2+j100)t}$

9. Determine si cada una de las siguientes señales es periódica. En caso afirmativo especifique su periodo fundamental.

a) $x(t) = je^{j10t}$ b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$ c) $x[n] = e^{j7\pi n}$
d) $x[n] = 3e^{j3\pi\frac{n+\frac{1}{2}}{5}}$ e) $x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

10. Determine el periodo fundamental de la señal $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \mathrm{sen}(4t - 1)$.

11. Determine el periodo fundamental de la señal $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi n}{7}} - e^{j\frac{2\pi n}{5}}$.

12. Considere la señal en tiempo discreto $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty}\delta[n-1-k]$. Determine los valores de los números enteros M y n_0 que permiten que $x[n]$ pueda expresarse como $x[n] = u[Mn + n_0]$.

13. Considere la señal en tiempo continuo $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$. Calcule la energía de la señal $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

14. La figura 1 muestra la señal continua $x(t)$. Represente cada una de las siguientes señales:

a) $x(t-1)$ b) $x(2-t)$ c) $x(2t+1)$
d) $x\left(4 - \frac{t}{2}\right)$ e) $[x(t) + x(-t)]u(t)$ f) $x(t)\left[\delta\left(t + \frac{3}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{3}{2}\right)\right]$

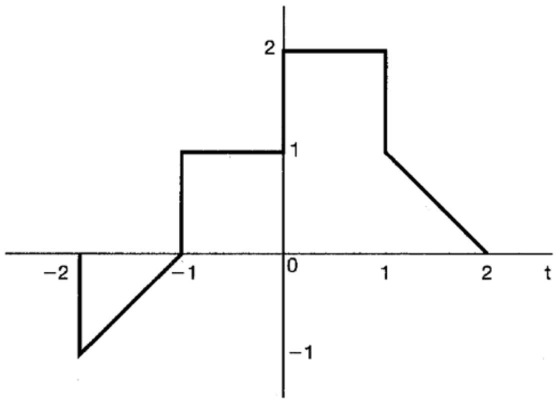


Figura 1

15. La figura 2 muestra la señal discreta $x[n]$. Represente cada una de las siguientes señales:

a) $x[n-4]$ b) $x[3-n]$ c) $x[3n]$
d) $x[3n+1]$ e) $x[n]u[3-n]$ f) $x[n-2]\delta[n-2]$
g) $\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}(-1)^n x[n]$ h) $x[(n-1)^2]$

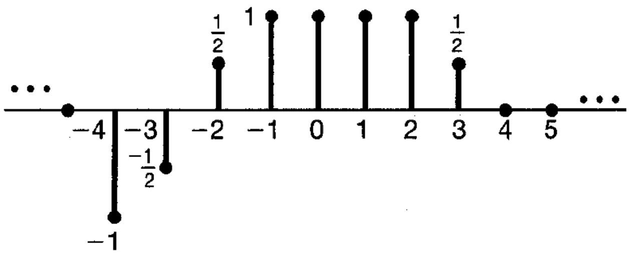


Figura 2

16. Determine si cada una de las siguientes señales continuas es periódica. En caso afirmativo obtenga su periodo fundamental.

a) $x(t)=3\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)$ b) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$
c) $x(t)=\cos^2\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)$ d) $x(t)=\mathrm{Par}\{\cos(4\pi t)\,u(t)\}$
e) $x(t)=\mathrm{Par}\{\mathrm{sen}(4\pi t)\,u(t)\}$ f) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}u(2t-n)$

17. Determine si cada una de las siguientes señales discretas es periódica. En caso afirmativo obtenga su periodo fundamental.

a) $x[n]=\mathrm{sen}\left(\frac{6\pi}{7}n+1\right)$ b) $x[n]=\cos\left(\frac{n}{8}-\pi\right)$
c) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{8}n^2\right)$ d) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$
e) $x[n]=2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{8}n\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right)$

18. Represente el módulo, así como la parte real e imaginaria de la señal

$$x(t)=te^{j3\pi t}\prod\left(\frac{2t-4}{8}\right)-2\delta(2t+3)$$

19. Calcule la energía y la potencia de la señal mostrada en la figura 3. Indique si se encuentra definida en energía o en potencia.

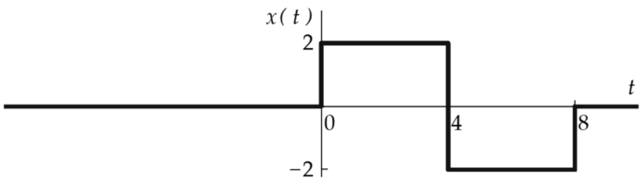


Figura 3

20. Represente detalladamente las señales $x_1(t)$ y $x(t)$, definidas como

$$x_1(t) = 2\prod\left(\frac{t}{4}\right) + (6-2t)\left[\prod\left(\frac{t-2{,}5}{1}\right) - \prod\left(\frac{t-3{,}5}{1}\right)\right]$$
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t-6n)$$

21. Represente detalladamente las señales $x(t)$ y $h(t)$ dadas por

$$x(t) = t\prod\left(\frac{2t}{4}\right) + t[u(t-1) - u(3t-9)]$$
$$h(t) = 2\prod\left(\frac{t-1}{4}\right) + \delta(t+4)$$

22. Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 21, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

23. Represente detalladamente las señales

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{4}n}u[n]$$
$$h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\prod\left(\frac{n-2}{11}\right)$$

24. Calcule la energía y la potencia de la señal $x[n]$ del ejercicio 23, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

25. Indique si la señal $x[n]$ del ejercicio 23 y la señal $z[n] = x[n] + x^*[-n]$ son periódicas y, en su caso, obtenga el valor de los correspondientes periodos.

26. Considere la señal continua no periódica mostrada en la figura 4 y represente sus partes par e impar.

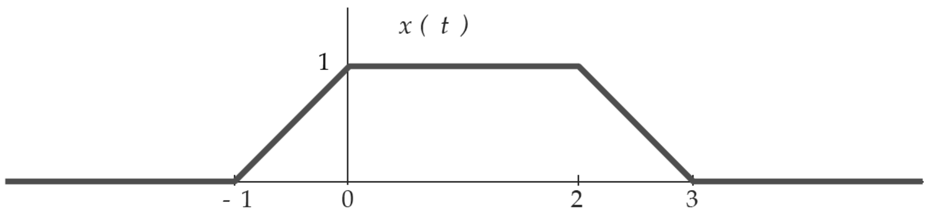


Figura 4

27. Calcule la energía y la potencia de la señal de la figura 4, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

28. Represente detalladamente las siguientes señales:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} (u[n+3] - u[n+4]u[-n-5])$$
$$h[n] = 3^n u[-n-1] + 3^{-n-1} u[n]$$

29. Calcule la energía y la potencia de la señal $x[n]$ del ejercicio 28, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

30. Calcule la energía y la potencia de la señal de la figura 5, indicando si está definida en energía o en potencia.

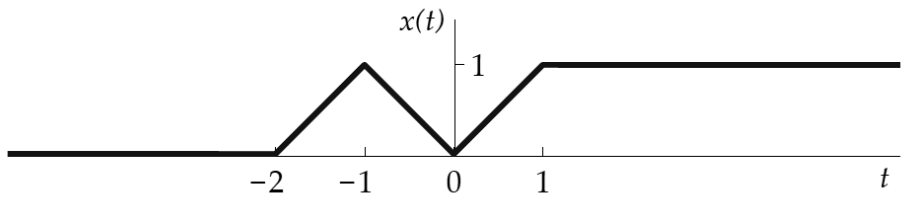


Figura 5

31. Represente detalladamente las señales

$$x(t) = -\left(\frac{t}{2}+1\right)\prod\left(\frac{t}{4}\right)$$
$$h(t) = 1 - u(t-1)u(t-3) - u(1-t)$$

32. Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 31, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

33. Represente detalladamente la señal

$$x(t) = \frac{1 + \mathrm{sign}(\mathrm{sen}(t))}{2}\mathrm{sen}(t)$$

34. Represente detalladamente las señales

$$x(t) = e^{-(3+j3)t}u(t+3)$$
$$h(t) = \prod\left(\frac{t-1{,}5}{5}\right) - 5\delta(t-5)$$

35. Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 34, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

36. Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{b}\right)$$

37. Considere un sistema discreto cuya señal de entrada es $x[n]$ y la señal de salida es $y[n]$. La relación entre la entrada y la salida viene dada por

$$y[n] = x[n]x[n-2]$$

a) ¿Tiene memoria el sistema?
b) Determine la señal de salida del sistema cuando la entrada es $A\delta[n]$, siendo A una constante real o compleja.
c) ¿Es invertible el sistema?

38. Considere un sistema continuo cuya señal de entrada es $x(t)$ y de salida $y(t)$ relacionadas por

$$y(t) = x\big(\mathrm{sen}(t)\big)$$

a) ¿Es causal el sistema?
b) ¿Es lineal?

39. Para cada una de las siguientes relaciones entrada-salida determine si el sistema correspondiente es lineal, invariante en el tiempo o ambos.

a) $y(t) = t^2 x(t-1)$
b) $y[n] = x^2[n-2]$
c) $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$
d) $y(t) = \mathrm{Impar}\{x(t)\}$

40. Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. En caso afirmativo, construya el sistema inverso y, en caso negativo, encuentre dos señales de entrada al sistema que generen la misma señal de salida.

a) $y(t) = x(t-4)$
b) $y(t) = \cos\big(x(t)\big)$
c) $y[n] = nx[n]$
d) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
e) $y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$
f) $y[n] = x[n]x[n-1]$
g) $y[n] = x[1-n]$
h) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)d\tau$
i) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$
j) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
k) $y[n] = \begin{cases} x[n+1], & n \geq 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$
l) $y(t) = x(2t)$
m) $y[n] = x[2n]$
n) $y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

41. En este ejercicio se ilustra una de las consecuencias más importantes de las propiedades de linealidad e invarianza temporal. En concreto, cuando se conoce la respuesta de un sistema lineal o un sistema lineal e invariante en el tiempo (linear time-invariant system, LTI) a una respuesta dada o la respuesta a varias entradas, se puede calcular la respuesta del sistema a otras señales de entrada.

a) Considere un sistema LTI cuya respuesta a la señal $x_1(t)$ de la Figura 6(a) es la señal $y_1(t)$ mostrada en la Figura 6(b). Determine y represente la respuesta del sistema a la entrada $x_2(t)$de la Figura 6(c).

b) Determine y represente la respuesta del sistema considerado en el apartado anterior a la señal de entrada $x_3(t)$ mostrada en la Figura 6(d).

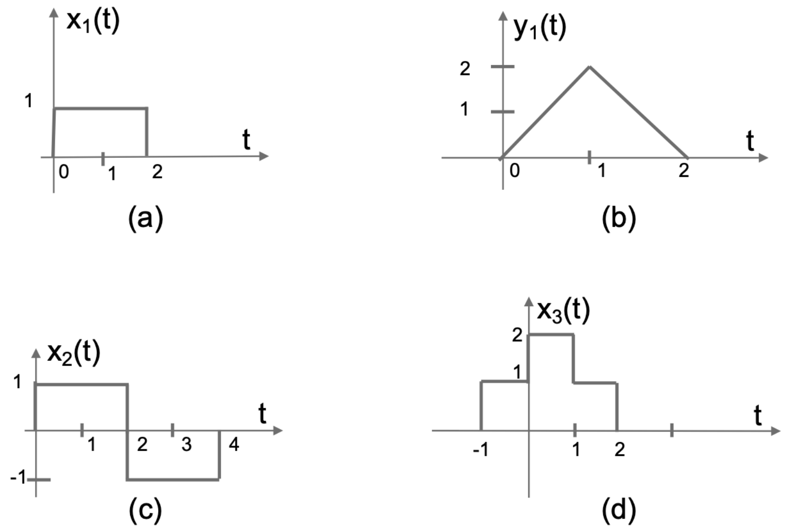


Figura 6

42. La salida de un sistema viene dada por $y[n] = x[2+n]x[2-n]$. Indique razonadamente si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad.

43. Considere la señal $x[n] = \wedge\left(\frac{n}{3}\right) + \wedge\left(\frac{n-3}{3}\right)$. Obtenga y represente la partes par e impar de dicha señal. Asimismo, calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

44. Calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x[n] = (u[n+6] - u[n-7] + \delta[-n+10])u[-n+10]$$

45. Calcule la energía y la potencia de $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x(t) = (t-2)u(t-1)u(4-t)\prod\left(\frac{t}{10}\right)$$

46. Determine si cada uno de los siguientes sistemas verifica las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza y linealidad.

a) $y(t) = e^{x(t)}$ b) $y[n] = x[n]x[n-1]$

c) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

d) $y[n] = x[-n]$

e) $y(t) = \mathrm{sen}(6t)x(t)$

f) $y[n] = \sum_{k=-2}^{n+4} x[k]$

g) $y[n] = nx[n]$

h) $y[n] = x[2n]$

1) Exprese cada uno de los siguientes números complejos en su parte real e imaginaria ($a + jb$):

$$\frac{1}{2}e^{j\pi}, \frac{1}{2}e^{-j\pi}, e^{j\frac{\pi}{2}}, e^{j-\frac{\pi}{2}}, e^{j\frac{5\pi}{2}}, \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{j\frac{9\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

- $\frac{1}{2}e^{j\pi} = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\pi) + j \cdot \sin(\pi)) = -\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}e^{-j\pi} = \frac{1}{2} \cdot (\cos(-\pi) + j \cdot \sin(-\pi)) = -\frac{1}{2}$
- $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$
- $e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j$
- $e^{j\frac{5\pi}{2}} = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = j$
- $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + j$
- $\sqrt{2}e^{j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = 1 + j$
- $\sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right) = 1 - j$
- $\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - j$

2) Exprese cada uno de los siguientes números complejos en su módulo y fase $\left(|z|e^{j\varphi(z)} \text{ con } \varphi(z) \in [-\pi, \pi]\right)$:

$$5, -2, -3j, -j\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + j, (1 - j)^2, j(1 - j), \frac{1 + j}{1 - j}, \frac{\sqrt{2} + j\sqrt{2}}{1 + j\sqrt{3}}$$

- $5 = 5$
- -2
$$\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2 \\ \varphi = \arctan(-2) = \pi \end{array}\right\} 2e^{j\pi}$$
- $-3j$
$$\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \\ \varphi = \arctan(-3j) = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} \end{array}\right\} 3e^{j\frac{3\pi}{2}}$$
- $-j\frac{\sqrt{3}}{2}$
$$\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \frac{\sqrt{3}}{2}e^{j\frac{3\pi}{2}}$$
- $1 + j$
$$\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan(1 + j) = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

- $(1-j)^2 = -2j$

$$\left.\begin{aligned} |z| &= \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2 \\ \varphi &= \arctan(-2j) = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} \end{aligned}\right\} 2e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

- $j(1-j) = 1 + j \longrightarrow \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

- $\dfrac{1+j}{1-j} = \dfrac{1+j}{1-j} \cdot \dfrac{1+j}{1+j} = \dfrac{2j}{2} = j$

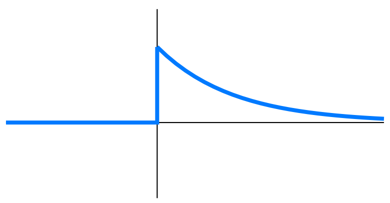
$$\left.\begin{aligned} |z| &= 1 \\ \varphi &= \arctan(j) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

- $\dfrac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1-j\sqrt{3}}{1-j\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+(-\sqrt{6}+\sqrt{2})j}{4} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}j$

$$\left.\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = 1 \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}j\right) = -\frac{1}{12}\pi \equiv \frac{23\pi}{12} \end{aligned}\right\} e^{j\frac{23}{12}\pi}$$

3) Calcule los valores de potencia media y de energía de las siguientes señales

a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$



$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \ \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} |e^{-2t}|^2 \ \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-4t} \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{4}[0-1] = \frac{1}{4}J$$

$$P_m = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \underbrace{\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t}_{E_T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \cdot E_T = \frac{\frac{1}{4}}{+\infty} = 0$$

b) $x(t) = e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)t}$

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)t}\right|^2 \ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} 1^2 \ \mathrm{d}t = [t]_{-\infty}^{+\infty} = \infty + \infty = \infty$$

$$P_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)t}\right|^2 \ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \ \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{T}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{T} = 1W$$

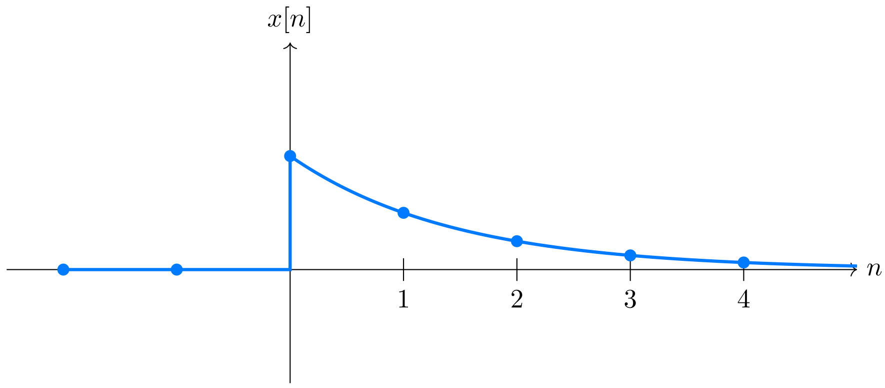
c) $x(t) = \cos(t)$

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(t)|^2 \ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t) = \left\{\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\alpha)\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(1+\cos(2t)) = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right] = \infty$$

$$P_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(t) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2t}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2t}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(T)-\sin(-T)}{2}\right] = \frac{1}{2T}\left[T + \cancelto{0}{\sin(T)}\right] = \frac{1}{2}W$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

d) $x[n] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n]$



$$E_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1 - 0 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} J$$

e) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{8}\right)}$

$$E_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{j(\pi/2n + \pi/8)} \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

$$P_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} 1 = \frac{4}{4} = 1N$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow N = \frac{2\pi}{\omega_0} K = 4K = \{K = 1\} = 4$$

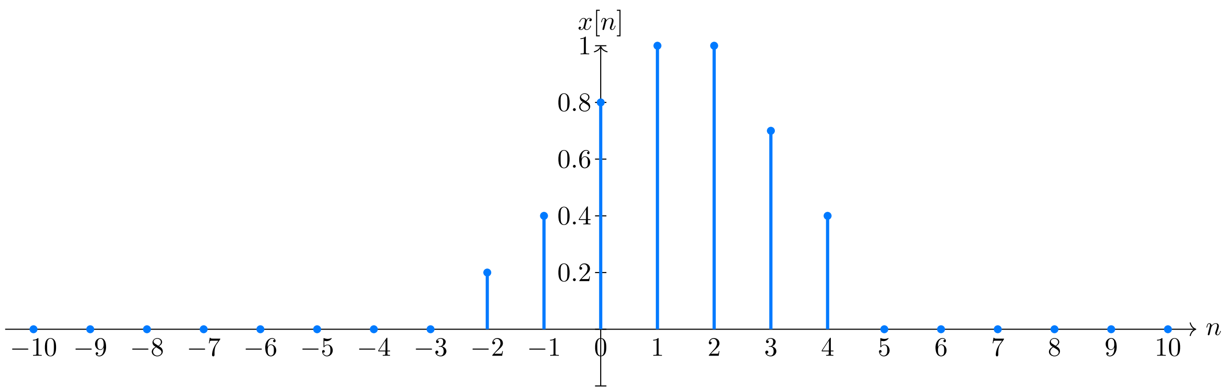
f) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$

$$E_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} n\right) = \infty$$

$$P_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} n\right) = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{7} \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)\right] = \left\{ \begin{array}{ll} n = 0 \to 1 & n = 4 \to 1 \\ n = 1 \to 0 & n = 5 \to 0 \\ n = 2 \to -1 & n = 6 \to -1 \\ n = 3 \to 0 & n = 7 \to 0 \end{array} \right\} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} W$$

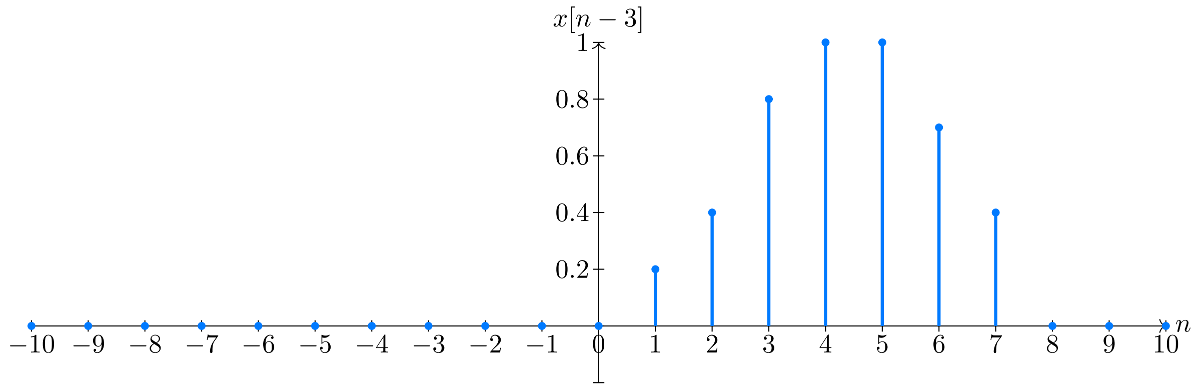
$$\omega_0 = \frac{\pi}{4} \longrightarrow N = \frac{2\pi}{\omega_0} K = 8K = \{K = 1\} = 8$$

4) Considere una señal $x[n]$ en la que $x[n] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de n en los que se garantiza que la señal es cero.



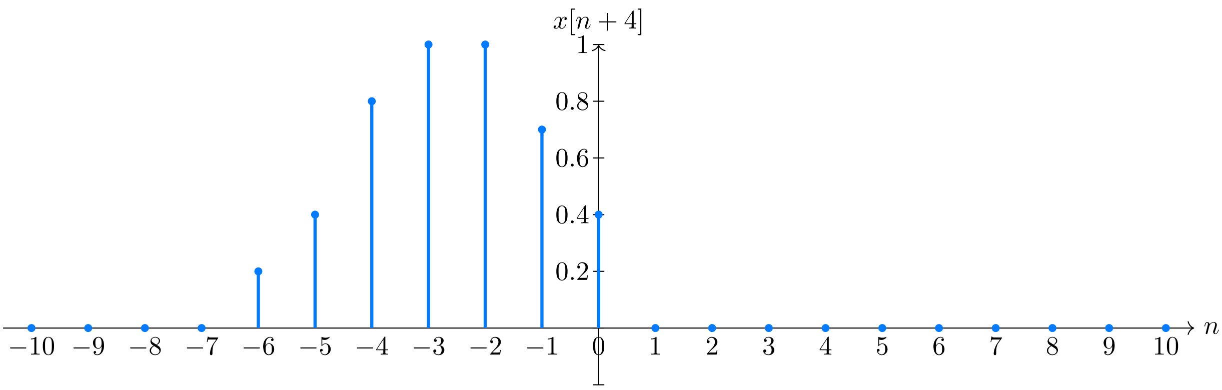
a) $x[n-3]$

Vemos que esta señal se corresponde con un desplazamiento de 3 unidades a la derecha. Por tanto, $x[n-3] = 0$ para $n < 1$ y $n > 7$.



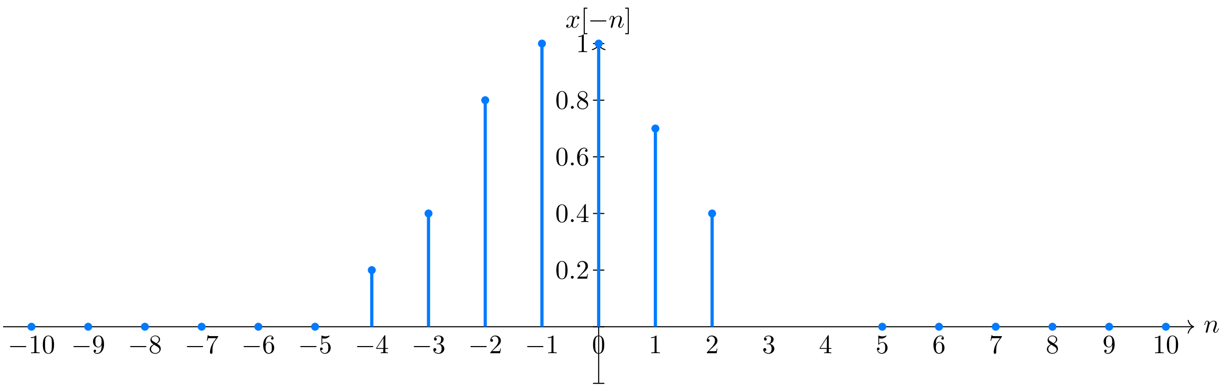
b) $x[n+4]$

Veamos que esta señal se corresponde con un desplazamiento de 4 unidades a la izquierda. Por tanto, $x[n+4] = 0$ para $n < -6$ y $n > 0$



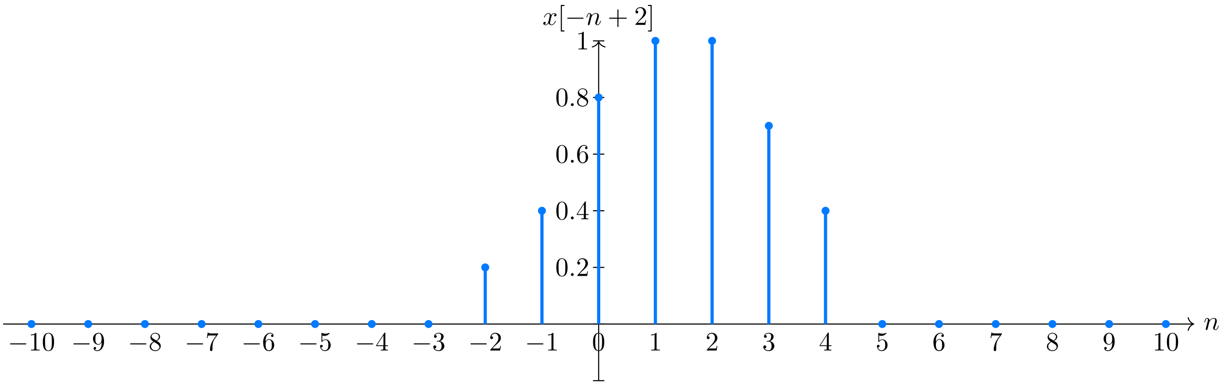
c) $x[-n]$

Vemos que esta señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal con respecto al eje central. Por tanto, $x[-n] = 0$ para $n < -4$ y $n > 2$



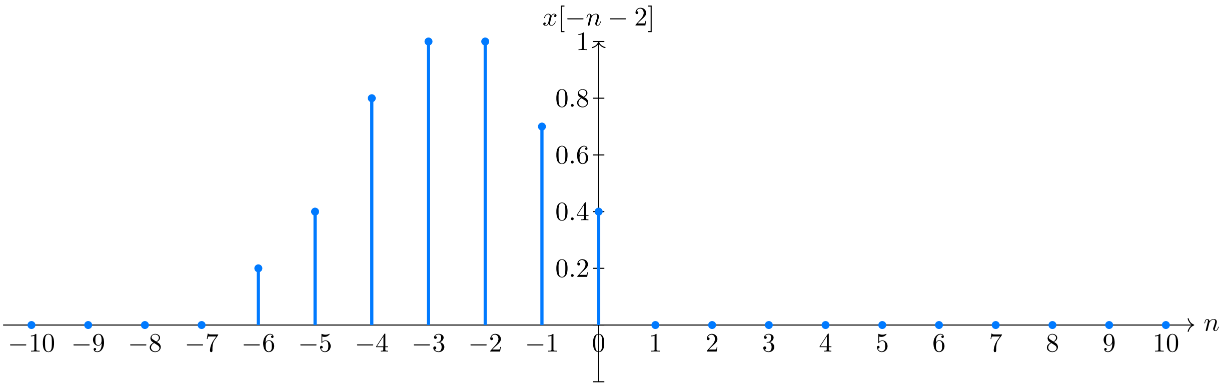
d) $x[-n+2]$

Vemos que esta señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal respecto al eje central y un desplazamiento a la derecha de 2 unidades. Por tanto, $x[-n+2] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$



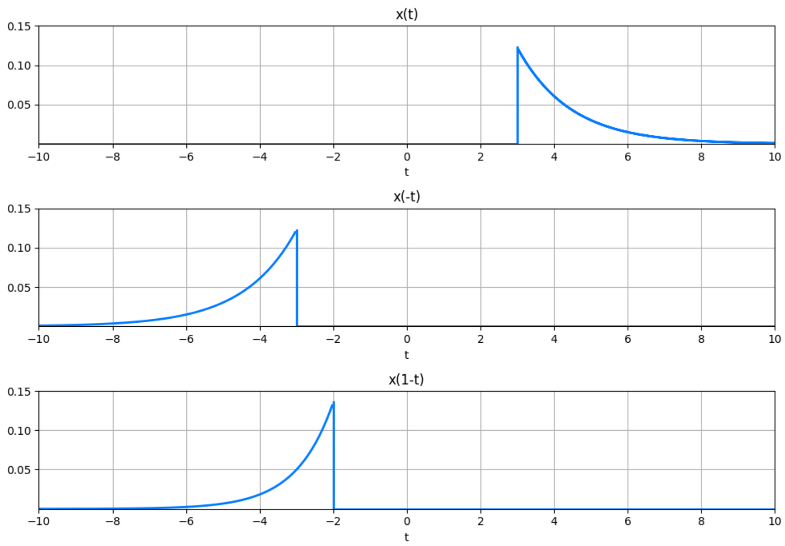
e) $x[-n-2]$

Vemos que esta señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal con respecto al eje central y un desplazamiento a la izquierda de 2 unidades. Por tanto, $x[-n-2] = 0$ para $n < -6$ y $n > 0$.



5) Considere una señal $x(t)$ en la que $x(t) = 0$ para $t < 3$. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de t en los que se garantiza que la señal es cero.

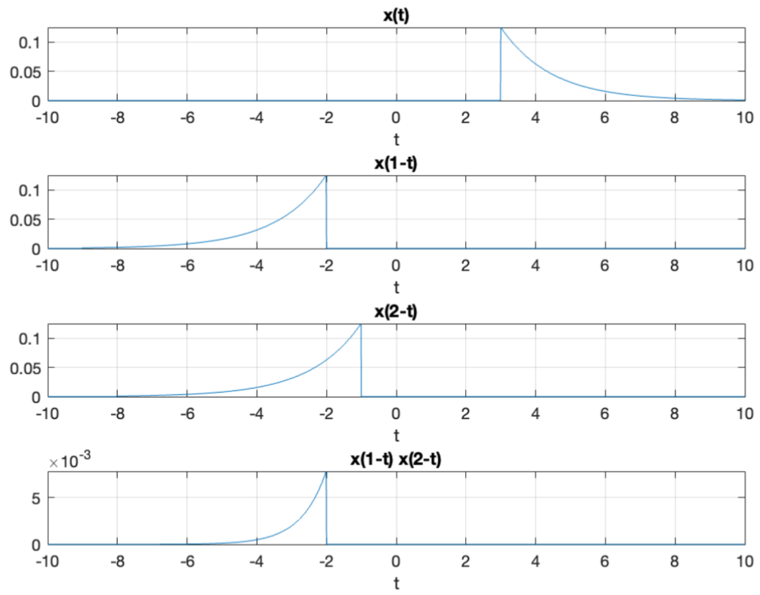
a) $x(1-t)$



Podemos expresar dicha señal de la forma $x(-t+1)$, donde vemos rápidamente que se trata de una inversión y un desplazamiento de un segundo hacia la derecha. Por tanto, tal como se muestra gráficamente en la figura, la señal $x(1-t)$ será cero para $t > -2$.

b) $x(1-t) + x(2-t)$

c) $x(1-t)x(2-t)$



Si la señal $x(1-t)$ es cero para $t > -2$, vemos fácilmente que $x(2-t)$ es cero para $t > -1$. Por tanto, al multiplicarlas, seguirá siendo cero para $t > -2$. En la figura puede verse gráficamente

d) $x(3t)$

e) $x\left(\dfrac{t}{3}\right)$

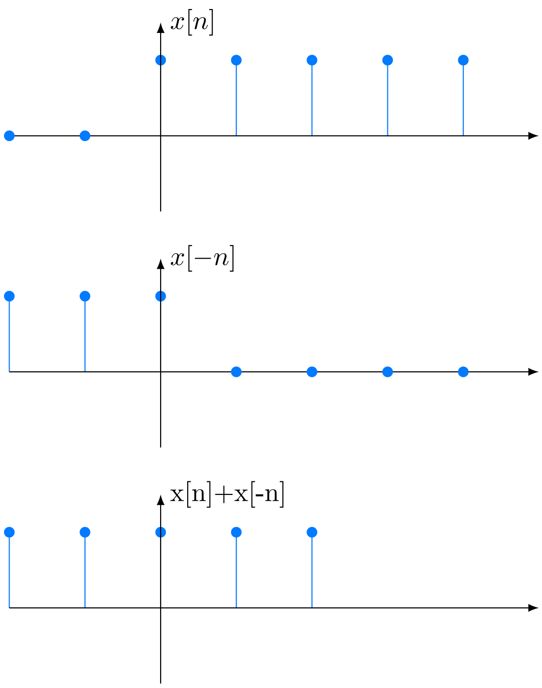
6) Determine si cada una de las siguientes señales es periódica:

a) $x(t) = 2e^{j(t+\frac{pi}{4})}u(t)$

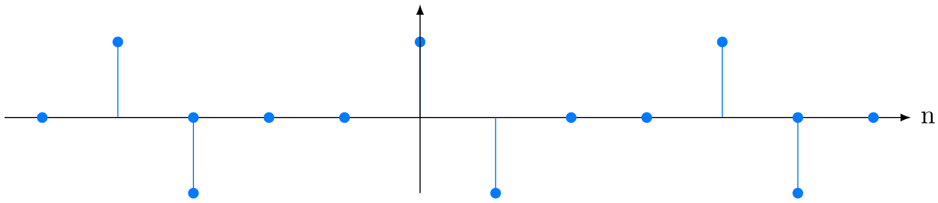
$$x(t) = \underbrace{2e^{j(t+\frac{pi}{4})}}_{\text{per}} \cdot \underbrace{u(t)}_{\text{no per}} \longrightarrow \text{ no periódica}$$

b) $x[n] = u[n] + u[-n]$

$$x[n] = u[n] + u[-n] \longrightarrow \text{no periódica}$$



c) $x[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k])$



7) Para cada una de las señales siguientes determine los valores de la variable independiente en los que se garantice que la parte par de la señal es cero.

a) $x[n] = u[n] - u[n-4]$

b) $x(t) = \sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$

c) $x[n] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n-3]$

d) $x(t) = e^{-5t}u(t+2)$

8) Exprese la parte real de cada una de las siguientes señales de la forma $Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$, donde A, a, ω y φ son números reales con $A \geq 0$ y $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

a) $x(t) = -2$

b) $x(t) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cos(3t + 2\pi)$

c) $x(t) = e^{-t}\sin(3t + \pi)$

d) $x(t) = je^{(-2+j100)t}$

9) Determine si cada una de las siguientes señales es periódica. En caso afirmativo especifiquen su periodo fundamental.

a) $x(t) = je^{j10t}$

$$x(t) = \underbrace{j}_{e^{j\frac{\pi}{2}}} e^{j10t} = e^{j\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)} \longrightarrow \text{periódica}$$

$$\omega_0 = 10 \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{5}$$

b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$

$$x(t) = e^{(-1+j)t} = e^{-t} \cdot e^{jt} \longrightarrow \text{no periódica}$$

c) $x[n] = e^{j7\pi n}$

$$x[n] = e^{j7\pi n} \longrightarrow \text{periódica}$$

$$\omega_0 = 7\pi \longrightarrow N = \frac{2\pi}{\omega_0}K = \frac{2\cancel{\pi}}{7\cancel{\pi}}K = \{K = 7\} = 2$$

d) $x[n] = 3e^{j\frac{3\pi}{5}\left(n + \frac{1}{2}\right)}$

$$x[n] = 3e^{j\frac{3\pi}{5}\left(n + \frac{1}{2}\right)} = 3e^{j\frac{3\pi}{10}} \cdot e^{j\frac{3\pi}{5}n}$$

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{5} \longrightarrow N = \frac{2\pi}{\omega_0}K = \frac{10\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}}K = \{k = 3\} = 10$$

e) $x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}\left(n + \frac{1}{2}\right)}$

$$x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}\left(n + \frac{1}{2}\right)} \longrightarrow \text{no periódica}$$

10) Determine el periodo fundamental de la señal $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$.

$x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$

$$T = k_1 \cdot T_1 = k_2 \cdot T_2$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 10 \longrightarrow T_1 = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5} \\ w_2 = 4 \longrightarrow T_2 = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} k_1 \frac{\cancel{\pi}}{5} = k_2 \frac{\cancel{\pi}}{2}$$

$$2k_1 = 5k_2 \begin{cases} k_1 = 5 \\ k_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{T = 5 \cdot \frac{\pi}{5} = \pi}$$

11) Determine el periodo fundamental de la señal $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi n}{7}} - e^{j\frac{2\pi n}{5}}$.

12) Considere la señal en tiempo discreto $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$. Determine los valores de los números enteros M y n_0 que permite que $x[n]$ pueda expresarse como $x[n] = u[Mn + n_0]$.

13) Considere la señal en tiempo continuo $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$. Calcule la energía de la señal $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$.

14) La figura 1 muestra la señal continua $x(t)$. Represente cada una de las siguientes señales

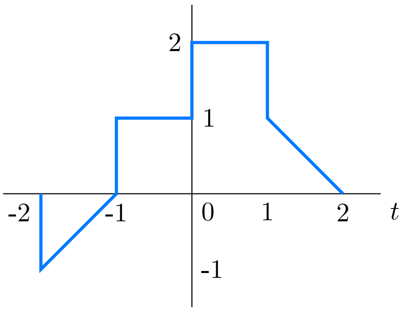
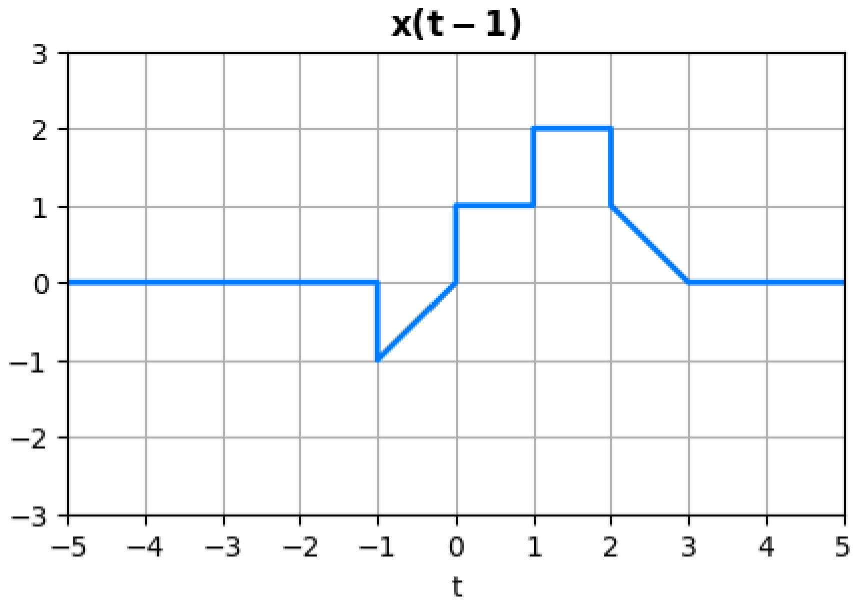


Figura 1

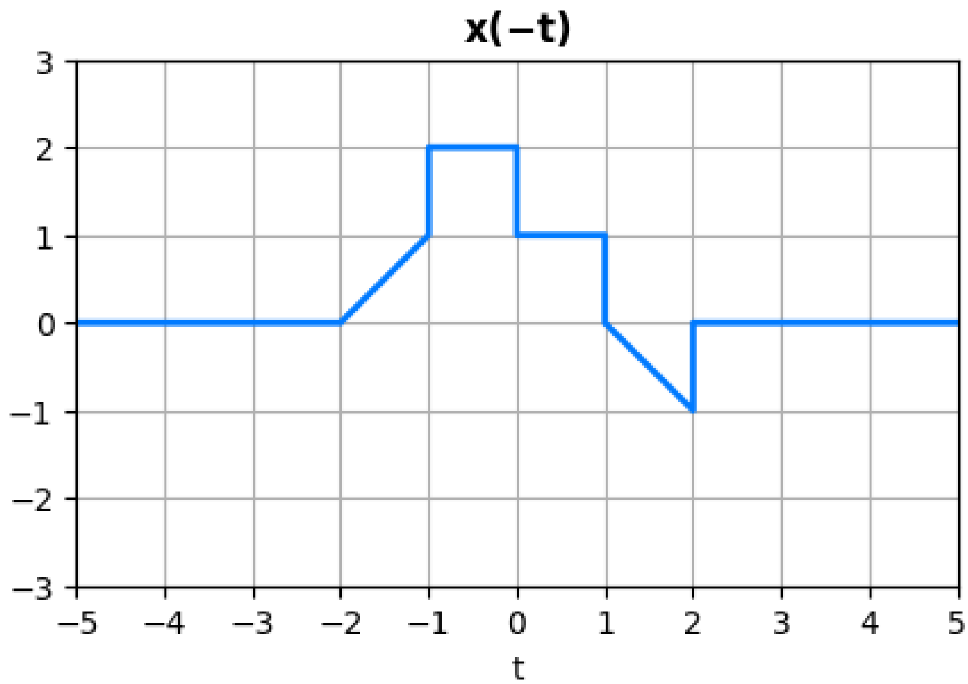
a) $x(t-1)$

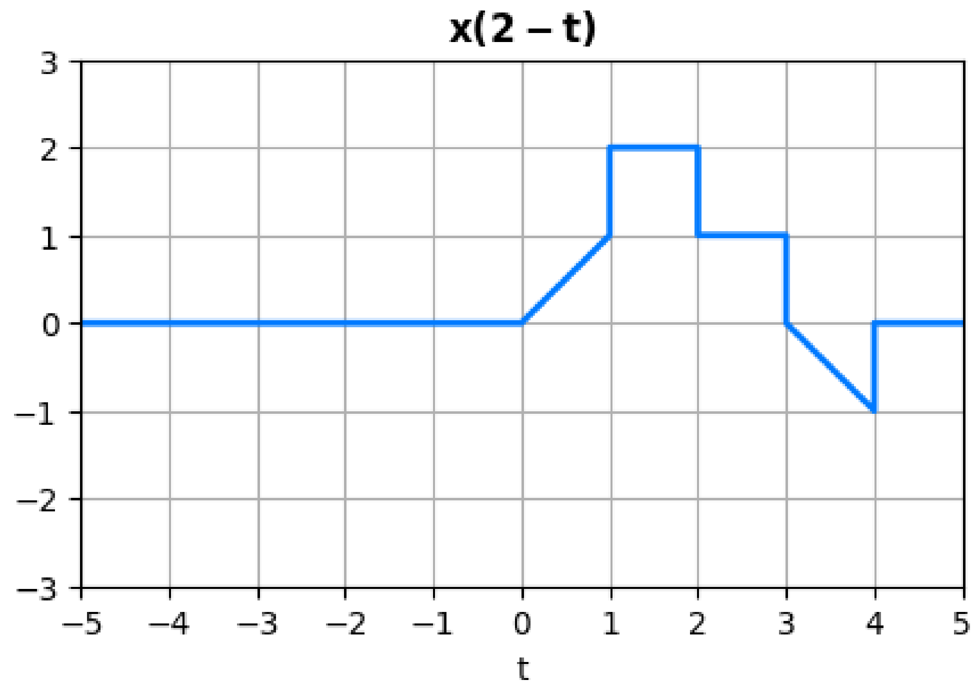
Se trata de un desplazamiento a la derecha de 1 segundo. Es decir, la nueva señal está **retrasada** un tiempo $t = 1$ segundo con respecto a la original, tal como se muestra en la figura.



b) $x(2-t)$

Se trata de aplicar la inversión para obtener $x(-t)$ y a continuación aplicar un desplazamiento a la derecha de $t_0 = 2$ segundos.

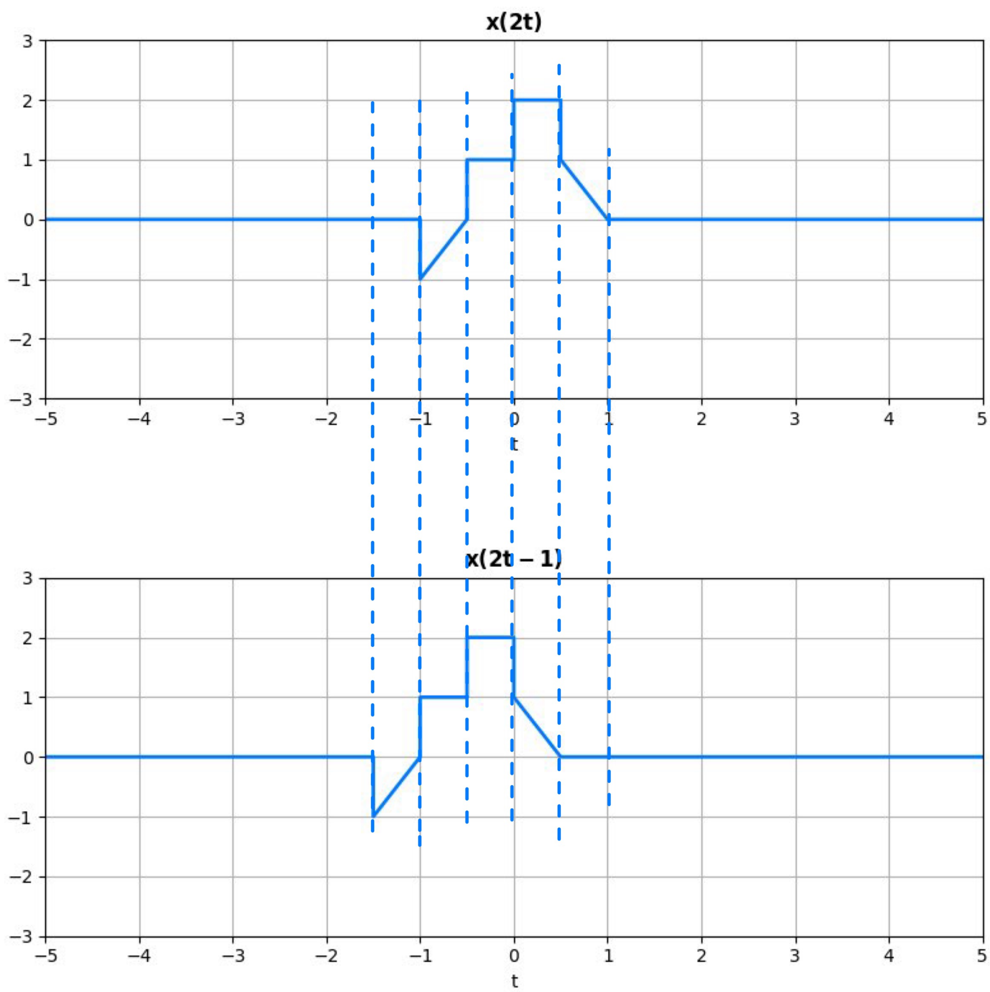




c) $x(2t+1)$

Se trata de aplicar una compresión a la señal $x(t)$ por un factor $a = 2$ y a continuación un desplazamiento a la izquierda de $t_0 = 1$.

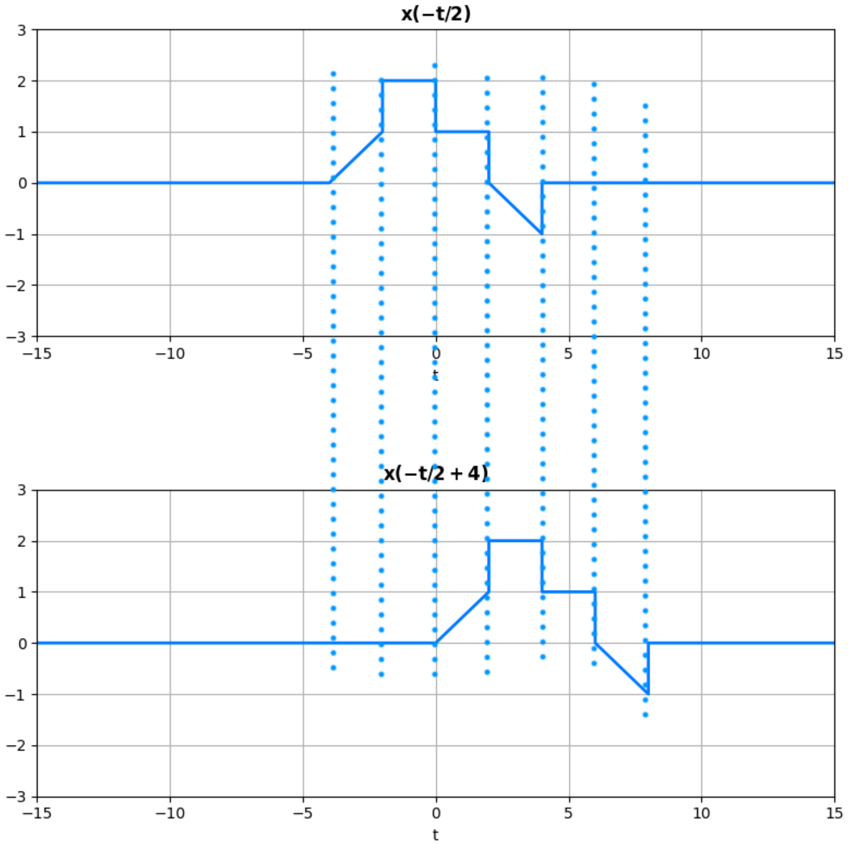
Inicialmente se ha aplicado la compresión y a la señal resultante se le ha aplicado el Desplazamiento de $\frac{t_0}{a} = 0.5$ segundos



d) $x\left(4-\dfrac{t}{2}\right)$

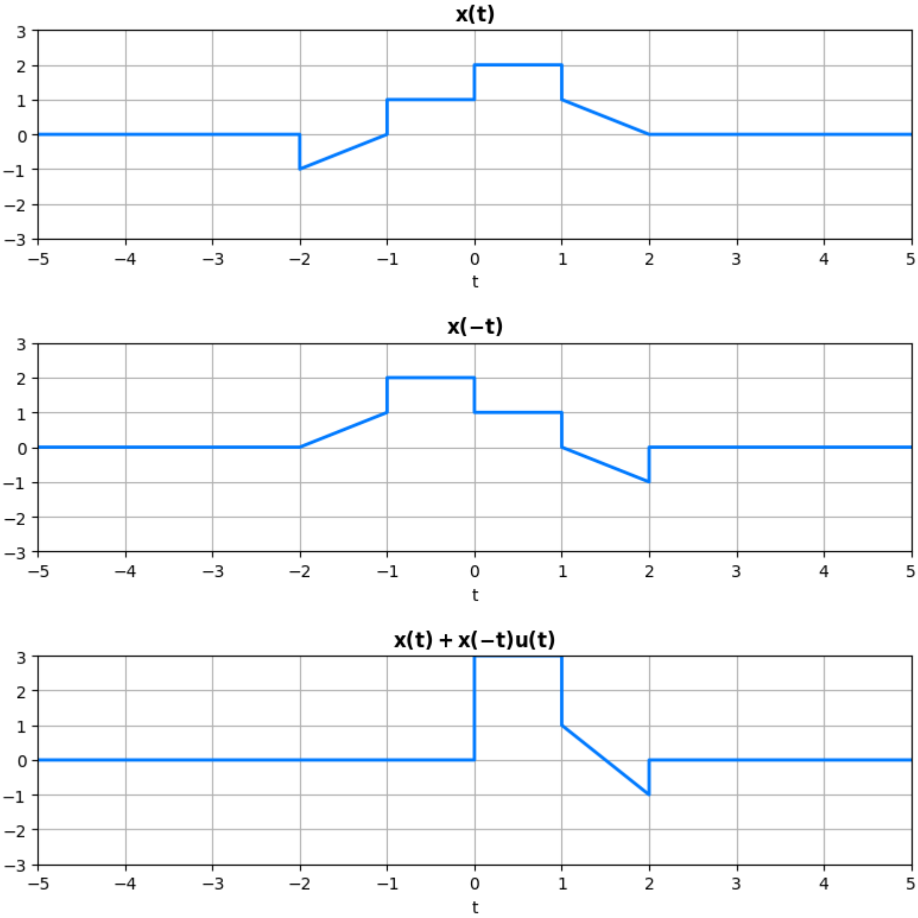
Se trata de aplicar una inversión, una expansión a la señal $x(t)$ por un factor $a=\dfrac{1}{2}$ y a continuación un desplazamiento a la derecha de $t_0=4$.

La figura muestra la opción de aplicar, inversión, expansión y luego a la señal resultante la desplazamos una cantidad $\dfrac{t_0}{a}=\dfrac{4}{0.5}=8$ segundos a la derecha.

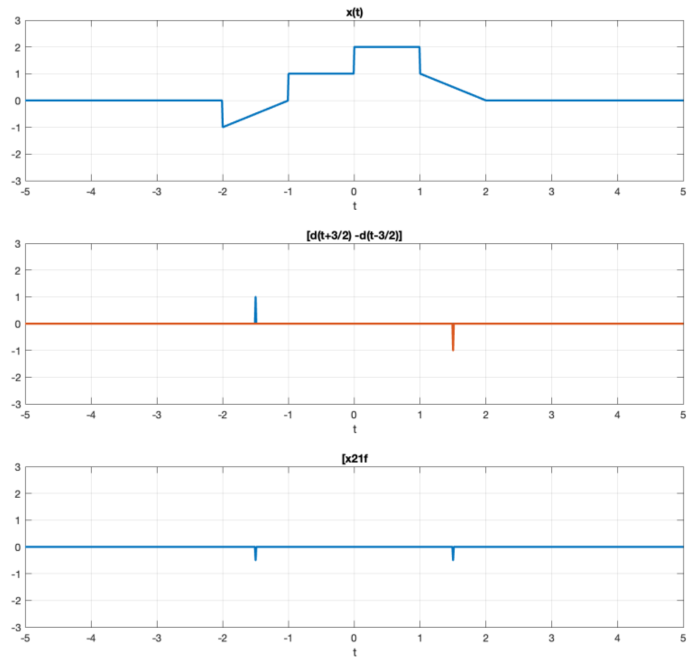


e) $[x(t)+x(-t)]u(t)$

Se trata de sumar la señal $x(t)$ con su invertida y a la resultante se la multiplica por la señal escalón. Esto implica que para $t<0$ será nula.



f) $x(t)\left[\delta\left(t+\frac{3}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]$



Se trata de la suma de la señal original $x(t)$ multiplicando por dos deltas centradas en $t=-1.5$ segundos y $t=1.5$ segundos, tal como se muestra en la figura. La salida son dos deltas ponderadas por el valor de $x(t)$ en $t_0=-1.5$ y $t_1=1.5$

15) La figura 2 muestra la señal discreta $x[n]$. Representa cada una de las siguientes señales:

a) $x[n-4]$

b) $x[3-n]$

c) $x[3n]$

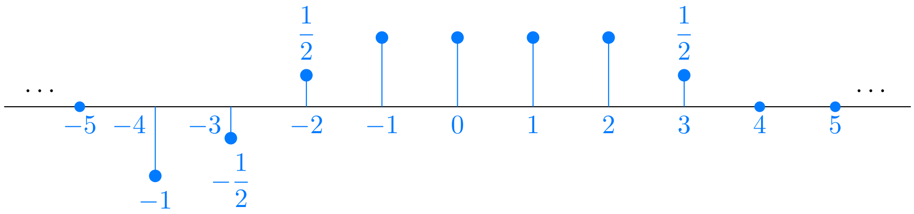
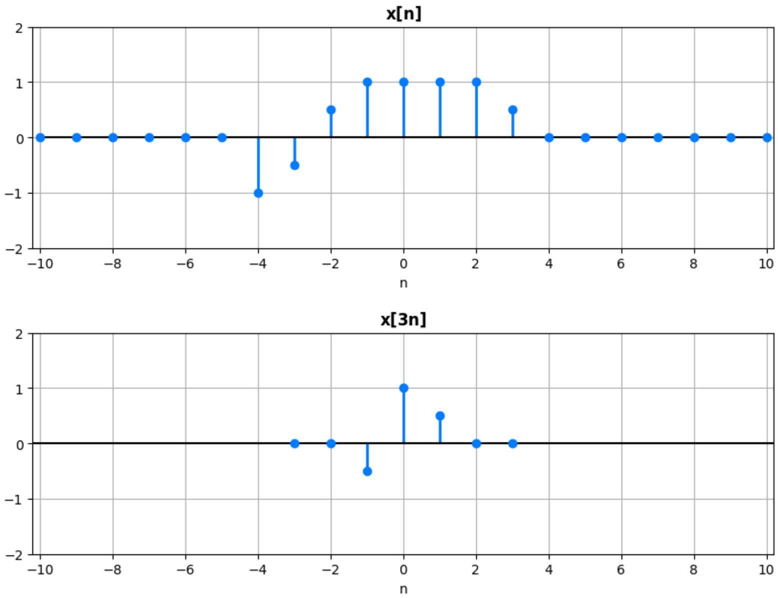
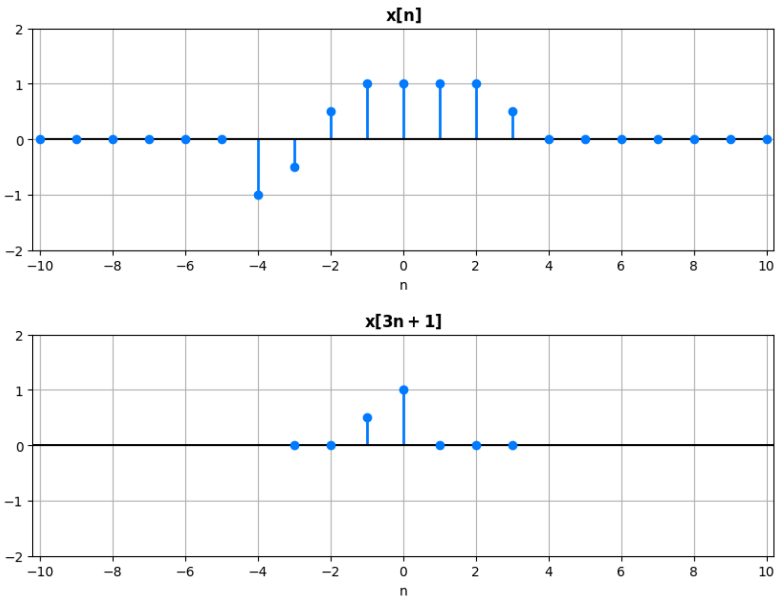


Figura 2



Se trata de una compresión en el tiempo por un factor de $a = 3$. La duración de la señal se reduce un tercio.
Se puede considerar que ahora el periodo de muestreo se baja a un tercio.

d) $x[3n + 1]$



Se trata de una compresión en el tiempo por un factor de $a = 3$ y un desplazamiento. Primero se aplica el desplazamiento y después la compresión.

e) $x[n]\, u[3 - n]$

f) $x[n - 2]\delta[n - 2]$

g) $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$

h) $x[(n - 1)^2]$

16)

17)

18)

19)

20)

21)

22)

23)

24)

25)

26)

27)

28)

29)

30)

31)

32)

33)

34)

35)

36)

37) Considere un sistema discreto cuya señal de entrada es $x[n]$ y la señal de salida es $y[n]$. La relación entre la entrada y la salida viene dada por

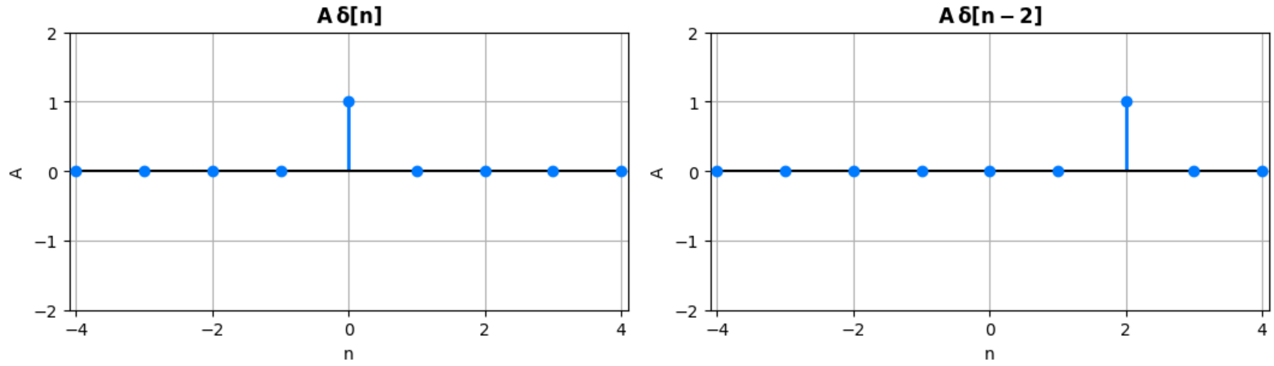
$$y[n] = x[n]\,x[n-2]$$

a) ¿Tiene memoria el sistema?

Tiene memoria porque no solamente depende de n, sino que también depende de otro instante de $[n-2]$

b) Determine la señal de salida del sistema cuando la entrada es $A\delta[n]$, siendo A una constante real o compleja.

$y[n] = A\,\delta[n] \cdot A\,\delta[n-2] = 0$



c) ¿Es invertible el sistema?

$$\begin{cases} \delta[n] \longrightarrow 0 \\ \delta[n-n_0] \longrightarrow 0 \end{cases}$$

38) a) Es causal el sistema

Es no causal por la función $\sin(t)$

Ejemplo

$$\left.\begin{aligned} &y(0) = x(0) \\ &y\left(\frac{\pi}{2}\right) = x(1) \\ &y(\pi) = x(0) \\ &y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = x(-1) \\ &y(-\pi) = x(0) \end{aligned}\right\} \text{no causal, porque hay que hayar valores posteriores}$$

b) ¿Es lineal?

$$\begin{aligned} &x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(\sin(t)) \\ &x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = x_2(\sin(t)) \\ &ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow y_3(t) = \underbrace{ax_1(\sin(t))}_{y_1} + \underbrace{bx_2(\sin(t))}_{y_2} \end{aligned}$$

La misma combinación de entradas produce la misma combinación de salidas.

39) a) $y(t) = t^2 x(t-1)$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = t^2 \cdot x(t-t_0-1) \\ \neq \\ y(t-t_0) = (t-t_0)^2 \cdot x(t-t_0-1) \end{aligned}\right\} \text{No es invariante}$$

$$\begin{aligned} &x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \qquad ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow t^2[ax_1(t-1) + bx_2(t-1)] \\ &x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \qquad = \underbrace{at^2 x_1(t-1)}_{y_1(t)} + \underbrace{bt^2 x_2(t-1)}_{y_2(t)} \longrightarrow \text{Es lineal} \end{aligned}$$

b) $y[n] = x^2[n-2]$

$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow (ax_1[n-1] + x_2[n-1])^2 = a^2x_1^2[n-1] + b^2x^2[n-1] + 2abx_1[n-1]x_2[n-1] \neq ay_1[n]by_2[n] = ax_1^2[-1] + bx_2^2[n-1] \longrightarrow$ no lineal

$$\begin{cases} x_1[n] \longrightarrow y_1[n] \\ x_2[n] \longrightarrow y_2[n] \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] = x[n-n_0] \longrightarrow y_1[n] = \underline{x_1^2[n-1]} = x^2[n-n_0-1] \\ y[n-n_0] = x^2[n-n_0-1] \end{array}\right. \longrightarrow \text{Invariante}$$

Sistema no lineal e invariante.

c) $y[m] = x[n+1] - x[n-1]$

$$ax_1[n]+bx_2[n] \longrightarrow ax_1[n+1]+bx_2[n+1]-ax_1[n-1]-bx_2[n-1] = a\underbrace{[x_1[n+1]-x_1[n-1]]}_{y_1[n]}+b\underbrace{[x_2[n+1]-x_2[n-1]]}_{y2[n]} \longrightarrow$$

Lineal

$$\left.\begin{array}{c} x_1[n] = x[n-n_0] \\ y_1[n] = x[n-n_0+1] - x[n-n_0-1] \\ \| \\ y[n-n_0] = x[n-n_0+1] - x[n-n_0-1] \end{array}\right\} \text{Invariante}$$

d) $y(t) = \text{Impar}\{x(t)\} = \dfrac{x(t)-x(-t)}{2}$

$$ax_1(t)+bx_2(t) \longrightarrow \frac{1}{2}\left[ax_1(t)+bx_2(t)-ax_1(-t)-bx_2(-t)\right] = a\underbrace{\frac{x_1(t)-x_1(-t)}{2}}_{y_1(t)} + b\underbrace{\frac{x_2(t)-x_2(-t)}{2}}_{y_2(t)} \longrightarrow \text{Lineal}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow \dfrac{1}{2}\left[x(t-t_0) - x(-t-t_0)\right] \\ y(t-t_0) = \dfrac{1}{2}[x(t-t_0) - \underbrace{x(-(t-t_0))}_{x(-t+t_0)}] \end{array}\right\} \text{No invariante}$$

40) Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. En caso afiramtivo, construya el sistema inverso y, en caso negativo, encuentre dos señales de entrada al sistema que generen la misma señal de salida.

a) $y(t) = x(t-4) \longrightarrow$ Invertible

$$\underbrace{z(t) = y(t+4)} = x(t-4+4) = x(t)$$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{S} \xrightarrow{y(t)} \boxed{S_{\text{inv}}} \xrightarrow{x(t)}$$

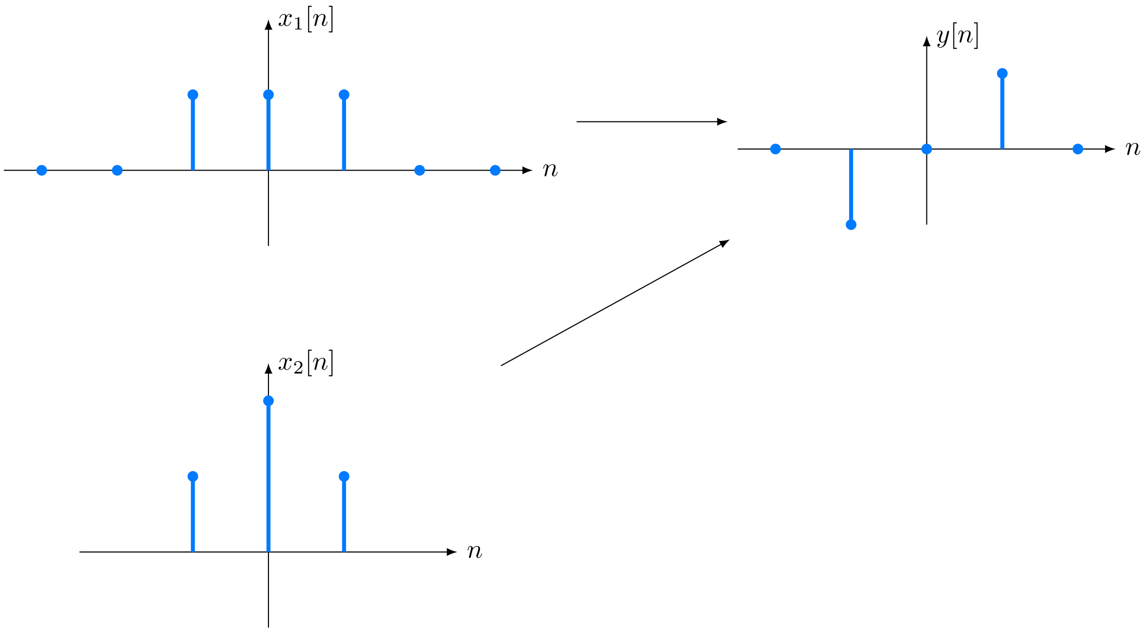
b) $y(t) = \cos(x(t)) \longrightarrow$ No invertible

$$\cos(x(t)) = \cos(x(t) - 2\pi k)$$

c) $y[n] = nx[n]$

$$z[n] = \frac{1}{n}y[n]$$

$$n = 0$$



d) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$

Sistema inverso: $z(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ $\qquad x_1(t)$

41) En este ejercicio se ilustra una de las consecuencias más importantes de las propiedades de linealidad e invarianza temporal. En concreto, cuando se conoce la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo (linear time-invariant system, LTI) a una respuesta dada o la respuesta a varias entradas, se puede calcular la respuesta del sistema a otras señales de entrada.

a) Considere un sistema LTI

Problemas de la Unidad 2

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

1. Obtenga la convolución de las señales $x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ y $h(t) = t\prod\left(\frac{t-T}{2T}\right)$

2. Calcule $\left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right) * \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$, con $T_2 > T_1$.

3. Calcule la convolución de $x(t) = e^{2t}u(-t)$ con $h(t) = u(t-3)$.

4. Sea $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ y $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$.
   Calcule y dibuje cada una de las siguientes convoluciones:

   a) $y_1[n] = x[n] * h[n]$
   b) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$
   c) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

5. Un sistema lineal S relaciona su entrada $x[n]$ y su salida $y[n]$ como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

   donde $g[n] = u[n] - u[n-4]$.

   a) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-1]$.
   b) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-2]$.
   c) ¿Es S un sistema LTI?
   d) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$.

6. Determine y esboce la convolución de las siguientes señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

7. Sean

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases} \qquad h(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right), \text{ donde } 0 < \alpha \le 1$$

   a) Determine y esboce $y(t) = x(t) * h(t)$.
   b) Si $\frac{dy(t)}{dt}$ contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de α.

8. Sean

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \qquad\qquad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

a) Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$.
b) Calcule $g(t) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$.
c) Establezca una relación entre $g(t)$ e $y(t)$.

9. Calcule la convolución de los siguientes pares de señales:

a) $x[n] = \alpha^n u[n], \quad h[n] = \beta^n u[n], \quad \alpha \neq \beta$
b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$
c) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4], \quad h[n] = 4^n u[2-n]$
d) $x[n] = 2^n u[-n], \quad h[n] = u[n]$

10. ¿Cuál/es de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas LTI estables?

a) $h(t) = e^{-(1-2j)t}\,u(t)$ b) $h(t) = e^{-t}\cos(2t)\,u(t)$

11. ¿Cuál/es de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas LTI estables?

a) $h[n] = n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ b) $h[n] = 3^n u[-n+10]$

12. Para las siguientes respuestas al impulso de sistemas LTI, determine si cada sistema es causal y/o estable, justificando la respuesta.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$
b) $h[n] = 0.8^n u[n+2]$
c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$
d) $h[n] = 5^n u[3-n]$
e) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1.01^n u[n-1]$
f) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1.01^n u[1-n]$
g) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

13. Considere un sistema LTI que se encuentra inicialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

b) Si $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$, calcule $y(t)$.

14. Considere un sistema LTI que se encuentra inicialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

a) Si $x(t) = \cos(2t)\,u(t)$, calcule $y(t)$.
b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

15. Obtenga la respuesta al impulso, así como las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad de los siguientes sistemas:

a) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} 3x(\tau - 5)d\tau$
c) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}3x(\tau - 2)d\tau$
d) $y(t) = \int_{t}^{\infty} e^{t-\tau}x(\tau + 5)d\tau$
e) $y(t) = \int_{t-3}^{t+2} e^{-(t-\tau)}x(\tau - 2)d\tau$

16. Un sistema discreto viene determinado por la relación entrada – salida

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)}x[n-2].$$

Analice las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad del sistema.

17. Considere la señal $x[n] = \wedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right)$. Obtenga y represente la parte par e impar de esta señal. Calcule la energía y potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

18. Calcule la convolución de las señales

$$x_1[n] = (n-6)\prod\left(\frac{n-6}{13}\right) \qquad\qquad x_2[n] = \prod\left(\frac{-n-3}{5}\right)$$

Nota: la suma de una progresión aritmética $a_{n_i}, a_{n_i+1}, \dots, a_{n_f}$, con $a_{n_i+1} = a_{n_i} + d$, $a_{n_i+2} = a_{n_i} + 2d, \dots$ es

$$\sum_{k=n_i}^{n_f} a_k = \frac{(n_f - n_i + 1)\left(a_{n_i} + a_{n_f}\right)}{2}.$$

19. Se pretende procesar la señal $x(t)$ de la figura con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = t\prod\left(\frac{2t-4}{8}\right) - 2\delta(t+12)$$

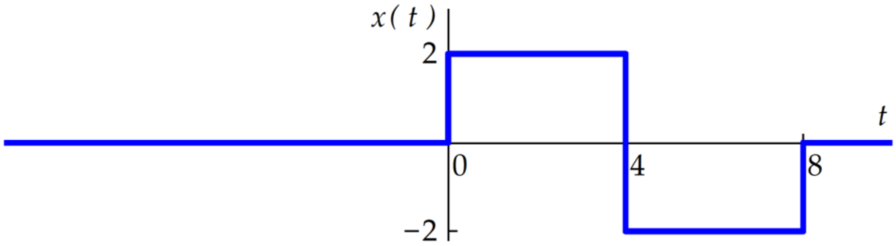


Figura 1

a) Obtenga la salida del sistema $y(t)$.
b) Indique razonadamente si este sistema posee las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad.
c) Calcule la energía total y la potencia media de $x(t)$, e indique si está definida en energía o en potencia.
d) A partir del resultado del apartado a), y utilizando únicamente propiedades de la convolución, obtenga la salida del sistema frente a la entrada

$$z(t) = 8\Lambda\left(\frac{t-4}{4}\right)$$

20. Se pretende procesar la señal $x[n] = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n] = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n+2]$.

a) Represente en detalle $x[n]$ y $h[n]$.
b) Indique razonadamente si este sistema definido por $h[n]$ posee las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad.
c) Calcule la señal de salida del sistema.
d) Calcule la energía total y la potencia media de $x[n]$, e indique si está definida en energía o en potencia.
e) Indique si la señal $z[n] = x[n] + x^*[-n]$ es periódica y, en su caso, obtenga el valor de su periodo.

21. Sean la señal de entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LTI las siguientes:

$$x(t) = \text{sen}(3\pi t) \qquad\qquad h(t) = \prod\left(\frac{t-2}{6}\right)$$

a) Razone si el sistema tiene memoria, si es causal y si es estable.
b) Calcule analíticamente la señal de salida.
c) Calcule la energía total y la potencia media de $x(t)$, e indique si está definida en energía o en potencia.

d) A partir del resultado del apartado b), y aplicando únicamente propiedades de la convolución, obtenga la señal de salida producida por la entrada $z(t) = \cos(3\pi t)$.

22. Sea

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$$

Demuestre que $y(t) = Ae^{-t}$ para $0 \leq t < 3$, y determine el valor de A.

23. Sea un sistema discreto S_1 con respuesta al impulso $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$.

a) Determine el número real A tal que $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$.
b) A partir del resultado del apartado anterior, determine la respuesta al impulso del sistema inverso de S_1.

24. Sea la conexión en cascada de dos sistemas S_1 y S_2 LTI causales tal que:
En S_1 la relación entre entrada $x[n]$ y salida $w[n]$ es $w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n]$.
En S_2 la relación entre entrada $w[n]$ y salida $y[n]$ es $y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n]$.
Si la ecuación en diferencias que relaciona $y[n]$ y $x[n]$ es

$$y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$$

a) Determine α y β.
b) Obtenga la respuesta al impulso de la conexión en cascada de S_1 y S_2.

25. La salida de un sistema viene dada por $y[n] = x[2+n] + x[2-n]$.

a) Indique razonadamente si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y/o linealidad.
b) Considere la señal $x[n] = \Lambda\left(\frac{n}{3}\right) + \Lambda\left(\frac{n-6}{3}\right)$. Obtenga y represente la parte par e impar de dicha señal. Asimismo, calcule la energía y potencia de la señal $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.
c) Realice la convolución discreta $x_1[n] * x_2[n]$, siendo

$$x_1[n]=\prod\left(\frac{n-6}{13}\right) + u[n-13]$$
$$x_2[n]=\Lambda\left(\frac{n-3}{5}\right).$$

Ver <u>nota</u> del ejercicio 18.

26. Se pretende filtrar la señal $x(t)$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$.

$$x(t) = \left(1 + \Lambda\left(\frac{t-4}{1}\right)\right)\prod\left(\frac{t-1{,}5}{5}\right)$$
$$h(t) = \frac{9}{2}\Lambda\left(\frac{t-4}{3}\right)u(t-5) + 2\delta(t)$$

a) Represente detalladamente las señales $x(t)$ y $h(t)$.
b) Indique razonadamente si el sistema definido por $h(t)$ cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad y/o invarianza.
c) Calcule de forma analítica la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$. (Nota: puede hacer uso de las propiedades de la convolución).
d) Calcule la energía y la potencia de $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

27. Considere un sistema LTI cuya señal de salida $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = \int_{1}^{\infty} 3e^{-(2+j5)\tau}x(t-\tau)d\tau$$

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema LTI.
b) Indique razonadamente si el sistema posee las propiedades de memoria, causalidad y/o estabilidad.
c) Calcule la señal de salida del sistema cuando la señal de entrada es un escalón unitario.
d) Calcule la energía y potencia de la señal $y(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

28. Se pretende filtrar la señal $x[n]$ con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n]$:

$$x[n] = (u[n+6] - u[n-7] + \delta[-n+7])\, u[-n+10]$$
$$h[n] = 0{,}4^{n-2}u[n-2]u[n]$$

a) Represente detalladamente $x[n]$ y $h[n]$.
b) Indique razonadamente si el sistema definido por $h[n]$ cumple las propiedades de memoria, causalidad y/ estabilidad.
c) Utilizando la definición, calcule la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$.
d) Calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si es una señal definida en energía o en potencia.

29. Considere el siguiente diagrama de bloques de un sistema causal (figura 2).

a) Obtenga la ecuación en diferencias con coeficientes constantes que relaciona la señal de entrada $x[n]$ con la señal de salida $y[n]$.
b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema e indique razonadamente si se trata de un sistema FIR o IIR. Justifique si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad y/o estabilidad.

c) Considere la señal de entrada $x[n] = \prod\left(\frac{n-2}{5}\right) + u[2n-20]\,u[-n+14]$. Represente la señal y calcule su energía total y potencia media.

d) Determine la señal de salida del sistema $y[n]$ cuando se introduce la señal $x[n]$ del apartado anterior como señal de entrada.

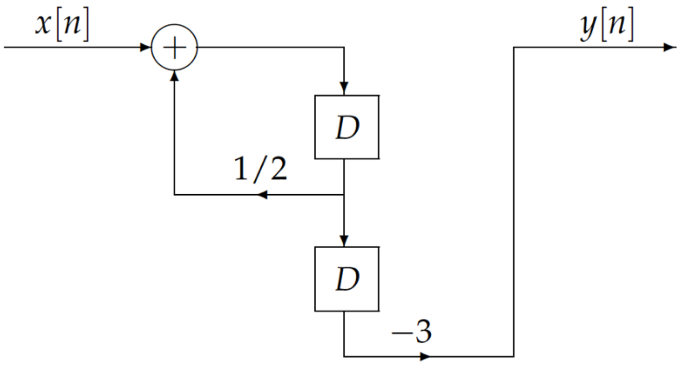


Figura 2

30. Considere el sistema descrito por la siguiente relaci ´on entre la entrada y la salida:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k-1]$$

a) Indique razonadamente si el anterior sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invertibilidad, linealidad y/o invarianza temporal.

b) ¿Se trata de un sistema LTI? En caso afirmativo, obtenga y represente su respuesta al impulso $h[n]$.

c) Utilizando la definición de convolución, obtenga la salida del sistema del enunciado, $y[n]$, cuando a su entrada se tiene la señal $x[n] = (n+1)u[n]$.

d) Calcule la energía total y la potencia media de la señal $x[n]$ del apartado anterior, indicando de qué tipo de señal se trata según estos valores.

31. Considere el sistema LTI discreto consistente en la conexión en serie de los subsistemas LTI descritos por

$$h_1[n] = n\delta[n-1]$$
$$h_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n+1]$$

Obtenga la salida del sistema $y[n]$ cuando la entrada es

$$x[n] = (-1)^n(u[2-n] - u[-n-1])$$

32. Represente el diagrama de bloques en forma canónica del sistema dado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}-8y(t)=x(t)-\frac{dx(t)}{dt}$$

33. Dibuje el diagrama de bloques de los siguientes sistemas LTI causales descritos mediante sus ecuaciones en diferencias:

    a) $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+\frac{1}{2}x[n]$
    b) $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+x[n-1]$

34. Dibuje el diagrama de bloques de los siguientes sistemas LTI causales descritos mediante sus ecuaciones diferenciales:

    a) $y(t)=-\frac{1}{2}\frac{dy(t)}{dt}+4x(t)$
    b) $\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$

35. Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante la ecuación en diferencias

$$y[n]=-ay[n-1]+b_0x[n]+b_1x[n-1]$$

36. Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante la ecuación diferencial

$$a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_0x(t)+b_1\frac{dx(t)}{dt}$$

37. Demuestre que la ecuación diferencial del ejercicio anterior se puede escribir en forma de ecuación integral como

$$y(t)=A\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+Bx(t)+C\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

    expresando las constantes A, B y C en términos de las constantes a_0, a_1, b_0 y b_1.

    Obtenga las formas directas I y II del sistema LTI causal expresado según esta ecuación integral.

1) Obtenga la convolución de las señales $x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$ y $h(t) = t\prod\left(\frac{t-T}{2T}\right)$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \dfrac{t^2}{2} & 0<t<T \\ tT - \dfrac{t^2}{2} & T<2T \\ \dfrac{t^2}{2} + tT + \dfrac{3T^2}{2} & 2T<t<3T \\ 0 & t>3T \end{cases}$$

2) Calcule $\left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right)\cdot\prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$, con $T_2 > T_1$.

$$\underbrace{\left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right)}_{x(t)}\cdot\underbrace{\prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)}_{h(t)}$$

1) $t<0 \longrightarrow y(t) = 0$

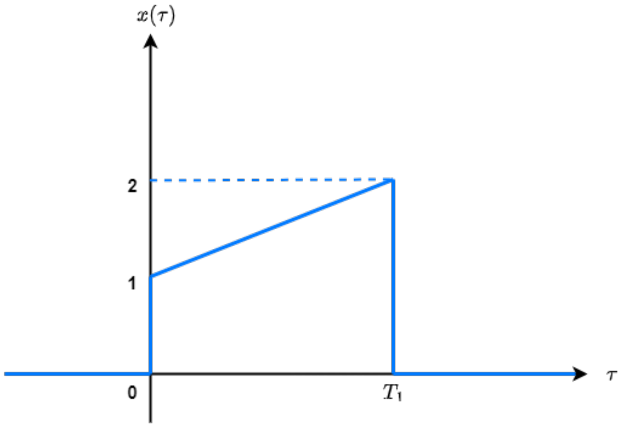
2) $0<t<T_1 \longrightarrow y(t) = \int_0^t \left(\frac{\tau}{T_1}+1\right)\mathrm{d}\tau = \left[\frac{\tau^2}{2T_1}+\tau\right]_0^t = \frac{t^2}{2T_1}+t$

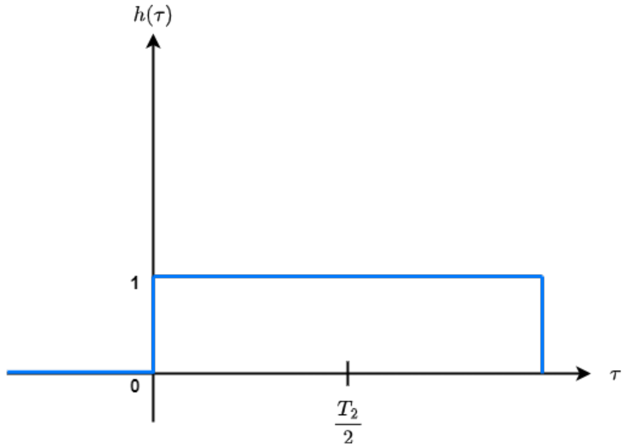
3) $t-T_2<0,\ t>T_1 \longrightarrow T_1<t<T_2 \longrightarrow y(t) = \int_0^{T_1}\left(\frac{\tau}{T_1}+1\right)\mathrm{d}\tau = \left[\frac{\tau^2}{2T_1}+\tau\right]_0^{T_1} = \frac{T_1^2}{2T_1}+T_1 = \frac{3T_1}{2}$

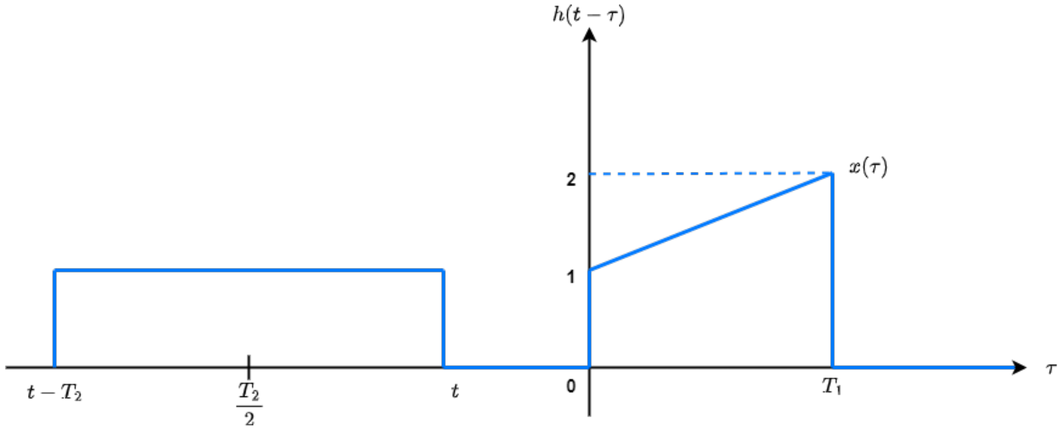
4) $0<t-T_2<T_1 \longrightarrow T_2<t<T_1+T_2$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-T_2}^{T_1}\left(\frac{\tau}{2T_1}+2\right)\mathrm{d}\tau = \left[\frac{\tau^2}{2T_1}+2\right]_{t-T_2}^{T_1} = \left[\frac{T_1^2}{2T_1}+T_1\right] - \left[\frac{(t-T_2)^2}{2T_1}+(t-T_2)\right] \\ &= -\frac{t^2}{2T_1} - \left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)t + \frac{3T_1}{2} + T_2 + \frac{T_2^2}{2T_1} \end{aligned}$$

5) $t-T_2>T_1 \longrightarrow t>T_1+T_2 \longrightarrow y(t) = 0$

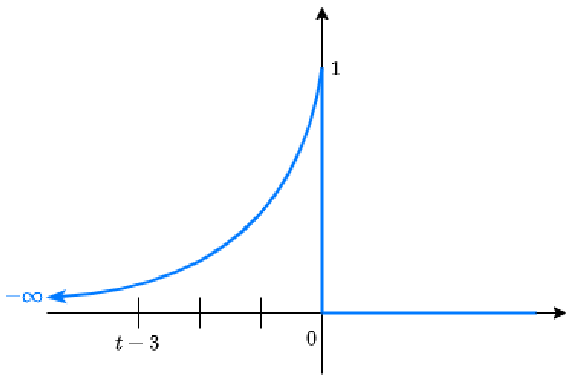


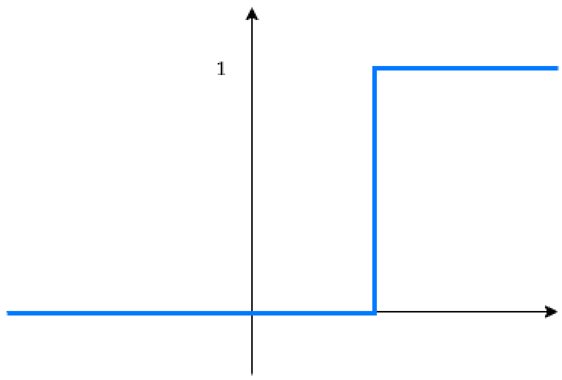




3) Calcule la convolución de $x(t) = e^{2t}u(-t)$ con $h(t) = u(t-3)$.

Integral de convolución: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$





$x(\tau)$ fija y desplazamos e invertimos $h(\tau)$

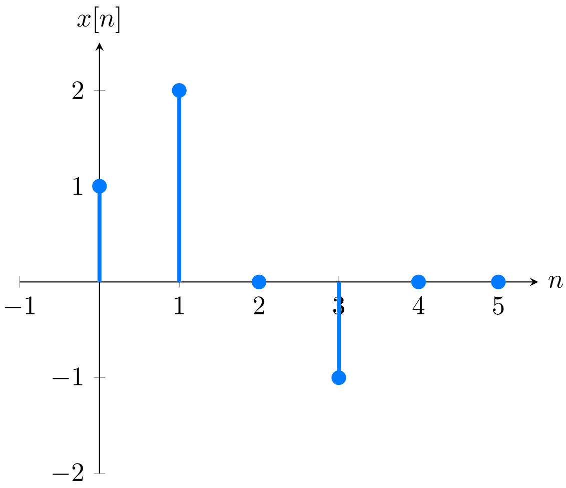
$$\int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{1}{2}e^{2\tau}\right]_{-\infty}^{t-3} = \boxed{\frac{1}{2}\cdot e^{2(t-3)}}$$

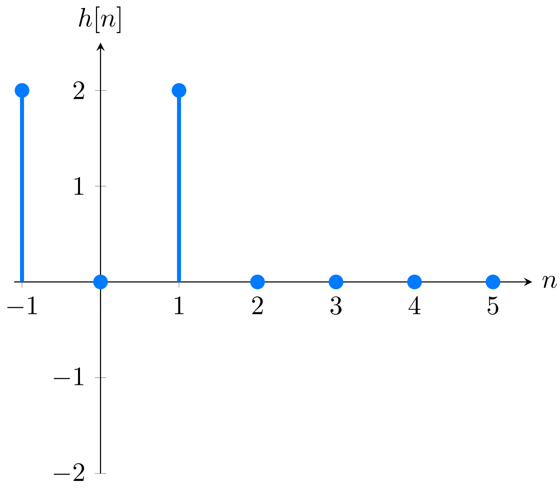
$$\int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{1}{2}e^{2\tau}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4) Sea $x[n] = \delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$ y $h[n] = 2\delta[n+1]+2\delta[n-1]$. Calcule y dibuje cada una de las siguientes convoluciones:

a) $y_1[n] = x[n]\cdot h[n]$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot[n-k]$$





¡! Hay que invertir y desplazar h para empezar a calcular, sino te dejas términos sin mirar.

$$y_1[-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[-1-k] = 1 \cdot 2 = 2$$

$$y_1[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \underbrace{h[0-k]}_{h[-k]} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = 4$$

$$y_1[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[1-k] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 2$$

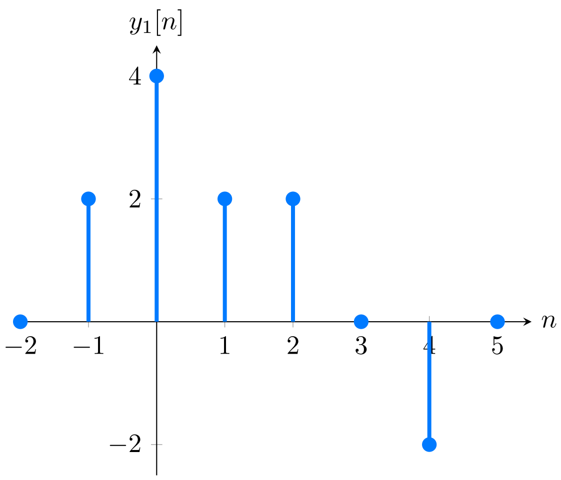
$$y_1[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[2-k] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = 2$$

$$y_1[3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[3-k] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 0$$

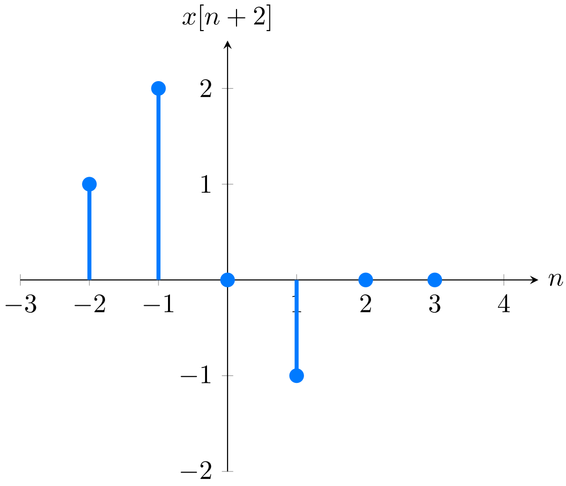
$$y_1[4] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[4-k] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = -2$$

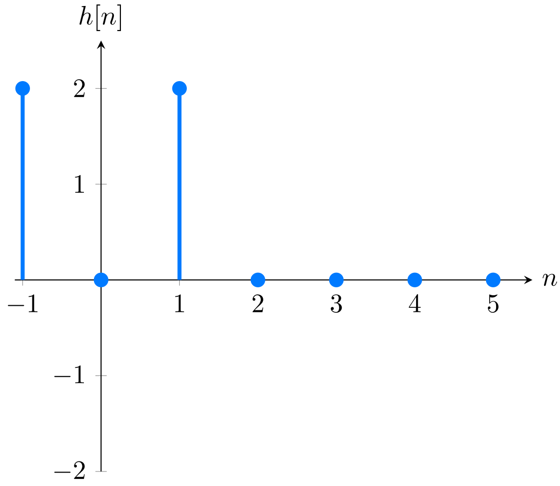
$$y_1[5] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = 0$$

$$y_1[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$$



b) $y_2[n] = x[n+2] \cdot h[n]$





c) $y_3[n] = x[n] \cdot h[n+2]$

5) Un sistema lineal S relaciona su entrada $x[n]$ y su salida $y[n]$ como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

donde $g[n] = u[n] - u[n-4]$.

a) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-1]$

b) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-2]$

c) ¿Es S un sistema LTI?

d) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$

6)

7)

8)

9) Sean

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \qquad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

1) Calcule $y(t) = x(t) \cdot h(t)$

2) Calcule $g(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \cdot h(t)$

3) Establezca una relación entre $g(t)$ e $y(t)$.

10)

11)

12) Para las siguientes respuestas al impulso de sistemas LTI, determine si cada sistema es causal y/o estable, justificando la repuesta.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

Causal: $h[n] = 0 \, \forall n < 0$

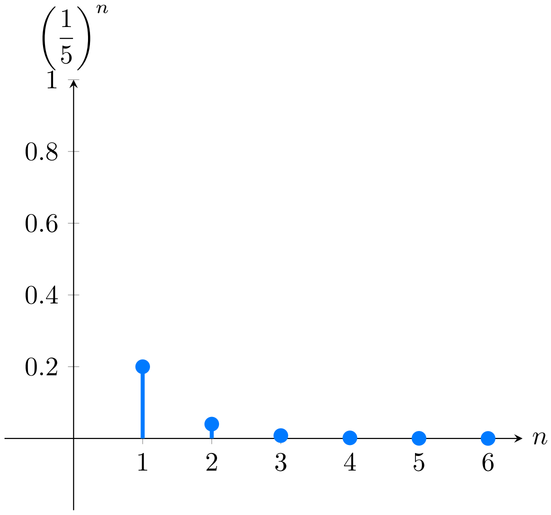
Veamos $n = -1$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \overbrace{u[-1]}^{j\cdot\text{escalón}} = 5 \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{\text{Sistema casual}}$$

Estable: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n} \longrightarrow$ Converge a un valor, por lo tanto es un $\boxed{\text{sistema estable}}$.

Como es un sistema casual y estable $\longrightarrow$ es realizable



b) $h[n] = 0.8^{n} u[n+2]$

$h[n] \neq 0$ para $-1, -2 \longrightarrow$ No es causal

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-2}^{\infty} 0.8^{n} = \frac{0.8^{-2} - \cancelto{0}{0.8^{\infty}}}{1 - 0.8} \simeq 7.8 \longrightarrow \text{Estable}$$

Como es un sistema estable pero no es causal, entonces diremos que no es realizable

c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[-n]$

No es causal

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{0} \cancelto{\infty}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \longrightarrow \text{No es estable}$$

13) Considere un sistema LTI que se encuentra inicialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + 4y(t) = x(t)$$

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

Solución homogénea normal:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} + 4y_h(t) \\ y_h(t) = C_h \cdot e^{st} \end{array}\right\} s \cdot C_h e^{st} + 4C_h e^{st} = 0 \longrightarrow C_h(s+4) = 0 \longrightarrow s = 4$$

$y_h(t) = C_h e^{-4t}$

$h(t) = b_0 \cdot e^{-4t} \cdot u(t)$

$\boxed{h(t) = e^{-4t} \cdot u(t)}$

b) Si $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$, calcule $y(t)$.

Solución particular:

$y_p(t) = A \cdot x(t) = Ae^{(-1+3j)t}\ \forall t > 0$

$$\underbrace{(-1+3j)A} \cdot e^{(-1+3j)t} + \underbrace{4A} \cdot e^{(-1+3j)t} = e^{(-1+3j)t}$$

$$(-1+3j)A + 4A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{3(1+j)} = \frac{1-j}{6}$$

$$y_p(t) = \frac{1-j}{6}e^{(-1+3j)t}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_h e^{-4t} \cdot u(t) + \frac{1-j}{6}e^{(-1+3j)t} \cdot u(t)$$

$$y(0) = 0 \longrightarrow C_h \cdot 1 + \frac{1-j}{6} \cdot 1 = 0 \longrightarrow C_h = \frac{j-1}{6}$$

$$\boxed{y(t) = 1 - j\left[e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}\right] \cdot u(t)}$$

14) Considere un sistema LTI que se encuetra inicialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

a) Si $x(t) = \cos(2t)u(t)$, calcule $y(t)$

Solución partida

$$x_1 = \frac{e^{2tj}}{2} \longrightarrow y_{p_1}(t) = C_{p_1}e^{2tj} \longrightarrow \underbrace{j2C_{p_1}}e^{2tj} + \underbrace{3C_{p_1}}e^{2tj} = e^{2tj} \longrightarrow j2C_{p_1} + 3C_{p_1} = 1 \longrightarrow C_{p_1} = \frac{1}{3+2j}$$

$$x_2 = \frac{e^{-2tj}}{2} \longrightarrow \underbrace{-j2C_{p_2}}e^{-2tj} + \underbrace{3C_{p_2}}e^{-2tj} = e^{-2tj} \longrightarrow -j2C_{p_2} + 3C_{p_2} = 1 \longrightarrow C_{p_2} = \frac{1}{3-2j}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j2t} + e^{-j2t}\right] \longrightarrow y_p = \frac{1}{3+2j}e^{j2t} + \frac{1}{3-2j}e^{-j2t}$$

Solución homogénea:

$$y_h(t) = C_h e^{st} \longrightarrow sC_h e^{st} + 3C_h e^{st} = 0 \longrightarrow s + 3 = 0 \longrightarrow s = -3 \longrightarrow y_h(t) = C_h \cdot e^{-3t} \cdot u(t)$$

$$y(t) = C_h e^{-st} + \frac{1}{3+2j}e^{2tj} + \frac{1}{3-2j}e^{-2tj}$$

$$y(0) = 0 \longrightarrow C_h + \frac{1}{3+2j} + \frac{1}{3-2j} = 0 \longrightarrow C_h = \frac{3 - \cancel{2j} + 3 + \cancel{2j}}{13} = -\frac{6}{13}$$

$$y(t) = -\frac{6}{13}e^{-3t} + \underbrace{\frac{3-2j}{13}e^{2jt}}_{a} + \underbrace{\frac{3+2j}{13}e^{-2jt}}_{a^*}$$

$$a + a^* = 2 \cdot \mathrm{Re}\{a\}$$

$$a = \frac{3-2j}{13}e^{2tj} = \frac{3-2j}{13} \cdot (\cos(2t) + j \cdot \sin(2t))$$

$$= \frac{1}{13}\left[\underbrace{3\cos(2t)} + j \cdot 3\sin(2t) - j \cdot 2\cos(2t) + \underbrace{2\sin(2t)}\right]$$

$$2 \cdot \mathrm{Re}\{a\} = \frac{1}{13}\left[6\cos(2t) + 4\sin(2t)\right]$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{13}\left[-6e^{-3t} + 6\cos(2t) + 4\sin(2t)\right] \cdot u(t)}$$

b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

$$y_h(t) = \frac{-6}{13} e^{-3t} \quad b_0 = 2 \left.\right\} h(t) = b_0 \cdot e^{-3t} \cdot u(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = 2 \cdot e^{-3t} \cdot u(t)}$$

15) Obtenga la respuesta al impulso, así como las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad de los siguientes sitemas:

a) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau$

$x(t) = \delta(t) \longrightarrow y(t) = h(t)$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \left\{ \begin{array}{l} t < 0,\ h(t) = 0 \\ t > 0,\ h(t) = 1 \end{array} \right\} h(t) = u(t)$$

- Memoria:

  $h(t) \neq 0, t \neq 0 \longrightarrow$ con memoria

  $h(t) = 0, t < 0 \longrightarrow$ casual

- Estabilidad

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} 1\, \mathrm{d}t = [t]_0^{\infty} = \infty \longrightarrow \text{no estable}$$

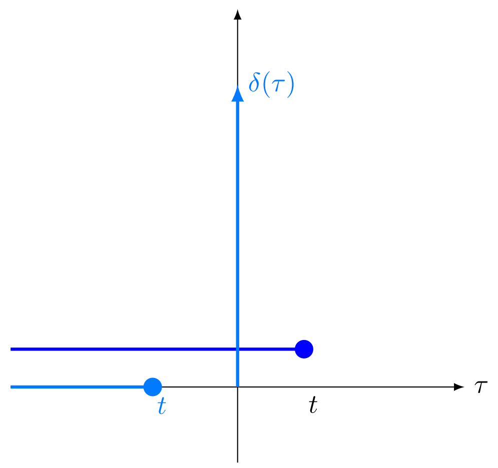
- Invarianza en el tiempo

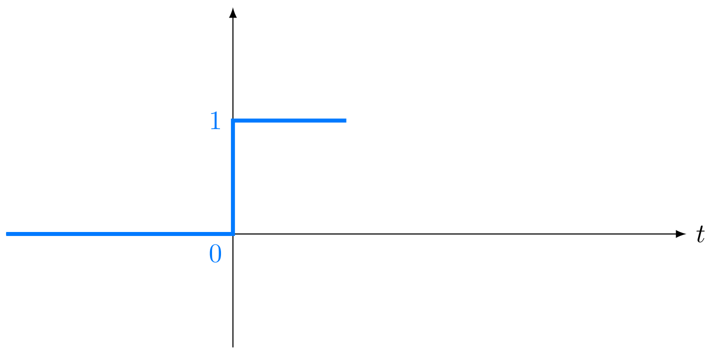
  $$x_1(t) = x(t - t_0) \longrightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\underbrace{\tau - t_0}_{s})\, \mathrm{d}\tau = \left\{ \begin{array}{l} s = \tau - t_0 \\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}\tau \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(s)\mathrm{d}s = y(t - t_0) \longrightarrow \text{Invariante}$$

- Linealidad del sistema:

  $$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} [ax_1(\tau) + bx_2(\tau)]\, \mathrm{d}\tau = a\underbrace{\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau}_{y_1(t)} + b\underbrace{\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau}_{y_2(t)} = ay_1(t) + by_2(t) \longrightarrow$$

  lineal





b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} 3x(\tau - 5)\, \mathrm{d}\tau$

$$x(t) \longrightarrow \delta(t) = h(t) = \int_{-\infty}^{t} 3\delta(\tau - 5)\, \mathrm{d}\tau = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ t < 5 \\ 3,\ t > 5 \end{array} \right\} h(t) = 3 \cdot u(t - 5)$$

- Memoria:

  Con memoria

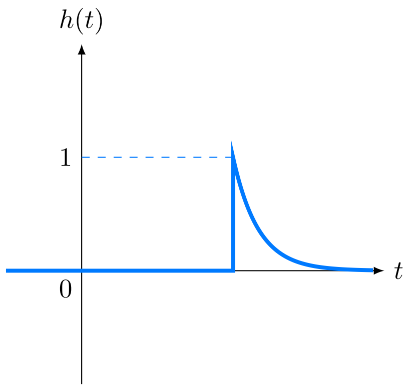
- Estabilidad

$h(t) = 0 \forall t < 0 \longrightarrow$ Casual

c) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} 3x(\tau - 2)\, \mathrm{d}\tau$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} 3x(\tau - 2)\, \mathrm{d}\tau$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \underbrace{e^{-(t-\tau)}} \cdot 3 \cdot \delta(\tau - 2)\, \mathrm{d}\tau = 3e^{-(t-2)} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - 2)\, \mathrm{d}\tau = 3e^{-(t-2)} \cdot u(t-2)$$



Con memoria

Causal

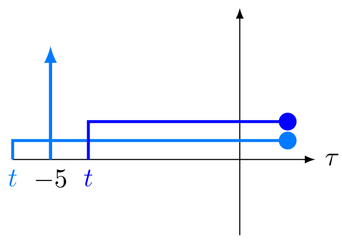
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\ \mathrm{d}t = \int_{2}^{+\infty} |h(t)|\ \mathrm{d}t = \int_{2}^{\infty} e^{-3(t-2)}\ \mathrm{d}t < \infty \longrightarrow \text{sistema estable}$$

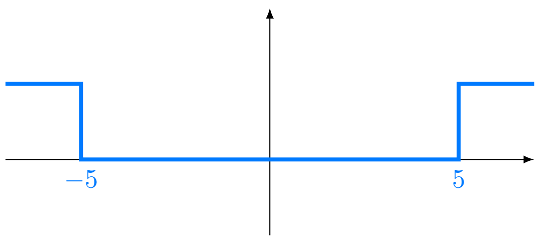
$$x_1(t) = x(t - t_0) \longrightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} 3x(\underbrace{\tau - t_0}_{s} - 2)\, \mathrm{d}\tau = \left\{ \begin{array}{l} s = \tau - t_0 \longrightarrow \tau = s + t_0 \\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}\tau \end{array} \right\} =$$

$$\int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-(\overbrace{s+t_0}^{-s-t_0})} 3x(s-2)\mathrm{d}s = y(t - t_0) \longrightarrow \text{Invariante}$$

d) $y(t) = \int_{t}^{\infty} e^{t-\tau} x(\tau + 5)\, \mathrm{d}\tau$

$$h(t) = \int_{t}^{\infty} e^{t-\tau} \cdot \delta(\tau + 5)\, \mathrm{d}\tau = e^{t+5} \int_{t}^{\infty} \delta(\tau + 5)\, \mathrm{d}\tau = \left\{ \begin{array}{ll} e^{t+5} \cdot 1 & t < -5 \\ 0 & t > -5 \end{array} \right\} = e^{t+5} \cdot u(-t-5)$$





$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-5} e^{t+5}\ \mathrm{d}t = e^{5} \int_{-\infty}^{-5} e^{t}\ \mathrm{d}t = e^{t} \left[e^{t}\right]_{-\infty}^{-5} = e^{5} \cdot (e^{-5} - 0) = 1 < \infty \longrightarrow \text{Estable}$$

e) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2)\, \mathrm{d}\tau$

16) Un sistema discreto viene determinado por la relación entrada-salida

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)} x[n-2].$$

Analice las propiedades de memoria, casualidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad del sistema.

17) Considere la señal $x[n] = \wedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right)$. Obtenga y represente la parte par e impar de esta señal. Calcule la energía y potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

18) Calcule la convolución de las señales

$$x_1[n] = (n-6)\Pi\left(\frac{n-6}{13}\right) \qquad x_2[n] = \Pi\left(\frac{-n-3}{5}\right)$$

<u>Nota:</u> La suma de una progresión aritmética $a_{n_i}, a_{n_i+1}, \ldots, a_{n_f}$, con $a_{n_i+1} = a_{n_i} + d, a_{n_i+2} = a_{n_i} + 2d, \ldots$ es

$$\sum_{k=n_i}^{n_f} a_k = \frac{(n_f - n_i + 1)(a_{n_i} + a_{n_f})}{2}.$$

19) Se pretence procesar la señal $x(t)$ de la figura con un sistema LTI cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = t\Pi\left(\frac{2t-4}{8}\right) - 2\delta(t+12)$$

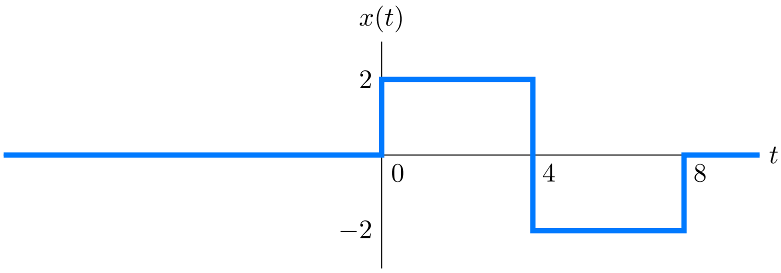


Figure 1

a) Obtenga la salida del sistema $y(t)$

b) Indique razonadamente si este sistema posee las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad.

c) Calcule la energía total y la potencia media de $x(t)$, e indique si está definida en energía o en potencia.

d) A partir del resultado del apartado (a), y utilizando únicamente propiedades de la convolución, obtenga la salida del sistema frente a la entrada

$$z(t) = 8 \wedge \left(\frac{t-4}{4}\right)$$