Cálculo II

Tema 3: Cálculo diferencial de funciones de varias variables I

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Decir si es o no diferenciable en el punto $(0,0)$ la función real

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para comprobar si $f(x,y)$ es diferenciable o no en el punto $(0,0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de no serlo directamente diríamos que es diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to0}\frac{2\cdot r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to0}\frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}}=\lim_{r\to0}\frac{2\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}}=$$
$$2\cos\theta\sin\theta\longrightarrow\nexists\lim$$

Como no existe el límite, entonces $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$ y por lo tanto, podemos asegurar que tanto es diferenciable en dicho punto.

2) Comprobar que la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es continua en $(0,0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.

Para comprobar si $f(x,y)$ es diferenciable o no en el punto $(0,0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de serlo directamente diríamos que no diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\sin\frac{1}{x}=\{\text{Teorema del Sándwich}\}=0$$

  Como el límite coincide con $f(0,0)=0$, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

- Comprobar que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$:

  La función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ si existe un plano tangente que se aproxime localmente a $f(x,y)$. Esto ocurre si:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}\sin\frac{1}{x}-0}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}\sin\frac{1}{h}$$

El término $\sin\frac{1}{x}$ oscila entre -1 y 1 de manera no convergente cuando $h \to 0$, por lo que este límite no existe. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

3) Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular su derivada direccional de cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ en el punto $(0,0)$.

- Estudio de la continuidad en el punto $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta r^2\sin^2\theta}{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0$$

Como el límite coincide con $f(0,0) = 0$, la función $f(x,y)$ es continua en dicho punto.

- Comprobar que $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$:

Para verificar la diferenciabilidad en $(0,0)$, usando el criterio de que la función es diferenciable si existe un plano tangente local, lo que requiere que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

Si $f(x,y)$ fuera diferenciable, se debería cumplir:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \left\{ \begin{array}{c} h = r\cos\theta \\ \\ k = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{r\cos\theta r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{r^3}}$$
$$= \cos\theta\sin^2\theta \longrightarrow \nexists \lim$$

El término $\cos\theta\sin^2\theta$ depende de θ, lo que implica que el límite no existe uniformemente. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

- Derivada direccional en $(0,0)$:

La derivada direccional en la dirección $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$ está dada por:

$$D_{\mathrm{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2(v_1^2+v_2^2)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3} v_1 v_2^2}{\cancel{t^3}(v_1^2+v_2^2)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$$

La derivada direccional no siempre es cero, ya que depende de los valores de v_1 y v_2.

4) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comprobar que f tiene derivada direccional respecto de cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ en el punto $(0,0)$, pero f no es derivable en dicho punto.

- Derivada direccional en $(0,0)$:

  La derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección de un vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ se define como:

$$D_{\mathrm{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2v_1^2+t^4v_2^4}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}^{2} v_1 v_2^2}{\cancel{t}(t^2v_1^2+t^4v_2^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}(v_1v_2^2)}{\cancel{t^2}(v_1^2+t^2v_2^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1v_2^2}{v_2^2+\cancel{t^2v_2^4}^{0}} = \frac{\cancel{v_1}v_2^2}{v_1^{\cancel{2}}} = \frac{v_2^2}{v_1}$$

  La derivada direccional existe para cualquier vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$ y está dada por

$$D_{\mathrm{v}} f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{v_2^2}{v_1}, & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 \text{ y } v_2 = 0 \end{cases}$$

- Diferenciabilidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$:

  La función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ si existe:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

  Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

  Si $f(x,y)$ fuera diferenciable en $(0,0)$, las derivadas direccionales serían consistentes con las derivadas parciales. Sin embargo, observamos que

$$D_{\mathrm{v}} f(0,0) = \frac{v_2^2}{v_1}, \quad \text{si } v_1 \neq 0,$$

  y esto depende de la dirección $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$, lo cual indica que $f(x,y)$ no puede aproximarse localmente por una aplicación lineal.

  La función no es diferenciable en $(0,0)$ porque las derivadas direccionales no son consistentes con una aproximación lineal.

5) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = x^2 \tan \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

definida para todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y comprobar que

$$xD_1 f(x,y) + yD_2 f(x,y) = 2f(x,y)$$

Denotamos $u = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$. Entonces:

$$f(x,y) = x^2 \tan(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\tan(u) + x^2(\tan^2(u)+1)\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\tan(u) + x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(\tan^2+1)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(\frac{2y(x^{2+y^2-y^2\cdot 2y})}{(x^2+y^2)^2}\right) = x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(\frac{2x^2y+\cancel{2y^3}-\cancel{2y^3}}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$xD_1f(x,y)+yD_2f(x,y) = x\cdot\left[2x\tan(u)+x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\right] + y\cdot\left[x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\right]$$

$$= 2x^2\tan(u) - \cancel{\frac{2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot(\tan^2(u)+1)} + \cancel{\frac{2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot(\tan^2(u)+1)} = 2x^2\tan(u)$$

Por lo tanto:

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cdot f(x,y)$$

6) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x>0, y>0\}$, y comprobar que

$$xD_1f(x,y)+yD_2f(x,y) = -\frac{1}{2}f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2} + y\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})\right) + y\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})\right)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}(x+y)-x(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\frac{\sqrt{y}}{2}(x+y)-y(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)-(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

Por lo tanto:

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\cdot f(x,y)$$

7) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = y\cdot\log\frac{x^3y}{x^2+y^2}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x>0, y>0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}} \cdot \frac{3x^2y \cdot (x^2+y^2) - x^3y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\cancel{x^2+y^2}}{x^3y} \cdot \frac{3x^4y+3x^2y^3-2x^4y}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} \cdot y$$

$$= y \cdot \frac{x^4y+3x^2y^3}{x^3y(x^2+y^2)} = \cancel{y} \cdot \frac{x^4y+3x^2y^3}{x^5\cancel{y}+x^3y^{\cancel{3}}} = \frac{x^4y+3x^2y^3}{x^5+x^3y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot \log\frac{x^3y}{x^2+y^2} + \cancel{y} \cdot \frac{\cancel{x^2+y^2}}{\cancel{x^3}y} \cdot \frac{\cancel{x^3}(x^2+y^2) - \cancel{x^3}y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} = \log\frac{x^3y}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2} = \log\frac{x^3y}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1^3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1^3}{1^5 + 1^3 \cdot y^2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \log\frac{1^3 \cdot 1}{1^2+1^2} + \cancelto{0}{\frac{1^2-1^2}{1^2+1^2}} = \log\frac{1}{2}$$

El diferencial en $(1,1)$ es:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x + \log\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$$

8) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(2,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}} \cdot \left(x - \frac{y}{x^2}\right) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(2 - \frac{2}{1}\right) = 0$$

El diferencial en $(2,1)$ es:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$$

9) Dada la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x,y) = \left(x^4 + y^3, x^2y^2 - 3y^2\right)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(1,1)$. Comprobar que $\vec{f}$ es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$f(x,y) = \left(x^4+y^3, x^2y^2-3y^2\right) = \begin{cases} f_1(x,y) = x^4 + y^3 \\ f_2(x,y) = x^2y^2 - 3y^2 \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 & 3y^2 \\ 2xy^2 & 2x^2y - 6y \end{pmatrix} \longrightarrow J(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, podemos asegurar que es diferenciable.

Su diferencial, al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\mathrm{d}f(P)(h,k) = J(f)(P)(h,k) = \mathrm{d}f(1,1)(h,k) = J(f)(1,1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h+3k \\ 2h-4k \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{d}f(1,1)(h,k) = (4h+3k,\, 2h-4k)$$

10) Dada la función $\vec{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y, x\cos y\sin y)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$. Comprobar que $\vec{f}$ es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$\vec{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y, x\cos y\sin y) = \begin{cases} f_1(x,y) = x\cos y \\ f_2(x,y) = x\sin y \\ f_3(x,y) = x\cos y\sin y \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \\ \cos y\sin y & x(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que todas las funciones coordenada son C^1, por lo tanto la función $\vec{f}(x,y)$ es también C^1 y también es diferenciable.

$$\mathrm{d}f(P)(h,k) = J(f)(P)(h,k) = \mathrm{d}f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)(h,k) = J(f)\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (-\pi k,\ h,\ -\pi k) \longrightarrow \mathrm{d}f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)(h,k) = (-\pi k,\ h,\ -\pi k)$$

11) Comprobar que la función $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + yz - z^2,\ xy - xz + 2z^2,\ xyz)$$

es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^3$ y calcularla en el punto $(3,2,1)$.

$$\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + yz - z^2,\ xy - xz + 2z^2,\ xyz) = \begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + yz - z^2 \\ f_2(x,y,z) = xy - xz + 2z^2 \\ f_3(x,y,z) = xyz \end{cases}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que son diferenciables, por consecuencia, $\vec{f}(x,y,z)$ también es diferenciable.

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & z & y - 2z \\ y - z & x & -x + 4z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)(3,2,1) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Su diferencial al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\mathrm{d}f(P)(h,k,j) = J(f)(P)(h,k,j) \longrightarrow \mathrm{d}f(3,2,1)(h,k,j) = J(f)(3,2,1)\begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \\ j \end{pmatrix} = (6h+k,\ h+3k+j,\ 2h+3k+6j)$$

$$\longrightarrow \mathrm{d}f(3,2,1)(h,k,j) = (6h+k,\ h+3k+j,\ 2h+3k+6j)$$

12) Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = x^{y+z}$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y+z)x^{y+z-1} & x^{y+z}\cdot \ln(x) & x^{y+z}\cdot \ln(x) \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y,z) = x^{y^z}$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^z\cdot x^{y^z-1} & x^{y^z}\cdot \ln(x)\cdot z\cdot y^{z-1} & x^{y^z}\cdot \ln(x)\cdot y^z\cdot \ln(y) \end{pmatrix}$$

c) $f(x,y,z) = \sin(x\sin(y\sin z))$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$
$$= (\cos(x\sin(y\sin z))\cdot(\sin(y\sin z)), \cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\cdot\cos(y\sin z)\cdot\sin z, \cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\cdot\cos(y\sin z)\cdot y\cos z)$$

d) $\vec{f}(x,y) = (\sin(xy), \sin(x\sin y), x^4)$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(xy)\cdot y & \cos(x,y)\cdot x \\ \cos(x\sin y)\cdot\sin y & \cos(x\sin y)\cdot x\cdot\cos(y) \\ 4x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

13) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2\sin\frac{1}{x},\ y\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ (0,y) & \text{si } (x,y) = (0,y) \end{cases}$$

Comprobar que f es diferenciable.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2\sin\frac{1}{x},\ y\right) & \text{si } x\neq 0 \\ (0,y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Caso $x \neq 0$:

  La función es C^1 en esta región porque las funciones x^2, $\sin\frac{1}{x}$, y y son derivables, y no hay discontinuidades cuando $x\neq 0$. Por lo tanto, f es diferenciable en esta región.

- Caso $x = 0$:

  Cuando $x = 0$, la función se define como

$$f(x,y) = (0,y)$$

En este caso, debemos comprobar la diferenciabilidad en el punto $(0, y_0)$ para cualquier y_0. Empezamos calculando las derivadas parciales.

- Primera componente $f_1(x, y)$:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  Para $x \neq 0$, la derivada parcial respecto a x es:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x + 2x \sin \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}} \right) = 2x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

- Segunda componente $f_2(x, y)$:

$$f_2(x,y) = y$$

  La derivada parcial respecto a y es constante, y vale 1 en todo $\mathbb{R}^2$.

En el caso $x = 0$, el comportamiento de $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ es consistente con la definición y es continuo. Por lo tanto, todas las derivadas son continuas en $(0, y_0)$.

Dado que la función $f(x, y)$ es de clase C^1 en $x \neq 0$ y las derivadas parciales son continuas en $x = 0$, podemos concluir que $f(x, y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

14) Sabiendo que $f(x,y) = \sqrt{\log(xy) + \arcsin \dfrac{y}{x}}$, calcular

$$xf(x,y)D_1 f(x,y) + yf(x,y)D_2 f(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{x\cancel{y}} \cdot \cancel{y} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{x}y} \cdot \cancel{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} xf(x,y)D_1 f(x,y) + yf(x,y)D_2 f(x,y) =& x \cdot \cancel{\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}}} \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\ &+ y \cdot \cancel{\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{\log(xy) + \arcsin \frac{y}{x}}}} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\ =& \frac{1}{2} - \cancel{\frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}} = 1 \end{aligned}$$

15) Sabiendo que $f(x,y) = \sin \dfrac{2x + y}{2x - y}$, calcular

$$xD_1 f(x,y) + yD_2 f(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{2\cdot(2x-y)-(2x+y)\cdot 2}{(2x-y)^2}\right) = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{\cancel{4x}-2y-\cancel{4x}-2y}{(2x-y)^2}\right) = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{-4y}{(2x-y)^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{1\cdot(2x-y)-(2x+y)\cdot(-1)}{(2x-y)^2}\right) = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{2x-\cancel{y}+2x+\cancel{y}}{(2x-y)^2}\right) = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{4x}{(2x-y)^2}\right)$$
$$xD_1f(x,y)+yD_2f(x,y) = x\cdot\cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{-4y}{(2x-y)^2}\right)+y\cdot\cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{4x}{(2x-y)^2}\right)$$
$$= \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\cancel{\frac{-4xy}{(2x-y)^2}+\frac{4xy}{(2x-y)^2}}\right) = 0$$

16) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2+y^2$ en los punto $(0,0)$ y $(1,2)$.

La ecuación del plano tangente, viene dada por:

$$z-c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

- Para el punto $(0,0)$:

$$c = f(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad z-0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \longrightarrow z = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

- Para el punto $(1,2)$

$$c = f(1,2) = 1^2+2^2 = 5 \qquad z-5 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) \longrightarrow z-5 = 2(x-1)+4(y-2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \qquad \longrightarrow z = 2x-2+4y-8+5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4 \qquad \longrightarrow z = 2x+4y-5$$

17) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \log x^2+\log y^2$ en los puntos $(3,1)$ y (x_0,y_0).

La del plano tangente, viene dada por:

$$z-c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

- Para el punto $(3,1)$:

$$c = f(3,1) = \log(3^2)+\log(1^2) = \log(9\cdot 1) = \log(9) \qquad z-\log(9) = \frac{2}{3}(x-3)+2(y-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{x} = \frac{2}{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = \frac{2}{3} \qquad z = \frac{2}{3}x-2+2y-2+\log(9)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{y} = \frac{2}{y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2 \qquad z = \frac{2}{3}x+2y-4+\log(9)$$

- Para el punto (x_0)

$$c = f(x_0,y_0) = \log(x_0^2)+\log(y_0^2) = \log(x_0\cdot y_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{x} = \frac{2}{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{2}{x_0} \qquad z-\log(x_0\cdot y_0) = \frac{2}{x_0}(x-x_0)+\frac{2}{y_0}(y-y_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{y} = \frac{2}{y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{2}{y_0}$$

18) Sea A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $f : A\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Supongamos que f es diferenciable en un punto $(a_1,a_2,a_3)\in A$ y que $Df(a_1,a_2,a_3)(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3$ para todo $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Calcular $D_vf(a_1,a_2,a_3)$ siendo v el vector siguiente:

Sabemos que la derivada linea $Df(a_1,a_2,a_3)(x_1,x_2,x_3)$ es:

$$Df(a_1,a_2,a_3)(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3.$$

Esto implica que el gradiente de f en cualquier punto (a_1, a_2, a_3) es:

$$\nabla f(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$$

La derivada direccional en la dirección del vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se calcula como:

$$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = \nabla f(a_1, a_2, a_3) \cdot \mathrm{v} = (1, 1, 1) \cdot (v_1, v_2, v_3).$$

El producto escalar es:

$$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

a) $v = (1, 2, 3)$

$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = 1 + 2 + 3 = 6$

b) $v = (0, 1, 1)$

$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = 0 + 1 + 1 = 2$

c) $v = (-1, 1, 2)$

$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = -1 + 1 + 2 = 2$

19) Sea A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Supongamos que $\vec{f}$ es diferenciable en un punto $(a_1, a_2, a_3) \in A$. Si $\vec{f} = (f_1, f_2)$ y $D_{\mathrm{v}_i} f_j(a_1, a_2, a_3) = i + j$ para $j = 1, 2$ e $i = 1, 2, 3$ donde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, determinar el diferencial de $\vec{f}$ en dicho punto.

Para determinar diferencial de la función vectorial $\vec{f}$ en el punto (a_1, a_2, a_3), recordemos que el diferencial es una matriz 2×3 que contiene las derivadas parciales de cada componente de $\vec{f}$:

$$Df(a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{x_3} \end{bmatrix}.$$

Dado que conocemos las derivadas direccionales de f_1 y f_2 en las direcciones de los vectores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, podemos usar la relación entre la derivada direccional y las derivadas parciales:

$$D_{\mathrm{v}_i} f_j(a_1, a_2, a_3) = \nabla f_j(a_1, a_2, a_3) \cdot \mathrm{v}_i,$$

donde $\nabla f_j(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \frac{\partial f_j}{\partial x_3} \right)$.

Con esta información, determinaremos las derivadas parciales.

- Componente $f_1 (j = 1)$:

  1) Para $i = 1 (v_1 = (1, 1, 1))$:

$$D_{\mathrm{v}_1} f_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 1 = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2$$

  2) Para $i = 2 (v_2 = (0, 1, 1))$:

$$D_{\mathrm{v}_2} f_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{x_3} = 3$$

3) Para $i = 3 (v_3 = (0,0,1))$:

$$D_{v_3} f_1(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\cdot 1 = 1+3 = 4 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 4$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 4\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 3-4 = -1\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2-(-1)-4 = -1
\end{aligned}$$

- Componente $f_2 (j = 2)$:

1) Para $i = 1 (v_1 = (1,1,1))$:

$$D_{v_1} f_2(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\cdot 1 = 2+1 = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 3$$

2) Para $i = 2 (v_2 = (0,1,1))$:

$$D_{v_2} f_2(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\cdot 1 = 2+2 = 4 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{x_3} = 4$$

3) Para $i = 3 (v_3 = (0,0,1))$:

$$D_{v_3} f_2(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\cdot 1 = 2+3 = 5 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 5$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 5\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 4 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4-5 = -1\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3-(-1)-5 = -1
\end{aligned}$$

El diferencial de $\vec{f}$ en el punto (a_1,a_2,a_3) es:

$$Df(a_1,a_2,a_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

20) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comprobar que existen las derivadas parciales segundas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Primero verificamos las derivadas parciales de primer orden en $(0,0)$. Para calcular las derivadas parciales, tomamos los límites respectivos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

Ahora calculamos las derivadas parciales mixtas en $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x\cos y - \sin x)(x^2+y^2) - (x \sin y - y \sin x)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Ahora calculamos el límite cuando $x \to 0$ para evaluar $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = (*) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h-\sin h}{h^2} - 0}{h} = \left\{\sin h \approx h - \frac{h^3}{6}\right\} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} - \left(\cancel{h} - \frac{h^3}{6}\right)}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{6}}{h^3} = \frac{1}{6}$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \frac{(h\cancel{\cos 0}^{\,1} - \sin h)\cdot \cancel{h^2}}{h^{\cancel{4}}} = \frac{h - \sin h}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\sin y - y\cos x)\cdot(x^2+y^2) - (x\sin y - y \sin x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Ahora calculamos el límite cuando $y \to 0$ para evaluar $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$.

$$\lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = (*) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\sin k - k}{k^2} - 0}{k} = \left\{\sin k \approx k - \frac{k^3}{6}\right\} = \lim_{k\to 0} \frac{\left(\cancel{k} - \frac{k^3}{6}\right) - \cancel{k}}{k^3} = \lim_{k\to 0} -\frac{\frac{k^3}{6}}{k^3} = -\frac{1}{6}$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,k) = \frac{(\sin k - k\cancel{\cos 0}^{\,1})\cdot \cancel{k^2}}{k^{\cancel{4}}} = \frac{\sin k - k}{k^2}$$

21) Se consideran las funciones $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $\vec{f}(x,y) = (x^2y^4, x^3y^3 + 4xy^2)$ y $\vec{g}(x,y) = (x \sin y, y \sin x)$. Sea $\vec{F} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Calcular la matriz jacobiana de $\vec{F}$ en el punto $(2,-1)$

La composición $f \circ g$ viene dada por:

$$\begin{tikzcd} \underset{(2,-1)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \underset{(4,0)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^4 & 4x^2y^3 \\ 3x^2y^3 + 4y^2 & 3x^3y^2 + 8xy \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin y & x\cos y \\ y \cos x & \sin x \end{pmatrix} \longrightarrow J(g)(4,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

$$J(F)(2,-1) = J(g)(4,0)\cdot J(f)(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \sin 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 32 \\ -8\sin 4 & 8 \sin 4 \end{pmatrix}$$

22) Se consideran las funciones $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $\vec{f}(t) = (t^2, 3t-1, 1-t^2)$ y $\vec{g}(x,y,z) = (x^2 - y - zx, y^2 + xy + z^2)$. Sean $\vec{F} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Calcular la matriz jacobiana de $\vec{F}$ en el punto -1. ¿Es posible calcular la matriz jacobiana de la función $\vec{G} = \vec{f} \circ \vec{g}$ en el punto $(1,1,1)$?

$\vec{F}(t) = \vec{g}(\vec{f}(t)) = \vec{g}(t^2, 3t-1, 1-t^2)$

Sustituyendo $(x, y, z) = (t^2, 3t-1, 1-t^2)$ en $\vec{g}$:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} (t^2)^2 - (3t-1) - (1-t^2)\cdot t^2 \\ \\ (3t-1)^2 + t^2 \cdot (3t-1) + (1-t^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 - 3t + 1 - t^2 + t^4 \\ \\ 9t^2 - 6t + 1 + 3t^3 - t^2 + t^4 - 2t^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^4 - t^2 - 3t + 1 \\ \\ t^4 + 3t^3 + 6t^2 - 6t + 2 \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{F}}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t^3 - 2t - 3 \\ \\ 4t^3 + 9t^2 + 12t - 6 \end{pmatrix} \longrightarrow J_{\vec{F}}(-1) = \begin{pmatrix} -9 \\ \\ -13 \end{pmatrix}$$

Composición de $\vec{G} = \vec{f} \circ \vec{g}$:

Para que la composición $\vec{f} \circ \vec{g}$ esté definida, la función $\vec{g}$ debe producir un resultado en $\mathbb{R}$, pero $\vec{g}(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Esto hace que la composición $\vec{f} \circ \vec{g}$ **no sea válida**, ya que los dominios y codominios no son compatibles.

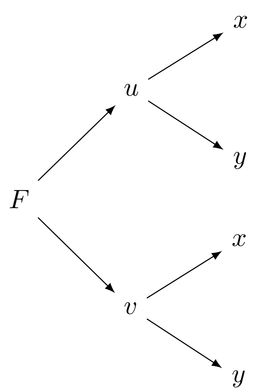
23) Hallar la expresión de las derivadas parciales de la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ y $g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son de clase $C^1(\mathbb{R})$.

La función $f(u, v)$ depende de dos variables:

- $u = g(x)k(y)$
- $v = g(x) + h(y)$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g'(x)h(y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = g'(x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot g'(x)h(y) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot g'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g(x)h'(y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = h'(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot g(x)h'(y) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot h'(y)$$

24) Calcular la expresión de las derivadas parciales de la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = f(x^y, y^z, z^x)$$

donde $f : M \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^1(M)$ con

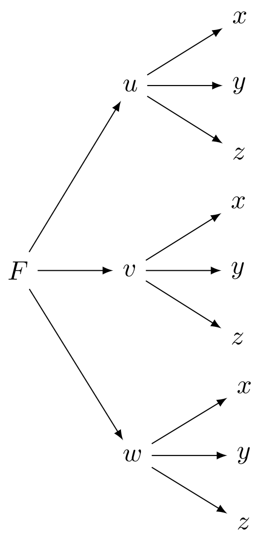
$$M = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

La función $F(x,y,z)$ puede escribirse como:

$$F(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

donde

$$u(x,y,z) = x^y, \quad v = (x,y,z) = y^z, \quad w(x,y,z) = z^x$$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = z^x \cdot \ln(z)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y \cdot x^{y-1} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot z^x \cdot \ln(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln(x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = z \cdot y^{z-1}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x^y \ln(x) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot z \cdot y^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = y^z \ln(y)$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = x \cdot z^{x-1}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y^z \ln(y) + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot x \cdot z^{x-1}$$

25) Calcular la expresión de las derivadas parciales de las funciones $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por

a) $F(x,y,z) = \displaystyle\int_0^{x+y+z} \sin t \, \mathrm{d}t$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x,y,z)$ respecto a cada variable es:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} = \sin(x+z+y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial y} = \sin(x+z+y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sin(x+y+z) \cdot \frac{\partial(x+y+z)}{\partial z} = \sin(x+z+y)$$

b) $F(x,y,z) = \displaystyle\int_0^{xyz} t \sin t \, \mathrm{d}t$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x,y,z)$ respecto a cada variable es:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial x} = \sin(x+z+y) \cdot yz$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial y} = \sin(x+z+y) \cdot xz$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = \sin(x+z+y) \cdot xy$$

c) $F(x,y,z) = \displaystyle\int_{x^2+y^2}^{xyz} \sin t \, \mathrm{d}t$

Según la regla de Leibniz, la derivada parcial de $F(x,y,z)$ respecto a cada variable es:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \sin(x^2+y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = \sin(x+z+y) \cdot yz - \sin(x^2+y^2) \cdot 2x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \sin(x^2+y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = \sin(x+z+y) \cdot xz - \sin(x^2+y^2) \cdot 2y$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sin(xyz) \cdot \frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \cancelto{0}{\sin(x^2+y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial z}} = \sin(x+z+y) \cdot xy$$

26) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \text{ con } x, y \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las siguientes igualdades:

a) $x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y^2 \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$
$$\cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} + \cancel{y^2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{y^2}}\right) = 1 - 1 = 0$$

b) $xy(x+y)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) + x^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + y^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{2}{y^3}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = 0$$
$$\cancel{xy(x+y)} \cdot 0 + \cancel{x^2} \cdot \left(-\frac{2}{x^{\cancel{3}}}\right) + \cancel{y^2} \cdot \frac{2}{y^{\cancel{3}}} = -\frac{2}{x} + \frac{2}{y} \neq 0$$

27) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \text{ con } x \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

a) $x\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)+F(x,y)=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x}\right)=\frac{x\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}-f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x}\right)=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}$$

$$\cancel{x}\cdot\left(\frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}-f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}}\right)+y\cdot\left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}\right)+\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x}=\frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}-\cancel{f\left(\frac{y}{x}\right)}}{x}+\frac{y\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}+\cancel{\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x}}$$

$$=-\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot y}{x^2}+\frac{y\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}=0$$

b) $x^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+y^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)+2xy\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=2F(x,y)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}-f\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}\right)=\frac{2f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y^2}{x^4}+2f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x^3}}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x}\right)=\frac{f''\left(\frac{y}{x}\right)}{x^4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x}\right)=\frac{-f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x^3}}{x^2}$$

28) Sea $f(x,y=x^2+y^2)$ y hagmaos $x=\sin t$ e $y=t$ con lo que se obtiene la función compuesta $F(t)=f(x(t),y(t))$. Calcular las tres primeras derivadas de dicha función.

Sustituimos $x=\sin t$ y $y=\sin t$ en $f(x,y)=x^2+y^2$:

$$F(t)=f(x(t),y(t))=(\sin t)^2+t^2$$

- Primera derivada:

  Usamos la regla de la derivada para cada término:

$$F'(t)=\frac{\partial}{\partial t}(\sin^2 t)+\frac{\partial}{\partial t}(t^2)=2\cdot\sin t\cdot\cos t+2t$$

- Segunda derivada:

  Usamos la regla de la derivada en cada término:

$$F''(t)=\frac{\partial}{\partial t}(2\cdot\sin t\cdot\cos t)+\frac{\partial}{\partial t}(2t)=2\cdot[\cos t\cdot\cos t+\sin t\cdot(-\sin t)]+2=2(\cos^2 t-\sin^2 t)+2$$

- Tercera derivada:

$$F'''(t)=\frac{\partial}{\partial t}(2(\cos^2 t-\sin^2 t)+\frac{\partial}{\partial t}(2)=2\cdot(2\cdot\cos t(-\sin t)-2\sin t\cos t)+0=-2\cdot(-4\cos t\sin t)=-8\cos t\sin t$$

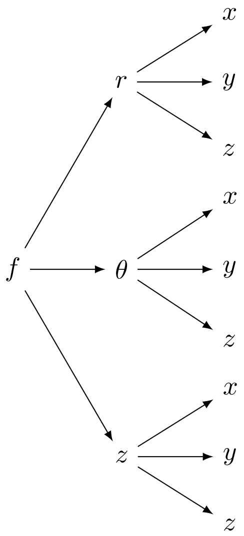
29) Dada $f(x,y,z)$ se define el gradiente de f como

$$\mathrm{grad} f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right).$$

Dadas las coorenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

obtener el gradiente de f en estas coordenadas.



$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\underbrace{\dfrac{\partial z}{\partial z}}_{1} \end{cases}$$

1) Relación para r:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

2) Relación para θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

3) Relación para z:

$$z = z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Graiente en coordenadas cilíndricas:

El gradiente en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$\operatorname{grad} f(r,\theta,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Derivamos cada componente de $f(x,y,z)$ respecto a (r,θ,z):

1) Derivada respecto a r:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cancelto{0}{\frac{\partial z}{\partial r}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

2) Derivada respecto a θ:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\cancelto{0}{\frac{\partial z}{\partial \theta}} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)$$

3) Derivada respecto a z

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\cancelto{0}{\frac{\partial x}{\partial z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\cancelto{0}{\frac{\partial y}{\partial z}} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

30) Si ahora tenemos las coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

obtener el gradiente de la función del ejercicio anterior en estas nuevas coordenadas.

El gradiente de f en coordenadas cartesianas es:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Queremos expresar este gradiente en términos de coordenadas esféricas (r,θ,φ).

1) Relación entre derivadas parciales

   Usamos la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales respecto a (x,y,z) en términos de (r,θ,φ). Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}\\
\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

2) Gradiente en coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta\\
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta\sin\varphi) + \cancel{\frac{\partial f}{\partial z}}\cdot 0 = r\sin\varphi\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right)\\
\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta\cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\sin\theta\cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial z}(-r\sin\varphi) = r\left[\cos\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right) - \frac{\partial f}{\partial z}\sin\varphi\right]
\end{aligned}$$

31) Sea $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. Comprobar que

$$\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$.

Supongamos que f es una función C^2, dependiente de (u,v), con $u = x^2-y^2$ y $v = 2xy$. Entonces, aplicamos la regla de la cadena para las derivadas parciales de f respecto a x e y:

- Derivada parcial de f respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y.$$

- Derivada parcial de f respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x$$

Usamos nuevamente la regla de la cadena para calcular las segundas derivadas parciales.

- Seguunda derivada parcial respecto a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2x\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 2x\cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot 2y\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 2y\cdot 2y + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\\
&= 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 8xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial u}
\end{aligned}$$

- Segunda derivada parcial respecto a y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot(-2y)\cdot(-2y) + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot 2x\cdot(-2y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot(-2y)\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 2x\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-2) \\
&= 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 8xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2\frac{\partial f}{\partial u}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4x^2 + 4y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (4y^2 + 4x^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Usamos que $r^2 = x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) \\
\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{x^2+y^2} &= 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) \\
\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) &= 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)
\end{aligned}$$

32) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $c^2(\mathbb{R}^2)$ Comprobar que

$$(x^2 - y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)$$

donde $u = \log(x+y)$ y $v = \log(x-y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{x+y}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{x-y}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{x+y}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{x-y}\cdot(-1)$$

Para calcular la segunda derivada respecto de x, aplicamos la regla del producto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{1}{x-y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{x+y}\cdot\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-y}\cdot\frac{1}{x+y}\right)$$

33) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $c^2(\mathbb{R}^2)$. Comprobar que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v) - u\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$$

donde $u = \dfrac{x}{y}$ y $v = xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{x}{y^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot y^2 - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{x^2}{y^4} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{2x}{y^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot x^2$$

34) Demostrar que si $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ y se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

entonces también se verifica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = 0$$

donde $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$ e $y = \dfrac{v}{u^2+v^2}$

Podemos ver que esta es una transformación de las coordenadas (u,v) en (x,y). Calculamos las derivadas parciales de x y y respecto a u y v, necesarias para usar la regla de la cadena.

Derivadas de x respecto a u y v:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{(u^2+v^2) - 2u^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

Derivadas de y respecto a u y v:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{(u^2+v^2) - 2v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}$$

La función $f(x,y)$ se transforma en $f(u,v)$ a través de la regla de la cadena. Por lo tanto, sus derivadas parciales se relacionan mediante la matriz Jacobiana mediante la matriz Jacobiana de la transformación de (u,v) a (x,y). En términos del gradiente, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

De manera similar, para las segundas derivadas, la matriz Hessiana de $f(u,v)$ está relacionada con la matriz Hessiana de $f(x,y)$ mediante:

$$H_f^{(u,v)} = J^\intercal H_f^{(x,y)} J,$$

donde $H_f^{(x,y)}$ es la matriz Hessiana de f respecto a (x,y), y J es la matriz Jacobiana de la transformación.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\right) = \left(\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left(\partial\right.$$

Dado que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, se deduce:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{1}{(u^2+v^2)^2} \cdot 0 = 0$$

Hemos demostrado que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$$

35) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x + x^2y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,y) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,y) \end{cases}$$

estudiar su diferenciabilidad en el punto $(0,0)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. ¿Son continuas en $(0,0)$?

Para que $f(x,y)$ sea diferenciable en $(0,0)$, deben cumplirse las siguiente condiciones:

1) $f(x,y)$ debe ser continua en $(0,0)$.

2) Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ deben existir en un entorno de $(0,0)$.

3) $f(x,y)$ debe poder aproximarse linealmente cerca de $(0,0)$:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

donde $o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ representa términos de orden superior.

Para verificar la continuidad en $(0,0)$, evaluamos el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$:

$$f(x,y) = x + x^2y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Si $(x,y) \neq (0,0)$, analizamos cada término:

- El término x tiende a 0 cuando $(x,y) \to (0,0)$.
- El término $x^2y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ se evalúa:
  - $\left|x^2y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right| \leq |x^2y^2|$ (ya que $|\sin| \leq 1$).
  - Cuando $(x,y) \to (0,0)$, tenemos $x^2y^2 \to 0$.

Por lo tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, y $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$

Para $x \neq 0$, derivamos directamente usando la regla del producto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 2xy^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$

Para $y \neq 0$, derivamos directamente usando la regla del producto:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

1) Continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

   Evaluamos $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 2xy^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

   - El término constante 1 permanece constante.
   - Los términos $2xy^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ y $-y^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ tienden a 0 porque $xy^2 \to 0$ y $y^3 \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$.

   Por lo tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to 1$, y $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$.

2) Continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

   Evaluamos $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

- El término $2x^2 y \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ tiende a 0 porque $x^2 y \to 0$.
- El término $x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ también tiende a 0 porque $x^2 \to 0$.

Por lo tanto, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \to 0$, y $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0, 0)$.

36) Enunciado el teorema de la función recíproca o inversa.

Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 (es decir, continuamente diferenciable) en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que:

1) $DF(a)$ (la matriz Jacobiana de F evaluada en a) es invertible, es decir, $\det(DF(a)) \neq 0$.

Entonces:

1) Existe un entorno U de a en $\mathbb{R}^n$ y un entorno V de $F(a)$ en $\mathbb{R}^n$ tales que F es una biyección de U en V, y la función inversa F^{-1} está definida en V.
2) La función inversa $F^{-1} : V \to U$ es de clase C^1.
3) La matriz Jacobiana de F^{-1} en un punto $b \in V$ está relacionada con la matriz Jacobiana de F mediante:

$$DF^{-1}(b) = (DF(F^{-1}(b)))^{-1}.$$

37) Consideramos la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de dicha función.

Para verificar si $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$, debemos comprobar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Cuando $(x, y) \neq (0, 0)$, la función toma la forma:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Límites en coordenadas polares:

Usamos $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Entonces:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x^4 + y^4 = r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta).$$

Por lo tanto:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{r^{\cancel{4}}(\cos^4\theta + \sin^4\theta}{\cancel{r^2}} = r^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta).$$

Cuando $(x, y) \to (0, 0)$, es decir, $r \to 0$:

$$f(x, y) \to 0 \cdot (\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0.$$

Por lo tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, y $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$. Para estudiar la diferenciabilidad, calculamos las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}h=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^4}{k^2}}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{k^2}{k}=\lim_{k\to 0}k=0$$

En resumen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Para que $f(x,y)$ sea diferenciable en $(0,0)$, se debe verificar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta \\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{r^3}=\lim_{r\to 0}r(\cos^4\theta+\sin^4\theta)=0$$

Por lo tanto, el límite es 0, y $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

38) Sea $f:A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=\log(g(x+yz))$ siendo

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\neq 0\}$$

y g una función real positiva de clase $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Se pide:

a) Calcular $D=z^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

La función f está definida como:

$$f(x,y,z)=\log(g(x+yz)),$$

donde g es una función positiva de clase $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, y $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\neq 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\log(g(x+yz))=\frac{1}{g(x+yz)}\cdot g'(x+yz)\cdot 1=\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\log(g(x+yz))=\frac{1}{g(x+yz)}\cdot g'(x+yz)\cdot z=\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}\cdot z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\log(g(x+yz))=\frac{1}{g(x+yz)}\cdot g'(x+yz)\cdot y=\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}\cdot y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}\right)=\frac{g''(x+yz)g(x+yz)-(g'(x+yz))^2}{(g(x+yz))^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}\cdot z\right)=z\cdot\frac{g''(x+yz)g(x+yz)-(g'(x+yz))^2}{(g(x+yz))^2}\cdot z=z^2\cdot\frac{g''(x+yz)g(x+yz)-(g'(x+yz))^2}{(g(x+yz))^2}$$

$$D=z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$=\cancel{z^2\cdot\frac{g''(x+yz)g(x+yz)-(g'(x+yz))^2}{(g(x+yz))^2}}-\cancel{z^2\cdot\frac{g''(x+yz)g(x+yz)-(g'(x+yz))^2}{(g(x+yz))^2}}+\frac{1}{\cancel{y}}\cdot\cancel{y}\cdot\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}$$
$$=\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}$$

b) Hallar las funciones f definidas en A tales que verifican $D=x+yz$.

Del apartado anterior, sabemos que:

$$D=\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}$$

Queremos que:

$$\frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)} = x + yz$$

Esto implica la ecuación diferencial:

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = \omega, \text{ donde } \omega = x + yz$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = \omega \longrightarrow g'(\omega) = \omega g(\omega).$$

Esta es una ecuación diferencial separable:

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = \omega \longrightarrow \frac{1}{g(\omega)}\,\mathrm{d}g = \omega\,\mathrm{d}\omega$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{1}{g(\omega)}\,\mathrm{d}g = \int \omega\,\mathrm{d}\omega \longrightarrow \ln|g(\omega)| = \frac{\omega^2}{2} \longrightarrow g(\omega) = e^C e^{\frac{\omega^2}{2}}$$

Renombrando e^C como una constante $k > 0$, tenemos $g(\omega) = ke^{\frac{\omega^2}{2}}$. Sustituyendo $\omega = x + yz$, se obtiene:

$$g(x+yz) = ke^{\frac{(x+yz)^2}{2}}.$$

Por lo tanto, $f(x,y,z)$ es:

$$f(x,y,z) = \log(g(x+yz)) = \log(k) + \frac{(x+yz)^2}{2}.$$

39) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

Las derivadas parciales en $(0,0)$ estánd definidas como:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h^2\cdot 0^2)}{h^4+2h^2\cdot 0^2+0^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\ln(1+0^2\cdot k^2)}{0^4+2\cdot 0^2\cdot k^2+k^4} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

b) ¿Es diferenciable la función en el punto $(0,0)$?

Para que $f(x,y)$ sea diferenciable en $(0,0)$, se debe verificar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Como $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$, y $f_y(0,0)=0$, la condición se reduce a verificar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+2^2y^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{\ln(1+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{r^4}}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\ln(1+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{r^5} = \{\ln(1+u)\sim u \text{ Si } u\to 0\}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^5} = \lim_{r\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{r} \longrightarrow \nexists \lim$$

Cuando $r\to 0$, el término $\dfrac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{r}$ diverge, ya que depende de $\dfrac{1}{r}$. Esto implica que el límite **no existe**, por lo tanto la función $f(x,y)$ **no es diferenciable** en $(0,0)$, ya que el límite no satisface la condición de diferenciabilidad.

40) Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

con α un número natural. Estudiar para los valores de $\alpha=3$ y 4:

a) Existencia de derivadas parciales de f.

Para determinar si las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen, usamos la definición de derivada parcial.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{\alpha-2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\alpha-3}$$

Si $\alpha=3: h^{\alpha-3}=h^0=1$, por lo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$$

Si $\alpha=4: h^{\alpha-3}=h$, por lo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0} h = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

Para $\alpha=3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Para $\alpha=4$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

b) Diferenciabilidad de f.

Para que f sea diferenciable en $(0,0)$, debe cumplirse:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Para $\alpha=3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0}\frac{\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2}}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r\cos^3\theta}{r} = \cos^3\theta \longrightarrow \nexists\lim$$

Este límite depende de θ, por lo que no existe el límite uniforme y $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Para $\alpha = 4$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{r^4\cos^4\theta}{r^2}}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^4\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos^4\theta = 0$$

Cuando $r \to 0$, el límite es 0, independientemente de θ. Por lo tanto $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

41) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con diferencial en el punto $(0,0)$, y cuyas derivadas parciales no sean continuas en dicho punto.

Un ejemplo clásico de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tiene diferencial en $(0,0)$, pero cuyas derivadas parciales no son continuas en dicho punto es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Continuidad en $(0,0)$:

Cuando $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$. Para verificar la continuidad en $(0,0)$, calculamos el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

Cuando $r \to 0$, $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

2) Derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

3) Verificar el diferencial:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^3} = \cos^2\theta\sin\theta$$

Como $\cos^2\theta\sin\theta$ es acotada, el límite es 0. Por lo tanto, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

Ahora calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x^3y}{(x^2+y^2)} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Cuando $(x,y) \to (0,0)$, evaluamos en coordenadas polares:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2r^3\cos\theta\sin^3\theta}{r^4} = \frac{2\cos\theta\sin^3\theta}{r}$$

Este valor depende de r, lo que muestra que la derivada no es continua en $(0,0)$. Por lo tanto, la función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$, pero sus derivadas parciales no son continuas en dicho punto.

42) Determinar si la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable.

43) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación diferenciable y sea $a = (a_1, a_2, a_3)$ un punto e $\mathbb{R}^3$. Explica como se calcula la diferenciable de f en dicho punto, enunciando aquellos resultados que permitan su cálculo.

1) Definición del diferencial

El diferencial de f en el punto a, denotado como $Df(a)$ o $\mathrm{d}f_a$, es una transformación lineal:

$$Df(a) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

que aproxima localmente a f cerca del punto a. Esto significa que para un pequeño incremento $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, la función f se puede escribir como:

$$f(a+\mathbf{h}) = f(a) + Df(a)(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|),$$

donde $o(\|\mathbf{h}\|)$ representa un término de orden superior que tiene a 0 más rápido que $\|\mathrm{h}\|$ cuando $\mathbf{h} \to 0$.

El diferencial $Df(a)$ se puede representar en términos de la **matriz Jacobiana** de f en el punto a.

2) Matriz Jacobiana

Sea

$$f(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)),$$

donde cada compoenente $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

La matriz Jacobiana de f en a se define como:

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}(a) \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_4}{\partial x_2}(a) & \dfrac{\partial f_4}{\partial x_3}(a) \end{bmatrix}.$$

3) Cálculo del diferencial

El diferencial $Df(a)$ está completamente determinado por la matriz Jacobiana $J_f(a)$. Específicamente, para un incremento $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, el diferencial $Df(a)$ aplicado a h es el producto de la matriz Jacobiana $J_f(a)$ con el vector h:

$$Df(a)(\mathbf{h}) = J_f(a) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}.$$

En forma explícita:

$$Df(a)(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}.$$

4) Resultados que permiten el cálculo del diferencial

- Regla de la cadena:

  Si f se puede escribir como una composición $f = g \circ h$, donde $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^k$ y $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^4$, entonces el Jacobiano de f en a se obtiene como el producto de los Jacobianos de g y h:

$$J_f(a) = J_g(h(a)) \cdot J_h(a).$$

- Diferenciabilidad implica continuidad:

  Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a. Además, las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ debene existir en un entorno de a.

- El diferencial $Df(a)$ proporciona una aproximación lineal a f cerca de a. Es decir:

$$f(a + \mathbf{h}) \approx f(a) + Df(a)(\mathbf{h}),$$

  lo cual define la **hiperplano tangente** al gráfico de f en a.

44) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de dicha función en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

45) Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables y a y b dos números reales distintos de cero. Definamos la función

$$F(x,y) = f(ax+by) + g(ax+by) + h(ax+by)$$

Demostrar que

$$b\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = a\frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

46) Demostrar que las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ de la aplicación

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no coinciden en el punto $(0,0)$. ¿Coinciden en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$? ¿Es diferenciable dicha función en el punto $(0,0)$?

---

1)