Álgebra Lineal
Ejercicios Tema 5: Transformaciones lineales

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Comprueba que si $v = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación $T_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_V(x) = x + v$ no es lineal. Este tipo de aplicación se llama una **traslación de vector** v y no se puede representar por medio de una matriz 3×3. Sin embargo, esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la traslación de vector $v = (a_1, a_2, a_3)$ se calcula por medio de la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es decir, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ a_3 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las 4 coordenadas $(x_1, x_2, x_3, 1)$ del vector tridimensional x se llaman coordenadas homogéneas de x.

Verificación de que $T_V(x) = x + v$ no es una transformación lineal:

Una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es lineal si satisface las siguientes dos propiedades para todos $u, w \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $T(u + w) = T(u) + T(w)$ (preserva la suma de vectores).

2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ (preserva la multiplicación por escalar).

En caso de $T_V(x) = x + v$, con $v = (a_1, a_2, a_3)$, veamos si estas propiedades se cumplen:

1) Preservación de la suma:

$$T_V(u + w) = (u + w) + v,$$

pero

$$T_V(u) + T_V(w) = (u + v) + (w + v) = u + w + 2v.$$

Como $T_V(u + w) \neq T_V(u) + T_V(w)$ (debido al término extra v), T_V preserva la suma de vectores.

2) Preservación de la multiplicación por escalar:

$$T_V(\lambda u) = \lambda u + v,$$

pero

$$\lambda T_V(u) = \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

Como $T_V(\lambda u) \neq \lambda T_V(u)$ (debido al término $\lambda v \neq v$), T_V no preserva la multiplicación por escalar.

Por lo tanto, T_V **no es lineal**.

Representación de la traslación mediante una matriz en coordenadas homogéneas

Para resolver la dificultad de que T_V no es lineal, se utiliza un truco geométrico añadiendo una coordenada adicional para representar los punto en $\mathbb{R}^3$ como vectores en $\mathbb{R}^4$. Este sistema se llama **coordenadas homogéneas**.

Dado $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, su representación en coordenadas homogéneas es $(x_1, x_2, x_3, 1)$.

La traslación por un vector $v = (a_1, a_2, a_3)$ se puede representar mediante la matriz T en coordenadas homogéneas:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, aplicando T a un vector homogéneo $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtenemos:

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \\ x_3 + a_3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, la traslación de x se representa linealmente en el espacio de coordenadas homogéneas.

2) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (-2, 3, -2), v_2 = (-4, 5, -3)$ y $v_3 = (5, -6, 4)$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula la matriz en la base $\mathcal{B}$ de la transformación lineal cuya matriz en las bases canónicas es

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación linea T en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, procedemos como sigue:

Paso 1: Transformación de la base $\mathcal{B}$ mediante A

Sabemos que la matriz de la transformación en la base $\mathcal{B}$, que llamaremos $[T]_{\mathcal{B}}$, está relacionada con la matriz en la base canónica A por la fórmula:

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP,$$

donde P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica. Esto significa que las columnas de P son los vectores de la base $\mathcal{B}$ expresados en la base canónica, es decir:

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Paso 2: Calcular P^{-1}

Invertimos la matriz P para obtener P^{-1}.

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}(\text{adj}(P))^{\intercal} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{es invertible}$$

Paso 3: Calcular $[T]_{\mathcal{B}}$

Una vez obtenida P^{-1}, calculamos:

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 26 & 34 \\ -6 & -31 & -42 \\ 4 & 20 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & - \\ 0 & \end{bmatrix}$$

3) Las llamadas **rotaciones de Givens** son las transformaciones lineales que vienen dadas por las matrices

$$R_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}, \quad R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix}, \quad R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $c = \cos\alpha$ y $s = \sin\alpha$ para un cierto ángulo α. ¿Qué interpretación geométrica tienen?
Dada la transformación lineal que tiene por matriz en las bases canónicas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcula la matriz en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, 0)$$

A la vista del resultado, ¿cuál es la interpretación geométrica de la transformación lineal dada por la matriz A?

Interpretación geométrica de las rotaciones de Givens

Las matrices $R_X(\alpha), R_Y(\alpha), R_Z(\alpha)$ representan **rotaciones en** R^3 alrededor de los ejes coordenados X, Y, y Z, respectivamente:

1. $R_X(\alpha)$: Rotación en el plano YZ alrededor del eje X por un ángulo α.
2. $R_Y(\alpha)$: Rotación en el plano XZ alrededor del eje Y por un ángulo α.
3. $R_Z(\alpha)$: Rotación en el plano XY alrededor del eje Z por un ángulo α.

Estas matrices preservan las nromas de los vectores (son ortogonales) y no cambian volúmenes, lo que significa que son **transformaciones isométricas** (rotaciones propiamente dichas).

Cálculo de la matriz en la base $\mathcal{B}$

La matriz de la transformación lineal en la base $\mathcal{B}$, denotada como $[T]_{\mathcal{B}}$, se calcula con la fórmula:

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP,$$

donde:

- A es la matriz en la base canónica
- P es la matriz de cambio de base, cuyas columnas son los vectores de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$:

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Procedemos a calcular $[T]_{\mathcal{B}}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}(\text{adj}(P))^{\intercal} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Consideremos un plano $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, es decir, un subespacio vectorial de ecuación $ax + by + cz = 0$. Sea $v = (a, b, c)$ el vector normal al plano y consideremos la matriz

$$H = I - \frac{2uv^{\intercal}}{v^{\intercal}v}$$

Entonces, H es la matriz de la simetría ortogonal respecto del plano y recibe el nombre de **reflexión de Householder**. Para verlo, prueba que si x es un vector arbitrario, entonces $x + Hx$ es ortogonal a v (es decir, $x + HX$ pertenece al plano) y $x - Hx$ es proporcional a v (estas dos cosas prueba que Hx es el simétrico de x respecto del plano dado).

Paso 1: Probar que $x + Hx$ es ortogonal a v

Dado un vector arbitrario $x \in \mathbb{R}^3$, calculemos Hx:

$$Hx = x - \frac{2vv^{\intercal}}{v^{\intercal}v}x.$$

Entonces:

$$x + Hx = x + \left(x - \frac{2vv^{\intercal}}{v^{\intercal}v}x\right) = 2x - \frac{2vv^{\intercal}}{v^{\intercal}v}x.$$

Ahora verificamos que $x + Hx$ es ortogonal a v, es decir, que:

$$v^{\intercal}(x + Hx) = 0 \longrightarrow v^{\intercal}\left(2x - \frac{2vv^{\intercal}}{v^{\intercal}v}x\right) = 2v^{\intercal}x - \frac{2}{v^{\intercal}v}v^{\intercal}vv^{\intercal}x$$

Notamos que $v^{\intercal}v$ es un escalar, así que:

$$v^{\intercal}(x + Hx) = 2v^{\intercal}x - \frac{2v^{\intercal}x}{v^{\intercal}v}v^{\intercal}v = 2v^{\intercal}x - 2v^{\intercal}x = 0$$

Por lo tanto, $x + Hx$ es ortogonal a v, y pertence al plano.

Paso 2: Probar que $x - Hx$ es proporcional a v

Ahora calculamos $x - Hx$:

$$x - Hx = x - \left(x - \frac{2vv^\intercal}{v^\intercal v}x\right) = \frac{2vv^\intercal}{v^\intercal v}x.$$

Notamos que $\frac{2vv^\intercal}{v^\intercal v}x$ es un múltiplo escalar del vector v, porque $vv^\intercal$ es una matriz de rango 1 que proyecta sobre v. Por lo tanto:

$$x - Hx \propto v.$$

5) Calcula la proyección del vector $(2,3,4)$ sobre el subespacio $\text{Col}(A)$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hazlo de tres formas distintas: como en el ejemplo 5.17, como en el ejemplo 5.18 y como en el ejemplo 5.21.

<u>1ª forma:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Col}(A) =< \overbrace{(1,0,0)}^{u_1}, \overbrace{(1,1,0)}^{u_2} >= u$

Calculamos una base ortogonal de u

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 + \alpha u_1$

$0 = v_1 \cdot v_2 = u_1 \cdot u_2 + \alpha \cdot u_1 \cdot u_1 \longrightarrow \alpha = -\frac{u_1 \cdot u_2}{u_1 \cdot u_1} = -1$

$v_2 = (1,1,0) - (1,0,0) = (0,1,0)$

$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)\}$ base ortonormal de u

$P_u(e_1) = \frac{e_1 \cdot u_1}{\|v_1\|}v_1 + \frac{e_1 \cdot v_2}{\|v_2\|}v_2 = v_1 = (1,0,0)$

$P_u(e_2) = e_2 = (0,1,0)$

$P_u(e_3) = (e_3 \cdot e_1)e_1 + (e_3 \cdot e_2)e_2 = 0$

$$M_{C \to C}(P_u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_u(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>2ª forma:</u> Igual que la 1ª forma.

3ª forma:

$$M_{C\to C}(P_u) = A(A^{\intercal}A)^{-1}A^{\intercal}$$

$$A^{\intercal}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\to F_2-F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1\to F_1-F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$M_{C\to C}(P_u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6) ¿Qué combinación lineal de los vectores $(1,2,-1)$ y $(1,0,1)$ está más "cerca" del vector $(2,1,1)$?

Paso 1: Definir la combinación lineal

Sea x la combinación lineal de los vectores:

$$x = \alpha(1,2,-1) + \beta(1,0,1),$$

donde α y β son escalares. Entonces:

$$x = (\alpha+\beta, 2\alpha, -\alpha+\beta)$$

Queremos minimizar la distancia entre x y el vector $(2,1,1)$. La distancia es dada por la nomra del vector diferencia:

$$\|x-(2,1,1)\|^2 = (\alpha+\beta-2)^2 + (2\alpha-1)^2 + (-\alpha+\beta-1)^2$$

Paso 2: Expresa la función objetivo

La función objetivo a minimizar es:

$$f(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta-2)^2 + (2\alpha-1)^2 + (-\alpha+\beta-1)^2.$$

Paso 3: Derivar con respecto a α y β

Derivamos $f(\alpha,\beta)$ respecto a α y β para encontrar los puntos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2(\alpha+\beta-2) + 4(2\alpha-1) - 2(\alpha+\beta-1) = 2\alpha + \cancel{2\beta} - 4 + 8\alpha - 4 + 2\alpha - \cancel{2\beta} + 2 = 12\alpha - 6$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = 2(\alpha+\beta-2) + 2(-\alpha+\beta-1) = \cancel{2\alpha} + 2\beta - 3 - \cancel{2\alpha} + 2\beta - 2 = 4\beta - 6$$

Paso 4: Resolver el sistema de ecuaciones

Igualamos las derivadas parciales a cero para encontrar los valores óptimos de α y β:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \longrightarrow 12\alpha - 6 = 0 \longrightarrow 12\alpha = 6 \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0 \longrightarrow 4\beta - 6 = 0 \longrightarrow \beta = \frac{3}{2}.$$

Paso 5: Construir la combinación lineal

Sustituimos $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$ en la combinación lineal:

$$x = \alpha(1,2,-1) + \beta(1,0,1)$$

Expandiendo:

$$x = \frac{1}{2}(1,2,-1) + \frac{3}{2}(1,0,1) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}, 1+0, -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) = (2,1,1)$$

7) Encuentra una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de R^3 tal que Col(A) sea el subespacio generado por u_1, u_2, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de los cuatro subespacios fundamentales de A contiene u_3? Calcula la proyección ortogonal de $b^\intercal = (1,2,7)$ sobre Col(A) y explica por qué esta proyección es una solución aproximada del sistema de ecuaciones $Ax = b$.

Paso 1: Encontrar una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

Encontrar una base para Col(A)

La columna de A, Col(A), es generada por las columnas de A. Sean los vectores columna:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos a aplicar el **proceso de Gram-Schmidt** para obtener vectores ortogonales y luego normalizarlos.

1.1) Primer vector ortogonal (u_1):

Tomamos v_1 como el primer vector ortogonal:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad \|v_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Entonces:

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

1.2) Segundo vector ortogonal (u_2):

Proyectamos v_2 sobre u_1:

$$\text{Proyección}_{u_1}(v_2) = \frac{v_2^\intercal u_1}{u_1^\intercal u_1} u_1.$$

Calculamos:

$$v_2^\intercal u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -3.$$

Entonces:

$$\text{Proyección}_{u_1}(v_2) = -3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Resta de v_2:

$$v_2^{\perp} = v_2 - \text{Proyección}_{u_1}(v_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normalizamos $v_2^{\perp}$ para obtener u_2:

$$\|v_2^{\perp}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Entonces:

$$u_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

1.3) Tercer vector ortogonal (u_3):

El subespacio generado por u_3 debe ser ortogonal a $\text{Col}(A)$. Como $\text{Col}(A)$ tiene dimensión 2, u_3 es cualquier vector ortogona a u_1 y u_2. Una forma práctica es tomar el producto cruz de u_1 y u_2:

$$u_3 = u_1 \times u_2.$$

Calculamos:

$$u_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \\ -\left(\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) \\ \frac{1}{9} - \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Subespacio fundamental al que pertence u_3

El vector u_3 es ortogonal a $\text{Col}(A)$, por lo que pertenece al subespacio $\text{Nuc}(A^{\intercal})$ (el núcleo de la traspuesta de A).

Paso 2: Proyección ortogonal de $b = (1, 2, 7)$ sobre $\text{Col}(A)$

La proyección de b sobre $\text{Col}(A)$ es:

$$\text{Proj}_{\text{Col}(A)}(b) = Pb,$$

donde $P = A(A^{\intercal}A)^{-1}A^{\intercal}$ es la matriz de proyección. Calculamos P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$$

$$(A^{\intercal}A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc:cc} 9 & -9 & 1 & 0 \\ -9 & 18 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 9 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} = \left[\begin{array}{cc:cc} 9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to \frac{1}{9}F_2]{F_1 \to \frac{1}{9}F_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right] \longrightarrow (A^{\intercal}A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

La proyección ortogonal del vector $b = (1, 2, 7)$ sobre $\mathrm{Col}(A)$ es:

$$Pb = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La proyección $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}(b)$ es el vector en $\mathrm{Col}(A)$ más cercano a b. Por lo tanto, si no existe un solución exacta para el sistema $Ax = b$ (porque b no pertence a $\mathrm{Col}(A)$), entonces la proyección ortogonal de b sobre $\mathrm{Col}(A)$ es la mejor aproximación.