Señales y Sistemas

Problemas Tema 2: Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Obtenga la convolución de las señales $x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ y $h(t) = t\prod\left(\frac{t-T}{2T}\right)$.

La convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$ se define como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Dado que $x(t)$ y $h(t)$ son funciones de duración finita, la integral se reduce al intervalo donde ambas funciones se superponen.

Paso a paso:

- **Intervalo de integración:**

  La convolución será no nula solo en el intervalo donde las funciones se superponen. Dado que $x(t)$ está definido en $[0, T]$ y $h(t)$ en $[0, 2T]$, la convolución $y(t)$ será no nula en el intervalo $[0, 3T]$.

- **Evaluación de la integral:**

  Para cada t en $[0, 3T]$, evaluamos la integral:

  $$y(t) = \int_0^T \prod\left(\frac{\tau-\frac{T}{2}}{T}\right)(t-\tau)\prod\left(\frac{t-\tau-T}{2T}\right)\mathrm{d}\tau.$$

  Simplificando las funciones rectangulares, la integral se reduce a:

  $$y(t) = \int_{\max(0,t-2T)}^{\min(T,t)} (t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

- **Cálculo de la integral:**

  Evaluamos la integral en los intervalos donde las funciones se superponen:

  - Para $0 \leq t < T$, la integral es:
    $$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\mathrm{d}\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

  - Para $T \leq t < 2T$, la integral es:
    $$y(t) = \int_0^T (t-\tau)\mathrm{d}\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^T = tT - \frac{T^2}{2}$$

  - Para $2T \leq t < 3T$, la integral es:
    $$y(t) = \int_{t-2T}^T (t-\tau)\mathrm{d}\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{t-2T}^T = \frac{(3T-t)^2}{2}$$

La convolución $y(t)$ es:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2}, & 0 \leq t < T \\ tT - \dfrac{T^2}{2}, & T \leq t < 2T \\ \dfrac{(2T-t)^2}{2}, & 2T \leq t \leq 3T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2) Calcule $\left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right) * \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$, con $T_2 > T_1$.

Paso 1: Comprender las señales

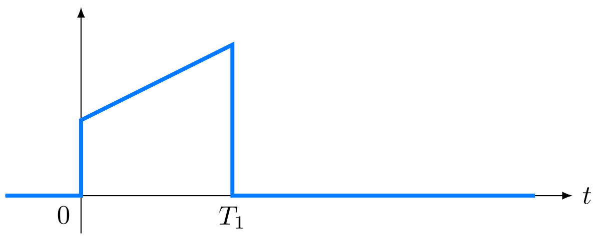
- Primera señal:

$$x(t) = \left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right)$$

  - La función $\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right)$ es una función rectangular centrada en $t = \frac{T_1}{2}$ con un ancho de T_1. Esto significa que $\prod$ es igual a 1 en el intervalo $[0, T_1]$ y 0 fuera de este intervalo.
  - Por lo tanto, $x(t)$ es una función lineal definida únicamente $[0, T_1]$, con:

$$x(t) = \frac{t}{T_1} + 1, \quad \text{para } t \in [0, T_1].$$

$$x(t) = \left(\frac{t}{T_1}+1\right)\prod\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right)$$

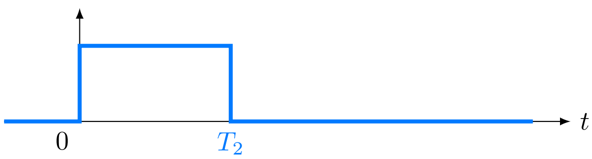


- Segunda señal:

$$h(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right).$$

  - Esta es una función rectangular centrada en $t = \frac{T_2}{2}$ con un ancho de T_2. Es igual a 1 en el intervalo $[0, T_2]$ y 0 fuera de este intervalo.

$$h(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$$



- Convolución de las señales

  La convolución de $x(t)$ y $h(t)$ se define como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

  Dado que $x(t)$ está definido en $[0, T_1]$ y $h(t)$ en $[0, T_2]$, la convolución será no nula únicamente en el intervalo donde ambas funciones se superponen. Esto ocurre en el intervalo $[0, T_1 + T_2]$.

Intervalo de integración:

- Para cada $t \in [0, T_1 + T_2]$, la integral se reduce a:

$$y(t) = \int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} x(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

ya que $h(t-\tau)$ es no nula cuando $t - \tau \in [0, T_2]$, es decir, $\tau \in [t - T_2, t]$, y $x(\tau)$ es no nula solo cuando $\tau \in (0, T_1)$.

Paso 2: Evaluar la integral

En el interalo de integración, $x(\tau) = \frac{\tau}{T_1} + 1$. Sustituyendo esto en la integral:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} \left(\frac{\tau}{T_1} + 1\right) \mathrm{d}\tau = \int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} \frac{\tau}{T_1}\mathrm{d}\tau + \int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} 1\mathrm{d}\tau \\ &= \boxed{\frac{1}{T_1}\left(\frac{\min(T_1,t)^2}{2} - \frac{\max(0,t-T_2)^2}{2}\right) + \min(T_1,t) - \max(0,t-T_2)} \end{aligned}$$

- $\int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} \frac{\tau}{T_1}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T_1}\int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} \tau\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T_1}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} = \frac{1}{T_1}\left(\frac{\min(T_1,t)^2}{2} - \frac{\max(0,t-T_2)^2}{2}\right).$
- $\int_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} 1\mathrm{d}\tau = [\tau]_{\max(0,t-T_2)}^{\min(T_1,t)} = \min(T_1,t) - \max(0,t-T_2)$

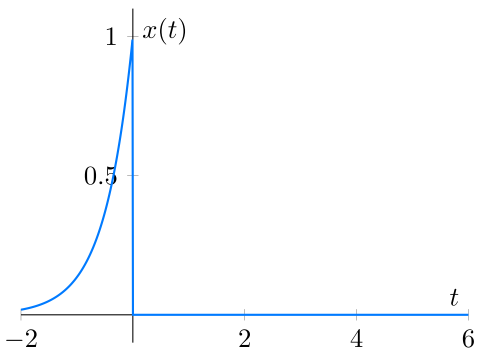
3) Calcule la convolución de $x(t) = e^{2t}u(-t)$ con $h(t) = u(t-3)$.

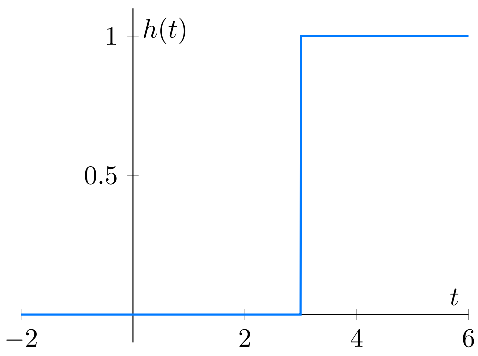
La convolució se define como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Análisis de las señales

- $x(t) = e^{2t}u(-t)$ es una señal exponencial que existe solo para $t < 0$.
- $h(t) = u(t-3)$ es un escalón unitario desplazado 3 unidades a la derecha.





Determinación de los límites de integración

Para que la integral no sea nula, necesitamos que:

- $\tau < 0$ (debido a $u(-\tau)$ en $x(\tau)$)
- $t - \tau > 3$ (debido a $u(t-\tau-3)$ en $h(t-\tau)$)

De $t - \tau > 3$, obtenemos: $\tau < t - 3$. Por tanto, los límites de itengración son:

- Límite inferior: $-\infty$
- Límite superior: $\min(0, t-3)$

Cálculo de la convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\min(0,t-3)} e^{2\tau}(u-\tau)u(t-\tau-3)\mathrm{d}\tau$$

Debemos considerar dos casos:

Caso 1: $t < 3$

En este caso, $t-3<0$, por lo que $\min(0,t-3) = t-3$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}e^{2(t-3)} = \frac{1}{2}e^{2t-6}$$

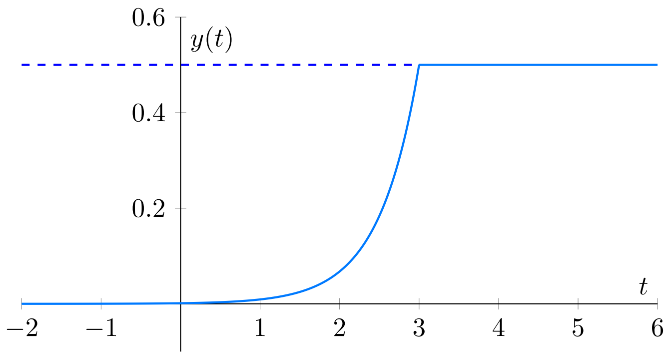
Caso 2: $t \geq 3$

En este caso, $t-3 \geq 0$, por lo que $\min(0,t-3) = 0$

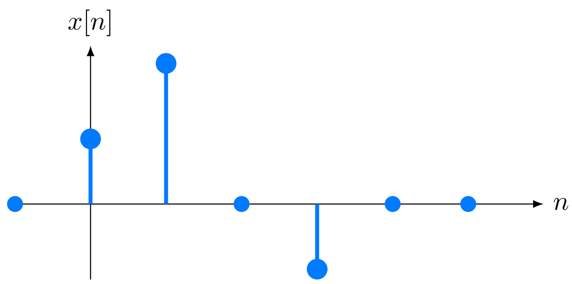
$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}$$

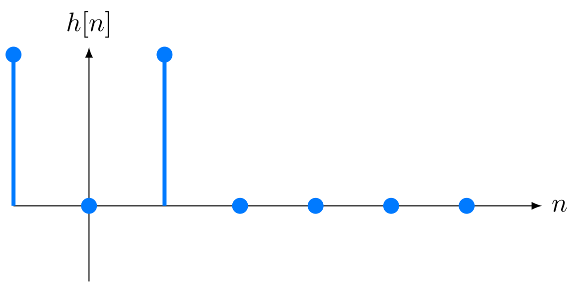
La convolución es:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2t-6}, & t<3 \\ \frac{1}{2}, & t \geq 3 \end{cases}$$



4) Sea $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ y $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$





a) $y_1 = x[n] * h[n]$

La convolución se calcula como:

$$y_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

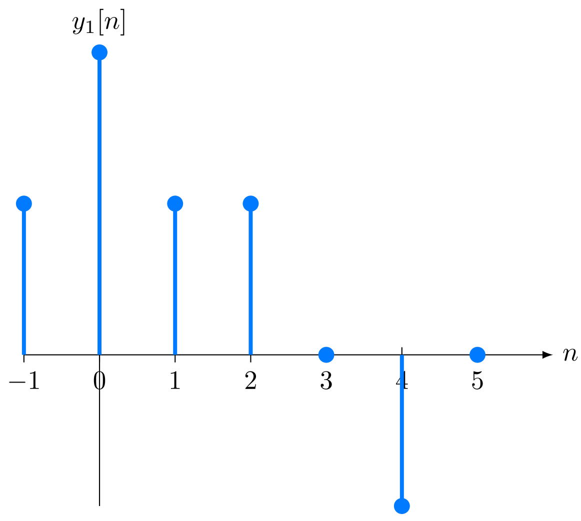
Sustituyendo $x[k]$ y $h[n-k]$, tenemos:

$$y_1[n] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[3]h[n-3]$$

- $x[0] = 1 \longrightarrow h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$
- $x[1] = 2 \longrightarrow h[n-1] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2]$
- $x[3] = -1 \longrightarrow h[n-3] = 2\delta[n-2] + 2\delta[n-4]$

Sumando todas las contribuciones:

$$y_1[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n] + 4\delta[n-2] - 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$$



b) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

Señal desplazada:

$$x[n+2] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - \delta[n-1]$$

La convolución se calcula como:

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k+2]h[n-k]$$

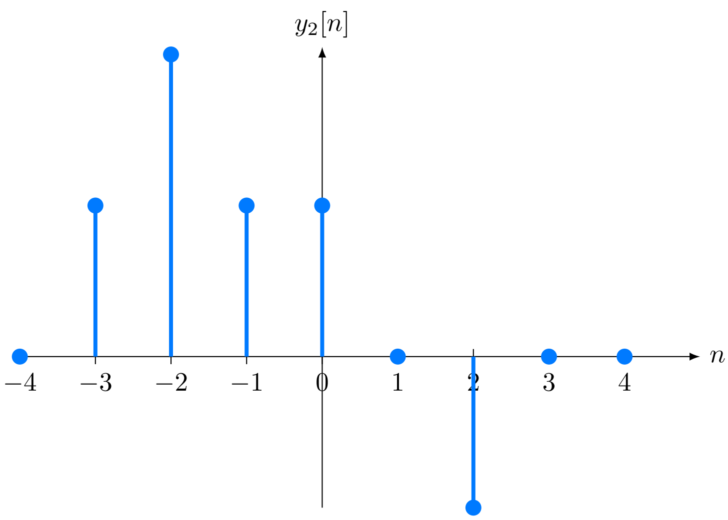
Sustituyendo $x[k+2]$ y $x[n-k]$, tenemos:

$$y_2[n] = x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] + x[1]h[n-1]$$

- $x[-2] = 1 \longrightarrow h[n+2] = 2\delta[n+3] + 2\delta[n+1]$
- $x[-1] = 2 \longrightarrow h[n+1] = 2\delta[n+2] + 2\delta[n]$
- $x[1] = -1 \longrightarrow h[n-1] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2]$

Sumando todas las contribuciones:

$$y_2[n] = 2\delta[n+3] + 2\delta[n+1] + 4\delta[n+2] + 4\delta[n] - 2\delta[n] - 2\delta[n-2] = 2\delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 2\delta[n] - 2\delta[n-2]$$



c) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

Señal desplazada:

$$h[n+2] = 2\delta[n+3] + 2\delta[n+1]$$

La convolución se calcula como:

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k+2]$$

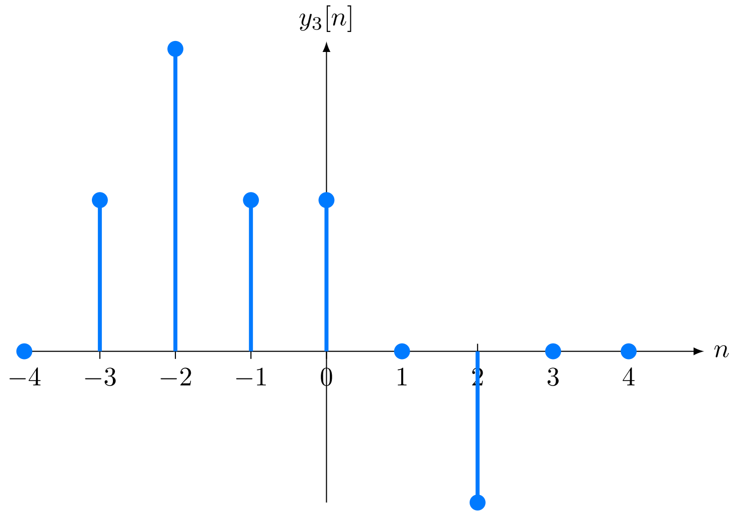
Sustituyendo $x[k]$ y $h[n-k+2]$, tenemos:

$$y_3[n] = x[0]h[n+2] + x[1]h[n+1] + x[3]h[n-1]$$

- $x[0] = 1 \longrightarrow h[n+2] = 2\delta[n+3] + 2\delta[n+1]$
- $x[1] = 2 \longrightarrow h[n+1] = 2\delta[n+2] + 2\delta[n]$
- $x[3] = -1 \longrightarrow h[n-1] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2]$

Sumando todas las contribuciones:

$$y_3[n] = 2\delta[n+3]+2\delta[n+1]+4\delta[n+2]+4\delta[n]-2\delta[n]-2\delta[n-2] = 2\delta[n+3]+4\delta[n+2]+2\delta[n+1]+2\delta[n]-2\delta[n-2]$$



5) Un sistema lineal S relaciona su entrada $x[n]$ y su salida $y[n]$ como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

donde $g[n] = u[n] - u[n-4]$.

a) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-1]$

La relación entre la entrada y la salida está dada por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

Sustituyendo $x[n] = \delta[n-1]$, sabemos que $\delta[n-1]$ es no nula cuando $n = 1$. Por lo tanto, la suma se reduce a:

$$y[n] = g[n-2(1)] = g[n-2]$$

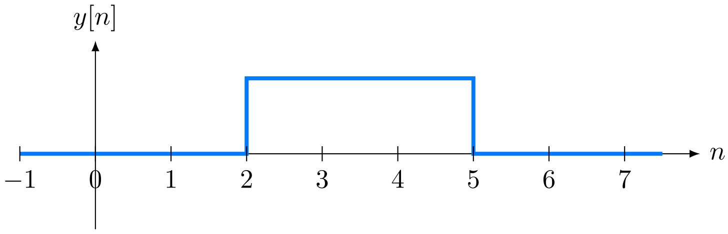
Dado que $g[n] = u[n] - u[n-4]$, tenemos:

$$g[n-2] = u[n-2] - u[n-6]$$

Por lo tanto:

$$y[n] = u[n-2] - u[n-6]$$

Esto significa que $y[n]$ es un pulso rectangular que comienza en $n = 2$ y termina en $n = 5$ (ya que $u[n-6]$) se activa en $n = 6$.



b) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-2]$

De nuevo, la relación es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

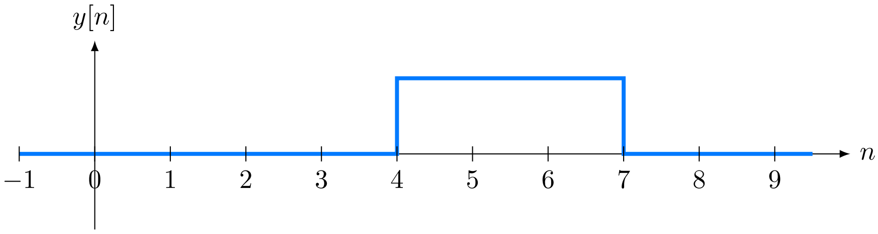
Sustituyendo $x[n] = \delta[n-2]$, sabemos que $\delta[n-2]$ es no nula solo cuando $n = 2$. Por lo tanto, la suma se reduce a:

$$y[n] = g[n-2(2)] = g[n-4]$$

Dado que $g[n] = u[n] - u[n-4]$, tenemos:

$$g[n-4] = u[n-4] - u[n-8]$$

Esto significa que $y[n]$ es un pulso rectangular que comienza en $n = 4$ y termina en $n = 7$ (ya que $u[n-8]$ se activa en $n = 8$)



c) ¿Es S un sistema LTI?

Para determinar si el sitema es **lineal** e **invariante** en el tiempo, evaluamos cada propiedad:

- **Linealidad:**

  Un sistema es lineal si satisface el principio de superposición, es decir, si para dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ con salidas $y_1[n]$ y $y_2[n]$, respectivamente, se cumple que:

  $$S\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

  En este caso, la salida está dada por una suma ponderada de $x[k]$ y $g[n-2k]$, lo cual es una operación lineal. Por lo tanto, el sistema es **lineal**.

- **Invanrianza en el tiempo:**

  Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la entrada produce el mismo desplazamiento en la salida. Es decir, si para una entrada $x[n]$ con salida $y[n]$, al desplazar la entrada $x[n-n_0]$, la salida se desplaza de manera idéntica $y[n-n_0]$.

  En este caso, la salida depende de $g[n-2k]$, que introduce un factor de escalamiento en el índice k. Esto significa que el sistema **no es invariante en el tiempo**, ya que el desplazamiento de la entrada no se traduce directamente en un desplazamiento de la salida.

d) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$

De nuevo, la relación es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

Sustituyendo $x[n] = u[n]$, sabemos que $u[n]$ es no nula para $k \geq 0$. Por lo tanto, la suma se reduce a:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} g[n-2k]$$

Dado que $g[n] = u[n] - u[n-4]$, tenemos:

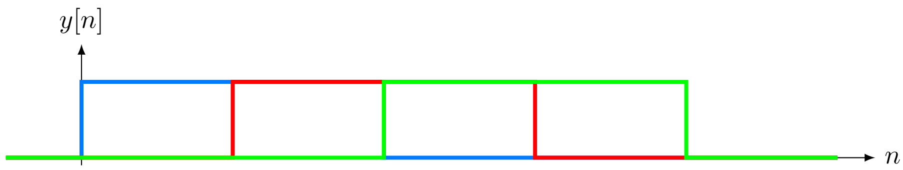
$$g[n-2k] = u[n-2k] - u[n-2k-4]$$

Sustituyendo esto en la suma:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (u[n-2k] - u[n-2k-4])$$

La suma se puede interpretar como una superposición de pulsos rectangulares desplazados. Cada término $u[n-2k] - u[n-2k-4]$ es un pulso rectangular de longitud 4, comenzando en $n = 2k$ y terminando en $n = 2k+3$.

Por lo tanto, $y[n]$ es una secuencia de pulsos rectangulares de longitud 4, comenzando en $n = 0$ y repitiéndose cada 2 unidades de tiempo.



6) Determine y esboce la convolución de las siguientes señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

La convolución de dos señales $x(t)$ y $h(t)$ está definida como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

En este caso:

- $x(t)$ es una función triangular definida por tramos:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- $h(t)$ es una combinación de deltas desplazadas:

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

Dado que $h(t)$ está compuesto por deltas, la convolución se simplifica porque las deltas actúan como "muestradoras" de $x(t)$. Específicamente, la convolución se convierte en:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t+2) + 2x(t+1)$$

Paso 1: Determinar $x(t+2)$

Para obtener $x(t+2)$, desplazamos $x(t)$ dos unidades hacia la izquierda. Esto significa que el soporte de $x(t+2)$ (el intervalo donde es cero) será:

$$-2 \leq t \leq -1$$

En este intervalo, la forma de $x(t+2)$ es:

- Para $-2 \leq t \leq -1, x(t+2) = t+2+1 = t+3$.

Por lo tanto:

$$x(t+2) = \begin{cases} t+3, & -2 \leq t \leq -1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Paso 2: Determinar $2x(t+1)$

Para obtener $2x(t+1)$, desplazamos $x(t)$ una unidad hacia la izquierda y multiplicamos por 2. Esto significa que el soporte de $2x(t+1)$ será:

$$-1 \leq t \leq 1$$

En este intervalo, la forma de $x(t+1)$ es:

- Para $-1 \leq t \leq 0, x(t+1) = t+1+1 = t+2$
- Para $0 < t \leq 1, x(t+1) = 2-(t-1) = 1-t$

Multiplicando por 2, obtenemos:

$$2x(t+1) = \begin{cases} 2(t+2) = 2t+4, & -1 \leq t \leq 0 \\ 2(1-t) = 2-2t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Paso 3: Sumar $x(t+2)$ y $2x(t+1)$

Ahora sumamos las dos contribuciones $x(t+2)$ y $2x(t+1)$. El soporte total de $y(t)$ será la unión de los soportes de $x(t+2)$ y $2x(t+1)$, es decir:

$$-2 \leq t \leq 1$$

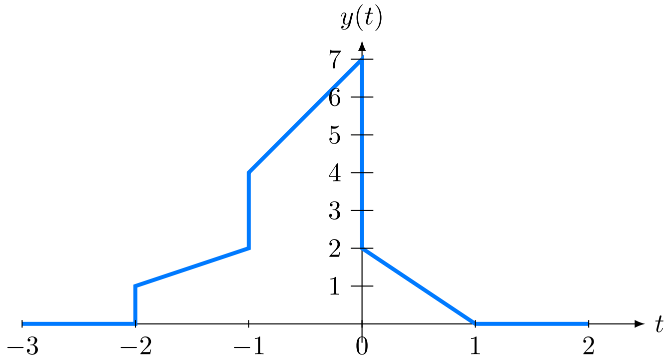
Dividimos el cálculo en intervalos:

- Para $-2 \leq t < -1$:
  - $x(t+2) = t+3$
  - $2x(t+1) = 0$ (porque $t+1 < -1$)
  - $y(t) = t+3$
- Para $-1 \leq t < 0$:
  - $x(t+2) = t+3$
  - $2x(t+1) = 2t+4$
  - $y(t) = (t+3) + (2t+4) = 3t+7$
- Para $0 \leq t \leq 1$:

- $x(t+2) = 0$ (porque $t+2 > 2$)
- $2x(t+1) = 2 - 2t$
- $y(t) = 0 + (2 - 2t) = 2 - 2t$

La salida $y(t)$ es:

$$y(t) = \begin{cases} t+3, & -2 \leq t < -1 \\ 3t+7, & -1 \leq t < 0 \\ 2-2t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



7) Sean

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases} \qquad h(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right), \text{ donde } 0 < \alpha \leq 1$$

a) Determine y esboce $y(t) = x(t) * h(t)$.

La convolución de $x(t)$ y $h(t)$ está definida como:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Dado que $x(t)$ es una función rectangular definida como:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y que $h(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, podemos escribir $h(t)$ como:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \frac{t}{\alpha} \leq 1 \qquad \longrightarrow 0 \leq t \leq \alpha \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \alpha \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ambas señales son rectángulos, y la convolución de dos rectángulos es un triángulo. El soporte de $y(t)$ será la suma de los soporte de $x(t)$ y $h(t)$, es decir:

$$\text{Soporte de } y(t): \quad [0, 1+\alpha]$$

Cálculo de $y(t)$:

La convolución se calcula como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Dado que $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$, son no nula en los intervalos $[0,1]$ y $[t-\alpha,t]$, respectivamente, la integral se reduce al intervalo donde ambos se solapan. Esto depende del valor de t:

- **Para $0 \leq t \leq \alpha$:**

  En este caso, el solapamiento ocurre en $[0,t]$. Por lo tanto:

$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot 1\mathrm{d}\tau = [\tau]_0^t = t$$

- **Para $\alpha \leq t \leq 1$:**

  En este caso, el solapamiento ocurre en $[t-\alpha,t]$. Por lo tanto:

$$y(t) = \int_{t-\alpha}^t 1 \cdot 1\mathrm{d}\tau = [\tau]_{t-\alpha}^t = t-(t-\alpha) = \alpha$$

- **Para $1 < t \leq 1+\alpha$:**

  En este caso, el solapamiento ocurre en $[t-\alpha,1]$. Por lo tanto:

$$y(t) = \int_{t-\alpha}^1 1 \cdot 1\mathrm{d}\tau = [\tau]_{t-\alpha}^1 = 1-(t-\alpha) = 1+\alpha-t$$

- **Para $t > 1+\alpha$:**

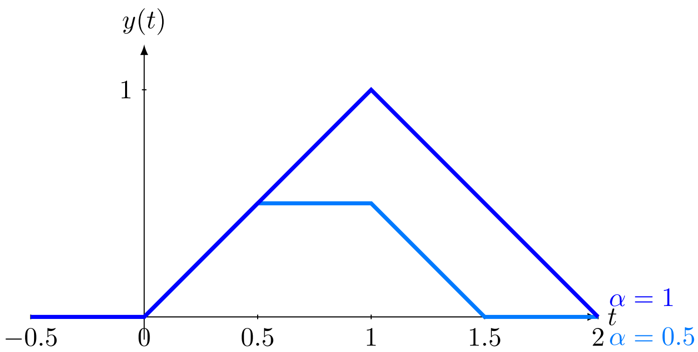
  No hay solapamiento, por lo que:

$$y(t) = 0$$

La salida $y(t)$ es:

$$y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \alpha \\ \alpha, & \alpha < t \leq 1 \\ 1+\alpha-t, & 1 < t \leq 1+\alpha \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto corresponde a un triángulo con base en $[0,1+\alpha]$, que crece linealmente en $[0,\alpha]$, se mantiene constante en $[\alpha,1]$, y decrece linealmente en $[1,1+\alpha]$.



b) Si $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de α?

La derivada de $y(t)$ seá:

- Para $0 \leq t \leq \alpha$, $y(t) = t$, por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 1$$

- Para $\alpha < t \leq 1, y(t) = \alpha$, por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

8) Sean

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \qquad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

a) Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$

b) Calcule $g(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} * h(t)$

c) Establece una relación entre $g(t)$ e $y(t)$

9) Calcule la convolución de los siguientes pares de señales:

a) $x[n] = \alpha^n u[n], \quad h[n] = \beta^n u[n], \quad \alpha \neq \beta$

b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

c) $x[n] = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n u[n-4], \quad h[n] = 4^n u[2-n]$

d) $x[n] = 2^n u[-n], \quad h[n] = u[n]$

10) ¿Cuál/es de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas LTI estables?

a) $h(t) = e^{-(1-2j)t}u(t)$

b) $h(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$

11) ¿Cuál/es de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas LTI estables?

a) $h[n] = n\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $h[n] = 3^n u[-n+10]$

12) Para las siguientes respuestas al impulso de sistemas LTI, determine si cada sistema es causal y/o estable, justificando la respuesta.

a) $h[n] = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n u[n]$

- **Causalidad:** El término $u[n]$ asegura que $h[n] = 0$ para $n < 0$. Por lo tanto, el sistema es causal.
- **Escalabilidad:** Para $n \geq 0, |h[n]| = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$. La suma de esta serie geométrica es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} < \infty$$

Por lo tanto, el sistema es estable

b) $h[n] = 0.8^n u[n+2]$

- **Causalidad:** El término $u[n+2]$ implica que $h[n] \neq 0$ para $n \geq -2$. Como $h[n] \neq 0$ para $n < 0$, el sistema no es causal.
- **Estabilidad:** Para $n \geq -2, |h[n]| = 0.8^n$. Cambiando el índice de la suma ($m = n+2$), tenemos:

$$\sum_{n=-2}^{\infty} 0.8^n = 0.8^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} 0.8^m = \frac{1}{0.8^2} \cdot \frac{1}{1-0.8} = \frac{1}{0.64} \cdot 5 = 7.8125 < \infty$$

Por lo tanto, el sistema es estable.

c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

- **Causalidad:** El término $u[-n]$ implica que $h[n] \neq 0$ solo para $n \leq 0$. Esto significa que el sistema depende de valores futuros de la entrada, por lo que no es causal.
- **Estabilidad:** Para $n \leq 0, |h[n]| = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n}$. Cambiando el índice ($m = -n$), tenemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{0} 2^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m$$

Esta serie geométrica diverge, por lo que el sistema no es estable.

d) $h[n] = 5^n u[3-n]$

- **Causalidad:** El término $u[3-n]$ implica que $h[n] \neq 0$ solo para $n \leq 3$. Esto significa que el sistema depende de valores futuros de la entrada, por lo que no es causal.
- **Estabilidad:** Para $n \leq 3, |h[n]| = 5^n$. Esta serie incluye términos crecientes (por ejemplo, 5^3), por lo que no es absolutamente sumable. El sistema no es estable.

e) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1.01^n u[n-1]$

- **Causalidad:** Ambos términos incluyen $u[n]$ o $u[n-1]$, lo que asegura que $h[n] = 0$ para $n < 0$. Por lo tanto, el sistema es causal.
- **Estabilidad:** EL primer término $\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ es absolutamente sumable, ya que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Sin embargo, el segundo término $1.01^n u[n-1]$ crece exponencialmente y no es absolutamente sumable. Por lo tanto, el sistema no es estable.

f) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 1.01^n u[1-n]$

- **Causalidad:** El primer término $\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ es causal, pero el segundo término $1.01^n u[1-n]$ implica que $h[n] \neq 0$ para $n > 1$. Por lo tanto, el sistema no es causal.
- **Estabilidad:** El primer término es aboslutamente sumable, pero el segundo término $1.01^n u[1-n]$ no lo es, ya que incluye términos crecientes. Por lo tanto, el sistema no es estable.

g) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

- **Causalidad:** El término $u[n-1]$ asegura que $h[n] = 0$ para $n < 1$. Por lo tanto el sistema es causal.
- Para $n \geq 1, |h[n]| = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ decrece exponencialmente, el factor n hace que la serie no sea absolutamente sumable. Por ejemplo, usando el criterio de comparación, la serie diverge. Por lo tanto, el sistema no es estable.

13) Considere un sistema LTI que se encuentra incialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + 4y(t) = x(t)$$

a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

La ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 4y(t) = x(t).$$

Para encontrar la **respuesta al impulso** $h(t)$, consideramos la entrada $x(t) = \delta(t)$. En este caso, la ecuación difernecial se convierte en:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 4h(t) = \delta(t).$$

Resolviendo la ecuación diferencial

- **Ecuación homogénea:** Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada ($x(t) = 0$):

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_h(t) + 4h_h(t) = 0.$$

  La solución general de esta ecuación es:

  $$h_h(t) = Ce^{-4t},$$

  donde C es una constante que se determinará con las condiciones iniciales.

- **Solución particular:** Dado que la entrada es un impulso $\delta(t)$, la solución particular se encuentra considerando la propiedad de causalidad del sistema LTI. La respuesta al impulso $h(t)$ debe ser cero para $t < 0$. Además, integramos ambos lados de la ecuación diferencial en un intervalo infinitesimal alrededor de $t = 0$ para determinar la discontinuidad en $h(t)$:

  $$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) + 4h(t) \right) \mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\, \mathrm{d}t.$$

El primer término se evalúa como:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)\, \mathrm{d}t = h(\epsilon) - h(-\epsilon).$$

Para un sistema causal, $h(t) = 0$ para $t < 0$, por lo que $h(-\epsilon) = 0$. Esto implica:

$$h(\epsilon) - 0 + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} 4h(t)\, \mathrm{d}t = 1.$$

En el límite $\epsilon \to 0$, el término $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} 4h(t)\, \mathrm{d}t$ desaparece, y obtenemos:

$$h(0^+) = 1.$$

- **Solución completa:** La solución completa es:

  $$h(t) = \begin{cases} e^{-4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la **respuesta al impulso** del sistema es:

$$h(t) = e^{-4t}u(t),$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario.

b) Si $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$, calcule $y(t)$

La salida de un sistema LTI se obitnee mediante la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso

$h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Sustituyendo $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$ y $h(t) = e^{-4t}u(t)$, tenemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1+3j)\tau}u(\tau)e^{-4(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Debido a las funciones escalón $u(\tau)$ y $u(t-\tau)$, los límites de integración se restringen a $0 \leq \tau \leq t$. Por lo tanto:

$$y(t) = \int_0^t e^{(-1+4j)\tau}e^{-4(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

Simplificamos el exponente:

$$e^{(-1+3j)\tau}e^{-4(t-\tau)} = e^{-4t}e^{(3j-1+4)\tau} = e^{-4t}e^{(3j+3)\tau}.$$

Entonces:

$$y(t) = e^{-4t}\int_0^t e^{(3j+3)\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Resolvemos la integral:

$$\int_0^t e^{(3j+3)\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3j+3}\left[e^{(3j+3)\tau}\right]_0^t = \frac{1}{3j+3}\left(e^{(3j+3)t} - 1\right).$$

Por lo tanto:

$$y(t) = e^{-4t} \cdot \frac{1}{3j+3}\left(e^{(3j+3)t} - 1\right) = \frac{1}{3j+3}\left(e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}\right).$$

14) Considere un sistema LTI que se encuentra inicialmente en reposo y cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se relacionan por la ecuación diferencial

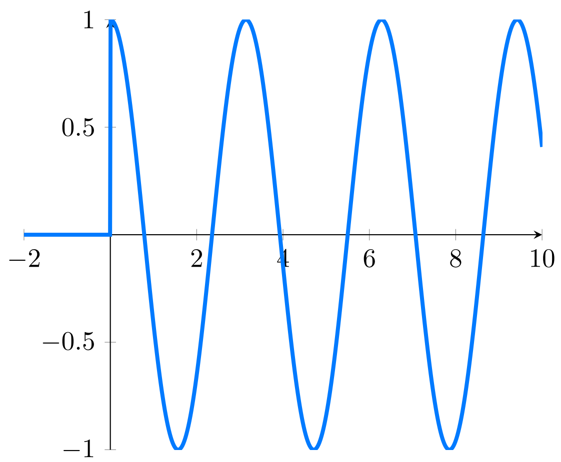
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

a) Si $x(t) = \cos(2t)u(t)$, calcule $y(t)$.

La ecuación diferencia que describe el sistema es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 3y(t) = 2x(t).$$

Dado que $x(t) = \cos(2t)u(t)$, la entrada es causal, y el sistema está inicialmente en resposo. Resolveremos esta ecuación diferencial para $y(t)$.



Paso 1: Representación de la entrada

La entrada $x(t) = \cos(2t)u(t)$ puede escribirse en términos de exponenciales complejas usando la identidad de Euler:

$$\cos(2t) = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2}.$$

Por lo tanto:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right) u(t).$$

Paso 2: Solución de la ecuación diferencial

La solución general de la ecuación difernecial tiene dos componentes:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

donde $y_h(t)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada ($x(t) = 0$) y $y_p(t)$ es una solución particular.

a) Solución homogénea

La ecuación homogénea es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_h(t) + 3y_h(t).$$

Resolviendo, obtenemos:

$$y(t) = Ce^{-3t},$$

donde C es una constante que se determinará con las condiciones iniciales.

b) Solución particular

Para encontrar $y_p(t)$, asumimos una solución de la forma:

$$y_p(t) = Ae^{j2t} + Be^{-j2t}.$$

Sustituyendo $y_p(t)$ en la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{j2t} + Be^{-j2t}\right) + 3\left(Ae^{j2t} + Be^{-j2t}\right) = 2x(t).$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{j2t} + Be^{-j2t}\right) = j2Ae^{j2t} - j2Be^{-j2t}.$$

Sustituyendo:

$$(j2A + 3A)e^{j2t} + (-j2B + 3B)e^{-j2t} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right).$$

Agrupando términos:

$$((j2 + 3)A)e^{j2t} + ((-j2 + 3)B)e^{-j2t} = e^{j2t} + e^{-j2t}.$$

Igualando coeficientes de e^{j2t} y e^{-j2t}:

- Para e^{j2t} : $(j2 + 3)A = 1$.
- Para e^{-j2t} : $(-j2 + 3)B = 1$.

Resolviendo para A y B:

$$A = \frac{1}{2j + 3}, \quad B = \frac{1}{-2j + 3}.$$

Simplificamos A y B multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$A = \frac{1}{2j + 3} \cdot \frac{-2j + 3}{-2j + 3} = \frac{-2j + 3}{(2j + 3)(-2j + 3)} = \frac{-2j + 3}{13}$$
$$B = \frac{1}{-2j + 3} \cdot \frac{2j + 3}{2j + 3} = \frac{2j + 3}{(2j + 3)(-2j + 3)} = \frac{2j + 3}{13}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p(t) = \frac{-2j+3}{13} e^{j2t} + \frac{2j+3}{13} e^{-j2t}.$$

Usando la identidad de Euler para regresar a términos reales:

$$y_p(t) = \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t).$$

c) Solución completa

La solución completa es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-3t} + \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t).$$

Dado que el sistema está inicialmente en reposo ($y(0) = 0$), sustituimos $t = 0$ para determinar C:

$$y(0) = C + \frac{3}{13}\cos(0) + \cancel{\frac{2}{13}\sin(0)} = 0.$$
$$C + \frac{3}{13} = 0 \longrightarrow C = -\frac{3}{13}.$$

Por lo tanto, la solución final es:

$$y(t) = -\frac{3}{13}e^{-3t} + \frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t).$$

b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.

La respuesta al impulso $h(t)$ se obtiene resolviendo la ecuación diferencial con $x(t) = \delta(t)$. La ecuación se convierte en:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) + 3h(t) = 2\delta(t).$$

Integrando ambos lados en un intervalo infinitesimal alrededor de $t = 0$, obtenemos:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} 3h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} 2\delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

El primer término es $h(\epsilon) - h(-\epsilon)$, y dado que $h(t) = 0$ para $t < 0$, esto se reduce a $h(0^+) = 2$. Por lo tanto, la solución es:

$$h(t) = Ce^{-3t}u(t).$$

Usando $h(0^+) = 2$, tenemos $C = 2$. Por lo tanto:

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t).$$

15) Obtenga la respuesta al impulso, así como las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad de los siguientes sistemas:

a) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$

Respuesta al impulso

Para encontrar la respuesta al impulso $h(t)$, sustituimos $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

La integral de la delta de Dirac es la función escalón unitario $u(t)$. Por lo tanto:

$$h(t) = u(t).$$

Propiedades

- **Memoria:** El sistema tiene memoria, ya que la salida en t depende de los valores pasado de la entrada ($x(\tau)$ para $\tau \leq t$).
- **Causalidad:** El sistema es causal, ya que la salida en t depende únicamente de valores de la entrada para $\tau \leq t$.
- **Estabilidad:** El sistema no es estable. Por ejemplo, si $x(t) = 1$ (una entrada acotada), la salida es $y(t) = t$, que no está acotada.
- **Invarianza en el tiempo:** El sistema es invariante en el tiempo. Si desplazamos la entrada $x(t)$ por t_0, la salida también se desplaza por t_0.
- **Linealidad:** El sistema es lineal, ya que satisface la superposición.

b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} 2x(\tau - 5)\mathrm{d}\tau$

Respuesta al impulso

Sustituyendo $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} 2\delta(\tau - 5)\mathrm{d}\tau.$$

La delta de Dirac se activa en $\tau = 5$, y la integral es cero para $t < 5$ y 2 para $t \geq 5$. Por lo tanto:

$$h(t) = 2u(t - 5).$$

Propiedades

- **Memoria:** El sistema tiene memoria, ya que la salida depende de valores pasados de la entrada.
- **Causalidad:** El sistema no es causal, ya que la salida en t depende de valores de la entrada en $\tau = t - 5$, que puede ser un valor futuro si $t < 5$.
- **Estabilidad:** El sistema no es estable. Por ejemplo, si $x(t) = 1$, la salida crece sin límite.
- **Invarianza en el tiempo:** El sistema es invariante en el tiempo. UN desplazamiento en la entrada produce un desplazamiento equivalente en la salida.
- **Linealidad:** El sistema es lineal, ya que satisface la superposición.

c) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}3x(\tau - 2)\mathrm{d}\tau$

Respuesta al impulso

Sustituyendo $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}3\delta(\tau - 2)\mathrm{d}\tau.$$

La delta de DIrac se activa en $\tau = 2$, y la integral evalúa:

$$y(t) = 3e^{-(t-2)} \text{ para } t \geq 2.$$

Por lo tanto:

$$h(t) = 3e^{-(t-2)}u(t - 2).$$

Propiedades

- **Memoria:** El sistema tiene memoria, ya que la salida depende de valores pasados de la entrada.
- **Causalidad:** El sistema no es causal, ya que la salida en t depende de valores de la entrada $\tau = t - 2$, que puede ser un valor futuro si $t < 2$.
- **Estabilidad:** El sistema es estable. La respuesta al impulso $h(t)$ es absolutamente integrable, ya que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{2}^{\infty} 3e^{-(t-2)} \, \mathrm{d}t = 3.$$

- **Invarianza en el tiempo:** El sistema no es invariante en el tiempo debido al término $e^{-(t-\tau)}$, que depende explícitamente de t.
- **Linealidad:** El sistema es lineal, ya que satisface la superposición.

d) $y(t) = \int_{t-3}^{t+2} e^{-(t+\tau)} x(\tau - 2) \mathrm{d}\tau$

Respuesta al impulso

Sustituyendo $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \int_{t-3}^{t+2} e^{-(t+\tau)} \delta(\tau - 2) \mathrm{d}\tau.$$

La delta de Dirac se activa en $\tau = 2$, pero esto ocurre solo si $t - 3 \leq 2 \leq t + 2$, es decir, si $t \in [1, 5]$, En este intervalo, la integral evalúa:

$$y(t) = e^{-(t+2)} \text{ para } t \in [1, 5].$$

Fuera de este intervalo ($t < 1$ o $t > 5$), la integral es cero. Por lo tanto:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-(t+2)}, & 1 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedades

- **Memoria:** El sistema tiene memoria, ya que la salida depende de valores pasados de la entrada.
- **Causalidad:** El sistema no es causal, ya que la salida en t depende de valores de la entrada en $\tau - 2$, que puede ser un valor futuro.
- **Estabilidad:** El sistema es estable. La respuesta al impulso $h(t)$ es absolutamente integrable, ya que está acotada en el intervalo $[1, 5]$.
- **Invarianza en el tiempo:** El sistema no es invariante en el tiempo debido al término $e^{-(t+\tau)}$, que depende explícitamente de t.
- **Linealidad:** El sistema es lineal, ya que satisface la superposición.

16) Un sistema discreto viene determinado por la relación entrada-salida

$$y[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}(n+2)} x[n-2].$$

Analice las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad del sistema.

17) Considere la señal $x[n] = \bigwedge\left(\frac{n}{4}\right) + \prod\left(\frac{n-2}{5}\right)$. Obtenga y represente la parte par e impar de esta señal. Calcule la energía y potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal defindia en energía o en potencia.

18) Calcule la convolución de las señales

$$x_1[n] = (n-6) \prod\left(\frac{n-6}{13}\right) \qquad x_2[n] = \prod\left(\frac{-n-3}{5}\right)$$

Nota: la suma de una progresión aritmética $a_{n_i}, a_{n_i+1}, \ldots, a_{n_f}$, con $a_{n_i+1} = a_{n_i} + d, a_{n_i+2} = a_{n_i} + 2d, \ldots$ es

$$\sum_{k=n_i}^{n_f} a_k = \frac{(n_f - n_i + 1)(a_{n_i} + a_{n_f})}{2}.$$