

Señales y Sistemas

Problemas Tema 1: Conceptos Básicos de Señales y Sistemas

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Expresa cada uno de los siguientes números complejos en su parte real e imaginaria ($a + jb$):

$$\bullet \frac{1}{2}e^{j\pi} = \frac{1}{2}(\cos(\pi) + j \sin(\pi)) = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{1}{2}e^{-j\pi} = \frac{1}{2}(\cos(\pi) - j \sin(\pi)) = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$$

$$\bullet e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -j$$

$$\bullet e^{j\frac{5\pi}{2}} = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = j$$

$$\bullet \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + j$$

$$\bullet \sqrt{2}e^{j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = 1 + j$$

$$\bullet \sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = 1 - j$$

$$\bullet \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - j$$

2) Expresa cada uno de los siguientes números complejos en su módulo y fase ($|z|e^{j\varphi(z)}$ con $\varphi(z) \in [-\pi, \pi]$):

$$\bullet 5 : \begin{cases} |z| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{0}{5}\right) = 0 \end{cases} \longrightarrow 5$$

$$\bullet -2 : \begin{cases} |z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{0}{-2}\right) = \pi \end{cases} \longrightarrow 2e^{j\pi}$$

$$\bullet -3j : \begin{cases} |z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{-3}{0}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\bullet -j\frac{\sqrt{3}}{2} : \begin{cases} |z| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\bullet 1 + j : \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\bullet (1 - j)^2 = -2j : \begin{cases} |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{-2}{0}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

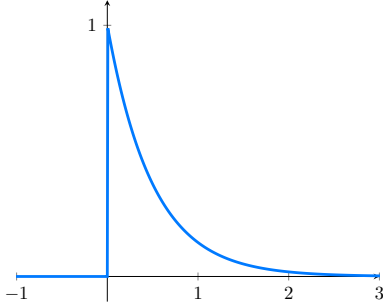
$$\bullet j(1 - j) = 1 + j : \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\bullet \frac{1+j}{1-j} = j : \begin{cases} |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\bullet \frac{\sqrt{2} + j\sqrt{2}}{1 + j\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}j : \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = 1 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}\right) = -\frac{1}{12}\pi \end{cases} \rightarrow e^{-j\frac{1}{12}}$$

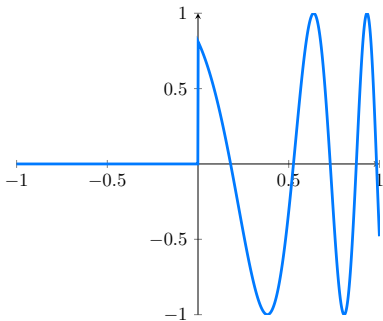
3) Calcule los valores de potencia media y de energía de las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$



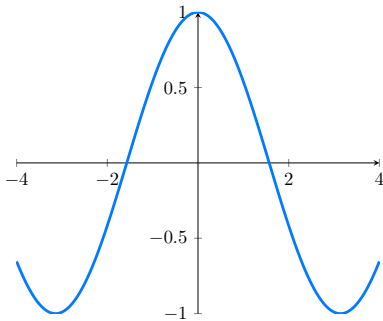
$$\begin{aligned} E_T &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |e^{-2t}|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} e^{-4t} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{4} \cdot [0 - 1] = \frac{1}{4} \text{ J} \\ P_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{2T} = \frac{\frac{1}{4}}{+\infty} = 0 \text{ W} \end{aligned}$$

b) $x(t) = e^{j(2t + \frac{\pi}{4})}$



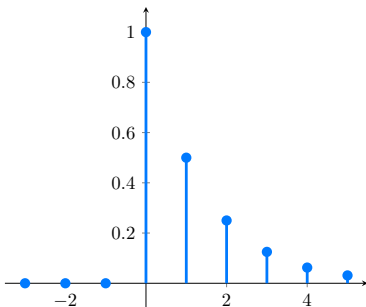
$$\begin{aligned} E_T &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{j(2t + \frac{\pi}{4})}|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1^2 dt = [t]_{-\infty}^{\infty} = \infty - (-\infty) = \infty \\ P_m &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{j(2t + \frac{\pi}{4})}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot [t]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right) = \frac{1}{T} \cdot T = 1 \end{aligned}$$

c) $x(t) = \cos(t)$



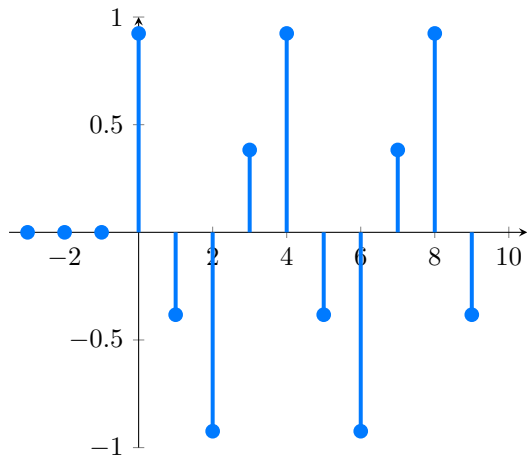
$$\begin{aligned} E_T &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 1 + \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \cdot \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \infty \\ P_m &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2T} \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1}{2T} \left(\frac{T}{2} + \frac{t}{2} + \frac{\sin(T) - \sin(-T)}{2} \right) = \frac{1}{2T} \left(T + \sin(T) \right) = \frac{1}{2} \text{ W} \end{aligned}$$

d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$



$$\begin{aligned} E_T &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1 - 0 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \text{ J} \\ P_m &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_T}{2N + 1} = \frac{\frac{4}{3}}{+\infty} = 0 \text{ W} \end{aligned}$$

e) $x[n] = e^{j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{8})}$

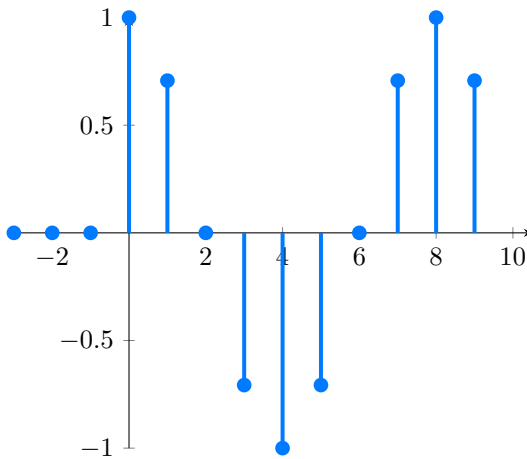


$$E_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| e^{j\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{8}\right)} \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1^2 = \infty$$

$$P_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \left\{ \omega_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} k = 4k \underset{k=1}{=} 4 \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 1^2 = \frac{4}{4} = 1W$$

f) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]$

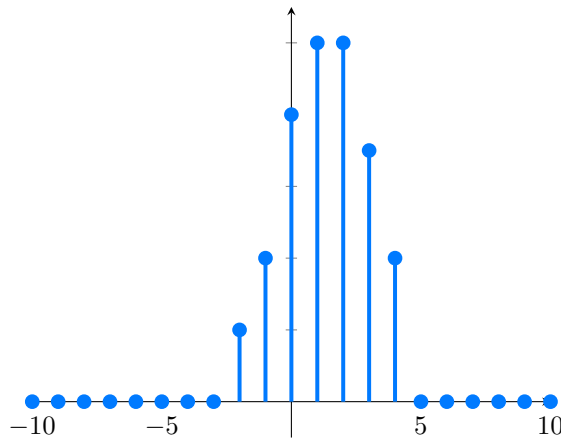


$$E_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right|^2 = \infty$$

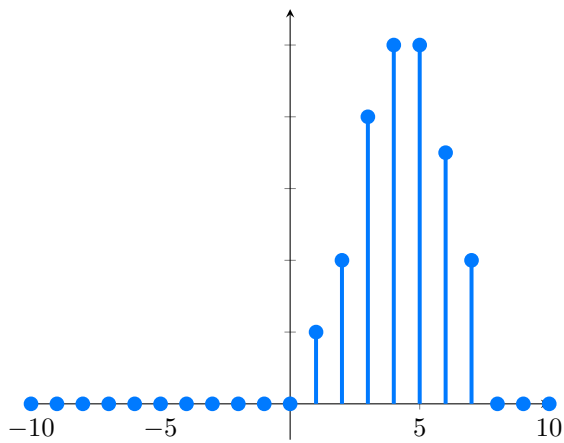
$$P_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \left\{ \omega_0 = \frac{\pi}{4} \rightarrow N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} k = 8k \underset{k=1}{=} 8 \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 \frac{1}{2} \left[1 + \cos(2n) \right] = \frac{8}{16} + 0 = \frac{1}{2}W$$

- 4) Considere una señal $x[n]$ en la que $x[n] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de n en los que se garantiza que la señal es cero.

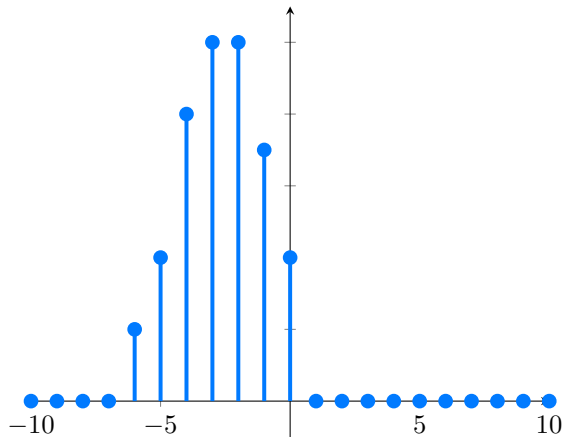


a) $x[n-3]$



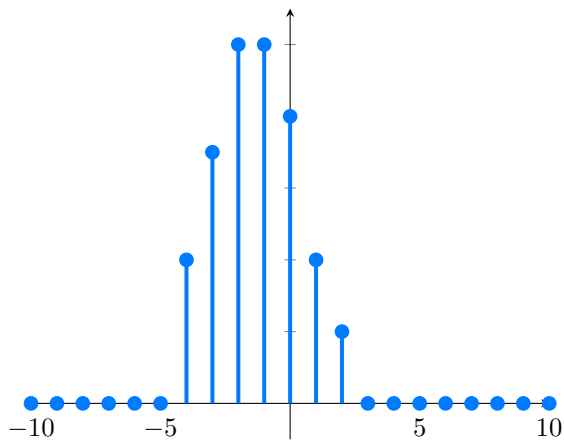
Vemos que esta señal se corresponde con un desplazamiento de 3 unidades a la derecha. Por tanto, $x[n-3] = 0$ para $n < 1$ y $n > 7$.

b) $x[n+4]$



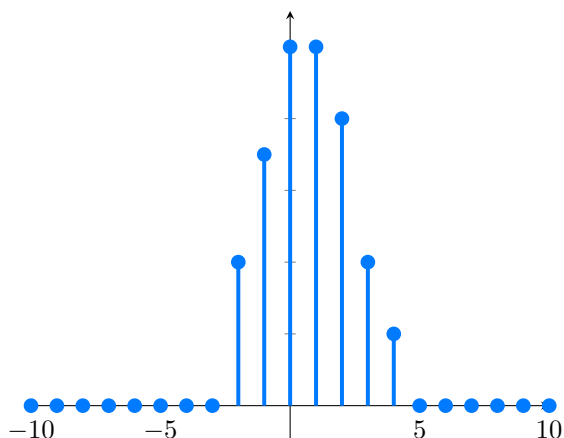
Vemos que la señal se corresponde con un desplazamiento de 4 unidades a la izquierda. Por tanto $x[n+4] = 0$ para $n < -6$ y $n > 0$.

c) $x[-n]$



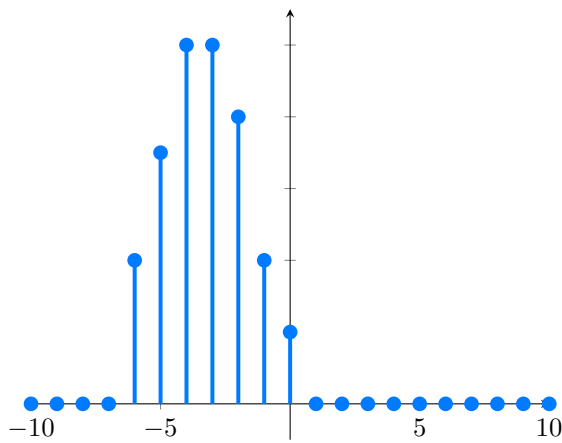
Vemos que esta señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal con respecto al eje central. Por tanto, $x[-n] = 0$ para $n < -4$ y $n > 2$.

d) $x[-n+2]$



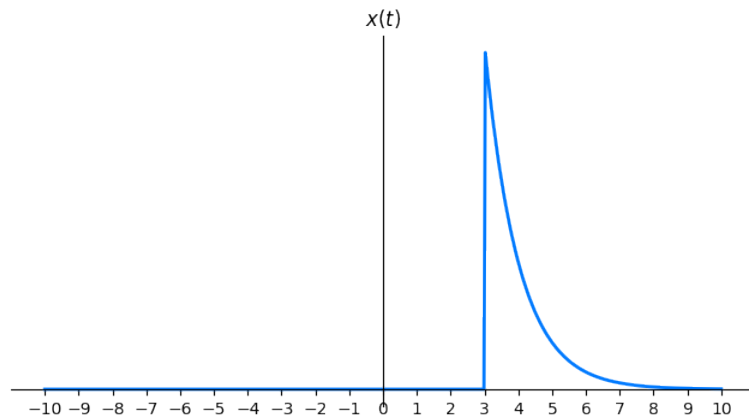
Vemos que esta señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal con respecto al eje central y un desplazamiento a la derecha de 2 unidades. Por tanto, $x[-n+2] = 0$, para $n < -2$ y $n > 4$

e) $x[-n-2]$

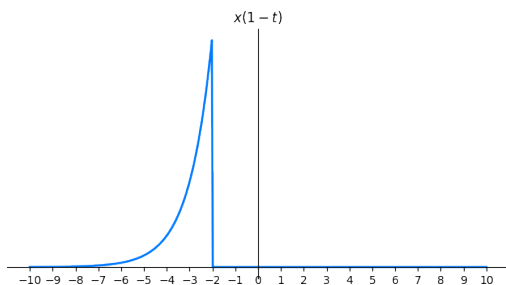


Vemos que esta señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal con respecto al eje central y un desplazamiento a la izquierda de 2 unidades. Por tanto, $x[-n-2] = 0$, para $n < -6$ y $n > 0$.

- 5) Considere una señal $x(t)$ en la que $x(t) = 0$ para $t < 3$. Para cada una de las señales siguientes deteremine los valores de t en los que se garantiza que la señal es cero.

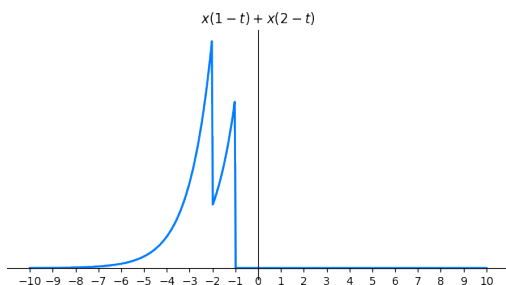


- a) $x(1-t)$



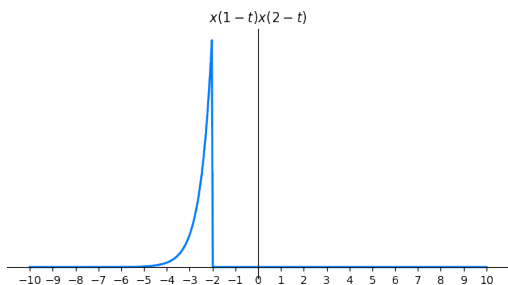
Podemos expresar dicha señal de la forma $x(-t+1)$, donde vemos rápidamente que se trata de una inversión y de un desplazamiento de un segundo hacia la derecha. Por lo tanto, como se muestra en la figura, la señal $x(1-t)$ será cero para $t \geq -2$.

- b) $x(1-t) + x(2-t)$



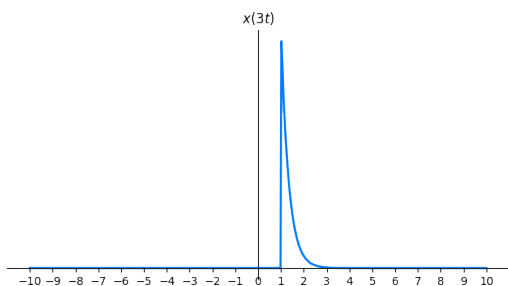
Si la señal $x(1-t)$ es cero para $t \geq -2$, vemos fácilmente que $x(2-t)$ es cero para $t \geq -1$. Por lo tanto, al sumarlas, seguirá siendo cero para $t \geq -1$.

- c) $x(1-t)x(2-t)$



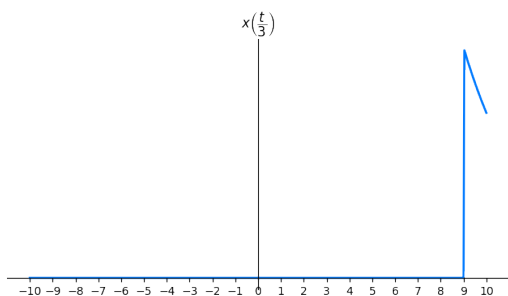
Si la señal $x(1-t)$ es cero para $t \geq -2$, vemos fácilmente que $x(2-t)$ es cero para $t \geq -1$. Por lo tanto, al multiplicarlas, seguirá siendo cero para $t \geq -2$.

d) $x(3t)$



Si la señal $x(t)$ es cero para $t < 3$, al aplicar la compresión por el factor $a = 3$, la señal $x(3t)$ será cero para $t > 1$.

e) $x\left(\frac{t}{3}\right)$



Si la señal $x(t)$ es cero para $t < 3$, al aplicar la expansión por el factor $a = \frac{1}{3}$, la señal $x\left(\frac{t}{3}\right)$ será cero para $t > 9$.

6) Determine si cada de las siguientes señales es periódica:

a) $x(t) = 2e^{j(t+\frac{\pi}{4})}u(t)$

- La parte exponencial $\left(e^{j(t+\frac{\pi}{4})}\right)$ es un señal compleja con una frecuencia $\omega_0 = 1$, lo cual sugiere periodicidad.
- Sin embargo, la función escalón $u(t)$ hace que la señal solo existe para $t \geq 0$. Esto significa que la señal no se repite en todo el dominio de t , por lo tanto, no es periódica.

b) $x(t) = x[n] = e[n] + u[-n]$

- $u[n]$ es la función escalón, que es 1 para $n \geq 0$ y 0 para $n < 0$.
- $u[-n]$ es la función escalón reflejada, que es 1 para $n \leq 0$ y 0 para $n > 0$.
- Sumando ambas funciones: la señal es 1 para todo n , es decir, $x[n] = 1$ para todo n , esto hace que la señal sea constante, por lo tanto, es periódica para cualquier período N .

c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k])$

- La señal está compuesta por dos deltas desplazadas en el tiempo.
- la forma general es de dos impulsos cada intervalo de 4 muestras.
- Por lo tanto, la señal es periódica con período $N = 4$.

7) Para cada una de las señales siguientes determine los valores de la variable independiente en los que se garantice que la parte par de la señal es cero.

a) $x[n] = u[n] - u[n-4]$

Esta señal es un tren de impulsos rectangular con valores de 1, en $0 \leq n \leq 3$ y 0 en otros lugares.

- Antisimetría respecto a $n = \frac{3}{2}$, por lo que su parte par será cero en los puntos donde $x[n] = -x[-n]$.
- Para $n = 0, 1, 2, 3$ tenemos valores de 1.
- Para $n = -1, -2, -3$, la función es 0.
- La parte par será cero en los valores fuera del intervalo $[-3, 3]$.

b) $x(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$

La función seno es impar, es decir:

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

Por definición, su parte par es cero para todo t .

c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$

Esta señal es una secuencia geométrica desplazada a partir de $n = 3$, es decir:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } n \geq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para que su parte par sea cero, debe cumplirse $x[n] = -x[-n]$, pero como la función es unilateral, su parte par será cero donde $x[n] = 0$, es decir, donde $n < 3$.

d) $x(t) = e^{-5t}u(t+2)$

Esta señal es una exponencial decreciente activada en $t \geq -2$.

- Es unilateral y no tiene valores negativos simétricos, por lo que su parte par será cero antes de la activación, es decir, cuando $t \leq -2$.

8) Expresa la parte real de cada una de las siguientes señales de la forma $Ae^{-at} \cos(\omega t + \varphi)$, donde A, a, ω y φ son números reales con $A \geq 0$ y $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

a) $x(t) = -2$

$$x(t) = 2e^{-0t} \cos(0t + \pi),$$

donde:

- $A = 2$
- $\omega = 0$
- $a = 0$
- $\varphi = \pi$

b) $x(t) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \cos(3t + 2\pi)$

$$x(t) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \cos(\underbrace{3t + 2\pi}_{\theta + 2\pi = \theta}) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \cos(3t) = (1 + j) \cos(3t)$$

Solo tomamos la parte real, por lo que:

$$x(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right),$$

donde:

- $A = 1$
- $\omega = 3$
- $a = 0$
- $\varphi = \frac{\pi}{4}$

c) $x(t) = e^{-t} \sin(3t + \pi)$

Usaremos la identidad:

$$\sin(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

por lo que:

$$x(t) = e^{-t} \cos\left(3t + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = e^{-t} \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right),$$

donde:

$$\begin{aligned} \bullet A &= 1 & \bullet \omega &= 3 \\ \bullet a &= 1 & \bullet \varphi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

d) $x(t) = je^{(-2+j100)t}$

9) Determine si cada una de las siguientes señales es periódica. En caso afirmativo especifique su periodo fundamental.

a) $x(t) = -2$

La señal tiene la forma $x(t) = e^{j\omega t}$, que es periódica si la frecuencia angular ω es un múltiplo racional de 2π :

$$\omega = 10.$$

El periodo fundamental es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

La señal es periódica con periodo fundamental $T = \frac{\pi}{5}$.

b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$

Esta señal tiene un término e^{-t} , que representa un decrecimiento exponencial. Si hay un término exponencial con un exponente real negativo, la señal nunca se repite exactamente, ya que disminuye continuamente, por lo tanto, no es periódica.

c) $x[n] = e^{j7\pi n}$

$$\omega = 7\pi \longrightarrow N = \frac{2\pi}{\omega} \cdot m = \frac{2\pi}{7\pi} \cdot m = \frac{2}{7} \cdot m \longrightarrow N = 2 \ (m = 7)$$

La señal es periódica, con periodo fundamental $N = 2$.

d) $x[n] = 3e^{j3\pi \frac{n+\frac{1}{2}}{5}}$

$$\omega = \frac{2\pi}{5} \longrightarrow N = \frac{2\pi}{\omega} \cdot m = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}} \cdot m = \frac{10}{3} \cdot m \longrightarrow N = 10 \ (m = 3)$$

e) $x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2})}$

$$\omega = \frac{3}{5} \longrightarrow N = \frac{2\pi}{\omega} \cdot m = \frac{2\pi}{\frac{3}{5}} \cdot m = \frac{10\pi}{3} \cdot m \longrightarrow \text{No se puede.}$$

La señal no es periódica.

10) Determine el periodo fundamental de la señal $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$.

Para determinar el **periodo fundamental** de la señal $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$, debemos analizar los periodos de las componentes individuales de la señal y encontrar el **mínimo común múltiplo** de estos periodos.

Paso 1: Identificar las frecuencias angulares

La señal está compuesta por dos términos:

- $2\cos(10t + 1)$: Su frecuencia angular es $\omega_1 = 10$.
- $-\sin(4t - 1)$: Su frecuencia angular es $\omega_2 = 4$.

El periodo de una señal está relacionado con su frecuencia angular mediante la fórmula:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Paso 2: Calcular los periodos de las componentes

- Para $\omega_1 = 10$, el periodo es:

$$R = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

- Para $\omega_2 = 4$, el periodo es:

$$T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Paso 3: Encontrar el periodo fundamental

El periodo fundamental de la señal compuesta es el **mínimo común múltiplo** de los periodos T_1 y T_2 . Para encontrarlo, debemos expresar ambos periodos como fracciones con el mismo denominador:

$$T_1 = \frac{\pi}{5}, \quad T_2 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{10}, \quad T_2 = \frac{5\pi}{10} \longrightarrow .$$

El **mcm** de $\frac{2\pi}{10}$ y $\frac{5\pi}{10}$ es $\frac{10\pi}{10} = \pi$.

El periodo fundamental de la señal $x(t)$ es:

$$T = \pi.$$

- 11)** Determine el periodo fundamental de la señal $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi n}{7}} - e^{j\frac{2\pi n}{5}}$.
- 12)** Considere la señal en tiempo discreto $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$. Determine los valores de los números enteros M y n_0 que permiten que $x[n]$ pueda expresarse como $x[n] = u[Mn + n_0]$
- 13)** Considere la señal en tiempo continuo $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t+2)$. Calcule la energía de la señal $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$.
- 14)** La figura 1 muestra la señal continua $x(t)$. Represente cada una de las siguientes señales.

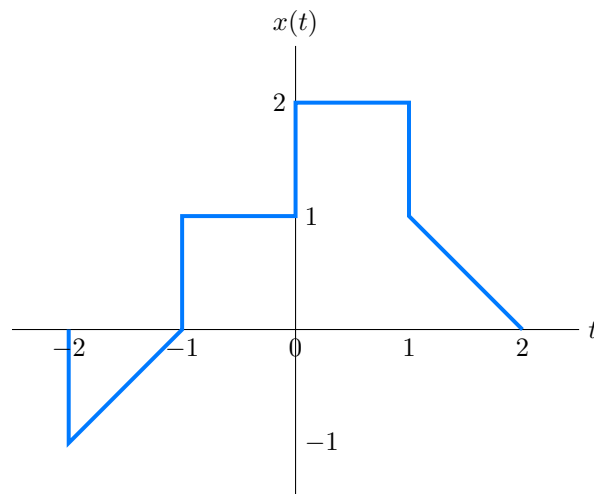


Figura 1

- a) $x(t-1)$
- b) $x(2-t)$
- c) $x(2t+1)$
- d) $x\left(4 - \frac{t}{2}\right)$
- e) $[x(t) + x(-t)]u(t)$

f) $x(t) \left[\delta \left(t + \frac{3}{2} \right) - \delta \left(t - \frac{3}{2} \right) \right]$

15) La figura 2 muestra la señal discreta $x[n]$. Represente cada una de las siguientes señales:

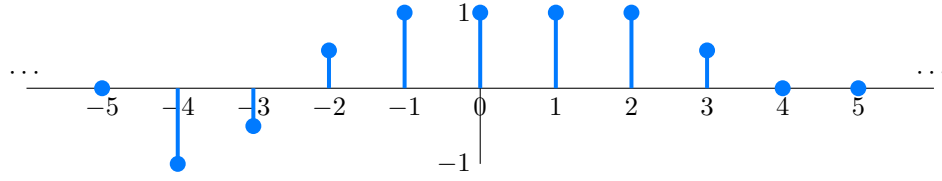


Figura 2

- a)** $x[n-4]$
- b)** $x[3-n]$
- c)** $x[3n]$
- d)** $x[3n+1]$
- e)** $x[n]u[3-n]$
- f)** $x[n-3]\delta[n-2]$
- g)** $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$
- h)** $x[(n-1)^2]$

16) Determine si cada una de las siguientes señales continuas es periódica. En caso afirmativo obtenga su periodo fundamental.

- a)** $x(t) = 3 \cos \left(4t + \frac{\pi}{3} \right)$
- b)** $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$
- c)** $x(t) = \cos^2 \left(2t - \frac{\pi}{3} \right)$
- d)** $x(t) = \text{Par}\{\cos(4\pi t)u(t)\}$
- e)** $x(t) = \text{Par}\{\sin(4\pi t)u(t)\}$
- f)** $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)} u(2t-n)$

17) Determine si cada una de las siguientes señales discretas es periódica. En caso afirmativo obtenga su periodo fundamental.

- a)** $x[n] = \sin \left(\frac{6\pi}{7}n + 1 \right)$
- b)** $x[n] = \cos \left(\frac{n}{8} - \pi \right)$
- c)** $\cos \left(\frac{\pi}{8}n^2 \right)$
- d)** $x[n] = \cos \left(\frac{\pi}{2}n \right) \cos \left(\frac{\pi}{4}n \right)$
- e)** $x[n] = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4}n \right) + \sin \left(\frac{\pi}{8}n \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6} \right)$

18) Determine el módulo, así como la parte real e imaginaria de la señal

$$x(t) = te^{j3\pi t} \prod \left(\frac{2t-4}{8} \right) - 2\delta(2t+3)$$

19) Calcule la energía y la potencia de la señal mostrada en la figura 3. Indique si se encuentra definida en energía o en potencia.

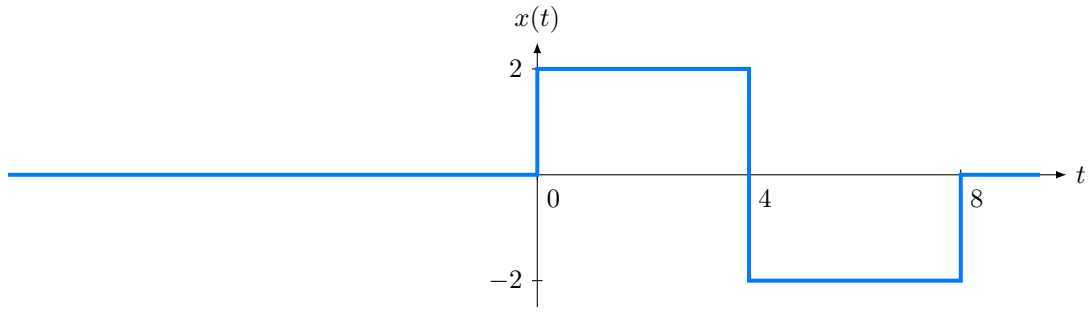


Figura 3

20) Represente detalladamente las señales $x_1(t)$ y $x(t)$, definidas como

$$x_1(t) = 2 \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + (6 - 2t) \left[\Pi\left(\frac{t - 2.5}{1}\right) - \Pi\left(\frac{t - 3.5}{1}\right) \right]$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - 6n)$$

21) Represente detalladamente las señales $x(t)$ y $h(t)$ dadas por

$$x(t) = t \Pi\left(\frac{2t}{4}\right) + t[u(t - 1) - u(3t - 9)]$$

$$h(t) = 2 \Pi\left(\frac{t - 1}{4}\right) + \delta(t + 4)$$

22) Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 21, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

23) Represente detalladamente las señales

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{4}n} u[n]$$

$$h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \Pi\left(\frac{n - 2}{11}\right)$$

24) Calcule la energía y la potencia de la señal $x[n]$ del ejercicio 23, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

25) Indique si la señal $x[n]$ del ejercicio 23 y la señal $z[n] = x[n] + x^*[-n]$ son periódicas y, en su caso, obtenga el valor de los correspondientes periodos.

26) Considere la señal continua no periódica mostrada en la figura 4 y represente su partes par e impar.

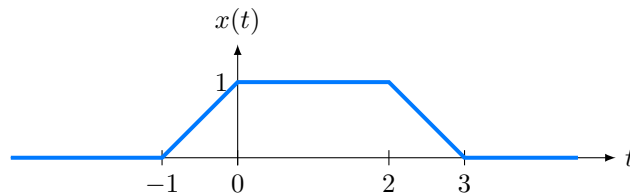


Figura 4

27) Calcule la energía y la potencia de la señal de la figura 4, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

28) Represente detalladamente las siguientes señales:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} (u[n+3] - u[n+4]u[-n-5])$$

$$h[n] = 3^n u[-n-1] + 3^{-n-1} u[n]$$

29) Calcule la energía y la potencia de la señal $x[n]$ del ejercicio 28, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

30) Calcule la energía y la potencia de la señal de la figura 5, indicando si está definida en energía o en potencia.

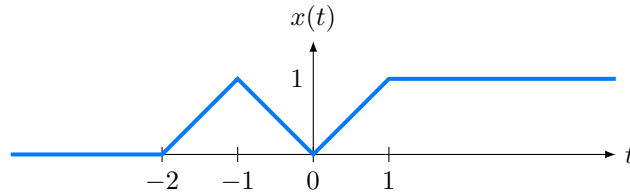


Figura 5

31) Represente detalladamente las señales

$$x(t) = -\left(\frac{t}{2} + 1\right) \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

$$h(t) = 1 - u(t-1)u(t-3) - u(1-t)$$

32) Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 31, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

33) Represente detalladamente la señal

$$x(t) = \frac{1 + \text{sign}(\sin(t))}{2} \sin(t)$$

34) Represente detalladamente las señales

$$x(t) = e^{-(2+j3)t} u(t+3) h(t) = \Pi\left(\frac{t-1.5}{5}\right) - 5\delta(t-5)$$

35) Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 34, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

36) Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x(t) = \bigwedge\left(\frac{t}{b}\right)$$

37) Considere un sistema discreto cuya señal de entrada es $x[n]$ y la señal de salida es $y[n]$. La relación entre la entrada y la salida viene dada por

$$y[n] = x[n]x[n-2]$$

a) ¿Tiene memoria el sistema?

Un sistema tiene memoria si su salida en un tiempo n depende de valores pasados o futuros de la entrada.

- La salida $y[n]$ se define en términos de $x[n]$ y $x[n-2]$.
- Como depende del valor presente $x[n]$ y de un valor pasado $x[n-2]$, el sistema tiene memoria.

b) Determine la señal de salida del sistema cuando la entrada es $A\delta[n]$, siendo A una constante real o compleja.

Sustituyendo $A\delta[n]$ en la ecuación del sistema:

$$y[n] = x[n]x[n-2] = A\delta[n] \cdot A\delta[n-2].$$

Dado que $\delta[n]$ solo es distinto de cero cuando $n = 0$ y $\delta[n-2]$ solo es distinto de cero cuando $n = 2$, su producto será diferente de cero si ambos índices coinciden, lo cual nunca ocurre.

Por lo tanto:

$$y[n] = 0, \forall n.$$

c) ¿Es invertible el sistema? Un sistema es invertible si podemos recuperar la entrada $x[n]$ a partir de la salida $y[n]$.

- De la ecuación $y[n] = x[n]x[n-2]$, observamos que hay dos valores de $x[n]$ que intervienen en la salida.
- Si $x[n] = 0$ o $x[n-2] = 0$, entonces $y[n] = 0$, lo que significa que no podemos distinguir entre diferentes posibles entradas que produzcan la misma salida.
- Por lo tanto, el sistema no es invertible.

38) Considere un sistema continuo cuya señal de entrada es $x(t)$ y de salida $y(t)$ relacionadas por

$$y(t) = x(\sin(t))$$

a) ¿Es causal el sistema?

Un sistema es causal si la salida $y(t)$ en cualquier instante t depende únicamente de valores presentes o pasados de la entrada $x(t)$, es decir, no puede depender de valores futuros de $x(t)$.

- En este caso, la salida $y(t) = x(\sin(t))$ evalúa la entrada en $\sin(t)$, que no siempre es menor o igual a t .
- Como $\sin(t)$ oscila en el intervalo $[-1, 1]$, la salida en t depende de valores de la entrada en tiempos futuros y pasados.

Por lo tanto, el sistema no es causal.

b) ¿Es lineal?

Un sistema es lineal si cumple las propiedades de superposición y homogeneidad.

1) Superposición: Si $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ y $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$, entonces:

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t).$$

2) Homogeneidad: Si $x(t) \rightarrow y(t)$, entonces:

$$\alpha x(t) \rightarrow \alpha y(t)$$

Probemos si el sistema cumple estas propiedades:

- Si tenemos dos entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, entonces las salidas son:

$$y_1(t) = x_1(\sin(t)), y_2(t) = x_2(\sin(t))$$

- Si aplicamos la entrada combinada $x_1(t) + x_2(t)$, salida es:

$$y(t) = (x_1 + x_2)(\sin(t)) = x_1(\sin(t)) + x_2(\sin(t)) = y_1(t) + y_2(t).$$

La propiedad de superposición se cumple.

Si aplicamos una constante α , tenemos:

$$y(t) = (\alpha x)(\sin(t)) = \alpha x(\sin(t)) = \alpha y(t).$$

Como se cumple la propiedad de homogeneidad, el sistema es lineal.

39) Para cada una de las siguientes relaciones entrada-salida determine si el sistema correspondiente es lineal, invariante en el tiempo o ambos.

a) $y(t) = t^2 x(t - 1)$

Para ser lineal, el sistema debe cumplir superposición y homogeneidad.

Si la entrada es $x_1(t)$ con salida $y_1(t)$, y $x_2(t)$ con salida $y_2(t)$, entonces para la entrada combinada $x_1(t) + x_2(t)$, la salida debería ser:

$$y(t) = t^2(x_1(t - 1) + x_2(t - 1)) = t^2 x_1(t - 1) + t^2 x_2(t - 1) = y_1(t) + y_2(t)$$

Cumple superposición.

Para homogeneidad:

$$y(t) = t^2(\alpha x(t - 1)) = \alpha t^2 x(t - 1) = \alpha y(t).$$

Es lineal.

Si desplazamos la entrada $x(t) \rightarrow x(t - t_0)$, la salida se convierte en:

$$y'(t) = t^2 x(t - 1 - t_0)$$

pero la salida original desplazada es:

$$y(t - t_0) = (t - t_0)^2 x(t - t_0 - 1).$$

b) $y[n] = x^2[n - 2]$

c) $y[n] = x[n + 1] - x[n - 1]$

d) $y(t) = \text{Impar}\{x(t)\}$

40) Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. En caso afirmativo, construya el sistema inverso y, en caso negativo, encuentre dos señales de entrada al sistema que generen la misma señal de salida.

a) $y(t) = x(t - 4)$

b) $y(t) = \cos(x(t))$

c) $y[n] = nx[n]$

d) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

e) $y[n] = \begin{cases} x[n - 1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$

f) $y[n] = x[n]x[n-1]$

g) $y[n] = x[1-n]$

h) $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} d\tau$

i) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

j) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

k) $y[n] = \begin{cases} x[n+1], & n \geq 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$

l) $y(t) = x(2t)$

m) $y[n] = x[2n]$

n) $y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

- 41)** En este ejercicio se ilustra una de las consecuencias más importantes de las propiedades de linealidad e invarianza temporal. En concreto, cuando se conoce la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo (linear time-invariant system, LTI) a una entrada determinada o la respuesta a varias entradas, se puede calcular la respuesta del sistema a otras señales de entrada.

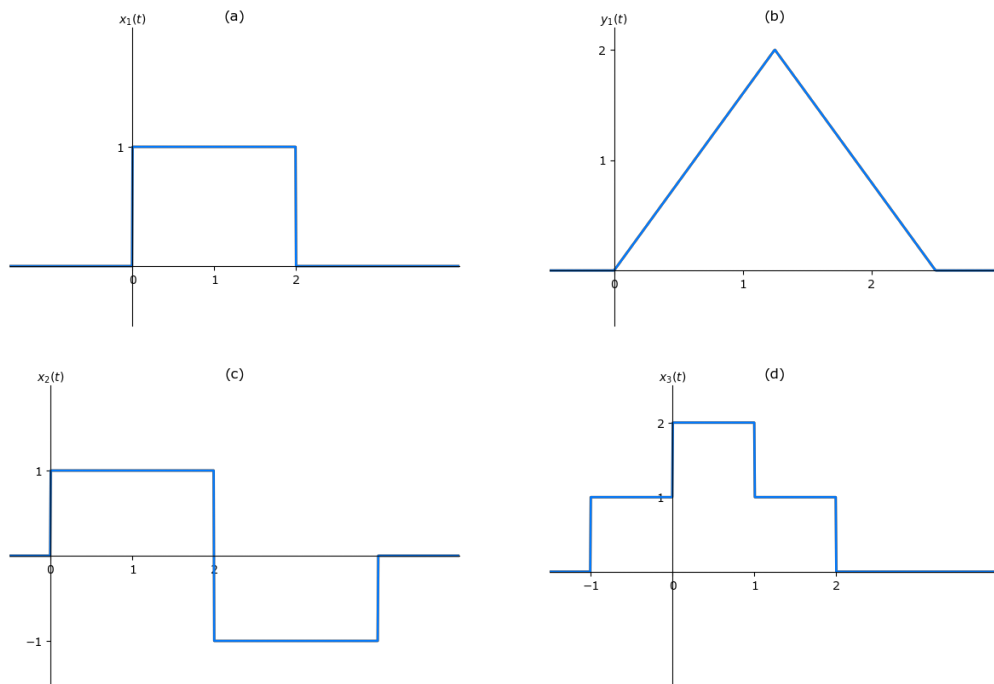


Figura 6

- a)** Considere un sistema LTI cuya respuesta a la señal $x_1(t)$ de la Figura 6(a) es la señal $y_1(t)$ mostrada en la Figura 6(b). Determine y represente la respuesta del sistema a la entrada $x_2(t)$ de la Figura 6(c).
- b)** Determine y represente la respuesta del sistema considerado en el apartado anterior a la señal de entrada $x_3(t)$ mostrada en la Figura 6(d).
- 42)** La salida de un sistema viene dada por $y[n] = x[2+n]x[2-n]$. Indique razonadamente si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad.
- 43)** Considere la señal $x[n] = \bigwedge\left(\frac{n}{3}\right) + \bigwedge\left(\frac{n-3}{3}\right)$. Obtenga y represente las partes par e impar de dicha señal. Asimismo, calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

- 44) Calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x[n] = (u[n+6] - u[n-7] + \delta[-n+10])u[-n+10]$$

- 45) Calcule la energía y la potencia de $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x(t) = (t-2)u(t-1)u(4-t)\Pi\left(\frac{t}{10}\right)$$

- 46) Determine si cada uno de los siguientes sistemas verifica las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza y linealidad.

a) $y(t) = e^{x(t)}$

b) $y[n] = x[n]x[n-1]$

c) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

d) $y[n] = x[-n]$

e) $y(t) = \sin(6t)x(t)$

f) $y[n] = \sum_{k=-2}^{n+4}$

g) $y[n] = nx[n]$

h) $y[n] = x[2n]$