Bibliografía:

- Calculus, M. Spivak. Editorial Reverté.
- University Calculus. Haar, Weir & Thomas. Pearson.

Ejercicios Propuestos

1. Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$

   b) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{\log(x)}}$

   c) $f(x) = \log\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

   d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$

2. Dadas las siguientes funciones, averiguar en qué puntos son discontinuas y por qué.

   a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

   b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{-1}{x}}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

3. Calcular los siguientes límites ordinarios o laterales:

   a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/3}-1}{x-1}$

   b) $\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$

   c) $\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

   d) $\lim_{x\to +\infty} ((x^3+1)^{1/3} - x)$

   e) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$

   f) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}\right)$

   g) $\lim_{x\to a} (a^2-x^2)\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$

   h) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

   i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

   j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

   k) $\lim_{x\to \infty} (1+\operatorname{sen}(x))^{\frac{1}{x}}$

   l) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{e^{1-x^2}-1}$

4. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

   b) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

   c) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

   d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(1-\cos(x))}{\sin^4 x}$

   e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x(2-x)\tan(bx)}$

   f) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$

   g) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$

   h) $\lim_{x\to a} \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$

   i) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

5. Calcule el límite (si es posible) de $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x|}$ sabiendo que $\lim_{x\to 0} x f(x) = 3$.

6. Determine cuáles de las siguientes funciones son “par” o “impar” (o ninguna de ambas opciones).

   a) $f(x) = \frac{x^3+3x}{1-x^4}$

   b) $f(x) = \cos^2(x)$

   c) $f(x) = -\operatorname{sen}(x^3)$.

7. Compruebe que una función $f(x)$ escribirse como

   $$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

   es decir, como suma de una función par y una función impar. ¿Cómo podría escribirse $f(x) = \frac{1}{x+a}$ como suma de una función par y otra impar?

8. Exprese en la forma $A\operatorname{sen}(x+c)$ la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \sqrt{3}\cos(x)$. Observación: Puede utilizar números complejos para obtener la expresión.

9. Estudie los límites laterales:

a) $f(x) = \frac{|x|}{x^2+x}$ en $x = 0$. *b*) $f(x) = e^{\frac{|x|}{x}}$ en $x = 0$. *c*) $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ en $x = 0$.

10. Calcule los siguientes límites:

    a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x$;
    b) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{2} - 1)$;
    c) $\lim_{x\to 0}(\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}}$;

11. Estudie la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

12. Halle los siguientes límites en función del número $\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

    a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$; *b*) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

13. Demuestre que existe algún número x tal que

$$\operatorname{sen}(x) = x - 1.$$

14. Determinar los valores del número real k para los cuáles la función $p(x) = x^3 - 3x + k$ se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$.

15. Estudiar la existencia y la continuidad de la función inversa de la función $f(x) = 3+1/x$ definida para $x > 0$.

16. Estudiar la existencia y la continuidad de la función inversa de la función $f(x) = (1 - x^3)/x^3$ definida para $x > 1$.