Ejercicios Cálculo I

Francisco Javier Mercader Martínez

Hoja 1.1: Sucesiones

1) Determine de las siguientes sucesiones $(a_n)_n$ cuáles son convergentes y calcule el límite en dicho caso.

a) $a_n = 2 + 0.1^n$

$$\lim_{n\to+\infty} 2 + \cancelto{0}{0.1^n} = \boxed{2} \longrightarrow \text{Convergente}$$

b) $a_n = \dfrac{1-2n}{1+2n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{1+2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancelto{0}{\frac{1}{n}} - \frac{2n}{n}}{\cancelto{0}{\frac{1}{n}} + \frac{2n}{n}} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1} \longrightarrow \text{Convergente}$$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1}$$

Como $\sin(n^n)$ está acotada entre -1 y 1, entonces utilizaremos el teorema del límite acotado.

$$\lim_{n\to+\infty} a_nb_n = (-1)^n\sin(n^n)\cdot \cancelto{0}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = \boxed{0} \longrightarrow \text{Convergente}$$

d) $a_n = n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}$

$$\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b} = (\infty - \infty) = \lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}\cdot \frac{n+\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}}{n+\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-(n+a)(n+b)}{n+\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}-(\cancel{n^2}+nb+an+ab)}{n+\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-(a+b)n-ab}{n+\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}} = -\infty \longrightarrow \text{Divergente}$$

e) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}, \qquad a, b \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$$

f) $a_n = (-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

g) $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n)\cdot \cancelto{0}{\frac{1}{n}} = 0 \longrightarrow \text{Convergente}$$

h) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

i) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (1^\infty) = e^{\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)} = (*) = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

$$(*) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n}{n+1}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\cancel{n}-(\cancel{n}+1)}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n}}}_{0}} = -1$$

j) $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

k) $a_n = \log(n) - \log(n+1)$

l) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

m) $a_n = (n+4)^{\frac{1}{n+4}}$

n) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log(n)}}$