Álgebra Lineal

Ejercicios Tema 2: Vectores, matrices y tensores

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Determina la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: si u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3, entonces u_3 es combinación lineal de u_1 y u_2.

La afirmación es **falsa** en general. Vamos a analizarla cuidadosamente:

- Supongamos que u_2 y u_3 son linealmente independientes y u_1 se define como una combinación lineal de u_2 y u_3. Por ejemplo, tomemos:
$$u_1 = u_2 + u_3.$$
- En este caso, aunque u_1 es una combinación lineal de u_2 y u_3, no podemos escribir u_3 como una combinación lineal de u_1 y u_2, ya que:
$$u_3 = u_1 - u_2$$
y esta relación no es válida en todos los espacios vectoriales. La implicación original depende de la independencia lineal de los vectores involucrados.
- Para que u_3 sea combinación lineal de u_1 y u_2, deben cumplorse condiciones adicionales, como que u_1, u_2, u_3 estén en un subespacio con dimensión menor o igual a 2.

2) Consideremos los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$. Encuentra un vector w ortogonal a u y v. Comprueba que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v. Encuentra ahora un vector que <u>no</u> sea lineal de u, v y comprueba que no es ortogonal a w.

1) Vector w ortogonal a u y v:

   El vector w encontrado mediante el producto cruz es:
$$w = (1, -1, 1).$$

2) Verificación de la ortogonalidad:
   - $w \cdot u = 0:$ w es ortogonal a u.
   - $w \cdot v = 0:$ w es ortogonal a v.

3) Ortogonalidad respecto a una combinación lineal de u y v:

   Para una combinación lineal genérica $c_1u + c_2v$, se cumple:
$$w \cdot (c_1u + c_2v) = 0.$$
   Esto demuestra que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v.

4) Vector que no es combinación lineal de u y v:

Un vector que no es combinación lineal de u y v es:

$$(1, 0, 0)$$

5) Comprobación de no ortogonalidad con w:

El producto escalar entre w y $(1, 0, 0)$ es:

$$w \cdot (1, 0, 0) = 1.$$

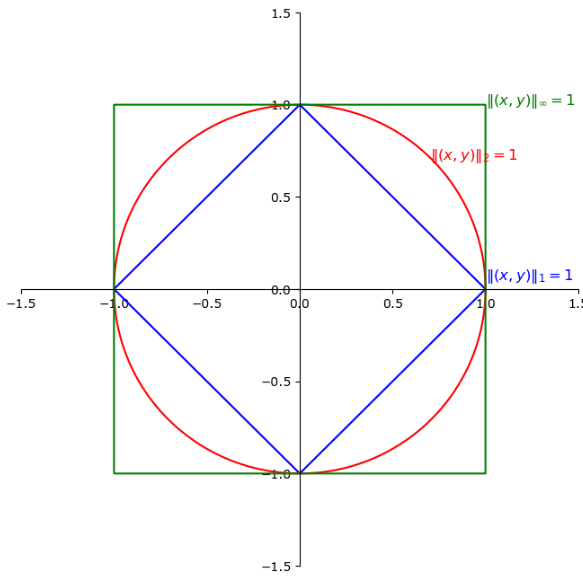
Por lo tanto, no es ortogonal a w.

3) Haz un dibujo de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_1 = 1\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_2 = 1\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_\infty = 1\}$$



4) Prueba que $\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \|u\|_\infty}$.

Dado un vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, las normas son:

1) Norma $\|u\|_2$:

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

2) Norma $\|u\|_1$:

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

3) Norma $\|u\|_\infty$:

$$\|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|).$$

Expandimos la definción de $\|u\|_2^2$:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2.$$

Usamos la desigualdad $u_i^2 \leq |u_i| \cdot \|u\|_\infty$ (ua que $|u_1| \leq \|u\|_\infty$ para todo i):

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot \|u\|_\infty \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq \|u\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

Por definición, $\sum_{i=1}^{n} |u_i| = \|u\|_1$, por lo que:

$$\|u\|_2^2 \leq \|u\|_\infty \|u\| 1.$$

Tomando raíces cuadradas en ambos lados de la desigualdad:

$$\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \|u\|_\infty}.$$

5) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero, pero ¿qué pasa si su producto escalar es próximo a cero? Sean $x = [1, -0.75]$ e $y = [0.3, 0.3]$. Calcula el producto escalar $x \cdot y$ y el ángulo que forman. ¿Qué conclusión puedes sacar?
Si dos vectores x, y son unitarios, entonces $-1 \leq x \cdot y \leq 1$ (¿por qué?). En este caso, ¿qué podemos decir si $x \cdot y$ es aproximadamente $-1, 1$ o cero?

1) Producto escalar:

$$x \cdot y = 0.075$$

2) Ángulo que forman los vectores:

- Coseno del ángulo:

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2} = \frac{0.075}{1.25 * \frac{3\sqrt{2}}{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

- Ángulo en radianes:

$$\theta \approx \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \simeq 1.4289\text{rad}.$$

- Ángulo en grados:

$$\theta \approx 81.8699^\circ$$

Cuando el producto escalar es cercano a cero, el ángulo entre los vectores se aproxima a 90°, lo que indica que los vectores son casi ortogonales. En este caso, el ángulo es aproximadamente 81.87°, por lo que los vectores están cerca de ser ortogonales pero no completamente.

Si x e y son unitarios, sus normas son iguales a 1 ($\|x\| = \|y\| = 1$). En este caso, el producto escalar $x \cdot y$ es:

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta) = \cos(\theta)$$

y como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ (por tener un comportamiento oscilante), se tiene:

$$-1 \leq x \cdot y \leq 1$$

6) Sean u, v dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$ que forman un ángulo de 60°. Calcula $\|2u + v\|$.

Dado que los vectores u y v son unitarios ($\|u\| = 1$ y $\|v\| = 1$) y forman un ángulo de 60°, podemos calcular $\|2u + v\|$ usando las propiedades de las normas y el producto escalar.

Paso 1: Fórmula de la norma

La norma de $2u + v$ es:

$$\|2u + v\| = \sqrt{\|2u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle 2u, v\rangle}.$$

Paso 2: Sustituir las normas

$$\|2u\|^2 = 4\|u\|^2 = 4,$$

$$\|v\|^2 = 1$$

Paso 3: Producto escalar $\langle 2u, v\rangle$

El producto escalar entre u y v es:

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(60^\circ) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\langle 2u, v\rangle = 2 \cdot \langle u, v\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Paso 4: Sustituir todo en la fórmula

$$\|2u + v\| = \sqrt{\|2u\|^2 + \|v\|^2 + 2 + 2\langle 2u, v\rangle} = \sqrt{4 + 1 + 2 \cdot 1} = \sqrt{4 + 1 + 2} = \sqrt{7}.$$

7) Sean u, v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ de norma 2 y 3 respectivamente que forman un ángulo de 60. ¿Qué ángulo forman los vectores u y $2u - v$?

Para determinar el ángulo entre los vectores u y $2u - v$, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1: Producto escalar entre u y $2u - v$

El producto escalar entre u y $2u - v$ es:

$$\langle u, 2u - v\rangle = \langle u, 2u\rangle - \langle u, v\rangle.$$

a) Calcular $\langle u, 2u\rangle$:

$$\langle u, 2u\rangle = 2 \cdot \|u\|^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$$

b) Calcular $\langle u, v\rangle$:

El producto escalar entre u y v es:

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(60^\circ) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Sustituyendo:

$$\langle u, 2u - v\rangle = 8 - 3 = 5.$$

Paso 2: Norma de $2u - v$

La norma de $2u - v$ es:

$$\|2u - v\| = \sqrt{\|2u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle 2u, v\rangle}.$$

a) Calcular $\|2u\|^2$:

$$\|2u\|^2 = 4\|u\|^2 = 4 \cdot 2^2 = 16.$$

b) Calcular $\|v\|^2$:

$$\|v\|^2 = 3^2 = 9.$$

c) Calcular $\langle 2u, v\rangle$:

$$\langle 2u, v\rangle = 2\langle u, v\rangle = 2\cdot 3 = 6.$$

Sustituyendo todo:

$$\|2u - v\| = \sqrt{16+9-2\cdot 6} = \sqrt{16+9-12} = \sqrt{13}$$

Paso 3: Calcular el ángulo entre u y $2u - v$

El coseno del ángulo θ entre u y $2u - v$ es:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, 2u - v\rangle}{\|u\|\cdot\|2u - v\|} = \frac{5}{2\cdot\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{3}}{26}.$$

Paso 4: Ángulo θ:

$$\theta = \arccos\left(\frac{5\sqrt{3}}{26}\right) \simeq 46.10°.$$

8) Calcula $A+B, (A+B)^{\intercal}, AB, BA, (AB)^{\intercal}, A^{\intercal}B^{\intercal}$ y $B^{\intercal}A^{\intercal}$ para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^{\intercal} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right)^{\intercal} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 5 & 4 & 9 \\ 8 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{\intercal} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}\right)^{\intercal} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^\intercal B^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B^\intercal A^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

9) Prueba que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Queremos demostrar que no existe ninguna matriz A tal que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea A una matriz 2×2 de la forma general:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Entonces, calculamos A^2 de la forma:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Queremos que A^2 sea igual a:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, igualamos componente a componente:

1) $a^2 + bc = 0$.
2) $ab + bd = 1$.
3) $ac + dc = 0$.
4) $bc + d^2 = 0$

Paso 1: Análisis de las ecuaciones

De $ac + dc = 0$, factorizamos:

$$(a + d)c = 0.$$

Esto implica dos posibilidades:

$$c = 0, \text{ o } a + d = 0.$$

Caso 1: $c = 0$ Si $c = 0$, las ecuaciones quedan:

1. $a^2 = 0$ (de $a^2 + bc = 0$, con $c = 0$)
2. $ab + bd = 1$

3. $d^2 = 0$ (de $bc + d^2 = 0$, con $c = 0$)

De $a^2 = 0$ y $d^2 = 0$, se deduce $a = 0$ y $d = 0$. Esto contradice la ecuación $ab + bd = 1$, ya que $ab + bd = 0$.

Por lo tanto, $c = 0$ no es posible.

Caso 2: $a + d = 0$

Si $a + d = 0$, entonces $d = -a$. Sustituyendo en las ecuaciones:

1) $a^2 + bc = 0$

2) $ab - ab = 1$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10) ¿Existen matrices reales no nula 2×2 tales que $A \cdot A^\intercal = 0$? ¿y si son matrices complejas?

Caso 1: Matrices reales A tales que $A \cdot A^\intercal = 0$

Sea A una matriz 2×2 real no nula:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

El producto $A \cdot A^\intercal = 0$ es:

$$A \cdot A^\intercal = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

Para que $A \cdot A^\intercal = 0$, deben cumplirse:

1) $a^2 + b^2 = 0$.

2) $c^2 + d^2 = 0$.

3) $ac + bd = 0$.

Análisis:

1) De $a^2 + b^2 = 0$, como $a, b \in \mathbb{R}$, implica $a = 0$ y $b = 0$.

2) De $c^2 + d^2 = 0$, como $c, d \in \mathbb{R}$, implica $c = 0$ y $d = 0$.

Esto contradice la condición de que A no sea nula. Por lo tanto, **no existen matrices reales no nulas** 2×2 **tales que** $A \cdot A^\intercal = 0$**.**

Caso 2: Matrices complejas A tales que $A \cdot A^\intercal = 0$

Si A es una matriz 2×2 con entradas en $\mathbb{C}$, el análisis cambia porque en $\mathbb{C}$, un número puede tener módulo cero sin ser necesariamente cero.

De nuevo, sea:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

El producto $A \cdot A^\intercal$ es:

$$A \cdot A^\intercal = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

Para $A \cdot A^\intercal = 0$, las ecuaciones son:

1) $a^2 + b^2 = 0$

2) $c^2 + d^2 = 0$

3) $ac + bd = 0$

Solución:

1) De $a^2 + b^2 = 0$, como $a, b \in \mathbb{C}$, no es necesario que a y b sean cero. Por ejemplo, si $c = 1$ y $d = -i$, entonces $c^2 + d^2 = 0$.

2) La tercera ecuación $ac + bd = 0$ debe verificarse con los valores específicos de a, b, c, d

Por lo tanto, **existen matrices complejas no nulas** 2×2 **tales que** $A \cdot A^\intercal = 0$.

11) Sean A, B matrices tales que $I + AB$ es invertible y sea S la inversa de $I + AB$. Prueba que $I + BA$ también es invertible y su inversa es $I - BSA$.

Queremos demostrar que si S es la inversa de $I + AB$, es decir:

$$S(I + AB) = (I + AB)S = I,$$

entonces $I + BA$ también es invertible y su inversa es $I - BSA$.

Paso 1: Demostrar que $(I - BSA)(I + BA) = I$

Calculemos $(I - BSA)(I + BA)$:

$$(I - BSA)(I + BA) = I + BA - BSA - BSA \cdot BA = I + BA - BSA - BSABA = I + BA - B(S + SABA).$$

Por lo definición de S, sabemos que S es la inversa de $I + AB$, por lo que

$$S(I + AB) = I \longrightarrow S + SAB = I$$

Sustituyendo $S + SAB = I$ en la ecuación:

$$(I - BSA)(I + BA) = I + BA - BA = I.$$

Paso 2: Demostrar que $(I + BA)(I - BSA) = I$

Ahora calculemos $(I + BA)(I - BSA)$:

$$(I + BA)(I - BSA) = I - BSA + BA - BA \cdot BSA = I + BA - B(S + SAB)A = I + BA - BIA = I.$$

Paso 3: Conlusión

Hemos demostrado que:

$$(I - BSA)(I + BA) = I \quad \text{y} \quad (I + BA)(I - BSA) = I.$$

Por lo tanto, $I + BA$ es invertible y su inversa es:

$$(I + BA)^{-1} = I - BSA.$$

12) Sea A una matriz $n \times m$ y sea B una matriz $m \times n$. Suponiendo que las matrices $I + AB$ y $I + BA$ sea invertibles, prueba que se cumple la igualdad

$$(I + AB)^{-1}A = A(1 - BA)^{-1}$$

Si m es mucho más pequeño que n, ¿cuál de las dos expresiones es más fácil de calcular desde el punto de vista computacional?

Queremos demostrar:

$$(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}.$$

Paso 1: Multiplicación por $(I + AB)$

Multiplicamos ambos lados de la igualda por $I + AB$ desde la izquierda para simplificar el término $(I + AB)^{-1}$. Esto da:

$$A = (I + AB)A(I + BA)^{-1}.$$

Paso 2: Expandir $(I + AB)A$

Multiplicamos:

$$(I + AB)A = A + ABA.$$

Por lo tanto, la ecuación queda como:

$$A = (A + ABA)(I - BA)^{-1}.$$

Paso 3: Multiplicación por $(I + BA)$

Multiplicamos ahora por $I + BA$ desde la derecha:

$$A(I + BA) = A + ABA.$$

Esto coincide con $(I + AB)A$, lo que confirma que:

$$(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$$

Análisis computacional

Dimensiones de las matrices:

- A es una matriz $n \times m$.
- B es una matriz $m \times n$.
- AB es una matriz $n \times n$.
- BA es una matriz $m \times m$.

Dificultad computacional:

El cálculo de una inversa tiene una complejidad de aproximadamente $O(k^3)$, donde k es la dimensión de la matriz.

- **Para** $(I + AB)^{-1}$**:** Necesitamos calcular la inversa de una matriz $n \times n$, lo que tiene una complejidad $O(n^3)$.
- **Para** $(I + BA)^{-1}$**:** Necesitamos calcular la inversa de una matriz $m \times m$, lo que tiene una complejidad $O(m^3)$.

Si $m \ll n$, entonces calcular $(I + BA)^{-1}$ es significativamente más eficiente que calcular $(I + AB)^{-1}$.

13) Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Si llamamos **flop** a una operación, ya sea una suma, resta, multiplicación o división, prueba que para calcular AB son necesarios $mn(2p - 1)$ flops (haciendo la multiplicación de forma estándar). Si A es una matriz 10×2, B una matriz 2×10 y C una matriz 10×10 y queremos calcular ABC, ¿qué es mejor desde el punto de vista computacional, calcular $(AB)C$ o $A(BC)$?

Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Para calcular AB usando la multiplicación estándar:

1) Cada elemento (i, j) de AB se obtiene como:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}.$$

Esto requiere p multiplicaciones y $p-1$ sumas, para un total de $2p-1$ flops.

2) Hay $n \times m$ elementos en AB, por lo que el total de flops necesarios es:

$$\text{Total flops} = n \cdot m \cdot (2p-1)$$

Dado que:

- A es una matriz 10×2,
- B es una matriz $2 \cdot 10$,
- C es una matriz 10×10,

tenemos dos ciones para calcular ABC:

1) $(AB)C$
   - Primero calculamos AB: A es 10×2 y B es 2×10, así que AB es 10×10. El número de flops es:

     $$10 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 10 \cdot 10 \cdot 3 = 300.$$

   - Luego calculamos $(AB)C$: AB es 10×10 y C es 10×10. El número de flops es:

     $$10 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 10 - 1) = 10 \cdot 10 \cdot 19 = 1900.$$

   - Total para $(AB)C$:

     $$300 + 1900 = 2200 \text{ flops}.$$

2) $A(BC)$
   - Primero calculamos BC: B es 2×10 y C es 10×10, así que BC es 2×10. El número de flops es:

     $$2 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 10 - 1) = 2 \cdot 10 \cdot 19 = 380.$$

   - Luego calculamos $A(BC)$: A es 10×2 y BC es 2×10. El número de flops es:

     $$10 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 10 \cdot 10 \cdot 3 = 300.$$

   - Total para $A(BC)$:

     $$380 + 300 = 680 \text{ flops}.$$

Desde el punto de vista computacional, es mejor calcular $A(BC)$.

14) Dadas dos matrices cuadradas A, B, se define el **conmutador** de A, B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por una parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguiente tres matrices, llamadas matrices de

Pauli:

$$S_x = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_y = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\overline{h} = \dfrac{h}{2\pi}$, con h constante de Plank. Comprueba que

$$[S_x, S_y] = j\overline{h}S_z, \quad [S_y, S_z] = j\overline{h}S_x, \quad [S_z, S_x] = j\overline{h}S_y$$

y que

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\overline{h}^2 I_3$$

con I_3 la matriz identidad 3×3.

Dadas las matrices:

$$S_x = \frac{\overline{h}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \frac{\overline{h}}{2}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

verificamos los commutadores:

1) Conmutador $[S_x, S_y]$:

$$[S_x, S_y] = S_xS_y - S_yS_x = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} - \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{2}\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} = j\overline{h}S_z.$$

$$S_xS_y = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}.$$

$$S_yS_x = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}.$$

2) Conmutador $[S_y, S_z]$: De maera similar, podemos calcular:

$$[S_y, S_z] = S_yS_z - S_zS_y = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} - \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} = j\overline{h}S_x.$$

$$S_yS_z = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix}.$$

$$S_zS_y = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}.$$

3) Conmutador $[S_x, S_z]$:

$$[S_x, S_z] = S_xS_z - S_zS_x = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = j\overline{h}S_y.$$

$$S_xS_z = \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$S_zS_x = \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos cada término al cuadrado:

$$S_x^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_y^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_z^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumando:

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}I.$$

15) Si A es una matriz simétrica, ¿son las matrices $B^\intercal AB, A + A^\intercal$ y $A - A^\intercal$ simétricas?

16) Prueba que si A es una matriz invertible simétrica, entonces A^{-1} es también simétrica.

17) Sean $u_1, \ldots, u_m$ vectores de $\mathbb{K}^n$ y supongamos que para ciertos escalares $x_1, \ldots, x_m$ se tiene $x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0$. Expresa esta última igualdad en forma matricial.

18) Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Observa que $1 + v^\intercal u$ es un escalar, que suponemos no nulo. Prueba que la matriz $I + uv^\intercal$ es no singular y su inversa es

$$(I + uv^\intercal)^{-1} = I - \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u}$$

19) Sea u un vector de $\mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$ y consideremos la matriz $A = I - 2uu^\intercal$. Prueba que A es simétrica y $A^2 = I$.

20) Sea A la matriz dada por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} invertible. Prueba que existen matrices X, Y tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ e I es la matriz identidad del tamaño adecuado (la matriz S se denomina el **complemento dde Schur** de A_{11}).

21) Expresa la matriz AB como suma de matrices de rango 1, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

22) Sea $u^\intercal = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$, $v^\intercal = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y $w^\intercal = [a, b, c]$. Halla a, b, c para que la matriz $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal de determinante 1.

23) **(Traza de una matriz)** Dada una matriz cuadrada A, se define la **traza** de A como $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$, es decir, como la suma de los elementos de la diagonal principal. Prueba las siguientes propiedades:

a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

b) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^\intercal)$.

c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

d) $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$ con P invertible.