Álgebra Lineal
Ejercicios Tema 6

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Halla ma matriz real más general posible que tiene como vectores propios los vectores $(1, 1)$ y $(1, -2)$

Si A tiene dos vectores propios distintos, admite la factorización e nvalores propios siguiente:

$$A = P^{-1}DP,$$

con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$$

2) Dada la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$, explica por qué no existe ninguna matriz invertible P tal que la matriz $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal. ¿Puedes generalizar este resultado para matrices de mayor tamaño?

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \quad b \neq 0.$$

Valores propios $\lambda = a$ doble

$$\text{nuc}(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow bx = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow v = (0, 1)$$

Sólo hay un vector propio, por lo que la matriz no se puede factoriza ne valores propios.

3) Sea A una matriz diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Prueba que la matriz A^2 también es diagonalizable con valores propios $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

$Av_j = \lambda_j v_j$

$\forall v_j = A\lambda_j v_j = \lambda_j A v_j = \lambda_j^2 v_j$.

4) Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A. ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1}?

$Av_j = \lambda_j v_j$

$v_j = A^{-1}Av_j = \lambda_j A^{-1} v_j \longrightarrow A^{-1}v_j = \dfrac{1}{\lambda_j} v_j$

5) Determina los valores de a para los cuales la matriz $\begin{bmatrix} 5 & -3 & a \\ 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

$$P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 & a \\ 6 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det = (2-\lambda)(-(4+\lambda)(5-\lambda)+18)$$

$$-(4+\lambda)(5-\lambda)+18 = -(20-4\lambda+5\lambda-\lambda^2)+18 = -20-\lambda+\lambda^2+18 = \lambda^2-\lambda-2=0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1 \cdot (-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

<u>Valores propios</u>

- $\lambda_1 = 2$ multiplicidad 2
- $\lambda_2 = -1$ multiplicidad 2

$$\det(A-2I) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & a \\ 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + az = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & a \\ 6 & \end{vmatrix} = 18 - 6a = 0 \longleftrightarrow a = 3$$

Si $a = 3 \longrightarrow \text{rango}(A-2I) = 1$, es decir:

- Dos parámetros
- Dos vectores propios
- A es diagonalizable porque tendríamos una base de vectores propios: dos correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 2$ y otro correspondiente a $\lambda_2 = -1$.

Si $a \neq 3$ sólo habría un vector propio para $\lambda_1 = 2$ y la matriz no sería diagonalizable.

6) Una expresa comercializa dos marcas de un producto. Entre los usuarios de estas marcas la empresa ha posido determinar que la probabilidad de que un usuario de la marca 1 se pase a la marca 2 después de un mes es de 0.4, y la probbilidad de que un usuario de la marca 2 se pase a la marca 1 después de un mes es de 0.2. Con esta información, obsera que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

es tal que a_{ij} es la probabilidad de que un usuario de la marca j se pase a la marca j después de un mes. Este tipo de matrices se llaman **matrices de Markov**.
Si inicialmente hay, por ejemplo, un 20% de usuarios que prefieren la marca 1 y un 80% que prefieren la 2, se puede

ver, usando argumentos probabilísticos, que las preferencias de los usuarios después de n meses vienen dadas por

$$A^n \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Determina cuáles será las preferencias por cada marca en el futuro

Idea: Calculamos los valores y vectores propios de A y obtenemos la factorizaión

$$A = P^{-1}DP.$$

Por tanto, $A^n = P^{-1}DP \cdot P^{-1}DP \cdots P^{-1}DP = P^{-1}D^nP.$

7) **El secreto de Google y el Álgebra Lineal.** El teorema que sigue es una pieza clave en el algoritmo *PageRank* que usa (o usaba) *Google* para ordenar las búsquedas de las páginas de Internet. En su versión más sencilla, el Teorema de Perron-Frobenius se enuncia así: Sea A una matrix cuadrada con entradas positivas, es decir, $a_{ij} > 0$. Entonces existe un autovalor simple (es decir, de multiplicidad 1) cuyo autovector asociado puede elegirse con todas sus componentes estrictamente positivas. Calcula los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

y comprueba que se satisface el Teorema de Perron-Frobenius. Se recomienda la lectura del artículo `https://sctmates.webs.ull.es/modulo1lp/8/pfernandez.pdf` a aquellos alumnos que tengan curiosidad por saber las Matemáticas usadas en el algoritmo *PageRank* de Google. En particular, se podrá apreciar el papel destacado del Teorema de Perron-Frobenius.

8) Calcula y compara los valores propios y los valores singulares de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué conclusión puedes sacar?

Valores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^4 = 0$$

$\lambda = 0$ multiplicidad 4

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$P_\lambda(A^\intercal A) = \det(A^\intercal A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0$

$$P_B(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^4 -$$

$$\left(\frac{6}{60000}\right) = 0 \longrightarrow \lambda^4 = 10^{-4} \begin{cases} \lambda_1 = 0.1 \text{ multiplicidad } 2 \\ \lambda_2 = 0.1j \text{ multiplicidad } 2 \end{cases}$$

<u>Valores singulares</u>

$$\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 1, \quad \sigma_4 = 0$$

$$B^\intercal B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{60000} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{60000} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 \cdot 10^{-10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

<u>Conclusión:</u> Pequeños cambios en los datos pueden afectar mucho a los autovalores, pero no tanto a los valores singulares.

9) Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

a) Calcula los valores propios y los valores singulares de A.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = 3$ multiplicidad 2.

$$\text{nuc}(A - 3I) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 8y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow \text{vector propio } v_1 = (1, 0)$$

b) ¿Es A diagonalizable?

No se puede conseguir una base de vectores propios. Por tanto, A no diagonalizable.

c) Calcula las matrices U y V ortogonales tales que $A = U\Sigma V^\intercal$, donde $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ con σ_1, σ_2 los valores singulares de A.

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 24 \\ 24 & 73 \end{bmatrix}$$

$$P_{A^\intercal A}(\lambda) = \det(A^\intercal A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 24 \\ 24 & 73-\lambda \end{bmatrix} = (9-\lambda)(73-\lambda) - 24 \cdot 24 = 657 - 9\lambda - 73\lambda - 576 + \lambda^2)\lambda^2 -$$

$$82\lambda + 81 = 0$$

$$\lambda = \frac{82 \pm \sqrt{(-82)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1} = \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 324}}{2} = \begin{cases} \dfrac{82+80}{2} = 81 = \lambda_1 \\ \dfrac{82-80}{2} = 1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Valores singulares:

$$\sigma_1 = \sqrt{81} = 9 \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sigma_2 = \sqrt{1} = 1$$

Vectores propios de $A^\intercal A$:

- $\lambda_1 = 81$

$$\operatorname{nuc}(A^\intercal A - 81I) = \begin{bmatrix} -72 & 24 \\ 24 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -72x + 24y = 0 \\ 24x - 8y = 0 \end{cases} \longrightarrow 8y = 24x \longrightarrow y = 3x \longrightarrow (1,3)$$

$$v_1 = \frac{1}{\|v_1\|}(1,3) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$$

- $\lambda_2 = 1$

$$\operatorname{nuc}(A^\intercal A - I) = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 8x + 24y = 0 \\ 24x + 72y = 0 \end{cases} \longrightarrow x = -3y \longrightarrow (-3,1)$$

$$v_2 = \frac{1}{\|v_2\|}(-3,1) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10) Encuentra la factorización SVD de las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la primera de ellas, escribe la matriz como una suma de matrices de rango 1, según se explica en la página 121 de los apuntes.

$$A^\intercal A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P_{A^\intercal A}(\lambda) = \det(A^\intercal A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(9-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 9 \longrightarrow \sigma_1 = \sqrt{9} = 3$

$\lambda_2 = 4 \longrightarrow \sigma_2 = \sqrt{4} = 2$

- $\lambda_1 = 9$

$$\text{nuc}(A^\intercal A - 9I) \longrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow -5x = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow y = 1 \longrightarrow v_1 = (0,1)$$

- $\lambda_2 = 4$

$$\text{nuc}(A^\intercal A - 4I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 5y = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow x = 1 \longrightarrow v_2 = (1,0)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow V^\intercal = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Completamos $u_1 = (0,1,0), u_2 = (0,0,-1)$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Basta tomar:

$$u_3 = (1,0,0)$$

Por tanto:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En resumen

$$B^\intercal = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{V^\intercal}$$

Tomando la traspuesta:

$$B = V\Sigma^\intercal U^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

11) Sea A uan matriz real y simétrica. Prueba que los valores singulares de A son los valores absolutos de los valores propios de A. ¿Qué pasa si A es semidefinida positiva?

A simétrica $\longrightarrow A^\intercal = A$. Los valores propios de $A^\intercal A$ son los valores propios de A^2.

Por el ejercicio 4, los valores propios de A^2 son λ_i^2 con λ_i los valores propios de A.

Por tanto, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$.

Si A es semidefinida positiva, $\lambda_i \geq 0$. Por tanto:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = \lambda_i.$$