Matemática Discreta (GICD). 16–1–2023

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. **(1.25 puntos)** Demostrar que si $G = (V, E)$ es un grafo conexo, es Euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

   (0.25 puntos) Como aplicación, en los siguientes grafos

   $$G_1 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 6), (6, 4)\})$$

   y

   $$G_2 = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 5), (5, 1)\})$$

   comprobar si son o no Eulerianos, y en caso afirmativo, describir un camino cerrado Euleriano de dicho grafo.

   Solución. La primera parte del ejercicio es teoría. El grafo G_1 no es Euleriano porque no es conexo. El grafo G_2 son Eulerianos porque es conexo y todos sus vértices tienen grado par. Un recorrido Euleriano es 1, 2, 3, 1, 4, 5, 1.

2. **(1.5 puntos)** Define con precisión relación de orden, definiendo asímismo todos los conceptos que aparecen en la definición. Como aplicación, probar que el conjunto de los números naturales con la relación R

   $$a < b\,(a \sim b) \quad \text{si y solo si} \quad a \text{ divide a } b$$

   es de orden. Si además A es el conjunto de los números naturales del 1 al 100, hallar sus elementos minimales y maximales en la relación R.

   Solución. La primera parte del ejericicio es teoría. El elemento minimal de A es 1 porque ningún otro número lo divide. Los maximales son 51,52,...,100 ya que no dividen ningún elemento de A salvo ellos mismos.

3. De un total de 1000 conductores, se sabe que 600 conducen un Skoda, 400 un Seat, 550 un Ford, 200 tanto un Skoda como un Seat, 325 tanto un Skoda como un Ford y 125 un Seat y un Ford.

   (a) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos conductores conducen las tres marcas?

   (b) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos de ellos conducen únicamente un Skoda?

   Solución. Sea A el conjunto de conductores que tienen un Skoda, B los que tienen un Seat y C un Ford. Sabemos que

   $$|A \cup B \cup C| = 1000,$$

   $$|A| = 600,\ |B| = 400,\ |C| = 550,$$

   $$|A \cap B| = 200,\ |A \cap C| = 325,\ |B \cap C| = 125.$$

   (a) Por el principio de inclusión exclusión tenemos que

   $$\begin{aligned} |A \cap B \cap C| &= |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap A| \\ &= 1000 - 600 - 400 - 550 + 200 + 325 + 125 \\ &= 100. \end{aligned}$$

(b) Sabemos que

$$A = [A \cap (B \cup C)] \cup [A \cap (B \cup C)^c]$$

y

$$[A \cap (B \cup C)] \cap [A \cap (B \cup C)^c] = \emptyset.$$

Por otra parte

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

de donde, por el principio de inclusión exclusión tenemos que

$$\begin{aligned} |(A \cap B) \cup (A \cap C)| &= |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C| \\ &= 200 + 325 - 100 = 425. \end{aligned}$$

Entonces, de nuevo por el principio de inclusión exclusión

$$|A \cap (B \cup C)^c| = |A| - |A \cap (B \cup C)| = 600 - 425 = 175.$$

4. Sabiendo que $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge r)$, $r \to q$ y r son ciertas, deducir la veracidad de p de las siguientes formas:

   (a) **(0.75 puntos)** Utilizando tablas de verdad.

   (b) **(0.75 puntos)** Sin utilizar tablas de verdad.

Solución. El razomamiento será cierto si la proposición $[(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge r)] \wedge (r \to q) \wedge r \to p$ es una tautología. Escribimos la tabla de verdad

p	q	r	$p \to q$	$p \wedge r$	$(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

Ahora escribimos la tabla de verdad

p	q	r	$(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge r)$	$r \to q$	$[(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge r)] \wedge (r \to q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

Así,

p	q	r	$[(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge r)] \wedge (r \to q) \wedge r$	$[[(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge r)] \wedge (r \to q) \wedge r] \to p$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

es una tautología, por lo que el razonamiento es válido.

(b) Como r es verdad y $r \to q$ es verdad, necesariamente q debe ser verdad. Como $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge r)$ es verdad, o bien $(p \to q)$ y $(p \wedge r)$ son ambos falsos o son ambos ciertos. Pero $p \to q$ no puede ser falso si q es verdad. Por lo tanto, $(p \to q)$ y $(p \wedge r)$ son ciertos. Para que $p \wedge r$ sea cierto, p debe ser verdad, y termina la prueba.

5. Resolver:

   (a) **(1 punto)** La ecuación $27x + 35 = 0$ en $\mathbb{Z}_{32}$.
   Solución. En $\mathbb{Z}_{32}$ la ecuación puede escribirse como

$$27x + 3 = 0,$$

   o equivalentemente

$$27x = 29.$$

   Usamos el algoritmo de Euclides extendido

$$\begin{pmatrix} 27 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2-F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 27 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \times F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 27 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2-5F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \underset{F_1 \times F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2-2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & -13 & 11 \end{pmatrix}$$

   por lo que $\gcd(27, 32) = 1$, la ecuación tiene solución única y por el Teorema de Bezout

$$1 = -13 \cdot 27 + 11 \cdot 32$$

   por lo que, en $\mathbb{Z}_{32}$ se tiene que

$$27^{-1} = -13 = 19.$$

   Por lo tanto la solución es

$$x = 27^{-1} \cdot 29 = 19 \cdot 29 = 551 = 7.$$

   (b) **(1 punto)** Calcular el entero positivo más pequeño tal que verifica el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 7, \\ x \equiv 3 \pmod 6, \\ x \equiv 5 \pmod{13}. \end{cases}$$

Solución. Por el Teorema Chino de los restos, que puede aplicarse ya que 7, 6 y 13 son coprimos dos a dos, planteamos las ecuaciones

$$\begin{cases} 78x \equiv 1 (\operatorname{mod} 7), \\ 91x \equiv 1 (\operatorname{mod} 6), \\ 42x \equiv 1 (\operatorname{mod} 13). \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x \equiv 1 (\operatorname{mod} 7), \\ x \equiv 1 (\operatorname{mod} 6), \\ 3x \equiv 1 (\operatorname{mod} 13). \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones tienen 1 por solución, mientras que la solución de la tercera es

$$x = 3^{-1} = 9.$$

La solución al problema será entonces

$$x = 78 \cdot 1 \cdot 5 + 91 \cdot 1 \cdot 3 + 42 \cdot 9 \cdot 5 = 2553 \equiv 369 \operatorname{mod}(546),$$

por lo que el número más pequeño solución será 369.