Procesos Estocásticos y Series Temporales

Francisco Javier Mercader Martínez

Índice

Tema 1: Introducción a los procesos estocásticos

Los procesos estocásticos modelizan cantidades numéricas que cambian con el tiempo de manera aleatoria. Ejemplos del mundo real de estos procesos incluyen:

1. Resultados sucesivos en un juego de azar.
2. Número de plazas ocupadas en un parking.
3. Porcentaje de cielo cubierto en el cielo de Madrid.
4. Evolución del precio de activos financieros: acciones, tipos de cambio de divisas o criptomonedas, materias primas, etc.
5. Indicadores económicos como la inflación, el precio de la luz, y el IBEX 35.

Los procesos estocásticos proporcionan marcos matemáticos para modelar y comprender estos fenómenos, lo que permite hacer predicciones y tomar decisiones informadas.

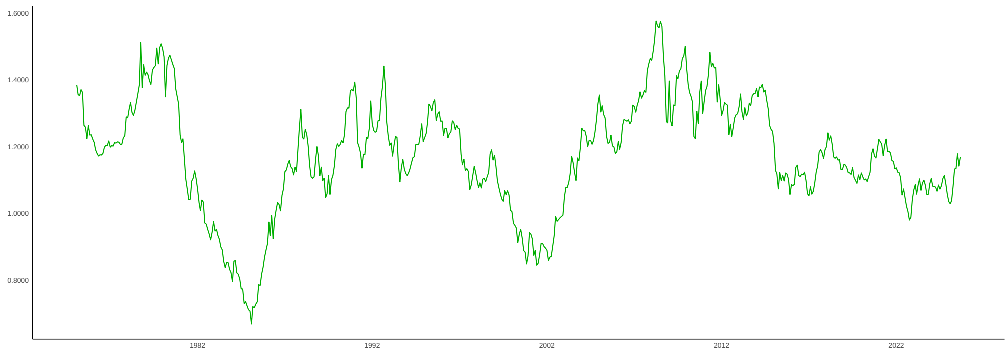

Figure 1: Evolución del tipo de cambio Euro/dolar (Fuente: Google Finance)

1.1) Concepto de proceso estocástico, trayectorias y ejemplos

A lo largo de este tema, vamos a fijar un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un subconjunto $\mathbb{T} \subset [0, \infty)$.

Definición 1.1. Un **proceso estocástico** $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es una colección de variables aleatorias reales X_t definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Interpretamos t como el tiempo (medido en cierta unidad).

- Si $\mathbb{T}$ es contable (por ejemplo, $\mathbb{T} = \{0 < 1 < 2 < \dots\}$), diremos que el proceso estocástico $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es de tiempo discreto.
- Si $\mathbb{T}$ es un intervalo (por ejemplo, $\mathbb{T} = [0, T]$ o $\mathbb{T} = [0, \infty)$), diremos que el proceso estocástico es de tiempo continuo.

Para cada $t \in \mathbb{T}$ tenemos una variable aleatoria X_t. La variable aleatoria X_t tomará un valor numérico $X_t(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$. A los posibles valores que toma un proceso estocástico se les llama **estados**.

- Si para cada $t \in \mathbb{T}$ la variable aleatoria X_t es de tipo discreto, diremos que el proceso estocástico $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es de estado discreto.
- Si para cada $t \in \mathbb{T}$ la variable aleatoria X_t es de tipo continuo, diremos que el proceso estocástico $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es de estado continuo.

	t **Discreto**	t **Continuo**
X **Discreta**	Proceso de estado discreto y tiempo discreto (Unidades prod. mensualmente de un producto)	Proceso de estado discreto y tiempo continuo (Unidades producidas hasta t)
X **Continua**	Proceso de estado continuo y tiempo discreto (Toneladas de producción diaria de un producto)	Proceso de estado continuo y tiempo continuo (Velocidad de un vehículo en el instante t)

Figure 2: Tipos de procesos estocásticos

En lo que sigue, siempre supondremos que $0 \in \mathbb{T}$. Esta condición no es realmente restrictiva, ya que podemos desplazar el tiempo por una constante para garantizar que dicha condición se cumple.

1.2) Procesos gaussianos

Definición 1.2. Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\in T}$ es gaussiano si que cualquier colección de índices temporales $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, el vector aleatorio $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ sigue un **Normal multivariante**.

Hoja 1: Problemas de Introducción a los Procesos Estocásticos

1) ¿Qué es un proceso estocástico y cómo se define formalmente?

2) ¿Cuáles son los tipos principales de procesos estocásticos en función del tiempo?

3) ¿Cómo se clasifica un proceso estocástico según los estados que puede formar?