Cálculo I

Francisco Javier Mercader Martínez

Índice

Tema 1: Los números naturales

1.1) Los números naturales

Hemos trabajado con ellos desde que apenas tenemos memoria. Hemos aprendido a contar

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

Con un orden,

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n - 1 < n < n + 1$$

Denotaremos dicho conjunto como $\mathbb{N}$

- Propiedades

1) Es infinito. Su cardinal es el infinito "más pequeño". Un conjunto para el que existe una biyección con el de los números naturales recibe el nombre de *conjunto numerable*.

2) Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo. En esta propiedad se basa el "Principio de Inducción".

Vamos a empezar realizando alguna pequeña demostración utilizando el principio de inducción.

1.1.1) El Principio de Inducción

- Proposición

Supongamos que de una determinada propiedad $P(n)$, en la cual interviene un número natural genérico n, si:

1) La propiedad es cierta para $n = 1$.

2) Se supone que la propiedad es cierta para un número n (hipótesis de inducción) se deduce que la propiedad es cierta para $n + 1$.

Entonces la propiedad $P(n)$ es cierta para todo número natural n.

- Ejercicio

Establecer la igualdad

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para $n \geq 1$ (también lo podemos indicar de la forma $n \in \mathbb{N}$).

Establecer la igualdad

$$a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}, \ a \neq 1$$

para $n \geq 1$.

Como sabemos,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.2) Los números reales

Los números reales aparecen de forma natural. ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 = 2$?

Observa que la solución no puede ser un número racional, ya que si $x = \dfrac{m}{n}$ siendo $m, n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso

$$\frac{m^2}{n^2} = 2,$$

$$m^2 = 2n^2,$$

Lo cual nos indica que la descomposición factorial del término de la izquierda habrá una potencia par de 2, mientras que en el término de la derecha de la igualdad el número será impar, de donde se sigue que la ecuación no tiene soluciones racionales.

Otro problema, en cuanto a la idea de que algo es necesario si nos quedamos únicamente con los racionales viene dada por el siguiente ejemplo.

Supongamos que A es un conjunto que viene dado por

$A := \{p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2\}$ y B es el conjunto dado por:

$B = \{p \in \mathbb{Q} : p^2 > 2\}$. En estos casos es posible demostrar que A no tiene máximo (y B no tiene mínimo), es decir, para cada $p \in A$, existe $q \in A$ tal $p < q$. Veremos las definiciones formales de máximo y mínimo de un conjunto más adelante.

Para demostrar esta afirmación para cada número racional $p > 0$ consideramos el número racional q dado de la forma

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{p^2 + 2p - p^2 + 2}{p + 2} = \frac{2(p + 1)}{p + 2}.$$

Ahora,

$$q^2 - 2 = \frac{4(p + 1)^2}{(p + 2)^2} - 2 = \frac{4(p^2 + 1 + 2p) - 2(p^2 + 4 + 4p)}{(p + 2)^2} = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}.$$

Si $p \in A$, entonces el numerador de la expresión anterior es negativo, es decir, $p^2 - 2 < 0$, y de ahí $q \in A$, pero por otra parte $q > p$ por la propia definición de q. Luego para cada $p \in A$ es posible encontrar $q \in A$ tal que $q > p$. La misma demostración se puede aplicar para el caso de B.

1.2.1) Construcción de los números reales

La construcción de los números reales puede abordarse como una ampliación partiendo de los números naturales, los números racionales y los números negativos (mediante sucesiones de números racionales), no obstante, nosotros utilizaremos la definición axiomática.

1.3) Definición axiomática de los número reales

Antes de dar la definición axiomática de los números reales necesitamos precisar algunos conceptos que necesitaremos.

- Definición

Un cuerpo es una terna $(K, +, \cdot)$ donde K es un conjunto no vacío y $+, \cdot$ son leyes de composición internas en K tales que:

1) $(K, +)$ es un grupo abeliano. Denotaremos por 0 el elemento neutro de K y si $a \in K$ denotaremos por $-a$ al simétrico de a.

   a) $\cdot$ es asociativa.

   b) $\cdot$ es conmutativa.

   c) Existe $1 \in K\{0\}$ tal que $1 \cdot a = a \quad \forall a \in K\{0\}$.

   d) $\forall a \in K\{0\}$ existe $a^{-1} \in K\{0\}$ tal que $a^{-1} \cdot a = 1$. A a^{-1} le llamaremos el inverso de a.

   e) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in K$.

- Definición

Dado A un conjunto, una relación binaria $\leq$ en A se dice que es una relación binaria de orden si verifica:

1) $a \leq a \quad \forall a \in A$. (Propiedad Reflexiva).

2) Si $a, b \in A$ tal que $a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b$. (Propiedad Antisimétrica).

3) Si $a, b, c \in A$ tal que $a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$. (Propiedad transitiva).

Un conjunto ordenado es un par $(A, \leq)$ donde A es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria de orden definida en A.

¿Qué cuerpos conoces?

Fíjate en el conjunto $A = \{0, 1\}$ con las operaciones:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

¿Es $\mathbb{N}$ un cuerpo? ¿Es $\mathbb{Q}$ un cuerpo?

Otro concepto a tener en cuenta es el **"orden"**. Recordaremos algunos conceptos.

Veamos:

- Definición

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado, $B \subseteq A$ y $a \in A$.

1) Diremos que a es cota superior de B si $b \leq a$ para cada $b \in B$.

2) Diremos que a es cota inferior de B si $a \leq b$ para cada $b \in B$.

3) Diremos que a es el supremo de B si:

    1) a es cota superior de B.

    2) Si a' es otra cota superior de B entonces $a \leq a'$.

4) Diremos que a es el ínfimo de B si:

    1) a es cota inferior de B.

    2) Si a' es otra cota inferior de B entonces $a' \leq a$.

Sea A un conjunto ordenado, $B \subseteq A$ y $b \in B$.

1) Diremos que b es un elemento maximal (o máximo) de B si no existe $b' \in B$ con $b \leq b'$ y $b \neq b'$.

2) Diremos que b es un elemento minimal (o mínimo) de B si no existe $b' \in B$ con $b' \leq b$ y $b \neq b'$.

- Definición

Llamaremos conjunto de los números reales a un conjunto, que representaremos por $\mathbb{R}$, que verifica los siguientes axiomas:

1) El conjunto $\mathbb{R}$ tiene estructura de cuerpo.

2) En $\mathbb{R}$ hay definida una relación de orden, (es decir, una relación que verifica las propiedades reflexivas, antisimétrica y transitiva) que es total (siempre se verifica $x \leq y$ o bien $y \leq x$) para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y compatible con la estructura de cuerpo (si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$, y si $z \geq 0$, entonces $xz \leq yz$).

3) Existencia de supremo en $\mathbb{R}$. Todo conjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene extremo superior (supremo) en $\mathbb{R}$.

El siguiente paso sería asegurarnos de la existencia del conjunto de los números reales, sin embargo, no nos ocuparemos aquí de ese paso. Remitimos al lector a algunas referencias en donde algunas construcciones clásicas como el método de las cortaduras en $\mathbb{Q}$ de Dedekind (1831-1916) y la construcción de Cantor (1845-1918) utilizando sucesiones de Cauchy de números racionales son algunas posibilidades.

Ver por ejemplo *Constructions of the real numbers*.

Los elementos de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se llaman *irracionales*, y los denotaremos por $\mathbb{I}$. Más adelante hablaremos de ellos y de su cardinal. Habitualmente los números reales se representan por medio de puntos de una recta. Se elige un punto para representar el 0 y otra para representar la unidad 1. Esta elección determina la escala. El orden de los números viene dado por su representación en la recta.

- Proposición (Propiedad arquimediana de los números reales)

Para cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $x > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y < nx$.

- Demostración

Sea el conjunto $A = \{mx : m \in \mathbb{Z}\}$. Supongamos que la afirmación no fuera cierta, es decir, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $y > mx$, luego el conjunto A está acotado superiormente. Por el axioma del supremos existe $\alpha \in \mathrm{R}$ tal que $\alpha = \sup(A)$. Puesto que $x > 0$, tenemos que $\alpha - x < \alpha$, luego existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha - x < sx$ y así:

$$a < sx + x = (s+1)x,$$

lo cual es absurdo puesto que α es el supremo de A. De aquí deducimos que la propiedad es cierta.

Apoyándonos en la propiedad arquimediana podemos afirmar que para cada número real $y \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$mx < y < nx$$

Es decir,

$$mx < (m+1)x < \cdots < px < \cdots < (n-1)x < nx$$

Luego existirá un entero $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(p-1)x \leq y < px$$

Tomando $x = 1$, podemos entonces asegurar la existencia de un entero p tal que

$$p - 1 \leq y < p$$

- Definición

Al número $p - 1 \in \mathbb{Z}$ se le llama parte entera de y y se le denota $E(y)$ o $[y]$.

1.4) Valor absoluto

- Definición

Se llama valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ al número real denotado por $|x|$ dado por

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Es decir,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1.4.1) Propiedades del valor absoluto

- Proposición

1) $|-x| = |x|$.

2) Para cada $\epsilon > 0$, $|x| < \epsilon$ es equivalente a $-\epsilon < x < \epsilon$.

3) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

4) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

5) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

7) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ para cada $x \neq 0$.

8) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Probaremos únicamente las propiedades (4) y (5):

1) $|x + y| = \max\{x + y,\ x - y\}$. Por otro lado $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, luego $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ y por la propiedad (2) tenemos que $|x + y| < |x| + |y|$.

2) $x = x - y + y$, de donde
$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$
de donde, $|x| - |y| \leq |x - y|$.

1.5) Densidad

- Proposición (Densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$)

1) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

2) Dados $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < s$. Entonces existe $\xi \in \mathbb{I}$ tal que $r < \xi < s$.

Por la propiedad arquimediana, dados $y - x > 0$ y 1, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 < n(y - x).$$

Sea $p = E(nx) \in \mathbb{Z}$. Entonces se verifica que $p \leq nx < (p+1)$, luego

$$nx < p + 1 \leq nx + 1 < ny,$$

de donde

$$nx < p + 1 < ny$$

o de forma equivalente

$$x < \frac{p+1}{n} < y.$$

Es decir $r = \dfrac{p+1}{n} \in \mathbb{Q}$ verifica la condición buscada. Aplicando a la misma propiedad a $x < r$ podemos afirmar la existencia de $s \in \mathbb{Q}$ tal que $x < s < r$ lo cual muestra que existen infinitos números racionales cumpliendo la condición del enunciado.

Por otra parte, es posible demostrar que entre dos números racionales $r < s$ existen infinitos irracionales. Sabemos que el número $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = 2$ es irracional y que $b < 2$. Entonces, el número $a = \dfrac{b(s-r)}{2}$ es irracional y tenemos que $a < s - r$. Ahora el número $\xi = r + a$ es irracional y $r < \xi < s$.

1.6) Representación decimal de los números reales

- Definición

Se llama números algebraicos a aquellos que son raíces de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. Los números que no son algebraicos se llaman trascendentes.

Un número real de la forma

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde a_0 es un entero no negativo y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_i \leq 9$ se escribe de la forma

$$r = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

En este caso tendríamos una representación decimal finita y el número r es necesariamente racional.

Sin embargo, no todos los números racionales tienen una representación decimal finita. Así, si $\dfrac{1}{3}$ tuviera representación decimal finita tendríamos que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ para cierto a y cierto n, es decir, $10^n = 3a$ lo cual no es posible, puesto que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10.

Sin embargo, podemos aproximar cualquier número real $x > 0$ por una aproximación decimal con un error tan pequeño como se desee por medio de una suma como la expresada anteriormente basándonos en el hecho de ir dividiendo el intervalo en 10 partes iguales en cada paso de forma que

$$
\begin{aligned}
a_0 &\leq x < & a_0+1\\
a_0+\frac{a_1}{10} &\leq x < & a_0+\frac{a_1+1}{10}\\
a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_2}{100} &\leq x < & a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{100}\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Cada número irracional tiene una representación decimal infinita. Observar que es importar tener en cuenta en esta definición dónde situamos la posibilidad de igualdad, ya que utilizando esta situación la representación de $\frac{1}{8}$ sería

$$
\begin{gathered}
0 \leq \frac{1}{8} < 1,\\
\frac{1}{10} \leq \frac{1}{8} < \frac{2}{10}\\
\frac{1}{10}+\frac{2}{100} \leq \frac{1}{8} < \frac{1}{10}+\frac{3}{100}\\
\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000} \leq \frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{6}{1000}
\end{gathered}
$$

y la representación de $\frac{1}{8}$ sería 0.125, sin embargo si colocamos el signo menor estricto en lugar de menor o igual e incluimos la posibilidad de que sea mayor o igual por exceso tendríamos que la representación de $\frac{1}{8}$ sería $0.1249999\dots$ Hemos obtenido de esta forma dos representaciones distintas para el mismo número.

1.6.1) La representación de los números reales en el ordenador (Python)

La representación de los números reales en el ordenador. La cantidad de números con los que el ordenador puede trabajar es finita. Esta afirmación debemos tenerla en cuenta cada vez que pensamos en simulaciones pero no sólo eso, también es importante tener en cuenta cómo trabaja y/o almacena en un ordenador un número. En Python la clase "float" (64 bits):

- 1 bit para el signo del número (positivo o negativo).
- 11 bits para el exponente (el rango es $[-1022, 1023]$).
- 53 bits para dígitos significativos.

1.7) Cardinal de un conjunto

Se llama *cardinal* de un conjunto A al número de elementos de dicho conjunto y se denota $|A|$.

El conjunto vacío, es decir, de cardinal cero se denota por $\varnothing$.

- Definición

Diremos que un conjunto B es un subconjunto o parte de un subconjunto A o que B está contenido en A

si, todos los elementos de B son a su vez elementos de A. Es decir,

$$B \subseteq A \longleftrightarrow x \in B \rightarrow x \in A$$

Un conjunto A de elementos cualesquiera se dice numerable cuando es finito o cuando siendo finito existe una biyección de A sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

- Proposición

El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es numerable.

- Demostración

Sea Q_k el conjunto de todas las fracciones del denominador $k \in \mathbb{N}$. El subconjunto Q_k^+ de las que tienen numerador positivo es trivialmente numerable. De igual forma el conjunto Q_k^- de las que tienen numerador negativo también es numerable y así $Q_k = Q_k^- \cup \{0\} \cup Q_k^+$ es numerable. Ahora el conjunto $\mathbb{Q} = \cup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ es numerable.

El cardinal de los números reales recibe el nombre de potencia del uso continuo. Se dice que un conjunto tiene la potencia del conjunto si existe una biyección de dicho conjunto sobre el $\mathbb{R}$. Durante muchos años estuvo planteado (primer problema de Hilbert) el problema de averiguar si existe subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no sean numerables ni tengan la potencia del continuo, es decir $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Finalmente se ha demostrado que no se puede dar una respuesta ni afirmativa ni negativa a partir de los axiomas de definición del cuerpo de los números reales. El admitir este supuesto se convierte en una verdadera hipótesis, (hipótesis del continuo).

1.8) La idea del infinito

Se llama ampliación de $\mathbb{R}$ al conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \ \infty\}$ y se admite que $-\infty < x < +\infty$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

- $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty; \ x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty.$
- Si $x > 0, \ x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$; si $x < 0$, entonces $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.
- Si $x > 0, \ x \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$; si $x < 0, \ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$.
- $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0.$
- $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$
- $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$

1.9) Funciones elementales

- Definición

Sea $I \subset \mathbb{R}$. Se llama función real de variable real a toda aplicación $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. x recibe el nombre de variable independiente y el nombre de variable dependiente. Al conjunto I se llama conjunto inicial y al conjunto $\{f(x) : x \in I\}$ se le llama conjunto imagen de I mediante f. Al conjunto de valores en que la función se encuentra bien definida se le llama dominio de definición de f.

Seguimos algunas nociones conocidas:

- Definición

Una función $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es:

- Par si $f(x) = f(-x)$ para cada $x \in I$.
- Impar si $f(x) = -f(x)$ para cada $x \in I$.
- Creciente si para $x < y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.
- Estrictamente creciente si para $x < y$ entonces $f(x) < f(y)$.
- Decreciente si para $x < y$ entonces $f(x) \geq f(y)$.
- Estrictamente decreciente si para $x < y$ entonces $f(x) > f(y)$.

1.9.1) Potencias de base real y exponente entero

$\boxed{f(x) = x^n}$

- Proposición (Propiedades)

- Si $n > 0$ entonces $x^n = x \cdot x \cdot \ \cdots \ \cdot x$.
- Si $n = 0$, $x^0 = 1$.
- Si $n < 0$ entonces $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$.
- $(xy)^n = x^n \cdot y^n$.
- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.
- $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.
- Si $n > 0$, entonces x^n es monótona creciente en $(0, +\infty)$
- Si $n < 0$, x^n es monótona decreciente en $(0, -\infty)$

1.9.2) Función exponencial

Sea $a > 0$, se define la función exponencial $f(x) = a^x$.

- Proposición (Propiedades)

- Si $a = 1$, la función es constantemente igual a 1.
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y,\ a^0 = 1$.
- Si $x < y$ y $0 < a < 1$, entonces $a^y < a^x$.
- Si $a > 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
- Si $0 < a < 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

1.9.3) Función logaritmo

Sea $a > 0$ $f(x) = \log_a(x)$

De aquí, $y = \log_a(x)$ sí, y sólo si, $a^y = x$.

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- $\log_a x^n = n \log_a(y)$.
- Si $a > 1$, y $x < y$ entonces $\log_a(x) < \log_a(y)$.
- Si $0 < a < 1$ y $x < y$ entonces $\log_a(x) > \log_a(y)$.
- Si $b > 0$, entonces $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_a(a)}$.

1.9.4) Funciones trigonométricas

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \mathrm{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Para considerar la inversa (con la composición) de las funciones trigonométricas debemos tener en cuenta que la función debe ser biyectiva, por ello debemos seleccionar de forma adecuada un intervalo en el que esto suceda.

Por último recordamos las definiciones de las funciones hiperbólicas.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

que verifican

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x).$$

Investiga: "Big O notation".

Esta notación se utiliza en computación y matemáticas para describir el crecimiento asintótico de la función, *lo rápido que crece o decrece*. Se emplea la letra O porque a la tasa de crecimiento de una función se le suele llamar orden de la función.

En muchos casos necesitaremos analizar el tiempo necesario para ejecutar un algoritmo, en nuestro caso, sería el número de pasos a realizar cuando introducimos n valores. Imaginamos que haciendo el cómputo de operaciones obtenemos que la función que nos informa acerca del número de pasos es $S(n) = n^2+2n+1$. En ese caso diremos que S crece con orden cuadrático o lo que es lo mismo de la forma $O(n^2)$.

Formalmente diremos que dadas dos funciones f y g,

$$f(x) = O\left(g(x)\right) \quad (x \to \infty),$$

si existen constantes K y c tales que

$$|f(x)| \leq K|g(x)|,$$

para $x > c$. De forma análoga

$$f(x) = O\left(g(x)\right) \quad (x \to x_0),$$

si existen constantes K y $\epsilon > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|,$$

para $|x - x_0| < \epsilon$.

1.10) Sucesiones de números reales

1.10.1) Topología en $\mathbb{R}$

- Definición

Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es:

1) Abierto, si para cada $x \in A$ existe $\delta > 0$ tal que el intervalo $(x - \delta,\ x + \delta) \subset A$.

2) Cerrado, si $\mathbb{R} \backslash A$ es abierto.

Obviamente los intervalos abiertos son conjuntos abiertos, mientras que los intervalos cerrados son conjuntos cerrados.

- Definición

Diremos que un punto $a \in \mathbb{R}$ es adherente a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si para cada entorno abierto U del punto a se verifica que $U \cap A \neq \varnothing$. Al conjunto de los puntos adherentes se le llama adherencia o clausura del conjunto. Se denota por $\overline{A}$.

Diremos que un punto $a \in \mathbb{R}$ es de acumulación a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si para cada entorno abierto U del punto a se verifica que $U \backslash \{a\} \cap A \neq \varnothing$. Al conjunto de los puntos de acumulación se le llama conjunto derivado y se denota por A'.

1.10.2) Límite de una sucesión de números reales

Una sucesión de números reales es un subconjunto de $\mathbb{R}$ ordenado según el orden de los números naturales. Es decir, es una aplicación $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural le asigna un número real, así una sucesión vendrá dada por $\{s(n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

- Definición

Se dice que una sucesión $(x_n)_n$ de números reales tiene por límite al número $x \in \mathbb{R}$ cuando para cada número real positivo $\epsilon > 0$ existe un número natural $v \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq v$ entonces $|x_n - x| \leq \epsilon$.

En ese caso lo denotaremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. A las sucesiones que tienen límite se les llama sucesiones *convergentes*.

- Definición

Diremos que una sucesión $(x_n)_n$ tiene límite $+\infty$ si para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $n_K \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_K$ se tiene que $x_n \geq K$, diremos que la sucesión $(x_n)_n$ tiene límite $-\infty$ y lo denotaremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ si para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $n_K \in \mathbb{R}$ tal que si $n \geq n_K$ entonces $x_n \leq K$.

Cuando una sucesión tiene límite infinito diremos que la sucesión es divergente, mientras que aquellas sucesiones que no tienen límite finito ni infinito reciben el nombre de oscilantes.

1.10.3) Sucesiones convergentes

Obsérvese que si la sucesión $(x_n)_n$ tiene como límite x, la sucesión $(x - x_n)_n$ tiene límite 0. Cuando una sucesión de números reales tiene por límite a 0 se dice que esta sucesión es un infinitésimo, esto lo estudiaremos con más detalle en secciones posteriores.

- Proposición

Si una sucesión $(x_n)_n$ tiene límite, entonces ese límite es único.

- Demostración

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existen $v_1 \in \mathbb{N}$ y $v_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ para cada } n \geq v_1, \text{ y}$$

$$|x_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ para cada } n \geq v_2.$$

Ahora, utilizando la desigualdad triangular y tomando $n \geq \max\{v_1,\ v_2\}$ tenemos

$$0 \leq |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Y así, $x = y$.

1.11) Sucesión de Cauchy

- Definición

Diremos que una sucesión $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy si para todo número real positivo $\epsilon > 0$ existe un número natural v tal que si $n \geq v$ y $m \geq v$ entonces

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon.$$

Un espacio métrico X se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Puede comprobarse que la suma de dos sucesiones de Cauchy es otra sucesión de Cauchy, el producto de dos sucesiones de Cauchy es otra sucesión de Cauchy y el producto de un escalar por una sucesión de Cauchy es otra sucesión de Cauchy.

La siguiente proposición establece que la condición es equivalente a la convergencia en $\mathbb{R}$.

- Proposición

Una sucesión de números reales $(x_n)_n$ es convergente si, y sólo si, es de Cauchy.

Como corolario obtenemos

- Corolario

Toda sucesión de Cauchy $\mathbb{R}$ está acotada.

1.12) Sucesión monótona creciente (decreciente)

Veamos algunos casos en los que podemos afirmar que la sucesión es convergente. Antes necesitamos introducir algunas definiciones más.

- Definición

Diremos que una sucesión $(x_n)_n$ de número reales está acotada inferiormente si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Diremos que $(x_n)_n$ está acotada superiormente si existe $R \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq R$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por último diremos que la sucesión está acotada si está acotada inferior y superiormente.

Diremos que una sucesión de número reales $(x_n)_n$ es creciente (decreciente) si $x_{n+1} \geq x_n (x_{n+1} \leq x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

- Proposición

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales. Entonces:

1) Si $(x_n)_n$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

2) Si $(x_n)_n$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

- Ejemplo

Demostrar que la sucesión $x_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$ donde $a > 0$ es convergente probando que es creciente y acotada. Halla su límite.

Observamos que $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$ para $n \geq 1$ y $x_1 = \sqrt{a}$. También observamos que $x_n \leq x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (inducción). Para $n = 1$ obtenemos $\sqrt{a} \leq \sqrt{a+\sqrt{a}}$ y $\sqrt{a+x_n} \leq \sqrt{a+x_{n+1}} = x_{n+2}$ y queda demostrado que la sucesión es creciente. Veamos ahora que está acotada.

$$x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} \leq \sqrt{a+k} \leq k$$

De la última desigualdad obtenemos:

$$a+k \leq k^2 \iff k^2 - k - a \geq 0$$

Tras resolver la ecuación $k = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Así, la sucesión $(x_n)_n$ es convergente. Su límite es $I = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

- Proposición

Sea $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ y $(z_n)_n$ sucesiones de números reales. Entonces:

1) Si $x_n \leq y_n$ para cada $n \geq n_0$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ y ambas sucesiones son convergentes, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2) Si $x_n \leq y_n \leq z_n$ para cada $n \geq n_0$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

1.13) Sucesión contractiva

- Definición

Se dice que una transformación es contractiva si existe un número λ menor que 1 se satisfaga la relación

$$|F(x) - F(y)| \leq \lambda |x - y|$$

Para todos los puntos x e y en el dominio de F.

El método de Newton es un ejemplo de procedimiento mediante el cual se calcula una sucesión de puntos empleando una fórmula de recurrencia como la siguiente:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (n \geq 0).$$

El algoritmo definido de este modo se denomina iteración funcional. En el caso del método de Newton, la función F viene dada por:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

En aquellos casos para los que se cumple que la sucesión así obtenida es convergente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$ es fácil observar que cuando F es continua se cumple que

$$F(s) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = s.$$

Tenemos por tanto que $F(s) = s$ y denotaremos a s punto fijo la función F.

- Proposición

Sea $F : C \to C$ una aplicación contractiva que va de un conjunto cerrado C a un conjunto cerrado. Entonces F tiene un punto fijo s. Además toda la sucesión que se obtenga de la forma $x_{n+1} = F(x_n)$ con $x_1 \in C$ es convergente a s.

- Ejemplo

Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ definida recursivamente de la forma:

$$\begin{cases} x_0 = -155 \\ x_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{2}|x_n| \end{cases}$$

es convergente. Calcula su límite.

Para demostrar que es convergente veremos que la sucesión es contractiva. $F(x) = 3 - \frac{1}{2}|x|$.

$$|F(x) - F(y)| = \left|3 - \frac{1}{2}|x| - 3 + \frac{1}{2}|y|\right| = \frac{1}{2}\left||y| - |x|\right| \leq \frac{1}{2}|y - x|.$$

Así, la sucesión $(x_n)_n$ converge al punto fijo de F, s.

$$3 - \frac{1}{2}|s| = s$$

Si $s > 0$ entonces $3 = \frac{3}{2}s$ y de aquí $s = 2$. Por otra parte si $s < 0$ entonces la ecuación no tiene solución. Así concluimos que el límite es 2.

1.14) Sucesiones equivalentes. Infinitésimos e Infinitos

1) La suma de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty}$$

2) El producto de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

3) El producto de un escalar por una sucesión convergente es otra sucesión convergente

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n$$

4) El cociente de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente, siempre que esté bien definida y el límite de la sucesión del denominador sea distinto de 0. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

- Definición

Dadas dos sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$. Diremos que son equivalentes si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. Se llama infinitésimo a toda sucesión cuyo límite es cero.

Algunos infinitésimos equivalentes son los siguientes, donde $(a_n)_n$ es un infinitésimo:

1) $\log(1 + a_n) \equiv a_n$

2) $\sin(a_n) \equiv a_n$

3) $\tan(a_n) \equiv a_n$

4) $\arcsin(a_n) \equiv a_n$

5) $\arctan(a_n) \equiv a_n$

6) $1 - \cos(a_n) \equiv \frac{a_n^2}{2}$

7) $k^{a_n} - 1 \equiv a_n \log(k)$

8) $e^{a_n} - 1 \equiv a_n$

9) $(1+a_n)^\alpha - 1 \equiv \alpha a_n$

- Definición

Diremos que una sucesión $(x_n)_n$ es un infinito si es divergente, es decir, si su límite es ∞.

Algunos infinitos equivalentes son:

1) $a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p \quad p \in \mathbb{N}$.

2) $\log(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p) \equiv \log(n^p)$ si $a_0 > 0$.

3) $n! \equiv e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ (Fórmula de Stirling).

- Proposición

El límite de una sucesión convergente o divergente no se altera al sustituir uno de los factores o divisores por otro factor o divisor que sea equivalente (infinitésimo) a él.

- Ejemplo

Hallar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^6 \log\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\sin^3\left(\dfrac{1}{n}\right)}{(2n^2+5n)\cos\left(\dfrac{2\pi n}{6n+3}\right)}.$$

$\log\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \equiv \dfrac{1}{2n}$, $\sin^3\left(\dfrac{1}{n}\right) \equiv \dfrac{1}{n^3}$, $2n^2+5n \equiv 2n^2$ y $\cos\left(\dfrac{2\pi n}{6n+3}\right) \equiv \cos\left(\dfrac{2\pi n}{6n}\right)$, por lo que el límite queda de la forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^6 \dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{1}{n^3}}{2n^2\cos\left(\dfrac{2\pi n}{6n}\right)} = 4.$$

1.15) Criterios de convergencia

1.15.1) Límites del número e

La base más frecuentemente utilizada para las funciones exponencial y logarítmica es el llamado número e (en honor a Euler). Los logaritmos en base e reciben el nombre de logaritmos neperianos y se denotan por $\log(x)$ o $\ln(x)$. Nosotros utilizaremos $\log(x)$.

Por otra parte, la sucesión $(r_n)_n$ es una sucesión de Cauchy que es estrictamente creciente y de ahí convergente a un número al que llamamos e cuyo valor aproximado es $2.71828\ldots$

- Proposición

La sucesión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ es monótona acotada, luego convergente. El valor de su límite es el número e.

1.15.2) Criterio de Stolz

Sean $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ dos sucesiones de número reales con $(y_n)_n$ monótona (creciente o decreciente) que cumplen una de las dos siguientes propiedades:

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$
2) $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

Entonces, si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$, también existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ y ambos límites coinciden. Esto es válido incluso si el límite es $+\infty$ o $-\infty$.

1.15.3) Criterio de la media aritmética

Si $(x_n)_n$ es una sucesión convergente de números reales, la sucesión de sus medidas también converge, y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

El recíproco no es cierto.

1.15.4) Criterio de la media geométrica

Si $(x_n)_n$ es una sucesión convergente de números reales estrictamente positivos, la sucesión de sus medidas geométricas también converge, y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

El recíproco no es cierto.

1.15.5) Criterio de la raíz

Si $(x_n)_n$ es una sucesión de números reales estrictamente positivos tal que el cociente $\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)_n$ converge, entonces $(\sqrt[n]{x_n})_n$ también converge, y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

El recíproco no es cierto.

1.15.6) Regla del emparedado

Si $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ son sucesiones tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$.

1.16) Series de números reales

Si $(x_n)_n$ es una sucesión de números reales. A partir de ella podemos formar una nueva sucesión $(S_n)_n$ definida por:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 \\ S_2 &= x_1 + x_2 \\ S_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ S_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

y esta sucesión la llamaremos serie asociada a la sucesión $(x_n)_n$.

Si la sucesión de números reales $(S_n)_n$ tiene límite diremos que la serie es *convergente*.

Si la sucesión de números reales tiene límite $\pm\infty$, diremos que la serie es *divergente*.

Finalmente, si la sucesión $(S_n)_n$ no tiene límite diremos que la serie *no es sumable*.

Se llamarán *sumables* las series que sean convergentes o divergentes. Cuando la serie $\sum |x_n|$ es convergente diremos que que la serie es *absolutamente convergente*.

Lo que generalmente interesa conocer es si una serie converge o no. El problema de hallar la suma de una serie convergente no se resuelve elementalmente más que en muy pocos casos. A continuación mostramos algunos ejemplos de series en los que será sencillo calcular la suma cuando haya convergencia.

1.16.1) Series convergentes

Series geométricas

Las series geométricas son de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{n} a \cdot r^n$ donde a y r son números reales. Se trata de la suma de todos los términos de una progresión de razón r que es fácil calcular tomando

$$S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$$

y entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} + \lim_{n\to\infty} \frac{ar^{n+1}}{1-r},$$

donde suponemos que $r \neq 1$. Tenemos entonces que:

1) Si $r \geq 1$ el límite anterior es infinito y la serie es divergente.

2) Si $|r| < 1$ el límite es cero y

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Series telescópicas

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ es telescópica cuando se puede poner de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}),$$

donde $(a_n)_n$ es una sucesión de números reales. Así la serie será convergente si y sólo si la sucesión $(a_n)_n$ es convergente, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1.$$

- Ejemplo

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Y así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} + 1 = 1.$$

Series Aritmético-Geométricas

Una series aritmético-geométrica es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, donde $(a_n)_n$ es una sucesión aritmética y $(b_n)_n$ es una sucesión geométrica, es decir

$$a_n = a_0 + d \cdot n$$

$$b_n = b_0 \cdot r^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y ciertos d y r reales. Así,

$$S_n = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1}$$

$$S_n r = a_0 b_1 + a_1 b_2 + \cdot + a_{n-1} b_n$$

y de aquí

$$S_n(1-r) = a_0 b_0 + (a_1 - a_0) b_1 + \cdot + (a_{n-1} - a_{n-2}) b_{n-1} - a_{n-1} b_n.$$

Las diferencias que figuran entre paréntesis son todas iguales a la razón d de la progresión aritmética, con lo cual

$$S_n(1-r) = a_0 b_0 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) d - a_{n-1} b_n.$$

Ahora,

$$S_n = \frac{a_0 b_0}{1-r} + \frac{db_1}{(1-r)^2} + \frac{b_0 r^n}{1-r}\left(\frac{d}{r-1} - a_0 - (n-1)d\right).$$

Si $|r| < 1$, es claro que el tercer sumando tiende hacia 0 cuando n tiende hacia $\pm\infty$, la series es convergente y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + d \cdot n) b_0 \cdot r^n = \frac{a_0 b_0}{1-r} + \frac{db_0}{(1-r)^2}.$$

- Ejemplo

Ejemplo de este tipo de serie es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} = 6.$$

1.16.2) Condiciones generales de convergencia de las series

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie convergente, entonces:

1) La sucesión $(R_n)_n$ definida por

$$R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j$$

tiene límite 0 cuando n tiende a ∞.

2) La sucesión convergente $(x_n)_n$ converge a 0.

- Proposición

Una serie de términos reales $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente si y sólo si para cada número real $\epsilon \in 0$ existe un número natural $v \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq v$ y $p \in \mathbb{N}$ entonces

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{j=n+1}^{n+p} x_j\right| \leq \epsilon.$$

En efecto, el que la serie sea convergente equivale, por definición,a que la sucesión $(S_n)_n$ de sus sumas parciales tenga límite, para lo cual es necesario y suficiente que esta sucesión sea de Cauchy.

Estas propiedades de carácter general permiten en ocasiones descubrir que una serie no es convergente. Demostraremos a continuación que la *serie armónica*, es decir, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente.

- Demostración

Demostraremos que la $(T_n)_n = (S_{2n} - S_n)$ no tiene límite cero, de donde deducimos que la serie armónica $(S_n)_n = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right)_n$ es divergente. efectivamente,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

yde aquí

$$T_n > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Así, $(T_n)_n$ no puede tener límite 0.

1.16.3) Series de números positivos

Si $(x_n)_n$ es una sucesión de números positivos de la serie asociada $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \right)_n$ es una sucesión creciente. Entonces, según hemos visto:

1) Si $(S_n)_n$ está acotada la serie converge.

2) Si $(S_n)_n$ no está acotada entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$ y la serie es divergente.

Criterios del cociente de D'Alembert

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie de números reales positivos de forma que existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = r \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que:

1) Si $0 \leq r \leq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

2) Si $r > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

3) Si $r = 1$ no podemos afirmar la convergencia o divergencia de la serie.

- Ejemplo

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Criterio de la raíz de Cauchy

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de números reales positivos de forma que existe el límite $\lim_{n\to\infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} = r \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que:

1) Si $0 \leq r \leq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

2) Si $r > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

3) Si $r = 1$ no podemos afirmar la convergencia o divergencia de la serie.

- Ejemplo

Utilizando el criterio de la raíz tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ es convergente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Criterio de comparación

Consideremos dos series de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ de forma que existe un entero positivo n_0 tal que $x_n > y_n$ para cada $n \geq n_0$. Entonces se satisface las siguientes condiciones:

1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente.

2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

Criterio del límite

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series de números positivos tales que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = r \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica:

1) Si $r \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente (divergente) si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente (divergente).

2) Si $r = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente, entonces la $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente.

3) Si $r = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente, entonces la $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

Para poder aplicar este último criterio necesitamos conocer series de las cuales conozcamos si son o no convergentes. Suele ser bastante frecuente utilizar las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ donde α es un número positivo. Entonces tenemos que

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ es divergente si $\alpha \leq 1$.

Criterio de la integral

- Proposición

Sea f una sucesión real continua positiva, monótona decreciente definida en un intervalo de la forma $[a, \infty)$ y tal que $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$. Entonces si la integral

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

es convergente la serie

$$\sum f(x)$$

es convergente, y si dicha integral es divergente la serie es también divergente.

1.16.4) Series de números arbitrarios

- Definición

Diremos que la serie de términos reales $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, formada por los valores absolutos de sus términos, sea convergente.

La convergencia absoluta de una serie implica su convergencia ordinaria. En efecto, si $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente, para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural v tal que

$$\sum_{j=1}^{n+p} |x_j| \leq \epsilon,$$

para $n > v$ y $p \geq 1$. Puesto que

$$\left|\sum_{j=1}^{n+p} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n+p} |x_j|$$

obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n+p} |x_j| \leq \epsilon$$

si $n \geq v$ y $p \geq 1$.

Es de señalar que no toda serie convergente es absolutamente convergente, tal es el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, que es convergente pero no absolutamente convergente.

Criterio de Leibniz para series alternadas

Sea $a_n > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge si:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2) (a_n) es decreciente.

Tema 2: Cálculo diferencial de una variable

2.1) Límite de una función en un punto

2.1.1) Definición de límite de una función

- Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \to \mathbb{R}$ una función de A en $\mathbb{R}$ y a un punto de acumulación(es decir. para cada entorno abierto I_a de a se verifica que $((I_a \backslash \{a\}) \cap A \neq \varnothing)$. Diremos que $I \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f en a si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $x \in A$ entonces $|f(x) - I| < \epsilon$. Lo denotaremos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = I.$$

- Ejemplo

  - Probar que $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2) = 6$.

Fijado $\epsilon > 0$ tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - 2| < \delta$, $|x| < \delta + 2$ entonces $|x^2 + 2 - 6| < \epsilon$. Basta definir $\delta := \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{4 + \epsilon}}{2}$ para obtener la definición (ejercicio).

Para demostrar que una función no tiene límite basta con negar la definición. Es decir, una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no tiene límite como límite I en un punto a perteneciente a la adherencia de A si existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe $x_\delta \in A$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - I| > \epsilon$.

2.1.2) Caracterización mediante sucesiones

Podemos dar una definición alternativa de límite de una función esta vez probando sucesiones.

- Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y a un punto en la adherencia de A. Diremos que la función f tiene límite I en el punto a si para cada sucesión $(x_n)_n$ de puntos A tal que si $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ se verifica que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = I$.

Al igual que en el caso anterior podemos utilizar la definición para demostrar la no existencia del límite.

2.2) Propiedades

1) El límite de una función en un punto único.

2) Si una función tiene límite en un punto a, está acotada en un entorno de ese punto.

3) SI $\lim_{x \to a} f(x) = I < \alpha (> \beta)$, entonces existe un entorno de a donde la función toma valores menores de α (mayores que β).

4) Sea $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ funciones definidas en un intervalo I que verifican $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un entorno de a perteneciente a la adherencia de I. Si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = I$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = I$.

5) Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ son dos funciones con límites I y m en a, y $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

a) $\lim_{x\to a} f + g = I + m$

b) $\lim_{x\to a} f \cdot g = I \cdot m$

c) $\lim_{x\to a} k \cdot f = k \cdot I$

d) Si $m \neq 0$, $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{k}{m}$

2.3) Límites laterales

- Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Se dice que $f(x)$ tiende a I cuando x tiende al punto a por la izquierda (por la derecha), si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ $(0 < x - a < \delta)$ entonces $|f(x) - I| < \epsilon$ y se representa por $\lim_{x\to a^-} f(x) = I \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = I\right)$.

Para que exista el límite de una función en un punto es necesario y suficiente que existan ambos límites laterales y que además ambos coincidan.

2.4) Límites infinitos y límites en el infinito

2.4.1) Límites infinitos

- Definición

1) Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Se dice que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, si para cada $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $x \neq a$ entonces $f(x) \geq K$.

2) Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Se dice que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si para cada $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $x \neq a$ entonces $f(x) \leq -K$.

- Propiedades

1) Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ con $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp. $-\infty$).

2) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

2.4.2) Límites en el infinito

- Definición

1) Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Se dice que $f(x)$ tiende a I cuando x tiende a $+\infty$ y se representa por $\lim_{x\to+\infty} f(x) = I$ si para cada $\epsilon > 0$ existen $K > 0$ tal que si $x > K$ entonces $|f(x) - I| < \epsilon$.

2) Sea $f : (-\infty,\ a] \to \mathbb{R}$. Se dice que $f(x)$ tiende a I cuando x tiende a $-\infty$ y se representa por $\lim_{x\to-\infty} f(x) = I$ para cada $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que si $x < -K$ entonces $|f(x) - I| < \epsilon$.

2.5) Infinitésimos e Infinitos. Indeterminaciones

2.5.1) Infinitésimos

- Definición

Se llama infinitésimo cuando x tiende al punto a (donde a puede tomar valores infinitos) a toda función f que tenga límite cero en el punto a.

- Propiedades

Son equivalentes:

1) $\lim_{x\to a} f(x) = I$

2) La función $\psi(x) = f(x) - I$ es un infinitésimo.

El producto de un infinitésimo por una función acotada es un infinitésimo. Ejemplo: La función $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es un infinitésimo.

El cociente de un infinitésimo por una función que en valor absoluto se conserva mayor que una constante positiva, es un infinitésimo. $\left(\frac{0}{0} \text{ es una indeterminación}\right)$.

2.5.2) Infinitos

- Definición

Se llama infinito cuando x tiende al punto a (donde a puede tomar valores infinitos) a toda función $f(x)$ que tiende a ∞ cuando x tiende a a.

- Propiedades

1) La suma de un infinito en el punto a con una cantidad finita de funciones acotadas en un entorno de a en un infinito. (La diferencia de dos infinitos puede tener límite distinto $\infty - \infty$ es una indeterminación).

2) El producto de un infinito por un número finito de funciones acotadas inferiormente en valor absoluto por un número positivo (no nulo), es un infinito ($0 \cdot \infty$ es una indeterminación).

3) El cociente de un infinito por una función acotada superiormente en valor absoluto es un infinito. $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ es una indeterminación}\right)$.

2.5.3) Indeterminaciones

$$\frac{0}{0} \qquad \infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty}$$
$$1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

Tabla de equivalencias	
$\sin(x) \equiv x \quad (x \to 0)$	$\sinh(x) \equiv x \quad (x \to 0)$
$1 - \cos(x) \equiv \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$	$\cosh(x) - 1 \equiv \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$
$\tan(x) \equiv x \quad (x \to 0)$	$\tanh(x) \equiv x \quad (x \to 0)$
$\arcsin(x) \equiv x \quad (x \to 0)$	$\arctan(x) \equiv x \quad (x \to 0)$
$a^x - 1 \equiv x \cdot \log(a) \quad (x \to 0)$	$e^x - 1 \equiv x \quad (x \to 0)$
$\log(x+1) \equiv x \quad (x \to 0)$	$(1+x)^{\alpha} - 1 \equiv \alpha x \quad (x \to 0)$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv a_0 \quad (x \to 0)$	$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv a_n x^n \quad (x \to 0)$
$\log(a_n x^n + \cdots + a_0) \equiv \log x^n \quad (x \to \infty)$	

A partir de las equivalencias y del principio de sustitución puede obtenerse la siguiente igualdad para resolver la indeterminación del tipo 1^{∞}.

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \cdot (f(x) - 1)}$$

cuando $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

2.6) Continuidad de una función en un punto

2.6.1) Continuidad

- Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in I$. Diremos que f es continua en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

- Ejemplo

1) Las funciones constantes son continuas.

2) La función identidad $f(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$.

2.6.2) Continuidad lateral

- Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R},\ a \in I$.

1) Se dice que la función f es continua por la derecha en $x = a$ si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

2) Se dice que la función f es continua por la izquierda en $x = a$ si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

- Ejemplo

La función $f(x) = E(x)$ es continua por la derecha en todos los punto $x \in \mathbb{Z}$.

2.6.3) Discontinuidad

- Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R},\ a \in I$. Si existe $\lim_{x\to a} f(x) = I$ y $I \neq f(a)$ o bien no existe $f(a)$ se dice que $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en a.

- Ejemplo

La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ no está definida en $x = 2$, y por lo tanto no puede ser continua en 2, sin embargo $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, es decir, en $a = 2$ tenemos una discontinuidad evitable.

2.6.4) Discontinuidades II

- Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ presenta en $x = a$ una discontinuidad de primera especie o de salto si existen los límites laterales en el punto a pero estos son distintos. Se llama salto en a a la diferencia entre ambos valores.

- Ejemplo

La función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad de salto infinito.

- Definición

Si no existe alguno de los límites laterales o no existen ambos, se dice que f presenta en $x = a$ una discontinuidad de segunda especie.

- Ejemplo

La función $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ presenta en $x = 0$ una discontinuidad de segunda especie.

2.7) Operaciones con funciones continuas

- Proposición

Sean f y g dos funciones continuas en $x = a$. Entonces:

1) $f \pm g$ es continua en $x = a$.

2) $f \cdot g$ es continua en $x = a$.

3) Si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es continua en $x = a$.

- Ejemplo

El polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es continuo para cada $x \in \mathbb{R}$.

2.7.1) Continuidad de la función compuesta

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, f continua en a y continua g continua en $g(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$.

2.8) Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $x \in (a,\ b)$ tal que $f(x) = 0$.

2.9) Teorema de Weiertrass

Toda función continua f definida en un intervalo I compacto está acotada superior e inferiormente y alcanza el máximo y el mínimo absoluto.

La imagen por una función continua de un intervalo compacto es un intervalo compacto.

2.10) Homeomorfismo

- Definición

Diremos que una función $f : A \to B$ es un homeomorfismo si la función es biyectiva, continua y la inversa es continua.

2.10.1) Continuidad de la función inversa

Si la función $f : A \to B$ es una biyección estrictamente monótona creciente o decreciente, entonces f es continua en I y f^{-1} es continua en J.

- Ejemplo

La función logarítmica es continua por ser la inversa de la función exponencial. La función $\sin(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ es continua y estrictamente creciente, esta función tiene inversa $\arcsin(x) : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ que también es continua.

2.11) Derivada de una función en un punto

2.11.1) Definición de derivada de una función en un punto. Derivadas laterales

- Definición

Dada una función $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ y dado un punto $x \in (a,\ b)$, se define la derivada de la función f (resp. *Derivada por la derecha, derivada por la izquierda*) en el punto c y se representa por $f'(c)$ (resp. $f'(c^+),\ f(c^-)$), como el límite (si existe):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$\left(\text{resp. } f'(x^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},\ f'(c^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(d+h) - f(c)}{h}\right)$$

- Ejercicio

Estudiar si existe en $x = 1$ la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1+h-1}{h} = 1$, es decir, $f'_{\text{izq}}(1) = 1$. $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{(2(1+h)-1)-1}{h} = 2$, es decir $f'_{\text{der}}(1) = 2$.

Otra forma de definir si una función es derivables en un punto es la que sigue:

- Proposición

Una función f es derivables en $x = a$ si y sólo si

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) + h \cdot \alpha(h),$$

con $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

En virtud de los teoremas de límites anteriormente introducidos es claro que una función será derivable en un punto si y sólo si, en dicho punto, es derivable por la derecha y por la izquierda y coinciden ambos valores. Por otro lado mostraremos gráficamente que la derivada de una función $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ en un punto $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ en un punto $c \in (a,\ b)$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c,\ f(c))$.

2.11.2) Relación entre derivabilidad y continuidad

Es conveniente dejar claro la relación entre continuidad y derivabilidad, resultado que recogemos en la siguiente proposición.

- Proposición

Toda función derivables es continua

2.12) Interpretación geométrica

2.12.1) Recta tangente y recta normal a una función en un punto

- Proposición

1) A la derecha que pasa por $(a,\ f(a))$ y tiene como pendiente el número real $f'(a)$ se le llama recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a,\ f(a))$. La ecuación de la recta tangente es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

2) La recta perpendicular a la recta tangente en el punto $(a,\ f(a))$ se llama recta normal a la curva en dicho punto. Por tanto, la ecuación de esta recta normal es

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a).$$

2.12.2) Función derivada. Derivadas sucesivas

- Definición

Una función $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ se dice *derivables* si es derivable en cada uno de los puntos de su dominio.

Si f es una función derivables, podemos definir a partir de ella una nueva función que recibe el nombre de *función derivada*. Dicha función se denota por f' y su definición la siguiente:

$$\begin{gathered} f' : (a,\ b) \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x). \end{gathered}$$

Si la función f' vuelve a ser derivables se puede definir la derivada segunda de f como la derivada de f' y así sucesivamente definiríamos $f'',\ f''',\ f^{\mathrm{IV}},\ f^{\mathrm{V}},\ \ldots$

- Definición función de clase C^k

Una función $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ se dice de *clase* C^k sí y sólo si la función f es derivable k veces y la derivable k-ésima, f^k, es continua. El conjunto de las funciones de clase C^k definidas en el intervalo $(a,\ b)$ se denota por $C^k((a,\ b))$. Cuando $k=0$, obtenemos el conjunto de las funciones continuas.

A continuación damos las propiedades de las derivadas con respecto a las operaciones entre funciones.

- Álgebra de las funciones de clase C^k

Sea k un número natural, entonces el conjunto $\left(C^k(a,\ b),\ +,\ \cdot\right)$ tiene estructura de anillo conmutativo con elemento neutro para la multiplicación. Además, si $f,\ g \in C^k((a,\ b))$ se tiene que:

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Además. si f y g son dos funciones que admiten derivadas hasta el orden n, entonces se verifican:

1) $(f+g)^n = f^n + g^n$.

2) $(c \cdot f)^n = c \cdot f^n$ para cada $c \in \mathbb{R}$.

3) $(f \cdot g)^n = \binom{n}{0} f^n \cdot g + \binom{n}{1} f^{n-1} \cdot g' + \cdots + \binom{n}{n-1} f' \cdot g^{n-1} + \binom{n}{n} g^n$.

2.12.3) Composición de funciones: Regla de la cadena

Con respecto a la composición de funciones, la regla de la cadena da la respuesta a cómo calcular la derivada de composiciones de funciones.

- Regla de la cadena

Sea $f:(a,\ b) \to (c,\ d)$ y $g:(c,\ d) \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real, sea $x_0 \in (a,\ b)$ tal que f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y la derivada se obtiene mediante la expresión

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) f'(x_0).$$

2.13) Diferencial de una función en un punto

Se dirá que una función $f(x)$, definida en un entorno de a es diferenciable en a si $f(x)$ puede aproximarse, en un entorno de a, por una función afín, de ecuación

$$y - f(a) = A(x-a)$$

con $A \in \mathbb{R}$.

- Definición

Una función $f: I \to \mathbb{R},\ \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ abierto, es diferenciable en $a \in I$ si verifica

$$f(x) - f(a) = (x-a)(A + \alpha_a(x))$$

para cada x perteneciente a cierto intervalo de a contenido en I y α_a es una función con $\lim\limits_{x\to a} \alpha_a(x) = 0$.

Si en la anterior definición se toma $x = a + h$ se tendrá que f es diferenciable si y sólo si

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h \in_a (h)$$

con $\lim\limits_{h\to 0} \in_a (h) = 0$.

- Definición

A la función lineal definida para cada valor de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ que asigna a cada $h \in \mathbb{R}$ el valor $A \cdot h$ se le llama diferencial de la función f en a y se denotará por df_a, es decir, $df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $df_a(h) = A \cdot h$.

Para una función $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $a \in I$ con equivalentes que la función f es diferenciable en a y el que la función sea derivable en a. Además si $df_a(h) = A \cdot h$, entonces $A = f'(a)$.

2.14) Teoremas sobre valores medios de funciones derivables

2.14.1) Extremos relativos

- Definición de función creciente (decreciente)

Sea $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es creciente (decreciente) en $c \in (a,\ b)$ si existe $\delta > 0$ tal que para cada par de punto $x,\ y \in (c-\delta,\ c+\delta) \subset (a,\ b)$ con $x < c < y$ y se verifica $f(x) \leq f(c) \leq f(y)\ \ (f(x) \geq f(c) \geq f(y))$.

- Proposición

Sea $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ creciente (decreciente) y derivable en $c \in (a,\ b)$. Entonces $f'8c) \geq 0\ \ (f'8c) \leq 0)$.

Sea $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in (a,\ b)$, con $f'(c) > 0$ (resp. $f'(c) < 0$) entonces f es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en c.

2.14.2) Extremos relativos y absolutos

- Definición

Una función $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ tiene un máximo (mínimo) relativo en $c \in (a,\ b)$ si existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta,\ c+\delta) \subset (a,\ b)$ y tal que $f(x) \leq f(x)\ \ (f(x) \geq f(c))$ para cada $x \in (c-\delta,\ c+\delta)$.

- Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in (a,\ b)$. Si en c hay un extremo relativo entonces $f'(c) = 0$.

- Ejemplo

La función $f(x) = x^3$ verifica que $f'(x) = 3x^2$ y $f'(0) = 0$ pero $c = 0$ no es un extremo relativo de la función.

2.14.3) Cálculo de máximos y mínimos relativos y absolutos

Dada una función f definida en un intervalo $[a,\ b]$ con valores reales sabemos por el teorema de Weiertrass que la función alcanza el máximo y mínimo absolutos.

Procedimiento para el cálculo de los extremos absolutos.

1) Hallar los puntos críticos de f en $[a,\ b]$ (es decir, aquellos en los que la derivada se anula) y evaluar f en dichos puntos.

2) Evaluar f en los extremos del intervalo (puntos a y b) y en aquellos puntos en los que la función no sea derivable.

3) Elegir, entre todos los puntos obtenidos, aquellos donde la función alcance los valores mayor y menor.

En el caso en el que el intervalo fuese abierto $(a,\ b)$ no tenemos asegurada la existencia de los extremos absolutos, el procedimiento para calcularla es similar sólo que en este caso calcularemos $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

2.14.4) Teorema de Rolle

- Teorema

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en $(a,\ b)$. Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a,\ b)$ tal que $f'(c) = 0$.

El teorema de Rolle es importante a la hora de la búsqueda de raíces de funciones derivables, pues entre dos de ellas la derivada de la función a la que buscamos las raíces se tiene que anular. Por otro lado, mostraremos con los siguientes ejemplos, que las hipótesis no se pueden debilitar.

- Ejemplo

La función

$$f : \begin{array}{c} [0,\ 1] \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

no es continua en $[0, 1]$, no es derivable en $(0, 1)$, $f(0) = f(1)$ y sin embargo $f'(x) = 1 \neq 0$ si $0 < x < 1$.

- Ejemplo

La función

$$f: \begin{array}{c} [-1,\ 1] \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) = |x| \end{array}$$

es continua en $[-1,\ 1]$, no es derivable en $(-1, 1)$, ya que no lo es en $x = 0$ y la derivada de f no se anula en ningún punto de $(-1, 1)\backslash\{0\}$.

2.14.5) Teorema del valor medio de Lagrange (Teorema de los incrementos finitos)

- Teorema de los incrementos finitos de Lagrange

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a.b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que se verifica

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Como aplicación obtenemos la caracterización de las funciones constantes.

- Proposición

Sea f una función definida y derivable en un intervalo $(a,\ b)$ y tal que $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a,\ b)$ entonces $f(x) = K$ para cada $x \in (a,\ b)$ $(K \in \mathbb{R})$. Recíprocamente si f es una constante entonces $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a,\ b)$.

2.14.6) Aplicación: Separación de raíces de una ecuación $f(x) = 0$

Sea $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ derivable en (a, b). Entonces:

1) Entre cada dos raíces de $f(x) = 0$ existe al menos una raíz de $f'(x) = 0$.

2) Entre dos raíces consecutivas de $f'(x) = 0$ existe a lo sumo una raíz de $f(x) = 0$.

2.14.7) Aplicación: Desigualdades

Usar el teorema de los incrementos finitos para probar la desigualdad $e^x \leq 1 + x$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Para $x = 0$ se tiene desigualdad $e^0 = 1+x$. Supongamos que $x > 0$, utilizando el teorema de los incrementos finitos de Lagrange en el intervalo $[0,\ x]$ sobre la función $f(x) = e^x$ tenemos que $f(x)-f(0) = f'(x)\cdot(x-0)$, es decir, $e^x-1 = e^c\cdot(x-0) > 0$ puesto que la función exponencial es estrictamente creciente. Así $e^x > x+1$. De forma similar se demuestra el caso en el que $x < 0$.

2.14.8) Aplicación: Cálculos aproximado, acotación de valores

Calcular de forma aproximada el valor de $\sqrt{105}$

Consideramos la función $f(x) = \sqrt{x}$ y el intervalo $[100, 105]$. Aplicamos el teorema de los incrementos finitos de Lagrange en dicho intervalo y obtenemos

$$f(105) - f(100) = \frac{1}{2\sqrt{c}}(105 - 100),$$

es decir,

$$\sqrt{105}10 = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot 5$$

Por otra parte la función $f(x)$ es creciente, así $10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11$, y

$$\frac{5}{2 \cdot 11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2 \cdot 10}.$$

Se sigue entonces que $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$.

2.15) Regla de L'Hôpital

Esta regla permite, directamente o con ligeras modificaciones, calcular límites en indeterminaciones de los tipos $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0, $\infty - \infty$.

- Proposición

Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo abierto que contiene a x_0. Si

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

(resp. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$) y existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esta regla tiene un análogo cuando calculamos límites en $\pm\infty$, es el siguiente.

Regla de Bernoulli-L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en la semirrecta $(a, +\infty)$ (resp. $(-\infty,\ a)$). Si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 0 \text{ o } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty$$

(resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$) y existe el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\left(\text{resp. } \dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

La regla de L'Hôpital no resuelve todas las indeterminaciones que se pueden presentar, por ejemplo, si se aplica L'Hôpital al límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \cdot \sin^2(x)}$ no desaparece la indeterminación, es más, el nuevo límite que aparece es más complicado que el primero y el primero también se resuelve por L'Hôpital. Por otro lado, es importante tener en cuenta que, a veces, existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y no el límite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, un ejemplo de este caso se obtiene tomando $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $g(x) = \sin(x)$ y $x_0 = 0$.

2.16) Aproximación local de funciones mediante polinomios

2.16.1) Polinomio de Taylor de grado n

Abordaremos el problema de la aproximación de funciones reales por polinomios. La idea es la siguiente: dada una función real, por ejemplo $f(x) = e^x$, se conocen ciertos aspectos de dicha función como que es continua y derivable, su gráfica aproximada, etc ... Sin embargo, si queremos calcular el valor de $e^{\frac{1}{2}}$ nos encontraremos con que no sabemos calcular dicho valor. Si la función pudiera sustituirse por el polinomio $P(x)$, y el error que se cometiera en dicha aproximación fuera pequeño, podríamos tomar $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$ como un valor aproximado de $e^{\frac{1}{2}}$.

Esto puede hacerse de una manera local siempre que la función que estemos considerando cumpla ciertas condiciones de derivabilidad.

- Fórmula de Taylor

Sea $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k y $x_0 \in (a,\ b)$. Entonces:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(x - x_0),$$

Donde $R_k(x - x_0)$ es el término del error que puede presentar diferentes formas y tal que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_k(x - x_0)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

Llamamos polinomio de Taylor de grado k a

$$P_{k-1,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x_0 f^k(x_0)(x - x_0)$$

En el caso en el que $x_0 = 0$ a la fórmula de Taylor se le llama fórmula de McLaurin.

El error cometido en la aproximación también llamado resto, puede estimarse estudiante $R_k(x - x_0)$. La fórmula más usual de hacer esta estimación es usando la fórmula del resto de Lagrange:

$$R_k(x-x_0) = \frac{f^k(c)}{k!}(x-x_0)^k$$

Donde c es un número indeterminado de depende de cada valor x y pertenece al intervalo abierto $(x_0 - |x_0 - x|,\ x_0 + |x_0 + x|)$. Otra forma de expresar el término complementario o resto es la forma infinitésimas:

$$R_k(x-X_0) = \alpha(x)(x-x_0)^k, \text{ donde } \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Por ejemplo, en nuestro caso el polinomio de grado 3 de e^x es

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1.64583$ valor aproximado de $e^{\frac{1}{2}}$ con un error

$$R_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}e^c\frac{1}{24}$$

Donde $c \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. Como $e^x \leq 2$ en $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, una acotación del error será

$$E \leq \left|R_4\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{1}{384} = 2.6042\cdot 10^{-3}$$

Aplicaciones de la fórmula de Taylor

1) El cálculo de expresiones con una acotación del error.

2) Cálculo de límites

Veamos algunos ejemplos de las aplicaciones.

Determinar el polinomio que aproxima a la función $f(x) = \sin(x)$ con un error menor que 0.001 en el intervalo $[-2,\ 2]$

El error viene determinado por el resto, así debemos calcular en este caso n tal que

$$|R_{n,0,x}| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(c)x^{n+1}\right| \leq 0.001$$

Calculamos las derivadas de $f(x) = \sin(x) \cdot f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$, $f'''(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$, $f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right), \ldots,$ así tenemos que $f^n = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. Acotamos el resto

$$\left|\frac{1}{(n+1)!}\sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right| \cdot |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}2^{n+1} \leq 0.001$$

Esta desigualdad se verifica para $n = 10$. Así que tomaremos el polinomio de Taylor de grado nueve. Evaluamos la fórmula de Taylor y tenemos que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

Aplicación de la fórmula de Taylor al cálculo de límites

- Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - \tan(x^3)}{x^9}$

Calculamos los desarrollos limitados de las funciones $\sin(x^3)$ y $\tan(x^3)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + o(x^9)$$

De forma análoga tenemos que

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$$
$$\tan(x^3) = x^3 + \frac{x^9}{3!} + 0(x^9)$$

Sustituyendo en la expresión tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \frac{x^9}{3!} + o(x^9) - x^3 - \frac{x^9}{3} - o(x^9)}{x^9} = -\frac{1}{2}.$$

El método de Newton

Método iterativo para el cálculo de raíces de funciones. La fórmula viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2.16.2) Interpolación

- Definición

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la cual conocemos el valor de $n+1$ puntos $\{x_0, \ldots, x_n\}$, es decir, conocemos

$$\{f(x_0), \ldots, f(x_n)\},$$

entonces existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado a lo sumo n tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

El polinomio $P_n(x)$ recibe el nombre de polinomio interpolador de f en los puntos x_i para $i = 0, \ldots, n$ la expresión de $P_n(x)$ viene dada por:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1))\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1))\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.}$$

Además, si x es un número real arbitrario y la función f es derivable $n+1$ veces, se verifica que el error cometido en la aproximación, viene dado por

$$f(x) - P_n(x) = E_n(x) = \frac{f^{n+1}(c(x))}{(n+1)!}(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot \;\cdots\; \cdot(x-x_n),$$

Donde $c(x)$ es una función que toma valores en el intervalo $(m,\ M)$, donde $m = \min\{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ y $M = \max\{x_i : i = 0, \ldots, n\}$.

Representación gráfica de funciones

Elementos para la representación gráfica de funciones:

1) Dominio de definición
2) Simetrías
3) Periodicidad
4) Puntos de corte con los ejes
5) Cálculo de asíntotas
6) Crecimiento y decrecimiento
7) Cálculo de extremos relativos
8) Concavidad y convexidad
9) Puntos de inflexión
10) Puntos donde la función no es continua o derivable

Cálculo de asíntotas

- Asíntotas verticales

  Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ la recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

- Asíntotas horizontales

  Si $\lim_{x\to\infty} = \lambda \in \mathbb{R}$ la recta $y = \lambda$ es una asíntota horizontal. Análogo para el caso x tiende a $-\infty$.

- Asíntotas oblicuas

  Son de la forma $y = mx+n$ donde $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{n\to\infty}(f(x)-mx)$ siendo $m \neq 0,\ m \neq \pm\infty,\ n \neq \pm\infty$. Análogo para caso cuando x tiende a $-\infty$.

Concavidad y convexidad

- Definición

Sea f una función derivable en un intervalo $(a,\ b)$. Se dice que la función es *convexa (cóncava)* en dicho intervalo si su derivada es una función creciente (decreciente) en dicho intervalo.

2.17) Soluciones de ecuaciones de una variable

2.17.1) Newton-Raphson

El método de Newton

Sea una función f de clase $C([a,\ b])$. Sea $x_0 \in [a,\ b]$ así

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Tomamos valores de x "suficientemente cerca" de x_0 y que $f(x) = 0$, tenemos que

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

y así

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

De donde, podemos introducir el método de Newton en el cual, con condición inicial p_0 construimos una sucesión de puntos

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

- Teorema

Sea $f \in C‘2([a,\ b])$ y $p \in [a,\ b]$ tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a p para cualquier valor $p_0 \in (p - \delta,\ p + \delta)$.

Si sustituimos el valor de la derivada por una aproximación de la misma mediante la secante obtenemos el método de la secante.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1} - p_{n-2})}$$

Observa que en este caso necesitamos inicializar el proceso con dos datos.

Para analizar el error de los métodos necesitamos previamente la siguiente definición:

- Definición

Sea $(p_n)_n$ una sucesión de números reales que converge a p, con $p_n \neq p$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si existen constantes positivas λ y α con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n-1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda,$$

entonces $(p_n)_n$ converge a p con orden α y una constante de error asintótica λ.

- Teorema

Sea p una solución de la ecuación $x = g(x)$ y supongamos que $g'(p) = 0$ y g'' es continua y está estrictamente acotada por M en un intervalo abierto I que contiene a p. Entonces existe una $\delta > 0$ tal que para $p_0 \in [p - \delta,\ p + \delta]$ la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, cuando $n \geq 1$, converge al menos con orden 2 a p. Además, para valores suficientemente grandes de n se tiene que

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2.$$

- Teorema (Convergencia local)

Sea f'' continua y f' no nula en algún intervalo abierto que contenga la raíz de $f(x) = 0$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que el método de Newton es convergente para todo x_0 tal que $|x_0 - r| \leq \epsilon$. Además, si f''' es continua la convergencia es, al menos, cuadrática.

- Teorema (Convergencia global)

Sea $f \in C^2([a,\ b])$ tal que:

1) $f(a) \cdot f(b) < 0$

2) Para cada $x \in [a,\ b]$ es $f'(x) \neq 0$ (estrictamente monótona)

3) Para cada $x \in (a,\ b)$ es $f''(x) \geq 0$ (o $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,\ b)$ concavidad en el mismo sentido).

Entonces, si existe una única raíz de r de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a,\ b]$ y la sucesión $(x_n)_n$ definida por el algoritmo de Newton converge hacia r para todo $x_0 \in [a,\ b]$ tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Si además $f \in C^3([a,\ b])$ la convergencia es, al menos, cuadrática.

Tema 3: El concepto de integral de Riemann y sus propiedades

3.1) Función integrable

- Definición

Dado $[a,\ b]$ un intervalo de la recta real, se define una partición $\mathcal{P}$ de dicho intervalo como una sucesión finita de números reales de la forma

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

A cada uno de los intervalos de la forma $[x_i,\ x_{i+1}]$ con $i = 0, 1, \ldots, n-1$ se les conoce como intervalos de la partición $\mathcal{P}$. Se define el diámetro de la partición $\mathcal{P}$ como

$$\mathrm{diam}(\mathcal{P}) = \max\{|x_{i+1} - x| : i = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Dadas dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ de un intervalo $[a,\ b]$, $\mathcal{P}$ se dice más fina que $\mathcal{P}'$ si todo elemento de $\mathcal{P}$. Se verifica entonces que $\mathrm{diam}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{diam}(\mathcal{P}')$.

- Definición

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se define la suma inferior de Riemann de f para la partición $\mathcal{P}$ como

$$s(\mathcal{P}, f, [a,\ b]) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

donde $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i,\ x_{i+1}]\}$. Geométricamente, la suma inferir de Riemann coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.

Se define la suma de Riemann de f en la partición $\mathcal{P}$ como

$$S(\mathcal{P}, f, [a,\ b]) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

donde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i,\ x_{i+1}]\}$.

Es claro que

$$s(\mathcal{P}, f, [a,\ b]) =\leq S(\mathcal{P}, f, [a,\ b]).$$

Además si $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ tenemos:

$$s(\mathcal{P}, f, [a,\ b]) \leq s(\mathcal{P}', f, [a,\ b])$$
$$S(\mathcal{P}, f, [a,\ b]) \leq S(\mathcal{P}', f, [a,\ b])$$

- Definición

Sea $(\mathcal{P}_n)_n$ una sucesión de particiones de manera que $\mathcal{P}_{n+1}$ es más fina que $\mathcal{P}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y de manera que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\mathcal{P}_n) = 0$. Diremos que una función es integrable Riemann en $[a,\ b]$ o integrable en $[a,\ b]$ si existen y son iguales los límites

$$\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n, f, [a,\ b]) = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n, f, [a,\ b])$$

Dicho límite se denotará como

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n, f, [a,\ b]) = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n, f, [a,\ b]),$$

y se denomina integral de Riemann de f en $[a,\ b]$.

Geométricamente se observa que cuando la función es positiva, dicho límite coincide con el área de la superficie definida por la gráfica, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. ¿Cuándo f es integrable? Estos son algunos resultados:

- Teorema

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una función, entonces f es integrable en $[a,\ b]$.

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una función acotada con un número finito de puntos de discontinuidad, entonces f es integrable en $[a,\ b]$.

3.2) Propiedades de la Integral de Riemann

- Proposición

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$

2) Si $c \in (a,\ b)$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

- Propiedades

Sea $f, g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

- $f + g$ es integrable en $[a,\ b]$,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

- Para cada $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot f$ es integrable en $[a,\ b]$,

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- Si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,\ b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

- Si $f(x) \geq g(x)$ para cada $x \in [a,\ b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

- La función $|f|$ es integrable en $[a,\ b]$ y

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

3.3) Teorema de la Media Integral

- Proposición

Sea F una función integrable en $[a,\ b]$ y sean m y M los valores mínimos y máximos respectivamente de la función f en ese intervalo, entonces se verifica que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

- Teorema

Si f es una función continua en un intervalo $[a,\ b]$, entonces existe un punto $c \in [a,\ b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c).$$

Al valor $f(c)$ se le denomina valor medio de f en $[a,\ b]$.

3.4) El teorema Fundamental del Cálculo Integral

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,\ b]$ y continua en $x_0 \in (a,\ b)$, entonces la función F definida en (1) es derivable en x_0 y se verifica que

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

En general, si la función f es continua en $[a,\ b]$ entonces F es derivable en $(a,\ b)$ y $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in (a,\ b)$.

3.5) Regla de Barrow

Dadas $f, G : [a,\ b] \to \mathbb{R}$, diremos que G es una función *primitiva* de f si se verifica que $G'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,\ b]$.

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral afirma que si f es continua en $[a,\ b]$ entonces existe una función primitiva.

Las primitivas son únicas salvo constantes, es decir, si $G - 1, G_2 : [1,\ b] \to \mathbb{R}$ son primitivas de f entonces $G_1(x) = G_2(x) + k$ para cada $x \in [a,\ b]$, donde k es una constante real.

- Proposición

Sea $G : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de una función $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ entonces

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(d) - G(a).$$

3.6) Integrales impropias

3.6.1) Integrales impropias de primera especia

- Definición

Sea $f : [a,\ +\infty] \to \mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo $[a,\ b]$ con $b \in [a,\ +\infty)$. Se define la integral impropia

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Si el límite anterior existe y es finito la integral se dice que es convergente, si el límite existe pero es $\pm\infty$ la integral es divergente. Si el límite no existe diremos que la integral es oscilante.

De forma análoga se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x. = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

El valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ no depende del punto $a \in \mathbb{R}$.

Se define valor principal de la integral impropia de f en $(-\infty, +\infty)$ como el límite

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-t}^{t} f(x)\mathrm{d}x.$$

Si la integral es convergente, el valor principal de la integral y la integral coinciden, mientras que en el caso en el que no sea convergente esto no tiene por qué suceder.

- Ejemplo

Consideramos la función $f(x) = x$. Puesto que $\displaystyle\int_{-t}^{t} x\mathrm{d}x = 0$, así

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} x\mathrm{d}x = 0,$$

mientras que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x \text{ no existe.}$$

3.6.2) Criterios de convergencia I

Criterio de comparación

- Proposición (Criterios de comparación)

Sea $f, g : [a,\ \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones positivas e integrales en $[a,\ b]$, para todo $b \in [a,\ \infty)$. Si $f(x) \geq g(x)$ para cada $x \in [a,\ \infty)$ se satisfacen las siguientes propiedades:

1) Si $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ es convergente.
2) Si $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ es divergente.

- Proposición (Criterio del límite)

Sea $f, g : [a,\ \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones positivas e integrales en $[a,\ b]$, para todo $b \in [a,\ \infty)$. Sea $\infty \neq I = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Entonces:

1) Si $I > 0$ entonces $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ e $\displaystyle\int_{a}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ son de la misma naturaleza.
2) Si $I = 0$ y $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_{a}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ es divergente.
3) Si $I = 0$ y $\displaystyle\int_{a}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ es convergente.

La integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x \text{ es } \begin{cases} \text{convergente si } \alpha > 1 \\ \text{divergente si } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

utilizando la integral podemos mostrar ejemplos.

- Ejemplo

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log(x)}{x^3}\mathrm{d}x$

Tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$. Por tanto, puesto que $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ es convergente también lo es $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

Cuando la función $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ no es positiva, se introduce la noción de *convergencia absoluta*. La integral es absolutamente convergente si $\displaystyle\int_a^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ es convergente. En general, toda función absolutamente convergente implica que la integral de la función es convergente.

- Ejemplo

$\displaystyle\int_2^{\infty} \sin(x)\frac{\log(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ es convergente.

3.6.3) Integrales impropias de segunda especie

- Definición

Sea $f : [a,\ b) \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,\ c]$ para cada $c \in [a,\ b)$ de forma que $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

Si el límite anterior existe y es finito diremos que la integral es convergente, si existe pero no es finito diremos que la integral es convergente, si existe pero no es finito entonces la integral se dice divergente. Por último, cuando no se dan ninguno de los casos anteriores diremos que la integral es oscilante

3.6.4) Criterios de convergencia II

Criterio de comparación

- Proposición (Criterio de comparación)

Sea $f, g : (a,\ b] \to \mathbb{R}$ integrables en el intervalos $[c,\ b]$ para cada $c \in (a,\ b]$ de forma que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. Si $f(x) \geq g(x)$ para cada $x \in /a,\ b$ entonces:

1) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ es convergente entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ es convergente.

2) Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ es divergente entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ es divergente.

- Proposición (Criterio del límite)

Sea $f, g : (a,\ b] \to \mathbb{R}$ integrables en el intervalo $[c,\ d]$ para cada $c \in (a,\ b]$ de forma que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = I \neq \infty$, se verifica:

1) Si $I \neq 0$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ y $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ son de la misma naturaleza.

2) Si $I = 0$ y $\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ es divergente, entonces $\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ es divergente.

3) Si $I = 0$ y $\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ es convergente, entonces $\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ es convergente.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \text{ es } \begin{cases} \text{convergente si } \alpha < 1 \\ \text{divergente si } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

$$\int_{x_0}^{1+x_0} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}\mathrm{d}x \text{ es } \begin{cases} \text{convergente si } \alpha < 1 \\ \text{divergente si } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

- Ejemplo

$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ es convergente puesto que $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$ es convergente.

3.7) Cálculo de primitivas

3.7.1) Fórmula de cambio de variable

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,\ b]$ y $g : [c,\ d] \to \mathbb{R}$ una función inyectiva con derivada integrable en $[c,\ d]$, de manera que $g(c) = a$ y $g(d) = b$. Entonces se satisface la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f\left(g(t)\right) g'(t)\mathrm{d}t.$$

Sean $f, g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $(a,\ b)$ tales que sus derivadas f' y g' son integrables en $[a,\ b]$. Entonces se verifica la fórmula

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

3.7.2) Algunos ejemplos

$$\int \log(x)\mathrm{d}x$$
$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x$$
$$\int e^x \sin(x)\mathrm{d}x$$
$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$$

3.7.3) Cambios específicos para determinadas funciones

Primitivas de las facciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones polinómicas de una variable real. Se demuestra en los tratados de Álgebra que toda fracción racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ puede descomponerse en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{k=1}^{\alpha_1} \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \sum_{k=1}^{\alpha_2} \frac{B_k}{(x-a_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{\alpha_m} \frac{M_k x + N_k}{(x^2-a_m)^k}$$

Donde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son las raíces (reales y complejas) de la ecuación $Q(x) = 0$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son sus índices de multiplicidad respectivamente. El polinomio $P(x)$ es el cociente que se obtiene al hacer la división entera del polinomio P entre el polinomio Q. Por último, las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha_1};\ B_1, B_2, \ldots, B_{\alpha_2};\ M_1, \ldots$ que aparecen en la descomposición asociada a los ceros del polinomio Q son números reales o complejos que pueden calcularse. En base a esta descomposición el problema del cálculo de la primitiva del cociente de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se simplifica.

Primitivas expresiones que continen $\frac{ax+b}{cx+b}$

Las funciones a los que pretendemos calcular sus primitivas tienen la forma:

$$f\left(x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\dfrac{m_1}{n_1}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\dfrac{m_2}{n_2}},\ \ldots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\dfrac{m_k}{n_k}}\right).$$

En este caso utilizaremos el cambio de variable

$$\frac{ax-b}{cx-d} = t^n$$

donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Despejando x obtenemos

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = f_1(t)$$

apareciendo x como una fracción racional de la variable t. El problema se reduce a la determinación de una primitiva de una fracción racional.

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones polinómicas de una variable real y supongamos que queremos calcular la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x.$$

Los pasos a seguir en el caso de un cociente de polinomios son los siguientes: En primer lugar debemos comparar los grados de los polinomios del numerador y del denominador.

- **Grado de P(x) mayor o igual que Q(x).** Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$

realizaremos la división y obtenemos utilizando la fórmula

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}},$$

obtendremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = c(x) + \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde $c(x)$ es el cociente, $p(x)$ es el resto, y $q(x) = Q(x)$. Ahora la integral inicial queda de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = \int c(x)\mathrm{d}x + \int \frac{p(x)}{q(x)}\mathrm{d}x,$$

donde $\int c(x)\mathrm{d}x$ es inmediata y el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, con lo cual la integral $\int \frac{p(x)}{q(x)}\mathrm{d}x$ se resuelve tal y como se describe en el punto siguiente.

Grado de $P(x)$ menor que el grado de $Q(x)$

En este caso el siguiente paso es la factorización del denominador $Q(x)$. También aquí distinguimos dos posibilidades:

- El denominador $Q(x)$ no tiene raíces complejas múltiples. En este caso al realizar el proceso de factorización el resultado sería de la forma:

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1} \cdot (x-a_2)x^{n_2} \cdot (x-a_r)^{n_r} \cdot q_1(x)^{m_1} \cdot q_s(x)^{m_s},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, son la raíces reales del polinomio $Q(x)$ y $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ son las multiplicidades de cada una de las raíces reales y $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_s(x) \in \mathbb{R}[x]$ son polinomios de grado 2 que no poseen raíces reales y que además para cada $i \neq j$ $q_i(x)$ y $q_j(x)$ no poseen raíces complejas comunes. En este caso procedemos a utilizar el método de **descomposición en fracciones simples,** el cual sostiene en afirmar que el cociente original puede expresarse como suma de fracciones en la forma que sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{A_{1,k}}{(x-a_1)^k} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{A_{2,k}}{(x-a_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{A_{r,k}}{(x-a_r)^k} + \sum_{k=1}^{m_1} \frac{M_{1,k}+N_1}{q_1(x)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{m_s} \frac{M_{k,s}+N_{k,s}}{q_s(x)^k}.$$

Desarrollando los sumatorios la expresión queda de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{1,n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \cdots \\ & + \frac{A_{2,n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{A_{r,1}}{x-a_r} + \frac{A_{r,2}}{(x-a_r)^2} + \cdots + \frac{A_{r,n_r}}{(x-a_r)^{n_r}} + \frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{q_1(x)} \\ & + \frac{M_{1,2}x+N_{1,2}}{q_1(x)^2} + \cdots + \frac{M_{1,m_1}x+N_{1,m_1}}{q_1(x)^{m_1}} + \frac{M_{2,1}x+N_{2,1}}{q_2(x)} + \frac{M_{2,2}x+N_{2,2}}{q_2(x)P2} + \cdots \\ & + \frac{M_{s,1}x+N_{s,1}}{q_s(x)} + \frac{M_{s,2}x+N_{s,2}}{q_s(x)} + \cdots + \frac{M_{s,m_s}x+N_{s,m_s}}{q_s(x)^{m_s}}.\end{aligned}$$

El siguiente paso es el cálculo de los coeficientes que aparecen en la descomposición. En base a esta descomposición el problema de la primitiva del cociente de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se simplifica al cálculo de primitivas más sencillas.

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x-2)^2}\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{x^7+x^3}{x^4-1}\mathrm{d}x$$

Primitivas de las diferencias binomias

Se trata de calcular primitivas de la forma

$$\int x^r(a+b\cdot x^s)\mathrm{d}x,$$

donde r, s, p son números racionales y a y b son números reales, en intervalos donde la función integrando tome valores reales. Para resolver estas integrales procedemos de la forma que sigue, atendiendo al tipo:

Tipo 1 Si $p \in \mathbb{N}$ desarrollaremos la expresión $(a+bx^s)^p$ utilizando la fórmula del binomio de Newton. Una vez obtenida la expresión multiplicamos por x^r y resolvemos la integral integrando en cada uno de los sumandos.

Tipo 2 Si p es un entero negativo, la integral siempre se podrá convertir en una integral racional haciendo el cambio de variable $x = t^k$, donde k es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones r y s.

Tipo 3 Si $p \notin \mathbb{Z}$, es decir, si la integral no pertenece a los tipos anteriores, pero $\dfrac{r+1}{s} \in \mathbb{Z}$, haremos el cambio de variable $(a+bx^s) = t^k$, donde k es el denominador de la fracción p.

Tipo 4 Si $p \notin \mathbb{Z}$ y no es de tipo 3, si $\dfrac{r+1}{s} + p \in \mathbb{Z}$ realizaremos el cambio de variable $\dfrac{a+bx^s}{x^s} = t^k$, donde k es el denominador de la fracción p.

Los dos primeros cambios son bastante obvios. En cuanto a los cambios de variable restantes y tratando de esclarecer el por qué de los mismos basta con hacer los cambios que se indican a continuación. Supongamos que $p \notin \mathbb{Z}$, así realizaremos el cambio $t = x^s$, es decir, $x = t^{\frac{1}{s}}$, de aquí:

$$x^r = \left(t^{\frac{1}{s}}\right)^r = t^{\frac{r}{s}}, \tag{1}$$
$$(a+bx^s)^p = \left(a+b\cdot\left(t^{\frac{1}{s}}\right)^s\right)^p = (a+b\cdot t)^p, \tag{2}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{s}t^{\frac{1}{s}-1}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Sustituyendo la ecuación (1) obtenemos:

$$\in t^{\frac{r}{s}}(a+b\cdot t)^p\frac{1}{s}t^{\frac{1}{s}-1}\mathrm{d}t.$$

Operando gracias a la misma base se sigue que:

$$t^{\frac{r}{s}} \cdot t^{\frac{1}{s}-1} = t^{\frac{r+1}{s}-1}$$

y la primitiva a calcular será:

$$\frac{1}{s}\int t^{\frac{r+1}{s}-1}(a+bt)^p \mathrm{d}t.$$

En vista de los razonamientos que nos han llevado a realizar los cambios indicados en los tipos (3) y (4) observar también que es posible realizar un cambio previo de la forma $t = x^{\frac{1}{s}}$ y posteriormente un cambio del tipo indicado (3) y (4) donde ahora el exponente s se ha transformado en (1) siendo de esta forma más sencillo el procedimiento a realizar. Ejemplo: $\displaystyle\int x^2(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$.

Primitivas de expresiones que contienen $\cos(x)$ y $\sin(x)$

Sea f una fracción racional de dos variables y consideremos el calcular la primitiva

$$\int f\left(\cos(x), \sin(x)\right) \mathrm{d}x.$$

Haciendo el cambio $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, se tiene que $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, luego la integral a calcular será

$$\int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

y el problema queda reducido a hallar la primitiva de una fracción racional de la nueva variable t.

En ciertos casos particulares es más rápido hacer otros cambios de variables.

Primitivas en las funciones de la forma $f(g(x))g'(x)$

Sea f una función racional y g una biyección derivable y con derivada continua de un intervalo J sobre un intervalo I. El problema de hallar una primitiva en I de la función $f(t)$, sin más que hacer el cambio de variable $g(x) = t$.

Primitivas de expresiones que contienen $\sqrt{ax^2+2bx+c}$

Sea f una función racional de dos variable. Nos proponemos determinar las primitivas de la forma

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\mathrm{d}x,$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$ en aquellos casos en los cuales $ax^2+2bx+c \geq 0$. Tomando $d = \dfrac{ac-b^2}{a}$ se tiene la identidad

$$ax^2+2bx+c = a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + d.$$

El cambio de variable que hay que realizar es $x = t - \dfrac{b}{a}$.

El método de Euler

Otro método basado en ecuaciones paramétricas nos da el siguiente criterio que a veces resulta más sencillo, en el cual se distinguen los casos en función del signo de los parámetros:

- $a > 0$ se realiza el cambio de variable

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t.$$

- $c \geq 0$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}.$$

- $a < 0$ y $0c$ hay que usar el cambio de variable

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = t(x - \alpha)$$

  donde α es una raíz del polinomio $ax^2 + bx + c$.

A veces en lugar de utilizar este método es más sencillo utilizar el cambio de tipo hiperbólico, utilizando que $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(t)$.

Integrales de funciones trascendentes

Sea R una función racional entonces:

1) Si tenemos $\displaystyle\int R(a^x)\mathrm{d}x$ puede ser adecuado el cambio $t = a^x$.

2) Si tenemos $\displaystyle\int R(\arcsin(x))\mathrm{d}x$ puede ser adecuado el cambio $t = \arcsin(x)$.

3) Si tenemos $\displaystyle\int R(\arctan(x))\mathrm{d}x$ puede ser adecuado el cambio $t = \arctan(x)$.

4) Si tenemos $\displaystyle\int R(\tan(x))\mathrm{d}x$ puede ser adecuado el cambio $t = \tan(x)$.

5) Ver el cambio general para funciones trigonométricas.

Sea f una fracción racional de dos variables y consideremos el calcular la primitiva

$$\int f(\cos(x), \sin(x))\mathrm{d}x.$$

El cambio general es $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ de donde $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\mathrm{d}x?\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Luego la integral a calcular una vez realizando el cambio será

$$\int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

y el problema queda reducido a hallar la primitiva de una fracción racional de la nueva variable t.

En ciertos casos particulares es más rápido hacer otros cambio de variables.

1) Si f es impar en seno, es decir, $f(-\sin(x), \cos(x)) = -f(\sin(x), \cos(x))$ haremos el cambio $t = \cos(x)$, de donde $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$ y $\mathrm{d}x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

2) Si f es impar en coseno, es decir, $f(\sin(x), -\cos(x)) = -f(\sin(x), \cos(x))$ entonces haremos el cambio $t = \sin(x9)$ de donde $\cos(x) = \sqrt{1-t^2}$ y $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

3) Si f es par, es decir, $f(-\sin(x), -\cos(x)) = f(\sin(x), \cos(x))$ entonces haremos el cambio $t = \tan(x)$ de donde $\sin(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos(x) = \sqrt{1+t^2}$ y $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Cambios trigonométricos

Sean $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y u una función. Los cambios trigonométricos e hiperbólicos se suelen usar en algunos casos cuando tenemos integrales donde aparecen raíces de los siguientes tipos:

1) $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$. Haremos el cambio $u = \dfrac{a}{b}\sin(t)$. (Recordar que $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$).

2) $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$. Haremos el cambio $u = \dfrac{a}{b}\tan(t)$. (Recordar que $\sqrt{1+\tan^2(t)} = \sec(t)$).

3) $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$. Haremos el cambio $u = \dfrac{a}{b}\sec(t)$. (Recordar que $\sqrt{1+\sec^2(t)} = \tan(t)$).

Observación: La sustitución trigonométrica puede ser útil en casos en los que el término cuadrático no está debajo de un radical. Así la integral $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^m}\mathrm{d}x$ se resuelve con el cambio de variable $x = a\tan(t)$ obteniendo tras el cambio: $\displaystyle\frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2(n-1)}(t)\mathrm{d}t$.

3.8) Aplicaciones Geométricas de la Integral

3.8.1) Cálculo del área de regiones planas

Sea $y = f(x)$ una curva situada en el semiplano superior y definida en el intervalo $[a,\ b]$ es conocido que el área limitada por la curva, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por la integral de Riemann de la función f en $[a,\ b]$ es decir,

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Asimismo, el áreas comprendida entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo $[a,\ b]$ y $f(x) \geq g(x)$ viene dado por:

$$A \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x.$$

En general el área comprendida entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo $[a,\ b]$ viene dada por:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x.$$

3.8.2) Cálculo del volumen utilizando secciones

Esta técnica permite el cálculo de volúmenes de sólidos de los cuales conocemos el valor de las áreas de todas las secciones. Fijada una variable x, si conocemos la variable de cada una de las secciones que denotamos por S_x el volumen no es sino la suma de las áreas de todas las secciones, idea que se corresponde con el concepto de integral. Así:

$$\mathrm{Vol} = \int_a^b A(S_x) \mathrm{d}x$$

donde a y b son los límites de integración entre los que toma la variable x y $A(S_x)$ denota el área de la sección para x fija. De forma análoga se podría considerar la fórmula sustituyendo la variable x por y.

3.8.3) Cálculo de la longitud de una curva

Sea $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces la longitud de dicha curva viene dada por

$$L[a,b] = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \mathrm{d}x.$$

Efectivamente si $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ basta aproximar la longitud de L con la poligonal $\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$, tomando una sucesión de particiones cuyo diámetro tiende a cero obtendremos la fórmula de la longitud que hemos dado.

En el caso de una curva parametrizada de la forma $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, siendo x e y funciones de clase C^1 en el intervalo (a, b)

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}$$

3.8.4) Cálculo de la superficie de un sólido de revolución sobre el eje OX

En ese caso se trata de calcular el área del sólido tridimensional que se obtiene al girar la gráfica de la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable sobre el eje OX. El área viene dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + |f'(x)|^2} \mathrm{d}x.$$

Observa si queremos realizar el cálculo del área de un sólido de revolución sobre el eje OY, podemos considerar $x = g(y) \geq 0$ continuamente diferenciable en el intervalo $[c, d]$, el área de la superficie generada al girar la curva $x = g(y)$ alrededor del eje OY es

$$\text{Área} = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} \mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} \mathrm{d}y.$$

3.8.5) Cálculo de la superficie de un sólido de revolución generado por una curva parametrizada

- Revolución sobre el eje OX, $y \geq 0$.

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \mathrm{d}t.$$

- Revolución sobre el eje OY, $x \geq 0$.

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \mathrm{d}t.$$

3.8.6) Cálculo del volumen de un sólido de revolución

El volumen de un sólido generado al girar una curva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alrededor del eje OX viene dado por

$$\text{Volumen} = \pi \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Ver también las opciones para un sólido de revolución generado a partir de rotar alrededor del eje OY.

3.8.7) Otras opciones

Debemos tener en cuenta que a veces los sólidos se componen de giros de varias curvas, presentan huecos, ... En esos casos hemos de razonar y eliminar los volúmenes (en el caso de los huecos) de forma correcta.

3.9) Integración numérica

En algunas ocasiones no es posible encontrar una primitiva de la función integrable f en el intervalo $[a, b]$, por esta razón debemos recurrir al cálculo de la integral definida a distintos métodos numéricos.

Lo más habitual será establecer una aproximación de la integral mediante una combinación lineal de los valores de la función en los punto x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ de una partición. A dichas fórmulas se las conoce por Fórmulas de cuadratura.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

siendo $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Obviamente en la aproximación se comete un error que denotaremos por

$E(f)$, y así,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + E(f).$$

Para medir de alguna forma el tipo de error que se comete en la estimación es habitual utilizar el concepto de orden del error. Diremos que la formula de aproximación a la integral de aproximación es de orden, al menos p, si el error $E(x_i) = 0$ para $i = 0,\ 1, \ldots, p$, y de orden exactamente igual a p si además $E(x^{p+1}) \neq 0$.

3.9.1) Fórmula del rectángulo

En el caso más simple. Se aproxima la integral por la expresión:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx f(a)(b-a),$$

o bien,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx f(b)(b-a).$$

Ambas fórmulas son de orden 0, es decir, si la función es constante el error es igual a 0.

3.9.2) Fórmula del punto medio

Es similar a la anterior sólo que en este caso la aproximación se realiza utilizando el valor del punto medio del intervalo

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

En este caso el error es de orden 1.

3.9.3) Fórmula del trapecio

Se aproxima la integral por el área del trapecio.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right).$$

De nuevo esta fórmula es de orden 1.

3.9.4) Fórmula de Newton-Côtes

Son fórmulas de cuadratura en las que se considera una partición del intervalo con paso idéntico, es decir, en partes iguales, realizando una interpolación en dichos puntos. La fórmula de Simpson es la más utilizada. La interpolación se realiza en tres puntos, los extremos y el punto medio, obteniendo la parábola que pasa por esos tres puntos: $(a, f(a))\,, \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ y $(f, f(b))$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

El error es de orden 3.

Al igual que se hace con 3 puntos se puede extender este procedimiento a un número de puntos n.

Los métodos anteriores se pueden aplicar a subintervalos, es decir, el intervalo $[a, b]$ lo dividimos en n intervalos iguales y en cada uno de ellos se puede aplicar los métodos previamente introducidos. Sea $h = \dfrac{a-b}{n}$ y $x_i = a + hi$; para $i = 1, \ldots, n$. Con esta notación, en el caso de la fórmula del trapecio compuesta se obtendría la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \left(f(x_i) + f(x_i + 1) \right),$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right).$$

Del mismo modo se puede obtener la fórmula de Simpson compuesta.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6} \left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_j + \frac{h}{2} \right) + f(b) \right).$$

Tema 4: Series de potencias. Series de Fourier. Ecuaciones diferenciales

4.1) Introducción

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones reales definidas todas en un mismo intervalo I de la recta real. Para cada punto $x \in I$ tendremos una sucesión de números reales $(f_n(x))_n$ y también podemos considerar la serie numérica $\sum f_n(x)$ correspondiente. Supongamos que esta serie es convergente para todos los puntos x de un cierto subconjunto de M del intervalo I. Haciendo corresponder a cada $x \in M$ el valor $S(x)$ de la suma de la serie $\sum f_n(x)$, tendremos definida una nueva función en el conjunto M, que llamaremos función suma de la serie de funciones $\sum f_n$. El conjunto M de todos los puntos en los cuales la serie es convergente se llama campo de convergencia de la serie funcional $\sum f_n$.

- Ejemplo

Consideremos la sucesión de funciones $(f_n)_n$ dada por $f_n(x) = x^n$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ la serie numérica $\sum x^n$ es una serie geométrica de razón x. Si $|x| < 1$, la serie es convergente, luego el intervalo $(-1, 1)$ está contenido en el campo de convergencia de la serie $\sum f_n$. Si $|x| > 1$, la serie es divergente. Para $x = 1$ y $x = -1$ las series son divergente y no sumable respectivamente. Luego el campo de convergencia es el intervalo abierto $(-1, 1)$.

4.2) Convergencia puntual

- Definición

Sea I un subconjunto de $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada número natural n está dada una función $f_n : I \to \mathbb{R}$; la aplicación $n \to f_n$ recibe el nombre de sucesión de funciones. La función f_n asociada al número natural n recibe el nombre de término n-ésimo de la sucesión.

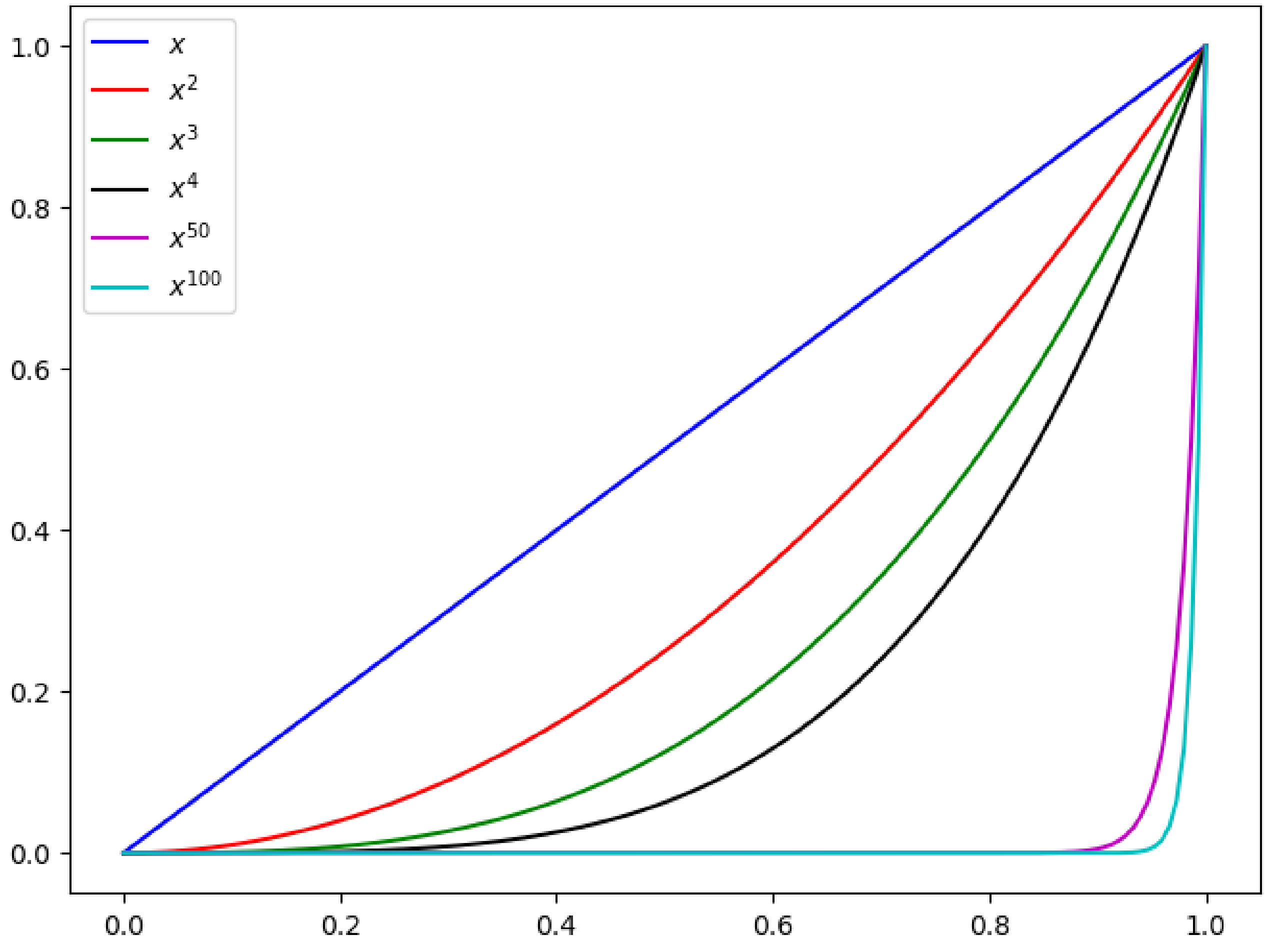
Informalmente, una sucesión de funciones es una lista sin fin

$$f,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$$

de funciones definidas en el punto I. Para cada punto $x \in I$ podemos considerar la sucesión de números reales que tiene por término n-ésimo real $f_n(x)$, valor en x de la función f_n. Esta sucesión podrá ser convergente o no.

- Definición

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones definidas en el conjunto I, M un subconjunto de I y f una función definida en M. Si para cada $x \in M, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, se dice que la sucesión $(f_n)_n$ convergente puntualmente a f en M, o que converge punto a punto a f en M. Cuando existe tal función f, decimos que la



sucesión $(f_n)_n$ es convergente punto a punto en M, o que la sucesión (f_n) es convergente puntualmente en M.

- Ejemplo

La sucesión $(x^n)_n$ converge puntualmente en el intervalo cerrado $[0,1]$ a la función f definida en dicho intervalo por

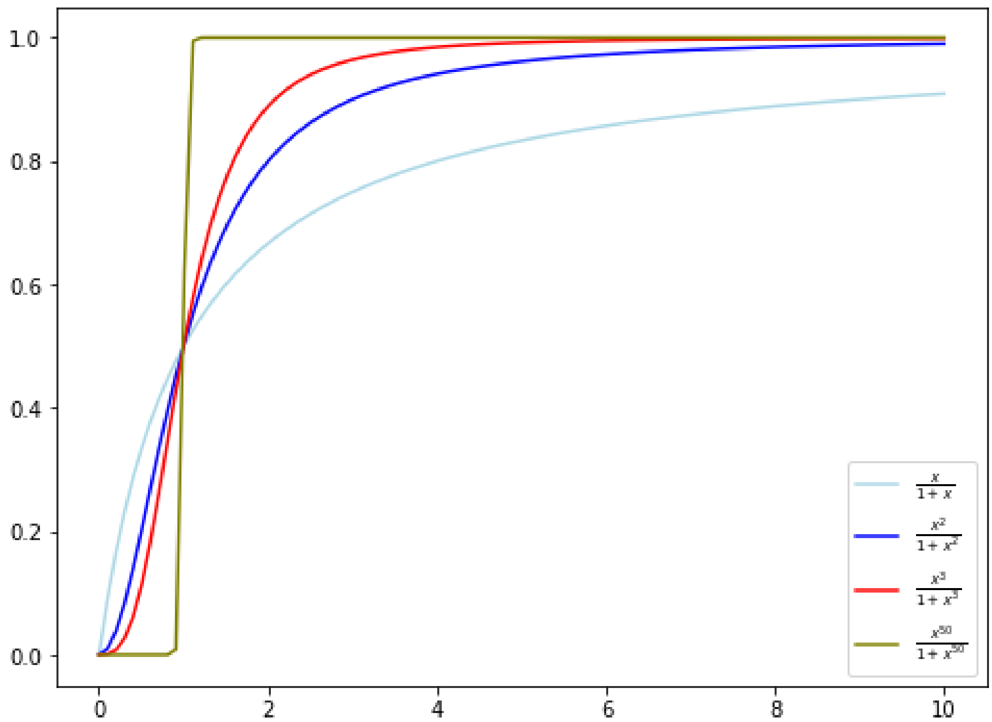
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

- Ejemplo

La sucesión $\left(\dfrac{x^n}{1+x^n}\right)_n$ converge puntualmente en el intervalo cerrado $[0,+\infty)$ a la función f definida en tal intervalo por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

La convergencia puntual puede expresarse en términos similares a los de la convergencia de sucesiones numéricas.



- Definición (Otra forma para definir la convergencia puntual)

Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto I, M un subconjunto de I, f una función definida en M. La sucesión (f_n) converge puntualmente a f en M si y sólo si para cada $x \in M$ y para cada $\epsilon > 0$ existe un $N = N(\epsilon, x)$ tal que siempre que $n > N(\epsilon, x)$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Análogo para la condición de Cauchy.

- Definición

Una serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es un par ordenado de sucesiones de funciones $((f_n),(s_n))$ relacionadas por la condición de que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el término n-ésimo de la primera sucesión, f_n, recibe el nombre de término n-ésimo de la serie; el término n-ésimo de la segunda sucesión, s_n, funciones converge puntualmente a una función f en un conjunto M si lo hace la sucesión de sus sumas parciales. En tal caso, la función f es la suma de la serie en el conjunto M.

- Ejemplo

La serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge puntualmente en $(-1,1)$ y su suma es la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, si $-1 < x < 1$.

4.3) Convergencia uniforme

El estudio de las sucesiones de funciones abre al menos dos interesantes opciones: de un lado, podemos construir nuevas funciones como límites de funciones conocidas; de otro, podemos pensar en sustituir, en ciertos problemas, una función dada por funciones que la aproximan y que pueden tener un comportamiento mejor controlado respecto a la situación que nos interese. En cualquiera de los dos casos, la primera tareas es examinar qué propiedades de las funciones que forman la sucesión se traspasan a la función límite.

- Definición

Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto I, M un subconjunto de I, f una función definida en M. Se dice que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en M si para cada $\epsilon > 0$ existe un $N = N(\epsilon)$, para todo $x \in M$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Es obvio que toda sucesión (f_n) que converge uniformemente a una función f en M, también converge puntualmente a f en M.

4.4) Series de potencias

- Definición

Sea $(a_n)_n$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, se llama serie de potencias de centro x_0 y coeficientes a_n a la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Obsérvese que el campo de convergencia no es vacío pues la serie converge en x_0.

4.4.1) Convergencia uniforme de las series de potencias

- Teorema

Sea la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, si $\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r > 0$, entonces se verifica:

1) Para cada $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es absolutamente convergente.

2) Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - r, x_0 + r]$, la serie $\sum a_n(x-x_0)^n$ no converge.

3) Si x es tal que $|x - x_0| = r$, no se puede asegurar nada.

A $r = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ se le llama radio de convergencia de la serie. También se puede utilizar para su cálculo el límite.

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

que coincide con el valor anterior. A $(x_0 - R, x_0 + R)$ se le llama dominio de convergencia de la serie.

Evidentemente, las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ tienen el mismo radio de convergencia.

- Teorema

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $r>0$ su radio de convergencia. Entonces $\forall [a,b] \subset (x_0-r, x_0+r)$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es uniformemente convergente en $[a,b]$.

- Teorema

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $r>0$ su radio de convergencia. Si además es convergente en $x=x_0+r$ (o en $x=x_0-r$), entonces la serie es uniformemente convergente en $[a, x_0+r]$ (respectivamente, en $[x_0-r, a]$) siendo $a \in (x_0-r, x_0+r)$.

4.4.2) Continuidad de una serie de potencias

Como consecuencia de los resultados anteriores tenemos los siguientes teoremas para el caso de las series de potencias.

- Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $r>0$ su radio de convergencia. Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es su función límite, es decir su suma para cada $x \in (x_0-r,\, x_0+r)$, entonces f es continua en dicho intervalo. Si además la serie es convergente en $x=x_0+r$ (o en $x=x_0+r$), entonces su función límite es continua por la izquierda en $x=x_0+r$ (respectivamente por la derecha en $x=x_0-r$).

4.4.3) Derivación de una serie de potencias

- Teorema

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $r>0$ su radio de convergencia. Si f es su función límite en su dominio de convergencia, entonces f es derivable en $(x_0-r,\, x_0+r)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia r y se verifica que

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}\ \forall x \in (x_0-r,\, x_0+r).$$

Como corolario obtenemos el siguiente resultado:

- Corolario

Se la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $r>0$ su radio de convergencia. Si f es una función límite en su intervalo de convergencia, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

tiene el mismo radio de convergencia r, f admite derivadas de todos los órdenes en $(x_0 - r,\, x_0 + r)$ y se verifica que

$$f^{k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

4.4.4) Integración de una serie de potencias

- Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $r > 0$ su radio de convergencia. Entonces para cada $[a,b] \subset (x_0-r, x_0+r)$ se verifica:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n \, \mathrm{d}x.$$

En particular, si $x_0 = 0$, para cada x tal que $|x| < r$ se verifica:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Ejemplo

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{x+1}$ para cada $x \in (-1,1)$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \log(1+x)$ para cada $x \in (-1,1)$. Como esta última serie converge para $x = 1$, dado que en este caso se trata de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, obtenemos que $\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

4.4.5) Series de potencias y desarrollo de Taylor

- Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $r > 0$ su radio de convergencia. Si f es su función límite, es decir, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ para cada $x \in (x_0 - r,\, x_0 + r)$, entonces

$$a_n = \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Según este teorema toda serie de potencias con $r > 0$ y centrada en x_0, en su intervalo de convergencia, resulta ser la serie de Taylor de la función límite $f(x)$. Como aplicación se obtiene que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

4.4.6) Desarrollos en series de funciones

- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para cada $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ para cada $x \in \mathbb{R}$
- $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ para cada $x \in (-1,1]$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ para cada $x \in (-1,1)$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para cada $x \in \mathbb{R}$

4.4.7) Series de Fourier

Una función f se dice que es periódica de periodo T si $f(x+T) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. De forma que podemos considerar el intervallo $[a, a+T)$.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función periódica de periodo T integrable en el intervalo $[0,T]$. Se definen los coeficientes coseno y seno de Fourier de f

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t, \quad n = 0,1,2,\dots$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t, \quad n = 1,2,\dots$$

respectivamente.

Se llama frecuencia $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Se llama polinomio de Fourier de orden N de f a

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right).$$

Cuando $\lim_{N\to\infty} S_N(t)$ es convergente se llama serie de Fourier de f y

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} S_N(t).$$

El siguiente resultado recoge lo anterior

- Teorema

Sea f una función definida en toda la recta real, periódica de periodo T y continua por secciones en todo intervalo de periodicidad. Si en un cierto punto $x \in \mathbb{R}$ existen y son finitos los dos límites

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-t) - f(x^+)}{t}$$

y

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(x-t) - f(x.^-)}{-t},$$

la serie de Fourier asociada a f tiene como suma en el punto x el número $\dfrac{f(x^+) - f(x^-)}{2}$.

4.5) Ecuaciones diferenciales

4.5.1) Definiciones básicas

Comenzamos con la definición de *ecuación diferencial*.

- Definición

Llamaremos ecuación diferencial de orden n a un expresión de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{n)}) = 0,$$

siendo F una función real definida en un abierto $A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ e $y(x)$ una función real de variable real n veces derivable.

Tras la definición concluimos que una ecuación diferencial no es sino una expresión en la que aparece una *variable independiente*, x y una *variable dependiente* de x, $y(x)$ y las derivadas de ésta última con respecto de x. Obsérvese que el *orden* de la ecuación es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

- Definición

Dada una ecuación diferencial

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{n)}) = 0,$$

diremos que la función $y : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial si:

1) Existe la derivada n-ésima de y para todo punto $x \in (a, b)$.

2) El vector $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n)}(x)) \in A$ para cada $x \in (a, b)$.

3) $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n)}(x)) = 0$ para cada $x \in (a, b)$

En general dada una ecuación diferecial es posible que existan infinitas soluciones. Llamaos solución general de una ecuación diferencial al conjunto de todas las funciones que verifican dicha ecuación. En general, son familias n-paramétricas de curvas siendo n el orden de la ecuación.

Ejemplo

La solución general de la ecuación $y' - y = 0$ es el conjunto de funciones $y = Ce^x$, que es una familia de funciones dependiente de un sólo parámetro.

En ocasiones nos interesa que la solución que buscamos verifique además una condiciones adicionales a las que denominaremos *condiciones de contorno, condiciones iniciales* o *Problema de Cauchy*. Consiste en añadir a una ecuación diferencial de orden n, n datos adicionales correspondientes a los valores iniciales de la función y sus $n-1$ primeras derivadas, es decir, el problema,

$$\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'_0 = y_1, \dots, y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde $x_0, y_0, \dots, y_{n-1}$ son números reales arbitrarios.

4.6) Existencia y unicidad de soluciones

El siguiente teorema nos garantiza la existencia y unicidad de la solución en un problema de condiciones iniciales.

- Teorema

Si ϵ, δ dos números reales positivos, x_0, y_0, dos números reales arbitrarios, y $f : (-\epsilon + x_0, x_0 + \epsilon) \times (-\delta + y_0, y_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ una función continua con $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continua. Entonces existen un número real positivo λ y una función $y : (-\lambda + x_0, x_0 + \lambda) \to \mathbb{R}$ que es la única del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

La importancia de este teorema radica en que permite determinar de forma sencilla cuando algunos problemas de condiciones iniciales tienen solución única.

Ejemplo

El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

verifica las condiciones del teorema.

4.7) Métodos para resolver ecuaciones diferenciales

4.7.1) Ecuaciones del tipo $y' = f(x)$

El caso más sencillo de ecuaciones diferenciales que tenemos es aquel en el que no aparece explícitamente la incógnita y, es decir, se corresponden con el tipo $y' = f(x)$. Para resolverlas basta con integrar en cada miembro de la ecuación, obtenemos así,

$$\int \mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$y = \int f(x) + C$$

siendo C una constante.

Una ecuación de primer orden se dice que es de variables separadas si tiene la forma

$$y' = f(y)g(x)$$

donde f y g son dos funciones reales definidas sobre intervalos abiertos.

Suponiendo que $f(y) \neq 0$ en el dominio de definición de f podemos transformar nuestra ecuación en la forma

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x),$$

que nos proporciona una expresión de la ecuación con cada variable a un lado de la igualdad. Entonces, si somos capaces de calcular las primitivas

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))}\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

habremos resuelto la ecuación inicial.

Ejemplo

$$y' = yx$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{y'}{y} = x,$$

integrado la expresión anterior obtenemos

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x$$
$$\log(y(x)) + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Despejando, finalmente queda que

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{C_2 - C_1},$$

llamando $K = e^{C_2 - C_1}$ obtenemos que la solución viene dada por

Cuando la ecuación diferencial viene dada de la forma $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)$, es decir, no depende de la variable x, se dice que la ecuación diferencial es **autónoma**. La ecuación logística es un ejemplo de este tipo de ecuaciones diferenciales. Esta ecuación describe la variación del tamaño de una población en la que el crecimiento per cápita es dependiente de la densidad. Si se denomina $N(t)$ al tamaño de la población en el instante t, entonces la variación del crecimiento está dada por el sistema

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \text{con } N(0) = N_0,$$

siendo r y K constantes positivas.

Resolviendo obtenemos la solución

$$N(t) = \frac{K}{1 - \left(\frac{K}{n_0} - 1\right) e^{-rt}}.$$

Obsérvese que $\lim_{t \to \infty} N(t) = K$. Además $N(t) = 0$ es una solución así como la solución $N(t) = K$ (puntos fijos).