MATEMÁTICA DISCRETA

LÓGICA

Jorge Ballesta Cerezo

...

Operaciones lógicas básicas

Disyunción $p \vee q$ (p ó q)

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La proposición $p \vee q$ sera sera cierta si al menos una de las proposiciones que la forman son ciertas y sólo será falsa en caso de que ambas p y q lo sean

Conjunción $p \wedge q$ (p y q)

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La proposición $p \wedge q$ será cierta sólo cuando p y q lo sean

Negacion $\neg p$ (no p)

p	$\neg p$
1	0
0	1

La negación será verdadera si p es falsa y viceversa

Proposiciones y tablas de verdad

Dada una proposición construida a partir de otras proposiciones $p, q, \ldots$ que serán verdaderas o falsas, y los operadores básicos $\vee, \wedge$ y $\neg$, la veracidad o falsedad de la proposición construida dependerá de cómo sean las proposiciones que las componen. Para analizarlas se construyen tablas de verdad:

$\neg(p \vee \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$
1	1	0	1	0
1	1	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1

En general, si la proposición consta de n proposiciones $p, q, r, \ldots$ harán falta 2^n filas. Por otro lado, para no poner paréntesis en exceso, se establece una jerarquía a la hora de aplicar los conectores lógicos, de forma que el orden de preferencia es: $(\neg, \wedge, \vee) \Rightarrow \neg p \vee q : (\neg p) \vee q \neq \neg(p \vee q)$

A partir de ahora, vamos a representar por $P(p, q, \ldots)$ una proposición compuesta por las proposiciones $p, q, \ldots$

Tautologías y contradicciones

Tautología: Proposiciones siempre verdaderas

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Contradicción: Proposiciones siempre falsas

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

} No aporta conocimiento

Equivalencia lógica

Dos proposiciones $P_1(p,q,\ldots)$ y $P_2(p,q,\ldots)$ son equivalentes si tienen tablas de verdad

$\neg(p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

$\equiv$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

$\neg p \wedge \neg q$

Álgebra de proposiciones

Leyes idempotentes	$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
Leyes asociativas	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \vee r$
Leyes conmutativas	$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Leyes distributivas	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Leyes de identidad	$p \vee 0 \equiv p \quad p \vee 1 \equiv 1$	$p \wedge 0 \equiv 0 \quad p \wedge 1 \equiv p$
Ley de doble negación	$\neg\neg p \equiv p$	
Leyes de complementos	$p \vee \neg p \equiv 1 \quad \neg 1 \equiv 0$	$p \wedge \neg p \equiv 0 \quad \neg 0 \equiv 1$
Leyes de Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Ejemplo: Demostrar $\underbrace{\neg(p\vee q)}_{\text{ley Morgan}}\vee(\neg p\wedge q)\equiv(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ $\quad \neg p\wedge(\neg q\vee q)\to$ L. distributiva

L. Morgan + L. Distributiva $\quad (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\equiv\neg p\wedge\overbrace{(\neg q\vee q)}^{1}$

L. Complementos + L. Identidad $\quad \neg p\wedge(\neg q\vee q)\equiv\neg p\wedge 1$

$$\boxed{\neg p\wedge 1\equiv\neg p}$$

Proposiciones condicionales y bicondicionales (simplifican proposiciones ya vistas)

Implicación $p\to q$ (p implica q)

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p\to q = \neg q\to\neg p = \neg p\vee q$

p = 'Llueve' q = 'suelo mojado' => $p\to q$ = 'Si llueve el suelo estará mojado'

Sin embargo, no podemos concluir que si no llueve el suelo no estará mojado

Equivalencias: $p\to q=\neg p\vee q=\neg q\to\neg p$ => demostrable mediante tablas de verdad

Doble implicación $p\leftrightarrow q$ (p si y sólo si q)

p	q	p↔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\neg(p\leftrightarrow q)= p\leftrightarrow\neg q=\neg p\leftrightarrow q$

p = 'n es par' q = ' divisible por 2' => $p\leftrightarrow q$ = 'n es par si y sólo si es divisible por 2'

Equivalencias: $p\leftrightarrow q=\neg p\leftrightarrow\neg q=(p\to q)\wedge(q\to p)=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$

Deducciones lógicas

Es un modo muy habitual de proceder en matemáticas y consiste en dar por válidas varias premisas para ver si se puede llegar a una conclusión

Dadas n premisas $p_1,\dots,p_n$, decimos que conducen a q mediante un argumento válido si q es verdadera siempre que las premisas $p_1,\dots,p_n$ sean verdaderas. Como $p_1,\dots,p_n$ son simultáneamente verdaderas si y sólo si $p_1\wedge p_2\wedge\dots\wedge p_n$, se tiene que un argumento es valido si $(p_1\wedge p_2\wedge\dots\wedge p_n)\to q$ es tautología

Ejemplos

Premisas $\{p \to q, p\} \Rightarrow$ deducir q

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \land p$	$((p \to q) \land p) \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Premisas $\{p \to q, q\}$ deducir p

p	q	$p \to q$	$p \to q \land q$	$(p \to q \land q) \to p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Un principio fundamental del razonamiento lógico es: si p implica q y q implica r, entonces p implica r

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \land (q \to r)$	$p \to r$	$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Reglas de inferencia

Otra manera de abordar este tema es suponiendo que determinadas premisas son ciertas, demostrar la validez de la tesis. En este caso al hacer las tablas de verdad únicamente tenemos que tener en cuenta los 1 en las proposiciones que son ciertas, reduciendo así el tamaño de la tabla de verdad

Ejemplo: sabiendo que $p \land r$ y $p \to q$ son verdad, deducir veracidad de q

p	q	r	$p \land r$	$p \to q$	$((p \land r) \land (p \to q))$
1	1	1	1	1	1

La primera línea es suficiente ya que es donde ambas proposiciones son verdaderas

Lógica de predicados

Funciones proposicionales

En la proposición n es un número natural menor que 5. Se puede expresar como:

$P(n) := n$ menor que $5 < \begin{matrix} P(1)\ V \\ P(5)\ F \end{matrix}$

En este caso el dominio P está constituido está compuesto por los nº naturales y el conjunto verdad, $T_P = \{1,2,3,4\}$

Estas funciones proposicionales pueden tener varios argumentos, es decir, ser de la forma $P(x_1, \ldots, x_k)$

Cuantificadores

En este contexto cobran sentido los cuantificadores que se combinan con los conectores lógicos:

- Cuantificador universal $\forall$ 'para todo n en T_P' $\forall\, n > 4 \in \mathbb{N}$ $P(n)$ es falsa
- Cuantificador existencial $\exists$ 'existe n en T_P' $\exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, P(n)$ es verdadera

Negación de funciones proposicionales y cuantificadores

La negación de la proposición $\forall x\ P(x)$ es $\neg(\forall x\ P(x)) = \exists x\ \neg P(x)$

Por otra parte, la negación de la proposición $\exists x\ P(x)$ es $\nexists\ P(x) = \forall x\ \neg P(x)$

Estas negaciones son las leyes de Morgan para cuantificadores y pueden dar lugar a confusión cuando las funciones proposicionales tienen más de un argumento:

$P(x,y)$ $\neg(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \exists x\ \forall y\ \neg P(x,y)$