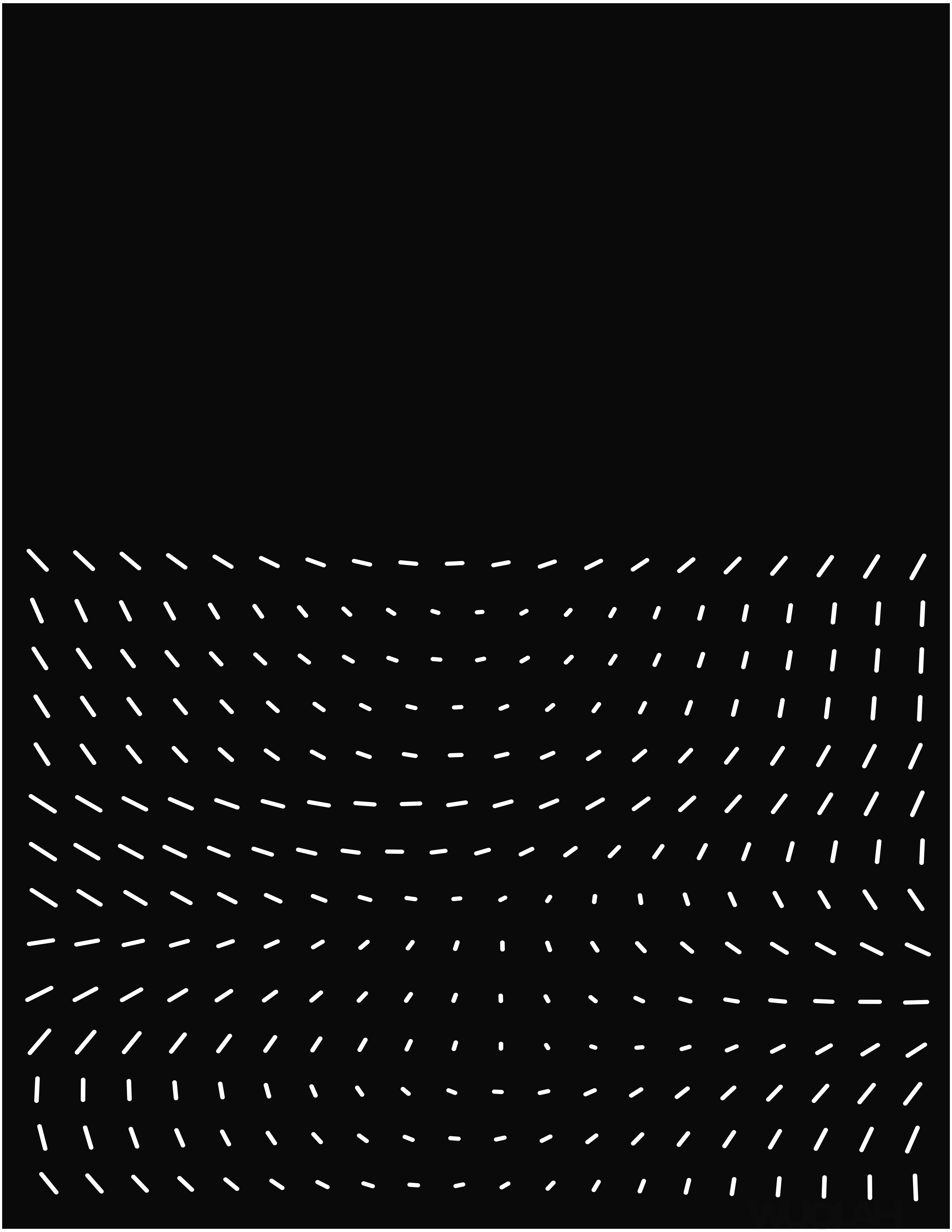
Series.pdf

Jorge_Ballesta

Cálculo I

1º Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos

Facultad de Informática
Universidad de Murcia



Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n =$ número finito => serie convergente

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ => serie divergente

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \nexists$ => serie oscilante

El estudio de las series, se basa en 2 cuestiones principales

1. Deducimos el caracter de la serie

2. Si la serie es convergente, calculamos el valor de la suma

Criterio general de convergencia:

La condición necesaria (no suficiente) para la convergencia de una serie es:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Si el límite no es cero, la serie es divergente. pero si el límite es cero, la serie puede ser tanto convergente como divergente. Por lo tanto, tendremos que aplicar otro criterio de convergencia

Utilizado cuando no sabemos que criterio aplicar

Ejemplos:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n+3}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n+3} = 1$ => divergente

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{0}{1} = 0$ => debemos seguir estudiando su naturaleza

Criterios de comparación

Para determinar si una serie es convergente, tendremos que compararla con otra serie de la que conocemos su carácter

a) Series geométricas

$\sum ar^n$ si $\begin{cases} -1 < r < 1 \text{ es convergente} \\ r \geq 1 \text{ es divergente} \\ r = -1 \text{ es oscilante} \end{cases}$

b) Series armónicas

$\sum \frac{1}{n^a} \begin{cases} a > 1 \text{ convergente} \\ a \leq 1 \text{ divergente} \end{cases}$

Criterio del mayorante y minorante (Mismo que en integral)

Si $\sum a_n$ es convergente y $\sum a_n \geq \sum b_n \to \sum b_n$ converge

Si $\sum a_n$ es divergente y $\sum a_n \leq \sum b_n \to \sum b_n$ diverge

Ejemplo

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$; sabemos que $n \geq \ln(n)$; $\underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{armónica } \frac{1}{n^a}} \leq \sum \frac{1}{\ln(n)}$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge ya que $a \leq 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{\ln(n)}$ también es divergente

Criterio de comparación por cociente

Sean las series de términos positivos $\sum b_n$ y $\sum a_n$ donde conocemos el caracter de $\sum b_n$

Calculamos $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a \begin{cases} a \neq 0 \text{ y finito} \Rightarrow \text{mismo caracter} \\ a = 0 \text{ y } \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ a = +\infty \text{ y } \sum b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$

Ejemplos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+4^n} = \sum a_n \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha \,;\; \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2+4^n}}{\frac{1}{4^n}} = \frac{4^n}{2+4^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+\sqrt{n}} \text{ (serie armónica)} = \sum a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha \,;\; \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow a_n \text{ div}$$

$$\sum b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (serie armónica divergente)}$$

Criterio de D'Alembert del cociente

Sea la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \qquad \begin{cases} \ell < 1 & \text{converge} \\ \ell > 1 & \text{diverge} \\ \ell = 1 & \text{no aporta información} \end{cases}$$

Debemos aplicarlo fundamentalmente con factorial o un cociente entre un polinomio y una exponencial

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} : \text{Aplicamos el criterio D'Alembert } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\cancel{3^n}}}{\frac{n+1}{3\cdot\cancel{3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} : \text{D'Alembert} \,;\; \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{(n+1)!}}{\frac{\cancel{2^n}}{n!}} = \frac{2\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{0}{1} = 0 < 1 \text{ converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-2}} \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{5}}{3^{n+1}}}{\frac{\cancel{5}}{\cancel{3^{n}}}} = \frac{1}{3} < 1 \text{ converge}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{4}}{2^{2n}}}{\frac{\cancel{4}}{2^{2n-2}}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Criterio de las series asintóticamente proporcionales

Empleada con cocientes de polinomios, comparando siempre con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ donde p deberá ser la diferencia entre el grado del polinomio del numerador y el denominador

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \neq 0$ $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo caracter

c) Series telescópicas: aquellas cuyos términos se cancelan, excepto el primero y el último

Siempre que tengamos una serie telescópica con tres términos debemos descomponer el que tenga el signo solitario en dos, de manera que nos queden 4 términos que podamos juntar dos a dos con los signos diferentes y los coeficientes iguales

a) Cuando tengamos que estudiar una serie definida por una exponencial, podemos hacerlo, utilizando los siguientes criterios:

1. Criterio D'Alembert del cociente. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} L<1 \text{ converge} \\ L>1 \text{ diverge} \\ L=1 \text{ no aporta inf} \end{cases}$$

2. Criterio de la raíz. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} L<1 \text{ converge} \\ L>1 \text{ diverge} \\ L=1 \text{ converge} \end{cases}$$

Se define una progresión geométrica como aquella en la que cada término es igual al anterior, multiplicado por un número constante llamado razón: $b_{n+1} = b_n \cdot r$

$b_n = k \cdot r^n$ donde la base del exponente será la razón

d) Una progresión aritmética es aquella en la que cada término es igual al anterior mas una diferencia d:

$a_{n+1} = a_n + d$.

Se suelen expresar en forma de polinomio de grado 1

$a_n = dn + a_0$

Las series aritmético-geométricas, estan compuestas como su nombre indica, por **a) y d)** de manera que tendrá el siguiente aspecto

$$\sum a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j}^{S_n} \qquad \begin{array}{r} S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ - \quad r S_n = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_{n+1} \\ \hline (1-r) S_n = a_1 b_1 + b_2 \underbrace{(a_2 - a_1)}_{d} + \dots + b_n \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{d} - a_n \cdot b_{n+1} \end{array}$$

a_n = Prog. aritmética (d)

$$(1-r) S_n = a_1 b_1 + d \left[b_2 + b_3 + \dots + b_n \right] - a_n b_{n+1}$$

b_n = Prog. geométrica (r)

$$(1-r) S_n = a_1 b_1 + d \left(\frac{b_2 - b_n r}{1-r} \right) - a_n b_{n+1} = \frac{a_1 b_1}{1-r} + d \frac{b_2 - b_n r}{(1-r)^2} - \frac{a_n b_{n+1}}{1-r}$$

Cuando tengamos una serie en la que los términos no sean todos positivos, para estudiar la convergencia podemos plantear estudiar la misma serie pero en valor absoluto. Ya que si esta es convergente, la serie original también es original

Absolutamente convergente $\longleftrightarrow$ convergente