Análisis Estadístico Multivariante

Francisco Javier Mercader Martínez

Índice

Tema 1: Vectores aleatorios

1.1) Introducción

Objetivo: estudiar k variables sobre una población de individuos (objetos).

Algunos ejemplos:

→ Las variables meteorológicas como temperatura, humedad y velocidad del viento.

→ La intensidad y la fase de una señal aleatoria que se miden en los canales de comunicación.

→ Los parámetros clínicos de los pacientes (como presión arterial, niveles de glucosa, etc.)

Habitualmente estas variables cualitativas o discretas que nos indicarán grupos de individuos.

Estas variables se representarán mediante vectores aleatorios sobre un espacio de probabilidad.

1) Definiciones

Un vector aleatorio (v.a.) k-dimensional sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{S}, \mathcal{P})$ es $X = (X_1, \dots, X_k)$ tal que

$$X_i^{-1}(-\infty, x] \in \mathcal{S}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$

- Función de distribución conjunta

$F : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0, 1]$,

$$F(x_1, \dots, x_k) \coloneqq P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_k \leq x_k],$$

para todo $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$.

1.2) Independencia de las variables aleatorias

- Definición

Las variables aleatorias $X_1, \dots, X_k$ son independientes si los sucesos

$$\{x_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \dots, \{X_k \leq x_k\}$$

son independientes para todo $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$.

Esto es equivalente a que

$$F(x_1, \dots, x_k) = P[X_1 \leq x_1] \cdot P[X_2 \leq x_2] \cdots P[X_k \leq x_k]$$

para todo $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$.

1.3) Distribuciones marginales

La función $F_{X_i}(x_i) = P[X_i \leq x_i]$ se denomina función de distribución marginal i-ésima y corresponde con la función de distribución de la variable aleatoria X_i

Las distribuciones marginales pueden obtenerse a partir de la distribución conjunta:

$$F_{X_i}(x_I) = F(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty)$$

Análogamente, la función de distribución marginal del subvector aleatorio $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$ vendrá dada por

$$F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) = F(+\infty, \ldots, +\infty, x_{i_1}, +\infty, \ldots, +\infty, x_{i_m}, +\infty, \ldots, +\infty).$$

1.4) Vector aleatorio absolutamente continuo

Un vector aleatorio X es absolutamente continuo si existe una función $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ no negativa (llamada función de densidad) tal que

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(z_1, \ldots, z_k)\mathrm{d}z_k, \ldots, \mathrm{d}z_1,$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

Usando el teorema fundamental del cálculo, se tiene que en cada punto de continuidad $(x_1, \ldots, x_k)$ de f:

$$\frac{\partial^k F(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1, \ldots, \partial x_k} = f(x_1, \ldots, x_k).$$

Existen variables aleatorias cuya función de distribución es continua pero que no son absolutamente continuas (tienen una parte singular) y puede ocurrir que $X_1, \ldots, X_k$ sean absolutamente continuas y que $(X_1, \ldots, X_k)$ no lo sea.

→ Ejemplo: Si X_1 es una variable aleatoria absolutamente continua, entonces el vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$ es continuo pero no absolutamente continuo.

→ De hecho, es completamente singular ya que está contenido en la recta $y = x$ que tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$.

Esto ocurre si consideramos las notas de unos alumnos y sus medidas. En estos casos deberemos eliminar estas variables dependientes del vector.

1.5) Vector aleatorio discreto

Un vector aleatorio X se dice que es discreto si existe un conjunto numerable $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^k$ tal que $P(X \in \mathcal{S}) = 1$.

Función masa de probabilidad de una vector aleatorio discreto:

$$P[X = x] = P[X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k]$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, satisfaciendo:

→ $P[X = x] \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{S}$

→ $\displaystyle\sum_{x\in\mathcal{S}} P[X = x] = 1$

Función de distribución de un vector aleatorio discreto:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{\substack{z\in\mathcal{S} \\ z\leq x}} P[X = z],$$

para todo $x \in \mathbb{R}^k$.

1.6) Distribuciones marginales

1.6.1) Caso continuo

- Distribución marginal de la variable aleatoria X_i

Sea $X = (X_1, \dots, X_k)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad f entonces cada componente X_i es de tipo continuo y su función de distribución es;

$$F_{X_i}(x_i) = P[X_i \leq x_i] = \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(z_i)\mathrm{d}z_i,$$

con

$$f_{X_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_1, \dots, z_k)\mathrm{d}z_1, \dots, \mathrm{d}z_{i-1} \cdot \mathrm{d}z_{i+1} \dots, \mathrm{d}z_k,$$

para todo $z_i \in \mathbb{R}$.

La función de densidad marginal de cualquier subvector se calcularía de igual forma.

$X_1, \dots, X_k$ son independientes $\longleftrightarrow f(x_1, \dots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_k}(x_k)$.

1.6.2) Caso discreto

- Distribución marginal de la variable aleatoria X_i

Sea $X = (X_1, \dots, X_l)$ un vector aleatorio discreto con $P[X \in \mathcal{S}] = 1$ y función masa de probabilidad $P[X = x]$, para todo $x \in \mathcal{S}$.

Si X_i es una componente arbitraria y por tanto discreta con valores en $\mathcal{S}_i$, entonces su función masa de probabilidad puede obtenerse a partir de la conjunta:

$$P[X_i = x_i] = \sum_{\substack{x_1 \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \\ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathcal{S}}} P[X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_k = x_k].$$

La función masa de probabilidad marginal de cualquier subvector se calcularía de igual forma.

$X_1, \dots, X_k$ son independientes $\longleftrightarrow$ para todo $(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{S}$,

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k] = P[X_1 = x_1] \cdots P[X_k = x_k].$$

Nota:
A y B independientes $\longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

1.7) Distribuciones condicionadas

1.7.1) Caso continuo

- Distribución condicionada al valor de una variable

Sea $X = (X_1, \dots, X_k)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad f.
Sea X_i una componente arbitraria y $x_i^* \in \mathbb{R}$ tal que $f_{X_i}(x_i^*) > 0$.
Se define la distribución condicionada de $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k)$ a $(X_i = x_i^*)$ como la determinada por la función de densidad:

$$f_{X_1, \dots, X_{i-1}, \dots, X_k | X_i = x_i^*}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k | x_i^*) = \frac{f(x_1, \dots, x^*, \dots, x_k)}{f_{X_i}(x_i^*)}.$$

- Distribución condicionada a valores de varias variables

Sea $X = (X_1, \ldots, X_k)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad f.
Sea $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$ un subvector arbitrario y $(x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_m}) \in \mathbb{R}^m$ tal que:

$$f_{X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_m}) > 0.$$

Se define la distribución condicionada de $(X_1, \ldots, X_{i_1-1}, X_{i_1+1}, \ldots, X_{i_m-1}; X_{i_m+1}, \ldots, X_k)$ a $(X_{i_1} = x^*_{i_1}, \ldots, X_{i_m} = x_{i^*_m})$ como la determinada por la función de densidad:

$$f_{X_1,\ldots,X_{i_1-1},X_{i_1+1},\ldots,X_{i_m-1},\ldots,X_k|X_{i_1}=x^*_{i_1},\ldots,X_{i_m}=x_{i^*_m}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{i_m-1}, x_{i_m+1}, \ldots, x_k|x^*_i) = \frac{f(x_1, \ldots, x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_m} \ldots, x_k)}{f_{X_{i_1},\ldots,X_{i_m}}(x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_m})}$$

1.7.2) Caso discreto

- Distribución condicionada al valor de una variable

Sea $X = (X_1, \ldots, X_k)$ un vector aleatorio discreto.
Sea X_i una componente arbitraria y $x^*_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$P[X_i = x^*_i] > 0.$$

Se define la distribución condicionada de $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k)$ a $(X_i = x^*_i)$ como la determinada por la función masa de probabilidad:

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_k = x_k|X_i = x^*_i] = \frac{P[X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x^*_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_k = x_k]}{P[X_i = x^*_i]}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)$ tal que $x_1, \ldots, x_{i-1}, x^*_i, x_{i+1}, \ldots, x_k \in \mathcal{S}$.

- Distribución condicionada a valores de varias variables

Sea $X = (X_1, \ldots, X_k)$ un vector aleatorio discreto.

Sea $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$ un subvector arbitrario y $(x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_m}) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$P[X_{i_1} = x^*_{i_1}, \ldots, X_{i_m} = x^*_{i_m}] > 0.$$

Se define la distribución condicionada de $(X_1, \ldots, X_{i_1-1}, X_{i_1+1}, \ldots, X_{i_m-1}, X_{i_m+1}, \ldots, X_k)$ a $(X_{i_1} = x^*_{i_1}, \ldots, X_{i_m} = x^*_{i_m})$ como la determinada por la función masa de probabilidad:

$$P[X_1, \ldots, X_{i_1-1}, X_{i_1+1}, \ldots, X_{i_m-1}; X_{i_m+1}, \ldots, X_k|X_{i_1} = x^*_{i_1}, \ldots, X_{i_m} = x_{i^*_m}] =$$

RELACIÓN DE PROBLEMAS: VECTORES ALEATORIOS
ANÁLISIS ESTADÍSTICO MULTIVARIANTE
GRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE DATOS

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Hallar las distribuciones marginales y condicionadas.

2. Obtener las distribuciones marginales y condicionadas asociadas al vector aleatorio (X, Y) con función de densidad
$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left[xy + \frac{x^2}{2}\right] & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Hallar la distribución marginal de X y la distribución de Y condicionada a $X = \frac{1}{2}$.

4. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio con función masa de probabilidad
$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2] = \frac{k}{2^{x_1+x_2}}, x_1, x_2 \in \mathbb{N},$$
donde k es una constante. Obtener las distribuciones marginales y condicionadas.

5. Calcular la función de densidad de una distribución normal bidimensional en (1, 1) si las medias son cero, las varianzas 1 y 4, y la covarianza 1.

6. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en el cuadrado unidad, $[0, 1] \times [0, 1]$, con función de densidad conjunta
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Calcular el valor esperado de $g(X, Y) = XY^2$, es decir, $E[XY^2]$.

7. (X, Y) vector aleatorio discreto con función masa de probabilidad conjunta:

$X\backslash Y$	1	2
1	1/9	2/9
2	2/9	4/9

   a) Calcular $E[X + Y]$, $E[2X + 3Y]$.
   b) Obtener el vector de medias, la matriz de covarianzas y la matriz de correlaciones del vector (X, Y).
   c) ¿Son independientes? ¿Están incorreladas?

8. Demostrar que el vector de medias muestral es el punto de $\mathbb{R}^k$ que minimiza la suma de las distancias al cuadrado (error cuadrático medio, MSE).

1) Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar las distribuciones marginales y condicionadas

$$\underset{0<x<1}{f_X(x)} = \int_{\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}y} + \int_0^1 1\,\mathrm{d}y + \cancel{\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}y} = [y]_{y=0}^{y=1} = 1 \qquad f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\underset{0<y<1}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_{x=0}^{x=1} = 1 \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\underset{f_X(x^*)>0}{y|x = x^*} \longrightarrow \underset{0<x^*<1}{f_{y|x=x^*}} = \frac{f(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ $\quad X$ e Y independientes

2) Obtener las distribuciones marginales y condicionadas asociadas al vector aleatorio (X, Y) con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\underset{0<x<1}{f_X(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x 2\,\mathrm{d}y = [2y]_{y=0}^{y=x} = 2x \longrightarrow \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\underset{0<y<1}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_y^1 2\,\mathrm{d}x = [2x]_{x=y}^{x=1} = 2 - 2y \longrightarrow \begin{cases} 2 - 2y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los recintos son dependientes.

$y|x = x^*$

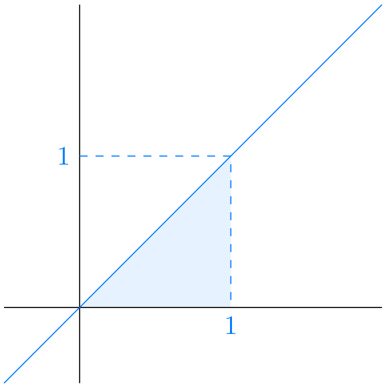
$f_X(x^*) > 0$

$$\underset{0<x^*<1}{f_{y|x=x^*}(y|x^*)} = \frac{f(x^*,y)}{f(x^*)} = \begin{cases} \dfrac{2}{2x^*} & 0 < y < x^* \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x^*} & 0 < y < x^* \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$x|y = y^*$

$f_Y(y^*) > 0$

$$\underset{0<y^*<1}{f_{x|y=y^*}(x|y^*)} = \frac{f(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \begin{cases} \dfrac{2}{2-2y^*} & \text{si } y^* < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-y^*} & \text{si } y^* < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



3) Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}\left[xy + \dfrac{x^2}{2}\right] & \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar la distribución marginal de X y la distribución de Y condicionada a $X = \dfrac{1}{2}$.

$$\underset{0<x<1}{f_X(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{3}{4}\left[xy + \frac{x^2}{2}\right] = \frac{3}{4}\left[\frac{xy^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{3}{4}\left(2x + \frac{x^2}{2}\right) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4}\left(2x + \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$y|x = x^*$

$$\underset{0<x^*<1}{f_{y|x=x^*}(y|x^*)} = \frac{f(x^*,y)}{f(x^*)} = \frac{\frac{3}{4}\left(x^*y + \frac{(x^*)^2}{2}\right)}{\frac{3}{4}\left(2x^* + \frac{(x^*)^2}{2}\right)} = \frac{x^*y + \frac{(x^*)^2}{2}}{2x^* + \frac{(x^*)^2}{2}} = \frac{2x^*y + (x^*)^2}{4x^* + (x^*)^2} \xrightarrow{x^*=\frac{1}{2}} \frac{y + \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{4y+1}{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4y+1}{9} & \text{si } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4) Sea $X = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio con función masa de probabilidad

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2] = \frac{k}{2^{x_1+x_2}}, x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

donde k es una constante. Obtener las distribuciones marginales y condicionadas.