Álgebra Lineal

Ejercicios Tema 2: Vectores, matrices y tensores

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Determina la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: si u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3, entonces u_3 es combinación lineal de u_1 y u_2.

La afirmación es **falsa** en general. Vamos a analizarla cuidadosamente:

- Supongamos que u_2 y u_3 son linealmente independientes y u_1 se define como una combinación lineal de u_2 y u_3. Por ejemplo, tomemos:

$$u_1 = u_2 + u_3.$$

- En este caso, aunque u_1 es una combinación lineal de u_2 y u_3, no podemos escribir u_3 como una combinación lineal de u_1 y u_2, ya que:

$$u_3 = u_1 - u_2$$

  y esta relación no es válida en todos los espacios vectoriales. La implicación original depende de la independencia lineal de los vectores involucrados.

- Para que u_3 sea combinación lineal de u_1 y u_2, deben cumplorse condiciones adicionales, como que u_1, u_2, u_3 estén en un subespacio con dimensión menor o igual a 2.

2) Consideremos los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$. Encuentra un vector w ortogonal a u y v. Comprueba que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v. Encuentra ahora un vector que no sea lineal de u, v y comprueba que no es ortogonal a w.

1) Vector w ortogonal a u y v:

   El vector w encontrado mediante el producto cruz es:

$$w = (1, -1, 1).$$

2) Verificación de la ortogonalidad:

   - $w \cdot u = 0 :$ w es ortogonal a u.
   - $w \cdot v = 0 :$ w es ortogonal a v.

3) Ortogonalidad respecto a una combinación lineal de u y v:

   Para una combinación lineal genérica $c_1 u + c_2 v$, se cumple:

$$w \cdot (c_1 u + c_2 v) = 0.$$

   Esto demuestra que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v.

4) Vector que no es combinación lineal de u y v:

Un vector que no es combinación lineal de u y v es:

$$(1, 0, 0)$$

5) Comprobación de no ortogonalidad con w:

El producto escalar entre w y $(1, 0, 0)$ es:

$$w \cdot (1, 0, 0) = 1.$$

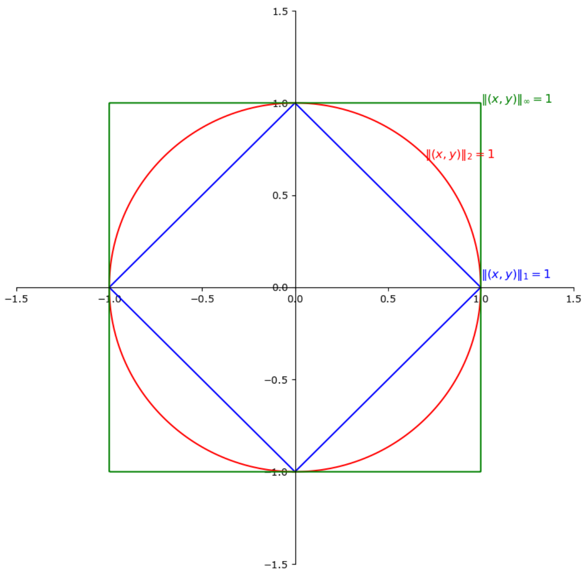
Por lo tanto, no es ortogonal a w.

3) Haz un dibujo de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_1 = 1\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_2 = 1\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\|_\infty = 1\}$$



4) Prueba que $\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \|u\|_\infty}$.

Dado un vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, las normas son:

1) Norma $\|u\|_2$:

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

2) Norma $\|u\|_1$:

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

3) Norma $\|u\|_\infty$:

$$\|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|).$$

Expandimos la defnción de $\|u\|_2^2$:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2.$$

Usamos la desigualdad $u_i^2 \leq |u_i| \cdot \|u\|_\infty$ (ua que $|u_1| \leq \|u\|_\infty$ para todo i):

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot \|u\|_\infty \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq \|u\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

Por definición, $\sum_{i=1}^{n} |u_i| = \|u\|_1$, por lo que:

$$\|u\|_2^2 \leq \|u\|_\infty \|u\|1.$$

Tomando raíces cuadradas en ambos lados de la desigualdad:

$$\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \|u\|_\infty}.$$

5) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero, pero ¿qué pasa si su producto escalar es próximo a cero? Sean $x = [1, -0.75]$ e $y = [0.3, 0.3]$. Calcula el producto escalar $x \cdot y$ y el ángulo que forman. ¿Qué conclusión puedes sacar?
Si dos vectores x, y son unitarios, entonces $-1 \leq x \cdot y \leq 1$ (¿por qué?). En este caso, ¿qué podemos decir si $x \cdot y$ es aproximadamente $-1, 1$ o cero?

6) Sean u, v dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$ que forman un ángulo de $60°$. Calcula $\|2u + v\|$.

7) Sena u, v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ de norma 2 y 3 respectivamente que forman un ángulo de 60. ¿Qué ángulo forman los vectores u y $2u - v$?

8) Calcula $A + B, (A + B)^\intercal, AB, BA, (AB)^\intercal, A^\intercal B^\intercal$ y $B^\intercal A^\intercal$ para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9) Prueba que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10) ¿Existen matrices reales no nula 2×2 tales que $A \cdot A^\intercal = 0$? ¿y si son matrices complejas?

11) Sean A, B matrices tales que $I + AB$ es invertible y sea S la inversa de $I + AB$. Prueba que $I + BA$ también es invertible y su inversa es $I - BSA$.

12) Sea A una matriz $n \times m$ y sea B una matriz $m \times n$. Suponiendo que las matrices $I + AB$ y $I + BA$ sea invertibles, prueba que se cumple la igualdad

$$(I + AB)^{-1} A = A(1 - BA)^{-1}$$

Si m es mucho más pequeño que n, ¿cuál de las dos expresiones es más fácil de calcular desde el punto de vista computacional?

13) Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Si llamamos **flop** a una operación, ya sea una suma, resta, multiplicación o división, prueba que para calcular AB son necesarios $mn(2p - 1)$ flops (haciendo la multiplicación de forma estándar). Si A es una matriz 10×2, B una matriz 2×10 y C una matriz 10×10 y queremos calcular ABC, ¿qué es mejor desde el punto de vista computacional, calcular $(AB)C$ o $A(BC)$?

14) Dadas dos matrices cuadradas A, B, se define el **conmutador** de A, B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por una parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguiente tres matrices, llamadas matrices de Pauli:

$$S_x = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_y = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\overline{h} = \dfrac{h}{2\pi}$, con h constante de Plank. Comprueba que

$$[S_x, S_y] = j\overline{h}S_z, \quad [S_y, S_z] = j\overline{h}S_x, \quad [S_z, S_x] = j\overline{h}S_y$$

y que

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\overline{h}^2 I_3$$

con I_3 la matriz identidad 3×3.

15) Si A es una matriz simétrica, ¿son las matrices $B^{\intercal}AB, A + A^{\intercal}$ y $A - A^{\intercal}$ simétricas?

16) Prueba que si A es una matriz invertible simétrica, entonces A^{-1} es también simétrica.

17) Sean $u_1, \ldots, u_m$ vectores de $\mathbb{K}^n$ y supongamos que para ciertos escalares $x_1, \ldots, x_m$ se tiene $x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0$. Expresa esta última igualdad en forma matricial.

18) Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Observa que $1 + v^{\intercal}u$ es un escalar, que suponemos no nulo. Prueba que la matriz $I + uv^{\intercal}$ es no singular y su inversa es

$$(I + uv^{\intercal})^{-1} = I - \frac{uv^{\intercal}}{1 + v^{\intercal}u}$$

19) Sea u un vector de $\mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$ y consideremos la matriz $A = I - 2uu^{\intercal}$. Prueba que A es simétrica y $A^2 = I$.

20) Sea A la matriz dada por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} invertible. Prueba que existen matrices X, Y tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ e I es la matriz identidad del tamaño adecuado (la matriz S se denomina el **complemento dde Schur** de A_{11}).

21) Expresa la matriz AB como suma de matrices de rango 1, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

22) Sea $u^\intercal = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$, $v^\intercal = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y $w^\intercal = [a, b, c]$. Halla a, b, c para que la matriz $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal de determinante 1.

23) **(Traza de una matriz)** Dada una matriz cuadrada A, se define la **traza** de A como $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$, es decir, como la suma de los elementos de la diagonal principal. Prueba las siguientes propiedades:

a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

b) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^\intercal)$.

c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

d) $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$ con P invertible.