Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos
HOJA DE PROBLEMAS 2.2

Bibliografía:

- Calculus, M. Spivak. Editorial Reverté.
- University Calculus. Haar, Weir & Thomas. Pearson.

Ejercicios Propuestos

1. Encuentre los valores de A y B para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ A \operatorname{sen}(x) + B \cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$.

2. Si f y g son dos funciones tales que $f' = g$ y $g' = f$ para cada x. Demuestre que $f^2 - g^2$ es constante.

3. Estudiar la derivabilidad en el punto $x_0 = 0$ de las siguientes funciones

$$f(x) = (x^3 + x^2)^{1/2} \qquad y \qquad f(x) = \left| x^{1/3} \right|$$

definidas en un entorno de $x_0 = 0$. ¿Son continuas estas funciones en dicho punto?

4. Calcular las derivadas a la derecha y a la izquierda de $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x} & si\, x \neq 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}$$

5. Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ utilizando la definición de derivada.

6. Calcule $y^{(p+q)}(x)$ siendo $y(x) = x^p (1 + x)^q$.

7.
   a) Encuentre una aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{(x+4)^3}$ en el punto $x = 0$.
   b) Utilice esta aproximación para estimar el número $\sqrt{(3.95)^3}$. ¿Es la estimación por encima o por debajo del valor real? Observación: ¿Cómo es la concavidad de la función?

8. Utilice la definición de derivada para calcular la tasa de cambio del área de un disco respecto de su radio.

9. La curva definida implícitamente por

$$x \operatorname{sen}(y) + y \operatorname{sen}(x) = \pi$$

pasa por el punto $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto P.

10. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $\operatorname{sen}(x + y) = xe^{x+y}$ en el punto $(0, 0)$.

11. Sea g una función continua y $f(x) = (x - a)g(x)$. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(a)$.

12. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $x > 0$

    b) $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2\log(1+x)}$, $x > -1$;

    c) $f(x) = x^{\arcsin(x)}$, $x > 0$

13. El pulso de un paciente mide en primer lugar 70 pulsaciones por minuto, después 80 puls/min. y por último 120 puls/min. ¿qué valor minimiza $(x-70)^2 + (x-80)^2 + (x-120)^2$? Si el paciente está nervioso, asigne al valor 120 un peso menor y minimize $(x-70)^2 + (x-80)^2 + \frac{1}{2}(x-120)^2$. Compare los resultados.

14. Un depósito está inicialmente lleno con 1.000 litros de agua salada cuya concentración o salinidad es de 2 gr. de sal por litro. Para reducir la salinidad se hace entrar agua pura en el depósito a razón de 5 litros por minuto, al tiempo que por un orificio el depósito evacua el mismo caudal. Determinar la cantidad de sal contenida en el depósito en función del tiempo y calcular el tiempo que debe transcurrir para que queden sólo 200 gramos de sal.

15. Un granjero dispone de 400 metros de verja para construir un cercado rectangular. Utilizará parte de una pared ya existente que tiene 100 metros de longitud. ¿Cuál es el área máxima que puede tener dicho cercado?

16. Una partícula se mueve de izquierda a derecha sobre la parábola $y = \sqrt{-x}$, de tal manera que su coordenada x (medida en metros) decrece a razón de 8 m/s. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo de inclinación θ de la recta que une a la partícula con el origen cuando $x = -4$?.

17. Un aeroplano que patrulla la autopista vuela a 3 millas sobre una autopista recta y sin declive alguna a 120 mi/h. El piloto ve un auto que se acerca y con el radar determina que el instante en el que la distancia entre ellos y el auto a lo largo de su línea de visión es de 5 millas, dicha distancia decrece a razón de 160 mi/h. Halla la velocidad del auto sobre la autopista.

18. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} \qquad b) f(x) = \log(|x|)$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases} \qquad d) f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } -\pi/2 < x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

19. Sea $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ siendo $m, n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $f'(x)$ posee una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

20. La función $f(x) = \frac{2-x^2}{x^4}$ toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. Además $f'(x)$ no se anula en dicho intervalo. ¿Contradice esta función el teorema de Rolle?

21. Demostrar que las siguientes funciones tiene una única solución real:

$$(a) 2^{-x} = x \qquad (b) \operatorname{sen}(x) = x$$

22. Demostrar utilizando el Teorema de los valores intermedios que la ecuación

$$2^x = \frac{10}{x},$$

    tiene solución para algún $x > 0$. Demuestre que $2^x = \frac{10}{x}$ no tiene solución para $x < 0$.

23. Calcule $y'(x)$ siendo $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$.

24. Calcule $y''(x)$ siendo $x^2a^2 + y^2b^2 = 1$.

25. Sea $F(x) = f^2(g(x))$, tal que $g(1) = 3$, $g'(1) = 1$, $f'(3) = 5$ y $f(3) = 4$. Calcule $F'(1)$.

26. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = 2x + 4\cos(x), \quad x \in [0, 2\pi]$,

    b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 3]$,

    c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & 0 < x \leq \pi \end{cases}$.

27. Estudiar la existencia de los siguientes límites. ¿Puede aplicarse la regla de L'Hôpital?

    a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}$;

    b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}$.

28. Sea la función $f(x) = x + 2\cos(x)$.

    a) Hallar, si existe, el valor mínimo de f en el intervalo $[0, 1]$.

    b) Probar que f es estrictamente creciente en el intervalo $I = [-1/2, 1/2]$. Deducir que existe f^{-1}, la función inversa de $f(x)$ para $x \in I$.

    c) Calcular $(f^{-1})'(2)$.

29. Escribir el desarrollo de Taylor de las funciones $f(x) = xe^{(x-1)}$ y $g(x) = x^3\log(x)$ en el punto $a = 1$ con el término complementario de Lagrange.

30. Haciendo uso de la fórmula de Taylor para la función $(1 + x)^{1/3}$ calcular aproximadamente $(1,03)^{1/3}$. Situando el término complementario en el lugar de las derivadas terceras, estimar el error cometido.

31. Calcular los siguientes límites utilizando la fórmula de Taylor.

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(2x))}{\log(\cos(3x))}$ *b*) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x(1-\cos(3x))}$

32. Representar gráficamente las siguientes funciones:

    a)$y = \frac{x+e^x}{x-e^x}$ *b*)$y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}$ *c*)$y = x\sqrt{x(4-x)}$