PROBLEMAS. RELACIÓN 5: Variable aleatoria de una dimensión.

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD Y ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS.

GRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE DATOS.

1. Dada la variable aleatoria *X*, cuya distribución de probabilidad es:

$X = x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	2/8	1/8	2/8	2/8	1/8

Determinar:

a) La representación gráfica de la función puntual de probabilidad de la variable aleatoria *X*.

b) La función de distribución de la variable aleatoria *X*.

c) La probabilidad $P(1 < X \leq 2{,}7)$.

d) La probabilidad $P(1 \leq X < 3{,}5)$.

2. Dada la variable aleatoria *X*, cuya función de distribución *F(x)* viene definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1/4 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 2/4 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 3/4 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad 3 \leq x \end{cases}$$

Determinar: a) La representación gráfica de *F(x)*.

b) La función puntual de probabilidad que engendra *F(x)*.

c) Las probabilidades: $P(X = 1{,}7)$, $P(X = 2)$ y $P(1{,}2 < X < 3)$.

3. Sea X una v.a. cuya función de probabilidad viene dada por

$$P(X = k) = \frac{k}{6} \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, 3.$$

a) Calcular la esperanza y la varianza de la v.a. *X*.
b) Calcular la moda y la mediana de la v.a. X.

4. Dada la variable aleatoria X tal que $P(X = r) = \begin{cases} k\dfrac{r-1}{n} & si \quad r = 2,3,\ldots,n \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$ determinar k para que $P(X = r)$ sea la función de masa de probabilidad que define la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X*.

5. Dada la variable aleatoria *X*, cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ \frac{1}{9}(x+1) & si \quad 0 < x \le 1 \\ \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) & si \quad 1 < x \le \frac{3}{2} \\ \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2} - x\right) & si \quad \frac{3}{2} < x \le 2 \\ \frac{1}{9}(4-x) & si \quad 2 < x \le 3 \\ \frac{1}{9} & si \quad 3 < x \le 6 \\ 0 & si \quad 6 < x \end{cases}$$

a) Hacer la representación gráfica de la función de densidad *f(x)*.

b) Calcular la función de distribución de la variable aleatoria *X*.

c) Calcular la probabilidad $P(1{,}3 < X < 2{,}4)$.

6. Dada la variable aleatoria *X*, cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & para \quad 0 < x < 1 \\ 0 & para \quad cualquier \quad otro \quad valor \quad de \quad x \end{cases}$$

a) Determinar la función de distribución correspondiente a la variable aleatoria *X*.

b) Calcular las probabilidades: $P(X = 0{,}75)$, $P(-1 < X \le 0{,}5)$, $P(0{,}3 \le X \le 0{,}8)$.

c) Calcular la moda y la mediana de la v.a. *X*.

7. Dada una variable aleatoria *X* cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & para \quad 0 < x < 1 \\ 0 & para \quad cualquier \quad otro \quad valor \quad de \quad x \end{cases}$$

a) Calcular el valor de la constante *k*, para que *f(x)* sea la función de densidad que define la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X*.
b) Determinar la función de distribución de la variable aleatoria *X*.

c) Calcular la esperanza y la varianza de la v.a. *X*.

8. Dada la variable aleatoria *X*, cuya distribución de probabilidad viene definida por la función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases}0 & para \quad x<0\\ x^2 & para \quad 0\le x<1\\ 1 & para \quad 1\le x\end{cases}.$$

Determinar la esperanza y la varianza de *X*.

9. La distribución del número de veces que es solicitado el servicio de una hormigonera durante la cimentación tiene como función de densidad

$$f(x)=k\cdot e^{-ax} \quad \text{para} \quad x\ge 0.$$

a) ¿Cuál es el valor de *k* suponiendo que *a* es un parámetro conocido en la fábrica?
b) ¿Cuánto vale su media y su varianza?

10. El porcentaje real de zumo de naranja que poseen los refrescos con gas fabricados por una determinada compañía es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & si \quad a\le x<7.5\\ 1-(8-x)^2 & \text{si} \quad 7.5\le x<8.5\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases} \quad \text{siendo } a \text{ una cantidad constante.}$$

a) Obtener el porcentaje mínimo de zumo de naranja que poseen estos refrescos.

b) Determinar la probabilidad de que un bote de estos refrescos, elegido al azar, tenga al menos un 8% de zumo de naranja.

c) Determinar el porcentaje de refrescos cuyo contenido en zumo de naranja oscila entre un 7% y un 8%.

11. Se sabe que el contenido depositado por una máquina expendedora de café (capuchino) es una variable aleatoria de media 150 ml y desviación típica 5 ml.

   a) Se desea determinar la probabilidad de que un vaso llenado con dicha máquina contenga entre 140 ml y 160 ml. Con la información proporcionada, ¿podemos obtener dicha probabilidad? En caso negativo, indicar si se puede obtener una cota de la probabilidad solicitada y calcularla.
   b) ¿Y qué podemos decir de la probabilidad de que un vaso contenga entre 135 ml y 160 ml?
   c) Obtener un intervalo (a, b) centrado en la media (150 ml), tal que al menos el 90% de los vasos expendidos tengan su contenido entre dichos valores (a, b).
   d) Si la máquina deposita 200 ml o más, el vaso rebosa. ¿Podemos garantizar que el porcentaje de vasos que rebosan no superará el 80%?.

12. Sea *X* una variable aleatoria discreta que toma los valores $i = -2, -1, 0, 1, 2$ con $p_i = 1/5$. Calcular la función de probabilidad y la función de distribución de la variable aleatoria $Y = X^2$. Calcular $E(Y)$ y $Var(Y)$.

13. Sea *X* una variable aleatoria continua con función de distribución

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{para} \quad x<0\\ x & \text{para} \quad 0\le x<1\\ 1 & \text{para} \quad 1\le x\end{cases}$$

Calcular la función de densidad y la función de distribución de la variable aleatoria $Y = X^2$. Calcular $E(Y)$ y $Var(Y)$.

14. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

Calcular la función de densidad y la función de distribución de las variables aleatorias:

a) $Y = 3X + 5$.

b) $Y = X^2$.

c) $Y = 2X^2 + 5$.