1) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$f(x) = x - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

Para empezar, como hay un cociente debemos evitar que el denominador sea cero

$$x - 1 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ No está en el dominio}$$

Por otro lado, tenemos una raíz cuadrado y esto implica que la de dentro, debe ser positivo o cero: $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$

		-2		1	
$x+2$	$-\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$		$+\ +\ +$
	$+$		$-$		$+$
$x-1$	$-\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +$

$$\frac{x+2}{x-1} \geq 0 \longrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

Por lo tanto el dominio de la función es:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)}$$

2) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{\log(x)}}$$

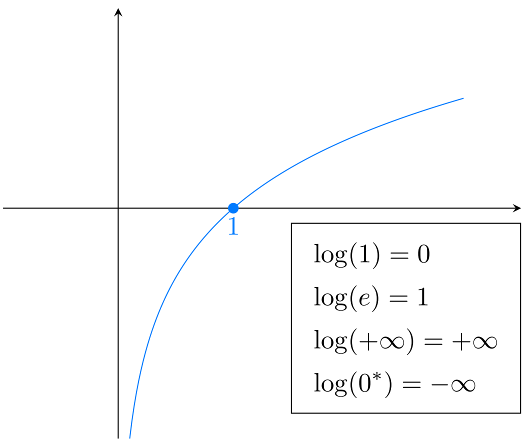
Como hay un cociente entonces el denominador no puede ser cero:

$$\log(x) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1} \text{ No está en el dominio}$$

Como hay un logaritmo, lo de dentro solo puede ser positivo:

$$\boxed{x > 0}$$

Como tenemos una raíz cuarta (de grado par) entonces lo de dentro no puede ser negativo:



$$\frac{x}{\log(x)} \geq 0 \longrightarrow x \in (1, +\infty)$$

		1	
x	$+\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$
	$-$		$+$
$\log(x)$	$-\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (1, +\infty)}$$

3) Vamos a comprobar si la aplicación

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x + 1$$

es biyectiva, es decir, si es inyectiva y sobreyectiva.

Veamos si la aplicación $f(x)$ es inyectiva:

- Sea:

$$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \longrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

  Por lo tanto: $f(x)$ es inyectiva.

- Por otro lado: $\forall y \in \mathbb{R} \longrightarrow y = f(x) = 2x + 1$
  $2x = 1 - y \longrightarrow x = \dfrac{1-y}{2}$ Por lo tanto $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y \longrightarrow f(x)$ es sobreyectiva.

Nota: Dada una función $y = f(x)$, se dice que esta función tiene inversa $x = f^{-1}(y)$ si cumple que sea inyectiva.
Decimos que $y = f(x)$ es inyectiva si $\forall x_1 \neq x_2$ se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Realmente para comprobar si una función es inyectiva lo que haremos será partir de $f(x_1) = f(x_2)$ y terminar demostrando que $x_1 = x_2$.

Entonces, como $f(x)$ es inyectiva y sobreyectiva en todo $\mathbb{R}$ podemos asegurar que $f(x)$ es biyectiva y por lo tanto existe su función inversa.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$$

4) Comprobar si la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ tiene inversa.

Para que tenga inversa debe ser inyectiva, y esto implica que para elementos diferentes debe tener diferentes y como:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{No es inyectiva} \longrightarrow f(x) \text{ No tiene inversa}$$

5) Dadas las siguientes funciones, averiguar en qué puntos son discontinuas y por qué.

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ si $x \neq 0$, $f(2) = 0$.

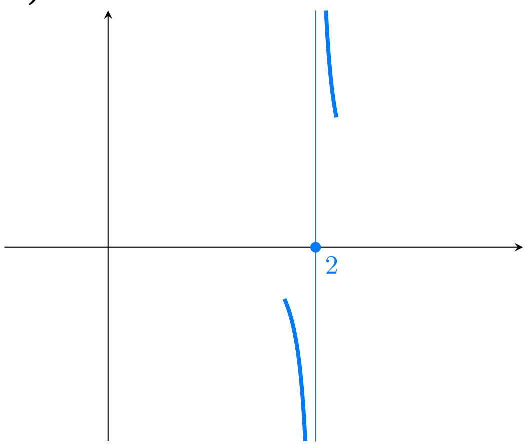
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$\forall x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos ahora si es continua en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$

$f(x)$ No es continua en $x = 2$, en concreto presenta en $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto infinito. Diremos que $f(x)$ presenta en $x = 2$ una asíntota vertical.



6) Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^x}}$

Como es un cociente, debemos evitar que el denominador sea cero:

$$1 - e^x = 0 \longrightarrow e^x = 1 \longrightarrow x = \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0} \text{ No pertenece el dominio}$$

Como hay una raíz cuadrada, lo de dentro no puede ser negativo:

$$1 - e^x > 0 \longrightarrow e^x < 1 \longrightarrow x < \ln(1) = 0 \longrightarrow \boxed{x < 0}$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, el Dom}(f) = (-\infty, 0)}$

7) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x < 0 \\ xe^{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\forall x < 0 \longrightarrow f(x) = -xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
$\forall x \in (0, 1) \longrightarrow f(x) = xe^{x-1}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
$\forall x > 1 \longrightarrow f(x) = xe^{1-x}$ es continua por ser un producto de funciones continuas
Veamos ahora si $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $x = 1$:

<u>En $x = 0$:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} (-xe^{x-1}) = 0 \\ &\lim_{x\to 0^+} (xe^{1-x}) = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}$$

Como existe el límite de $f(x)$ en $x = 0$ y coincide con $f(0)$ entonces podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

<u>En $x = 1$:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} xe^{x-1} = 1 \\ &\lim_{x\to 1^+} xe^{1-x} = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \\ &f(1) = 1 \end{aligned}$$

Como existe el límite de $f(x)$ en $x = 1$ y coincide con $f(1)$ entonces podemos asegurar que $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por lo tanto, y resumiendo, diremos que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

8) Determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para los que las siguientes funciones son continuas. Indica su dominio de definición:

a) $f(x) = \begin{cases} ax - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -ax + b & \text{si } -1 < x < 2 \\ -2ax + 3b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Para todos los puntos $x \neq -1$ y $x \neq 2$ $f(x)$ es continua por ser un polinomio.

<u>Veamos en $x = -1$:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} (ax - 5) = -a - 5 \\ &\lim_{x\to 1^+} (-ax + b) = a + b \\ &f(-1) = -a - 5 \end{aligned}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, debe cumplirse que

$$-a - 5 = a + b \longrightarrow \boxed{2a + b = -5}$$

<u>Veamos en $x = 2$:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^-} (-ax + b) = -2ab \\ &\lim_{x\to 2^+} (-2ax + 3b) = -4a + 3b \\ &f(2) = -4 + 3b \end{aligned}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, debe cumplirse que

$$-2a + b = -4a + 3b \longrightarrow \boxed{2a - 2b = 0}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \longrightarrow 3a = -5 \longrightarrow \\ 2a - 2b = 0 \longrightarrow b = a \end{cases} \boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{5}{3} \\ b &= -\frac{5}{3} \end{aligned}}$$

Como estos valores de a y b podemos asegurar que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3x+a & \text{si } -2 \le x < -1 \\ bx+a & \text{si } -1 \le x < 3 \\ 2x-b & \text{si } 3 \le x < 5 \end{cases}$

Para empezar debemos darnos cuenta de que la función solo está definida para el intervalo: $[-2,5) \longrightarrow \boxed{\text{Dom}(g) = [-2,5)}$

Podemos asegurar que $g(x)$ es continua en $\forall x \in \text{Dom}(g)$ solo en $x=-1$ y $x=3$, que todavía no lo sabemos ya que son los puntos de cambio.

Veamos en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}(3x+a) = -3+a \\ \lim\limits_{x\to -1^+}(bx+a) = -bx+a \\ f(-1) = -b+a \end{array}\right\} \quad \text{Para que } g(x) \text{ sea continua en } x=-1 \quad -3+\cancel{a} = -b+\cancel{a} \longrightarrow \boxed{b=3}$$

Veamos en $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}(bx+a) = 9+a \\ \lim\limits_{xto3^+}(2x-b) = 3 \\ f(3) = 3 \end{array}\right\} \quad \text{Para que } g(x) \text{ sea continua en } x=3 \quad 9+a=3 \longrightarrow \boxed{a=-6}$$

Por lo tanto, podemos asegurar que si $a=-6$ y $b=3$ entonces $g(x)$ es continua en todo su dominio: $\text{Dom}(g) = [-2,5)$.

9) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{multiplicaremos y dividiremos} \\ \text{por el conjugado de las raíces}\end{array}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cancel{1}-x)-(\cancel{1}-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

10) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+3x+5}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+4x+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{5}{x^2}}} = \boxed{3}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ que sea un cociente de polinomios, lo que haremos para resolverlo será dividir numerada y denominador por x^p siendo p el mayor grado de los términos del denominador.

11) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{x^2+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\cancelto{0}{\frac{3}{x}}}{1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

12) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{x+1}{x-1}-1\right]}=(*)=\boxed{e^2}$$

Nota: Siempre que tengamos una indeterminación de la forma 1^{∞}, haremos lo siguiente $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=(1^{\infty})=e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$

Base:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}{\frac{x}{x}-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}=1$$

$$(*)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}=2$$

13) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4})$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4})=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})-(\sqrt{x^2-4})\cdot(\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2-4})}{(\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2-4})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-(\sqrt{x^2-4})^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\cancel{x^2}+1)-(\cancel{x^2}-4)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{+\infty}=\boxed{0}$$

14) Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

$\forall x\neq 1\longrightarrow f(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Veamos si $f(x)$ es continua en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{0^-}}+1}=\dfrac{1}{e^{-\infty}+1}=\left\{e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0\right\}=\dfrac{1}{1}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{0^+}}+1}=\dfrac{1}{e^{+\infty}+1}=\dfrac{1}{+\infty}=0\end{array}\right\}$$

Como los límites laterales no son iguales, entonces no existe el límite en $x=1\longrightarrow f(x)$ no es continua en $x=1$.

En concreto podemos asegurar que $f(x)$ presenta en $x=1$ una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1ª especie.

$\boxed{\text{Por lo tanto, la conclusión es que } f(x) \text{ es continua } \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}.}$

15) Calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right)^{\frac{x^3}{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right)^{\frac{x^3}{1-x^2}}=(*)=(1^{\infty})=(**)$$

$$(*)\begin{cases}\text{Base: } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+4x-1}\right)=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{6}{x^2}}}{1+\cancelto{0}{\frac{4}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}=1\\[2ex] \text{Exponente: } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{\infty}{-1}=-\infty\end{cases}$$

$$(**)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-1}-1\right]}=\boxed{e^7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-1}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\left[\frac{\cancel{x^2}-3x+6-\cancel{x^2}-4x+1}{x^2+4x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}\cdot\frac{-7x+7}{x^2+4x-1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^3+7x^3}{x^2+4x-1-x^4-4x^3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^4+7x^3}{-x^4-4x^3+2x^2+4x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{7}{x^4}+\frac{7x^3}{x^4}}{-\frac{x^4}{x^4}-\frac{4x^3}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}+\frac{4x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-7+\cancelto{0}{\frac{7}{x}}}{-1-\cancelto{0}{\frac{4}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{4}{x^3}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^4}}}=\frac{-7}{-1}=7$$

16) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

Como tenemos:

- $\lim\limits_{x\to 0} x=0$
- $\sin\dfrac{1}{x}$ es una función acotada ya que siempre ocurrirá que $-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1$

Por lo tanto por el teorema del encaje (Sándwich), tendremos que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0}$$

Nota: Teorema del Sandwich o del encaje

Si tenemos tres funciones tales que $f(x)\le g(x)\le h(x)$ entonces si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L\longrightarrow\lim\limits_{x\to a} g(x)=L.$

Una consecuencia de este teorema es la siguiente:

Si tenemos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $g(x)$ está acotada $|g(x)|\le k$ entonces podemos asegurar que

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0$$

17) Calcular el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin(x)$$

Como se cumple que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \;=0$
- La función $\sin(x)$ está acotada, ya que $-1\le\sin(x)\le 1$

Aplican el teorema del encaje (Sándwich), tendremos que:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin(x)=0}$$

18) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

Aplicando la equivalencia: $\sin(x)\rightsquigarrow_0 x$ podemos decir que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\boxed{1}$$

Nota: Hay veces en las que tenemos que hacer límites de funciones conocidas cuando estamos cerca de $x=0$. En estos casos podemos plantearnos transformar estas funciones en polinomios, mediante las llamadas equivalencias:

$\sin(x)\rightsquigarrow_0 x$	$e^x\rightsquigarrow_0 1+x$	$\arcsin(x)\rightsquigarrow_0 x$
$\cos(x)\rightsquigarrow_0 1-\dfrac{x^2}{2}$	$\log(1+x)\rightsquigarrow_0 x$	$\arctan(x)\rightsquigarrow_0 x$
$\tan(x)\rightsquigarrow_0 x$	$a^x\rightsquigarrow_0 1+x\log(a)$	$(1+x)^n\rightsquigarrow_0 1+nx$

19) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x\sin(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x\sin(2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=(*)$$

Resolveremos este límite aplicando equivalencias:

$$\begin{array}{rcl} \sin(x)\rightsquigarrow_0 x & \longrightarrow & \sin(2x)\rightsquigarrow_0 (2x) \\ \cos(x)\rightsquigarrow_0 1-\dfrac{x^2}{2} & \longrightarrow & \cos(2x)\rightsquigarrow_0 1-\dfrac{(2x)^2}{2}=1-2x^2 \end{array}$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-2x^2)}{3x\cdot(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

20) Calcular el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)\tan^3(3x)}{(1-\cos^2(x))\cdot(e^x-1)^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)\tan^3(3x)}{\underbrace{(1-\cos^2(x))}_{\sin^2(x)}\cdot(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sin^2(x)}\cdot\tan^3(3x)}{\cancel{\sin^2(x)}\cdot(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(3x)}{(e^x-1)^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=(*)$$

Aplicaremos equivalencias para resolver este límite:

$$\tan(x)\rightsquigarrow_0 x\longrightarrow\boxed{\tan(3x)\rightsquigarrow_0 3x}$$
$$\boxed{e^x\rightsquigarrow_0 1+x}$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^3}{(1+x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{27x^3}{x^3}=\boxed{27}$$

21) Para calcular

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{3-\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}=(0^0)=\lim_{x\to 0^+}e^{\log x^{\frac{2}{3-\ln x}}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{2}{3-\ln x}\cdot\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{3-\ln x}}=(*)=\boxed{e^{-2}}$$

Exponente: $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2}{3-\ln x}=\{\ln(0^+)=-\infty\}=\dfrac{2}{\infty}=0$

$$(*)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{3-\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}{\frac{3}{\ln x}-\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\overset{0}{\cancel{\frac{3}{\ln x}}}-1}=-2$$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma 0^0 o ∞^0 que sea indeterminaciones, lo que haremos será aplicar lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left(0^0 \text{ ó } \infty^0\right)=\lim_{x\to a}e^{\log(f(x))^{g(x)}}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\log f(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)}$$

22) Para calcular

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3)^{\frac{1}{\ln(x^2)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3)^{\frac{1}{\ln x^2}}=(\infty^0)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(5x^3)^{\frac{1}{\ln x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x^2}\ln(5x^3)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(5x^3)}{\ln x^2}}=(*)=e^{\frac{3}{2}}$$

$$(*)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(5x^3)}{\ln x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5+\ln x^3}{\ln x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5+3\ln x}{2\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{0}{\cancel{\frac{\ln 5}{\ln x}}}+3\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}{2\cancel{\frac{\ln x}{\ln x}}}=\frac{3}{2}$$

23) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x^3+5x^2+6x+2)}{\ln(x^2+5)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x^3+5x^2+6x+2)}{\ln(x^2+5)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^3\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right)}{\ln\left(x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3)+\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x+\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{2\ln x+\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} =$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}} + \cancelto{0}{\frac{\ln\left(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\ln x}}}{\frac{2\ln x}{\ln x} + \cancelto{0}{\frac{\ln\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{\ln x}}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Nota: Siempre que tengamos un límite que sea un cociente de logaritmos, lo que haremos será sacar en cada logaritmo factor común el término polinómico de mayor grado y mediante reglas de logaritmos lo reduciremos a un cociente de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ donde dividiremos arriba y abajo por $\ln x$.

24) Si queremos calcular A para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

sea continua en el punto $x_0 = 2$ lo que tenemos que hacer es calcular.

- Veamos si existe el límite en $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4 \longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

- Como podemos ver en $f(x)$, existe $f(2)$ y vale $f(2) = A$.
- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, debe verificarse que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\boxed{A = 4}$$

Nota: Para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = a$ debe verificar las siguiente condiciones:

i) Exista $\lim_{x\to a} f(x)$

ii) Exista $f(a)$

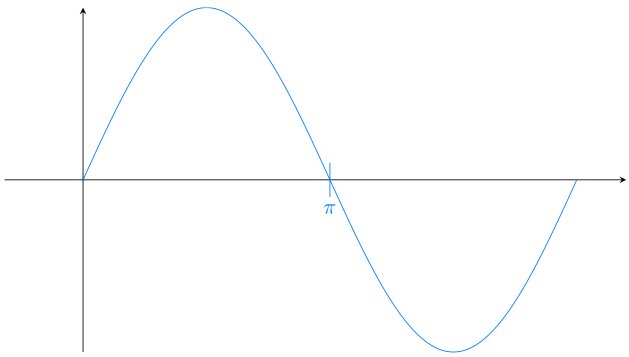
iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

25) Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si queremos estudiar la continuidad de la función en el punto $x_0 = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \neq k\pi \\ 1 & \text{si } x = k\pi, \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = \pi$ debemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x}{\sin x} = \left(\frac{\pi}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to\pi^-} \dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{\pi}{0^+} = +\infty & \lim_{x\to\pi^+} \dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{\pi}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



No es continua en $x_0 = \pi$ en concreto, podemos asegurar que $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x_0 = \pi$. Hay, por lo tanto, una asíntota vertical $x_0 = \pi$.

26) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{x } \geq 2 \end{cases}$$

en el punto $x_0 = 2$.

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en el punto $x_0 = 2$, debemos:

i) Estudiaremos la existencia del límite de $f(x)$ en $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ no es continua en $x = 2$ en concreto presenta una discontinuidad inevitable de salto finito o de 1ª especie.

27) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

en el punto $x_0 = 1$.

Para estudiar la continuidad, debemos hacer lo primero el límite en $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{0^-}\right)}{e^{\frac{1}{0^-}}+1} = \dfrac{\overbrace{\sin(-\infty)}^{\text{oscilante}}}{\cancel{e^{-\infty}}^{0}+1} = \nexists \lim \text{ ya que es oscilante} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{0^+}\right)}{e^{\frac{1}{0^+}}+1} = \dfrac{\sin(+\infty)}{e^{+\infty}+1} = \dfrac{\sin(+\infty)}{+\infty} = 0 \text{ (Teorema del Sandwich)} \end{cases}$$

No existe el límite ya que hay un límite lateral que no existe $\longrightarrow f(x)$ no es continua en $x_0 = 1$.

28) Consideremos las funciones

$$f(x) = e^{-x}x \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

Estudiar la continuidad de la función $f \circ g$

La composición de funciones $f \circ g$, consiste en realizar la función $g(x)$, y donde esta termine comenzaremos $f(x)$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x)$$

$$\frac{1}{x} \longrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$f(x) = e^{-x} \cdot x$$

Por lo tanto, tenemos que: $\boxed{(f \circ g) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}}$.

Por lo tanto podemos asegurar que $(f \circ g)$ es continua en todos los $\mathbb{R}$ salvo en $x = 0$, donde $\nexists (f \circ g)(0)$

29) Dadas las funciones reales $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Calcular las expresiones de $g \circ f$ y $f \circ g$.

Comenzamos calculando $g \circ f$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x)) \longrightarrow \boxed{(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}}$$

$$x \longrightarrow \sin x \longrightarrow \sqrt{\sin x}$$

Calcularemos ahora $f \circ g$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x)) \longrightarrow \boxed{(f \circ g)(x) = \sin(\sqrt{x})}$$

$$x \longrightarrow \sqrt{x} \longrightarrow \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

30) Para calcular el límite

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\left(\frac{0}{0}\right)=(*)$$

$$x^2-x-2=0\longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\begin{cases}2\\-1\end{cases}\longrightarrow (x^2-x-2)=(x-2)(x+1)$$

$$x^3-12x+16=0$$

	1	0	−12	16
2		2	4	−16
	1	2	−8	$\boxed{0}$
2		2	8	
	1	4	$\boxed{0}$	

$$(x^3-12x+16)=(x-2)^2(x+4)$$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{[(x-2)(x+1)^{20}]}{[(x-2)^2(x+4)]^{10}}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)^{20}}\cdot(x+1)^{20}}{\cancel{(x-2)^{20}}\cdot(x+4)^{10}}=\frac{3^{20}}{6^{10}}=\frac{3^{20}}{2^{10}\cdot 3^{10}}=\boxed{\frac{3^{10}}{2^{10}}}$$

31) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{(x-x_0)}(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$$

32) Calcula la correspondencia inversa de las funciones:

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

La función inversa es aquella que verifica que si $f(x)\longrightarrow x=f^{-1}(y)$

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\longrightarrow\frac{x-1}{x+2}=y^2\longrightarrow (x-1)=y^2(x+2)$$
$$x-1=xy^2+2y^2\longrightarrow x-xy^2=1+2y^2\longrightarrow x(1-y^2)=1+2y^2$$

$$x=\frac{1+2y^2}{1-y^2}\longrightarrow\boxed{x\cdot f^{-1}(y)=\frac{1+2y^2}{1-y^2}}$$

33) Calcula la correspondencia inversa de las funciones:

$$y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$$

La función invertible que verifica que si $y=f(x)\longrightarrow x=f^{-1}(y)$

$$y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\longrightarrow(2-\sqrt{x})y=2+\sqrt{x}\longrightarrow 2t-t\sqrt{x}=2+\sqrt{x}\longrightarrow 2y-2=2\sqrt{x}+\sqrt{x}$$

$$2y-2=(y+1)\sqrt{x}\longrightarrow\sqrt{x}=\frac{2y-2}{y+1}\longrightarrow x=\left(\frac{2y-2}{y+1}\right)^2\longrightarrow\boxed{x=f^{-1}(y)=\left(\frac{2y-2}{y+1}\right)^2}$$

34) Calcula el dominio de las siguiente funciones:

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

Como $f(x)$ está definida mediante un cociente, entonces tenemos que su denominador no puede ser cero

$$x+1=0 \longrightarrow x=-1$$
$$\boxed{\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}}$$

35) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$g(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$

Como tenemos un cociente, el denominador no puede ser cero.

$$x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow x=\pm 2$$
$$\boxed{\text{Dom}(g(x))=\mathbb{R}-\{-2,\,2\}}$$

36) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$l(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

- Lo primero que tenemos es un cociente, el cual no puede tener el denominador igual a cero

$$x+2=0 \longrightarrow \boxed{x=-2} \text{ No está en el dominio}$$

- Como tenemos una raíz cuadrada, entonces lo de dentro no puede ser negativo:

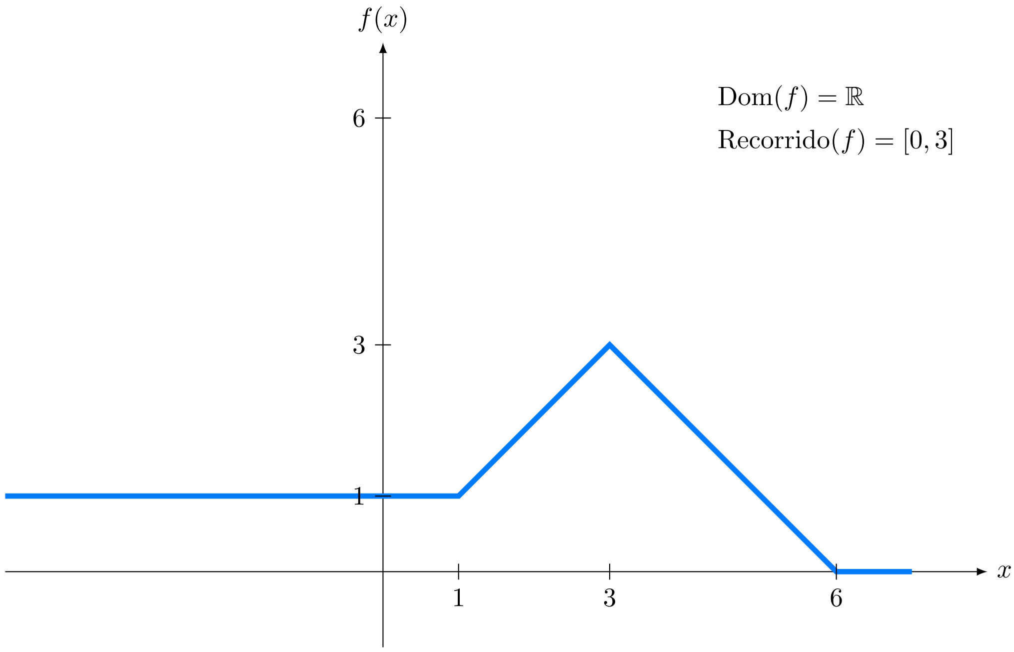
$\dfrac{x-1}{x+2}\geq 0$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

$$\boxed{\text{Dom}(f)=(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)}$$

37) Representa la función

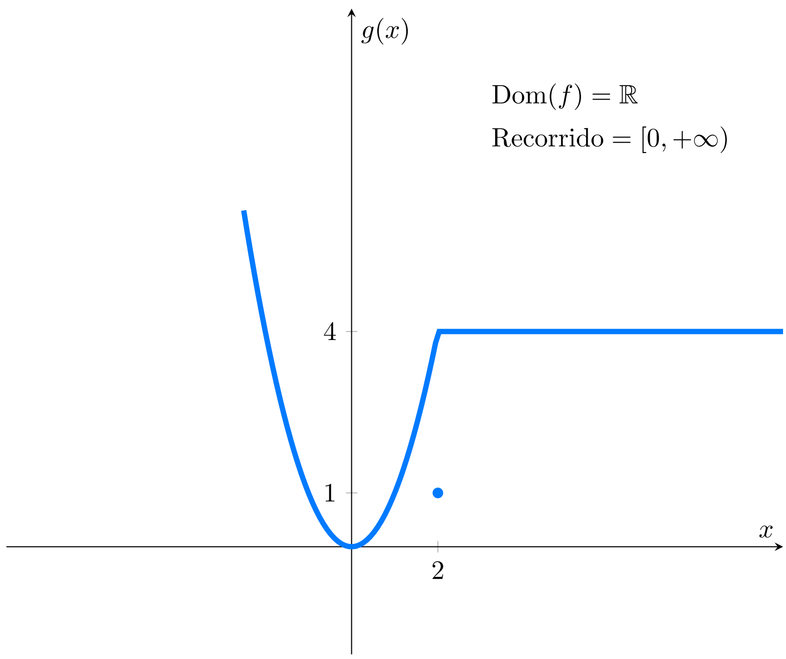
$$y=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leq 1 \\ x & \text{si } 1<x\leq 3 \\ -x+6 & \text{si } 3<x\leq 6 \\ 0 & \text{si } 6<x \end{cases}$$



38) Representa la función

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Escribe su dominio y su recorrido



39) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1}$$

40) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\cancel{(x-1)}\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{2\cdot\frac{2}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$x^2-1=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=\pm 1 \longrightarrow (x^2-1)=(x-1)(x+1)$$

$$2x^2-x-1=0 \longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}\begin{cases}1\\ -\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad 2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

41) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}{2-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

42) Calcula los siguientes límites:

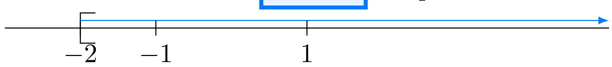
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-4x^2+x-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancelto{+\infty}{5x}-4+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}{2-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}=+\infty$$

43) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ y $g(x)=\sqrt{x+2}$ escribe los criterios y dominios de las funciones $f\cdot g$ y $f:g$.

$$f\cdot g=f(x)\cdot g(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}\longrightarrow (f\cdot g)(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$$

- Por la raíz cuadrada tenemos que $x+2\geq 0\longrightarrow \boxed{x\geq -2}$
- Por el cociente, su denominador debe ser distinto de cero:

$$x^2-1=0\longrightarrow x^2=1\longrightarrow \boxed{x=\pm 1}\ \text{No pertenece al dominio.}$$

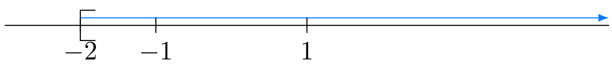


$$\boxed{\mathrm{Dom}(f\cdot g)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}\longrightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}}$$

- Por la raíz tenemos que $x+2\geq 0\longrightarrow \boxed{x\geq -2}$
- Por el cociente:

$$x^2-1=0\longrightarrow x^2=1\longrightarrow \boxed{x=\pm 1}\ \text{No puede ser}$$
$$x+2=0\longrightarrow x=-2\longrightarrow \text{No puede ser}$$



$$\boxed{\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)}$$

44) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos 3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}}=(*)$$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{Equivalencias}\\ \cos x\sim_0 1-\dfrac{x^2}{2}\\ \cos(3x)\sim_0 1-\dfrac{(3x)^2}{2}\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\frac{9x^2}{2}-\cancel{1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{2}x^2}{x^2}=\boxed{-\frac{9}{2}}$$

Nota: Siempre que tengamos una indeterminación de la forma 1^∞, debemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\,(f(x)-1)}$$

45) Analiza la continuidad de las siguientes funciones

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<-2 \\ x+1 & -2\leq x<2 \\ 2x-1 & x\geq 2 \end{cases}$$

$\forall x<-2 \longrightarrow f(x)$ es continua
$\forall x\in(-2,2) \longrightarrow f(x)$ es continua
$\forall x\geq 2 \longrightarrow f(x)$ es continua
Veamos ahora si es continua en los puntos de cambio de trozo:

$\underline{x=-2:}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-}(x^2-4)=0 \\ \lim\limits_{x\to -2^+}(x+1)=-1 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to -2} f(x) \longrightarrow$$ $f(x)$ No es continua en $x=-2$, en concreto presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

$\underline{x=2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}2x-1=3 \\ f(2)=3 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x=2$$

$\boxed{f(x) \text{ es continua } \forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}}$

46) Analiza la continuidad de las siguientes funciones

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0 \\ x+1 & 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{1}{x^2-9} & x>3 \end{cases}$$

$\forall x<0 \longrightarrow p(x)$ es continua.
$\forall x\in(0,3) \longrightarrow p(x)$ es continua.
$\forall x>3 \longrightarrow p(x)$ es continua.
Nos falta comprobar si $p(x)$ es continua en $x=0$ y $x=3$.

$\boxed{x=0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} p(x) \longrightarrow$$ $p(x)$ no es continua en $x=0$. En concreto tenemos diremos que presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito. Habrá una asíntota vertical en $x=0$

$\boxed{x=3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 3} p(x) \longrightarrow$$ $p(x)$ no es continua en $x=3$. En concreto diremos que presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito. Habrá una asíntota vertical en $x=3$.

47) Representa la función $y = x^2 + 4x + 4$ e indica cuál es su recorrido.

> Nota: Para representar gráficamente una paábola $y = ax^2 + bx + c$, debemos siempre tener en cuenta lo siguiente:
>
> i) Si $a > 0$ tiene ramas hacia arriba $\bigcup$. Si $a < 0$ tiene ramas hacia abajo $\bigcap$.
>
> ii) Debemos obtener los puntos de corte con el eje $x \longrightarrow ax^2 + bx + c = 0$
>
> iii) Debemos obtener el vértices:
>
> $$x_V = \frac{-b}{2a}$$

- Como el coeficiente líder es positivo: $\bigcup$
- Puntos de corte con el eje OX:

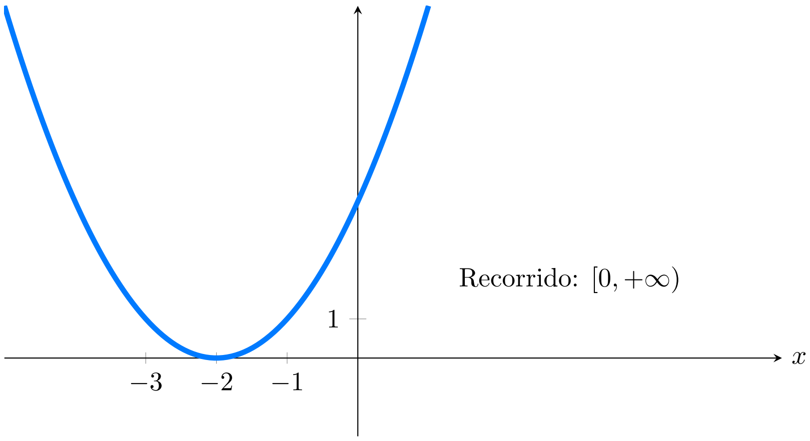
$$x^2 + 4x + 4 \longrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm 0}{2} = -2 \text{ (doble)} \longrightarrow P(-2, 0)$$

- El vértice: $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2} = -2 \longrightarrow \underset{y(-2)=0}{V(-2,0)}$

Cuando no tenemos puntos de corte con el eje OC o coincide con el vértice, entonces tomamos la imagen de dos puntos que estén a ambos lados del vértice y a la misma distancia:

$$x = -3 \longrightarrow y(-3) = 9 - 12 + 4 = 1$$

$$x = -1 \longrightarrow y(-1) = 1 - 4 + 4 = 1$$



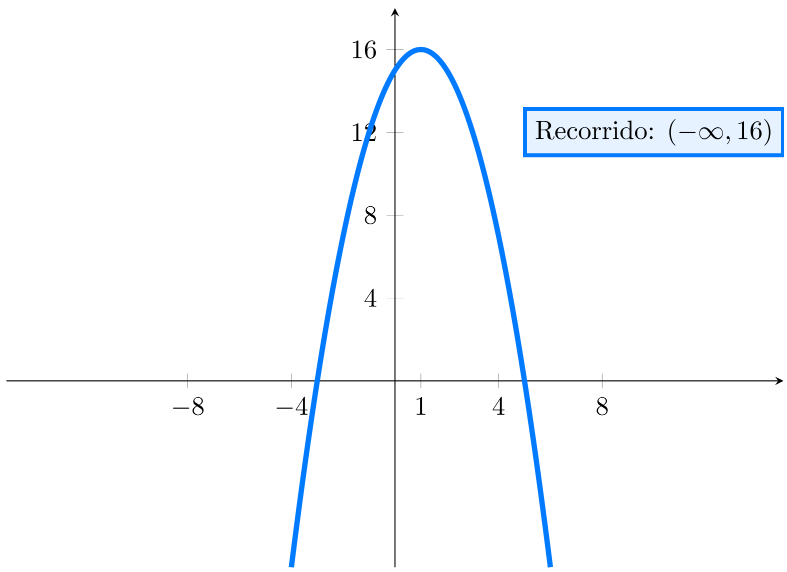
Recorrido: $[0, +\infty)$

48) Representa la función $y = -x^2 + 2x + 15$ e indica su recorrido.

- Como el coeficiente líder es negativo (-1) entonces la parabola es $\bigcap$.
- Puntos de corte con el eje OX:

$$-x^2 + 2x + 15 = 0 \longrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{-2} = \frac{-2 \pm 8}{-2} \begin{cases} -3 & P(-3, 0) \\ 5 & P(5, 0) \end{cases}$$

- Vértice: $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \longrightarrow \begin{array}{l} x_V = 1 \\ y(1) = -1 + 2 + 15 = 16 \end{array} \quad V = (1, 16)$



49) Dadas las funciones $f(x) = x + 3$, $g(x) = x + 1$, calcula las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

Realizar una composición de funciones consiste en realizar una función, y justo donde termina esta empezaría la otra, tomando las imágenes de lo primero como los elementos de la segunda.

$\boxed{g \circ f}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & g\left(f(x)\right) \\ x \arrow[r] & x+3 \arrow[r] & (x+3)+1 \end{tikzcd}$$

$x + 1$

$$\boxed{(g \circ f)(x) = x + 4}$$

Es Casualidad que salgan iguales. No tiene por qué.

$\boxed{f \circ g}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & f\left(g(x)\right) \\ x \arrow[r] & x+1 \arrow[r] & (x+1)+3 \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(f \circ g)(x) = x + 4}$$

50) Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$. Con las funciones del ejercicio anterior, calcula $g \circ f$ y $f \circ g$.

$\boxed{g \circ f}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & f\left(g(x)\right) \\ x \arrow[r] & \dfrac{1}{x^2-1} \arrow[r] & \sqrt{\dfrac{1}{x^2-1} + 2} = \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(g \circ f)\,(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}}}$$

$\boxed{f \circ g}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & f\left(g(x)\right) \\ x \arrow[r] & \sqrt{x+2} \arrow[r] & \dfrac{1}{(\sqrt{x+2})^2 - 1} = \dfrac{1}{x+1} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(f \circ g)\,(x) = \frac{1}{x+1}}$$

51) Haz lo mismo con las funciones $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, calcula las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

$\boxed{g \circ f}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow f\left(g(x)\right)$$

$$x \longrightarrow \sqrt{x+3} \longrightarrow \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$\boxed{(g \circ f)(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+2}}$$

$\boxed{f \circ g}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow f\left(g(x)\right)$$

$$x \longrightarrow \frac{x+1}{x+2} \longrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x+2}+3} = \sqrt{\frac{4x+7}{x+2}}$$

$$\boxed{(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{4x+7}{x+2}}}$$

52) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+1}}$$

- Lo primero que tenemos es un cociente, por lo tanto, el denominador no puede ser cero.

$$x^2+1 \neq 0$$

- Como tenemos una raíz cuadrada, entonces lo de dentro no puede ser negativo:

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0$$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
x^2-4	$+ + + + + +$		$- - - - - - - - - - - - -$		$+ + + + + +$
	$+$		$-$		$+$
x^2+1	$+ + + + +$		$+ + + + + + + + + +$		$+ + + + +$

$$\boxed{\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)}$$

53) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-2)}}$$

- Para empezar tenemos un cociente, y debe verificar que su denominador sea distinto de cero:

  $x+2=0 \longrightarrow \boxed{x=-2}$ No pertenece al $\text{Dom}(f)$

  $x-2=0 \longrightarrow \boxed{x=2}$ No pertenece al $\text{Dom}(f)$

- Como tenemos una raíz cuadrada lo de dentro no puede ser negativo:

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-\infty,-2] \cup [1,2] \cup [3,+\infty)}$$

54) Calcular

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = (0^0) = \lim_{x\to 0} e^{\log x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x\cdot \log x} = (*) = e^0 = \boxed{1}$$

$$(*) = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \log x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Equivalencias}\\ \sin x \rightsquigarrow_0 x\end{array}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Nota: Siempre que tengamos indeterminaciones de la forma 0^0 o ∞^0 lo que haremos será aplicar e elevando al logaritmo:
$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = (0^0 \text{ o } \infty^0) = \lim_{x\to a} e^{\log(f(x))^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\log(f(x))}$

Nota: Siempre que tengamos un límite de la forma $0\cdot\infty$ lo que haremos será bajar dividiendo un de las dos funciones para que así nos quede un límite de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y podamos aplicarle la regla de L'Hôpital que dice:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

55) Calcular

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x} = (\infty^0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\log(\tan x)^{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} = (*) = e^0 = \boxed{1}$$

$$(*) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\cdot\log(\tan x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\log(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{Regla de}\\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}}{\frac{\sin x}{\cancel{\cos^2 x}}} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\tan x\cdot\sin x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

56) Calcular

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x\sin(x-1)(1-\cos(x-1))}{(x-1)^3\ln(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x\sin(x-1)(1-\cos(x-1))}{(x-1)^3\ln(x-1)} = \left(\frac{0}{0\cdot\infty}\right) = (*)$$

Podemos aplicar equivalencias:

$$\sin x \rightsquigarrow_0 x \longrightarrow \sin(x-1) \rightsquigarrow_0 (x-1)$$

$$\cos x \rightsquigarrow_0 1-\frac{x^2}{2} \longrightarrow 1-\cos x \rightsquigarrow_0 \frac{x^2}{2} \longrightarrow 1-\cos(x-1) \rightsquigarrow_0 \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$(*) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot \cancel{(x-1)}\cdot \cancel{\frac{(x-1)^2}{2}}}{\cancel{(x-1)^3}\cdot \ln(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{2\ln(x-1)} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0}$$

Lista de derivadas inmediatas

1. $f(x)=x^n \longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$
2. $f(x)=\log x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$
3. $f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x$
4. $f(x)=a^x \longrightarrow f'(x)=a^x\cdot \log a$
5. $f(x)=\sin x \longrightarrow f'(x)=\cos x$
6. $f(x)=\cos x \longrightarrow f'(x)=-\sin x$

   $\mathrm{Sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

   $\mathrm{Ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
7. $f(x)=\tan(x) \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$
8. $f(x)=\coth x \longrightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sin x}$
9. $f(x)=\arctan x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
10. $f(x)=\arcsin x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $f(x)=\arccos x \longrightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $f(x)=k \longrightarrow f'(x)=0$
13. $f(x)=\mathrm{Sh}x \longrightarrow f'(x)=\mathrm{Ch}x$
14. $f(x)=\mathrm{Ch}x \longrightarrow f'(x)=\mathrm{Sh}x$
15. $f(x)=\tanh x \longrightarrow f'(x)=1-\tanh^2 x$

Reglas básicas de derivación:

1. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
2. $(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x)$
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
5. Regla de la cadena:
   $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
6. Derivada de la inversa:
   $\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{(f'(x))}$

57) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4+3x^2 \longrightarrow f'(x)=4x^2+6x$

b) $f(x)=x\sin x$

$$f(x)=\underbrace{x}\cdot\underbrace{\sin x}$$

$$f'(x)=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x \longrightarrow \boxed{f'(x)=\sin x+x\cos x}$$

c) $f(x)=\frac{x}{2^x}=x\cdot 2^{-x}$

$$f'(x)=1\cdot 2^{-x}+x\cdot 2^{-x}\cdot\log 2\cdot(-1)=2^{-x}\left[1-x\log 2\right] \longrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{1-x\log 2}{2^x}}$$

58) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x}=(x^2+3x)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+3x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+3)=\frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x)^2}} \longrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x)^2}}}$$

b) $f(x)=\sqrt{\cos x}=(\cos x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,(\cos x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}$$

c) $f(x) = \sin(x^3 + 3)$

$$f'(x) = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x \longrightarrow \boxed{f'(x) = 2x\cos(x^2 + 3)}$$