Problemas de la Unidad 1

Conceptos Básicos de Señales y Sistemas

1. Exprese cada uno de los siguientes números complejos en su parte real e imaginaria $(a + jb)$:

$$\frac{1}{2}e^{j\pi}, \frac{1}{2}e^{-j\pi}, e^{j\frac{\pi}{2}}, e^{-j\frac{\pi}{2}}, e^{j\frac{5\pi}{2}}, \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{j\frac{9\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

2. Exprese cada uno de los siguientes números complejos en su módulo y fase ($|z|e^{j\varphi(z)}$ con $\varphi(z) \in [-\pi, \pi]$):

$$5, -2, -3j, -j\frac{\sqrt{3}}{2}, 1+j, (1-j)^2, j(1-j), \frac{1+j}{1-j}, \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}}$$

3. Calcule los valores de potencia media y de energía de las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$ b) $x(t) = e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}$ c) $x(t) = \cos(t)$
d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ e) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{8}\right)}$ f) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

4. Considere una señal $x[n]$ en la que $x[n] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de n en los que se garantiza que la señal es cero.

a) $x[n-3]$ b) $x[n+4]$ c) $x[-n]$ d) $x[-n+2]$ e) $x[-n-2]$

5. Considere una señal $x(t)$ en la que $x(t) = 0$ para $t < 3$. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de t en los que se garantiza que la señal es cero.
a) $x(1-t)$ b) $x(1-t) + x(2-t)$ c) $x(1-t)x(2-t)$
d) $x(3t)$ e) $x\left(\frac{t}{3}\right)$

6. Determine si cada una de las siguientes señales es periódica:

a) $x(t) = 2e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}u(t)$ b) $x[n] = u[n] + u[-n]$
c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k])$

7. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de la variable independiente en los que se garantice que la parte par de la señal es cero.

a) $x[n] = u[n] - u[n-4]$ b) $x(t) = \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$

c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$ d) $x(t) = e^{-5t}u(t+2)$

8. Exprese la parte real de cada una de las siguientes señales de la forma $Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$, donde A, a, ω y φ son números reales con $A \geq 0$ y $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

   a) $x(t) = -2$ b) $x(t) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cos(3t + 2\pi)$
   c) $x(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(3t + \pi)$ d) $x(t) = je^{(-2+j100)t}$

9. Determine si cada una de las siguientes señales es periódica. En caso afirmativo especifique su periodo fundamental.

   a) $x(t) = je^{j10t}$ b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$ c) $x(t) = e^{j7\pi n}$
   d) $x[n] = 3e^{j3\pi\frac{n+\frac{1}{2}}{5}}$ e) $x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

10. Determine el periodo fundamental de la señal $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \mathrm{sen}(4t - 1)$.

11. Determine el periodo fundamental de la señal $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi n}{7}} - e^{j\frac{2\pi n}{5}}$.

12. Considere la señal en tiempo discreto $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty}\delta[n-1-k]$. Determine los valores de los números enteros M y n_0 que permiten que $x[n]$ pueda expresarse como $x[n] = u[Mn + n_0]$.

13. Considere la señal en tiempo continuo $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$. Calcule la energía de la señal $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

14. La figura 1 muestra la señal continua $x(t)$. Represente cada una de las siguientes señales:

   a) $x(t-1)$ b) $x(2-t)$ c) $x(2t+1)$
   d) $x\left(4 - \frac{t}{2}\right)$ e) $[x(t) + x(-t)]u(t)$ f) $x(t)\left[\delta\left(t + \frac{3}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{3}{2}\right)\right]$

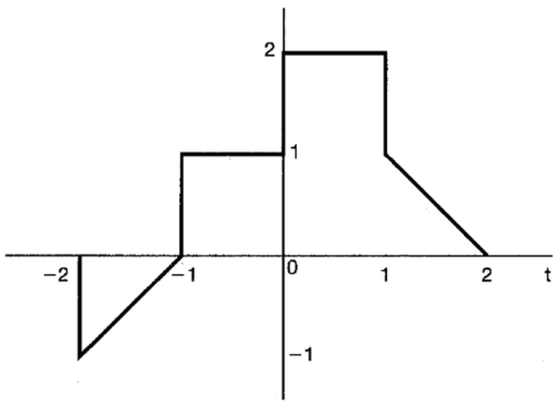

Figura 1

15. La figura 2 muestra la señal discreta $x[n]$. Represente cada una de las siguientes señales:

a) $x[n-4]$ b) $x[3-n]$ c) $x[3n]$
d) $x[3n+1]$ e) $x[n]u[3-n]$ f) $x[n-2]\delta[n-2]$
g) $\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}(-1)^n x[n]$ h) $x[(n-1)^2]$

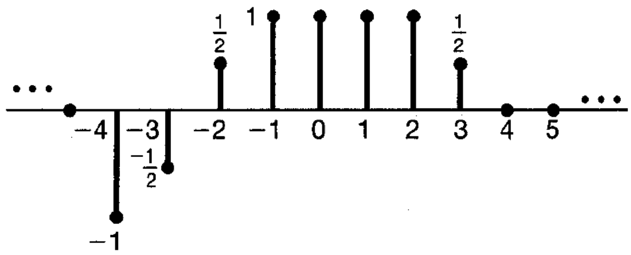

Figura 2

16. Determine si cada una de las siguientes señales continuas es periódica. En caso afirmativo obtenga su periodo fundamental.

a) $x(t)=3\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)$ b) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$
c) $x(t)=\cos^2\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)$ d) $x(t)=\mathrm{Par}\{\cos(4\pi t)\,u(t)\}$
e) $x(t)=\mathrm{Par}\{\mathrm{sen}(4\pi t)\,u(t)\}$ f) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}u(2t-n)$

17. Determine si cada una de las siguientes señales discretas es periódica. En caso afirmativo obtenga su periodo fundamental.

a) $x[n]=\mathrm{sen}\left(\frac{6\pi}{7}n+1\right)$ b) $x[n]=\cos\left(\frac{n}{8}-\pi\right)$
c) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{8}n^2\right)$ d) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$
e) $x[n]=2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{8}n\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right)$

18. Represente el módulo, así como la parte real e imaginaria de la señal

$$x(t)=te^{j3\pi t}\prod\left(\frac{2t-4}{8}\right)-2\delta(2t+3)$$

19. Calcule la energía y la potencia de la señal mostrada en la figura 3. Indique si se encuentra definida en energía o en potencia.

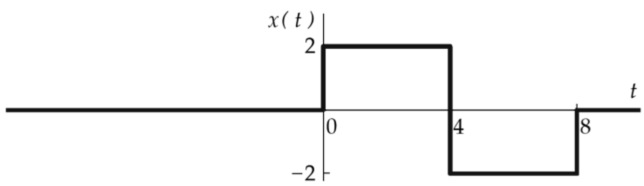

Figura 3

20. Represente detalladamente las señales $x_1(t)$ y $x(t)$, definidas como

$$x_1(t) = 2\prod\left(\frac{t}{4}\right) + (6-2t)\left[\prod\left(\frac{t-2{,}5}{1}\right) - \prod\left(\frac{t-3{,}5}{1}\right)\right]$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t-6n)$$

21. Represente detalladamente las señales $x(t)$ y $h(t)$ dadas por

$$x(t) = t\prod\left(\frac{2t}{4}\right) + t[u(t-1) - u(3t-9)]$$

$$h(t) = 2\prod\left(\frac{t-1}{4}\right) + \delta(t+4)$$

22. Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 21, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

23. Represente detalladamente las señales

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{4}n}u[n]$$

$$h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\prod\left(\frac{n-2}{11}\right)$$

24. Calcule la energía y la potencia de la señal $x[n]$ del ejercicio 23, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

25. Indique si la señal $x[n]$ del ejercicio 23 y la señal $z[n] = x[n] + x^*[-n]$ son periódicas y, en su caso, obtenga el valor de los correspondientes periodos.

26. Considere la señal continua no periódica mostrada en la figura 4 y represente sus partes par e impar.

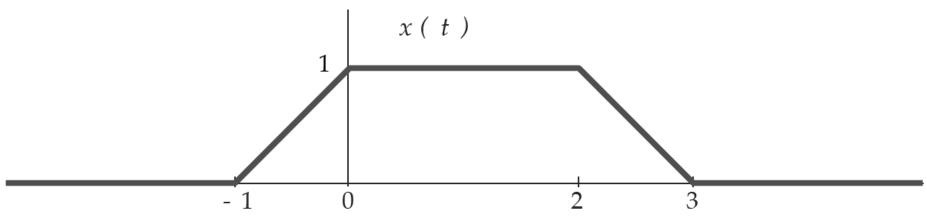

Figura 4

27. Calcule la energía y la potencia de la señal de la figura 4, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

28. Represente detalladamente las siguientes señales:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} (u[n+3] - u[n+4]u[-n-5])$$
$$h[n] = 3^n u[-n-1] + 3^{-n-1}u[n]$$

29. Calcule la energía y la potencia de la señal $x[n]$ del ejercicio 28, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

30. Calcule la energía y la potencia de la señal de la figura 5, indicando si está definida en energía o en potencia.

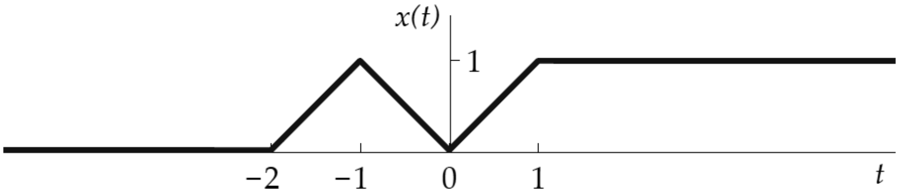

Figura 5

31. Represente detalladamente las señales

$$x(t) = -\left(\frac{t}{2}+1\right)\prod\left(\frac{t}{4}\right)$$
$$h(t) = 1 - u(t-1)u(t-3) - u(1-t)$$

32. Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 31, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

33. Represente detalladamente la señal

$$x(t) = \frac{1 + \mathrm{sign}\big(\mathrm{sen}(t)\big)}{2}\mathrm{sen}(t)$$

34. Represente detalladamente las señales

$$x(t) = e^{-(3+j3)t}u(t+3)$$
$$h(t) = \prod\left(\frac{t-1{,}5}{5}\right) - 5\delta(t-5)$$

35. Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$ del ejercicio 34, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

36. Calcule la energía y la potencia de la señal $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{b}\right)$$

37. Considere un sistema discreto cuya señal de entrada es $x[n]$ y la señal de salida es $y[n]$. La relación entre la entrada y la salida viene dada por

$$y[n] = x[n]x[n-1]$$

a) ¿Tiene memoria el sistema?
b) Determine la señal de salida del sistema cuando la entrada es $A\delta[n]$, siendo A una constante real o compleja.
c) ¿Es invertible el sistema?

38. Considere un sistema continuo cuya señal de entrada es $x(t)$ y de salida $y(t)$ relacionadas por

$$y(t) = x\big(\text{sen}(t)\big)$$

a) ¿Es causal el sistema?
b) ¿Es lineal?

39. Para cada una de las siguientes relaciones entrada-salida determine si el sistema correspondiente es lineal, invariante en el tiempo o ambos.

a) $y(t) = t^2 x(t-1)$
b) $y[n] = x^2[n-2]$
c) $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$
d) $y(t) = \text{Impar}\{x(t)\}$

40. Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. En caso afirmativo, construya el sistema inverso y, en caso negativo, encuentre dos señales de entrada al sistema que generen la misma señal de salida.

a) $y(t) = x(t-4)$
b) $y(t) = \cos\big(x(t)\big)$
c) $y[n] = nx[n]$
d) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

41. En este ejercicio se ilustra una de las consecuencias más importantes de las propiedades de linealidad e invarianza temporal. En concreto, cuando se conoce la respuesta de un sistema lineal o un sistema lineal e invariante en el tiempo (linear time-invariant system, LTI) a una respuesta dada o la respuesta a varias entradas, se puede calcular la respuesta del sistema a otras señales de entrada.

a) Considere un sistema LTI cuya respuesta a la señal $x_1(t)$ de la Figura 6(a) es la señal $y_1(t)$ mostrada en la Figura 6(b). Determine y represente la respuesta del sistema a la entrada $x_2(t)$de la Figura 6(c).
b) Determine y represente la respuesta del sistema considerado en el apartado anterior a la señal de entrada $x_3(t)$ mostrada en la Figura 6(d).

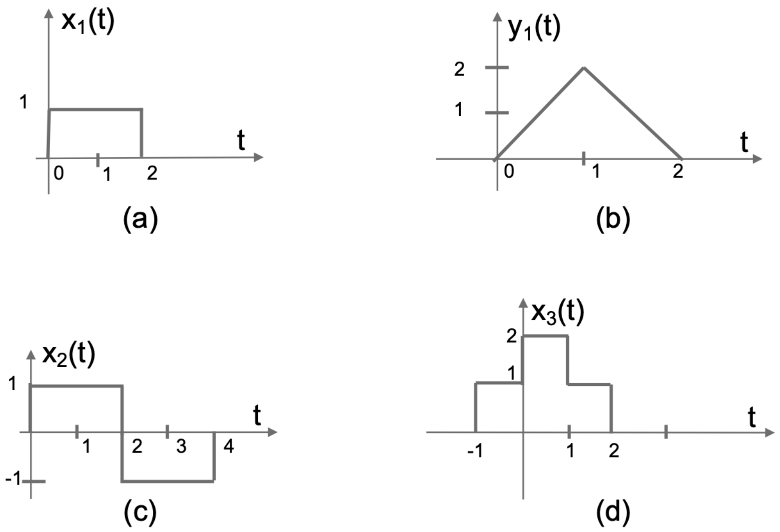

Figura 6

42. La salida de un sistema viene dada por $y[n] = x[2+n]x[2-n]$. Indique razonadamente si el sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, estabilidad, invarianza en el tiempo y linealidad.

43. Considere la señal $x[n] = \wedge\left(\frac{n}{3}\right) + \wedge\left(\frac{n-3}{3}\right)$. Obtenga y represente la partes par e impar de dicha señal. Asimismo, calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

44. Calcule la energía y la potencia de $x[n]$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x[n] = (u[n+6] - u[n-7] + \delta[-n+10])u[-n+10]$$

45. Calcule la energía y la potencia de $x(t)$, indicando si se trata de una señal definida en energía o en potencia.

$$x(t) = (t-2)u(t-1)u(4-t)\prod\left(\frac{t}{10}\right)$$