CÁLCULO I
GRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE DATOS
HOJA 1
CURSO 2023-2024

1. Probar que para cualquier número natural n se cumple que:

1. $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
4. $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6.

2. Usando la fórmula para la suma de los términos de una progresión geométrica deducir que:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} \qquad \text{(identidad ciclotómica).}$$

3. El binomio de Newton. Demostrar por inducción que

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j},$$

donde el número combinatorio $\binom{n}{j}$ viene dado por la fórmula $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$. *Puede ser útil utilizar que* $\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$ *si* $1 \leq j \leq n$.

Deducir que

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$

y

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

4. Media aritmética y media geométrica. Consideramos n números reales positivos ordenados cuyo producto es 1. Esto es:

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \quad \text{con} \quad b_1 \cdot b_2 \cdots b_n = 1.$$

- Demostrar que si no todos los b_i son iguales entonces $b_1 < 1 < b_n$.
- Demostrar por inducción que $b_1 \cdot b_2 \cdots b_n \leq \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}$.
- Demostrar que la media aritmética siempre es mayor o igual que la media geométrica, es decir, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son n números reales positivos cualesquiera se cumple:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

5. Si x es un número real cualquiera, estudiar si cada una de las desigualdades

$$x^2 < x \quad \text{y} \quad x^3 < x^2$$

es consecuencia de la otra.

6. Sea $0 < a < 1$, demostrar que la sucesión $z_n = a(a^{2n} + (-1)^n)$ no tiene límite.

7. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales convergente. Supongamos que los términos de la sucesión son alternativamente positivos y negativos. Calcular su límite.

8. Sea $(t_n)_n$ una sucesión que verifica $0 \leq t_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sean $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ dos sucesiones convergentes al número z. Probar que la sucesión

$$(t_n x_n + (1 - t_n) y_n)_n,$$

también converge al número z.

9. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Si A está acotado superiormente, describir una sucesión de elementos de A convergente hacia el supremo de A.

10. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales positivos y sea $\beta = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

1. Si $\beta < 1$ entonces $(x_n)_n$ converge a cero.
2. Si $\beta > 1$ entonces $(x_n)_n$ diverge a $+\infty$.
3. Mostrar mediante dos ejemplos que si $\beta = 1$ no podemos asegurar nada.
4. Calcular el límite de las sucesiones $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$ e $y_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!}$.

11. Probar que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ dada por:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

es creciente y está acotada superiormente.

12. Sea $x_1 = 1$. Definimos por recurrencia:

1. $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4}$,
2. $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+1}$,
3. $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} x_n$,
4. $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{2}$,

Probar que, cada una de ellas, es monótona y acotada. Hallar sus límites.

13. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números que cumple

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determinar para qué valores de $x_1 \geq 0$ la sucesión es convergente y calcular su límite en cada caso.

14. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales que cumple

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

y $x_1 > 0$. Comprobar que $(x_n)_{n\geq 1}$ es decreciente (a partir del segundo término en algunos casos), que está acotada inferiormente por $\sqrt{2}$ y que tiene límite $\ell = \sqrt{2}$.

15. Sea $(x_n)_n$ la sucesión definida por la relación de recurrencia: $7x_{n+1} = x_n^3 + 6 \quad n = 1, 2, \ldots$. Demostrar que si $x_1 = \dfrac{1}{2}$ entonces la sucesión es convergente y calcular su límite. ¿Qué ocurre si $x_1 = \dfrac{3}{2}$?

16. Se define por recurrencia $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 3}$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Demostrar que la sucesión $(a_n)_n$ converge.

ii) Hallar el límite de $(a_n)_n$.

iii) Sea el subconjunto de números reales dado por $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Determinar justificadamente si existe supremo, ínfimo, máximo y mínimo de A y dar, en su caso, los valores de los mismos.

17. Se define por recurrencia $a_1 = 9$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 2$. Decidir justificadamente si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente. En caso afirmativo, calcular su límite.

18. Sea $(x_n)_n$ la sucesión definida por la relación de recurrencia: $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n} \quad n = 1, 2, \ldots$. ¿Es convergente la sucesión si $x_1 = x > 0$?

19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$. Se definen las sucesiones $(a_n)_n, (b_n)_n \subset \mathbb{R}$ por recurrencia como: $a_1 = a$, $b_1 = b$, y

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \quad \text{y} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

i) Probar que las sucesiones son convergentes.

ii) Probar que convergen al mismo número.

20. Sea $(x_n)_n$ una sucesión verificando: $|x_n| \leq 2$ y $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \dfrac{1}{8}\left|x_{n+1}^2 - x_n^2\right| \ \forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la sucesión es convergente.

21. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales definida por:

$$x_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}.$$

1) Demostrar que para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\sqrt{n} \leq x_n \leq 2\sqrt{n}.$$

2) Probar que la sucesión

$$\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}.$$

converge hacia 1.

3) Determinar el límite de $(x_n - \sqrt{n})_{n\geq 1}$.

22. Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, demostrar que entonces se cumple:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_{n+1} - x_n| < \epsilon \ \ \forall n \geq n_0.$$

Comprobar con la sucesión $(\sqrt{n})_n$ que esta condición no es suficiente para que una sucesión sea de Cauchy.

23. *Sucesiones Contractivas.* Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales para la que existe un número real $K \in [0,1)$ y tal que, para cada número natural $n \geq 2$, se tiene que:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq K|x_n - x_{n-1}|.$$

Demostrar que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

24.

1. Calcular el límite de $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. Probar que toda sucesión $(x_n)_n$ que cumple: $|x_{n+1} - x_n| < \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es de Cauchy.
3. Demostrar que $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k(k+1)}$ es convergente.

25. Si la sucesión $(n_k)_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $n_k \geq k$.

26. En las siguientes afirmaciones, decir cuales son verdaderas y cuales son falsas. Probar las que sean verdaderas y proporcionar un contraejemplo para las que sean falsas.

a) Toda sucesión acotada que tiene una subsucesión convergente, es convergente.
b) Toda sucesión monótona creciente que tiene una subsucesión convergente, es convergente.

27. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales. Probar que se verifica el siguiente resultado:

$(x_n)_n$ es convergente si y sólo si $(x_{2n})_n$ y $(x_{2n-1})_n$ son convergentes y con el mismo límite.

28. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales que verifica que las subsucesiones $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$ y $(x_{3n})_n$ son convergentes. Demostrar que la sucesión es convergente.

29.

1. Demostrar que si la sucesión $(x_n)_n$ converge a cero entonces: $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$ converge al número e.
2. Deducir que si $(x_n)_n$ es una sucesión convergente a cero, con $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $(y_n)_n$ una sucesión divergente verificando que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lambda$ entonces
$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{y_n} = e^{\lambda}.$$
3. Sean $(x_n)_n$ una sucesión convergente con límite 1, verificando que para algún natural n_0 se cumple que $x_n \neq 1$ $\forall n \geq n_0$ e $(y_n)_n$ una sucesión divergente. Entonces
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \lim_{n\to\infty} e^{y_n(x_n-1)}.$$
4. Comprobar que para toda sucesión $(x_n)_n$ convergente a cero se verifica
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1.$$

30. Demostrar que si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = l$$

31. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = l.$$

32. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos positivos y supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

33. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6-1}}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3+6+\ldots+3n}{n^2}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-1} - (2n-1))$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[n]{n}-1}{\ln n}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}\right)$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{2n^2+4}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{2n+3}\right)^{n+\sqrt{2}}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 2^1 + 2^2 2^2 + \ldots + n^2 2^n}{2^n n^2}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1!+2!+\ldots n!}{n!}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\sqrt{1}+2\sqrt{2}+\ldots+n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{2n^2+1}\right) + \left(\dfrac{n}{2n^2+2}\right) + \ldots + \left(\dfrac{n}{2n^2+n}\right)$
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}\right) + \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n^4+2}}\right) + \ldots + \left(\dfrac{n+n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$

17. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{[x] + [2x] + \ldots + [nx]}{n^2}$

34. (*¿Difícil?*) Sobre la constante de Euler

1. Deduzca las siguientes desigualdades $\frac{1}{n+1} < \log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$
2. Pruebe que la sucesión
$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$
es convergente. A su límite se le denomina la constante de Euler.
3. Calcule $\lim_n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

35. (*¿Difícil?*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que satisface que $\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.