Cálculo II

Tema 3: Cálculo diferencial de funciones de varias variables I

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Decir si es o no diferenciable en el punto $(0,0)$ la función real

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para comprobar si $f(x,y)$ es diferenciable o no en el punto $(0,0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de no serlo directamente diríamos que es diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}=\lim_{r\to0}\frac{2\cdot r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to0}\frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}}=\lim_{r\to0}\frac{2\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}}=$$
$$2\cos\theta\sin\theta\longrightarrow\nexists\lim$$

Como no existe el límite, entonces $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$ y por lo tanto, podemos asegurar que tanto es diferenciable en dicho punto.

2) Comprobar que la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es continua en $(0,0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.

Para comprobar si $f(x,y)$ es diferenciable o no en el punto $(0,0)$, lo primero que debemos hacer es comprobar si la función es continua en dicho punto, ya que en caso de serlo directamente diríamos que no diferenciable.

- Estudio de la continuidad en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\sin\frac{1}{x}=\{\text{Teorema del Sándwich}\}=0$$

  Como el límite coincide con $f(0,0)=0$, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

- Comprobar que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$:

  La función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ si existe un plano tangente que se aproxime localmente a $f(x,y)$. Esto ocurre si:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\sin\frac{1}{x} - 0}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

El término $\sin\frac{1}{x}$ oscila entre -1 y 1 de manera no convergente cuando $h \to 0$, por lo que este límite no existe. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

3) Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular su derivada direccional de cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ en el punto $(0,0)$.

- Estudio de la continuidad en el punto $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta r^2\sin^2\theta}{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0$$

Como el límite coincide con $f(0,0) = 0$, la función $f(x,y)$ es continua en dicho punto.

- Comprobar que $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$:

Para verificar la diferenciabilidad en $(0,0)$, usando el criterio de que la función es diferenciable si existe un plano tangente local, lo que requiere que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

Si $f(x,y)$ fuera diferenciable, se debería cumplir:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \left\{ \begin{array}{l} h = r\cos\theta \\ \\ k = r\sin\theta \end{array} \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{r\cos\theta r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{r^3}}$$
$$= \cos\theta\sin^2\theta \longrightarrow \nexists \lim$$

El término $\cos\theta\sin^2\theta$ depende de θ, lo que implica que el límite no existe uniformemente. Por lo tanto, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

- Derivada direccional en $(0,0)$:

La derivada direccional en la dirección $\text{v} = (v_1, v_2)$ está dada por:

$$D_{\text{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2(v_1^2+v_2^2)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3} v_1 v_2^2}{\cancel{t^3}(v_1^2+v_2^2)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$$

La derivada direccional no siempre es cero, ya que depende de los valores de v_1 y v_2.

4) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comprobar que f tiene derivada direccional respecto de cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ en el punto $(0,0)$, pero f no es derivable en dicho punto.

- Derivada direccional en $(0,0)$:

La derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección de un vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ se define como:

$$D_{\mathrm{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2v_1^2+t^4v_2^4}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3} v_1 v_2^2}{\cancel{t}(t^2v_1^2+t^4v_2^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}(v_1 v_2^2)}{\cancel{t^2}(v_1^2+t^2v_2^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_2^2 + \cancelto{0}{t^2 v_2^4}} = \frac{\cancel{v_1} v_2^2}{v_{\cancel{1}}^{\cancel{2}}} = \frac{v_2^2}{v_1}$$

La derivada direccional existe para cualquier vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$ y está dada por

$$D_{\mathrm{v}} f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{v_2^2}{v_1}, & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 \text{ y } v_2 = 0 \end{cases}$$

- Diferenciabilidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$:

La función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ si existe:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Esto requiere calcular las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

Si $f(x,y)$ fuera diferenciable en $(0,0)$, las derivadas direccionales serían consistentes con las derivadas parciales. Sin embargo, observamos que

$$D_{\mathrm{v}} f(0,0) = \frac{v_2^2}{v_1}, \quad \text{si } v_1 \neq 0,$$

y esto depende de la dirección $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$, lo cual indica que $f(x,y)$ no puede aproximarse localmente por una aplicación lineal.

La función no es diferenciable en $(0,0)$ porque las derivadas direccionales no son consistentes con una aproximación lineal.

5) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = x^2 \tan \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

definida para todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y comprobar que

$$xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) = 2f(x,y)$$

Denotamos $u = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$. Entonces:

$$f(x,y) = x^2\tan(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\tan(u) + x^2(\tan^2(u)+1)\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\tan(u) + x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(\tan^2+1)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(\frac{2y(x^{2+y^2-y^2\cdot 2y})}{(x^2+y^2)^2}\right) = x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(\frac{2x^2y+\cancel{2y^3}-\cancel{2y^3}}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) = x\cdot\left[2x\tan(u) + x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\right] + y\cdot\left[x^2(\tan^2(u)+1)\cdot\left(\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\right]$$

$$= 2x^2\tan(u) - \cancel{\frac{2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot(\tan^2(u)+1)} + \cancel{\frac{2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot(\tan^2(u)+1)} = 2x^2\tan(u)$$

Por lo tanto:

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cdot f(x,y)$$

6) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x>0, y>0\}$, y comprobar que

$$xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y) = -\frac{1}{2}f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2} + y\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})\right) + y\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})\right)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}(x+y) - x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \frac{\sqrt{y}}{2}(x+y) - y(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y) - (\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

Por lo tanto:

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\cdot f(x,y)$$

7) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = y \cdot \log \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}} \cdot \frac{3x^2y\cdot(x^2+y^2) - x^3y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\cancel{x^2+y^2}}{x^3y} \cdot \frac{3x^4y + 3x^2y^3 - 2x^4y}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} \cdot y$$

$$= y \cdot \frac{x^4y + 3x^2y^3}{x^3y(x^2+y^2)} = \cancel{y} \cdot \frac{x^4y+3x^2y^3}{x^5\cancel{y} + x^3y^{\cancel{3}}} = \frac{x^4y+3x^2y^3}{x^5+x^3y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot \log \frac{x^3y}{x^2+y^2} + \cancel{y} \cdot \frac{\cancel{x^2+y^2}}{\cancel{x^3y}} \cdot \frac{\cancel{x^3}(x^2+y^2) - \cancel{x^3}y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} = \log\frac{x^3y}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2} = \log\frac{x^3y}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1^3\cdot 1 + 3\cdot 1^2 \cdot 1^3}{1^5 + 1^3\cdot y^2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \log\frac{1^3\cdot 1}{1^2+1^2} + \cancelto{0}{\frac{1^2-1^2}{1^2+1^2}} = \log\frac{1}{2}$$

El diferencial en $(1,1)$ es:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x + \log\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$$

8) Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, y calcular su diferencial en el punto $(2,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{2\cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}} \cdot \left(x - \frac{y}{x^2}\right) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{2\cdot 1 + \frac{2}{1}}} \cdot \left(2 - \frac{2}{1}\right) = 0$$

El diferencial en $(2,1)$ es:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$$

9) Dada la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x,y) = \left(x^4 + y^3, x^2y^2 - 3y^2\right)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(1,1)$. Comprobar que $\vec{f}$ es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$f(x,y) = \left(x^4+y^3, x^2y^2-3y^2\right) = \begin{cases} f_1(x,y) = x^4 + y^3 \\ f_2(x,y) = x^2y^2 - 3y^2 \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 & 3y^2 \\ 2xy^2 & 2x^2y - 6y \end{pmatrix} \longrightarrow J(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, podemos asegurar que es diferenciable.

Su diferencial, al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\mathrm{d}f(P)(h,k) = J(f)(P)(h,k) = \mathrm{d}f(1,1)(h,k) = J(f)(1,1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h+3k \\ 2h-4k \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{d}f(1,1)(h,k) = (4h+3k,\, 2h-4k)$$

10) Dada la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y, x\cos y\sin y)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Comprobar que $\vec{f}$ es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.

$$\vec{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y, x\cos y\sin y) = \begin{cases} f_1(x,y) = x\cos y \\ f_2(x,y) = x\sin y \\ f_3(x,y) = x\cos y\sin y \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \\ \cos y\sin y & x(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \longrightarrow J(f)\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que todas las funciones coordenada son C^1, por lo tanto la función $\vec{f}(x,y)$ es también C^1 y también es diferenciable.

$$\mathrm{d}f(P)(h,k) = J(f)(P)(h,k) = \mathrm{d}f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)(h,k) = J(f)\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (-\pi k,\, h,\, -\pi k) \longrightarrow \mathrm{d}f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)(h,k) = (-\pi k,\, h,\, -\pi k)$$

11) Comprobar que la función $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + yz - z^2,\, xy - xz + 2z^2,\, xyz)$$

es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^3$ y calcularla en el punto $(3,2,1)$.

$$\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + yz - z^2,\, xy - xz + 2z^2,\, xyz) = \begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + yz - z^2 \\ f_2(x,y,z) = xy - xz + 2z^2 \\ f_3(x,y,z) = xyz \end{cases}$$

Como todas las funciones son continuas y con derivadas primeras continuas, entonces podemos asegurar que son diferenciables, por consecuencia, $\vec{f}(x,y,z)$ también es diferenciable.

$$J(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & z & y-2z\\ y-z & x & -x+4z\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}\longrightarrow J(f)(3,2,1)=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

Su diferencial al ser una función vectorial, vendrá dado por:

$$\mathrm{d}f(P)(h,k,j)=J(f)(P)(h,k,j)\longrightarrow \mathrm{d}f(3,2,1)(h,k,j)=J(f)(3,2,1)\begin{pmatrix}h\\ k\\ j\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\\ j\end{pmatrix}=(6h+k,\ h+3k+j,\ 2h+3k+6j)$$

$$\longrightarrow \mathrm{d}f(3,2,1)(h,k,j)=(6h+k,\ h+3k+j,\ 2h+3k+6j)$$

12) Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z)=x^{y+z}$

$$J(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(y+z)x^{y+z-1} & x^{y+z}\cdot\ln(x) & x^{y+z}\cdot\ln(x)\end{pmatrix}$$

b) $f(x,y,z)=x^{y^z}$

$$J(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y^z\cdot x^{y^z-1} & x^{y^z}\cdot\ln(x)\cdot z\cdot y^{z-1} & x^{y^z}\cdot\ln(x)\cdot y^z\cdot\ln(y)\end{pmatrix}$$

c) $f(x,y,z)=\sin(x\sin(y\sin z))$

$$J(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$$
$$=(\cos(x\sin(y\sin z))\cdot(\sin(y\sin z)),\cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\cdot\cos(y\sin z)\cdot\sin z,\cos(x\sin(y\sin z))\cdot x\cdot\cos(y\sin z)\cdot y\cos z)$$

d) $\vec{f}(x,y)=(\sin(xy),\sin(x\sin y),x^4)$

$$J(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(xy)\cdot y & \cos(x,y)\cdot x\\ \cos(x\sin y)\cdot\sin y & \cos(x\sin y)\cdot x\cdot\cos(y)\\ 4x^3 & 0\end{pmatrix}$$

13) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+x^2\sin\frac{1}{x},\ y\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,y) & \text{si } (x,y)=(0,y)\end{cases}$$

Comprobar que f es diferenciable.

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+x^2\sin\frac{1}{x},\ y\right) & \text{si } x\neq 0\\ (0,y) & \text{si } x=0\end{cases}$$

- Caso $x\neq 0$:

La función es C^1 en esta región porque las funciones x^2, $\sin\dfrac{1}{x}$, y y son derivables, y no hay discontinuidades cuando $x \neq 0$. Por lo tanto, f es diferenciable en esta región.

- Caso $x = 0$:

  Cuando $x = 0$, la función se define como
$$f(x,y) = (0, y)$$

  En este caso, debemos comprobar la diferenciabilidad en el punto $(0, y_0)$ para cualquier y_0. Empezamos calculando las derivadas parciales.

  - Primera componente $f_1(x,y)$:
$$f_1(x,y) = \begin{cases} x^2 + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

    Para $x \neq 0$, la derivada parcial respecto a x es:
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x + 2x\sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 2x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

  - Segunda componente $f_2(x,y)$:
$$f_2(x,y) = y$$

    La derivada parcial respecto a y es constante, y vale 1 en todo $\mathbb{R}^2$.

  En el caso $x = 0$, el comportamiento de $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ es consistente con la definición y es continuo. Por lo tanto, todas las derivadas son continuas en $(0, y_0)$.

  Dado que la función $f(x,y)$ es de clase C^1 en $x \neq 0$ y las derivadas parciales son continuas en $x = 0$, podemos concluir que $f(x,y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

14) Sabiendo que $f(x,y) = \sqrt{\log(xy) + \arcsin\dfrac{y}{x}}$, calcular
$$xf(x,y)D_1f(x,y) + yf(x,y)D_2f(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin\dfrac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{x\cancel{y}} \cdot \cancel{y} + \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\log(xy) + \arcsin\dfrac{y}{x}}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{x}y} \cdot \cancel{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} xf(x,y)D_1f(x,y) + yf(x,y)D_2f(x,y) &= x \cdot \cancel{\sqrt{\log(xy) + \arcsin\frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{\log(xy) + \arcsin\frac{y}{x}}}} \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\ &\quad + y \cdot \cancel{\sqrt{\log(xy) + \arcsin\frac{y}{x}}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{\log(xy) + \arcsin\frac{y}{x}}}} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \cancel{\frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{y}{2x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}} = 1 \end{aligned}$$

15) Sabiendo que $f(x,y) = \sin\dfrac{2x+y}{2x-y}$, calcular

$$xD_1f(x,y) + yD_2f(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{2\cdot(2x-y)-(2x+y)\cdot 2}{(2x-y)^2}\right) = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{\cancel{4x}-2y-\cancel{4x}-2y}{(2x-y)^2}\right) = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{-4y}{(2x-y)^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{1\cdot(2x-y)-(2x+y)\cdot(-1)}{(2x-y)^2}\right) = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{2x-\cancel{y}+2x+\cancel{y}}{(2x-y)^2}\right) = \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{4x}{(2x-y)^2}\right)$$
$$xD_1f(x,y)+yD_2f(x,y) = x\cdot\cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{-4y}{(2x-y)^2}\right) + y\cdot\cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\frac{4x}{(2x-y)^2}\right)$$
$$= \cos\frac{2x+y}{2x-y}\cdot\left(\cancel{\frac{-4xy}{(2x-y)^2}+\frac{4xy}{(2x-y)^2}}\right) = 0$$

16) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2+y^2$ en los punto $(0,0)$ y $(1,2)$.

La ecuación del plano tangente, viene dada por:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

- Para el punto $(0,0)$:

$$c = f(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad z - 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \longrightarrow z = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

- Para el punto $(1,2)$

$$c = f(1,2) = 1^2+2^2 = 5 \qquad z-5 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) \longrightarrow z-5 = 2(x-1)+4(y-2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \qquad \longrightarrow z = 2x-2+4y-8+5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4 \qquad \longrightarrow z = 2x+4y-5$$

17) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \log x^2 + \log y^2$ en los puntos $(3,1)$ y (x_0,y_0).

La del plano tangente, viene dada por:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

- Para el punto $(3,1)$:

$$c = f(3,1) = \log(3^2)+\log(1^2) = \log(9\cdot 1) = \log(9) \qquad z - \log(9) = \frac{2}{3}(x-3)+2(y-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{x} = \frac{2}{x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = \frac{2}{3} \qquad z = \frac{2}{3}x - 2 + 2y - 2 + \log(9)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{y} = \frac{2}{y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2 \qquad z = \frac{2}{3}x + 2y - 4 + \log(9)$$

- Para el punto (x_0)

$c = f(x_0, y_0) = \log(x_0^2) + \log(y_0^2) = \log(x_0 \cdot y_0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{x} = \dfrac{2}{x} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{2}{x_0}$ $\qquad z - \log(x_0 \cdot y_0) = \dfrac{2}{x_0}(x - x_0) + \dfrac{2}{y_0}(y - y_0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{y} = \dfrac{2}{y} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{2}{y_0}$

18) Sea A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Supongamos que f es diferenciable en un punto $(a_1, a_2, a_3) \in A$ y que $Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Calcular $D_v f(a_1, a_2, a_3)$ siendo v el vector siguiente:

Sabemos que la derivada linea $Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3)$ es:

$$Df(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Esto implica que el gradiente de f en cualquier punto (a_1, a_2, a_3) es:

$$\nabla f(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$$

La derivada direccional en la dirección del vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se calcula como:

$$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = \nabla f(a_1, a_2, a_3) \cdot \mathrm{v} = (1, 1, 1) \cdot (v_1, v_2, v_3).$$

El producto escalar es:

$$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

a) $v = (1, 2, 3)$

$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = 1 + 2 + 3 = 6$

b) $v = (0, 1, 1)$

$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = 0 + 1 + 1 = 2$

c) $v = (-1, 1, 2)$

$D_{\mathrm{v}} f(a_1, a_2, a_3) = -1 + 1 + 2 = 2$

19) Sea A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Supongamos que $\vec{f}$ es diferenciable en un punto $(a_1, a_2, a_3) \in A$. Si $\vec{f} = (f_1, f_2)$ y $D_{\mathrm{v}_i} f_j(a_1, a_2, a_3) = i + j$ para $j = 1, 2$ e $i = 1, 2, 3$ donde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, determinar el diferencial de $\vec{f}$ en dicho punto.

Para determinar diferencial de la función vectorial $\vec{f}$ en el punto (a_1, a_2, a_3), recordemos que el diferencial es una matriz 2×3 que contiene las derivadas parciales de cada componente de $\vec{f}$:

$$Df(a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{x_3} \end{bmatrix}.$$

Dado que conocemos las derivadas direccionales de f_1 y f_2 en las direcciones de los vectores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, podemos usar la relación entre la derivada direccional y las derivadas parciales:

$$D_{\mathrm{v}_i} f_j(a_1, a_2, a_3) = \nabla f_j(a_1, a_2, a_3) \cdot \mathrm{v}_i,$$

donde $\nabla f_j(a_1, a_2, a_3) = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_j}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f_j}{\partial x_3} \right)$.

Con esta información, determinaremos las derivadas parciales.

- Componente $f_1(j=1)$:

1) Para $i = 1(v_1 = (1,1,1))$:

$$D_{\mathrm{v}_1} f_1(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\cdot 1 = 1+1 = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2$$

2) Para $i = 2(v_2 = (0,1,1))$:

$$D_{\mathrm{v}_2} f_1(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\cdot 1 = 1+2 = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{x_3} = 3$$

3) Para $i = 3(v_3 = (0,0,1))$:

$$D_{\mathrm{v}_3} f_1(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot 0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\cdot 1 = 1+3 = 4 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 4$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 4\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 3-4 = -1\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2-(-1)-4 = -1
\end{aligned}$$

- Componente $f_2(j=2)$:

1) Para $i = 1(v_1 = (1,1,1))$:

$$D_{\mathrm{v}_1} f_2(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\cdot 1 = 2+1 = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 3$$

2) Para $i = 2(v_2 = (0,1,1))$:

$$D_{\mathrm{v}_2} f_2(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot 1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\cdot 1 = 2+2 = 4 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{x_3} = 4$$

3) Para $i = 3(v_3 = (0,0,1))$:

$$D_{\mathrm{v}_3} f_2(a_1,a_2,a_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\cdot 1 = 2+3 = 5 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 5$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 5\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 4 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4-5 = -1\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 3 \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3-(-1)-5 = -1
\end{aligned}$$

El diferencial de $\vec{f}$ en el punto (a_1, a_2, a_3) es:

$$Df(a_1,a_2,a_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

20) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comprobar que existen las derivadas parciales segundas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Primero verificamos las derivadas parciales de primer orden en $(0,0)$. Para calcular las derivadas parciales, tomamos los límites respectivos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

Ahora calculamos las derivadas parciales mixtas en $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x\cos y - \sin x)(x^2+y^2) - (x\sin y - y\sin x)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Ahora calculamos el límite cuando $x \to 0$ para evaluar $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = (*) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h-\sin h}{h^2} - 0}{h} = \left\{\sin h \approx h - \frac{h^3}{6}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h} - \left(\cancel{h} - \frac{h^3}{6}\right)}{h^3} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{6}}{h^3} = \frac{1}{6}$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \frac{(h\cancelto{1}{\cos 0} - \sin h)\cdot \cancel{h^2}}{h^{\cancel{4}}} = \frac{h-\sin h}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\sin y - y\cos x)\cdot(x^2+y^2) - (x\sin y - y\sin x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Ahora calculamos el límite cuando $y \to 0$ para evaluar $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$.

$$\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = (*) = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{\sin k - k}{k^2} - 0}{k} = \left\{\sin k \approx k - \frac{k^3}{6}\right\} = \lim_{k\to 0}\frac{\left(\cancel{k} - \frac{k^3}{6}\right) - \cancel{k}}{k^3} = \lim_{k\to 0} -\frac{\frac{k^3}{6}}{k^3} = -\frac{1}{6}$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,k) = \frac{(\sin k - k\cancelto{1}{\cos 0})\cdot \cancel{k^2}}{k^{\cancel{4}}} = \frac{\sin k - k}{k^2}$$

---

1)