

## Cálculo II

### Tema 2: Límites y continuidad de funciones de varias variables

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Calcular el máximo dominio de definición de las funciones siguientes.

a)  $f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$

Para determinar el dominio de definición de la función  $f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ , debemos analizar los valores de  $(x, y)$  que hacen que la expresión  $\frac{1}{x^2 + y^2}$  esté bien definida.

La función  $\frac{1}{x^2 + y^2}$  estará definida siempre que  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Esto ocurre porque si  $x^2 + y^2 = 0$ , el denominador se anula y la función no está definida. Sabemos que:

$$x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow x = 0 \text{ y } y = 0.$$

Por lo tanto, la única solución en la que  $x^2 + y^2 = 0$  ocurre en el punto  $(0, 0)$ . La función  $\cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$  estará definida siempre que  $x^2 + y^2 \neq 0$ , lo que significa que el dominio de la función es el conjunto de todos los puntos del plano excepto el origen  $(0, 0)$ .

El dominio máximo de definición de  $f(x, y)$  es:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

b)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

La función  $f(x, y)$  estará definida siempre que  $xy \neq 0$  porque el denominador se anula y la función no está definida. Sabemos que:

$$xy = 0 \longrightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0.$$

Por lo tanto, el dominio de  $f(x, y)$  consiste en todos los pares  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tales que  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ .

El dominio de la función es:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0 \text{ ó } y = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x = 0\} \cup \{y = 0\})$$

c)  $\vec{f}(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{xy}{x^2 + y^2 - 4}\right)$

Para determinar el dominio de definición de la función vectorial  $\vec{f}(x, y)$ , debemos analizar las restricciones impuestas por el denominador de cada componente, asegurándonos de evitar divisiones por cero.

Analizar los denominadores

1) Primer denominador:  $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$

$$x^2 + y^2 \neq 1.$$

Esto significa que el punto  $(x, y)$  no puede estar en el círculo de radio 1 centrado en el origen, ya que en ese caso el denominador sería cero.

2) Segundo denominador:  $x^2 + y^2 - 4 \neq 0$

$$x^2 + y^2 \neq 4.$$

Esto significa que el punto  $(x, y)$  no puede estar en el círculo de radio 2 centrado en el origen, ya que en ese caso el denominador sería cero.

#### Analizar el numerador

El numerador en ambos casos es  $xy$ , el cual está bien definido para todos los valores de  $x$  e  $y$ , por lo que no introduce restricciones adicionales al dominio.

#### Determinar el dominio

El dominio de  $\vec{f}(x, y)$  estará definido en todos los puntos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  excepto aquellos que hagan que alguno de los denominadores sean cero. Esto ocurre en los puntos que satisfacen  $x^2 + y^2 = 1$  ó  $x^2 + y^2 = 4$ .

Por lo tanto, el dominio es el plano  $\mathbb{R}^2$  excluyendo los puntos en los círculos de radio 1 y radio 2.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1 \text{ y } x^2 + y^2 \neq 4\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{x^2 + y^2 = 4\}).$$

**d)**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

Para determinar el dominio de definición de la función  $f(x, y)$ , necesitamos asegurarnos de que la expresión dentro de la raíz cuadrada sea mayor o igual a cero, ya que la raíz cuadrada no está definida para números negativos en el dominio real.

- Condición para que la raíz sea válida:

La raíz está definida si:

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \longrightarrow x^2 + y^2 \geq 1$$

Esto significa que la función está definida para los puntos  $(x, y)$  que se encuentren en el exterior o sobre el círculo de radio 1 centrado en el origen.

- Determinar el dominio:

El dominio consiste en todos los puntos  $(x, y)$  del plano tal que  $x^2 + y^2 \geq 1$ .

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

**e)**  $\vec{f}(x, y, z) = \left( \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}, \log(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \right)$

Para determinar el dominio de definición de la función vectorial  $\vec{f}(x, y, z)$  debemos analizar las restricciones impuestas por los denominadores y la función logarítmica.

- Condición para el denominador del primer componente

El denominador del primer componente,  $x^2 + y^2 + z^2 - 4$ , no puede ser cero, ya que eso haría que la fracción sea indefinida. Esto implica:

$$x^2 + y^2 + z^2 \neq 4.$$

Esto significa que el dominio excluye todos los puntos sobre la esfera de radio 2 centrada en el origen.

- Condición para el argumento del logaritmo:

El argumento del logaritmo,  $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ , debe ser estrictamente positivo, ya que el logaritmo solo está

definido para valores mayores que cero. Esto implica:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 > 0 \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 > 1.$$

Esto significa que el dominio incluye solo los puntos fuera de la esfera de radio 1 centrada en el origen.

- Combinar restricciones:

El dominio de  $\vec{f}(x, y, z)$  está formado por los puntos  $(x, y, z)$  que cumplen simultáneamente:

- 1)  $x^2 + y^2 + z^2 > 1$  (fuera de la esfera de radio 1).
- 2)  $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$  (excluyendo la esfera de radio 2).

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \neq 4\}.$$

## 2) Estudiar la existencia de límite en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

- 1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + m^4 x^4}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(1 + m^4)}{x^2(1 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + m^4)}{1 + m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdría cero.

- 2) Coordenadas polares:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 0$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdría cero.

- 3) Límites iterados o retirados

- $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} y^2 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

- 4) Definición del límite:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x, y) - L| < \mathcal{E} \text{ si } \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$$

En coordenadas polares:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(r, \theta) - \underbrace{L}_0| < \mathcal{E} \text{ si } r < \delta$$

En todos los caminos considerados,  $f(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

## 3) Estudiar la existencia del límite en el punto $(0, 0)$ , de la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x, y) = \left( x + y^2, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$$

Para que el límite de  $\vec{f}(x, y)$  exista en  $(0, 0)$ , deben existir los límites de ambas componentes de forma independiente.

- Primera componente:  $f_1(x, y) = x + y^2$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + y^2 = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} x + m^2 x^2 = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + y^2 \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

3) Límites iterados o reiterados:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} x + y^2 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \bullet \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} x + y^2 \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} y^2 = 0 \end{aligned}$$

En todos los caminos considerados,  $f_1(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

$$\bullet \text{ Segunda componente: } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xmx}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m}{x^2 (1 + m^2)} = \frac{m}{1 + m^2}$$

No existe el límite, porque el resultado depende de  $m$ .

Por lo tanto, al no haber en  $(0, 0)$  para  $f_2(x, y)$ , la función vectorial  $\vec{f}(x, y)$  no tendrá límite en  $(0, 0)$ .

4) Estudiar la existencia del límite en el punto  $(0, 0)$  de la función  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + mx}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^0 + m)}{\sqrt{x^2 (1 + m^2)}} = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$$

No existe el límite, porque el resultado depende de  $m$ .

5) Estudiar la existencia del límite en el punto  $(0, 0)$ , de la función  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

1) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2 m^2 x^2 + 2xm^3 x^3}{(x^2 + m^2 x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 (1 + 3m^2 + 2m^3)}{x^4 (1 + m^2)^2} = \frac{1 + 3m^2 + 2m^3}{(1 + m^2)^2}$$

No existe el límite porque el resultado depende de  $m$ .

6) Estudiar la existencia del límite en el punto  $(0,0)$  de la función  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^5 + 4x^2y^3 - 2y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 4x^2m^3x^3 - 2m^5x^5}{(x^2 + m^2x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\cancel{5}}(2 + 4m^3 - 2m^5)}{x^{\cancel{4}}(1 + m^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + 4m^3 - 2m^5)}{(1 + m^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá cero.

2) Cambio de coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^5 \cos^5 \theta + 4r^2 \cos^2 \theta r^3 \sin^3 \theta - 2r^5 \sin^5 \theta}{(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^{\cancel{5}}(\cos^5 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - \sin^5 \theta)}{r^{\cancel{4}}(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} 2r(\cos^5 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - \sin^5 \theta) = 0 \end{aligned}$$

No sabemos si existe el límite pero en caso de existir valdrá cero.

3) Límites iterados o reiterados:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$
- $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 2y^3(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2y^5}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} -2y = 0$

En todos los caminos considerados,  $f(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es 0.

7) Estudiar la existencia del límite en el punto  $(0,0)$  de la función  $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\vec{f}(x, y) = \left( xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, xy, \sqrt{|xyz|} \right)$$

Para que el límite de  $\vec{f}(x, y)$  exista en  $(0,0)$ , deben existir los límites de las tres componentes independientemente.

- Primera componente:  $f_1(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} xmx \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\cancel{4}}m(1 - m^2)}{x^{\cancel{2}}(1 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2m(1 - m^2)}{1 + m^2} = 0$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá cero.

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos \theta \sin \theta \cdot \frac{r^{\cancel{2}}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^{\cancel{2}}(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1)} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0 \end{aligned}$$

No sabemos si existe el límite, pero en caso de existir valdrá 0.

3) Límites iterados o reiterados:

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$- \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

En todos los caminos posibles,  $f_1(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Segunda componente:  $f_2(x, y) = xy$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} xmx = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 m = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta r \sin \theta = r^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} xy \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$- \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} xy \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

En todos los caminos posibles,  $f_2(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Tercera componente:  $f_3(x, y) = \sqrt{|xyz|}$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{|xyz|} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|xmxz|} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x^2 mz|} = 0$$

2) Cambio de coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{|xyz|} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{|r \cos \theta r \sin \theta z|} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{|r^2 \cos \theta \sin \theta z|} = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{|xyz|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\bullet \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|xyz|} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

En todos los caminos posibles,  $f_3(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

Para las tres componentes, los límites son:

- $f_1(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \rightarrow 0$
- $f_2(x, y) = xy \rightarrow 0$
- $f_3(x, y) = \sqrt{|xyz|} \rightarrow 0$

Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \vec{f}(x,y,z) = (0,0,0)$$

8) Estudiar la existencia del límite en el punto  $(0,0)$  de la función  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + xmx}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+m)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1+m}{1+m^2}$$

No existe el límite porque el resultado depende de  $m$ .

9) Estudiar la existencia del límite en el punto  $(0,0)$  de la función  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^2x^2}{x^2m^4x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3m^2}{x^2(1+m^4x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^2}{1+m^4x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^4 \sin^4 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2(\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta} = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$
- $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$

En todos los caminos posibles,  $f(x,y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

10) Estudiar la existencia del límite en el punto  $(0,0)$  de la función  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4}$$

1) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + m^3x^3}{x^2 + m^2x^2 + m^4x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1+m^3)}{x^2(1+m^2+m^4x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+m^3)}{1+m^2+m^4x^2} = \frac{0}{1+m^2} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4} &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^4 \sin^4 \theta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{\cancel{3}}(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{\cancel{r^2}(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1 + r^2 \sin^4 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{1 + r^2 \sin^4 \theta} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

3) Límites iterados o reiterados

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$
- $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{\cancel{3}}}{y^{\cancel{2}}(1 + y^2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{1 + y^2} = \frac{0}{1} = 0$

En todos los caminos posibles,  $f(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

11) Estudiar la existencia del límite en el punto  $(0, 0)$  de la función  $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\vec{f}(x, y) = \left( \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \sin \left( \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} \right) \right).$$

Para que el límite de  $\vec{f}(x, y)$  exista en  $(0, 0)$ , deben existir los límites de ambas componentes de forma independiente.

- Primera componente:  $f_1(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + m^4 x^4}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\cancel{4}}(1 + m^4)}{\cancel{x^2}(1 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + m^4)}{1 + m^2} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{\cancel{4}}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{\cancel{r^2}(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1)} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 0$$

3) Límites iterados o reiterados

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
- $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} y^2 = 0$

En todos los caminos posibles,  $f_1(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- Segunda componente:  $f_2(x, y)$

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \left( \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} \right) = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left( \frac{x^2 + xmx}{x^2 + m^2 x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left( \frac{x^{\cancel{2}}(1 + m)}{x^{\cancel{2}}(1 + m^2)} \right) = \sin \left( \frac{1 + m}{1 + m^2} \right)$$

Al depende de  $m$ , no existe el límite en la función  $f_2(x, y)$ , la función  $\vec{f}(x, y)$  no tendrá límite en  $(0, 0)$ .



12) Dadas las funciones

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 - y^2} & \text{si } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{si } |x| = |y| \end{cases}$$

y

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^2 y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se pide:

- a) Hallar  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$  en los siguientes casos:  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)$  y  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ , donde  $k$  es un número real.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{k^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1+k^2}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3} \cdot n^2}{1+k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(1+k^2)} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{n^2+1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^3(n^2+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

- b) ¿Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ?

1) Límites direccionales:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 - y^2} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2(1 - m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - m^2} = 0$$

2) Cambio por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 - y^2} = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = 0$$

3) Límites iterados o reiterados:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$
- $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$

En todos los caminos posibles,  $f(x, y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el límite existe y es cero.

- c) Comprobar si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^2 y} = \{y = mx\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + m^3 x^3}{x^2 + m^2 x^2 + x^2 m x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1 + m^3)}{x^2(1 + m^2 + mx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + m^3)}{1 + m^2 + mx} = 0$$

El límite queda demostrado.

13) Estudiar la continuidad de la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad en el punto  $(0,0)$ , deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir con  $(0,0)$ .

Estudiamos la existencia del límite de  $f(x,y)$  en el punto  $(0,0)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)}_{r^2} \sin \frac{1}{\underbrace{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}}_r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \sin \left( \frac{1}{r} \right) = \left\{ \left| \sin \left( \frac{1}{r} \right) \right| \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left| r^2 \sin \left( \frac{1}{r} \right) \right| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r^2 = 0 \end{aligned}$$

Teorema del Sandwich

Dado que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto  $(0,0)$ .

14) ¿Es posible definir las funciones de los ejercicios 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5, 1.4.6, 1.4.7, 1.4.8, 1.4.9, 1.4.10, 1.4.11 de manera que éstas sean continuas?

15) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

a)  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para estudiar la continuidad de la función  $f(x,y)$  en el punto  $(0,0)$ , deberemos primero comprobar la existencia del límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir con  $f(0,0) = 0$ .

Estudiamos la existencia del límite de  $f(x,y)$  en el punto  $(0,0)$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta |r \sin \theta|}{\underbrace{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}}_r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin \theta = 0$$

Dado que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto  $(0,0)$ .

b)  $f(x,y) = \begin{cases} \left( \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \sin(xy) \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para estudiar la continuidad de la función  $f(x,y)$  en el punto  $(0,0)$ , deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir con  $f(0,0) = (0,0)$ .

La función  $f(x,y)$  es una función vectorial con dos componentes:

1)  $f_1(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta r \sin \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

2)  $f_2(x, y) = \sin(xy)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(xy) = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \sin(r \cos \theta r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \sin(r^2 \cos \theta \sin \theta) = \sin(0) = 0$$

Ambas componentes tienden a 0 cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , y por lo tanto, la función es continua en todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } (x, y) = (0, y) \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La función será continua si:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, y_0) = y_0$$

Primero consideramos la expresión para  $f(x, y)$  cuando  $x \neq 0$ :

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$$

Si queremos calcular el límite, debemos fijarnos que pasa cuando  $x \rightarrow 0$ . Empezamos reescribiendo  $f(x, y)$  como:

$$f(x, y) = y \cdot \frac{\sin(xy)}{xy}$$

De esta forma, tenemos un término en un límite conocido:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \longrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$

Esto implica que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} = y \cdot 1 = y = f(0, y_0)$$

Por lo tanto,  $f(x, y)$  es continua en todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Esto incluye la región donde  $x = 0$ , ya que el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$  coincide con el valor que toma la función en ese punto.

16) ¿Qué tiene que valor el número real  $K$  para que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ K & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sea continua?

Para que la función  $f(x, y)$  en el punto  $(0, 0)$ , el número real  $K$  deberá tener el mismo valor que el límite de la función en dicho punto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta r \sin \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^2} \cos^2 \theta \sin \theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

Por lo tanto, para que la función sea continua en el punto  $(0, 0) \longrightarrow K = 0$ .

17) ¿Qué tiene que valer el número real  $K$  para que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ K & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sea continua?

Para que la función  $f(x, y)$  en el punto  $(0, 0)$ , el número real  $K$  deberá tener el mismo valor que el límite de la función en dicho punto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^2} \sin^2 \theta}{\cancel{r^2}} = \sin^2 \theta$$

Como no existe el límite, porque depende de  $\theta$ , no habrá ningún valor de  $K$  que haga que la función  $f(x, y)$  sea continua en  $(0, 0)$ .

18) Estudiar la continuidad en el punto  $(0, 0)$  de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de dicha función en todo punto de  $\mathbb{R}^2$ .

Para estudiar la continuidad en el punto  $(0, 0)$ , deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en  $f(0, 0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(x-y)}{x^2 + y^2} &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta (r \cos \theta - r \sin \theta)}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^2} \cdot r \cdot \cos^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{\cancel{r^2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta) = 0 \end{aligned}$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto  $(0, 0)$ .

19) Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de dicha función en todo punto de  $\mathbb{R}^2$

Para estudiar la continuidad en el punto  $(0, 0)$ , deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en  $f(0, 0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(x-y)}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right) &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta (r \cos \theta - r \sin \theta)}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} \sin\left(\frac{\cancel{r} \sin \theta}{\cancel{r} \cos \theta}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^2} \cdot r \cdot \cos^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{\cancel{r^2}} \sin\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta) \sin\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) = 0 \end{aligned}$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto  $(0, 0)$ .

20) Determinar si la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua.

Para estudiar la continuidad en el punto  $(0, 0)$ , deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso

de que exista, deberá coincidir en  $f(0,0) = 0$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta \cdot r \sin \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^2} \cdot r \cdot \cos^2 \theta \sin \theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto  $(0,0)$ .

**21)** Consideremos la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de dicha función.

Para estudiar la continuidad en el punto  $(0,0)$ , deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en  $f(0,0) = 0$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta}{\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{\cancel{4}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{\cancel{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 0$$

La función es continua en todo su dominio, incluido el punto  $(0,0)$ .

**22)** Dada la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + x^2 y^2)}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

analizar la continuidad de la función.

Para estudiar la continuidad en el punto  $(0,0)$ , deberemos primero comprobar si existe el límite en dicho punto y, en caso de que exista, deberá coincidir en  $f(0,0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 y^2)}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta)}{r^4 \cos^4 \theta + 2r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta + r^4 \sin^4 \theta} = (*) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{(\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{r^2})^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^4} \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\cancel{r^4}} = \cos^2 \theta \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$(*) = \ln(1 + r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta) \sim r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta$  cuando  $r \rightarrow 0$ .

Dado que el límite depende de  $\theta$ , la función no es continua en  $(0,0)$ , ya que el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  no existe de forma única.

**23)** Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

con  $\alpha$  un número natural. Estudiar para los valores de  $\alpha = 3$  y  $4$  la continuidad de dicha función.