Señales y Sistemas

Problemas Tema 1: Conceptos Básicos de Señales y Sistemas

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Exprese cada uno de los siguientes números complejos en su parte real e imaginaria ($a + jb$):

- $\frac{1}{2}e^{j\pi} = \frac{1}{2}(\cos(\pi) + j\sin(\pi)) = -\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}e^{-j\pi} = \frac{1}{2}(\cos(\pi) - j\sin(\pi)) = -\frac{1}{2}$
- $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$
- $e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -j$
- $e^{j\frac{5\pi}{2}} = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = j$
- $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + j$
- $\sqrt{2}e^{j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = 1 + j$
- $\sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = 1 - j$
- $\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - j$

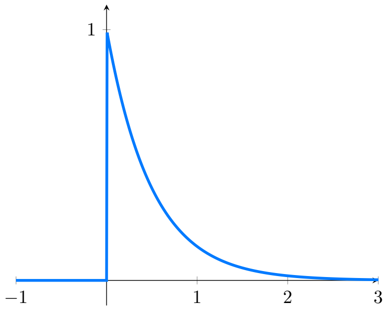
2) Exprese cada uno de los siguientes números complejos en su módulo y fase ($|z|e^{j\varphi(z)}$ con $\varphi(z) \in [-\pi, \pi]$):

- $5 : \begin{cases} |z| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{0}{5}\right) = 0 \end{cases} \longrightarrow 5$
- $-2 : \begin{cases} |z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{0}{-2}\right) = \pi \end{cases} \longrightarrow 2e^{j\pi}$
- $-3j : \begin{cases} |z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{-3}{0}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$
- $-j\frac{\sqrt{3}}{2} : \begin{cases} |z| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$
- $1 + j : \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$
- $(1 - j)^2 = -2j : \begin{cases} |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{-2}{0}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$
- $j(1 - j) = 1 + j : \begin{cases} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$
- $\frac{1 + j}{1 - j} = j : \begin{cases} |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\ \varphi = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow e^{j\frac{\pi}{2}}$

- $\dfrac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}j : \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = 1 \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\right) = -\dfrac{1}{12}\pi \end{cases} \longrightarrow e^{-j\frac{1}{12}}$

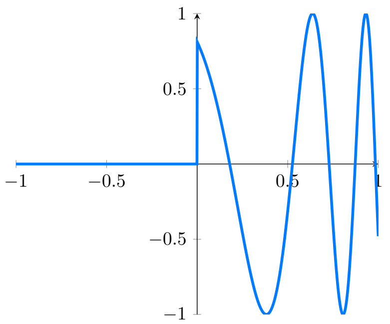
3) Calcule los valores de potencia media y de energía de las siguientes señales:

a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$



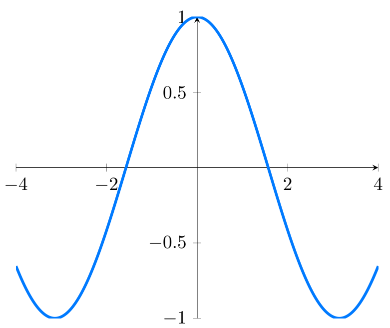
$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} |e^{-2t}|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-4t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{4}\cdot[0-1] = \frac{1}{4}\mathrm{J}$$
$$P_m = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} = \int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{E_T}{2T} = \frac{\frac{1}{4}}{+\infty} = 0\mathrm{W}$$

b) $x(t) = e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}$



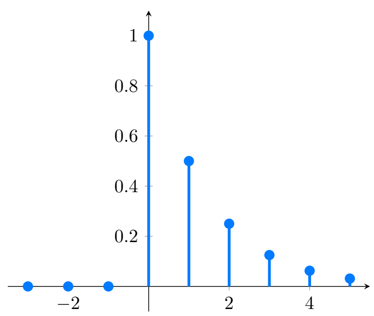
$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}\right|^2\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} 1^2\,\mathrm{d}t = [t]_{-\infty}^{\infty} = \infty - (-\infty) = \infty$$
$$P_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}\right|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{T}\cdot[t]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{T}{2}-\left(-\frac{T}{2}\right)\right) = \frac{1}{T}\cdot T = 1$$

c) $x(t) = \cos(t)$



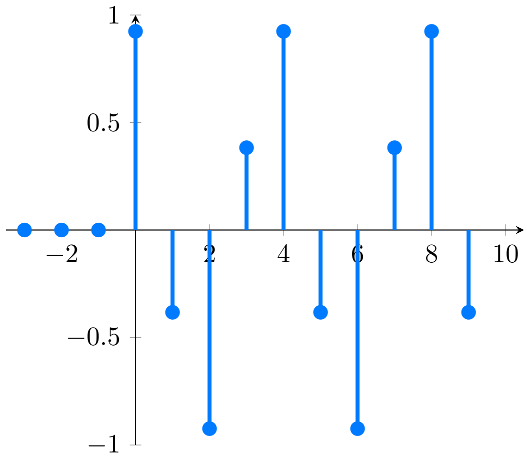
$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 1+\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\infty}^{\infty}$$
$$=$$
$$P_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$
$$= \frac{1}{2T}\left(\frac{T}{2}+\frac{t}{2}+\frac{\sin(T)-\sin(-T)}{2}\right) = \frac{1}{2T}\left(T+\cancelto{0}{\sin(T)}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{W}$$

d) $x[n] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n]$



$$E_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1-0\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\mathrm{J}$$
$$P_m = \lim_{N\to\infty}\frac{E_T}{2N+1} = \frac{\frac{4}{3}}{+\infty} = 0\mathrm{W}$$

e) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{8}\right)}$

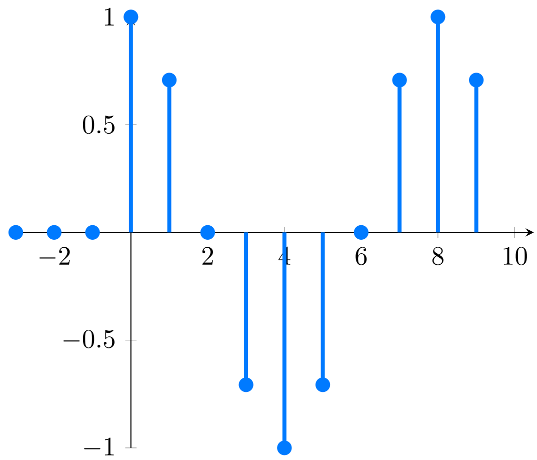


$$E_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{8}\right)} \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1^2 = \infty$$

$$P_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \left\{ \omega_0 = \frac{\pi}{2} \to N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}k = 4k \underset{k=1}{=} 4 \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} 1^2 = \frac{4}{4} = 1\text{W}$$

f) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]$

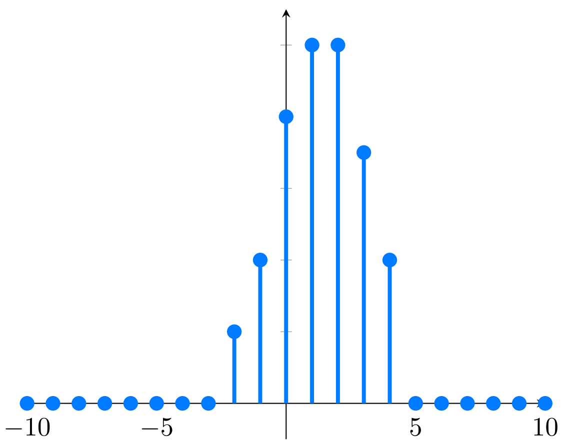


$$E_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right|^2 = \infty$$

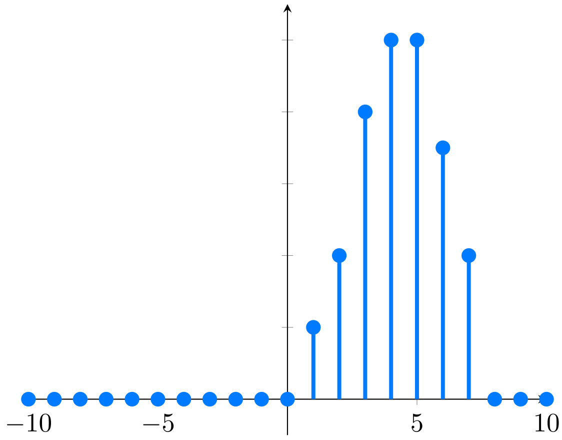
$$P_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \left\{ \omega_0 = \frac{\pi}{4} \to N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}k = 8k \underset{k=1}{=} 8 \right\}$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} \frac{1}{2}\left[1 + \cancelto{0}{\cos(2n)}\right] = \frac{8}{16} + 0 = \frac{1}{2}\text{W}$$

4) Considere una señal $x[n]$ en la que $x[n] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$. Para cada una de las señales siguientes determine los valores de n en los que se garantiza que la señal es cero.

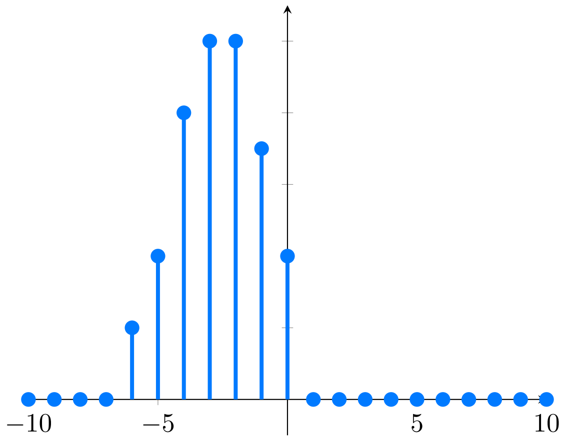


a) $x[n-3]$



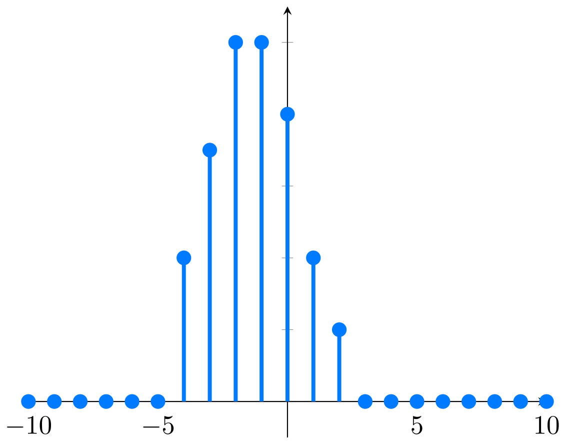
Vemos que esta señal se corresponde con un desplazamiento de 3 unidades a la derecha. Por tanto, $x[n-3] = 0$ para $n < 1$ y $n > 7$.

b) $x[n+4]$



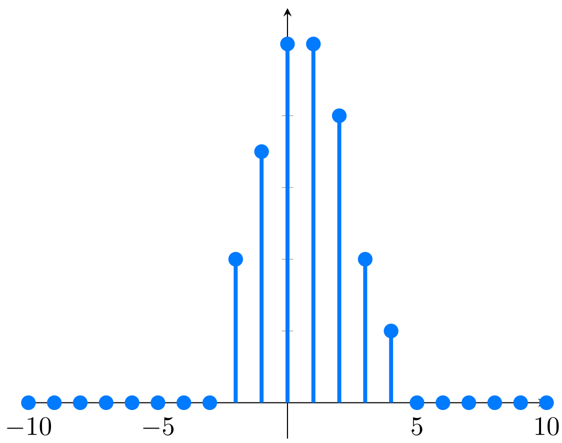
Vemos que la señal se corresponde con un desplazamineto de 4 unidades a la izquierda. Por tanto $x[n+4] = 0$ para $n < -6$ y $n > 0$.

c) $x[-n]$



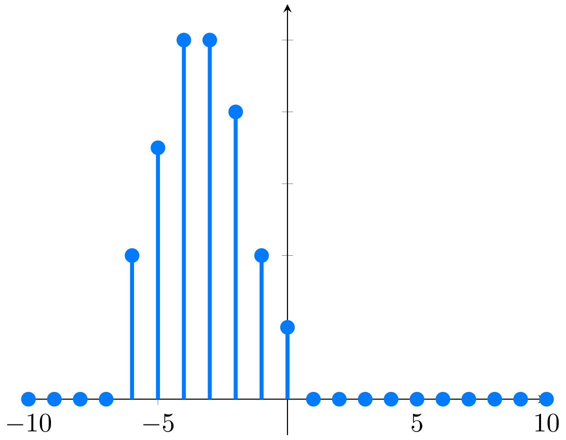
Vemos que est señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal con respecto al eje central. Por tanto, $x[-n] = 0$ para $n < -4$ y $n > 2$.

d) $x[-n+2]$



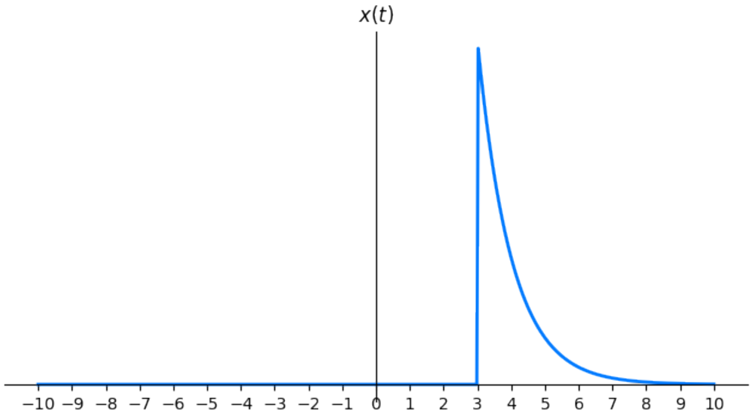
Vemos que esta señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal con respecto al eje central y un desplazamiento a la derecha de 2 unidades. Por tanto, $x[-n+2] = 0$, para $n < -2$ y $n > 4$

e) $x[-n-2]$

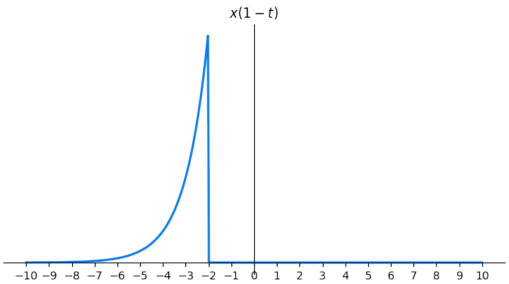


Vemos que esta señal se corresponde con una reflexión o simetría de la señal con respecto al eje central y un desplazamiento a la izquierda de 2 unidades. Por tanto, $x[-n-2] = 0$, para $n < -6$ y $n > 0$.

5) Considere una señal $x(t)$ en la que $x(t) = 0$ para $t < 3$. Para cada una de las señales siguientes deteremine los valores de t en los que se garantiza que la señal es cero.

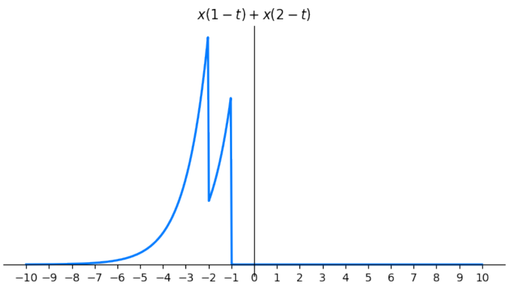


a) $x(1-t)$



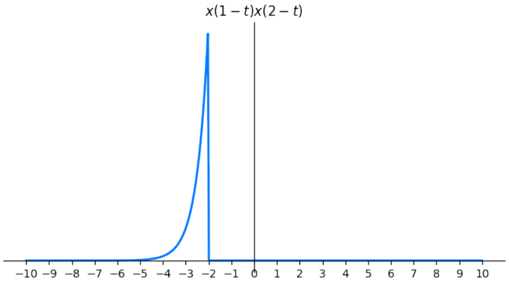
Podemos expresar dicha señal de la forma $x(-t+1)$, donde vemos rápidamente que se trata de una inversión y de un desplazamiento de un segundo hacia la derecha. Por lo tanto, como se muestra en la figura, la señal $x(1-t)$ será cero para $t \geq -2$.

b) $x(1-t) + x(2-t)$



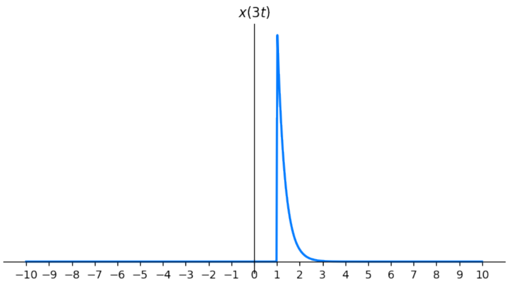
Si la señal $x(1-t)$ es cero para $t \geq -2$, vemos fácilmente que $x(2-t)$ es cero para $t \geq -1$. Por lo tanto, al sumarlas, seguirá siendo cero para $t \geq -1$.

c) $x(1-t)x(2-t)$



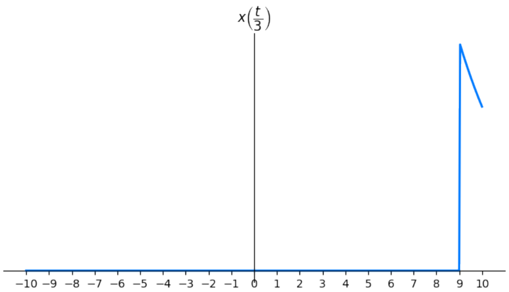
Si la señal $x(1-t)$ es cero para $t \geq -2$, vemos fácilmente que $x(2-t)$ es cero para $t \geq -1$. Por lo tanto, al multiplicarlas, seguirá ´siendo cero para $t \geq -2$.

d) $x(3t)$



Si la señal $x(t)$ es cero para $t < 3$, al aplicar la compresión por el factor $a = 3$, la señal $x(3t)$ será cero para $t > 1$.

e) $x\left(\frac{t}{3}\right)$



Si la señal $x(t)$ es cero para $t < 3$, al aplicar la expansión por el factor $a = \frac{1}{3}$, la señal $x\left(\frac{t}{3}\right)$ será cero para $t > 9$.

6) Determine si cada de las siguientes señales es periódica:

a) $x(t) = 2e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)u(t)}$

b) $x(t) = x[n] = e[n] + u[-n]$

c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k])$

7) Para cada una de las señales siguientes determine los valores de la variable independiente en los que se garantice que la parte par de la señal es cero.

a) $x[n] = u[n] - u[n-4]$

b) $x(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$

c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$

d) $x(t) = e^{-5t}u(t+2)$

8) Exprese la parte real de cada una de las siguientes señales de la forma $Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$, donde A, a, ω y φ son números reales con $A \geq 0$ y $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

a) $x(t) = -2$

b) $x(t) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cos(3t + 2\pi)$

c) $x(t) = e^{-t}\sin(3t + \pi)$

d) $x(t) = je^{(-2+j100)t}$

9) Determine si cada una de las siguientes señales es periódica. En caso afirmativo especifique su periodo fundamental.

a) $x(t) = -2$

b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$

c) $x[n] = e^{j7\pi n}$

d) $x[n] = 3e^{j3\pi \frac{n+\frac{1}{2}}{5}}$

e) $x[n] = 3e^{j\frac{3}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

10) Determine el periodo fundamental de la señal $x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$.

11) Determine el periodo fundamental de la señal $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi n}{7}} - e^{j\frac{2\pi n}{5}}$.

12) Considere la señal en tiempo discreto $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$. Determine los valores de los números enteros M y n_0 que permiten que $x[n]$ pueda expresarse como $x[n] = u[Mn+n_0]$

13) Considere la señal en tiempo continuo $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t+2)$. Calcule la energía de la señal $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

14) La figura 1 muestra la señal continua $x(t)$. Represente cada una de las siguientes señales.

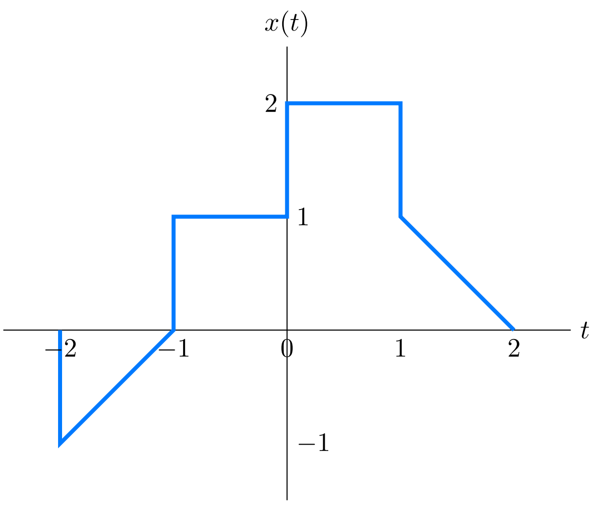


Figura 1

a) $x(t-1)$

b) $x(2-t)$

c) $x(2t+1)$

d) $x\left(4 - \frac{t}{2}\right)$

e) $[x(t) + x(-t)]u(t)$

f) $x(t)\left[\delta\left(t+\frac{3}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]$

15) La figura 2 muestra la señal discreta $x[n]$. Represente cada una de las siguientes señales:

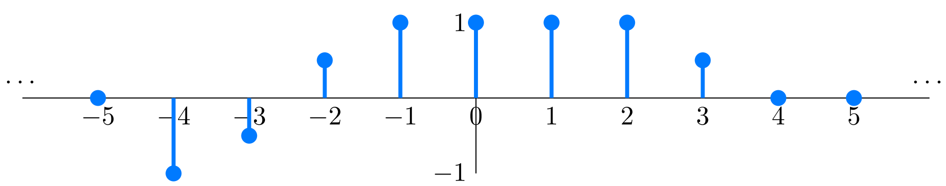


Figura 2

a) $x[n-4]$

b) $x[3-n]$

c) $x[3n]$

d) $x[3n+1]$

e) $x[n]u[3-n]$

f) $x[n-3]\delta[n-2]$

g) $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$

h) $x[(n-1)^2]$

16) Determine si cada una de las siguientes señales continuas es periódica. En caso afirmativo obtenga su periodo fundamental.

a) $x(t) = 3\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

c) $x(t) = \cos^2\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$

d) $x(t) = \mathrm{Par}\{\cos(4\pi t)u(t)\}$

e) $x(t) = \mathrm{Par}\{\sin(4\pi t)u(t)\}$

f) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}u(2t-n)$