Cálculo II

Tema 4: Teoría de campos

Francisco Javier Mercader Martínez

Capítulo 1: Integración múltiple

1) Calcular para $\Omega = [0,1]\times[0,3]$ las integrales

a) $\displaystyle\iint_\Omega xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\int_0^3\int_0^1 xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{1}{2}y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{4}y^2\right]_{y=0}^{y=3} = \frac{9}{4}$$

b) $\displaystyle\iint_\Omega xe^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\int_0^3\int_0^1 xe^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 e^y\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 e^y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{e^y}{2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{e^y}{2}\right]_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{2}(e^3-1)$$

c) $\displaystyle\iint_\Omega y^2\sin x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\int_0^3\int_0^1 y^2\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 y^2\left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^3 y^2(1-\cos(1))\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=3}\cdot(1-\cos(1)) = 9(1-\cos(1))$$

2) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican

a) $\displaystyle\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables x y y se expresan como:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se transforma en:

$$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r\in[0,1],\quad \theta\in[0,2\pi].$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\cdot[-\cos\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{3}(-\cos(2\pi)+\cos(0)) = \frac{1}{3}(-1+1) = 0$$

b) $\displaystyle\iint_\Omega (3y^3+x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables x y y se expresan como:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se transforma en:

$$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

En estas coordenadas, la función $2y^3 + x^2$ se convierte en:

$$2y^3 + x^2 = 3(r\sin\theta)^3 + (r\cos\theta)^2.$$

$$\begin{aligned} \iint_\Omega (2y^3 + x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3(r\sin\theta)^3 + (r\cos\theta)^2)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^4\sin^3\theta + r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{3r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\sin^3\theta + \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{5}\sin^3\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (*) \end{aligned}$$

Usamos que $\sin^3\theta = \sin\theta(1-\cos^2\theta)$ y la simetría de $\sin\theta$ en $[0,2\pi]$ implica que:

$$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta = 0$$

Usamos la identidad $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$. Entonces:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \frac{1}{2}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta} = \pi$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$ porque $\cos(2\theta)$ es impar en $[0,2\pi]$.

$(*) = \dfrac{3}{5}\cdot 0 + \dfrac{1}{4}\cdot\pi = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

La función $\sqrt{xy}$ depende del producto xy. Observamos que:

- Si $x > 0$ y $y > 0$, $\sqrt{xy} > 0$.
- Si $x < 0$ o $y < 0$, el signo del producto puede cambiar.
- En particular, en las regiones donde $x > 0$, $y < 0$ (o viceversa), el producto $xy < 0$, y $\sqrt{xy}$ no está definida para valores negativos.

Debido a que $\sqrt{xy}$ no está definida en $\mathbb{R}^2$ cuando $xy < 0$, esta integral **no se puede calcular** sobre Ω como está formulada, porque incluye regiones donde $xy < 0$.

d) $\displaystyle\iint_\Omega ye^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 < x \le y^2\}$.

$$\int_0^1\int_0^{y^2} ye^x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y\cdot[e^x]_{x=0}^{x=y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\cdot\left(e^{y^2}-1\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^{y^2} - y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^y\,\mathrm{d}y - \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} =$$

$\frac{1}{2}(e-2)$

$$\int_0^1 ye^{y^2}\,\mathrm{d}y = \left\{\begin{array}{c} u = y^2 \\ \\ \mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y \end{array}\right\} = \int_0^1 e^u \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

e) $\iint_\Omega y + \log x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0.5 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{x^2}^x y + \log x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{x^2}^x y + \log x\,\mathrm{d}y = \int_{x^2}^x y\,\mathrm{d}y + \int_{x^2}^x \log x\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} + \left[y\log x\right]_{y=x^2}^{y=x} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2}\right) + \log x(x-x^2)$$
$$= \frac{x^2(1-x^2)}{2} + \log x(x-x^2)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2} + \log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 - x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0.5}^{x=1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{47}{480}\right) = \frac{47}{960}$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 x\log x - x^2\log x\,\mathrm{d}x = (*) = \left(-\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{16}\right) - \left(-\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{7}{72}\right) = -\frac{1}{12}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{13}{144}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x\log x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = \log x & \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} = \left[\log x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{16}$$

$(*)$

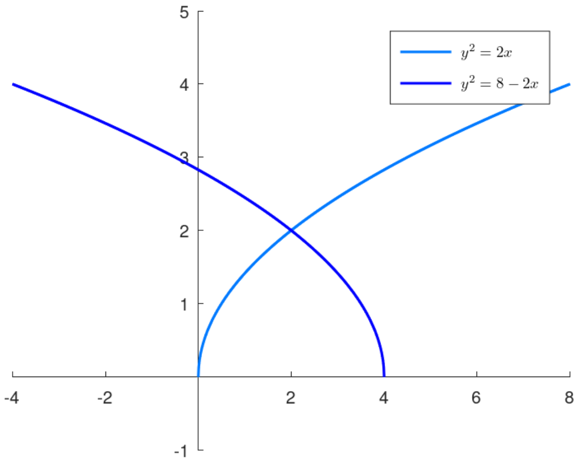
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\log x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = \log x & \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right\} = \left[\log x\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{\cancel{3}}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{7}{72}$$

3) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

a) $\iint_\Omega (4-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8-2x$.

Se nos da el recinto limitado por las curvas:

$$y^2 = 2x \quad \text{e} \quad y^2 = 8-2x$$



Despejamos x en las dos ecuaciones y obtenemos:

$$y^2 = 2x \longrightarrow x = \frac{y^2}{2}$$
$$y^2 = 8 - 2x \longrightarrow 2x = 8 - u^2 \longrightarrow x = 4 - \frac{y^2}{2}.$$

Por lo tanto, las fronteras de x están dadas por:

$$x_{\text{izq}}(y) = \frac{y^2}{2}, \qquad x_{\text{der}}(y) = 4 - \frac{y^2}{2}$$

Para hallar los límites e y, igualamos:

$$\frac{y^2}{2} = 4 - \frac{y^2}{2} \longrightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 4 \longrightarrow y^2 = 4 \longrightarrow y = \pm 2.$$

Por lo tanto, el recinto está comprendido entre $y = -2$ e $y = 2$.

Para calcular la integral, dado un valor de y entre -2 y 2, x varía desde $x = \frac{y^2}{2}$ hasta $x = 4 - \frac{y^2}{2}$. Por lo tanto:

$$\int_{y=-2}^{y=2} \int_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=4-\frac{y^2}{2}} (4 - y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

$$\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-\frac{y^2}{2}} 4 - y^2\, \mathrm{d}x = (4 - y^2) \cdot [x]_{x=\frac{y^2}{2}}^{4-\frac{y^2}{2}} = (4 - y^2) \cdot \left(4 - \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) = (4 - y^2) \cdot (4 - y^2) = (4 - y^2)^2$$

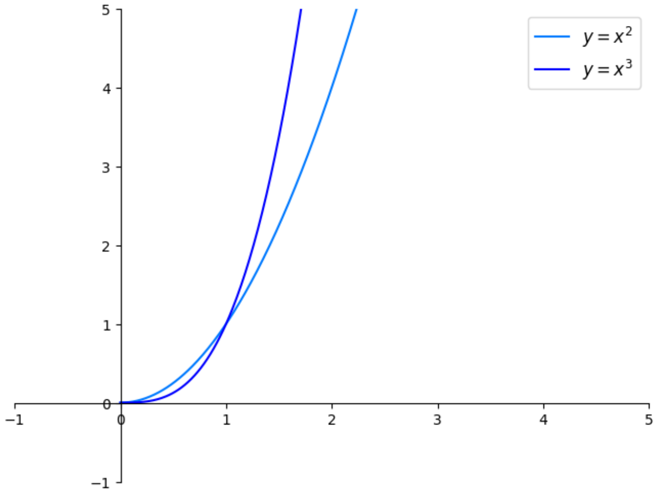
Entonces:

$$\int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2\, \mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} y^4 - 8y^2 + 16\, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^5}{5} - \frac{8y^3}{3} + 16y\right]_{y=-2}^{y=2} = \frac{512}{15}$$

b) $\iint_{\Omega} (x^4 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^2$.

El recinto está limitado por las curvas:

$$y = x^3 \quad \text{e} \quad y = x^2.$$



Primero hallamos, los puntos de intersección:

$$x^3 = x^2 \longrightarrow x^3 - x^2 = 0 \longrightarrow x^2(1-x) = 0$$

Entonces el recinto en el plano xy está entre $x = 0$ y $x = 1$.

Para $0 < x < 1$, comprobamos cuál de las dos curvas está arriba. Tomemos un valor intermedio, por ejemplo $x = \dfrac{1}{2}$:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Se ve que x^2 está por encima de x^3 en este rango. Por tanto, el límite superior en y es $y = x^2$ y el inferior es $y = x^3$.

El recinto Ω queda definido por:

$$0 \leq 1, \quad x^3 \leq y \leq x^2.$$

Por tanto, la integral es:

$$\iint_\Omega (x^4 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \left(x^4 + y^2\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{x^3}^{x^2} (x^4 + y^2)\,\mathrm{d}y = \left[x^4 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^3}^{y=x^2} = \left(x^4(x^2) + \frac{(x^2)^3}{3}\right) - \left(x^4(x^3) + \frac{(x^3)^3}{3}\right) = x^6 + \frac{x^6}{3} - x^7 - \frac{x^9}{3} = \frac{4x^6}{3} - x^7 - \frac{x^9}{3}$$

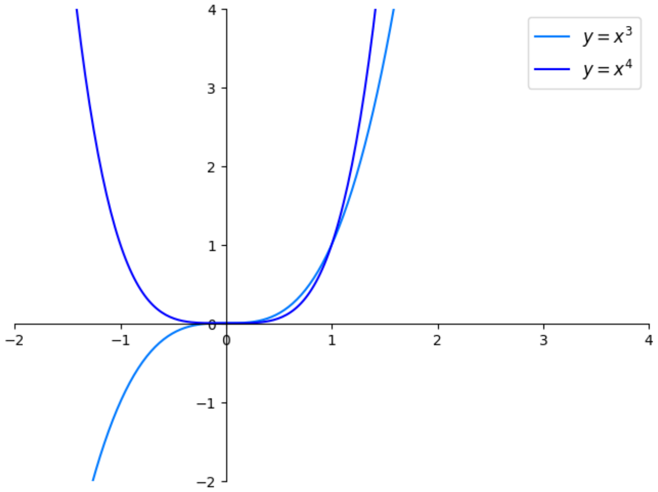
$$\iint_\Omega (x^4 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y? \int_0^1 \left(\frac{4x^6}{3} - x^7 - \frac{x^9}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4x^7}{21} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{30}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{21} - \frac{1}{8} - \frac{1}{30} = \boxed{\frac{9}{280}}$$

c) $\displaystyle\iint_\Omega (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1 \leq x \leq 1$.

El recinto está limitado por las curvas:

$$y = x^3 \quad \text{y} \quad y = x^4,$$

con x en el intervalo $[-1, 1]$. Para cada valor de x entre -1 y 1, y varía entre x^4 (curva inferior) y x^3 (curva superior).



$$\iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{x^4}^{x^3} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(x^4 + \frac{x^6}{2} - x^5 - \frac{x^8}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{14} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{18}\right]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{-1}{5}\right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{-1}{14}\right) - \cancelto{0}{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)} - \left(\frac{1}{18} - \frac{-1}{18}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - 0 - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{136}{315}}$$

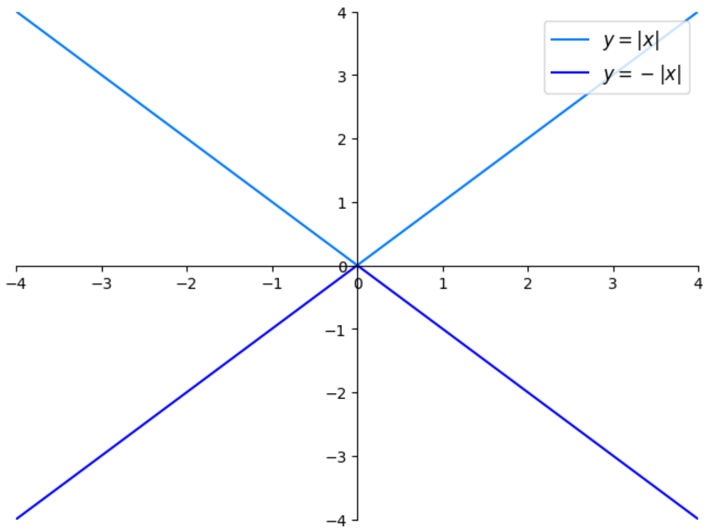
$$\int_{x^4}^{x^3} x + y\,\mathrm{d}y = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^4}^{y=x^3} = \left(x(x^3) + \frac{(x^3)^2}{2}\right) - \left(x(x^4) + \frac{(x^4)^2}{2}\right) = x^4 + \frac{x^6}{2} - x^5 - \frac{x^8}{2}$$

d) $\iint_\Omega (2xy^2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en la región limitada por $y = |x|$, $y = -|x|$ y $x \in [-1, 1]$.

El recinto está definido por las curvas

$$y = |x|, \quad y = -|x|$$

con $x \in [-1, 1]$.



Dado que el recinto es simétrico respecto al eje y, es conveniente dividir la integral en dos partes: para $x \geq 0$ (es decir, $y = x$ y $y = -x$) y para $x < 0$.

Sin pérdida de generalidad, integramos para $x \geq 0$ y luego multiplicamos por 2:

$$\iint_\Omega (2xy^2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \int_{-x}^{x} (2xy^2 - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{4x^4}{3}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{4x^5}{15}\right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

$$\int_{-x}^{x}(2xy^2-y)\,\mathrm{d}y=\left[\frac{2xy^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=x}=\left(\frac{2x(x^3)}{3}-\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{2x(-x^3)}{3}-\frac{(-x)^2}{2}\right)=\frac{2x^4}{3}-\frac{x^2}{2}-\left(-\frac{2x^4}{3}-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=\frac{2x^4}{3}+\frac{2x^4}{3}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\cancel{\frac{x^2}{2}}=\frac{4x^4}{3}$$

4) Calcular la superficie de las siguientes regiones:

a) Círculo de radio R.

El área A de un círculo de radio R está dado por la fórmula.

$$A=\pi R^2.$$

Esto se deduce usando la definición de una integral doble en coordenadas polares, pero vamos a explicarlo paso a paso para que quede claro.

1) Definición del círculo

Un círculo de radio R está definido como el conjunto de puntos en el plano que cumple

$$x^2+y^2\leq\mathbb{R}^2.$$

Esto significa que estamos trabajando en el interior del círculo.

2) Integral doble para calcular el área

El área del círculo es

$$A=\iint_{\text{círculo}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Aquí el integrando es 1 porque queremos calcular simplemente la cantidad de espacio (superficie del círculo).

3) Cambiamos a coordenadas polares:

Las coordenadas polares son ideales para trabajar con círculos porque se basan en el radio r y el ángulo θ. Las conversiones son:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

En coordenadas polares:

- r varía de 0 a R (desde el centro hasta el borde del círculo).
- θ varía de 0 a 2π (un giro completo alrededor del círculo).

Por lo tanto, el área se convierte en:

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^R 1\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

4) Resolver la integral

Primero integramos respecto a r:

$$\int_0^R r\,\mathrm{d}r=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R=\frac{R^2}{2}$$

Luego respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\theta=\frac{R^2}{2}\cdot[\theta]_0^{2\pi}=\frac{R^2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi=\boxed{\pi R^2}.$$

b) Elipse de semiejes a,b.

Para calcular la superficie de una elipse con semiejes a y b, usamos la fórmula clásica que viene de la geometría:

$$\text{Área de la elipse }=\pi ab.$$

1) Definición de la elipse La ecuación de la elipse en el plano es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde:

- a es la longitud del semieje mayor (horizontal si $a > b$).
- b es la longitud del semieje menor (vertical si $a > b$).

La elipse es simétrica respecto a ambos ejes, por lo que podemos trabajar con un solo cuadrante y luego multiplicar por 4 para encontrar el área total.

2) Área usando una integral doble:

El área de la región se calcula como una integral doble en el recinto delimitado por la ecuación de la elipse. La fórmula general para el área es:

$$\text{Área} = \iint_{\text{elipse}} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

3) Cambio a coordenadas polares elípticas:

Para resolver esta integral, usamos un cambio de coordenadas que "adapta" la forma de la elipse:

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta,$$

con r en 0 y 1, y θ en 0 y 2π. Este cambio de variables transforma la elipse en un círculo unitario en coordenadas r, θ.

El jacobiano del cambio de variables da un factor a, b. Así, la integral se convierte en:

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ab \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = ab \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi = \boxed{\pi ab}.$$

4) Resolviendo la integral:

- Primero integramos respecto a r:

$$\int_0^1 r \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- Luego integramos respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.

1) Identificar las curvas

- $x^2 = 4y$ es una parábola que se abre hacia arriba.
- $2y - x - 4 = 0$ se puede reescribir como $y = \frac{x}{2} + 2$, un línea recta.

2) Encuentro de puntos de intersección.

Igualamos las dos ecuaciones para encontrar los límites:

$$x^2 = 4\cdot\left(\frac{x}{2}+2\right) \longrightarrow x^2 = 2x + 8 \longrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{36}}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+6}{2} = 4 \\ \dfrac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

3) Integral para calcular el área.

La región está entre $x = -2$ y $x = 4$. La curva superior es la línea $y = \frac{x}{2} + 2$, y la curva inferior es la parábola $y = \frac{x^2}{4}$. El área es:

$$A = \int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4} \right) \mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-2}^{4} \frac{x^2}{2} \mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{-2}^{4} 2 \mathrm{d}x}_{I_2} - \underbrace{\int_{-2}^{4} \frac{x^2}{4} \mathrm{d}x}_{I_3} = (*) = 3 + 12 - 6 = \boxed{9}$$

$$I_1 = \int_{-2}^{4} \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{4} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

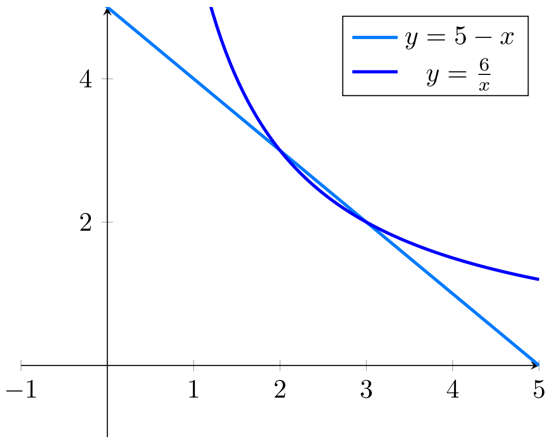
$$I_2 = \int_{-2}^{4} 2 \mathrm{d}x = 2 \cdot [x]_{-2}^{4} = 12$$

$$I_3 = \int_{-2}^{4} \frac{x^2}{4} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_{-2}^{4} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{4} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$

d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.

1) Identificar las curvas:

- $x + y = 5$ es una línea recta.
- $xy = 6$ es una hipérbola.



2) Encuentro de puntos de intersección.

Sustituimos $y = 5 - x$ en $xy = 6$:

$$x(5 - x) = 6 \longrightarrow 5x - x^2 = 6 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

3) Integral para calcular el área.

La región está entre $x = 2$ y $x = 3$. La curva superior es $y = 5 - x$, y la curva inferior es $y = \frac{6}{x}$. El área es:

$$A = \int_{2}^{3} \left(5 - x - \frac{6}{x} \right) \mathrm{d}x = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 6 \cdot \ln(x) \right]_{2}^{3} = 5 - \frac{5}{2} - 6\left(\ln(3) - \ln(2)\right)$$

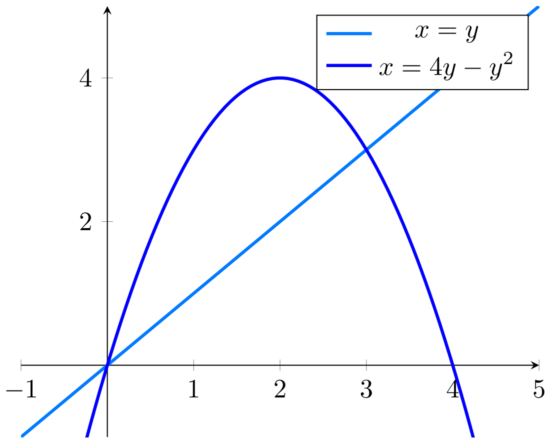
$$= \frac{5}{2} - 6\left(\ln(3) - \ln(2)\right) = \boxed{\frac{5}{2} - 6 \ln \left(\frac{3}{2} \right)}$$

e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

1) Encontrar los puntos de intersección

Dadas las ecuaciones:

$$x = y \quad \text{y} \quad x = 4y - y^2$$



Sustituyendo $x = y$ en $x = 4y - y^2$:

$$y = 4y - y^2 \longrightarrow y^2 - 3y = 0 \longrightarrow y(y-3) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Para $y = 0 \to x = 0$ y para $y = 3 \to x = 3$. Los puntos de intersección son $(0,0)$ y $(3,3)$.

2) Definir la integral

La curva $x = y$ se puede escribir como $x = y$, y la parábola $x = 4y - y^2$ es la superior en el intervalo dado. La región entre $y = 0$ y $y = 3$.

El área es:

$$A = \int_0^3 (4y - y^2 - y)\,\mathrm{d}y = \int_0^3 3y - y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

5) Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.

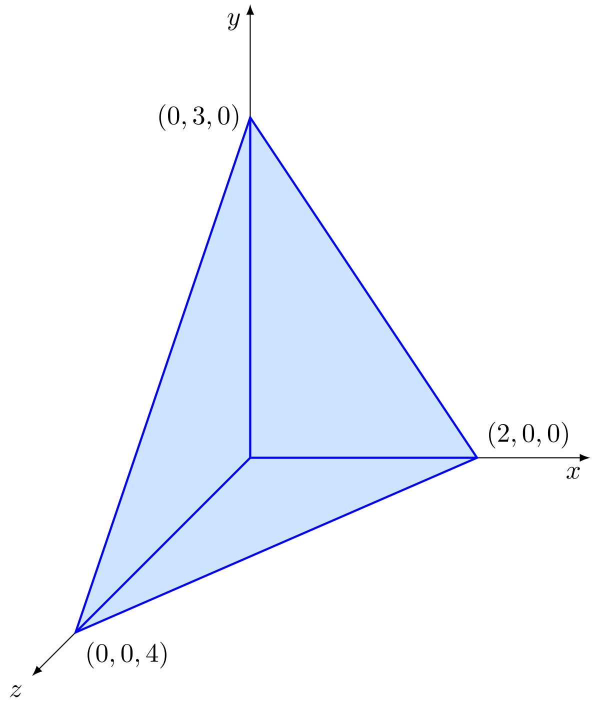
1) Interpretación del problema

La ecuación $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ represeta un plano en el espacio tridimensional. os planos coordenados (xy, yz, xz) actúan como restricciones, lo que signifia que el sólido está contenido en el primer octante.

Los puntos donde el plano corta los ejes son:

- Eje $x : x = 2$ (cuando $y = 0$ y $z = 0$).
- Eje $y : y = 3$ (cuando $x = 0$ y $z = 0$).
- Eje $z = 4$ (cuando $x = 0$ y $y = 0$).

El sólido es una **pirámide** con vértice en el origen $(0,0,0)$ y base triangular definida por los puntos $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, y $(0,0,4)$.



2) Fórmula del volumen

El volumen de una pirámide con base triangular está dado por:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6} \cdot \text{Base} \cdot \text{Altura}.$$

1) **Base triangular:** La base triangular está en el plano $z = 0$, con vértices en $(2,0), (0,3)$, y $(0,0)$. El área de un triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}.$$

Aquí, la base del triángulo es 2 y la altura es 3, así que:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

2) **Altura de la pirámide:** La altura es la distancia desde el origen al plano en el eje z, que es 4.

3) **Volumen:** Sustituyendo en la fórmula:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{2}.$$

b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

1) Interpolación del problema

El sólido está limitado por el plano superior $z = 2x + 3y$ y por el cuadrado en la base $x \in [0,1]$ y $y \in [0,1]$. Para calcular el volumen, usamos la integral triple:

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2x+3y} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

2) Resolver la integral

$$\int_{z=0}^{z=2x+3y} 1 \, \mathrm{d}z = [z]_0^{2x+3y} = 2x + 3y$$

$$\int_{y=0}^{y=1} 2x + 3y \, \mathrm{d}y = \left[2xy + \frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = 2x + \frac{3}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=1} 2x + \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + \frac{3}{2}x\right]_0^1 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

c) Esfera de radio R.

El volumen de una **esfera de radio** R se puede calcular usando la fórmula bien conocida:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Para derivar la fórmula, consideramos que la esfera es un sólido de revolución generado al rotar el semicírculo superior de la ecuación de la esfera ($x^2 + y^2 = R^2$) alrededor del eje x.

1) Definir el semicírculo:

   Para $y \geq 0$, la ecuación de la esfera es:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

   Este semicírculo tiene límites en $x \in [-R, R]$.

2) Usar el método de discos para calcular el volumen:

   Al rotar este semicírculo alrededor del eje x, el volumen del sólido de revolución se calcula como:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi y^2\,\mathrm{d}x.$$

3) Sustituir y^2:

   Como $y^2 = R^2 - x^2$, la integral se convierte en:

$$V = \pi\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x.$$

4) Resolver la integral:

   Separando

$$\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} R^2\,\mathrm{d}x - \int_{-R}^{R} x^2\,\mathrm{d}x.$$

   - Para el primer término:

$$\int_{-R}^{R} R^2\,\mathrm{d}x = R^2\int_{-R}^{R} 1\,\mathrm{d}x = R^2[x]_{-R}^{R} = R^2(R - (-R)) = 2R^3.$$

   - Para el segundo término:

$$\int_{-R}^{R} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{R^3}{3} - \frac{-(R^3)}{3} = \frac{R^3}{3} - \left(-\frac{R^3}{3}\right) = \frac{2R^3}{3}.$$

   Sustituyendo en la integral original:

$$V = \pi\left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right) = \pi\left(\frac{6R^3}{3} - \frac{2R^3}{3}\right) = \pi\frac{4R^3}{3} \longrightarrow \boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

d) Cono de altura h y radio de la base R.

Para cacular el volumen de un cono de altura h y radio de la base R, usamos la fórmula estándar para que el volumen de un cono, que puede derivarse mediante integración o por la relación con una pirámide.

El volumen de un cono está dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Esta fórmula se puede entender como un tercio del volumen de un cilindro con la misma altura y base.

Imaginemos que el cono está orientado con su vértice en el origen, su eje a lo largo del eje z, y su base en $z = h$. La ecuación de la generatriz del cono es:

$$r(z) = \frac{R}{h}z,$$

donde $r(z)$ es el radio del círculo en un plano horizintal a una altura z.

El volumen de un cono puede calcularse integrando los volúmenes de los infinitos discos horizontales:

$$V = \int_0^h \text{área del disco } \mathrm{d}z.$$

El área de un disco de una altura z es:

$$\text{Área} = \pi r(z)^2 = \pi\left(\frac{R}{h}z\right)^2.$$

Sustituyendo en la integral:

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{R}{h}z\right)^2 \mathrm{d}z.$$

Sacamos constantes fuera de la integral.

$$V = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h z^2\,\mathrm{d}z = \pi\cdot\frac{R^2}{h^2}\cdot\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \pi\frac{R^2}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{h^{\cancel{3}}}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

El volumen de un sólido se calcula como:

$$V = \iiint_\Omega 1\mathrm{d}V,$$

donde la región Ω es la región tridimensional definina por las restricciones.

En este caso:

- El plano superior está dado por $z = 2x + 1$.
- La base del sólido es el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ en el plano xy.

Paso 1: Definir los límites del disco en el plano xy

El disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ tiene centro en $(1, 0)$ y radio 1. En coordendas polares:

$$x = 1 + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \text{con } 0 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Paso 2: Definir los límites para z

Para un punto en la base, el plano superior tiene la altura:

$$z = 2x + 1.$$

Por lo tanto:

$$0 \leq z \leq 2x + 1.$$

Paso 3: Calcular el volumen en coordenadas polares

El volumen se expresa como:

$$V = \iiint_\Omega 1 \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2x+1} 1r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Aquí, r proviene del cambio a coordenadas polares.

Paso 4: Resolver la integral

1) Integral respecto a z:

$$\int_0^{2x+1} 1 \, \mathrm{d}z = [z]_0^{2x+1} = 2x+1$$

Ahora la integral se reduce a:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2x+1) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

2) Sustituir $x = 1 + r\cos\theta$:

En coordenadas polares, $x = 1 + r\cos\theta$. Sustituyendo:

$$2x + 1 = 2(1 + r\cos\theta) + 1 = 3 + 2r\cos\theta.$$

La integral ahora es:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3 + 2r\cos\theta) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r + 2r^2\cos\theta) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

3) Separar en dos integrales:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2\cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 3\pi + 0 = \boxed{3\pi}.$$

4) Resolver cada integral:

- Para $\int_0^{2\pi} \int_0^1 3r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$:

$$\int_0^1 3r \, \mathrm{d}r = 3\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} \, \mathrm{d}\theta = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi.$$

- Para $\int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2\cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$:

$$\int_0^1 2r^2 \, \mathrm{d}r = 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta} = 0$$

6) Calcular cambiando a coordenadas polares:

En coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$

1) Interpretar la región de integración

La región está limitada por:

- $y \in [-1, 1]$.
- $\in [0, \sqrt{1-y^2}]$

Esto describe la **parte superior derecha del círculo de radio 1** centrado en el origen (por $x^2 + y^2 \leq 1$).

En coordenadas polares:

- El radio r varía entre 0 y 1.
- El ángulo θ varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

2) Cambiar a coordenadas polares

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \underbrace{\sqrt{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}}_{r} \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$

7) Calcular para $\Omega = [0, 1] \times [0, 3] \times [-1, 1]$ las integrales

a) $\displaystyle\iiint_\Omega xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$

b) $\displaystyle\iiint_\Omega xe^{y+z} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$

c) $\displaystyle\iiint_\Omega y^2 z^3 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$

8) Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

a) $\displaystyle\iiint_\Omega (y^3 + z + x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

b) $\displaystyle\iiint_\Omega (y \sin z + x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2, 0 \leq x, y \leq 1\}$.

c) $\displaystyle\iiint_\Omega x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

d) $\displaystyle\iiint_\Omega yxz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2 + x, -1 \leq x, y \leq 1\}$.

9) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x + 3y + z + 10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2 + y^2 + x = 0$.

11) Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

12) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por lo planos $y = 0$ e $y = 3$.

13) Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r \sin\phi \cos\theta, yr \sin\phi \sin\theta$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

a) El volumen de una esfera de radio R.

b) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ en el recinto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

c) El volumen del recinto del apartado (b).

14) Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2 + 4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

15) Calcular $\displaystyle\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo Ω el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x+y=1$.

16) Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z=x^2$ y $z=4-y^2$.

17) Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

18) Calcular

$$\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde Ω es la región limitado por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, donde $0<b<a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.