Cálculo II

Tema 4: Teoría de campos

Francisco Javier Mercader Martínez

Capítulo 1: Integración múltiple

1) Calcular para $\Omega = [0,1]\times[0,3]$ las integrales

a) $\displaystyle\iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\int_0^3\int_0^1 xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{1}{2}y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{4}y^2\right]_{y=0}^{y=3} = \frac{9}{4}$$

b) $\displaystyle\iint_\Omega xe^y \, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\int_0^3\int_0^1 xe^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 e^y\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 e^y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^3\frac{e^y}{2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{e^y}{2}\right]_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{2}(e^3-1)$$

c) $\displaystyle\iint_\Omega y^2\sin x \, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\int_0^3\int_0^1 y^2\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 y^2\left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^3 y^2(1-\cos(1))\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=3}\cdot(1-\cos(1)) = 9(1-\cos(1))$$

2) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican

a) $\displaystyle\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables x y y se expresan como:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2=r^2$$

El elemento de área diferencial $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se transforma en:

$$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r\in[0,1],\quad \theta\in[0,2\pi].$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\cdot\left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{3}\left(-\cos(2\pi)+\cos(0)\right) = \frac{1}{3}(-1+1) = 0$$

b) $\displaystyle\iint_\Omega (3y^3+x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

En coordenadas polares, las variables x y y se expresan como:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

El elemento de área diferencial $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se transforma en:

$$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Los límites de integración en coordenadas polares son:

$$r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

En estas coordenadas, la función $2y^3 + x^2$ se convierte en:

$$2y^3 + x^2 = 3(r\sin\theta)^3 + (r\cos\theta)^2.$$

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (2y^3 + x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3(r\sin\theta)^3 + (r\cos\theta)^2)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^4\sin^3\theta + r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{3r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\sin^3\theta + \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{5}\sin^3\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (*)\end{aligned}$$

Usamos que $\sin^3\theta = \sin\theta(1-\cos^2\theta)$ y la simetría de $\sin\theta$ en $[0,2\pi]$ implica que:

$$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta = 0$$

Usamos la identidad $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$. Entonces:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \frac{1}{2}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta} = \pi$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$ porque $\cos(2\theta)$ es impar en $[0,2\pi]$.

$(*) = \dfrac{3}{5}\cdot 0 + \dfrac{1}{4}\cdot\pi = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.

Ω es el disco de radio 1 centrado en el origen.

La función $\sqrt{xy}$ depende del producto xy. Observamos que:

- Si $x > 0$ y $y > 0$, $\sqrt{xy} > 0$.
- Si $x < 0$ o $y < 0$, el signo del producto puede cambiar.
- En particular, en las regiones donde $x > 0$, $y < 0$ (o viceversa), el producto $xy < 0$, y $\sqrt{xy}$ no está definida para valores negativos.

Debido a que $\sqrt{xy}$ no está definida en $\mathbb{R}^2$ cuando $xy < 0$, esta integral **no se puede calcular** sobre Ω como está formulada, porque incluye regiones donde $xy < 0$.

d) $\displaystyle\iint_\Omega ye^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 < x \le y^2\}$.

$$\int_0^1\int_0^{y^2} ye^x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y\cdot[e^x]_{x=0}^{x=y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\cdot\left(e^{y^2}-1\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^{y^2} - y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^y\,\mathrm{d}y - \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} =$$

$\frac{1}{2}(e-2)$

$$\int_0^1 ye^{y^2}\,\mathrm{d}y = \left\{\begin{array}{c} u = y^2 \\ \\ \mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y \end{array}\right\} = \int_0^1 e^u \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

e) $\displaystyle\iint_\Omega y + \log x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0.5 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{x^2}^x y + \log x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{x^2}^x y + \log x\,\mathrm{d}y = \int_{x^2}^x y\,\mathrm{d}y + \int_{x^2}^x \log x\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} + \left[y\log x\right]_{y=x^2}^{y=x} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2}\right) + \log x(x-x^2)$$
$$= \frac{x^2(1-x^2)}{2} + \log x(x-x^2)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2} + \log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2(1-x^2)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 - x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0.5}^{x=1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{47}{480}\right) = \frac{47}{960}$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 x\log x - x^2\log x\,\mathrm{d}x = (*) = \left(-\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{16}\right) - \left(-\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{7}{72}\right) =$$
$$-\frac{1}{12}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{13}{144}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x\log x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} u = \log x & \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} = \left[\log x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{16}$$

$(*)$

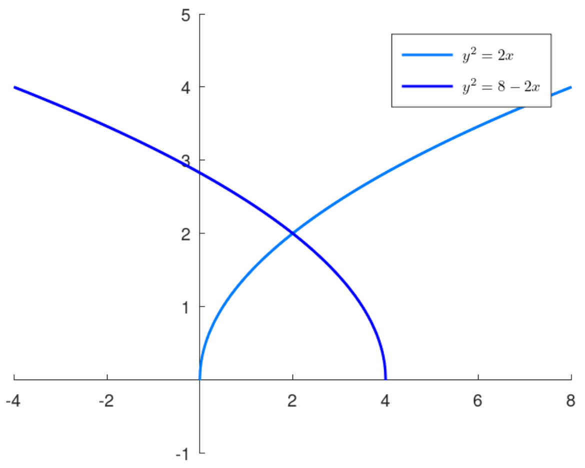
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\log x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} u = \log x & \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right\} = \left[\log x\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{x=0.5}^{x=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{\cancel{3}}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0.5}^{x=1} = -\frac{1}{24}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{7}{72}$$

3) Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

a) $\displaystyle\iint_\Omega (4-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8-2x$.

Se nos da el recinto limitado por las curvas:

$$y^2 = 2x \quad \text{e} \quad y^2 = 8-2x$$



Despejamos x en las dos ecuaciones y obtenemos:

$$y^2 = 2x \longrightarrow x = \frac{y^2}{2}$$
$$y^2 = 8 - 2x \longrightarrow 2x = 8 - u^2 \longrightarrow x = 4 - \frac{y^2}{2}.$$

Por lo tanto, las fronteras de x están dadas por:

$$x_{\text{izq}}(y) = \frac{y^2}{2}, \qquad x_{\text{der}}(y) = 4 - \frac{y^2}{2}$$

Para hallar los límites e y, igualamos:

$$\frac{y^2}{2} = 4 - \frac{y^2}{2} \longrightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 4 \longrightarrow y^2 = 4 \longrightarrow y = \pm 2.$$

Por lo tanto, el recinto está comprendido entre $y = -2$ e $y = 2$.

Para calcular la integral, dado un valor de y entre -2 y 2, x varía desde $x = \frac{y^2}{2}$ hasta $x = 4 - \frac{y^2}{2}$. Por lo tanto:

$$\int_{y=-2}^{y=2} \int_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=4-\frac{y^2}{2}} (4 - y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

$$\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-\frac{y^2}{2}} 4 - y^2\, \mathrm{d}x = (4 - y^2) \cdot [x]_{x=\frac{y^2}{2}}^{4-\frac{y^2}{2}} = (4 - y^2) \cdot \left(4 - \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) = (4 - y^2) \cdot (4 - y^2) = (4 - y^2)^2$$

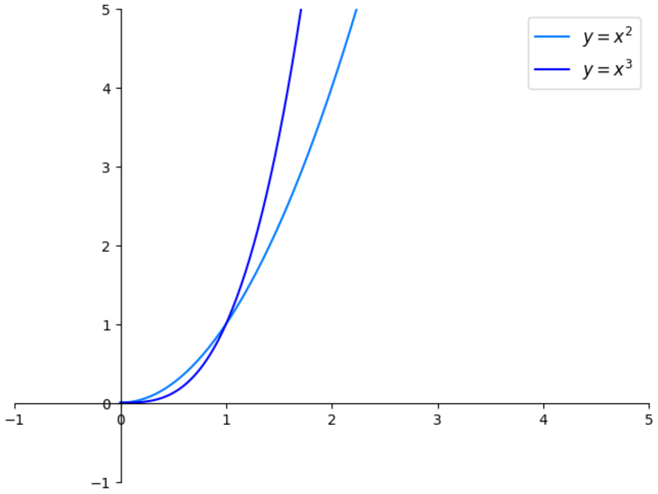
Entonces:

$$\int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2\, \mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} y^4 - 8y^2 + 16\, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^5}{5} - \frac{8y^3}{3} + 16y\right]_{y=-2}^{y=2} = \frac{512}{15}$$

b) $\iint_\Omega (x^4 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^2$.

El recinto está limitado por las curvas:

$$y = x^3 \quad \text{e} \quad y = x^2.$$



Primero hallamos, los puntos de intersección:

$$x^3 = x^2 \longrightarrow x^3 - x^2 = 0 \longrightarrow x^2(1-x) = 0$$

Entonces el recinto en el plano xy está entre $x = 0$ y $x = 1$.

Para $0 < x < 1$, comprobamos cuál de las dos curvas está arriba. Tomemos un valor intermedio, por ejemplo $x = \frac{1}{2}$:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Se ve que x^2 está por encima de x^3 en este rango. Por tanto, el límite superior en y es $y = x^2$ y el inferior es $y = x^3$.

El recinto Ω queda definido por:

$$0 \leq 1, \quad x^3 \leq y \leq x^2.$$

Por tanto, la integral es:

$$\iint_\Omega (x^4 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \left(x^4 + y^2\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{x^3}^{x^2} (x^4+y^2)\,\mathrm{d}y = \left[x^4 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^3}^{y=x^2} = \left(x^4(x^2) + \frac{(x^2)^3}{3}\right) - \left(x^4(x^3) + \frac{(x^3)^3}{3}\right) = x^6 + \frac{x^6}{3} - x^7 - \frac{x^9}{3} = \frac{4x^6}{3} - x^7 - \frac{x^9}{3}$$

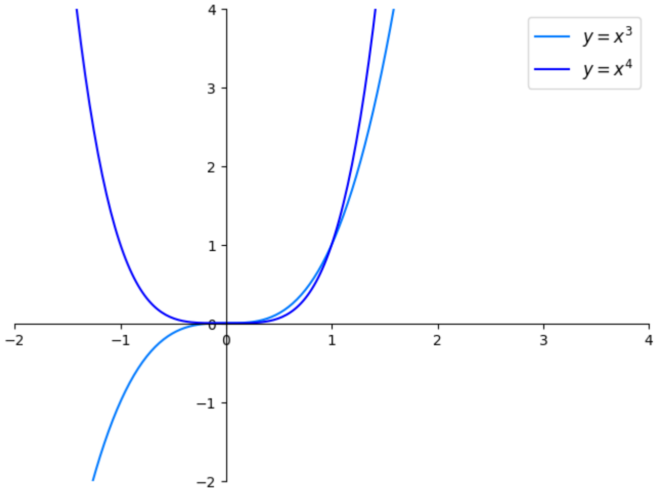
$$\iint_\Omega (x^4 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y ? \int_0^1 \left(\frac{4x^6}{3} - x^7 - \frac{x^9}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4x^7}{21} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{30}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{21} - \frac{1}{8} - \frac{1}{30} = \boxed{\frac{9}{280}}$$

c) $\iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1 \leq x \leq 1$.

El recinto está limitado por las curvas:

$$y = x^3 \quad \text{y} \quad y = x^4,$$

con x en el intervalo $[-1, 1]$. Para cada valor de x entre -1 y 1, y varía entre x^4 (curva inferior) y x^3 (curva superior).



$$\iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{x^4}^{x^3}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(x^4+\frac{x^6}{2}-x^5-\frac{x^8}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{14}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^9}{18}\right]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \left(\frac{1}{5}-\frac{-1}{5}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{-1}{14}\right)-\cancelto{0}{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)}-\left(\frac{1}{18}-\frac{-1}{18}\right) = \frac{2}{5}+\frac{1}{7}-0-\frac{1}{9} = \boxed{\frac{136}{315}}$$

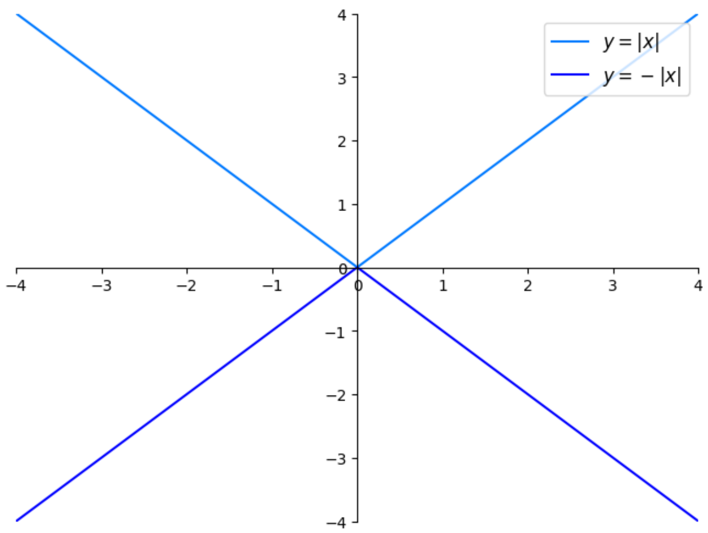
$$\int_{x^4}^{x^3} x+y\,\mathrm{d}y = \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^4}^{y=x^3} = \left(x(x^3)+\frac{(x^3)^2}{2}\right)-\left(x(x^4)+\frac{(x^4)^2}{2}\right) = x^4+\frac{x^6}{2}-x^5-\frac{x^8}{2}$$

d) $\iint_\Omega (2xy^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en la región limitada por $y=|x|$, $y=-|x|$ y $x\in[-1,1]$.

El recinto está definido por las curvas

$$y=|x|, \quad y=-|x|$$

con $x\in[-1,1]$.



Dado que el recinto es simétrico respecto al eje y, es conveniente dividir la integral en dos partes: para $x\geq 0$ (es decir, $y=x$ y $y=-x$) y para $x<0$.

Sin pérdida de generalidad, integramos para $x\geq 0$ y luego multiplicamos por 2:

$$\iint_\Omega (2xy^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1\int_{-x}^{x}(2xy^2-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1\frac{4x^4}{3}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left[\frac{4x^5}{15}\right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

$$\int_{-x}^{x}(2xy^2-y)\,\mathrm{d}y=\left[\frac{2xy^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=x}=\left(\frac{2x(x^3)}{3}-\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{2x(-x^3)}{3}-\frac{(-x)^2}{2}\right)=\frac{2x^4}{3}-\frac{x^2}{2}-\left(-\frac{2x^4}{3}-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=\frac{2x^4}{3}+\frac{2x^4}{3}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\cancel{\frac{x^2}{2}}=\frac{4x^4}{3}$$

4) Calcular la superficie de las siguientes regiones:

a) Círculo de radio R.

El área A de un círculo de radio R está dado por la fórmula.

$$A=\pi R^2.$$

Esto se deduce usando la definición de una integral doble en coordenadas polares, pero vamos a explicarlo paso a paso para que quede claro.

1) Definición del círculo

Un círculo de radio R está definido como el conjunto de puntos en el plano que cumple

$$x^2+y^2\leq \mathbb{R}^2\,.$$

Esto significa que estamos trabajando en el interior del círculo.

2) Integral doble para calcular el área

El área del círculo es

$$A=\iint_{\text{círculo}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Aquí el integrando es 1 porque queremos calcular simplemente la cantidad de espacio (superficie del círculo).

3) Cambiamos a coordenadas polares:

Las coordenadas polares son ideales para trabajar con círculos porque se basan en el radio r y el ángulo θ. Las conversiones son:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

En coordenadas polares:

- r varía de 0 a R (desde el centro hasta el borde del círculo).
- θ varía de 0 a 2π (un giro completo alrededor del círculo).

Por lo tanto, el área se convierte en:

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^R 1\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

4) Resolver la integral

Primero integramos respecto a r:

$$\int_0^R r\,\mathrm{d}r=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R=\frac{R^2}{2}$$

Luego respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\theta=\frac{R^2}{2}\cdot[\theta]_0^{2\pi}=\frac{R^2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi=\boxed{\pi R^2}.$$

b) Elipse de semiejes a,b.

Para calcular la superficie de una elipse con semiejes a y b, usamos la fórmula clásica que viene de la geometría:

$$\text{Área de la elipse }=\pi ab.$$

1) Definición de la elipse La ecuación de la elipse en el plano es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde:

- a es la longitud del semieje mayor (horizontal si $a > b$).
- b es la longitud del semieje menor (vertical si $a > b$).

La elipse es simétrica respecto a ambos ejes, por lo que podemos trabajar con un solo cuadrante y luego multiplicar por 4 para encontrar el área total.

2) Área usando una integral doble:

El área de la región se calcula como una integral doble en el recinto delimitado por la ecuación de la elipse. La fórmula general para el área es:

$$\text{Área} = \iint_{\text{elipse}} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

3) Cambio a coordenadas polares elípticas:

Para resolver esta integral, usamos un cambio de coordenadas que "adapta" la forma de la elipse:

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta,$$

con r en 0 y 1, y θ en 0 y 2π. Este cambio de variables transforma la elipse en un círculo unitario en coordenadas r, θ.

El jacobiano del cambio de variables da un factor a, b. Así, la integral se convierte en:

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ab \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = ab \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi = \boxed{\pi ab}.$$

4) Resolviendo la integral:

- Primero integramos respecto a r:

$$\int_0^1 r \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- Luego integramos respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.

1) Identificar las curvas

- $x^2 = 4y$ es una parábola que se abre hacia arriba.
- $2y - x - 4 = 0$ se puede reescribir como $y = \frac{x}{2} + 2$, un línea recta.

2) Encuentro de puntos de intersección.

Igualamos las dos ecuaciones para encontrar los límites:

$$x^2 = 4 \cdot \left(\frac{x}{2} + 2\right) \longrightarrow x^2 = 2x + 8 \longrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+6}{2} = 4 \\ \dfrac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

3) Integral para calcular el área.

La región está entre $x = -2$ y $x = 4$. La curva superior es la línea $y = \frac{x}{2} + 2$, y la curva inferior es la parábola $y = \frac{x^2}{4}$. El área es:

$$A = \int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4} \right) \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-2}^{4} \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{-2}^{4} 2 \,\mathrm{d}x}_{I_2} - \underbrace{\int_{-2}^{4} \frac{x^2}{4} \,\mathrm{d}x}_{I_3} = (*) = 3 + 12 - 6 = \boxed{9}$$

$$I_1 = \int_{-2}^{4} \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{4} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

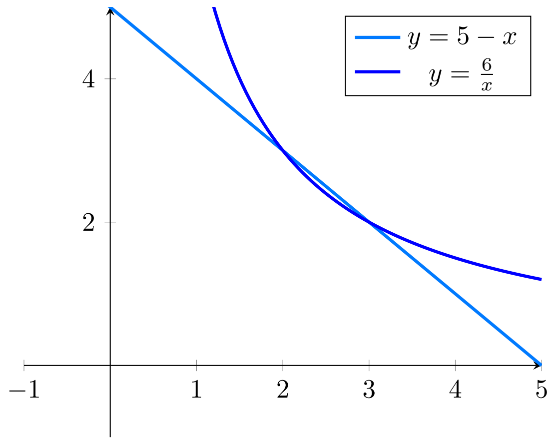
$$I_2 = \int_{-2}^{4} 2 \,\mathrm{d}x = 2 \cdot [x]_{-2}^{4} = 12$$

$$I_3 = \int_{-2}^{4} \frac{x^2}{4} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_{-2}^{4} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{4} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$

d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.

1) Identificar las curvas:

- $x + y = 5$ es una línea recta.
- $xy = 6$ es una hipérbola.



2) Encuentro de puntos de intersección.

Sustituimos $y = 5 - x$ en $xy = 6$:

$$x(5 - x) = 6 \longrightarrow 5x - x^2 = 6 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

3) Integral para calcular el área.

La región está entre $x = 2$ y $x = 3$. La curva superior es $y = 5 - x$, y la curva inferior es $y = \frac{6}{x}$. El área es:

$$A = \int_{2}^{3} \left(5 - x - \frac{6}{x} \right) \,\mathrm{d}x = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 6 \cdot \ln(x) \right]_{2}^{3} = 5 - \frac{5}{2} - 6\,(\ln(3) - \ln(2))$$

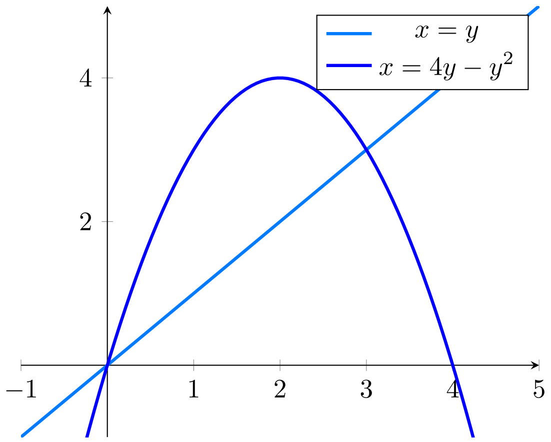
$$= \frac{5}{2} - 6\,(\ln(3) - \ln(2)) = \boxed{\frac{5}{2} - 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

1) Encontrar los puntos de intersección

Dadas las ecuaciones:

$$x = y \quad \text{y} \quad x = 4y - y^2$$



Sustituyendo $x = y$ en $x = 4y - y^2$:

$$y = 4y - y^2 \longrightarrow y^2 - 3y = 0 \longrightarrow y(y-3) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Para $y = 0 \rightarrow x = 0$ y para $y = 3 \rightarrow x = 3$. Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(3, 3)$.

2) Definir la integral

La curva $x = y$ se puede escribir como $x = y$, y la parábola $x = 4y - y^2$ es la superior en el intervalo dado. La región entre $y = 0$ y $y = 3$.

El área es:

$$A = \int_0^3 (4y - y^2 - y)\, \mathrm{d}y = \int_0^3 3y - y^2\, \mathrm{d}y = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

5) Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.

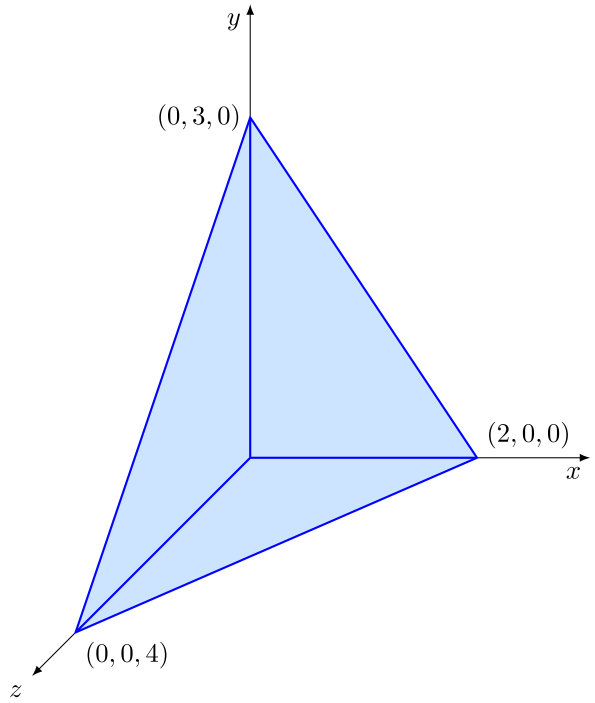
1) Interpretación del problema

La ecuación $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ representa un plano en el espacio tridimensional. os planos coordenados (xy, yz, xz) actúan como restricciones, lo que significa que el sólido está contenido en el primer octante.

Los puntos donde el plano corta los ejes son:

- Eje $x : x = 2$ (cuando $y = 0$ y $z = 0$).
- Eje $y : y = 3$ (cuando $x = 0$ y $z = 0$).
- Eje $z = 4$ (cuando $x = 0$ y $y = 0$).

El sólido es una **pirámide** con vértice en el origen $(0, 0, 0)$ y base triangular definida por los puntos $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, y $(0, 0, 4)$.



2) Fórmula del volumen

El volumen de una pirámide con base triangular está dado por:

$$\text{V} = \frac{1}{6} \cdot \text{Base} \cdot \text{Altura}.$$

1) **Base triangular:** La base triangular está en el plano $z = 0$, con vértices en $(2, 0), (0, 3)$, y $(0, 0)$. El área de un triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}.$$

Aquí, la base del triángulo es 2 y la altura es 3, así que:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

2) **Altura de la pirámide:** La altura es la distancia desde el origen al plano en el eje z, que es 4.

3) **Volumen:** Sustituyendo en la fórmula:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{2}.$$

b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

1) Interpolación del problema

El sólido está limitado por el plano superior $z = 2x + 3y$ y por el cuadrado en la base $x \in [0, 1]$ y $y \in [0, 1]$. Para calcular el volumen, usamos la integral triple:

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2x+3y} 1 \, \text{d}z \, \text{d}y \, \text{d}x = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

2) Resolver la integral

$$\int_{z=0}^{z=2x+3y} 1 \, \text{d}z = [z]_0^{2x+3y} = 2x + 3y$$

$$\int_{y=0}^{y=1} 2x + 3y \, \text{d}y = \left[2xy + \frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = 2x + \frac{3}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=1} 2x+\frac{3}{2}\,\mathrm{d}x=\left[x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

c) Esfera de radio R.

El volumen de una **esfera de radio** R se puede calcular usando la fórmula bien conocida:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Para derivar la fórmula, consideramos que la esfera es un sólido de revolución generado al rotar el semicírculo superior de la ecuación de la esfera ($x^2+y^2=R^2$) alrededor del eje x.

1) Definir el semicírculo:

   Para $y\geq 0$, la ecuación de la esfera es:
   $$y=\sqrt{R^2-x^2}.$$

   Este semicírculo tiene límites en $x\in[-R,R]$.

2) Usar el método de discos para calcular el volumen:

   Al rotar este semicírculo alrededor del eje x, el volumen del sólido de revolución se calcula como:

   $$V=\int_{-R}^{R}\pi y^2\,\mathrm{d}x.$$

3) Sustituir y^2:

   Como $y^2=R^2-x^2$, la integral se convierte en:

   $$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

4) Resolver la integral:

   Separando
   $$\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}R^2\,\mathrm{d}x-\int_{-R}^{R}x^2\,\mathrm{d}x.$$

   - Para el primer término:

   $$\int_{-R}^{R}R^2\,\mathrm{d}x=R^2\int_{-R}^{R}1\,\mathrm{d}x=R^2[x]_{-R}^{R}=R^2(R-(-R))=2R^3.$$

   - Para el segundo término:

   $$\int_{-R}^{R}x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\frac{R^3}{3}-\frac{-(R^3)}{3}=\frac{R^3}{3}-\left(-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{2R^3}{3}.$$

   Sustituyendo en la integral original:

   $$V=\pi\left(2R^3-\frac{2R^3}{3}\right)=\pi\left(\frac{6R^3}{3}-\frac{2R^3}{3}\right)=\pi\frac{4R^3}{3}\longrightarrow\boxed{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$$

d) Cono de altura h y radio de la base R.

Para calcular el volumen de un cono de altura h y radio de la base R, usamos la fórmula estándar para que el volumen de un cono, que puede derivarse mediante integración o por la relación con una pirámide.

El volumen de un cono está dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Esta fórmula se puede entender como un tercio del volumen de un cilindro con la misma altura y base.

Imaginemos que el cono está orientado con su vértice en el origen, su eje a lo largo del eje z, y su base en $z = h$. La ecuación de la generatriz del cono es:

$$r(z) = \frac{R}{h} z,$$

donde $r(z)$ es el radio del círculo en un plano horizontal a una altura z.

El volumen de un cono puede calcularse integrando los volúmenes de los infinitos discos horizontales:

$$V = \int_0^h \text{área del disco } \, \mathrm{d}z.$$

El área de un disco de una altura z es:

$$\text{Área} = \pi r(z)^2 = \pi \left(\frac{R}{h} z\right)^2.$$

Sustituyendo en la integral:

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h} z\right)^2 \mathrm{d}z.$$

Sacamos constantes fuera de la integral.

$$V = \pi \left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h z^2 \, \mathrm{d}z = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{R^2}{\cancel{h^2}} \cdot \frac{h^{\cancel{3}}}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

El volumen de un sólido se calcula como:

$$V = \iiint_\Omega 1 \, \mathrm{d}V,$$

donde la región Ω es la región tridimensional definida por las restricciones.

En este caso:

- El plano superior está dado por $z = 2x + 1$.
- La base del sólido es el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ en el plano xy.

Paso 1: Definir los límites del disco en el plano xy

El disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ tiene centro en $(1, 0)$ y radio 1. En coordenadas polares:

$$x = 1 + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \text{con } 0 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Paso 2: Definir los límites para z

Para un punto en la base, el plano superior tiene la altura:

$$z = 2x + 1.$$

Por lo tanto:

$$0 \leq z \leq 2x + 1.$$

Paso 3: Calcular el volumen en coordenadas polares

El volumen se expresa como:

$$V = \iiint_{\Omega} 1 \, \mathrm{dV} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2x+1} 1 r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Aquí, r proviene del cambio a coordenadas polares.

Paso 4: Resolver la integral

1) Integral respecto a z:

$$\int_0^{2x+1} 1 \, \mathrm{d}z = [z]_0^{2x+1} = 2x+1$$

Ahora la integral se reduce a:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2x+1) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

2) Sustituir $x = 1 + r\cos\theta$:

En coordenadas polares, $x = 1 + r\cos\theta$. Sustituyendo:

$$2x + 1 = 2(1 + r\cos\theta) + 1 = 3 + 2r\cos\theta.$$

La integral ahora es:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3 + 2r\cos\theta) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r + 2r^2\cos\theta) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

3) Separar en dos integrales:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 3\pi + 0 = \boxed{3\pi}.$$

4) Resolver cada integral:

- Para $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 3r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$:

$$\int_0^1 3r \, \mathrm{d}r = 3\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} \, \mathrm{d}\theta = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi.$$

- Para $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$:

$$\int_0^1 2r^2 \, \mathrm{d}r = 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3} \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta} = 0$$

6) Calcular cambiando a coordenadas polares:

En coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$

1) Interpretar la región de integración

La región está limitada por:

- $y \in [-1, 1]$.
- $x \in [0, \sqrt{1 - y^2}]$

Esto describe la **parte superior derecha del círculo de radio 1** centrado en el origen (por $x^2 + y^2 \leq 1$).

En coordenadas polares:

- El radio r varía entre 0 y 1.
- El ángulo θ varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

2) Cambiar a coordenadas polares

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \underbrace{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}}_{r} \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

3) Resolver la integral

Primero integramos respecto a r:

$$\int_0^1 r^2 \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Luego, integramos respecto a θ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3} \cdot [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

b) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$

1) Interpretar la región de integración

La región está limitada por:

- $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- $y \in \left[0, \sqrt{1 - x^2}\right]$.

Esto corresponde a la **parte superior derecha de un círculo de radio 1**, restringida a $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

En coordenadas polares:

- r varía entre $\frac{1}{2}$ y 1.
- θ varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

2) Cambiar a coordenadas polares

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \sin \theta)^{\frac{3}{2}}}_{r^3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 r^3 \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 r^4 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

3) Resolver la integral

Primero integramos respecto a r:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 r^4 \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^5}{5}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{5} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{160} = \frac{31}{160}.$$

Luego integramos respecto a θ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{31}{160} \, \mathrm{d}\theta = \frac{31}{160} \cdot [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{31}{160} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{31\pi}{320}}$$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$

1) Interpretar la región de integración

   La región está limitada por:

   - $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
   - $x \in \left[0, \sqrt{1-y^2}\right]$

   Esto corresponde a la **parte superior derecha de un círculo de radio 1**, restringida a $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   En coordenadas polares:

   - r varía entre 0 y 1.
   - θ varía entre 0 y $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

2) Cambiar a coordenadas polares:

   En coordenadas polares:

   - $x = r\cos\theta$
   - $y = r\sin\theta$
   - $x^2 + y^2 = r^2$
   - $\sqrt{x^2+y^2} = r$

   Entonces:

$$xy\sqrt{x^2+y^2} = (r\cos\theta)(r\sin\theta)\cdot r = r^3\cos\theta\sin\theta.$$

   La integral se convierte en:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\cdot r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^1 r^4\cos\theta\sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{20}}.$$

3) Resolver la integral

   Primero integramos respecto a r:

$$\int_0^1 r^4\, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

   Luego integramos respecto a θ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\theta\sin\theta\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2\theta)\, \mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\left[\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(0)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

7) Calcular para $\Omega = [0,1]\times[0,3]\times[-1,1]$ las integrales

a) $\displaystyle\iiint_\Omega xyz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$

$$\int_{-1}^1 \int_0^3 \int_0^1 xyz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{-1}^1 \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot yz\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 z\, \mathrm{d}z = \frac{9}{4}\int_{-1}^1 z\, \mathrm{d}z = \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-1}^1$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\cancelto{0}{\frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{2}}\right) = \boxed{0}$$

b) $\displaystyle\iiint_\Omega xe^{y+z}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}\int_{0}^{1} xe^{y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 e^{y+z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3} e^y\cdot e^z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^z\cdot[e^y]_0^3\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(e^3-1)\cdot\int_{-1}^{1} e^z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(e^3-1)\cdot[e^z]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{1}{2}\cdot(e^3-1)\cdot\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$

c) $\iiint_\Omega y^2z^3\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}\int_{0}^{1} y^2z^3\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{3} y^2z^3\cdot[-\cos x]_0^1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (-\cos(1)+1)\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3} y^2z^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= (-\cos(1)+1)\cdot\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 z^3\,\mathrm{d}z = 9(-\cos(1)+1)\int_{-1}^{1} z^3\,\mathrm{d}z$$

$$= 9(-\cos(1)+1)\cdot\left[\frac{z^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 9(-\cos(1)+1)\cdot\left(\cancel{\frac{1}{4}-\frac{(-1)^4}{4}}\right)^{\to 0} = \boxed{0}$$

8) Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

a) $\iiint_\Omega (y^3+z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$

1) Cambio a coordenadas esféricas

Para calcular una integral en una esfera, es conveniente cambiar a coordenadas esféricas:

$$x = r\cos\theta\sin\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\varphi,$$

donde:

- r es la distancia al origen ($0\le r\le 1$).
- φ es el ángulo polar ($0\le\varphi\le\pi$).
- θ es el ángulo azimutal ($0\le\theta\le 2\pi$).

El elemento de volumen en coordenadas esféricas es:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

2) Expresar la función en coordenadas esféricas

La función y^3+z+x en coordenadas esféricas es:

$$r^3\sin^3\theta^3\sin^3\varphi + r\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi$$

3) Integración en Ω

La integral es:

$$\iiint_\Omega (y^3+z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^3\sin^3\theta\sin^3\varphi + r\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

4) Separar la integral

Separamos la integral en tres términos:

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^5\sin^3\theta\sin^4\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^3\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}_{I_2} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^3\cos\theta\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}_{I_3}$$

Término 1:

$$\color{blue}{I_1} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^5 \sin^3\theta \sin^4\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 0 \cdot \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{6} = 0$$

- Integral respecto a r:

$$\int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

- Integral respecto a φ:

$$\int_0^{\pi} \sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

  Usamos la fórmula de reducción para $\sin^n\varphi$:

$$\int_0^{\pi} \sin^n\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

  En nuestro caso:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \frac{4-1}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2\varphi)\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot[\varphi]_0^{\pi} - \cancelto{0}{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_0^{\pi}}\right) \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

- Integral respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \{\text{Fórmula de reducción}\} = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\cdot[-\cos\theta]_0^{2\pi} = \frac{2}{3}\cdot(-1-(-1)) = 0$$

Término 2:

$$\color{blue}{I_2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} r^3\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

- Integral respecto a r:

$$\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

- Integral respecto φ:

$$\int_0^{\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2\pi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2\pi)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\cancelto{0}{\left(-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)} = 0$$

Término 3:

$$\color{red}{I_3} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^3\cos\theta\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 0$$

- Integral respecto a r:

$$\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

- Integral respecto φ:

$$\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \{\text{Fórmula de reducción}\} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}1\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\cdot[\varphi]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

- Integral respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = [\sin\theta]_0^{2\pi} = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\iiint_\Omega (y^3+z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0+0+0 = 0}$$

b) $\iiint_\Omega (y\sin z + x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2, 0 \leq x, y \leq 1\}$.

1) Analizar la región de integración:

El recinto Ω está definido por las siguientes condiciones:

- $0 \leq x \leq 1$: x recorre desde 0 hasta 1.
- $0 \leq y \leq 1$: y recorre desde 0 hasta 1.
- $y^2 \leq z \leq y$: z está restringido entre y^2 y y, con $z \leq y$ y $z \geq y^2$.

2) Escribir la integral iterada

La integral iterada en este caso es:

$$\iiint_\Omega (y\sin z + x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^1 (y\sin z + x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

3) Resolver la integral respecto a z: La integral interior es:

$$\int_{y^2}^{y} (y\sin z + x)\,\mathrm{d}z = \int_{y^2}^{y} y\sin z\,\mathrm{d}z + \int_{y^2}^{y} x\,\mathrm{d}z = y\left[\cos(y^2)-\cos(y)\right] + x(y-y^2).$$

a) Calcular $\int_{y^2}^{y} y\sin z\,\mathrm{d}z$:

$$\int_{y^2}^{y} y\sin z\,\mathrm{d}z = y\int_{y^2}^{y} \sin z\,\mathrm{d}z = y[-\cos z]_{y^2}^{y} = y[\cos(y^2)-\cos(y)]$$

b) Calcular $\int_{y^2}^{y} x\,\mathrm{d}z$:

$$\int_{y^2}^{y} x\,\mathrm{d}z = x[z]_{y^2}^{y} = x(y-y^2)$$

4) Resolvemos la integral respecto a x:

Ahora integramos respecto a x. La integral se convierte en:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(y\left[\cos(y^2)-\cos(y)\right] + x(y-y^2)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Separando términos:

$$\int_0^1 \int_0^1 y\left[\cos(y^2)-\cos(y)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 x(y-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

a) Primera integral:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 y\left[\cos(y^2)-\cos(y)\right]\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 y\left[\cos(y^2)-\cos(y)\right]\int_0^1 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underbrace{[x]_0^1}_{1}\int_0^1 y\left[\cos(y^2)-\cos(y)\right]\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y[\cos(y^2)-\cos(y)]\,\mathrm{d}y = \underbrace{\int_0^1 y\cos(y^2)\,\mathrm{d}y}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 y\cos(y)\,\mathrm{d}y}_{I_2} \\ &= \frac{1}{2}\sin(1) - (\sin(1)-1+\cos(1)) = 1-\cos(1)-\frac{1}{2}\sin(1)\end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^1 y\cos(y^2)\,\mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{l} u = y^2 \\ \mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}[\sin(u)]_0^1 = \frac{1}{2}(\sin(1) - \sin(0)) = \frac{1}{2}\sin(1)$$

$$I_2 = \int_0^1 y\cos(y)\,\mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{ll} u = y & \mathrm{d}u = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = \cos(y)\,\mathrm{d}y & v = \sin(y) \end{array} \right\} = [y\sin(y)]_0^1 - \int_0^1 \sin(y)\,\mathrm{d}y = \sin(1) - [-\cos(y)]_0^1$$

$$= \sin(1) - 1 + \cos(1)$$

b) Segunda integral:

$$\int_0^1\int_0^1 x(y-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \int_0^1 y - y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

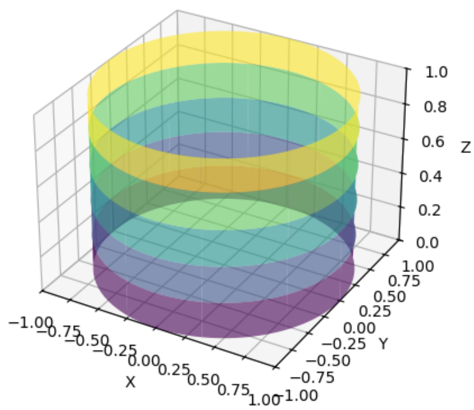
Por lo tanto:

$$\int_0^1\int_0^1\int_{y^2}^{y}(y\sin z + x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 - \cos(1) - \frac{1}{2}\sin(1) + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{13}{12} - \cos(1) - \frac{1}{2}\sin(1)}$$

c) $\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

1) Interpretar la región Ω

- La condición $y^2 + x^2 \leq 1$ describe un disco en el plano xy con radio 1 centrado en el origen.
- La condición $0 \leq z \leq 1$ extiende el disco en la dirección z, formando un cilindro de altura 1 con base el disco en el plano xy



2) Cambiar a coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas:

- $x = r\cos\theta$.
- $y = r\cos\theta$.
- $z = z$.
- El jacobiano del cambio de coordenadas es $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

La región Ω se transforma en:

- $r \in [0,1]$.
- $\theta \in [0, 2\pi]$.

- $z = [0,1]$.

La integral en coordenadas cilíndricas es:

$$\iiint_{\Omega} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta) r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \boxed{0}.$$

3) Resolver la integral

1) Integración respecto a r:

$$\int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

La integral queda:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\cos\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

2) Integración respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = [\sin\theta]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0$$

d) $\iiint_{\Omega} yxz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ en $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -5 \le z \le y^2 + x, -1 \le x, y \le 1\}$.

1) Interpretar el recinto Ω

- La variable z está limitada por:

$$z \in [-5, y^2 + x].$$

- La variables x está limitada por:

$$x \in [-1, 1].$$

- La variable y está limitada por:

$$y \in [-1, 1]$$

Por lo tanto, la integral iterada es:

$$\iiint_{\Omega} yxz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-5}^{y^2+x} yxz \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2) Resolver la integral respecto a z

$$\int_{-5}^{y^2+x} yxz\,\mathrm{d}z = yx\int_{-5}^{y^2+x} z\,\mathrm{d}z = yz\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-5}^{y^2+x} = yx\cdot\left(\frac{(y^2+x)^2}{2} - \frac{(-5)^2}{2}\right) = \frac{1}{2}yx((y^2+x)^2 - 25)$$

3) Resolver la integral respecto a x

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \frac{yx}{2}\cdot(y^4 + 2y^2x + x^2 - 25)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left[\frac{xy}{2}y^4 + y^3x^2 + \frac{yx^3}{2} - \frac{25xy}{2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{y^5}{2}\cancelto{0}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}} + y^3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{y}{2}\cdot\cancelto{0}{\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}} - \frac{25y}{2}\cdot\cancelto{0}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}}$$

$$= \frac{2}{3}y^3$$

4) Resolver la integral respecto a y

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{3}y^3\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^1 = \boxed{0}$$

9) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La superficie inferior es $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, que describe un cono circular de base centrada en el origen. La superficie superior, $z = 1$, corta este cono en un círculo con radio r, donde:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \longrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Por lo tanto, la región de proyección en el plano xy es el círculo

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

El volumen se calcular como:

$$V = \iiint_\Omega 1 \, \mathrm{d}V,$$

donde Ω es el sólido descrito por:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

En coordenadas cilíndricas:

- $x = r \cos \theta$
- $y = r \sin \theta$
- $z = z$
- $\mathrm{d}V = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z$

La región cilíndrica queda descrita como:

- $r \in [0, 1]$
- $\theta \in [0, 2\pi]$
- $z \in [r, 1]$

Entonces, el volumen es:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_r^1 r \, \mathrm{d}z = r \int_r^1 1 \, \mathrm{d}z = r \cdot [z]_r^1 = r(1 - r) = r - r^2$$
$$\int_0^1 r - r^2 \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{6} \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{6} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

10) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x + 3y + z + 10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2 + y^2 + x = 0$.

Nos piden calcular el volumen de un sólido definido por:

1) **Superiormente:** $x = 1 - y^2$ (cilindro parabólico)
2) **Inferiormente:** $2x + 3y + z + 10 = 0$ que se reescribe como $z = -10 - 2x - 3y$
3) **Lateralmente:** $x^2 + y^2 + x = 0$, que se puede reescribir como $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ completando el cuadrado para el término $x^2 + x$, es decir, haciendo que se la expansión de $(x + a)^2$.
   - Tomamos el coeficiente de x (que es 1), lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado:
   $$\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$
   - Entonces $x^2 + x$ se convierte en:
   $$x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

   De esta forma se convierte en un cilindro circular centrado en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ con radio $\frac{1}{2}$.

Paso 1: Interpretar la región de integración

La región de integración está limitada lateralmente por un cilindro circular. Para calcular el volumen, utilizamos coordenadas cilíndricas:

- $x = r\cos\theta - \frac{1}{2}$
- $y = r\sin\theta$
- $z = z$
- $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

En estas coordenadas, la proyección del plano xy corresponde al círculo:

$$r \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi].$$

Paso 2: Expresar los límites en coordenadas cilíndricas:

- $z_{\text{sup}} = 1 - y^2 = 1r^2\sin^2\theta$
- $z_{\text{inf}} = -2x - 3y - 10 = -2\left(r\cos\theta - \frac{1}{2}\right) - 2r\sin\theta - 10 = -2r\cos\theta + 1 - 3r\sin\theta - 10 = -2r\cos\theta - 3r\sin\theta - 9$

Paso 3: Escribir la integral iterada

El volumen se calcula como:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{z_{\text{inf}}}^{z_{\text{sup}}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

$$\int_{z_{\inf}}^{z_{\sup}} r\,\mathrm{d}z = r\int_{z_{\inf}}^{z_{\sup}} 1\,\mathrm{d}z = r\cdot[z]_{z_{\inf}}^{z_{\sup}} = r\cdot(1-r^2\sin^2 + 2rcis\theta + 3r\sin\theta + 9)$$
$$= 10r - r^3\sin\theta + 2r^2\cos\theta + 3r^2\sin\theta$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}} 10r - r^3\sin^2\theta + 2r^2\cos\theta + 3r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r = \frac{5}{4} - \frac{1}{64}\sin^2\theta + \frac{1}{12}\cos\theta + \frac{1}{8}\sin\theta$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}} 10r\,\mathrm{d}r = [5r^2]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}} r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r = \sin^2\theta\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{64}\cdot\sin^2\theta$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r = 2\cos\theta\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12\cdot}\cos\theta$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}} 3r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r = 3\sin\theta\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{5}{4} - \frac{1}{64}\sin^2\theta + \frac{1}{12}\cos\theta + \frac{1}{8}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{64} = \boxed{\frac{159}{64}\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{5}{4}\,\mathrm{d}\theta = \frac{5}{4}\cdot[\theta]_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{2}$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{64}\sin^2\theta = \{\text{Fórmula de reducción}\} = \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{128}\cdot[\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{64}$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{12}\cdot[\sin\theta]_0^{2\pi} = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\cdot[-\cos\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{8}\cdot(-1+1) = 0$$

11) Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Nos piden calcular el volumen del sólido limitado por las paraboloides:

- **Superiormente:** $z = 2 - x^2 - y^2$
- **Inferiormente:** $z = x^2 + y^2$

1) Encontrar la región de proyección en el plano xy

Para determinar la región en el plano xy, igualamos las ecuaciones de las paraboloides:

$$2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$$
$$2 = 2x^2 + 2y^2$$
$$1 = x^2 + y^2$$

La proyección es un círculo de radio $r = 1$ centrado en el origen, definido por:

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

2) Escribir el volumen en forma integral

El volumen se calcula como:

$$V = \iint_R [(z_{\sup} - z_{\inf})]\,\mathrm{d}A,$$

donde:

- $z_{\sup} = 2 - x^2 - y^2$
- $z_{\inf} = x^2 + y^2$

Por lo tanto:

$$z_{\sup} - z_{\inf} = (2 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2) = 2 - 2x^2 - 2y^2$$

En el plano xy, la región R corresponde al círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Para simplificar usamos coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

En estas coordenadas, $x^2 + y^2 = r^2$, y el volumen se convierte en:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - 2r^2) \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

3) Resolver la integral iterada:

$$\int_0^1 2r - r^3\,\mathrm{d}r = 2\int_0^1 r - r^3\,\mathrm{d}r = 2 \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \boxed{\pi}$$

12) Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por lo planos $y = 0$ e $y = 3$.

Nos piden calcular el volumen de un sólido limitado:

- **Superiormente:** La superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$.
- **Inferiormente:** El plano $x + z = 2$.
- **Lateralmente:** Los planos $y = 0$ e $y = 3$.

Paso 1: Identificar la región de integración

La región del sólido está definida por:

- En el plano xz, la superficie superior $x^2 + z = 4$
- En el plano xz, la superficie inferior $x + z = 2$
- En el plano y, el sólido está limitado entre $y = 0$ e $y = 3$

El sólido proyectado en el plano xz es la intersección de las curvas $z = 4 - x^2$ y $z = 2 - x$.

Igualamos las ecuaciones:

$$4 - x^2 = 2 - x \longrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

La región de integración en el plano xz es el intervalo $x \in [-1, 2]$ y está limitada por z entre $2 - x$ (inferior) y $4 - x^2$ (superior).

Paso 2: Escribir la integral de volumen

El volumen se calcular como:

$$V = \iiint_R 1\,\mathrm{d}V.$$

En este caso:

- $y \in [0, 3]$
- $x \in [-1, 2]$
- $z \in [2 - x, 4 - x^2]$

Entonces la integral es:

$$V = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_{2-x}^{4-x^2} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \boxed{\frac{27}{2}}$$

$$\int_{2-x}^{4-x^2} 1 \, \mathrm{d}z = [z]_{2-x}^{4-x^2} = (4 - x^2 - 2 + x) = -x^2 + x + 2$$

$$\int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2 \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$$

$$\int_0^3 \frac{9}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{9}{2} \cdot [y]_0^3 = \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2}$$

13) Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r \sin\phi \cos\theta, y = r \sin\phi \sin\theta$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

a) El volumen de una esfera de radio R.

En coordenadas esféricas, las relaciones son:

- $x = r \sin\phi \cos\theta$
- $y = r \sin\phi \sin\theta$
- $x = r \cos\theta$
- $\mathrm{d}V = r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$

La ecuación de la esfera de radio R es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

lo que en coordenadas esféricas se traduce $r \in [0, R]$.

Paso 1: Definir los límites de integración

La región que ocupa la esfera completa se describe en coordenadas esféricas como:

- $r \in [0, R]$
- $\phi \in [0, \pi]$
- $\theta \in [0, 2\pi]$

El volumen de la esfera es:

$$V = \iiint_{\text{Esfera}} 1 \, \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta.$$

$$\int_0^R r^2 \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{R^3}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{R^3}{3} \cdot [-\cos(\phi)]_0^{\pi} = \frac{R^3}{3} \cdot (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) = \frac{2}{3} R^3$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{3} R^3 \, \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3} R^3 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

b) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ en el recinto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

Nos piden calcular la integral:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

en el recinto:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

Paso 1: Interpretar la región en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas:

- $x = r \sin\phi \cos\theta$
- $y = r \sin\phi \sin\theta$
- $z = r \cos\phi$

La región Ω está definida por:

$$1 \leq r^2 \leq 2, \quad r \in [1, \sqrt{2}], \quad \phi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

En coordenadas esféricas, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Por lo tanto, el integrando se convierte en:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Paso 2: Escribir la integral en coordenadas esféricas

La integral se convierte en:

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r^2 \sin\phi\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \sin\phi\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta.$$

Paso 3: Resolver la integral iterada

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \sin\phi\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta.$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} r^4\, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{2}-1}{5}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{4\sqrt{2}-1}{5} \sin\phi\, \mathrm{d}\phi = \frac{4\sqrt{2}-1}{5} \cdot [-\cos\phi]_0^{\pi} = \frac{8\sqrt{2}-2}{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{8\sqrt{2}-2}{5}\, \mathrm{d}\theta = \frac{8\sqrt{2}-2}{5} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \boxed{\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{5}}$$

c) El volumen del recinto del apartado (b).

Para calcular el **volumen del recinto** Ω, únicamente debemos integrar 1 en lugar de $x^2+y^2+z^2$. Es decir, debemos calcular:

$$V = \iiint_\Omega 1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Paso 1: Expresar en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas, la integral del volumen se convierte en:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{2}} r^2 \sin\phi\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta.$$

Paso 2: Resolver la integral iterada

$$\int_1^{\sqrt{2}} r^2\, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin\phi\, \mathrm{d}\phi = [-\cos\phi]_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$V = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{2\sqrt{2}-1}{3} = \boxed{\frac{4\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}}$$

14) Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2 + 4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

Nos piden calcular el volumen del sólido limitado por:

1) El paraboloide $z = x^2 + 4y^2$.

2) El plano $z = 0$.

3) Lateralmente por los cilindros:

- $x = y^2$
- $x^2 = y$

Paso 1: Determinar la región en el plano xy

Para determinar los límits de integración en x y y, analizamos la región en el plano xy definida por los cilíndros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

Encontrar los puntos de intersección:

1) Igualamos $x = y^2$ y $x^2 = y$:

$$y^2 = x, \quad y = x^2.$$

Sustityendo $x = y^2$ en $y = x^2$:

$$y = (y^2)^2 \longrightarrow y = y^4$$

Factorizamos:

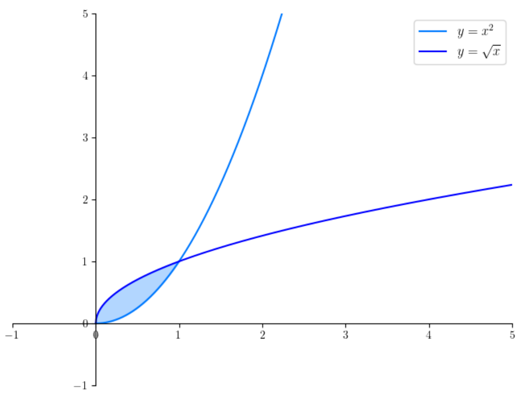
$$y(y^3 - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^3 = 1 \longrightarrow y = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos de intersección son:

$$(x, y) = (0, 0) \quad \text{y} \quad (x, y) = (1, 1)$$

Describir la región en el plano xy :

- x varía entre $x = 0$ y $x = 1$.
- Para un valor fijo de x, y varía entre $y = x^2$ (inferior) y $y = \sqrt{x}$ (superior)



- Escribir la integral para el volumen

El paraboloide está definido por $z = x^2 + 4y^2$, y el plano inferior es $z = 0$. El volumen se calcula como:

$$V = \iint_{\text{Región}} (x^2 + 4y^2)\, \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

Paso 2: Resolver la integral iterada

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+4y^2)\,\mathrm{d}y = \left[x^2y+\frac{4y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} = x^2(\sqrt{x}-x^2)+4\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^6}{3}\right) = x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{4x^6}{3}$$

$$\int_0^1 \left[x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{4x^6}{3}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\sqrt{x}-x^4+\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{4x^6}{3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{7}$$

$$\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{4}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^1 \frac{4x^6}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^1 x^6\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{4}{21}$$

Paso 3: Sumar los términos

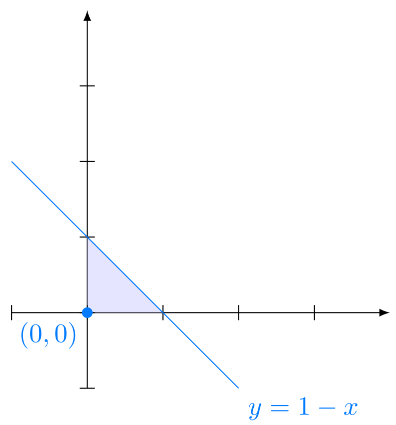
$$V = \frac{2}{7}-\frac{1}{5}+\frac{8}{15}-\frac{4}{21} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

15) Calcular $\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo Ω el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x+y=1$.

Nos piden calcular:

$$\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde Ω es el triángulo formado por los ejes coordenados $(x=0, y=0)$ y la recta $x+y=1$.



Paso 1: Región de integración

La región triangular está definida como:

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $x+y \leq 1$

En términos de límites:

- $x \in [0,1]$
- Para un valor fijo de $x, y \in [0, 1-x]$

Paso 2: Cambio de variable

Observamos que el integrando involucra la expresión $\frac{x-y}{x+y}$. Esto sugiere un cambio de variables adecuado para simplificar la integración. Definimos:

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

Con esto:

- $x = \dfrac{u + x}{2}, \quad y = \dfrac{u - v}{2}$
- El jacobiano del cambio de variables es:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

Paso 3: Región en las nuevas variables

La región Ω en las variables (u, v) se transforma como sigue:

- $x + y = u$, con $u \in [0, 1]$.
- $x - y = v$, con $v \in [-u, u]$.

Por lo tanto, la región en (u, v) está definida por:

$$u \in [0, 1], \quad v \in [-u, v].$$

Paso 4: Reescribir la integral

El integrando se convierte en:

$$\frac{x - y}{x + y} = \frac{v}{u}.$$

La integral original se transforma en:

$$\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

Paso 5: Resolver la integral

Para u fijo, integramos respecto a v:

$$\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}v.$$

Realizamos el cambio de variable $t = \dfrac{v}{u}$, de donde:

$$v = ut, \quad \mathrm{d}v = u\,\mathrm{d}t$$

Los límites de integración cambian:

- Cuando $v = -u$, $t = -1$
- Cuando $v = u$, $t = 1$

La integral respecto a v se convierte en:

$$\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}v = \int_{-1}^{1} e^t \cdot u\,\mathrm{d}t = u \int_{-1}^{1} e^t\,\mathrm{d}t = u \cdot [e^t]_{-1}^{1} = u \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Sustituimos el resultado interior en la integral original:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e - \frac{1}{e}\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)\cdot\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}\cdot\left(e - \frac{1}{e}\right)}$$

16) Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

Nos piden calcular el volumen del sólido comprendido entre los cilindros parabólicos:

1) $z = x^2$ (abierto hacia el plano xy en x).

2) $z = 4 - y^2$ (abierto hacia el plano xy en y).

Paso 1: Determinar la región en el plano xy

Para encontrar la región en el plano xy, igualamos las ecuaciones de los cilindros:

$$x^2 = 4 - y^2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Esto corresponde a un círculo de radio 2 centrado en el origen.

La región de proyección en el plano xy está dada por:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Paso 2: Expresar el volumen como una integral

El volumen del sólido está dado por:

$$V = \iint_{\text{Región}} [(z_{\text{sup}} - z_{\text{inf}})]\,\mathrm{d}A,$$

donde:

- $z_{\text{sup}} = 4 - y^2$
- $z_{\text{inf}} = x^2$

Por lo tanto:

$$z_{\text{sup}} - z_{\text{inf}} = (4 - y^2) - x^2 = 4 - x^2 - y^2$$

La integral del volumen se convierte en:

$$V = \iint_{x^2+y^2\leq 4} (4 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}A.$$

Paso 3: Cambiar a coordenadas polares:

En coordenadas polares:

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$
- $x^2 + y^2 = r^2$
- $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

La región se describe como:

$$r \in [0, 2], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

El integrando se convierte en:

$$4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2.$$

La integral en coordenadas polares es:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Paso 4: Resolver la integral

$$\int_0^2 4r-r^3\,\mathrm{d}r=\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2=8-4=4$$
$$\int_0^{2\pi} 4\,\mathrm{d}\theta=4\cdot[\theta]_0^{2\pi}=\boxed{8\pi}$$

17) Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Nos piden calcular el volumen del sólido definido por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

que describe un **elipsoide** centrado en el origen, con semiejes $a, b,$ y c.

Paso 1: Reescribir la ecuación del elipsoide

El elipsoide puede ser escrito como:

$$x^2+y^2+z^2\leq 1 \quad \text{(en un espacio escalado por } a, b \text{ y } c).$$

Para facilitar el cálculo, hacemos un cambio de variables:

$$u=\frac{x}{a},\quad v=\frac{y}{b},\quad w=\frac{z}{c}.$$

Esto transforma la ecuación del elipsoide en una esfera:

$$u^2+v^2+w^2\leq 1$$

El jacobiano del cambio de variables es:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\det\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=abc\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

El volumen se transforma en:

$$V=\iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} abc\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=abc\iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Paso 2: Volumen de la esfera unitaria

La integral restante es el volumen de una esfera unitaria en coordenadas esféricas:

$$u=r\sin\phi\cos\theta,\quad v=r\sin\phi\sin\theta,\quad w=r\cos\phi,$$

y el elemento del volumen es:

$$\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta.$$

El volumen se convierte en:

$$abc \cdot \iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} 1 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w = abc \cdot \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot abc = \boxed{\frac{4\pi}{3} abc}$$

Paso 3: Resolver las integrales

$$\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi = [-\cos\theta]_0^{2\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

$$\int_0^1 r^2 \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

18) Calcular

$$\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{(x^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde Ω es la región limitado por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, donde $0<b<a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.

Queremos calcular:

$$\iint_\Omega \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{2}{3}}},$$

donde Ω es la región limitada por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, con $0 \leq b \leq a$.

Paso 1: Cambio a coordenadas esféricas:

- $x = r\sin\phi\cos\theta$
- $y = r\sin\phi\sin\theta$
- $z = r\cos\phi$
- $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$

La región en coordenadas esféricas está definida por:

- $r \in [b, a]$
- $\phi \in [0, \pi]$
- $\theta \in [0, 2\pi]$

El integrando se transforma en:

$$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^3}.$$

Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_b^a \frac{r^2 \sin\phi}{r^3} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_b^a \frac{1}{r} \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$$

Paso 2: Separar la integral

Separamos las integrales:

$$\int_b^a \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r = [\ln(r)]_b^a = \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\int_0^\pi \sin\phi \, \mathrm{d}\phi = [-\cos(\phi)]_0^\pi = -(-1) + 1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Paso 3: Multiplicar los resultados

El volumen total es:

$$V = 2\pi \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \boxed{4\pi \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Capítulo 2: Campos escalares y vectoriales

1) Calcular el gradiente de los siguientes campos escalares:

a) $f(x, y, z) = e^{zyx}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$$

b) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2y = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2z = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

c) $f(x, y, z) = \sin(xyz)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (\cos(xyz) \cdot yz, \cos(xyz) \cdot xz, \cos(xyz) \cdot xy)$$

d) $\cos(x + y + z)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-\sin(x + y + z), -\sin(x + y + z), -\sin(x + y + z))$$

2) Calcular la divergencia y el rotacional de los siguientes campos:

Vamos a calcular la **divergencia** y el **rotacional**. Las fórmulas son:

1) **Divergencia** de $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

2) **Rotacional** de $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x)\mathbf{i} + (\cos)\mathrm{j}$.

1) Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(\sin x)}{\partial x} + \frac{\partial(\cos x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = \cos x + 0 + 0 = \cos x$$

2) Rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \\ \sin x & \cos x & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0,0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial(\cos x)}{\partial x} - \frac{\partial(\sin)}{\partial y}\right) = \mathbf{k}(-\sin x - 0) = -\sin x\mathbf{k}$$

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

1) Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 1 - 1 + 0 = 0$$

2) Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & -y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial(-y)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y}\right) = 0$$

c) $\mathbf{F}(x, y, z) = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} -^3 fk$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(ax)}{\partial x} + \frac{\partial(by)}{\partial y} + \frac{\partial(-cz)}{\partial z} = a + b - c$$

2) Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ax & by & -cz \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(0-0) = 0$$

d) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$.

1) Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(-z^2)}{\partial z} = 2x + 2y - 2z$$

2) Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & -z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(0-0) = 0$$

e) $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

1) Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(yz)}{\partial y} + \frac{\partial(xz)}{\partial z} = y + z + x$$

2) Relacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = \mathbf{i}(z-z) - \mathbf{j}(x-x) + \mathbf{k}(y-y) = 0$$

f) $\mathbf{F}(x,y,z) = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z^2\mathbf{j} + y^2z^3\mathbf{k}$.

1) Divergencia:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y^2z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2z^3)}{\partial z} = yz + 2x^2yz^2 + 3y^2z^2$$

2) Relacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^2y^2z^2 & y^2z^3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2xz^3 - 2x^2y^2z) - \mathbf{j}(xy - 0) + \mathbf{k}(2xy^2z^2 - xz)$$

$$= (2xz^3 - 2x^2y^2z)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + (2xy^2z^2 - xz)\mathbf{k}$$

3) Sea $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Se define el *Laplaciano de f* como la divergencia del gradiente de f, esto es

$$\nabla^2 f =< \nabla, \nabla f >= \operatorname{div}(\nabla f).$$

Una función f se dice *armónica* si $\nabla^2 f = 0$. Identificar cuáles de las siguientes funciones son armónicas:

a) $f(x,y) = e^z \cos y$.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 + (-e^z \cos y) + e^z \cos y = 0 \longrightarrow f(x,y,z) \text{ es armónica}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^z(-\sin y) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^z(-\cos y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^z \cos y \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^z \cos y$$

b) $f(x,y,z) = e^{-z}(\cos y - \sin y)$.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 + e^{-z}(-\cos y + \sin y) + e^{-z}(\cos y - \sin y) = 0 \longrightarrow f(x,y,z) \text{ es armónica}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-z}(-\sin y - \cos y) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{-z}(-\cos y + \sin y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{-z}(-\cos y + \sin y) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{-z}(\cos y - \sin y)$$

c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3z^2 - 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \neq 0$$
$$\longrightarrow f(x,y,z) \text{ no es armónica}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = -z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

4) Dadas las funciones $\mathbf{F}(x,y,z) = 2\mathrm{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ y $\mathbf{G}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcular:

a) $\mathrm{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$

La fórmula del rotaciona del producto vectorial de dos campos $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ es:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + F(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})$$

Paso 1: Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \cdot \mathbf{G}$

- $\mathbf{F}(x,y,z) = 2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(2)}{\partial x} + \frac{\partial(2x)}{\partial y} + \frac{\partial(3y)}{\partial z} = 0$$

- $\mathbf{G}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial z} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 - 1 + 1 = 1$$

Paso 2: Calcular $(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$ y $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

- Para $(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$:

$$G \cdot \nabla = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Aplicamos este operacdor a cada componente de $\mathbf{F}$:

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F}_x = x \cdot \frac{\partial(2)}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial(2)}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial(2)}{\partial z} = 0$$
$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}_y = x \cdot \frac{\partial(2x)}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial(2x)}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial(2x)}{\partial z} = 2x$$
$$(G \cdot \nabla)\mathbf{F}_z = x \cdot \frac{\partial(3y)}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial(3y)}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial(3y)}{\partial z} = -3y$$
$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} = O\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - 3y\mathbf{k}$$

- Para $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$:

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = 2\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y} + 3y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Aplicamos este operador a cada componente de $\mathbf{G}$:

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}_x = 2 \cdot \frac{\partial(x)}{\partial x} + 2x \cdot \frac{\partial(x)}{\partial y} + 3y \cdot \frac{\partial(x)}{\partial z} = 2$$
$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}_y = 2 \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial x} + 2x \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} + 3y \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial z} = -2y$$
$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}_z = 2 \cdot \frac{\partial(z)}{\partial x} + 2x \cdot \frac{\partial(z)}{\partial x} + 3y \cdot \frac{\partial(z)}{\partial z} = 3y$$
$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} = 2\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$$

Paso 3: Sustituir en la fórmula

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot G) - \mathbf{G}(\nabla \cdot F)$$

1) $(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (F \cdot \nabla)\mathbf{G} = (0\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - 3y\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} - 4y\mathbf{k}$

2) $\mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) = 1 \cdot F = 2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$

3) $-\mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) = -2(x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$

Sumamos todas las contribuciones:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (-2 + 2 - 2x)\mathbf{i} + (4x + 2x + 2y)\mathbf{j} + (-yy + 3y - 2z)\mathbf{k} = (-2x)\mathbf{i} + (6x + 2y)\mathbf{j} + (-3y - 2z)\mathbf{k}.$$

b) $\mathrm{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$

Paso 1: Calcular $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$

El producto cruzado es:

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2x & 3y \\ x & -y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2x & 3y \\ -y & z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 3y \\ x & z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 2x \\ x & -y \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2x \cdot z - 3y \cdot (-y) - \mathbf{j}(2z - 3xy)) + \mathbf{k}(-2y - 2x^2)$$

$$= (2xz + 3y^2)\mathbf{i} - (2z - 3xy)\mathbf{j} + (-2y - x^2)\mathbf{k}$$

Paso 2: Calcular $\mathrm{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$

La divergencia es:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(2xz + 3y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-(2z - 3xy)) + \frac{\partial}{\partial z}(-2y - 2x^2) = 2z + 3x + 0 = 2x + 3x$$

5) Sean f y g dos campos escalares, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ dos campos vectoriales y, $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar las siguientes propiedades:

a) $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla(f)$.

$$\nabla(\alpha f) = \left(\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x}, \frac{\partial(\alpha f)}{\partial y}, \frac{\partial(\alpha f)}{\partial z} \right) = \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x}, \alpha \frac{\partial f}{\partial y}, \alpha \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \alpha \nabla(f)$$

b) $\nabla(f + g) = \nabla(f) + \nabla(g)$

$$\nabla(f+g) = \left(\frac{\partial(f+g)}{\partial x}, \frac{\partial(f+g)}{\partial y}, \frac{\partial(f+g)}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

Por lo tanto:

$$\nabla(f + g) = \nabla(f) + \nabla(g)$$

c) $\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g\nabla(f) - f\nabla(g)}{g^2}$, $g \neq 0$.

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}, \frac{\frac{\partial f}{\partial y} g - f \frac{\partial h}{\partial y}}{g^2}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z} g - f \frac{\partial g}{\partial z}}{g^2} \right) = \frac{g\nabla(f) - f\nabla(g)}{g^2}$$

d) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla(f)$

$$\nabla(fg) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z} \right) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$$

e) $\mathrm{div}(\alpha \mathbf{F}) = \alpha \mathrm{div}(\mathbf{F})$.

$$\alpha\mathbf{F} = \alpha F_x\mathbf{i} + \alpha F_y\mathbf{j} + \alpha F_z\mathbf{k}$$

$$\mathrm{div}(\alpha\mathbf{F}) = \nabla\cdot(\alpha\mathbf{F}) = \frac{\partial(\alpha F_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha F_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha F_z)}{\partial z} = \alpha\frac{\partial F_x}{\partial x} + \alpha\frac{\partial F_y}{\partial y} + \alpha\frac{\partial F_z}{\partial z} = \alpha\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) = \alpha\mathrm{div}(\mathbf{F})$$

f) $\mathrm{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \mathrm{div}(\mathbf{F}) + \mathrm{div}(\mathbf{G})$.

$$\mathbf{F}+\mathbf{G} = (F_x+G_x)\mathbf{i} + (F_y+G_y)\mathbf{j} + (F_z+G_z)\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \nabla\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G}) &= \frac{\partial(F_x+G_x)}{\partial x} + \frac{\partial(F_y+G_y)}{\partial y} + \frac{\partial(F_z+G_z)}{\partial z} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\\ &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right) = \mathrm{div}(\mathbf{F}) + \mathrm{div}(\mathbf{G})\end{aligned}$$

g) $\mathrm{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \mathrm{rot}(\mathbf{F}) + \mathrm{rot}(\mathbf{G})$.

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \nabla\times(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = (\nabla\times\mathbf{F}) + (\nabla\times\mathbf{G}) = \mathrm{rot}(\mathbf{F}) + \mathrm{rot}(\mathbf{G})$$

h) $\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\mathrm{rot}(\mathbf{F})$

$$\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{F}) = \nabla\times(\alpha\mathbf{F}) = \alpha(\nabla\times\mathbf{F}) = \alpha\mathrm{rot}(\mathbf{F})$$

i) $\mathrm{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) =< \mathrm{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{G} > - < \mathbf{F}, \mathrm{rot}(G) >$

Sea $\mathbf{F}\times\mathbf{G} = \mathbf{H} = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k}$, donde:

$$\mathbf{F}\times\mathbf{G} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}$$

$$H_x = F_yG_z - F_zG_y,\quad H_y = F_zG_x - F_xG_z,\quad H_z = F_xG_y - F_yG_x.$$

La divergencia de $\mathbf{H}$ es:

$$\mathrm{div}(\mathbf{H}) = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Susituimos cada cmponente H_x, H_y, H_z y derivamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_x}{\partial x} &= \frac{\partial(F_yG_z)}{\partial x} - \frac{\partial(F_zG_y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}G_z + F_y\frac{\partial G_z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x}G_y + F_z\frac{\partial G_y}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial H_y}{\partial y} &= \frac{\partial(F_zG_x)}{\partial y} - \frac{\partial(F_xG_z)}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}G_x + F_z\frac{\partial G_x}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}G_z + F_x\frac{\partial G_z}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial H_z}{\partial z} &= \frac{\partial(F_xG_y)}{\partial z} - \frac{\partial(F_yG_x)}{\partial z} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z}G_y + F_x\frac{\partial G_y}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F_y}{\partial z}G_x + F_y\frac{\partial G_x}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

Sumamos todos los términos:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) =& G_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) + G_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + G_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\\ &- F_z\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right) - F_x\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) - F_y\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) = \langle\mathrm{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{G}\rangle - \langle\mathbf{F}, \mathrm{rot}(\mathbf{G})\rangle\end{aligned}$$

j) $\mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = f\mathrm{rot}(\mathbf{F}) + (\nabla f\times\mathbf{F})$

$$\mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = \nabla\times(f\mathbf{F}) = f(\nabla\times F) + (\nabla f\times\mathbf{F}) = f\mathrm{rot}(\mathbf{F}) + (\nabla f\times\mathbf{F})$$

k) $\mathrm{div}(f\mathbf{F}) = f\mathrm{div}(\mathbf{F}) + < \nabla f, \mathbf{F} >$

$$\mathrm{div}(f\mathbf{F}) = \nabla\cdot(f\mathbf{F}) = f(\nabla\cdot\mathbf{F}) + \langle\nabla f, \mathbf{F}\rangle = f\mathrm{div}(\mathbf{F}) + \langle\nabla f, \mathbf{F}\rangle\,.$$

l) $\mathrm{div}(f\nabla g) = f\mathrm{div}(\nabla g) + < \nabla f, \nabla g >$

$$\mathrm{div}(f\nabla g) = f(\nabla\cdot\nabla g) + \langle\nabla f, \nabla g\rangle = f\nabla^2 g + \langle\nabla f, \nabla g\rangle$$

6) Determinar si los siguientes campos vectoriales son conservativos y en caso de serlo obtener su función potencial:

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$.

El rotacional se define como:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

donde:

$$F_x = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \quad F_y = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \quad F_z = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

1) Primera componente en $\mathbf{i}$:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = -\frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \left(-\frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2z\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2z\cdot\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = -\frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2y\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2y\cdot\left(-\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = -\frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)}$$

2) Segunda componente en $\mathbf{j}$:

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = -\frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \left(-\frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2x\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2x\cdot\left(-\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = -\frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$
$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2z\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2z\cdot\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = -\frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

3) Tercera componente en $\mathbf{k}$:

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)} - \left(-\frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2y\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2y\cdot\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) = 2x\cdot\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Como todas las componentes del rotacional son cero, se tiene:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0.$$

Por lo tanto, el campo $\mathbf{F}$ es convervativo. Esto implica que existe una función potencial $f(x,y,z)$ tal que:

$$\mathbf{F} = \nabla f.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Observamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x^2+y^2+z^2)), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln(x^2+y^2+z^2)), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\ln(x^2+y^2+z^2)).$$

Por lo tanto, la función potencial es:

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2) + C,$$

donde C es una constante de integración.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{y}\mathbf{j} + \frac{1}{z}\mathbf{k}$

El rotacional se define como:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde:

$$F_x = \frac{1}{x}, \quad F_y = \frac{1}{y}, \quad F_z = \frac{1}{z}$$

1) Primera componente en $\mathbf{i}$:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = 0 - 0 = 0$$

2) Segunda componente en $\mathbf{j}$:

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = 0 - 0 = 0$$

3) Tercera componente en $\mathbf{k}$:

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0 - 0 = 0$$

Como todas las componentes son cero, se tiene:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = 0.$$

Por lo tanto, el campo $\mathbf{F}$ es conservativo. Esto implica que existe una función potencial $f(x,y,z)$ tal que:

$$\mathbf{F} = \nabla f.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z}.$$

Observamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x+y+z)), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln(x+y+z)), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\ln(x+y+z)).$$

Por lo tanto, la función potencial es:

$$f(x,y,z) = \ln(x+y+z) + C,$$

donde C es una constante de integración.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2)\mathbf{i} + 2yx\mathbf{j}$

El rotacional se define como:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_x \end{vmatrix}$$

donde:

$$F_x = x + y^2, \quad F_y = 2yx, \quad F_z = 0.$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y^2 & 2yx & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(2y-2y) = 0$$

Tenemos que:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = 0.$$

Por lo tanto, el campo $\mathbf{F}$ es conservativo. Esto implica que existe una función potencial $f(x, y, z)$ tal que:

$$\mathbf{F} = \nabla f.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0$$

Integramos F_x respecto de x:

$$f(x, y, z) = \int F_x \, \mathrm{d}x = \int x + y^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + xy^2 + C(y, z),$$

donde $C(y, z)$ es una función que puede depender de y y z.

Ahora derivamos $f(x, y, z)$ respecto a y y comparamos con F_y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + y^2x + C(y, z)\right) = 2yx + \frac{\partial C(y, z)}{\partial y}.$$

Igualamos con $F_y = 2xy$:

$$2yx + \frac{\partial C(y, z)}{\partial y} = 2yx \longrightarrow \frac{\partial C(y, z)}{\partial y} = 0 \longrightarrow C(y, z) = C(z),$$

donde $C(z)$ es una función que depende solo de z.

Para finalizar derivamos $f(x, y, z)$ respecto de z y lo comparamos con $F_z = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2} + y^2x + C(z)\right) = \frac{\partial C(z)}{\partial z} = 0 \longrightarrow C(z) = \text{constante}.$$

Sustituyendo en $f(x, y, z)$:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + y^2x + \text{constante} = \frac{x^2}{2} + y^2x + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

d) $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{(x^1 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j} + \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{k}$

El rotacional se define como:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde:

$$F_x = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_y = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_z = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1) Primera componente en **i**:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = -\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(-\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = z \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = z \cdot \left(-\frac{3y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = -\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = y \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = y \cdot \left(-\frac{3z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = -\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

2) Segunda componente en **j**:

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) = -\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(-\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = x \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = x \cdot \left(-\frac{3z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = -\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = z \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = z \cdot \left(-\frac{3x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = -\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

3) Tercera componente en **k**:

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = -\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(-\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = y \cdot \left(-\frac{3x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = -\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = x \cdot \left(-\frac{3y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = -\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Como todas las componentes son cero, se tiene:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = 0$$

Por lo tanto, el campo $\mathbf{F}$ es conservativo. Esto implica que existe una función potencial $f(x, y, z)$ tal que:

$$\mathbf{F} = \nabla f.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integramos $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ respecto a x:

$$f(x,y,z) = \int \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} u = x^2+y^2+z^2 \\ \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{\sqrt{u}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C(y,z),$$

donde $C(y,z)$ es una función que puede depender de y y z.

Derivamos $f(x,y,z)$ respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C(y,z)\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left((x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Esto coincide con el componenonente F_y, por lo que $C(y,z)$ no depende de y ni de z. Por simetría del campo, verificamos también el componente respecto a z.

Finalmente, la función potencial es:

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$

El rotacional se define como:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde:

$$F_x = y+z, \quad F_y = x+z, \quad F_z = x+y$$

Sustituyendo tenemos:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1-1) - \mathbf{j}(1-1) + \mathbf{k}(1-1) = 0$$

Tenemos que:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = 0.$$

Por lo tanto, el campo $\mathbf{F}$ es conservativo. Esto implica que existe una función potencial $f(x,y,z)$ tal que:

$$\mathbf{F} = \nabla f.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y+z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x+z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x+y.$$

Integramos F_x respecto de x:

$$f(x,y,z) = \int y+z\,\mathrm{d}x = xy + xz + C(y,z),$$

donde $C(y,z)$ es una función que puede depender de y y z.

Ahora derivamos $f(x,y,z)$ respecto a y y comparamos con F_y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + xz + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y}$$

Igualamos con $F_y = x + z$:

$$x + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = x + z \longrightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = z \longrightarrow C(y,z) = yz + D(z),$$

donde $D(z)$ es una función que puede depender de z.

Derivamos $f(x,y,z)$ respecto a z y comparamos con F_z:

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + D(z) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = x + y + \frac{\partial D(z)}{\partial z}$$

Igualamos con F_z:

$$x + y + \frac{\partial D(z)}{\partial z} = x + y \longrightarrow \frac{\partial D(z)}{\partial z} = 0 \longrightarrow D(z) = \text{constante}.$$

Sustituyendo todo, obtenemos:

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

f) $\mathbf{F}(x,y,z) = (4x + 2y + 2z)\mathbf{i} + (2x + 4y + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y + 4z)\mathbf{k}$

El rotacional se define como:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde:

$$F_x = 4x + 2y + 2z, \quad F_y = 2x + 4y + 2z, F_z = 2x + 2y + 4z$$

Sustituyendo tenemos:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4x + 2y + 2z & 2x + 4y + 2x & 2x + 2y + 4z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2-2) - \mathbf{j}(2-2) + \mathbf{k}(2-2) = 0$$

Tenemos que:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = 0.$$

Por lo tanto, el campo $\mathbf{F}$ es conservativo. Esto implica que existe una función potencial $f(x,y,z)$ tal que:

$$\mathbf{F} = \nabla f.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 4y + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 2y + 4z.$$

Integramos F_x respecto de x:

$$f(x,y,z) = \int 4x + 2y + 2z \, \mathrm{d}x = 2x^2 + 2xy + 2xz + C(y,z),$$

donde $C(y,z)$ es una función que puede depender de y y z.

Ahora derivamos $f(x,y,z)$ respecto a y y comparamos con F_y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2 + 2xy + 2xz + C(y,z)\right) = 2x + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y}$$

Igualamos con $F_y = 2x + 4y + 2z$:

$$2x + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 2x + 4y + 2z \longrightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 4y + 2z \longrightarrow C(y,z) = 2y^2 + 2yz + D(z),$$

donde $D(z)$ es una función que puede depender de z.

Derivamos $f(x,y,z)$ respecto a z y comparamos con F_z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(2x^2 + 2xy + 2xz + 4y^2 + 2yz + D(z)\right) = 2x + 2y + \frac{\partial D(z)}{\partial z}$$

Igualamos con $F_z = 2x + 2y + 4z$:

$$2x + 2y + \frac{\partial D(z)}{\partial z} = 2x + 2y + 4z \longrightarrow \frac{\partial D(z)}{\partial z} = 4z \longrightarrow D(z) = 2z^2 + \text{constante}.$$

Sustituyendo todo en $f(x,y,z)$:

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

7) Dada $f(x,y)$, calcular el gradiente de f en coordenadas polares.

Sea $f(x,y)$ una función escalar en el plano cartesiano. En coordenadas polares, las relaciones entre las coordenadas cartesianas (x,y) y las polares (r,θ) son:

1) $x = r\cos\theta$
2) $y = r\sin\theta$

El gradiente de $f(x,y)$ en coordenadas cartesianas está definido como:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

En coordenadas polares, deseamos expresar ∇f en términos de las coordenadas (r,θ) y los vectores base $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$, donde:

1) $\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$
2) $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$

La transformación de las derivadas parciales en coordenadas polares está dada por:

1) $\dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$
2) $\dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

Sutituyendo estas expresioes en el gradiente cartesiano:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{j}.$$

Reescribirmos cada derivada parcial en términos de r y θ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\end{aligned}$$

Sustituimos en ∇f :

$$\nabla f = \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\mathbf{j}.$$

Usamos las relaciones:

$$\mathbf{i} = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{j} = \sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta.$$

Sustituimos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ en ∇f:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_\theta,$$

donde:

- $\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$
- $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$

8) Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2. Comprobar que

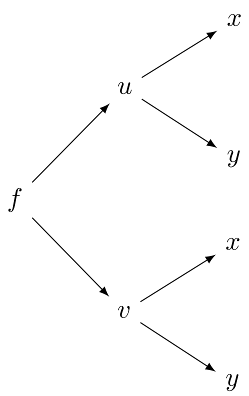
$$\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$.

Dado $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$, notamos que $f(x,y)$ puede ser reespresado en términos de u y v:

$$f(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))-$$

Por la regla de la cadena, las derivadas parciales de f respecto a x e y se expresan como:



$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Las derivadas de u y v respecto a x e y son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x\end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en las expresiones de las primeras y segundas derivadas de f, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 8xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\frac{\partial f}{\partial u} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 8xy\frac{\partial f}{\partial v \partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\end{aligned}$$

Sumamos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\cancel{\left(2\frac{\partial f}{\partial u}-2\frac{\partial f}{\partial u}\right)}+4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+\left(\cancel{8xy\frac{\partial f}{\partial u\partial v}-8xy\frac{\partial f}{\partial u\partial v}}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\longrightarrow \boxed{\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)}$$

9) Demostrar que si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2 y se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0,$$

entonces también se verifica

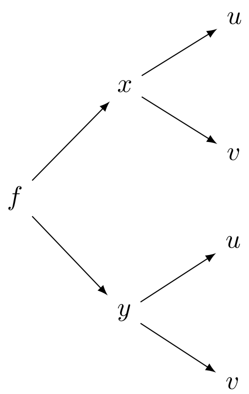
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)=0$$

donde $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$ e $y=\dfrac{v}{u^2+v^2}$.

Dado que $f(x,y)$ es una función escalar de (x,y), podemos expresarla en términos de las coordenadas (u,v):

$$f(x,y)=f\left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{v}{u^2+v^2}\right).$$

Por lo tanto, las derivadas parciales de f respecto de u y v puede ser calculadas usando la regla de la cadena.



$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\longrightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\longrightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

Sumando $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$, obtenemos: