Señales y Sistemas

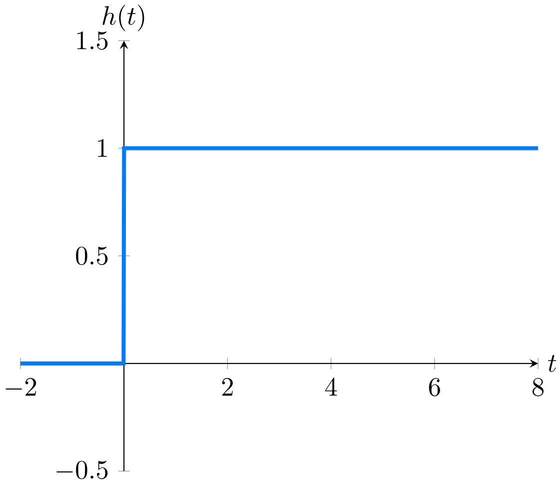
Examen Mayo 2025

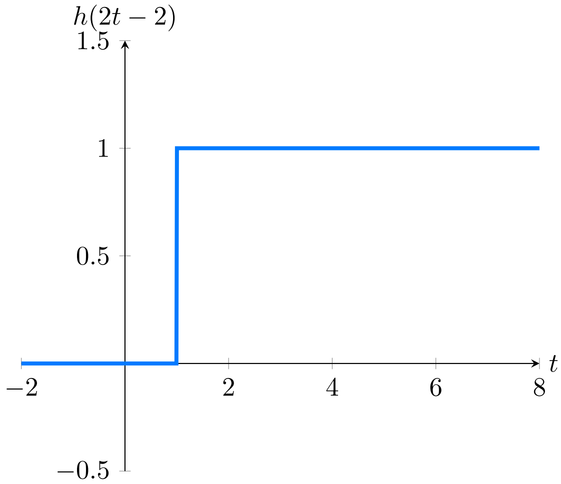
Francisco Javier Mercader Martínez

Problema 1 Dominio del tiempo.

Sea un sistema LTI continuo cuya respuesta al impulso es $h(t) = u(t) + \delta(t-6)$.

a) Represente $h(t)$ y $h(2t-2)$.





b) Estuda las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad del sistema.

$$h(t) \neq 0 \text{ para } t \neq 0 \longrightarrow \text{ con memoria}$$

$$h(t) = 0 \text{ para } t < 0 \longrightarrow \text{ causal}$$

$$\int_0^\infty |h(t)|\,\mathrm{d}t = \infty \longrightarrow u$$

c) Calcule la señal de salida cuando a la entrada se aplica la señal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

La salida es:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [u(t) + \delta(t-6)] = x(t) * u(t) + x(t) * \delta(t-6)$$

1) $x(t) * u(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = 1 - e^{-t}$

2) $x(t) * \delta(t-6) = x(t-6) = e^{-(t-6)}u(t-6)$

Resultado final:

$$y(t) = (1 - e^{-t}) + e^{-(t-6)}u(t-6)$$

d) Calcule la energía total y potencia media de la señal de entrada $x(t)$.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \int_0^{\infty} e^{-2t} \, \mathrm{dt} = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\infty} = \left(-\cancelto{0}{\frac{e^{-\infty}}{2}} - \left(-\frac{e^0}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \lim_{T\to\infty} \frac{E}{2T} = \frac{\frac{1}{2}}{\infty} = 0$$

e) Si la señal de entrada es $3e^{-(t-1)}u(t-1) + 2e^{-(t-3)}u(t-3)$, ¿cuál será la señal de salida?

Usamos la linealidad de la convolución:

$$y(t) = 3e^{-(t-1)}u(t-1) * h(t) + 2e^{-(t-3)}u(t-3) * h(t)$$

Sabemos que:

$$e^{-(t-a)}u(t-a) * h(t) = (1 - e^{-(t-a)})u(t-a) + e^{-(t-a-6)}u(t-a-6)$$

Entonces:

- Para el primer término ($a = 1$):

$$3\left[(1 - e^{-(t-1)})u(t-1) + e^{-(t-7)}u(t-7)\right]$$

- Para el segundo término ($a = 3$):

$$2\left[(1 - e^{-(t-3)})u(t-3) + e^{-(t-9)}u(t-9)\right]$$

Resultado final:

$$y(t) = 3(1 - e^{-(t-1)})u(t-1) + 3e^{-(t-7)}u(t-7) + 2(1 - e^{-(t-3)})u(t-3) + 2e^{-(t-9)}u(t-9)$$

Sea el sistema LTI discreto dado por la relación salida-entrada

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] + x[n-1]$$

f) Obtenga y represente la respuesta al impulso $h[n]$.

La respuesta al impulso se obtiene aplicando como entrada:

$$x[n] = \delta[n]$$

Y calculando la salida $y[n] = h[n]$ paso a paso.

$$n = 0 \longrightarrow \cancelto{0}{\frac{1}{2}y[-1]} + x[0] + \cancelto{0}{x[-1]} = 1$$

$$n = 1 \longrightarrow \frac{1}{2}y[0] + \cancelto{0}{x[1]} + x[0] = \frac{1}{2}\cdot 1 + 1 = \frac{3}{2}$$

$$n = 2 \longrightarrow \frac{1}{2}y[1] + \cancelto{0}{x[2]} + \cancelto{0}{x[1]} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

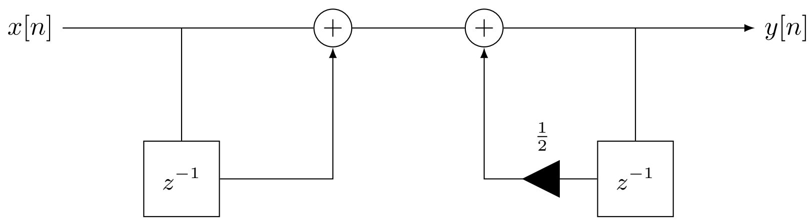
$$n = 3 \longrightarrow \frac{1}{2}y[2] + \cancelto{0}{x[3]} + \cancelto{0}{x[2]} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$n = 4 \longrightarrow \frac{1}{2}y[3] + \cancelto{0}{x[4]} + \cancelto{0}{x[3]} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

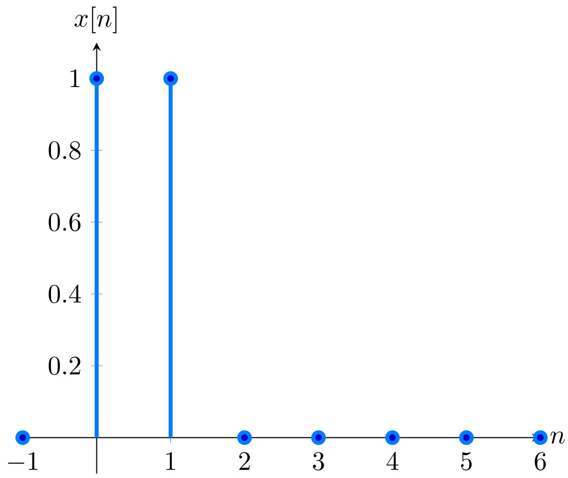
$$\vdots$$

Es un sistema IIR, ya que tiene retroalimentación.

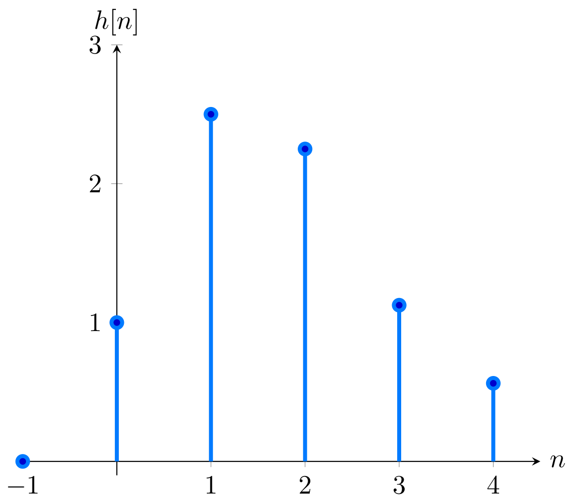
g) Dibuje el diagrama de bloques del sistema en su forma directa I.



h) Calcule la salida cuando la entrada es $x[n] = u[n] - u[n-2]$. Represéntela hasta $n = 4$.



$$
\begin{aligned}
n = 0 &\longrightarrow y[0] = \frac{1}{2}y[-1] + x[0] + x[-1] = 1\\
n = 1 &\longrightarrow y[1] = \frac{1}{2}y[0] + x[1] + x[0] = \frac{1}{2}\cdot 1 + 1 + 1 = \frac{5}{2}\\
n = 2 &\longrightarrow y[2] = \frac{1}{2}y[1] + x[2] + x[1] = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} + 0 + 1 = \frac{9}{4}\\
n = 3 &\longrightarrow y[3] = \frac{1}{2}y[2] + x[3] + x[2] = \frac{9}{8}\\
n = 4 &\longrightarrow y[4] = \frac{1}{2}y[3] + x[4] + x[3] = \frac{9}{16}
\end{aligned}
$$



Problema 2 Dominio de la frecuencia.

a) Obtenga de 2 formas distintas la expresión analítica del espectro $X(\omega)$ correspondiente a la señal $x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right) - \prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)$.

Forma 1: Usando propiedades de la Transformada de Fourier

Paso 1: Transformada de la función rectángular básica

La función rectangular:

$$\prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

tiene una Transformada de Fourier conocida:

$$\mathcal{F}\left\{\prod\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

donde

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Paso 2: Cambios en la señal original

Cada función en $x(t)$ es una versión **escalada y desplazada** de la rectangular básica:

$$x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right) - \prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)$$

La forma general es:

$$\prod\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \implies \mathcal{F}\left\{\prod\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\right\} = T \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega t_0}$$

Paso 3: Aplicar la propiedad lineal

Aplicamos la Transformada de Fourier a cada término:

- Para el primero:

$$\mathcal{F}\left\{\prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right)\right\} = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right) e^{-j\omega\cdot\frac{3}{2}}$$

- Para el segundo:

$$\mathcal{F}\left\{\prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)\right\} = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right) e^{-j\omega\cdot\frac{9}{2}}$$

Resultado (Forma 1):

$$X(\omega) = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right)\left(e^{-j\omega\cdot\frac{3}{2}} - e^{-j\omega\cdot\frac{9}{2}}\right)$$

Forma 2: Diferencia de funciones rectangulares como combinación de deltas en frecuencia

Podemos escribir la señal como la resta de dos funciones idénticas, desplazadas:

$$x(t) = f\left(t - \frac{3}{2}\right) - f\left(t - \frac{9}{2})\right) \text{ con } f(t) = \prod\left(\frac{t}{3}\right)$$

Entonces su espectro es:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left\{f\left(t-\frac{3}{2}\right)\right\} - \mathcal{F}\left\{f\left(t-\frac{9}{2}\right)\right\} = e^{-j\omega\cdot\frac{3}{2}}F(\omega) - e^{-j\omega\cdot\frac{9}{2}}F(\omega) = F(\omega)\left[e^{-j\frac{3}{2}\omega} - e^{-j\frac{9}{2}\omega}\right]$$

Con $F(\omega) = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right)$, tenemos:

$$X(\omega) = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right)\left[e^{-j\frac{3}{2}\omega} - e^{-j\frac{9}{2}\omega}\right]$$

b) Considere ahora la señal $z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-6n)$. Represente detalladamente la señal $z(t)$, indique si es periódica y, en caso afirmativo, exprese la señal $z(t)$ como una combinación lineal de exponenciales complejas. Obtenga la salida $y(t)$ que resultaría de procesar la señal $z(t)$ con el sistema LTI caracterizado por la respuesta al impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$.

Se nos da:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-6n)$$

Donde:

$$x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right) - \prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)$$

Esto representa una **replicación periódica** de $x(t)$ cada 6 unidades de tiempo. En otras palabras, $z(t)$ es la **versión periódica** de $x(t)$ con periodo $T = 6$.

Representación en el tiempo:

Recordemos la forma de $x(t)$:

- $x(t)$ es la **resto de dos funciones rectangulares** de anchura 3 y de centros en $t = \frac{3}{2}$ y $\frac{t}{9}$.
- Es decir:
  - La primera parte está entre $[0, 3]$
  - La segunda está entre $[3, 6]$
  - En resumen:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,3) \\ -1 & t \in [3,6) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, al hacer la suma periódica:

$$z(t) = x(t) - x(t-6) + x(t-12) + \cdots$$

Esta señal repite el mismo patrón:

- **Pulso de +1** entre $[0 + 6n, 3 + 6n)$
- **Pulso de -1** entre $[3 + 6n, 6 + 6n)$

Representación con exponenciales complejas

Como $z(t)$ es **periódica de periodo** $T = 6$, podemos expresarla como una serie de Fourier:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \text{ con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$$

Los coeficientes de Fourier se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T z(t)e^{-jk\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

Pero en $x(t)$ se tiene un patrón definido en cada periodo:

- Entre $t \in [0, 3)$, valor = 1.
- Entre $t \in [3, 6)$, valor = -1.

Entonces:

$$c_k = \frac{1}{6}\left(\int_0^3 e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\,\mathrm{d}t - \int_3^6 e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\,\mathrm{d}t\right)$$

Calculamos:

$$\int_0^3 e^{-jk\frac{\pi}{3}}\ \mathrm{dt} = \left[\frac{e^{-jk\frac{\pi}{3}t}}{-jk\frac{\pi}{3}}\right]_0^3 = \frac{1}{-jk\frac{\pi}{3}}(e^{-jk\pi}-1)$$
$$\int_3^6 e^{-jk\frac{\pi}{3}}\ \mathrm{dt} = \left[\frac{e^{-jk\frac{\pi}{3}t}}{-jk\frac{\pi}{3}}\right]_3^6 = \frac{1}{-jk\frac{\pi}{3}}(e^{-jk2\pi}-e^{-jk\pi})$$

Entonces:

$$c_k = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{e^{-jk\pi}-1}{-jk\frac{\pi}{3}} - \frac{e^{-jk2\pi}-e^{-jk\pi}}{-jk\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(e^{-jk\pi}-1)-(e^{-jk2\pi}-e^{-jk\pi})}{-jk\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2e^{-jk\pi}-e^{-jk2\pi}-1}{-jk\frac{\pi}{3}}$$

Esa es la expresión general de los coeficientes c_k, por tanto, la señal es:

$$z(t) = \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{-jk\pi}-e^{-jk2\pi}-1}{-jk\frac{\pi}{3}}e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

<u>Salida del sistema LTI con $h(t) = e^{-2t}u(t)$</u>

Este sistema LTI es una convolución:

$$y(t) = z(t) * h(t)$$

En el dominio de Fourier:

- Si $z(t) = \sum c_k e^{jk\omega_0 t}$,
- Y el sistema tiene respuesta al impulso $h(t) \implies H(\omega) = \dfrac{1}{jw+2}$

Entonces, al pasar $z(t)$ por el sistema, cada exponencial complejas se multiplica por el valor de $H(\omega)$ evaluado en $\omega_k = k\omega_0$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot H(k\omega_0)\cdot e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{-jk\pi}-e^{-jk2\pi}-1}{-jk\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{2+jk\frac{\pi}{3}}\cdot e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

c) Se nuestra ahora la señal $x(t)$ del apartado a) tomando una muestra cada $T_s = 0.5$ seg. Escriba la expresión analítica de la secuencia $x[n]$ resultante, e indique si se habrá producido solapamiento espectral (*aliasing*) al muestrear.

La señal $x(t)$ vale:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,3) \\ -1 & \text{si } t\in[3,6) \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Como el periodo de muestreo es $T_s = 0.5$, los instantes de muestreo son:

$$t = n\cdot 0.5 \implies n = 0,1,2,\ldots,11 \text{ para cubrir } t\in[0,6)$$

Ahora calculamos:

n	$t = 0.5n$	Tramo	$x[n] = x(0.5n)$
0	0	$[0, 3)$	1
1	0.5	$[0, 3)$	1
2	1	$[0, 3)$	1
3	1.5	$[0, 3)$	1
4	2	$[0, 3)$	1
5	2.5	$[0, 3)$	1
6	3	$[3, 6)$	-1
7	3.5	$[3, 6)$	-1
8	4	$[3, 6)$	-1
9	4.5	$[3, 6)$	-1
10	5	$[3, 6)$	-1
11	5.5	$[3, 6)$	-1
12	6	fuera de soporte	0

Así que:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ -1 & 6 \leq n \leq 11 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para comprobar si hay *aliasing* analizamos las frecuencias de la señal original $x(t)$.

Paso 1: Estimar el ancho de banda de $x(t)$

Sabemos que:

$$x(t) = \prod\left(\frac{t - \frac{3}{2}}{3}\right) - \prod\left(\frac{t - \frac{9}{2}}{3}\right)$$

Cada término es una **función rectangular de ancho 3**, cuya transformada de Fourier es:

$$X(\omega) = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$

La función sinc decae, pero su espectro **no está limitado** en frecuencia. Sin embargo, su **contenido energético principal** está concentrado en un cierto rango:

- Se puede considerar como **prácticamente acotada** en $|\omega| \lesssim 2\pi \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$
- Es decir, la mayoría del contenido está en torno a $f \approx \pm\dfrac{1}{3}\text{Hz}$

Paso 2: Condición de Nyquist

Para evitar aliasing, se debe cumplir:

$$f_s > 2f_{\max} \text{ o en términos de } \omega : \quad \omega_s > 2\omega_{\max}$$

En este caso:

- $T_s = 0.5 \implies f_s = \dfrac{1}{T_s} = 2 \text{ Hz} \to \omega_s = 4\pi$

- La banda signficativa de $x(t)$ está en $|w| \lesssim \frac{2\pi}{3}$.

Y claramente:

$$\omega_s = 4\pi > 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Por tanto, **no se ha producido *aliasing*** .

d) Se desea filtrar los 300 primeros valores (esto es, para los índices $0 \leq n \leq 299$) de la secuencia $x[n]$ del apartado anterior con un sistema causal cuya respuesta al impulso $h[n]$ está comprendida entre los índices $0 \leq n \leq 199$. Indique de la forma más eficiente de obtener el resultado de dicho procesado, $y[n]$, especificando el número de puntos sobre el que se realizarán los cálculos.

Datos:

- $x[n]$: Secuencia de entrada, conocida en el intervalo $0 \geq n \leq 299$ (300 muestras).
- $h[n]$: Respuesta al impulso del sistema, **causal**, con soporte en $0 \leq n \leq 199$ (200 muestras).
- Queremos calcular $y[n] = x[n] * h[n]$ solo para $0 \leq n \leq 299$.

Paso 1: ¿Qué tipo de convolución necesitamos?

La **convolución lineal** estándar entre dos señales de longitud N_x y N_h produce una salida de longitud:

$$N_y = N_x + N_h - 1 = 300 + 200 - 1 = 499$$

Pero **no queremos lo 499 valores**, solo los primeros 300:

$$y[n], \text{ para } 0 \leq n \leq 299$$

Paso 2: ¿Cómo calcularlo de forma eficiente?

La forma eficiente es usando la **convolución rápida con FFT** (*Transformada Rápida de Fourier*), pero **evitando calcular valores innecesarios**.

¿Qué estrategia seguir?

1) Rellenamos $x[n]$ con ceros hasta longitud mínima necesaria para que la convolución por FFT no dé al menos 300 valores válidos.
2) Se aplica convolución lineal usando FFTs.

Para convolución usando FFT, debemos calcular:

$$N \geq N_x + N_h - 1, \text{ donde } N = 2^x,\ x \in \mathbb{N}$$

- $N_x = 300$
- $N_h = 200$
- $N = 300 + 200 - 1 = 499 \implies N = 512$

Paso 3: Procedimiento eficiente.

1) $X[k] = \text{FFT}_N\{x[n]\}, H[k] = \text{FFT}_N\{h[n]\}$
2) $Y[k] = X[k] \cdot H[k]$
3) $y[n] = \text{IFFT}_N\{Y[k]\}$