Señales y Sistemas

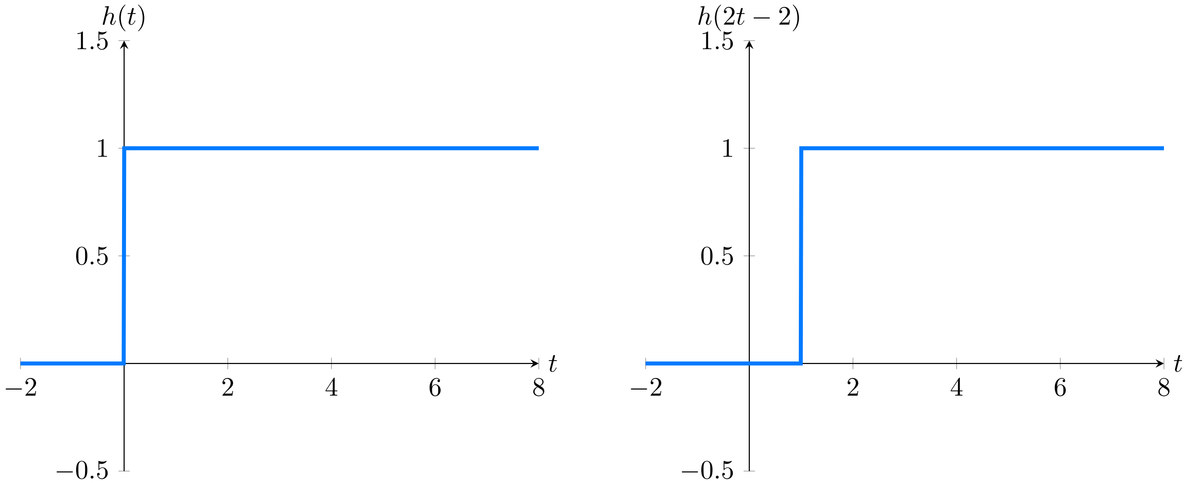
Examen Mayo 2025

Francisco Javier Mercader Martínez

Problema 1 Dominio del tiempo.

Sea un sistema LTI continuo cuya respuesta al impulso es $h(t) = u(t) + \delta(t-6)$.

a) Represente $h(t)$ y $h(2t-2)$.



b) Estuda las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad del sistema.

$$h(t) \neq 0 \text{ para } t \neq 0 \longrightarrow \text{ con memoria}$$

$$h(t) = 0 \text{ para } t < 0 \longrightarrow \text{ causal}$$

$$\int_0^{\infty} |h(t)|\, \mathrm{d}t = \infty \longrightarrow u$$

c) Calcule la señal de salida cuando a la entrada se aplica la señal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

La salida es:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [u(t) + \delta(t-6)] = x(t) * u(t) + x(t) * \delta(t-6)$$

1) $x(t) * u(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = 1 - e^{-t}$

2) $x(t) * \delta(t-6) = x(t-6) = e^{-(t-6)}u(t-6)$

Resultado final:

$$y(t) = (1 - e^{-t}) + e^{-(t-6)}u(t-6)$$

d) Calcule la energía total y potencia media de la señal de entrada $x(t)$.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \, \mathrm{dt} = \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{\infty} = \left(-\frac{\cancelto{0}{e^{-\infty}}}{2} - \left(-\frac{e^0}{2} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \lim_{T \to \infty} \frac{E}{2T} = \frac{\frac{1}{2}}{\infty} = 0$$

e) Si la señal de entrada es $3e^{-(t-1)}u(t-1) + 2e^{-(t-3)}u(t-3)$, ¿cuál será la señal de salida?

Usamos la linealidad de la convolución:

$$y(t) = 3e^{-(t-1)}u(t-1) * h(t) + 2e^{-(t-3)}u(t-3) * h(t)$$

Sabemos que:

$$e^{-(t-a)}u(t-a) * h(t) = (1 - e^{-(t-a)})u(t-a) + e^{-(t-a-6)}u(t-a-6)$$

Entonces:

- Para el primer término ($a = 1$):

$$3 \left[(1 - e^{-(t-1)})u(t-1) + e^{-(t-7)}u(t-7) \right]$$

- Para el segundo término ($a = 3$):

$$2 \left[(1 - e^{-(t-3)})u(t-3) + e^{-(t-9)}u(t-9) \right]$$

Resultado final:

$$y(t) = 3(1 - e^{-(t-1)})u(t-1) + 3e^{-(t-7)}u(t-7) + 2(1 - e^{-(t-3)})u(t-3) + 2e^{-(t-9)}u(t-9)$$

Sea el sistema LTI discreto dado por la relación salida-entrada

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] + x[n-1]$$

f) Obtenga y represente la respuesta al impulso $h[n]$.

La respuesta al impulso se obtiene aplicando como entrada:

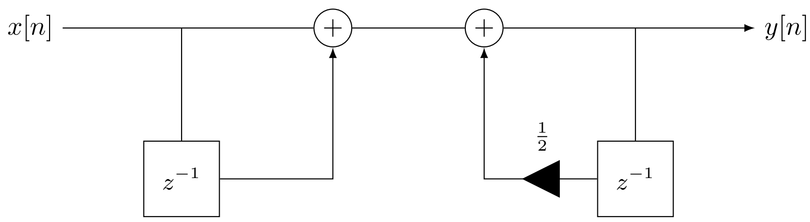
$$x[n] = \delta[n]$$

Y calculando la salida $y[n] = h[n]$ paso a paso.

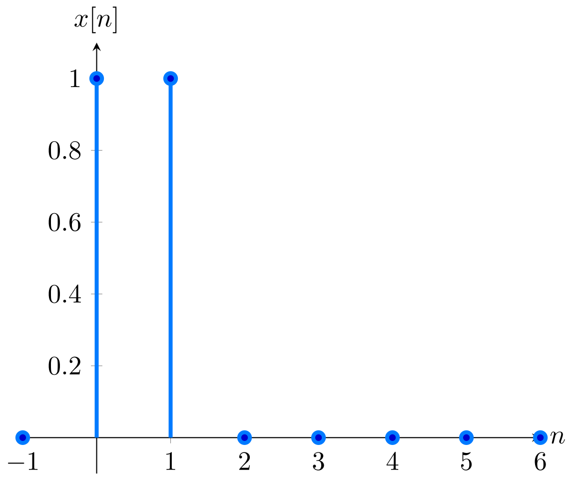
$$\begin{aligned}
n = 0 &\longrightarrow \cancelto{0}{\frac{1}{2}y[-1]} + x[0] + \cancelto{0}{x[-1]} = 1 \\
n = 1 &\longrightarrow \frac{1}{2}y[0] + \cancelto{0}{x[1]} + x[0] = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3}{2} \\
n = 2 &\longrightarrow \frac{1}{2}y[1] + \cancelto{0}{x[2]} + \cancelto{0}{x[1]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \\
n = 3 &\longrightarrow \frac{1}{2}y[2] + \cancelto{0}{x[3]} + \cancelto{0}{x[2]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \\
n = 4 &\longrightarrow \frac{1}{2}y[3] + \cancelto{0}{x[4]} + \cancelto{0}{x[3]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es un sistema IIR, ya que tiene retroalimentación.

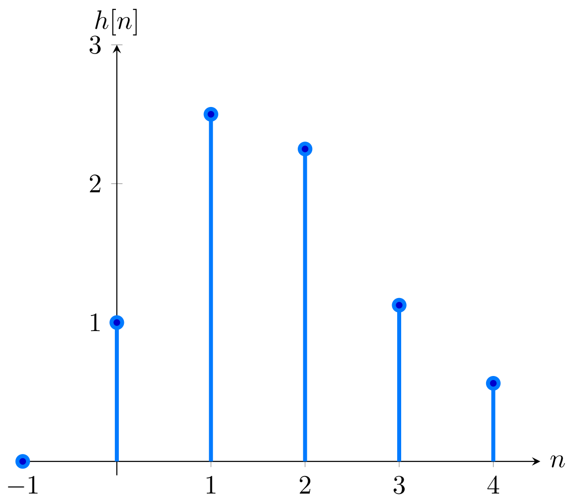
g) Dibuje el diagrama de bloques del sistema en su forma directa I.



h) Calcule la salida cuando la entrada es $x[n] = u[n] - u[n-2]$. Represéntela hasta $n = 4$.



$$n = 0 \longrightarrow y[0] = \frac{1}{2}y[-1] + x[0] + x[-1] = 1$$
$$n = 1 \longrightarrow y[1] = \frac{1}{2}y[0] + x[1] + x[0] = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 + 1 = \frac{5}{2}$$
$$n = 2 \longrightarrow y[2] = \frac{1}{2}y[1] + x[2] + x[1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} + 0 + 1 = \frac{9}{4}$$
$$n = 3 \longrightarrow y[3] = \frac{1}{2}y[2] + x[3] + x[2] = \frac{9}{8}$$
$$n = 4 \longrightarrow y[4] = \frac{1}{2}y[3] + x[4] + x[3] = \frac{9}{16}$$



Problema 2 Dominio de la frecuencia.

a) Obtenga de 2 formas distintas la expresión analítica del espectro $X(\omega)$ correspondiente a la señal $x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right) - \prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)$.

Forma 1: Usando propiedades de la Transformada de Fourier

Paso 1: Transformada de la función rectángular básica

La función rectangular:

$$\prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

tiene una Transformada de Fourier conocida:

$$\mathcal{F}\left\{\prod\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

donde

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Paso 2: Cambios en la señal original

Cada función en $x(t)$ es una versión **escalada y desplazada** de la rectangular básica:

$$x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right) - \prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)$$

La forma general es:

$$\prod\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \implies \mathcal{F}\left\{\prod\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\right\} = T \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega t_0}$$

Paso 3: Aplicar la propiedad lineal

Aplicamos la Transformada de Fourier a cada término:

- Para el primero:

$$\mathcal{F}\left\{\prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right)\right\} = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right) e^{-j\omega\cdot\frac{3}{2}}$$

- Para el segundo:

$$\mathcal{F}\left\{\prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)\right\} = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right) e^{-j\omega\cdot\frac{9}{2}}$$

Resultado (Forma 1):

$$X(\omega) = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right)\left(e^{-j\omega\cdot\frac{3}{2}} - e^{-j\omega\cdot\frac{9}{2}}\right)$$

Forma 2: Diferencia de funciones rectangulares como combinación de deltas en frecuencia

Podemos escribir la señal como la resta de dos funciones idénticas, desplazadas:

$$x(t) = f\left(t-\frac{3}{2}\right) - f\left(t-\frac{9}{2})\right) \text{ con } f(t) = \prod\left(\frac{t}{3}\right)$$

Entonces su espectro es:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left\{f\left(t-\frac{3}{2}\right)\right\} - \mathcal{F}\left\{f\left(t-\frac{9}{2}\right)\right\} = e^{-j\omega\cdot\frac{3}{2}}F(\omega) - e^{-j\omega\cdot\frac{9}{2}}F(\omega) = F(\omega)\left[e^{-j\frac{3}{2}\omega} - e^{-j\frac{9}{2}\omega}\right]$$

Con $F(\omega) = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right)$, tenemos:

$$X(\omega) = 3 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right)\left[e^{-j\frac{3}{2}\omega} - e^{-j\frac{9}{2}\omega}\right]$$

b) Considere ahora la señal $z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-6n)$. Represente detalladamente la señal $z(t)$, indique si es periódica y, en caso afirmativo, exprese la señal $z(t)$ como una combinación lineal de exponenciales complejas. Obtenga la salida $y(t)$ que resultaría de procesar la señal $z(t)$ con el sistema LTI caracterizado por la respuesta al impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$.

Se nos da:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-6n)$$

Donde:

$$x(t) = \prod\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{3}\right) - \prod\left(\frac{t-\frac{9}{2}}{3}\right)$$

Esto representa una **replicación periódica** de $x(t)$ cada 6 unidades de tiempo. En otras palabras, $z(t)$ es la **versión periódica** de $x(t)$ con periodo $T = 6$.

Representación en el tiempo:

Recordemos la forma de $x(t)$:

- $x(t)$ es la **resto de dos funciones rectangulares** de anchura 3 y de centros en $t = \frac{3}{2}$ y $\frac{t}{9}$.
- Es decir:
  - La primera parte está entre $[0, 3]$
  - La segunda está entre $[3, 6]$
  - En resumen:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,3) \\ -1 & t \in [3,6) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, al hacer la suma periódica:

$$z(t) = x(t) - x(t-6) + x(t-12) + \cdots$$

Esta señal repite el mismo patrón:

- **Pulso de +1** entre $[0 + 6n, 3 + 6n)$
- **Pulso de -1** entre $[3 + 6n, 6 + 6n)$

Representación con exponenciales complejas

Como $z(t)$ es **periódica de periodo** $T = 6$, podemos expresarla como una serie de Fourier:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \text{ con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$$

Los coeficientes de Fourier se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T z(t) e^{-jk\omega_0 t}\, \mathrm{d}t$$

Pero en $x(t)$ se tiene un patrón definido en cada periodo:

- Entre $t \in [0, 3)$, valor = 1.
- Entre $t \in [3, 6)$, valor = -1.

Entonces:

$$c_k = \frac{1}{6}\left(\int_0^3 e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\, \mathrm{d}t - \int_3^6 e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\, \mathrm{d}t\right)$$

Calculamos:

$$\int_0^3 e^{-jk\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-jk\frac{\pi}{3}t}}{-jk\frac{\pi}{3}}\right]_0^3 = \frac{1}{-jk\frac{\pi}{3}}(e^{-jk\pi}-1)$$

$$\int_3^6 e^{-jk\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-jk\frac{\pi}{3}t}}{-jk\frac{\pi}{3}}\right]_3^6 = \frac{1}{-jk\frac{\pi}{3}}(e^{-jk2\pi}-e^{-jk\pi})$$

Entonces:

$$c_k = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{e^{-jk\pi}-1}{-jk\frac{\pi}{3}} - \frac{e^{-jk2\pi}-e^{-jk\pi}}{-jk\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(e^{-jk\pi}-1)-(e^{-jk2\pi}-e^{-jk\pi})}{-jk\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2e^{-jk\pi}-e^{-jk2\pi}-1}{-jk\frac{\pi}{3}}$$

Esa es la expresión general de los coeficientes c_k, por tanto, la señal es:

$$z(t) = \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{-jk\pi}-e^{-jk2\pi}-1}{-jk\frac{\pi}{3}}e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

<u>Salida del sistema LTI con $h(t) = e^{-2t}u(t)$</u>

Este sistema LTI es una convolución:

$$y(t) = z(t) * h(t)$$

En el dominio de Fourier:

- Si $z(t) = \sum c_k e^{jk\omega_0 t}$,
- Y el sistema tiene respuesta al impulso $h(t) \implies H(\omega) = \dfrac{1}{jw+2}$

Entonces, al pasar $z(t)$ por el sistema, cada exponencial complejas se multiplica por el valor de $H(\omega)$ evaluado en $\omega_k = k\omega_0$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot H(k\omega_0)\cdot e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{-jk\pi}-e^{-jk2\pi}-1}{-jk\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{2+jk\frac{\pi}{3}}\cdot e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

c) Se nuestra ahora la señal $x(t)$ del apartado a) tomando una muestra cada $T_s = 0.5$ seg. Escriba la expresión analítica de la secuencia $x[n]$ resultante, e indique si se habrá producido solapamiento espectral (*aliasing*) al muestrear.

d) Se desea filtrar los 300 primeros valores (esto es, para los índices $0 \leq n \leq 299$) de la secuencia $x[n]$ del apartado anterior con un sistema causal cuya respuesta al impulso $h[n]$ está comprendida entre los índices $0 \leq n \leq 199$. Indique <u>de la forma más eficiente</u> de obtener el resultado de dicho procesado, $y[n]$, especificando el número de puntos sobre el que se realizarán los cálculos.