Álgebra Lineal

Ejercicios Tema 2: Vectores, matrices y tensores

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Determina la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: si u_1 es combinación lineal de u_2 y u_3, entonces u_3 es combinación lineal de u_1 y u_2.

La afirmación es **falsa** en general. Vamos a analizarla cuidadosamente:

- Supongamos que u_2 y u_3 son linealmente independientes y u_1 se define como una combinación lineal de u_2 y u_3. Por ejemplo, tomemos:
$$u_1 = u_2 + u_3.$$
- En este caso, aunque u_1 es una combinación lineal de u_2 y u_3, no podemos escribir u_3 como una combinación lineal de u_1 y u_2, ya que:
$$u_3 = u_1 - u_2$$
y esta relación no es válida en todos los espacios vectoriales. La implicación original depende de la independencia lineal de los vectores involucrados.
- Para que u_3 sea combinación lineal de u_1 y u_2, deben cumplorse condiciones adicionales, como que u_1, u_2, u_3 estén en un subespacio con dimensión menor o igual a 2.

2) Consideremos los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$. Encuentra un vector w ortogonal a u y v. Comprueba que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v. Encuentra ahora un vector que no sea lineal de u, v y comprueba que no es ortogonal a w.

1) Vector w ortogonal a u y v:

   El vector w encontrado mediante el producto cruz es:
$$w = (1, -1, 1).$$

2) Verificación de la ortogonalidad:
   - $w \cdot u = 0 :$ w es ortogonal a u.
   - $w \cdot v = 0 :$ w es ortogonal a v.

3) Ortogonalidad respecto a una combinación lineal de u y v:

   Para una combinación lineal genérica $c_1 u + c_2 v$, se cumple:
$$w \cdot (c_1 u + c_2 v) = 0.$$
   Esto demuestra que w es ortogonal a cualquier combinación lineal de u y v.

4) Vector que no es combinación lineal de u y v:

Un vector que no es combinación lineal de u y v es:

$$(1,0,0)$$

5) Comprobación de no ortogonalidad con w:

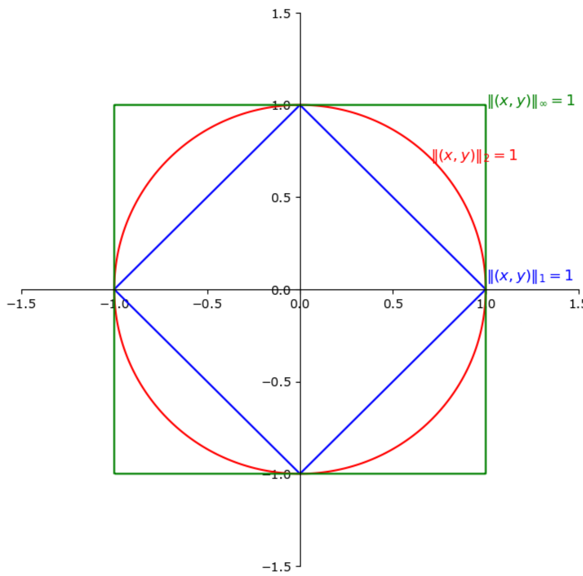
El producto escalar entre w y $(1,0,0)$ es:

$$w \cdot (1,0,0) = 1.$$

Por lo tanto, no es ortogonal a w.

3) Haz un dibujo de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x,y)\|_1 = 1\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x,y)\|_2 = 1\}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x,y)\|_\infty = 1\}$$



4) Prueba que $\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \|u\|_\infty}$.

Dado un vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, las normas son:

1) Norma $\|u\|_2$:

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

2) Norma $\|u\|_1$:

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

3) Norma $\|u\|_\infty$:

$$\|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|).$$

Expandimos la defnción de $\|u\|_2^2$:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2.$$

Usamos la desigualdad $u_i^2 \leq |u_i| \cdot \|u\|_\infty$ (ua que $|u_1| \leq \|u\|_\infty$ para todo i):

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot \|u\|_\infty \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq \|u\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

Por definición, $\sum_{i=1}^{n} |u_i| = \|u\|_1$, por lo que:

$$\|u\|_2^2 \leq \|u\|_\infty \|u\| 1.$$

Tomando raíces cuadradas en ambos lados de la desigualdad:

$$\|u\|_2 \leq \sqrt{\|u\|_1 \|u\|_\infty}.$$

5) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero, pero ¿qué pasa si su producto escalar es próximo a cero? Sean $x = [1, -0.75]$ e $y = [0.3, 0.3]$. Calcula el producto escalar $x \cdot y$ y el ángulo que forman. ¿Qué conclusión puedes sacar?
Si dos vectores x, y son unitarios, entonces $-1 \leq x \cdot y \leq 1$ (¿por qué?). En este caso, ¿qué podemos decir si $x \cdot y$ es aproximadamente $-1, 1$ o cero?

1) Producto escalar:

$$x \cdot y = 0.075$$

2) Ángulo que forman los vectores:

- Coseno del ángulo:

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2} = \frac{0.075}{1.25 * \frac{3\sqrt{2}}{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

- Ángulo en radianes:

$$\theta \approx \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \simeq 1.4289\text{rad}.$$

- Ángulo en grados:

$$\theta \approx 81.8699^\circ$$

Cuando el producto escalar es cercano a cero, el ángulo entre los vectores se aproxima a 90°, lo que indica que los vectores son casi ortogonales. En este caso, el ángulo es aproximadamente 81.87°, por lo que los vectores están cerca de ser ortogonales pero no completamente.

Si x e y son unitarios, sus normas son iguales a 1 ($\|x\| = \|y\| = 1$). En este caso, el producto escalar $x \cdot y$ es:

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta) = \cos(\theta)$$

y como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ (por tener un comportamiento oscilante), se tiene:

$$-1 \leq x \cdot y \leq 1$$

6) Sean u, v dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$ que forman un ángulo de 60°. Calcula $\|2u + v\|$.

Dado que los vectores u y v son unitarios ($\|u\| = 1$ y $\|v\| = 1$) y forman un ángulo de 60°, podemos calcular $\|2u + v\|$ usando las propiedades de las normas y el producto escalar.

Paso 1: Fórmula de la norma

La norma de $2u + v$ es:

$$\|2u + v\| = \sqrt{\|2u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle 2u, v\rangle}.$$

Paso 2: Sustituir las normas

$$\|2u\|^2 = 4\|u\|^2 = 4,$$

$$\|v\|^2 = 1$$

Paso 3: Producto escalar $\langle 2u, v\rangle$

El producto escalar entre u y v es:

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(60°) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\langle 2u, v\rangle = 2 \cdot \langle u, v\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Paso 4: Sustituir todo en la fórmula

$$\|2u + v\| = \sqrt{\|2u\|^2 + \|v\|^2 + 2 + 2\langle 2u, v\rangle} = \sqrt{4 + 1 + 2 \cdot 1} = \sqrt{4 + 1 + 2} = \sqrt{7}.$$

7) Sean u, v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ de norma 2 y 3 respectivamente que forman un ángulo de 60. ¿Qué ángulo forman los vectores u y $2u - v$?

Para determinar el ángulo entre los vectores u y $2u - v$, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1: Producto escalar entre u y $2u - v$

El producto escalar entre u y $2u - v$ es:

$$\langle u, 2u - v\rangle = \langle u, 2u\rangle - \langle u, v\rangle.$$

a) Calcular $\langle u, 2u\rangle$:

$$\langle u, 2u\rangle = 2 \cdot \|u\|^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$$

b) Calcular $\langle u, v\rangle$:

El producto escalar entre u y v es:

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(60°) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Sustituyendo:

$$\langle u, 2u - v\rangle = 8 - 3 = 5.$$

Paso 2: Norma de $2u - v$

La norma de $2u - v$ es:

$$\|2u - v\| = \sqrt{\|2u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle 2u, v\rangle}.$$

a) Calcular $\|2u\|^2$:

$$\|2u\|^2 = 4\|u\|^2 = 4 \cdot 2^2 = 16.$$

b) Calcular $\|v\|^2$:

$$\|v\|^2 = 3^2 = 9.$$

c) Calcular $\langle 2u, v\rangle$:

$$\langle 2u, v\rangle = 2\langle u, v\rangle = 2 \cdot 3 = 6.$$

Sustituyendo todo:

$$\|2u - v\| = \sqrt{16 + 9 - 2 \cdot 6} = \sqrt{16 + 9 - 12} = \sqrt{13}$$

Paso 3: Calcular el ángulo entre u y $2u - v$

El coseno del ángulo θ entre u y $2u - v$ es:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, 2u - v\rangle}{\|u\| \cdot \|2u - v\|} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{3}}{26}.$$

Paso 4: Ángulo θ:

$$\theta = \arccos\left(\frac{5\sqrt{3}}{26}\right) \simeq 46.10°.$$

8) Calcula $A + B, (A + B)^\intercal, AB, BA, (AB)^\intercal, A^\intercal B^\intercal$ y $B^\intercal A^\intercal$ para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^\intercal = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right)^\intercal = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 5 & 4 & 9 \\ 8 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^\intercal = \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}\right)^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^\intercal B^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B^\intercal A^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

9) Prueba que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Queremos demostrar que no existe ninguna matriz A tal que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea A una matriz 2×2 de la forma general:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Entonces, calculamos A^2 de la forma:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Queremos que A^2 sea igual a:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, igualamos componente a componente:

1) $a^2 + bc = 0$.

2) $ab + bd = 1$.

3) $ac + dc = 0$.

4) $bc + d^2 = 0$

Paso 1: Análisis de las ecuaciones

De $ac + dc = 0$, factorizamos:

$$(a + d)c = 0.$$

Esto implica dos posibilidades:

$$c = 0, \text{ o } a + d = 0.$$

Caso 1: $c = 0$ Si $c = 0$, las ecuaciones quedan:

1. $a^2 = 0$ (de $a^2 + bc = 0$, con $c = 0$)
2. $ab + bd = 1$

3. $d^2 = 0$ (de $bc + d^2 = 0$, con $c = 0$)

De $a^2 = 0$ y $d^2 = 0$, se deduce $a = 0$ y $d = 0$. Esto contradice la ecuación $ab + bd = 1$, ya que $ab + bd = 0$.

Por lo tanto, $c = 0$ no es posible.

Caso 2: $a + d = 0$

Si $a + d = 0$, entonces $d = -a$. Sustituyendo en las ecuaciones:

1) $a^2 + bc = 0$

2) $ab - ab = 1$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10) ¿Existen matrices reales no nula 2×2 tales que $A \cdot A^\intercal = 0$? ¿y si son matrices complejas?

Caso 1: Matrices reales A tales que $A \cdot A^\intercal = 0$

Sea A una matriz 2×2 real no nula:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

El producto $A \cdot A^\intercal = 0$ es:

$$A \cdot A^\intercal = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

Para que $A \cdot A^\intercal = 0$, deben cumplirse:

1) $a^2 + b^2 = 0$.

2) $c^2 + d^2 = 0$.

3) $ac + bd = 0$.

Análisis:

1) De $a^2 + b^2 = 0$, como $a, b \in \mathbb{R}$, implica $a = 0$ y $b = 0$.

2) De $c^2 + d^2 = 0$, como $c, d \in \mathbb{R}$, implica $c = 0$ y $d = 0$.

Esto contradice la condición de que A no sea nula. Por lo tanto, **no existen matrices reales no nulas 2×2 tales que $A \cdot A^\intercal = 0$.**

Caso 2: Matrices complejas A tales que $A \cdot A^\intercal = 0$

Si A es una matriz 2×2 con entradas en $\mathbb{C}$, el análisis cambia porque en $\mathbb{C}$, un número puede tener módulo cero sin ser necesariamente cero.

De nuevo, sea:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

El producto $A \cdot A^\intercal$ es:

$$A \cdot A^\intercal = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

Para $A \cdot A^\intercal = 0$, las ecuaciones son:

1) $a^2 + b^2 = 0$
2) $c^2 + d^2 = 0$
3) $ac + bd = 0$

Solución:

1) De $a^2 + b^2 = 0$, como $a, b \in \mathbb{C}$, no es necesario que a y b sean cero. Por ejemplo, si $c = 1$ y $d = -i$, entonces $c^2 + d^2 = 0$.
2) La tercera ecuación $ac + bd = 0$ debe verificarse con los valores específicos de a, b, c, d

Por lo tanto, **existen matrices complejas no nulas** 2×2 **tales que** $A \cdot A^\intercal = 0$.

11) Sean A, B matrices tales que $I + AB$ es invertible y sea S la inversa de $I + AB$. Prueba que $I + BA$ también es invertible y su inversa es $I - BSA$.

Queremos demostrar que si S es la inversa de $I + AB$, es decir:

$$S(I + AB) = (I + AB)S = I,$$

entonces $I + BA$ también es invertible y su inversa es $I - BSA$.

Paso 1: Demostrar que $(I - BSA)(I + BA) = I$

Calculemos $(I - BSA)(I + BA)$:

$$(I - BSA)(I + BA) = I + BA - BSA - BSA \cdot BA = I + BA - BSA - BSABA = I + BA - B(S + SABA).$$

Por lo definición de S, sabemos que S es la inversa de $I + AB$, por lo que

$$S(I + AB) = I \longrightarrow S + SAB = I$$

Sustituyendo $S + SAB = I$ en la ecuación:

$$(I - BSA)(I + BA) = I + BA - BA = I.$$

Paso 2: Demostrar que $(I + BA)(I - BSA) = I$

Ahora calculemos $(I + BA)(I - BSA)$:

$$(I + BA)(I - BSA) = I - BSA + BA - BA \cdot BSA = I + BA - B(S + SAB)A = I + BA - BIA = I.$$

Paso 3: Conlusión

Hemos demostrado que:

$$(I - BSA)(I + BA) = I \quad \text{y} \quad (I + BA)(I - BSA) = I.$$

Por lo tanto, $I + BA$ es invertible y su inversa es:

$$(I + BA)^{-1} = I - BSA.$$

12) Sea A una matriz $n \times m$ y sea B una matriz $m \times n$. Suponiendo que las matrices $I + AB$ y $I + BA$ sea invertibles, prueba que se cumple la igualdad

$$(I + AB)^{-1}A = A(1 - BA)^{-1}$$

Si m es mucho más pequeño que n, ¿cuál de las dos expresiones es más fácil de calcular desde el punto de vista computacional?

Queremos demostrar:

$$(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}.$$

Paso 1: Multiplicación por $(I + AB)$

Multiplicamos ambos lados de la igualda por $I + AB$ desde la izquierda para simplificar el término $(I + AB)^{-1}$. Esto da:

$$A = (I + AB)A(I + BA)^{-1}.$$

Paso 2: Expandir $(I + AB)A$

Multiplicamos:

$$(I + AB)A = A + ABA.$$

Por lo tanto, la ecuación queda como:

$$A = (A + ABA)(I - BA)^{-1}.$$

Paso 3: Multiplicación por $(I + BA)$

Multiplicamos ahora por $I + BA$ desde la derecha:

$$A(I + BA) = A + ABA.$$

Esto coincide con $(I + AB)A$, lo que confirma que:

$$(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$$

Análisis computacional

Dimensiones de las matrices:

- A es una matriz $n \times m$.
- B es una matriz $m \times n$.
- AB es una matriz $n \times n$.
- BA es una matriz $m \times m$.

Dificultad computacional:

El cálculo de una inversa tiene una complejidad de aproximadamente $O(k^3)$, donde k es la dimensión de la matriz.

- **Para** $(I + AB)^{-1}$**:** Necesitamos calcular la inversa de una matriz $n \times n$, lo que tiene una complejidad $O(n^3)$.
- **Para** $(I + BA)^{-1}$**:** Necesitamos calcular la inversa de una matriz $m \times m$, lo que tiene una complejidad $O(m^3)$.

Si $m \ll n$, entonces calcular $(I + BA)^{-1}$ es significativamente más eficiente que calcular $(I + AB)^{-1}$.

13) Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Si llamamos **flop** a una operación, ya sea una suma, resta, multiplicación o división, prueba que para calcular AB son necesarios $mn(2p - 1)$ flops (haciendo la multiplicación de forma estándar). Si A es una matriz 10×2, B una matriz 2×10 y C una matriz 10×10 y queremos calcular ABC, ¿qué es mejor desde el punto de vista computacional, calcular $(AB)C$ o $A(BC)$?

Sea A una matriz $n \times p$ y B una matriz $p \times m$. Para calcular AB usando la multiplicación estándar:

1) Cada elemento (i, j) de AB se obtiene como:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}.$$

Esto requiere p multiplicaciones y $p - 1$ sumas, para un total de $2p - 1$ flops.

2) Hay $n \times m$ elementos en AB, por lo que el total de flops necesarios es:

$$\text{Total flops} = n \cdot m \cdot (2p - 1)$$

Dado que:

- A es una matriz 10×2,
- B es una matriz $2 \cdot 10$,
- C es una matriz 10×10,

tenemos dos ciones para calcular ABC:

1) $(AB)C$

   - Primero calculamos AB: A es 10×2 y B es 2×10, así que AB es 10×10. El número de flops es:

   $$10 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 10 \cdot 10 \cdot 3 = 300.$$

   - Luego calculamos $(AB)C$: AB es 10×10 y C es 10×10. El número de flops es:

   $$10 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 10 - 1) = 10 \cdot 10 \cdot 19 = 1900.$$

   - Total para $(AB)C$:

   $$300 + 1900 = 2200 \text{ flops}.$$

2) $A(BC)$

   - Primero calculamos BC: B es 2×10 y C es 10×10, así que BC es 2×10. El número de flops es:

   $$2 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 10 - 1) = 2 \cdot 10 \cdot 19 = 380.$$

   - Luego calculamos $A(BC)$: A es 10×2 y BC es 2×10. El número de flops es:

   $$10 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 10 \cdot 10 \cdot 3 = 300.$$

   - Total para $A(BC)$:

   $$380 + 300 = 680 \text{ flops}.$$

Desde el punto de vista computacional, es mejor calcular $A(BC)$.

14) Dadas dos matrices cuadradas A, B, se define el **conmutador** de A, B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por una parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguiente tres matrices, llamadas matrices de

Pauli:

$$S_x = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_y = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2}\overline{h}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\overline{h} = \dfrac{h}{2\pi}$, con h constante de Plank. Comprueba que

$$[S_x, S_y] = j\overline{h}S_z, \quad [S_y, S_z] = j\overline{h}S_x, \quad [S_z, S_x] = j\overline{h}S_y$$

y que

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\overline{h}^2 I_3$$

con I_3 la matriz identidad 3×3.

Dadas las matrices:

$$S_x = \frac{\overline{h}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \frac{\overline{h}}{2}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

verificamos los commutadores:

1) Conmutador $[S_x, S_y]$:

$$[S_x, S_y] = S_xS_y - S_yS_x = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} - \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{2}\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} = j\overline{h}S_z.$$

$$S_xS_y = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}.$$

$$S_yS_x = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}.$$

2) Conmutador $[S_y, S_z]$: De maera similar, podemos calcular:

$$[S_y, S_z] = S_yS_z - S_zS_y = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} - \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} = j\overline{h}S_x.$$

$$S_yS_z = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix}.$$

$$S_zS_y = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}.$$

3) Conmutador $[S_x, S_z]$:

$$[S_x, S_z] = S_xS_z - S_zS_x = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = j\overline{h}S_y.$$

$$S_xS_z = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$S_zS_x = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos cada término al cuadrado:

$$S_x^2 = \left(\frac{\overline{h}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_y^2 = \left(\frac{\overline{h}}{2}\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_z^2 = \left(\frac{\overline{h}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumando:

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\overline{h}^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3\overline{h}^2}{4}I.$$

15) Si A es una matriz simétrica, ¿son las matrices $B^\intercal AB, A + A^\intercal$ y $A - A^\intercal$ simétricas?

1) Matriz $B^\intercal AB$

   Para qu $B^\intercal AB$ sea simétrica, debe cumplirse:

$$(B^\intercal AB)^\intercal = b^\intercal AB.$$

   Usamos la propiedad de la transposición:

$$(B^\intercal AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal (B^\intercal)^\intercal = B^\intercal A^\intercal B.$$

   Como A es simétrica ($A^\intercal = A$):

$$(B^\intercal AB)^\intercal = B^\intercal AB.$$

   Por lo tanto, $B^\intercal AB$ **es simétrica** siempre que A sea simétrica.

2) Matriz $A + A^\intercal$

   Para que $A + A^\intercal$ sea simétrica, debe cumplirse:

$$(A + A^\intercal)^\intercal = A + A^\intercal.$$

   Usamos la propiedad de la transposición:

$$(A + A^\intercal)^\intercal = A^\intercal + (A^\intercal)^\intercal.$$

Dado que A es simétrica ($A^\intercal = A$):

$$(A + A^\intercal)^\intercal = A + A^\intercal.$$

Por lo tanto, $A + A^\intercal$ **es simétrica** siempre que A sea simétrica.

3) Matriz $A - A^\intercal$

Para que $A - A^\intercal$ sea simétrica, debe cumplirse:

$$(A - A^\intercal)^\intercal = A - A^\intercal.$$

Usamos la propiedad de la transpoción:

$$(A - A^\intercal)^\intercal = A^\intercal - (A^\intercal)^\intercal.$$

Dado que A es simétrica ($A^\intercal = A$):

$$(A - A^\intercal)^\intercal = A - A^\intercal.$$

Esto implica que:

$$A - A^\intercal = 0.$$

Por lo tanto, $A - A^\intercal$ **no puede ser simétrica a menos que** $A = 0$.

16) Prueba que si A es una matriz invertible simétrica, entonces A^{-1} es también simétrica.

Propiedades necesarias

1) **Simetría de A:** $A^\intercal = A$.

2) **Propiedad de la inversa:** $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, donde I es la matriz identidad.

3) **Transposición del producto:** Para cualquier par de matrices X e Y, se cumple:

$$(XY)^\intercal = Y^\intercal X^\intercal.$$

Partimos de la definición de la inversa:

$$AA^{-1} = I.$$

Tomamos la traspuesta de ambos lados:

$$(AA^{-1})^\intercal = I^\intercal.$$

Usando la propiedad de la transpoción del producto:

$$(AA^{-1})^\intercal = (A^{-1})^\intercal A^\intercal.$$

Como $I^\intercal = I$ (la identidad es simétrica) y $A^\intercal = A$ (porque A es simétrica), esto se convierte en

$$(A^{-1})^\intercal A = I.$$

De la definición de la inversa, sabes que A^{-1} es la única matriz que satisface $A^{-1}A = I$. Por lo tanto:

$$(A^{-1})^\intercal = A^{-1}.$$

17) Sean $u_1, \ldots, u_m$ vectores de $\mathbb{K}^n$ y supongamos que para ciertos escalares $x_1, \ldots, x_m$ se tiene $x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = 0$. Expresa esta última igualdad en forma matricial.

La ecuación $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_mu_m = 0$ puede representarse en forma matricial como sigue:

1) **Escribir los vectores en forma de matriz**: Sean $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vectres en $\mathbb{K}^n$, es decir, cada u_j tiene n componentes:

$$u_j = \begin{bmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ \vdots \\ u_{jn} \end{bmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Formamos una matriz U de dimensión $n \times m$ donde las columnas son los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{m1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}.$$

2) **Escribir los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_m$ como un vector columna:**

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

3) **Expresar la combinación lineal:** La combinación lineal $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_mu_m$ se puede escribir como el producto matricial:

$$Ux = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{m1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

4) **Igualdad en forma matricial:** La igualdad $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_mu_m = 0$ queda en forma matricial como:

$$Ux = 0,$$

donde U es la matriz de dimensión $n \times m$, x es el vectore de escalares de dimensión m, y 0 es el vector nulo de dimensión n.

18) Sean u, v dos vectores no nulos vistos como matrices columna $n \times 1$. Observa que $1 + v^\intercal u$ es un escalar, que suponemos no nulo. Prueba que la matriz $I + uv^\intercal$ es no singular y su inversa es

$$(I + uv^\intercal)^{-1} = I - \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u}$$

Paso 1: Propiedad de la inversa

Para verificar que la matriz propuesta es la inversa, debemos comprobar que:

$$(I + uv^\intercal)\left(I - \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u}\right) = I.$$

Expandimos el producto:

$$(I + uv^\intercal)\left(I - \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u}\right) = I + uv^\intercal - \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u} - uv^\intercal \cdot \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u} = I + uv^\intercal - \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u} - \frac{u(v^\intercal u)v^\intercal}{1 + v^\intercal u}.$$

Paso 2: Agrupamos términos

Agrupamos los términos relacionados con $uv^\intercal$:

$$uv^\intercal - \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u} - \frac{u(v^\intercal u)v^\intercal}{1 + v^\intercal u}.$$

Sacamos $uv^\intercal$ como factor común:

$$uv^\intercal\left(1 - \frac{1}{1 + v^\intercal u} - \frac{v^\intercal u}{1 + v^\intercal u}\right) = uv^\intercal\left(1 - \frac{1 + v^\intercal u}{1 + v^\intercal u}\right) = uv^\intercal \cdot (1 - 1) = 0.$$

Por lo tanto, todos los términos relacionados con $uv^\intercal$ se cancelan, dejando:

$$(I + uv^\intercal)\left(I - \frac{uv^\intercal}{1 + v^\intercal u}\right) = I.$$

19) Sea u un vector de $\mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$ y consideremos la matriz $A = I - 2uu^\intercal$. Prueba que A es simétrica y $A^2 = I$.

Parte 1: A es simétrica

Una matriz A es simétrica si $A^\intercal = A$. Calculemos $A^\intercal$:

$$A^\intercal = (I - 2uu^\intercal)^\intercal.$$

Usamos la propiedad de la transpoción:

$$A^\intercal = I^\intercal - 2(uu^\intercal)^\intercal = I - 2u^\intercal u = I - 2uu^\intercal.$$

Por lo tanto:

$$A^\intercal = A.$$

Esto demuestra que la matriz A **es simétrica**.

Parte 2: $A^2 = I$

Calculemos A^2:

$$A^2 = (I - 2uu^\intercal)(I - 2uu^\intercal). = I - 2uu^\intercal - 2uu^\intercal + 4(uu^\intercal)(uu^\intercal) = I - 4uu^\intercal - 4u\underbrace{(u^\intercal u)}_{1}u^\intercal = I - \cancel{4uu^\intercal} + \cancel{4uu^\intercal} = I.$$

20) Sea A la matriz dada por bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} invertible. Prueba que existen matrices X, Y tales que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ e I es la matriz identidad del tamaño adecuado (la matriz S se denomina el **complemento dde Schur** de A_{11}).

Paso 1: Expansión del producto

Expandimos el producto de matrices en bloques:

1) Multiplicamos las primeras dos matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ XA_{11} & S \end{bmatrix}.$$

2) Multiplicamos el resultado por la tercera matriz:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ XA_{11} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{bmatrix}.$$

Paso 2: Identificar las submatrices

Comparando con la matriz original:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

obtenemos las siguientes ecuaciones para identificar X, Y y S:

1) De la entrada $(1, 1)$:

$$A_{11} = A_{11}$$

Esto es trivialmente cierto.

2) De la entrada $(1, 2)$:

$$A_{12} = A_{11}Y \longrightarrow Y = A_{11}^{-1}A_{12}.$$

3) De la entrada $(2, 1)$:

$$A_{21} = XA_{11} \longrightarrow X = A_{21}A_{11}^{-1}$$

4) De la entrada $(2, 2)$:

$$A_{22} = XA_{11}Y + S = (A_{21}A_{11})^{-1}A_{11}(A_{11}^{-1}A_{12}) + S = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + S \longrightarrow S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

21) Expresa la matriz AB como suma de matrices de rango 1, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Para expresar AB como una suma de matrices de rango 1, utilizamos la propiedad de la multiplicación de matrices en términos de columnas de B y filas de A. El producto AB se puede descomponer como una suma de las matrices de rango 1:

$$AB = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k^\intercal,$$

donde:

- a_k es la k-ésima columna de A.
- $b_k^\intercal$ es la k-ésima fila de B.

Dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

identificamos que A tiene 3 columnas ($m = 3$), por lo que:

$$AB = a_1 b_1^\intercal + a_2 b_2^\intercal + a_3 b_3^\intercal.$$

Paso 1: Identificar las columnas de A y filas de B

- $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$
- $b_1^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_2^\intercal = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b_3^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

Paso 2: Calcular cada matriz de rango 1

1) **Primera matriz:** $a_1 b_1^\intercal$

$$a_1 b_1^\intercal = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

2) **Segunda matriz**: $a_2 b_2^\intercal$

$$a_2 b_2^\intercal = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3) **Tercera matriz:** $a_3 b_3^\intercal$

$$a_3 b_3^\intercal = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 4 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

Paso 3: Sumar las matrices

$$AB = a_1 b_1^\intercal + a_2 b_2^\intercal + a_3 b_3^\intercal$$

Sustituyendo:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 4 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 14 \\ 6 & 5 & 30 \end{bmatrix}.$$

22) Sea $u^\intercal = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$, $v^\intercal = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y $w^\intercal = [a, b, c]$. Halla a, b, c para que la matriz $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal de determinante 1.

Para que $Q = [u, v, w]$ sea una matriz ortogonal de determinante 1, debe cumplir las siguientes condiciones:

1) **Ortogonalidad:** Las columnas u, v, w de Q deben ser ortogonales entre sí:

$$u^\intercal v = 0, \quad u^\intercal w = 0, \quad v^\intercal w = 0$$

2) **Norma unitaria:** Cada columna debe tener norma 1:

$$\|w\| = 1.$$

3) **Determinante:** El determinante de Q debe ser 1:

$$\det(Q) = 1.$$

Paso 1: Condiciones iniciales

Dado

$$u^\intercal = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad v^\intercal = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Comprobemos que u y v son ortogonales:

$$u^\intercal v = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = 0.$$

Por lo tanto, u y v son ortogonales.

Paso 2: Contruir w

Para garantizar que $Q = [u, v, w]$ sea ortogonal, w debe ser ortogonal a u y v. Además, $\|w\| = 1$.

Condición de ortogonalidad con u:

$$u^\intercal w = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c = 0.$$

Condición de ortogonalidad con v:

$$v^\intercal w = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c = 0.$$

Estas dos ecuaciones lineales son:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c = 0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a + 2b - 2c = 0 \\ 2a + b + 2c = 0 \end{cases} \longrightarrow a = -2b + 2c$$

$$2(-2+2c)+b+2c=0$$
$$-4b+4c+b+2c=0$$
$$-3b+6c=0$$
$$b=2c$$

Sustituyendo $b=2c$ en $a=-2b+2c$:

$$a=-2(2c)+2c=-4c+2c=-2c.$$

Por lo tanto:

$$a=-2c, \quad b=2c.$$

Paso 3: Normalizar w

Para garantizar que $\|w\|=1$, calculamos:

$$\|w\|^2=a^2+b^2+c^2=(-2c)^2+(2c)^2+c^2=4c^2+4c^2+c^2=9c^2.$$
$$\|w\|=\sqrt{9c^2}=3|c|.$$

Por lo tanto, normalizamos w dividiendo por 3:

$$w=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2c\\ 2c\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

23) **(Traza de una matriz)** Dada una matriz cuadrada A, se define la **traza** de A como $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}[A]_{ii}$, es decir, como la suma de los elementos de la diagonal principal. Prueba las siguientes propiedades:

a) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$.

Sea A y B matrices cuadradas de tamaño $n\times n$. La traza de la suma es:

$$\operatorname{tr}(A+B)=\sum_{i=1}^{n}[(A+B)]_{ii}.$$

Usando la propiedad de la suma de matrices, sabemos que los elementos diagonales de $A+B$ son la suma de los elementos diagonales de A y B:

$$[(A+B)]_{ii}=[A]_{ii}+[B]_{ii}.$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{tr}(A+B)=B)=\sum_{i=1}^{n}[(A+B)]_{ii}=\sum_{i=1}^{n}[A]_{ii}+\sum_{i=1}^{n}[B]_{ii}=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B).$$

b) $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^\intercal)$.

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n\times n$. La traza de A es:

$$\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}[A]_{ii}.$$

La matriz transpuesta $A^\intercal$ tiene la misma diagonal principal que A, ya que $[A^\intercal]_{ii}=[A]_{ii}$. Por lo tanto:

$$\operatorname{tr}(A^\intercal)=\sum_{i=1}^{n}[A^\intercal]_{ii}=\sum_{i=1}^{n}[A]_{ii}=\operatorname{tr}(A).$$

c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Sea A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times n$. Usando la definición de la traza:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} [(AB)]_{ii}.$$

El elemento $[(AB)]_{ii}$ es la suma:

$$[(AB)]_{ii} = \sum_{k=1}^{m} [A]_{ik}[B]_{ki}.$$

Sustituyendo en la traza:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} [A]_{ik}[B]_{ki}.$$

Reorganizamos los índices de la suma:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [B]_{ki}[A]_{ik}.$$

El término $\sum_{i=1}^{n} [B]_{ki}[A]_{ik}$ es precisamente $[(BA)]_{kk}$, y sumando sobre k, obtenemos:

$$\operatorname{tr} = \sum_{k=1}^{m} [(BA)]_{kk} = \operatorname{tr}(BA).$$

d) $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$ con P invertible.

Sea P una matriz invertible de tamaño $n \times n$ y A una matriz cuadrada $n \times n$. Usamos la propiedad de $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$:

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}((P^{-1}A)P) = \operatorname{tr}(A(PP^{-1})) = \operatorname{tr}(AI) = \operatorname{tr}(A).$$