Álgebra Lineal

Ejercicios Tema 3: Sistemas de ecuaciones y determinantes

Francisco Javier Mercader Martínez

1) Sea $\{w_1, w_2, w_3\}$ un conjunto independiente de vectores de $\mathbb{R}^3$. Se definen los vectores $v_1 = w_1 + w_2$, $v_2 = w_1 + 2w_2 + w_3$ y $v_3 = w_2 + cw_3$. Si $V = [v_1, v_2, v_3]$ y $W = [w_1, w_2, w_3]$, entonces se tiene $V = WC$ con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

¿Qué condición debe cumplir c para que los vectores v_1, v_2, v_3 sean linealmente independientes?

Para determinar la condición que debe cumplir c para que los vectores v_1, v_2, v_3 sean linealmente indpendientes, observa que:

1) **Los vectores** $\{w_1, w_2, w_3\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Esto implica que la matriz

$$W = [w_1, w_2, w_3]$$

es invertible (tiene determinante distinto de cero).

2) **Los vectores** $\{v_1, v_2, v_3\}$ se pueden expresar como

$$V = [v_1, v_2, v_3] = WC,$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

3) **Independencia lineal de** v_1, v_2, v_3**.** Puesto que W es invertible v_1, v_2, v_3 serán linealmente independientes si y solo si la matriz C es invertible; es decir, si y sólo si $\det(C) \neq 0$.

4) **Cálculo de** $\det(C)$**.** Calculamos el determinante de la matriz C:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = (2c + 0 + 0) - (0 + c + 1) = 2c - c - 1 = c - 1$$

5) **Condición de independencia.** Para que C sea invertible, necesitamos $\det(C) \neq 0$. Dado que

$$\det(C) = c - 1,$$

se requiere

$$c - 1 \neq 0 \longrightarrow c \neq 1.$$

2) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Halla una matriz de permutación P tal que $PA = B$ y escribe P como producto de matrices de permutación simples.

Para encontrar una matriz de permutación P tal que $PA = B$, procedemos de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Se tiene una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño 5×5, donde a_{ij} en la cantidad de mensajes que la persona i manda a la persona j. Las filas y columnas siguen el orden: Juan, Ana, Pedro, María, Maite. Halla una matriz de permutación P tal que las columnas y filas de $PAP^{\intercal}$ sigan el orden: Ana, María, Juan, Maite, Pedro.

Para encontrar la matriz de permutación P tal que las filas y columnas de $PAP^{\intercal}$ estén en el orden deseado, seguimos estos paso:

1) Entender el problema:

   La matriz A tiene filas y columas y columnas ordendas como:

   $$\text{Orden original: } \{\text{Juan}, \text{Ana}, \text{Pedro}, \text{María}, \text{Maite}\}.$$

   Queremos reorganizar filas y columnas para que queden en este orden:

   $$\text{Nuevo orden: } \{\text{Ana, María, Juan, Maite, Pedro}\}.$$

   La matriz de permutación P realizará este cambio

2) Definir P:

   La matriz de permutación P es una matriz identidad 5×5 con las filas reordenadas de acuerdo con el nuevo orden. Cada fila de P indica la nueva posición de una fila de la matriz identidad:

   - El orden original:
     - Ana $(i = 2)$ pasa a la posición 1.
     - María $(i = 4)$ pasa a la posición 2.
     - Juan $(i = 1)$ pasa a la posició 3.
     - Maite $(i = 5)$ pasa a la posición 4.
     - Pedro $(i = 3)$ pasa a la posición 5.

Entonces, P se construye intercambiando las filas de la identidad en consecuencia:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) Interpretación de $PAP^{\intercal}$:

La operación $PAP^{\intercal}$ realiza dos pasos:

1) **Reorganizar las filas de A según** P, es decir, poner las filas de A en el orden especificado.
2) **Reorganizar las columnas de** A (mediante $P^{\intercal}$) en el mismo orden.

4) Consideremos la matriz por bloques $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ con A una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times p$. Supongamos que haciendo operaciones elementales de filas se obtiene la matriz $\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}$. Prueba que $X = A^{-1}B$.

Para probar que $X = A^{-1}B$, analizamos el problema paso a paso:

1) Definición del problema.

La matriz por bloques es

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix},$$

donde A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, y B es una matriz de tamaño $n \times p$.

Por hipótesis, haciendo operaciones elementales de filas, se transforma en

$$\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y X es una matriz de tamaño $n \times p$.

Queremos demostrar que $X = A^{-1}B$.

2) Operaciones elementales y equivalencia de filas:

Hacer operaciones elementales de filas sobre una matriz equivale a multiplicarla a la izquierda por una matriz invertible P. Esto significa que existe una matriz P de tamaño $n \times n$ tal que:

$$P \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}.$$

Separando los bloques, esta ecuación se escribe como:

$$P \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA & PB \end{bmatrix}.$$

De la igualdad con $\begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}$, concluimos que:

$$PA = I_n \quad \text{y} \quad PB = X.$$

De la igualda $PA = I_n$, vemos que P es la inversa de A:

$$P = A^{-1}.$$

Sustituyendo $P = A^{-1}$ en $PB = X$, obtenemos:

$$X = A^{-1}B.$$

5) Halla una relación de dependencia entre los vectores $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (2,1,0,1)$, $u_3 = (0,2,-1,1)$ y $u_4 = (3,-1,2,0)$.

Para encontrar una relación de dependencia lineal entre los vectores u_1, u_2, u_3 y u_4, necesitamos determinar si existen coeficientes c_1, c_2, c_3, c_4, no todos cero, tales que:

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = 0,$$

o equivalentemente:

$$c_1(1,0,1,0) + c_2(2,1,0,1) + c_3(0,2-1,1) + c_4(3,-1,2,0) = (0,0,0,0).$$

Esto genera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_4 = 0 \\ c_2 + 2c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 - c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

1) Formar la matriz del sistema:

Escribimos este sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Resolver por eliminación gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_1]{F_3 \to F_3 + 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + 3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz reducida resultante muestra que la última fila es cero, indicando una relación de dependencia lineal entre los vectores u_1, u_2, u_3, u_4.

3) Relación de dependencia:

De la matriz reducida, obtenemos las ecuaciones:

- $c_1 + c_4 = 0 \longrightarrow c_1 = -c_4$
- $c_2 + c_4 = 0 \longrightarrow c_2 = -c_4$
- $c_3 - c_4 = 0 \longrightarrow c_3 = c_4$

Al sustituir en la combinación lineal, podemos escribir la relación de dependencia como:

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = 0 \quad \text{con} \quad c_1 = c_2 = -c_4, c_3 = c_4.$$

6) Sean A y B matrices del mismo tamaño. Sea A' la matriz que resulta de A después de intercambiar las columnas i, j y sea B' la matriz que resulta de B después de intercambiar las filas i, j. Escribe las matrices A' y B' en términos de A, B y matrices elementales. ¿Por qué se verifica que $AB = A'B'$?

Paso 1: Representar A' y B' en términos de matrices elementales

Supongamos que A y B son matrices de tamaño $n \times n$. Queremos describir las matrices A' y B' que resultan al intercambiar columnas y filas, respectivamente.

1.1) Matriz A':

Para obtener A', intercambiamos las columnas i y j de A. Esto se logra multiplicando A por una matriz de permutación P_{ij} desde la derecha:

$$A' = AP_{ij},$$

donde P_{ij} es una matriz identidad $n \times n$ con las columnas i y j intercambiadas.

1.2) Matriz B':

Para obtener B', intercambiamos las filas i y j de B. Esto se logra multiplicando B por una matriz de permutación P_{ij} desde la izquierda:

$$B' = P_{ij}B.$$

Paso 2: Producto AB en términos de A' y B'

El producto AB se transforma en $A'B'$. Sustituyendo $A' = AP_{ij}$ y $B' = P_{ij}B$, tenemos:

$$A'B' = (AP_{ij})(P_{ij}B).$$

Por la propiedad asociativa del producto de matrices:

$$A'B' = A(P_{ij}P_{ij})B.$$

La clave es que P_{ij} es una matriz de permutación, y el producto de una matriz de permutación consigo misma es la identidad:

$$P_{ij}P_{ij} = I.$$

Por lo tanto:

$$A'B' = AIB = AB.$$

7) Calcula el rango de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

en función de los parámetros a y b.

Posibles casos:

1) $a = b = 0 \longrightarrow B = [0] \longrightarrow \text{rango}(B) = 0$

2) $a = 0, b \neq 0 \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_1} \underbrace{\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}}_{\text{forma escalonada}} \longrightarrow \text{rango}(B) = 4$

3) $a \neq 0, b = 0 \longrightarrow B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \text{rango}(B) = 4$

8) Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ calcula matrices invertibles P y Q tales que

$$PMQ = \left[\begin{array}{c|c} 1_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

con r el rango de M.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 \to -F_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 2C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - C_2]{C_3 \to C_3 - C_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos una matriz $PMQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que tiene la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

donde I_r es la matriz identidad con $r = \text{rango}(M) = 2$.

9) Halla la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y expresa A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

10) Determina el valor del parámetro a para el cual la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$ es invertible y calcula su inversa

11) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z-2t&=5\\ -2x-4y+2z+4t&=-10\\ y+t&=1\\ x+3y-z-t&=6\\ x-z-4t&=3 \end{aligned}\right\}$$

12) Discute en el cuerpo de los números reales los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & ay & & & + & at & = & a\\ ax & + & y & + & z & + & t & = & a\\ x & + & y & az & + & t & = & 1 & \end{array}\right.$$

13) Si $A=[u_1,\ldots,u_n]$, expresa el determinante de $B=[u_n u_1\cdots u_{n-1}]$ en función del determinante de A.

14) Una matriz A que cumple $A=-A^{\intercal}$ se llama **antisimétrica**. Prueba que una matriz antisimétrica e tamaño impar tiene determinante nulo.

15) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

16) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=0\\ 4x-6y-2x&=2\\ -2x+15y+7z&=-4 \end{aligned}\right\}$$

Observa que podemos eliminar la última ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras. Considerando ahora los términos en z como si fuesen términos independientes, observa que el sistema es un sistema de Cramer en x,y. Resuélvelo con la fórmula de Cramer y después expresa las soluciones en la forma x_0+u (x_0 solución parcial y u solución genérica del sistema homogéneo).