Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba

3. Derivadas parciales

Ing. Rocha, victoria.-

Definición

- De AMI conocemos la definición de la derivada de una función $y = f(x)$ como ***el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a 0***.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

La derivada es la función que da la tangente en cada punto de la curva f(x). Entonces la derivada mide las evoluciones y los cambios de una variable con relación a otra.

- ¿Para qué sirve entonces la derivada?

La derivada permite ver, a través de la pendiente en todo punto de la curva, la evolución o el cambio de muchos fenómenos físicos. Permite calcular los puntos donde la pendiente es 0 (máximos y mínimos) para buscar los óptimos por ejemplo. En física, electricidad, electrónica, en química, permite estudiar muchos fenómenos evolutivos asociados como la velocidad, la aceleración, los flujos, las acumulaciones.

- Las derivadas están siempre presentes.

Definición

- En AMII nos enfrentamos a funciones de mas de una variable independiente, por ejemplo $z = f(x; y)$. Por esta razón, la primera diferencia que surge es que al haber dos variables independientes, se puede incrementar una a la vez, dejando constante la otra variable. Esto da origen a las llamadas **<u>derivadas parciales</u>**.
- Bajo la definición de derivadas, tenemos que para la función $z = f(x; y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

- Las derivadas parciales se pueden interpretar como razones de cambio. Si $z = f(x; y)$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x}$ representa la razón de cambio de “z” respecto a “x” cuando “y” permanece constante. De manera similar, $\frac{\partial z}{\partial y}$representa la razón de cambio de “z” respecto a “y” cuando “x” es constante.

Notaciones para derivadas parciales Si $z = f(x, y)$, escribimos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Regla para determinar las derivadas parciales de $\mathbf{z = f(x; y)}$.

1. Para determinar f_x, conservar a "y" constante y derivar f (x, y) con respecto a "x".
2. Para determinar f_y, conservar a "x" constante y derivar f (x, y) con respecto a "y".

Ejercicios

1. Considerando $\mathbf{f}(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -4$$

2. Considerando $\mathbf{f}(x, y) = x^2 - y$, determine $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1$$

3. Considerando $\mathbf{f}(x, y) = x^2 y + 5$, determine $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$$

Ejercicios

4. Considerando $\mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{xy}^{-1})$

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x) + \frac{y^{-1}}{xy^{-1}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x) + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{-1\, y^{-2}}{xy^{-1}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{xy}$$

5. Considerando $\mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}) * \boldsymbol{Ln}(\boldsymbol{x})$

Tenemos que para derivar respecto de “x” el producto de dos funciones: $f = u.v$ ➔ su derivada es: $f = u'.v + u.v'$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy * Ln(x) + \frac{x^2 y}{x}$$

En el caso de la derivada respecto a “y” es una derivada simple.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 * Ln(x)$$

6. Considerando $\mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{(\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y})}{\sqrt[3]{\boldsymbol{2x+3y}}}$

Tenemos que para derivar hay un cociente de dos funciones: $f = u/v$ ➔ su derivada es:

$$f = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy * \sqrt[3]{2x+3y} - x^2 y * \frac{1}{3}(2x+3y)^{-\frac{2}{3}} * 2}{(\sqrt[3]{\boldsymbol{2x+3y}})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(\boldsymbol{x}^2) * \sqrt[3]{2x+3y} - x^2 y * \frac{1}{3}(2x+3y)^{-\frac{2}{3}} * 3}{(\sqrt[3]{\boldsymbol{2x+3y}})^2}$$

Ejercicios

7. Considerando $\mathbf{f}(x,y,z) = z^2\,\frac{Ln(xy)}{x}$

Tenemos 3 derivadas parciales ➔ **VAMOS A TENER TANTAS DERIVADAS PARCIALES COMO VARIABLES INDEPENDIENTES TENGAMOS.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2.\left(\frac{\frac{y}{xy}x - \ln(xy).1}{x^2}\right) = z^2.\left(\frac{1-\ln(xy)}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z^2.\frac{1}{x}\left(\frac{1}{xy}\right).x = \frac{z^2}{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z.\frac{\mathrm{Ln}(xy)}{x}$$

8. Considerando $\mathbf{f}(x,y,z) = \frac{e^z}{x-y}$

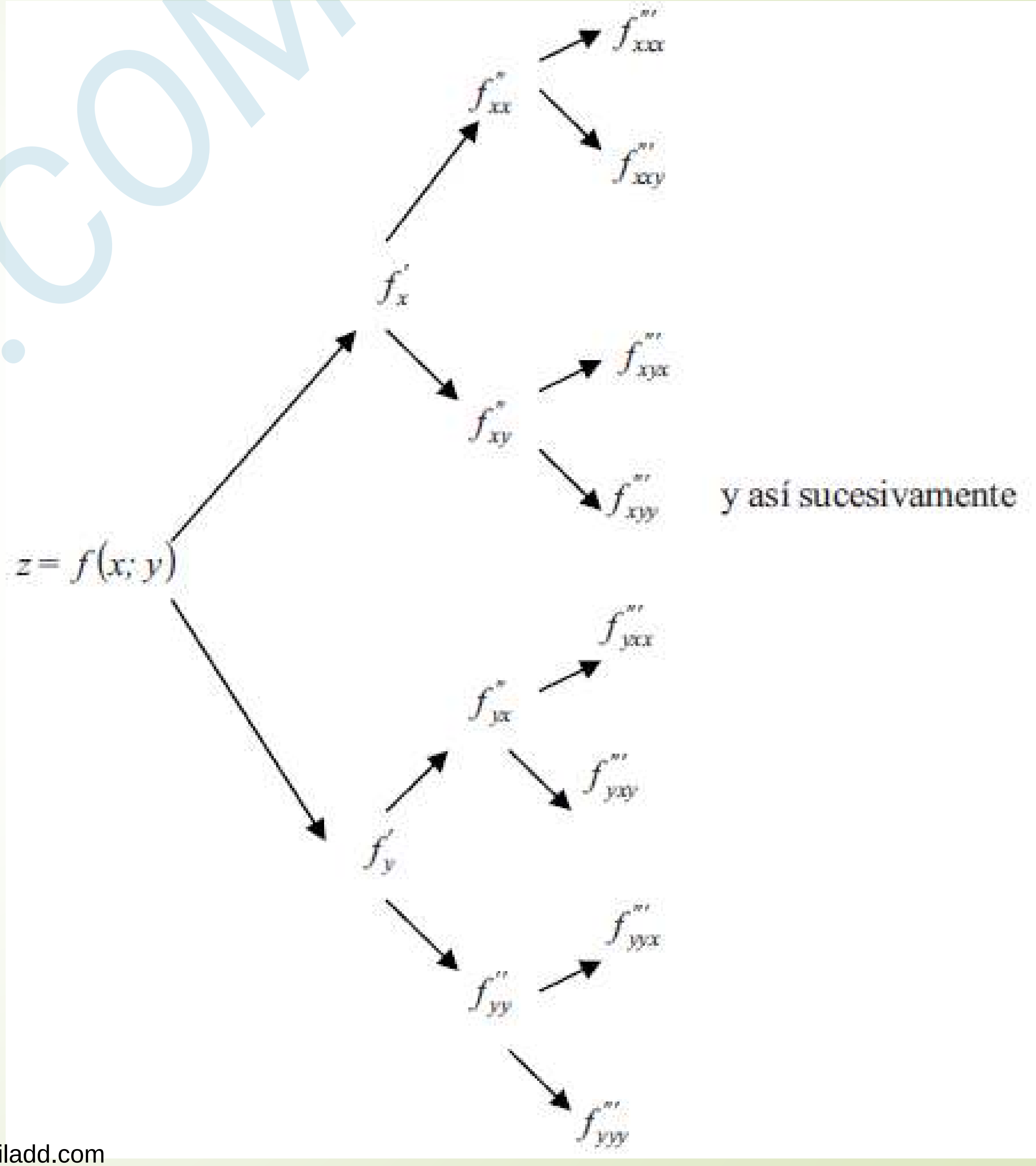
$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^z.\left(\frac{-1}{(x-y)^2}\right) = \frac{-e^z}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^z.\left(\frac{1}{(x-y)^2}\right) = \frac{e^z}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^z.\left(\frac{1}{x-y}\right) = \frac{e^z}{x-y}$$

Derivadas parciales sucesivas

- A partir de una función de dos o más variables, se pueden definir las funciones derivadas parciales primeras. Estas funciones pueden admitir, a su vez, nuevas derivadas parciales que se denominan funciones derivadas parciales sucesivas. Cada función derivada se puede volver a derivar respecto de una u otra variable. Veamos el ejemplo para una función de dos variables independientes.



Ejercicios

9. Considerando $\mathbf{f}(x, y) = x^3y - 2y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 0$ (a) ➔ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy$ ➔ $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 4y$ (b) ➔ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$ ➔ $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$

$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2$ en este caso derivamos primero respecto de "x" (función a) y parados en esta función derivamos ahora respecto de "y".

$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2$ en este caso derivamos primero respecto de "y" (función b) y parados en esta función derivamos ahora respecto de "x".

Podemos observar que las funciones son iguales ➔ Teorema de Clairaut o Teorema de Schwarz
Suponga que f está definida sobre un dominio D que contiene el punto (a, b). Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas sobre D entonces:

$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Ejercicios

10. Considerando $f(x,y) = e^{x+y}cos(x-y)$. Encontrar las derivadas segundas de la función. fxx, fyy, fxy, fyx.

$$z = e^{x+y}cos(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y}\cos(x-y) - e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}\cos(x-y) + e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x+y}\cos(x-y) - e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y) - [e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y) + e^{x+y}\cos(x-y)] = -2e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y}\cos(x-y) + e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y) + e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y) - e^{x+y}\cos(x-y) = 2e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = e^{x+y}\cos(x-y) + e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y) - [e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y) - e^{x+y}\cos(x-y)]$$
$$= 2e^{x+y}\cos(x-y)$$

Con el objetivo de reforzar las guìas de TP se recomienda realizar los siguientes ejercicios.

Recuerden que ante cualquier consulta pueden enviar a mi mail la misma: vrocha@frc.utn.edu.ar Favor de detallar Apellido, Nombre y CURSO.

- Considerando $z = e^{x^2+y}.Ln(x-y)$ encontrar las derivadas primeras.
- Considerando $z = (u+v)cos^3(x^2)$ encontrar las derivadas primeras.
- Demostrar que las derivadas cruzadas son iguales para la función $z = ln\sqrt{xy}.sen\left(\frac{x}{y}\right)$.

Para completar el estudio del tema se recomienda realizar los ejercicios de la guía adjunta.