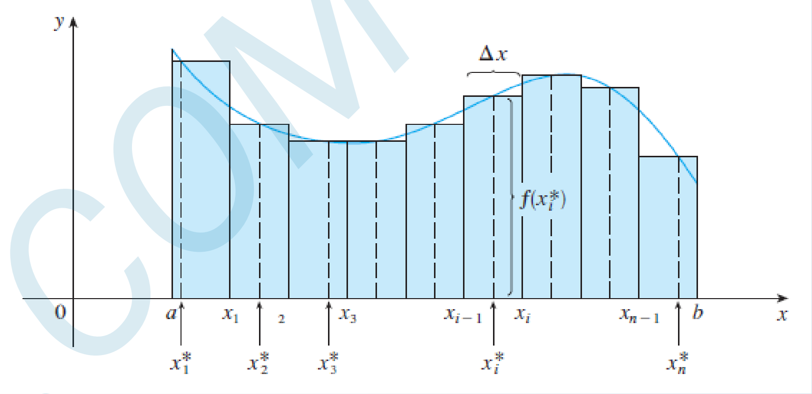
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba

12. Integrales Dobles.

Ing. Rocha, Victoria.-

Integrales Simples

En AMI, se plantea el problema de calcular el área de la región plana limitada por una función continua del tipo $y = f(x)$ con $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a;b]$.



Dividimos el intervalo $[a;b]$ en n subintervalos de igual ancho Δx y consideramos de cada subintervalo un punto interior $x_i{}^*$ al cual le corresponde, por ser ésta continua, un valor de la función $f(x_i{}^*)$.

El área de cada rectángulo se obtiene multiplicando cada $f(x_i{}^*)$ (altura) por cada Δx (ancho).

La suma de Riemann de las áreas de los n rectángulos da un valor aproximado del área bajo la curva, con x entre a y b.

Área aproximada: $$\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x$$

Si la partición se hace más fina, esta sumatoria se aproxima cada vez más al área real

Área: $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Integral definida de f de a a b

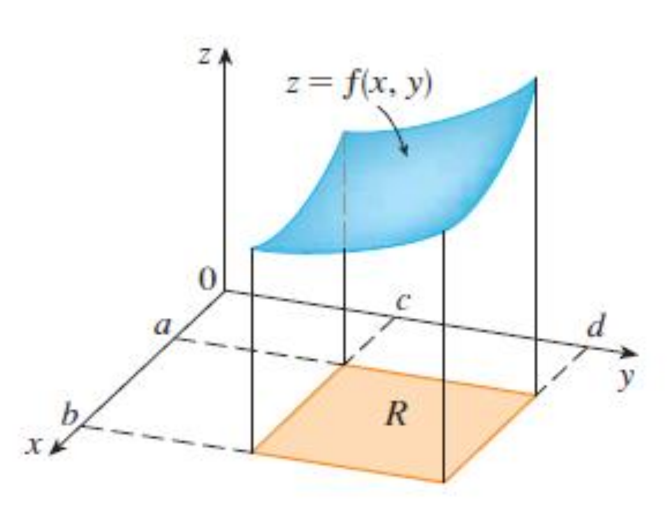
Integrales Dobles

Casi de la misma manera que el intento de resolver el problema de área nos condujo a la definición de la integral definida, ahora buscamos determinar el volumen de un sólido, y en el proceso llegamos a la definición de integral doble.

Consideramos una función *f* de dos variables definidas sobre un rectángulo cerrado:

$$R = [a, b]x[c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Suponemos que *f(x,y)≥0*. La gráfica de *f* es una superficie con ecuación *z=f(x,y)*.



Sea S el sólido que aparece arriba de R y debajo de la gráfica de *f*:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}\}$$

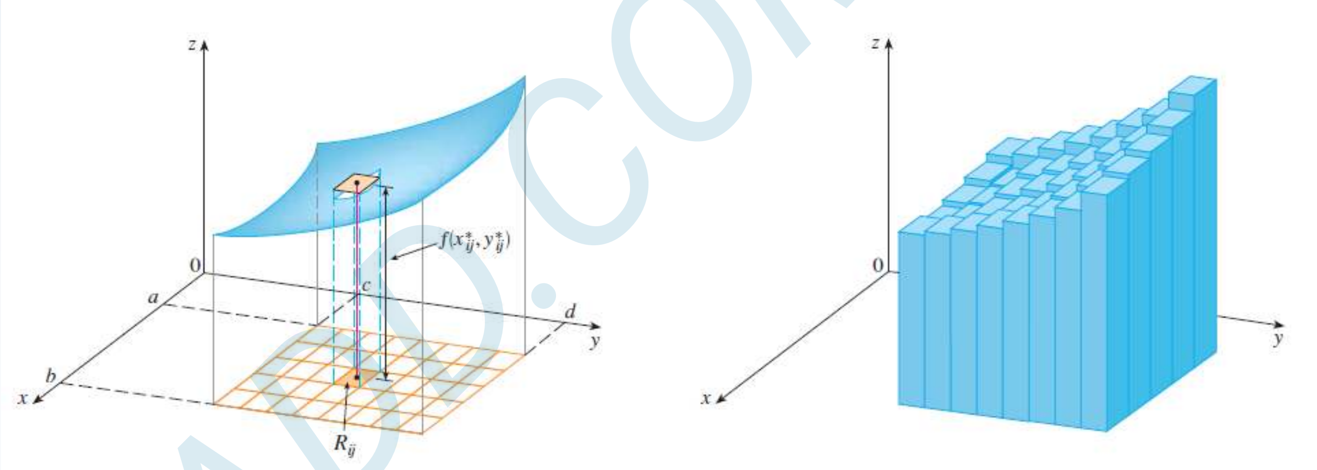
El objetivo es hallar el volumen de S.

Integrales Dobles

De manera análoga a como se define la integral simple, podemos proceder para definir la integral doble:

Se divide el rectángulo R en subrectángulos. Se divide el intervalo [a,b] en m subintervalos de igual ancho Δx y [c,d] en n subintervalos Δy.

Se forman los subrectángulos cada uno con un área $\Delta A = \Delta x \Delta y$



Se suman los volúmenes de las cajas correspondientes y se obtiene una aproximación del volumen total de S:

Volumen aproximado: $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}{}^*, y_{ij}{}^*)\Delta A$$

La aproximación dada es mejor cuando m y n crecen y, por tanto, se esperaría que:

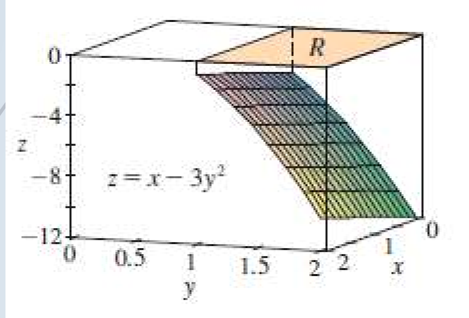
Volumen: $$V = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}{}^*, y_{ij}{}^*)\Delta A = \iint_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{f(x,y)dA}$$

Como $\Delta A = \Delta x \Delta y$, $dA = dxdy$

Integral doble de la función z=f(x,y) sobre la región R

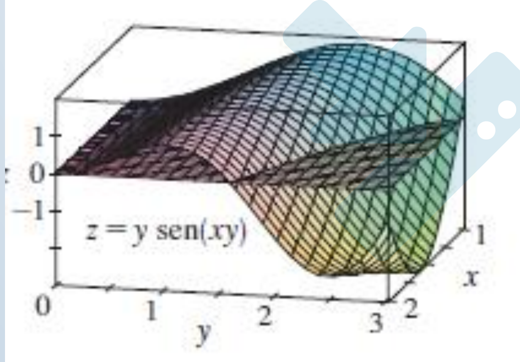
Integrales Dobles

Se ha planteado la definición de integral doble extendida en un recinto R como el volumen de un sólido definido entre $z=f(x,y)$ y dicho recinto (**cuando** $\mathbf{f(x,y)\geq 0}$). Es igualmente valido cuando $\mathbf{f(x,y)<0}$ solo que en este caso la integral doble **no representa un volumen**.



La función *f* en este ejemplo no es una función positiva, así que su integral no representa un volumen. *f* es siempre negativa en *R*, así que el volumen de la integral es el negativo del volumen que yace arriba de la gráfica de *f* y debajo de *R*.

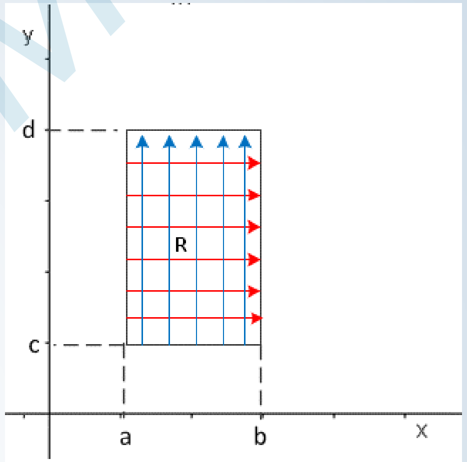
Cuando la función $z=f(x,y)$ toma valores tanto positivos como negativos en el dominio de integración, la integral es una diferencia entre volúmenes (V_a-V_d), siendo V_a el volumen que está arriba de R y debajo de $z=f(x,y)$, y V_d el que está debajo de R y arriba de $z=f(x,y)$.



Para una función *f* que tome valores positivos y negativos en el recinto, es una diferencia de volúmenes. En este ejemplo, el resultado de la integral en el recinto definido es igual 0, significa que estos dos volúmenes (V_a y V_d) son iguales.

Integrales Dobles en Dominios Rectangulares

Suponga que f es una función de dos variables que es integrable sobre el rectángulo R=[a,b]x[c,d], se puede resolver mediante ***integrales iteradas***. La siguiente expresión recibe el nombre de integral iterada extendida en el recinto R=[a,b]x[c,d]:



$$\boldsymbol{I_R = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx}$$

Esto indica que primero se resuelve la integral entre corchetes, integrando con respecto a y (entre c y d), dejando constante a x, es decir, se realiza una *integración parcial* respecto a y. Luego se integra con respecto a x (entre a y b).

También se puede plantear:

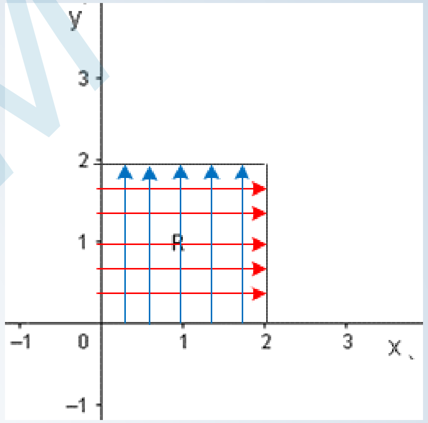
$$\boldsymbol{I_R = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy}$$

Los limites inferiores de las integrales son donde comienzan las flechas en la figura, y los superiores donde terminan

Ejemplo 1

Calcular la integral doble de $z=x^2+y^2$ en el dominio rectangular $R = \{(x,y)/0 \leq x \leq 2 \land 0 \leq y \leq 2\}$

Podemos plantearla: $\boldsymbol{I_D = \int_0^2 \int_0^2 (x^2+y^2)dydx}$



Donde integramos en primera instancia con respecto a y, dejando a x constante. Luego integramos respecto a x.

También podemos plantearla: $\boldsymbol{I_D = \int_0^2 \int_0^2 (x^2+y^2)dxdy}$

Donde integramos en primera instancia con respecto a x, dejando a y constante. Luego integramos respecto a y.
En cualquiera de los casos, el resultado es el mismo.

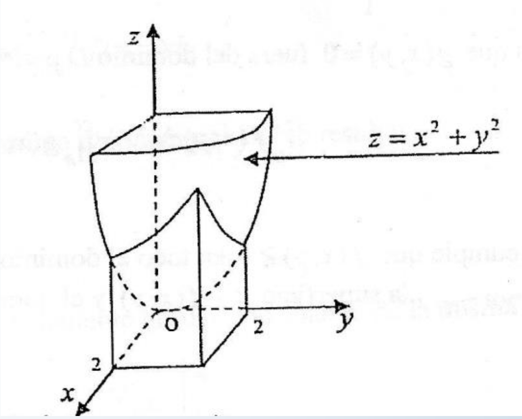
Integro la expresión con respecto a y

Aplico Regla de Barrow reemplazando por los límites de integración a la variable que integramos (y)

$$I_D = \int_0^2 \int_0^2 (x^2+y^2)dy\,dx = \int_0^2 \left| x^2y + \frac{y^3}{3} \right|_0^2 dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(2x^2 + \frac{8}{3} \right) - (0) \right] dx = \left| \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x \right|_0^2 = \left(\frac{2}{3}8 + \frac{8}{3}2 \right) - 0 = \boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

Integral simple

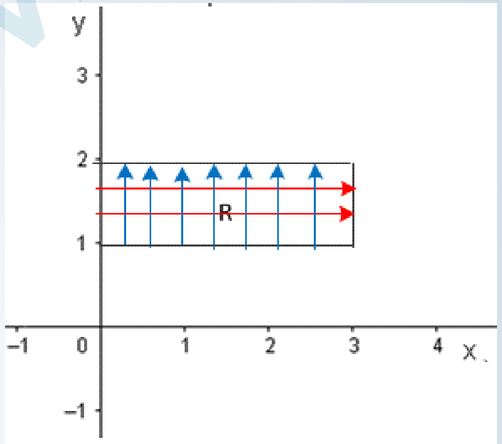


El resultado de esta integral doble nos da el volumen del sólido formado por debajo de la función z=f(x,y) y el recinto R

Ejemplo 2

Calcular la integral doble de z=x^{2}y en el dominio rectangular $R = \{(x, y)/0 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$

Podemos plantearla: $$\boldsymbol{I_D = \int_0^3 \int_1^2 (x^2 y) dydx}$$



Donde integramos en primera instancia con respecto a y, dejando a x constante. Luego integramos respecto a x.

También podemos plantearla: $$\boldsymbol{I_D = \int_1^2 \int_0^3 (x^2 y) dxdy}$$

Donde integramos en primera instancia con respecto a x, dejando a y constante. Luego integramos respecto a y.
En cualquiera de los casos, el resultado es el mismo.

Integro la expresión con respecto a x

Aplico Regla de Barrow reemplazando por los límites de integración a la variable que integramos (x)

$$I_D = \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dxdy = \int_1^2 \left| \frac{x^3}{3} y \right|_0^3 dy = \int_1^2 \left| \frac{3^3}{3} y - \frac{0^3}{3} y \right|_0^3 dy = \int_1^2 9ydy = \left| \frac{9}{2} y^2 \right|_1^2 = \frac{9}{2} 2^2 - \frac{9}{2} 1^2$$
$$= 18 - \frac{9}{2} = \boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

Integral simple

Integrales Dobles en Dominios Generales

Para integrales dobles, se desea poder integrar una función f no sólo sobre rectángulos, sino también sobre regiones D de forma más general.

Suponemos que D es una región acotada, lo que significa que D puede ser encerrada en una región rectangular R (Figura 1).

Si f es continua sobre una región D tal que: $D = \{(x, y)/a \leq x \leq$

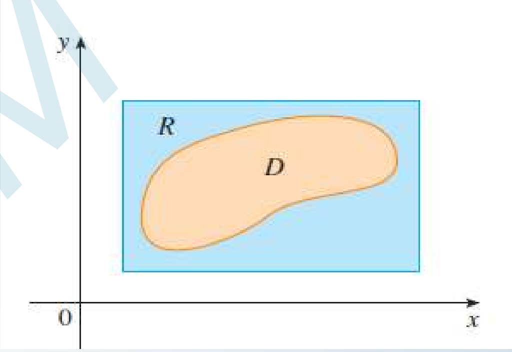


Figura 1

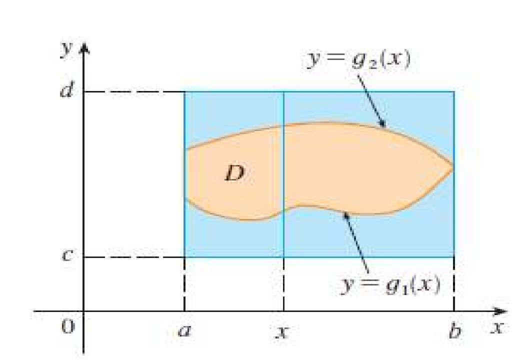


Figura 2

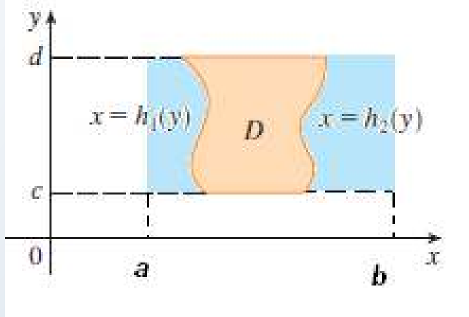


Figura 3

Ejemplo 3

Resolver la siguiente integral doble $\iint_D (2x+3y)dxdy$ dentro de los límites del dominio $D = \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$

Los puntos del dominio son aquellos que pertenecen a la región D que forman la parábola y la recta. Los puntos de intersección entre ellas son el (0;0) y (1;1). Es necesario conocerlos para plantear los límites de integración.

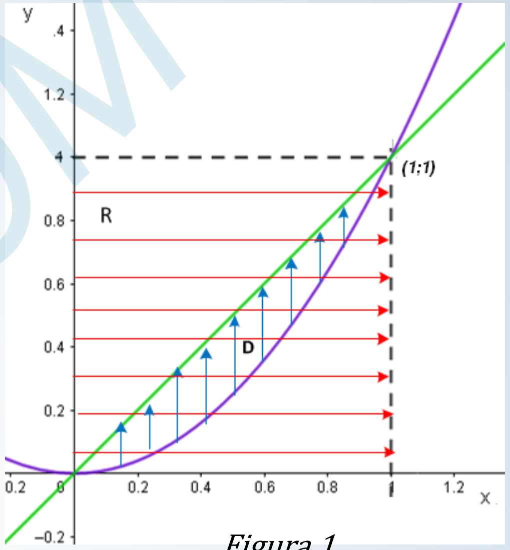


Figura 1

Se puede plantear de dos formas. Observando la Figura 1, los límites de integración para cada variable serían:

$$x\Big|_0^1 \quad y\Big|_{x^2}^{x}$$

De esta manera barremos toda la región D y la integral doble quedaría:

$$\boldsymbol{I_D = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2x+3y)dy}$$

También podríamos hacerlo como en la Figura 2:

$$y\Big|_0^1 \qquad x\Big|_y^{\sqrt{y}}$$

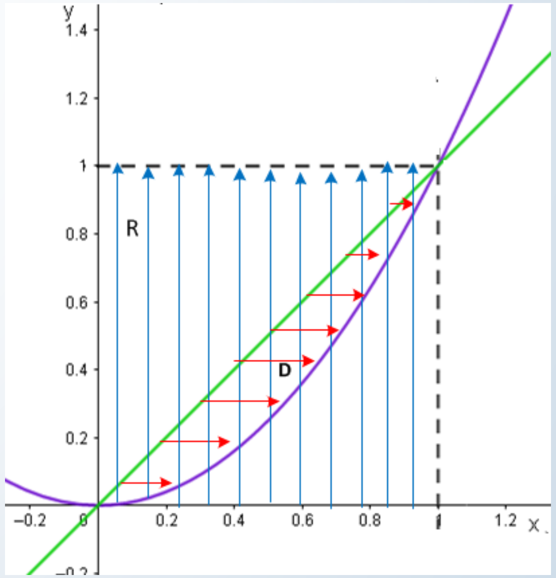


Figura 2

La integral doble quedaría:

$$\boldsymbol{I_D = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2x+3y)dx}$$

Calculando de ambas maneras el resultado es el mismo.

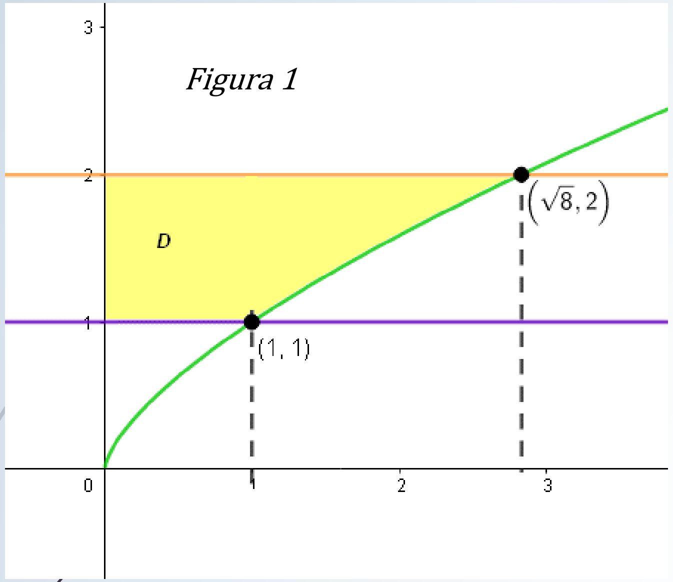
$$I_D = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2x+3y)dy = \int_0^1 \left|2xy + \frac{3}{2}y^2\right|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(2xx + \frac{3}{2}x^2\right) - \left(2xx^2 + \frac{3}{2}(x^2)^2\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{7}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right) dx$$

$$= \left|\frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{10}x^5\right|_0^1 = \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\right) - 0 = \boldsymbol{\frac{11}{30}}$$

Ejemplo 4

Sea $z = \frac{x}{y^2}$ y su dominio de integración $D = \begin{cases} x = 0 \\ x = y^{\frac{3}{2}} \\ y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ calcular la integral doble

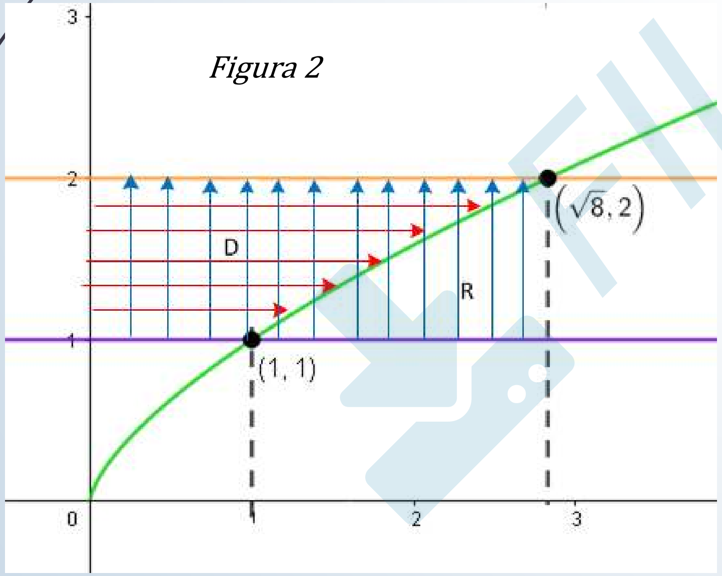


La región D esta limitada por las rectas y=1, y=2, x=0, $x = y^{\frac{3}{2}}$. Es el dominio de integración.

La forma más simple de calcular esta integral es defendiéndola de la siguiente forma. Si observamos la Figura 2:

$$y\Big|_1^2 \quad x\Big|_0^{y^{\frac{3}{2}}}$$

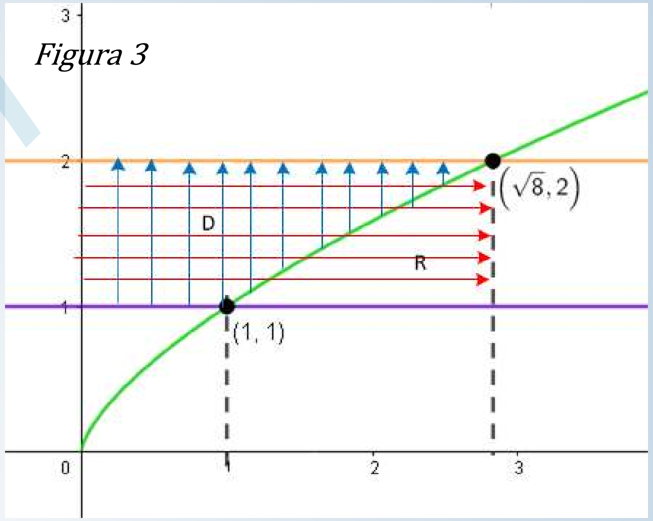
Entonces nos quedaría:



$$\int_1^2 dy \int_0^{y^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{x}{y^2}\right) dx = \int_1^2 \left|\frac{x^2 y^{-2}}{2}\right|_0^{y^{\frac{3}{2}}} dy$$

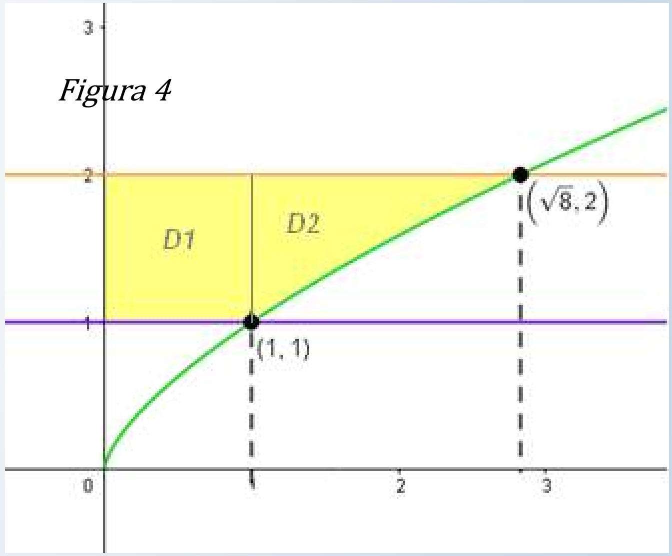
$$= \int_1^2 \left[\left(\frac{y^3 y^{-2}}{2}\right) - (0)\right] dy = \int_1^2 \frac{y}{2} dy = \left|\frac{y^2}{4}\right|_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Si quisiéramos plantearlo diferente, integrando primero con respecto a la variable y, observemos la Figura 3. Las flechas azules que nos indican los limites de integración de la variable y no siempre parten del mismo lugar. En una parte del trayecto lo hacen desde la recta y=1, y luego desde la curva $x = y^{\frac{3}{2}}$.



Entonces se debería en este caso particionar el dominio (Figura 4).

$$\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy = \iint_{D_1} \frac{x}{y^2}\,dxdy + \iint_{D_2} \frac{x}{y^2}\,dxdy$$



Los límites de integración:

$$Para\ D_1 \quad x\Big|_0^1 \quad y\Big|_1^2 \qquad\qquad Para\ D_2 \quad x\Big|_1^{\sqrt{8}} \quad y\Big|_{x^{\frac{2}{3}}}^2$$

$$\int_0^1 dx \int_1^2 \left(\frac{x}{y^2}\right) dy + \int_1^{\sqrt{8}} dx \int_{x^{\frac{2}{3}}}^2 \left(\frac{x}{y^2}\right) dy = \int_0^1 dx \left|-\frac{x}{y}\right|_1^2 + \int_1^{\sqrt{8}} dx \left|-\frac{x}{y}\right|_{x^{\frac{2}{3}}}^2$$

$$= \int_0^1 \left[\left(-\frac{x}{2}\right) - (-x)\right] dx + \int_1^{\sqrt{8}} \left[\left(-\frac{x}{2}\right) - \left(-x^{\frac{1}{3}}\right)\right] dx$$

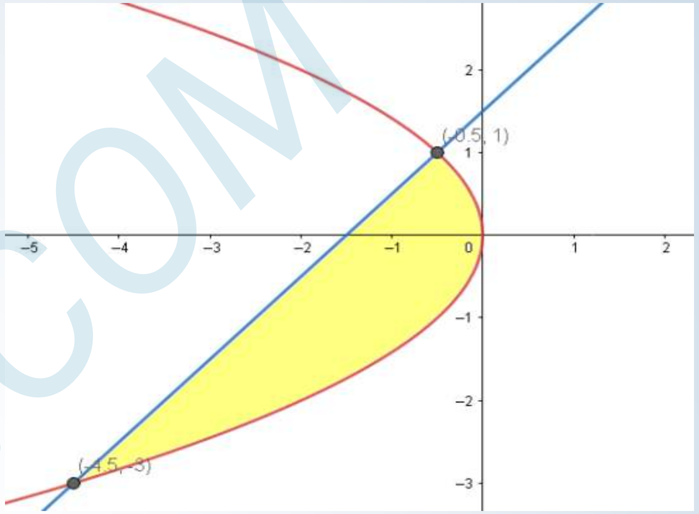
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x dx - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{8}} x dx + \int_1^{\sqrt{8}} x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{4}|x^2|_0^1 - \frac{1}{4}|x^2|_1^{\sqrt{8}} + \frac{3}{4}\left|x^{\frac{4}{3}}\right|_1^{\sqrt{8}}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(8-1) + \frac{3}{4}(4-1) = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Como se espera, el resultado es el mismo pero el procedimiento es un poco más complicado. Por lo cual, el orden de integración es importante cuando podemos encontrarnos con casos como este.

Ejemplo 5

Resolver la siguiente integral doble $\iint_D (xy)\,dxdy$ dentro de los límites del dominio $D = \begin{cases} y^2 + 2x = 0 \\ 2y - 2x - 3 = 0 \end{cases}$



Reordenando: $D = \begin{cases} x = \frac{-y^2}{2} \\ y = x + \frac{3}{2} \end{cases}$ Tenemos una recta y una parábola que conforman el dominio.

Los puntos de intersección, que podemos hallarlos mediante un sistema de ecuaciones, son $(-{}^1/_2\,; 1)$ y $(-{}^9/_2\,; -3)$

En este caso nos conviene integrar primero con respecto x para no tener que dividir el dominio.

Los limites de integración quedarían: $\boldsymbol{y|_{-3}^{1}} \quad \boldsymbol{x|_{y-\frac{3}{2}}^{-\frac{y^2}{2}}}$

$$\int_{-3}^{1} dy \int_{y-\frac{3}{2}}^{\frac{-y^2}{2}} (xy)\,dx = \int_{-3}^{1} \left|\frac{x^2 y}{2}\right|_{y-\frac{3}{2}}^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[\frac{y}{2}\left(\left(\frac{-y^2}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2\right)\right] dy$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[\frac{y}{2}\left(\frac{y^4}{4} - \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right)\right)\right] dy = \int_{-3}^{1} \left(\frac{y^5}{8} - \frac{y^3}{2} + \frac{3}{2}y^2 - \frac{9}{8}y\right) dy = \left|\frac{y^6}{48} - \frac{y^4}{8} + \frac{y^3}{2} - \frac{9}{16}y^2\right|_{-3}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{9}{16}\right) - \left(\frac{243}{16} - \frac{81}{8} - \frac{27}{2} - \frac{81}{16}\right) = \mathbf{\frac{40}{3}}$$

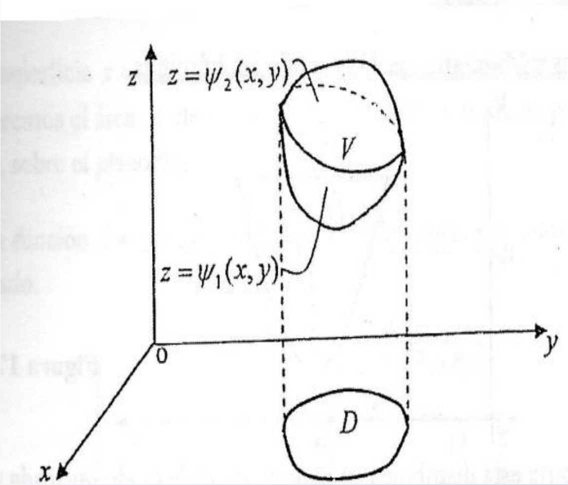
Cálculo de Área y Volumen

Cuando la función $f(x;y)=1$, el área del dominio de integración coincide numéricamente con el volumen del sólido. Entonces podemos utilizar integrales dobles para ***cálculo de áreas planas.***

$$A = \iint_D dxdy$$

Los límites de integración surgen del recinto o dominio de integración cuya área vamos a calcular.

Para el ***cálculo del volumen*** de un cuerpo que está limitado superiormente por la superficie $z=f_2(x,y)$ e inferiormente por la superficie $z=f_1(x,y)$; el volumen de este cuerpo, siendo D la proyección de ambas superficies sobre el plano [xy], es igual a la diferencia entre los volúmenes de los cuerpos definidos por dichas funciones.



El primero de ellos tiene como base inferior a D y base superior a la superficie $z=f_2(x,y)$. el segundo tiene la misma base y como base superior a $z=f_1(x,y)$. Por lo tanto el volumen buscado es igual a la diferencia entre las siguientes integrales:

$$V = \iint_D f_2(x,y)dxdy - \iint_D f_1(x,y)dxdy$$

$$V = \iint_D [f_{techo} - f_{piso}]dxdy$$

Ejemplo 6

Calcular mediante integrales dobles el volumen del cuerpo definido en el primer octante y limitado por los planos y=1-x, z=2-x, z=1. Además calcular el área del dominio.

Se grafica en el espacio los diferentes planos para observar el volumen generado (Figura 1). La proyección de este volumen sobre el plano xy nos da el dominio de integración (Figura 2).

Los limites de integración quedarían: $\boldsymbol{x|_0^1 \quad y|_0^{1-x}}$

También podríamos plantear: $\boldsymbol{y|_0^1 \quad x|_0^{1-y}}$

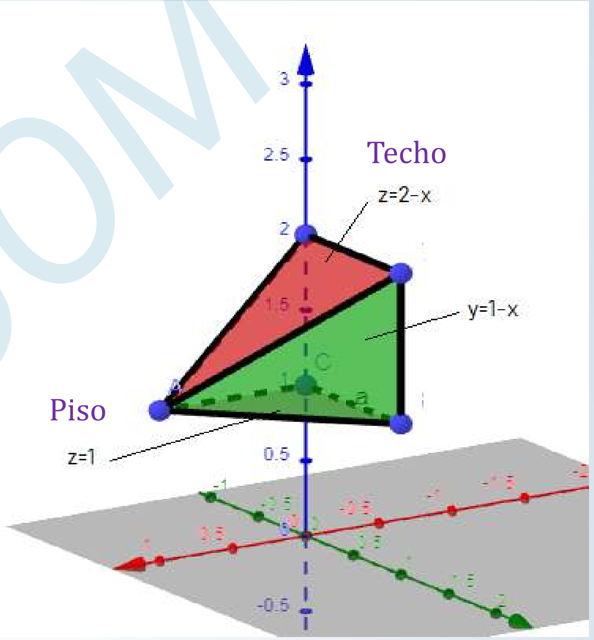


Figura 1

Cálculo de Volumen

$$V = \iint_D \left[f_{techo} - f_{piso}\right]dxdy = \iint_D [(2-x)-1]dxdy = \iint_D [1-x]dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [1-x]dy = \int_0^1 |y - xy|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(1-x-x(1-x)\right)-0\right]dx = \int_0^1 (1-2x+x^2)dx = \left|x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right|_0^1$$

$$= \left(1-1+\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{UV}$$

UV: Unidades de volumen

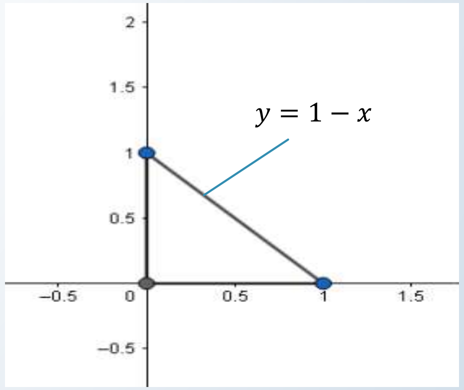


Figura 2

Cálculo de Área

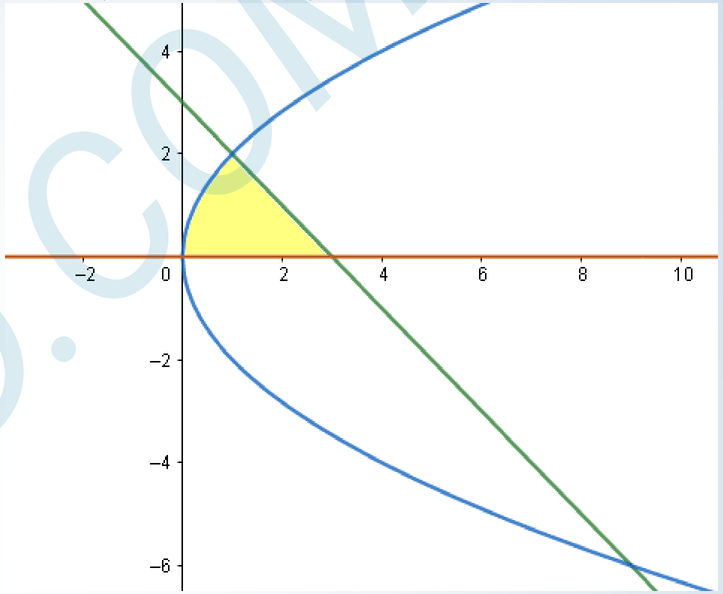
$$A = \iint_D dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 |y|_0^{1-x}\, dx$$

$$= \int_0^1 (1-x-0)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \left|x - \frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \left(1-\frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{UA}$$

UA: Unidades de área

Ejemplo 7

Calcular el área comprendida por $A = \begin{Bmatrix} x + y \leq 3 \\ y^2 \leq 4x \\ y \geq 0 \end{Bmatrix}$



Para no dividir el dominio de integración se plantea:

$$\boldsymbol{y}\Big|_{0}^{2} \quad \boldsymbol{x}\Big|_{\frac{y^2}{4}}^{3-y}$$

$$A = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dx = \int_0^2 |x|_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dy = \int_0^2 \left(3 - y - \left(\frac{y^2}{4}\right)\right) dy = \left|3y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right|_0^2$$

$$= \left(6 - 2 - \frac{2}{3}\right) - (0) = \frac{10}{3}\ UA$$

Ejemplo 8

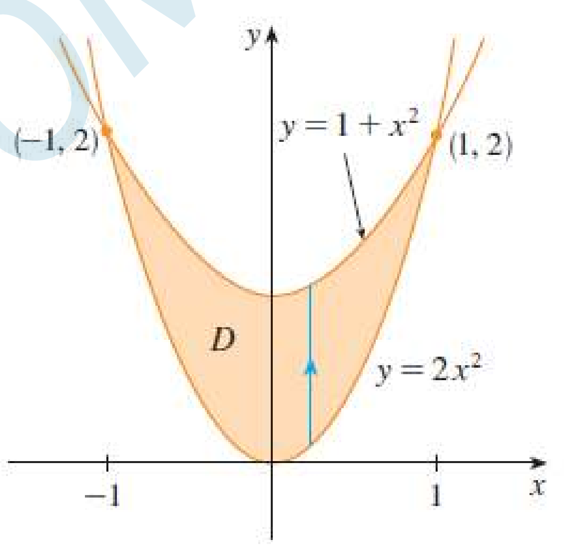
Calcular el área comprendido por $A = \left\{ \begin{matrix} y = 2x^2 \\ y = 1 + x^2 \end{matrix} \right\}$

Para no dividir el dominio de integración se plantea:

$$\boldsymbol{x}\Big|_{-1}^{1} \quad \boldsymbol{y}\Big|_{2x^2}^{1+x^2}$$

También podríamos plantear;

$$\boldsymbol{x}\Big|_{0}^{1} \quad \boldsymbol{y}\Big|_{2x^2}^{1+x^2}$$



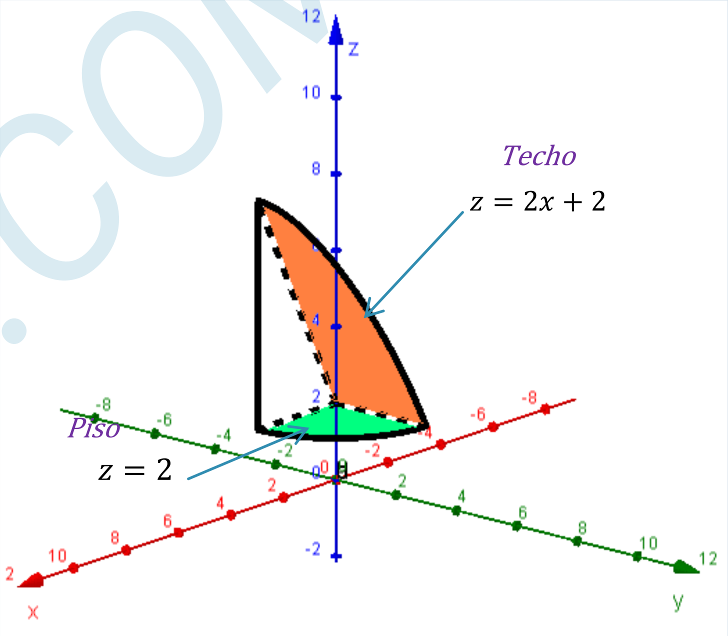
Multiplicando a la integral doble por dos para completar el área a calcular.

$$A = 2\int_0^1 dx \int_{2x^2}^{1+x^2} dy = 2\int_0^1 |y|_{2x^2}^{1+x^2} dx = 2\int_0^1 [(1+x^2) - (2x^2)]dx$$

$$= 2\int_0^1 (-x^2+1)dx = 2\left|-\frac{1}{3}x^3 + x\right|_0^1 = 2\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right) - (0)\right] = 2.\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}UA}$$

Ejemplo 9

Calcular el volumen comprendido por $V = \begin{pmatrix} 1° \; octante \\ x^2 + y^2 = 9 \\ z = 2x + 2 \\ z = 2 \end{pmatrix}$



Los límites de integración se plantean:

$$x\Big|_0^3 \quad y\Big|_0^{\sqrt{9-x^2}}$$

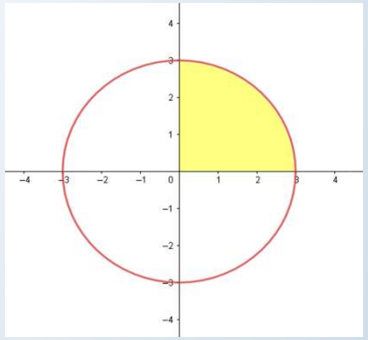
También podríamos hacer:

$$y\Big|_0^3 \quad x\Big|_0^{\sqrt{9-y^2}}$$

$$V = \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (2x + 2 - 2)dx = \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (2x)dx$$

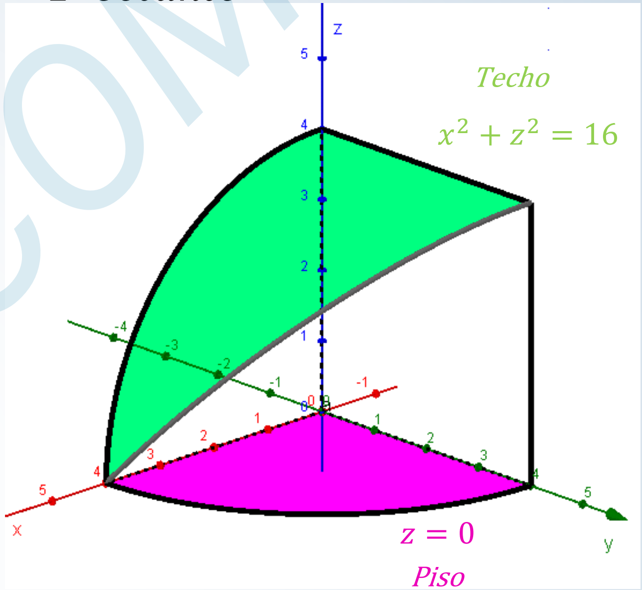
$$= \int_0^3 |x^2|_0^{\sqrt{9-y^2}} dy = \int_0^3 (9 - y^2 - 0)dy = \left|9y - \frac{y^3}{3}\right|_0^3$$

$$= (27 - 9) - (0) = \mathbf{18\ UV}$$



Ejemplo 10

Calcular el volumen comprendido por $V = \begin{pmatrix} x^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 16 \\ 1° \; octante \end{pmatrix}$

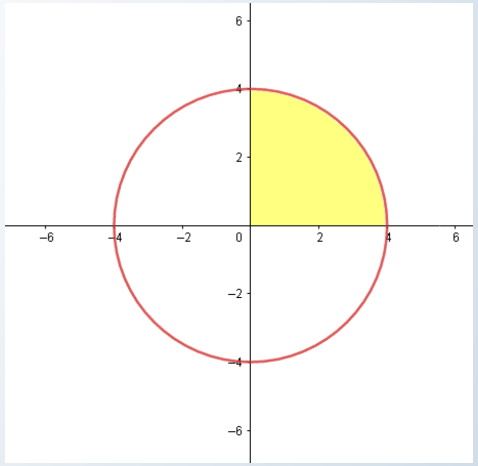


Los límites de integración se plantean:

$$x\Big|_0^4 \quad y\Big|_0^{\sqrt{16-x^2}}$$

También podríamos hacer:

$$y\Big|_0^4 \quad x\Big|_0^{\sqrt{16-y^2}}$$



$$V = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \left(\sqrt{16-x^2} - 0\right) dy = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2}\,dy$$

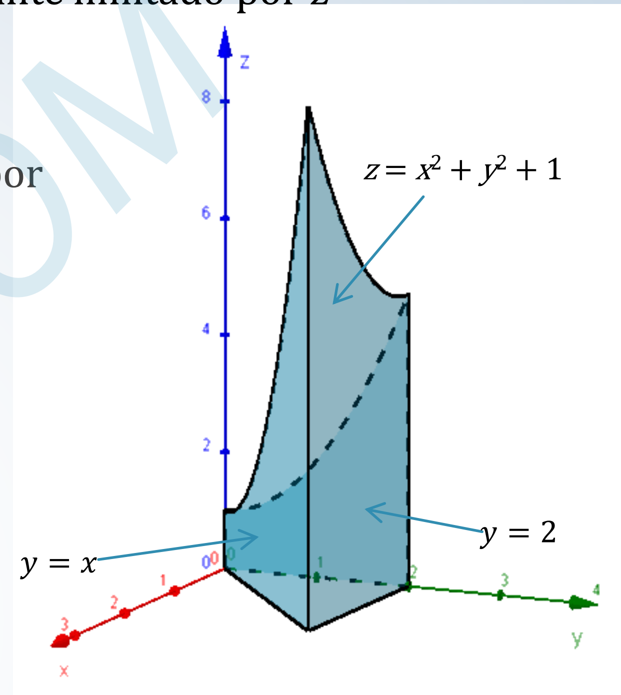
$$= \int_0^4 \left| y\sqrt{16-x^2} \right|_0^{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$= \int_0^4 \left(\sqrt{16-x^2}\sqrt{16-x^2} - 0.\sqrt{16-x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^4 (16-x^2)dx = \left| 16x - \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \left(64 - \frac{64}{3}\right) - (0) = \frac{\mathbf{128}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{UV}$$

Ejemplo 11

Hallar el volumen del sólido en el primer octante limitado por $z = x^2 + y^2 + 1$ con $D = \begin{Bmatrix} y = x \\ y = 2 \end{Bmatrix}$



Es el sólido formado por debajo de la superficie $z = x^2 + y^2 + 1$ y por arriba del plano xy, dentro del dominio de integración.

Los límites de integración se plantean:

$$x\Big|_0^2 \quad y\Big|_x^2$$

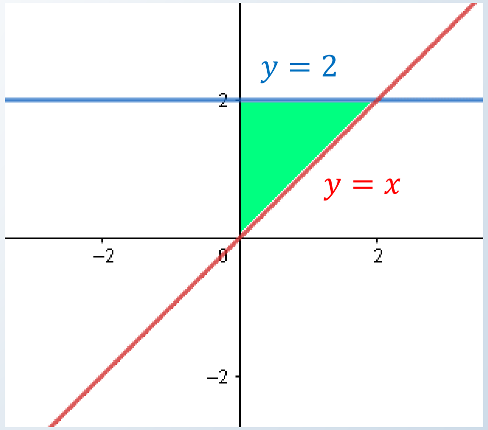
También podríamos hacer:

$$y\Big|_0^2 \quad x\Big|_0^y$$

$$V = \int_0^2 dy \int_0^y (x^2 + y^2 + 1)dx = \int_0^2 \left|\frac{x^3}{3} + xy^2 + x\right|_0^y dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^3}{3} + y^3 + y\right) dy = \int_0^2 \left(\frac{4}{3}y^3 + y\right) dy = \left|\frac{1}{3}y^4 + \frac{y^2}{2}\right|_0^2$$

$$= \frac{1}{3}16 + 2 = \boldsymbol{\frac{22}{3} UV}$$



Para completar el estudio del tema se recomienda realizar los ejercicios de la guía adjunta.