10. Extremos Relativos.

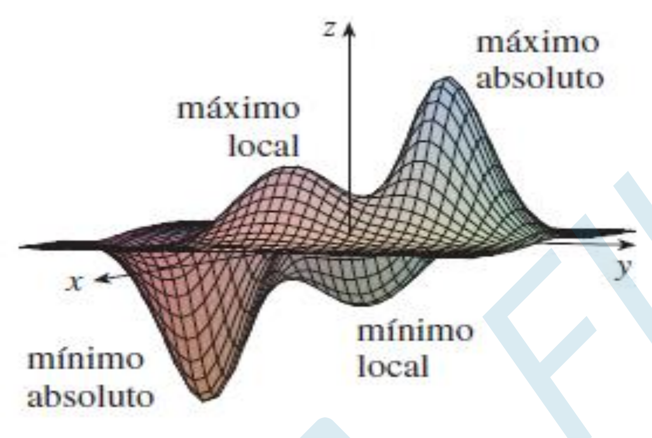
Ing. Qca. Rocha, Victoria
Ing. Rocha, Victoria.-

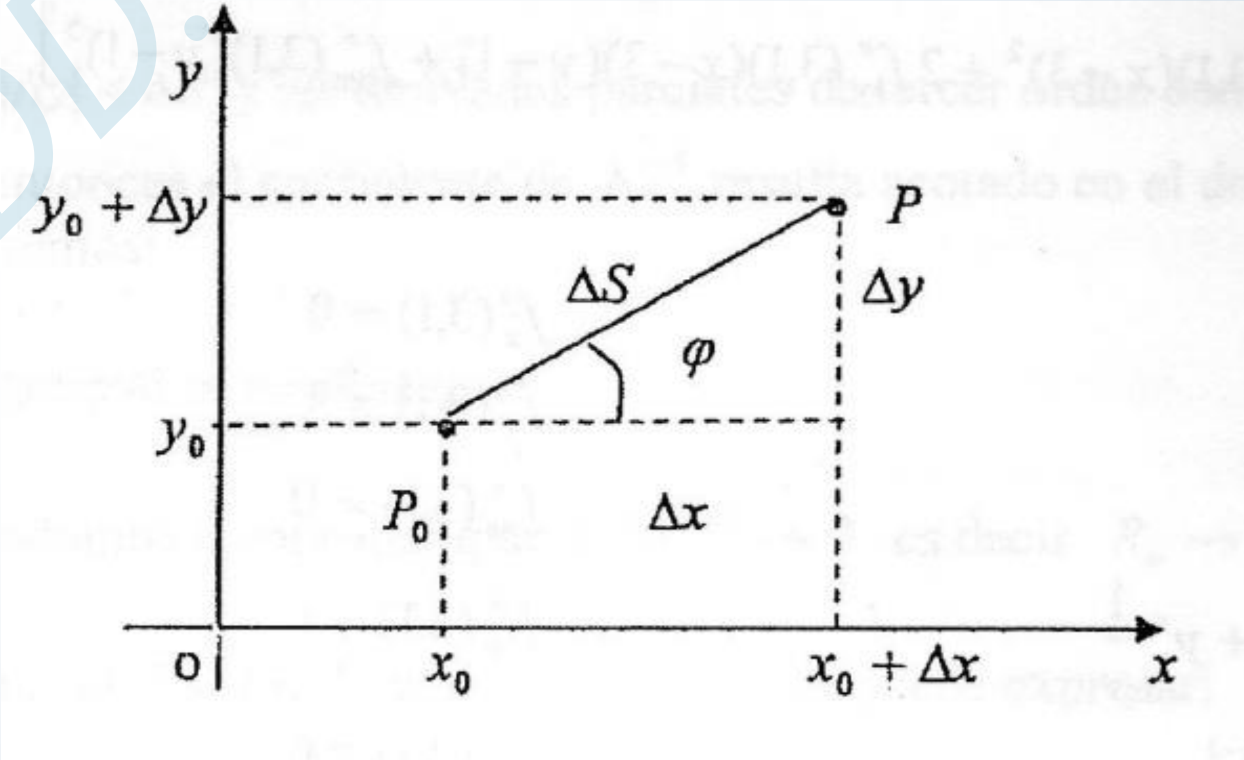
Definición

Dada la función z=f(x,y) podemos definir sus máximos y mínimos de la siguiente forma:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_o)$$

Si para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes resulta $\Delta f<0$, la función tiene un Máximo relativo (o local) en el punto $P_0(x_0;y_0)$. Por el contrario, si $\Delta f>0$, la función tiene un Mínimo relativo (o local) en el punto $P_0(x_0;y_0)$. Estos reciben el nombre de extremos relativos o locales.



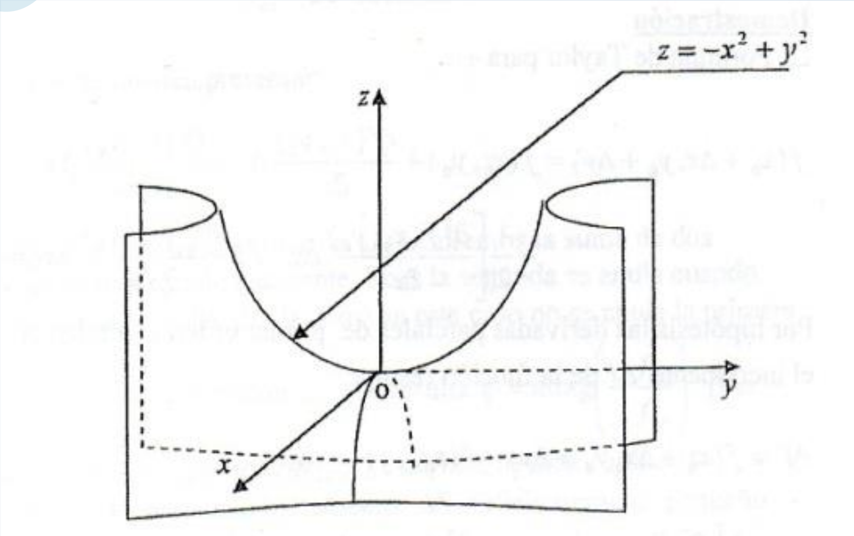


De todos los máximos relativos, aquel donde la función toma el mayor valor, se denomina máximo absoluto. De igual manera es determina un mínimo absoluto.

Como **condición necesaria** para la existencia de extremos decimos que si la función z=f(x,y) tiene un extremo en el punto $P_0(x_0;y_0)$, entonces su derivadas parciales de primer orden, si existen, se anulan en este punto.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0 \, , \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

Esta condición si bien es necesaria, no es suficiente para demostrar la existencia de extremos de la función, pues hay funciones en las cuales en algunos puntos se anulan sus derivadas parciales y sin embargo no son extremos, son los llamados puntos de ensilladura o puntos silla. Por ejemplo la función $z=-x^2+y^2$.



En la gráfica se tiene un paraboloide hiperbólico por la que pasa un plano tangente horizontal (z=0). Se puede ver que f(0,0)=0, es un máximo en la dirección del eje x y es un mínimo en dirección del eje y. Cerca del origen, la gráfica tiene la forma de una silla de montar y por eso (0;0) se llama punto silla de f.

Los puntos donde las derivadas parciales se anulan se llaman puntos críticos o puntos estacionarios de la función. Si la función tiene algún extremo, este solo puede estar en un punto crítico. Estos deben satisfacer a ambas ecuaciones a la vez.

Como **condición suficiente** para la existencia de un extremo se dice que sea la función z=f(x,y) una función continua y con derivadas parciales también continuas en un dominio que comprende al punto $P_0(x_0;y_0)$, considerando que este es un punto crítico, es decir que se anulan las derivadas parciales de primer orden, la función tendrá o no un extremo relativo en dicho punto según se cumpla:

$$(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

- Si $H(x_0;y_0) > 0$, entonces la función tiene un extremo en $P_0(x_0;y_0)$.
- Si $H(x_0;y_0) < 0$, entonces la función tiene un punto de ensilladura en $P_0(x_0;y_0)$.
- Si $H(x_0;y_0) = 0$, puede existir o no extremo.

Aquellos puntos que presenten extremos evaluamos su característica:

Si $\left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{P_0} < 0$ ó $\left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{P_0} < 0$, entonces la función tiene un MAXIMO RELATIVO en $P_0(x_0;y_0)$

Si $\left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{P_0} > 0$ ó $\left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{P_0} > 0$, entonces la función tiene un MINIMO RELATIVO en $P_0(x_0;y_0)$.

Ing. Qca. Rocha, Victoria

Ejercicio

1. Hallar los puntos característicos de la función $z = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$.

1. Armar el sistema de ecuaciones para encontrar los puntos críticos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6 = 0 \text{ (a)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y = 0 \quad \text{(b)}$$

Los sistemas de ecuaciones se pueden resolver utilizando las metodologías conocidas (sustitución, igualación, cramer, método gráfico, etc.)

En este caso vamos a resolver por sustitución, de la ec. (a) despejamos la variable "y":

$$y = 6 - 2x \text{(c)}$$

Reemplazamos la ec. (c) en la ec. (b):

$$x + 2(6 - 2x) = 0$$

$$x - 4x = -12$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$

Obtenemos la coordenada x del punto crítico. Para encontrara la coordenada "y" reemplazamos este valor en la ec (c):

$$y = 6 - 2.4$$

$$\boldsymbol{y = -2}$$

De esta manera encontramos el único punto crítico que presenta la ecuación ➔ Pc_1(4;-2)

2. El segundo paso corresponde a armar el Hessiano y evaluarlo en cada uno de los puntos críticos que encontramos. En este caso era un solo punto crítico: $Pc_1(4;-2)$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$H(x,y)_{\mathrm{Pc}_1} = 3 > 0$ ➔ entonces la función tiene un extremo en $Pc_1(4;-2)$.

3. Evaluamos qué tipo de extremo presenta la función reemplazando en la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$$ ➔ ∃ un mínimo.

4. Encontramos la coordenada z del punto crítico reemplazando en la función principal:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2 = 4^2 + 4(-2) + (-2)^2 - 6.4 + 2 = 10$$

∃ mínimo en $Pc_1(4;-2;10)$

Ejercicio

2. Hallar los puntos característicos de la función $z = x^3 + 3xy + y^3$.

<u>Paso 1:</u>

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0 \ (1)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 3y^2 = 0 \ \ (2)$$

De los cálculos auxiliares Pc_1(0;0) y Pc_1(-1;-1)

<u>Paso 2:</u>

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

$H(0,0)_{Pc_1} = 0 - 9 < 0$ ➔ Pto de ensilladura.
$H(-1,-1)_{Pc_2} = 36 - 9 > 0$ ➔ Extremo.

<u>Paso 3:</u>

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3 > 0$$ ➔ ∃ un mínimo.

<u>Paso 4:</u>

$$z = x^3 + 3xy + y^3 = 0^3 + 3.0.0 + 0^3 = 0$$
$$z = x^3 + 3xy + y^3 = (-1)^3 + 3.(-1).(-1) + (-1)^3 = 1$$

- **∃ Pto de ensilladura en Pc_1(0;0;0)**
- **∃ mínimo en Pc_2(-1;-1;1)**

C.A:

De (1):

$3y = -3x^2$

$y = -x^2$ (3)

(3) en (2):

$3x + 3(x^2)^2 = 0$

$3x + 3x^4 = 0$

$3x(1 + x^3) = 0$

De 3x=0 ➔ Pc x_1=0

Y de $(1 + x^3) = 0$ ➔ $x^3 = -1$

Pc $x_2 = -1$

Ambos valores en (3):

Para x_1=0 ➔ y_1=0 ;
Para x_2=-1 ➔ y_2=-1

Ejercicio

2. Hallar los puntos característicos de la función $z = x^2 + 3y^4 - 4y^3 - 12y^2$.

<u>Paso 1:</u>

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \ (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 12y^3 - 12y^2 - 24y = 0 \ \ (2)$$

De los cálculos auxiliares $Pc_1(0;2)$; $Pc_2(0;-1)$; $Pc_3(0;0)$

<u>Paso 2:</u>

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 36y^2 - 24y - 24; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 36y^2 - 24y - 24 \end{vmatrix} = 72y^2 - 48y - 48$$

$H(0,2)_{Pc_1} = 288 - 96 = 192 > 0$ ➔ Extremo.

$H(0,-1)_{Pc_2} = 72 + 48 - 48 = 72 > 0$ ➔ Extremo.

$H(0,0)_{Pc_3} = -48 < 0$ ➔ Pto de ensilladura

<u>Paso 3:</u>

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0 \text{ ➔ } \exists \text{ un mínimo en ambos puntos } Pc_1 \text{ y } Pc_2.$$

<u>Paso 4:</u>

$z|_{P_1} = 48 - 32 - 48 = -32$ $Pc_1(0;2;-32)$ mínimo relativo.

$z|_{P_2} = 3 + 4 - 12 = -5$ $Pc_2(0;-1:-5)$ mínimo relativo.

$z|_{P_3} = 0$ $Pc_3(0;0;0)$ punto de ensilladura.

C.A:

De (1):

x=0

De (2):

$$12y^3 - 12y^2 - 24y = 0 \Rightarrow y_3 = 0$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$y_1=2$; $y_2=-1$

Para x=0 ➔ $y_1=2$;

Para x=0 ➔ $y_2=-1$

Para x=0 ➔ $y_3=0$

Ing. Qca. Rocha, Victoria

Ejercicio

3. Hallar los puntos característicos de la función $z = 3xy - x^3 - \frac{3}{2}y^2 - 2$.

Paso 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y - 3x^2 = 0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 3y = 0 \quad (2)$$

De los cálculos auxiliares $Pc_1(0;0)$; $Pc_2(1;1)$.

Paso 2:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -3; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$$
$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 18x - 9$$

$H(0,0)_{Pc_1} = 0 - 9 = -9 < 0$ ➔ Pto de ensilladura

$H(1;1)_{Pc_2} = 18 - 9 = 9 > 0$ ➔ Extremo.

Paso 3:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -3 < 0 \text{ ➔ } \exists \text{ un máximo en } Pc_2.$$

Paso 4:

$z|_{P_1} = -2$ $Pc_1(0;0;-2)$ punto de ensilladura.

$z|_{P_2} = 3 - 1 - \frac{3}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ $Pc_2(1;1;-3/2)$ máximo relativo.

C.A:

De (1):

$y = x^2$

En (2):

$3x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

Ing. Qca. Rocha, Victoria

Ejercicio

4. Hallar los puntos característicos de la función $z = \frac{y^3}{3} - 10y + x^2y - 6x - 3$.

Paso 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 6 = 0 \ \ (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - 10 + x^2 = 0 \ \ (2)$$

De los cálculos auxiliares Pc_1(3;1) ; Pc_2(-3;-1) ; Pc_3(1;3) ; Pc_4(-1;-3).

Paso 2:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2y; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4y^2 - 4x^2$$

$H(3,1)_{Pc_1} = 4 - 36 = -32 < 0$ ➔ Pto de ensilladura

$H(-3;-1)_{Pc_2} = 4 - 36 = -32 < 0$ ➔ Pto de ensilladura

$H(1;3)_{Pc_3} = 36 - 4 = 32 > 0$ ➔ Extremo.

$H(-1;-3)_{Pc_4} = 36 - 4 = 32 > 0$ ➔ Extremo.

Paso 3:

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2y$ en Pc_3(1;3) >0 ➔ ∃ un mínimo en Pc_3.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2y$ en Pc_4(-1;-3) <0 ➔ ∃ un máximo en Pc_4

Paso 4:

Pc_1(3;1;-65/3) Pto de ensilladura

Pc_2(-3;-1:47/3) Pto de ensilladura

Pc_3(1;3;-27) mínimo relativo

Pc_4(-1;-3;-21) Máximo relativo

De (1):

$xy = 3$

$y = \frac{3}{x}$

En (2)

$\frac{9}{x^2} + x^2 = 10$

$9 + x^4 = 10x^2$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Si x^2=t

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4.9}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$

t=9→ x^2=9 → x=±3

t=1→ x^2=1 → x=±1

Ejercicio

5. Hallar los puntos característicos de la función $z = x^2 + y^2 + x^2y + 4$.

Paso 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2xy = 0 \ \ (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x^2 = 0 \ \ (2)$$

Puntos críticos: Pc_1 (0;0) ,Pc_2= $(\sqrt{2}, -1)$,Pc_3= $(-\sqrt{2}, -1)$

C.A:

De (1):

$2x(1 + y) = 0 \Rightarrow x = 0$

y=-1

En (2):

Si x=0 →y=0

Si y=-1 → $x = \pm\sqrt{2}$

Paso 2:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 4 + 4y - 4x = 4(y - x + 1)$$

$H(0,0)_{Pc_1} = 4 > 0$ ➔ Extremo

$H(\sqrt{2}, -1)_{Pc_2} = -4\sqrt{2} < 0$ ➔ Punto de ensilladura.

$H(-\sqrt{2}, -1)_{Pc_3} = 4\sqrt{2} > 0$ ➔ Extremo

Paso 3:

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0$ En Pc_1(0;0) yPc_3= $(-\sqrt{2}, -1)$ hay mínimos relativos

Ing. Qca. Rocha, Victoria

Ejercicios Extras:

- Hallar los extremos relativos y los puntos de ensilladura de la siguiente función.

$$z = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$$

- Hallar los extremos relativos y los puntos de ensilladura de la siguiente función.

$$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Para completar el estudio del tema se recomienda realizar los ejercicios de la guía adjunta.