I Początek Mechaniki Nieba 1687
(publikacja "Philosophiae Naturalis
Principia Mathematica")

Kopernik - co się porusza
Kepler - jak się porusza
Newton - dlaczego się porusza

Prawa Keplera charakter kinetyczny
Prawa Newtona charakter dynamiczny
(wprowadzona siła)

a) ciało - punkt materialny
o skończonej masie

b) układ inercyjny - przestrzeń
i czas we wszystkich układach
inercyjnych mają jednakowe
własności i jednakowe są
również wszystkie prawa
mechaniki. W takich układach
jest spełnione I pr. dyn Newtona.

c) oddziaływania między ciałami – przybliżenie Newtona.

d) ewolucja – zmiany położenia

e) wektor wodzący – w. zaczepiony w początku układu odniesienia wskazujący na punkt materialny

II Zasada najmniejszego działania – zasada Hamiltona

Jeśli w chwilach czasu t_1, t_2 układ posiada określone położenia opisane przez dwa zbiory wartości współrzędnych q_1 i q_2 to wtedy między tymi położeniami układ porusza się tak, że całka S nazywana działaniem przyjmuje najmniejszą możliwą wartość

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\,dt \qquad L(q, \dot{q}, t)$$

funkcja Lagrange'a

Równanie Lagrange'a - Eulera

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i - położenia
$\dot{q}_i$ - prędkości
$i = 1, \ldots, s$ stopnie swobody

Równań jest tyle ile stopni swobody (czyli niezależnych współrzędnych)

Równania te wymagają podania $2s$ stałych - czyli tzw całek ruchu

Niezależnych całek ruchu jest $2s-1$

"-1" to wynik niezależności równań ruchu odosobnionego układu mechanicznego od początku liczenia czasu.

III Zasady zachowania –

(1) zasada zachowania energii

Na skutek jednorodności czasu funkcja Lagrange'a układu odosobnionego spełnia warunek

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i = \ldots$$

pochodna zupełna

bo $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (L nie zależy jawnie od t)

$$\ldots = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\text{z r. L-E}} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cdot\dot{q}_i - L\right)}_{\text{energia układu}} = 0$$

energia jest wielkością addytywną

(2) Jednorodność przestrzeni

zasada zachowania pędu

Własności mechaniczne układu odosobnionego nie zmieniają się przy dowolnym (małym) równoległym przesunięciu tego układu w przestrzeni

$$0 = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\mathbb{P} = 0$$

Pęd jest wielkością wektorową i addytywną.

(3) Izotropowość przestrzeni

zasada zachowania momentu pędu

Własności mechaniczne układu nie zmieniają się przy jego obrocie jako całości $\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

moment pędu układu odosobnionego pozostaje zachowany w czasie ruchu (suma sił działających pomiędzy wszystkimi cząstkami układu odosobnionego $= 0$

(4) <u>Podobieństwo mechaniczne</u> I

Równania ruchu mają tę własność, że nie ulegają zmianie gdy pomnożymy funkcję Lagrange'a przez dowolny stały czynnik (Równania ruchu dopuszczają tory geometrycznie podobne).

II <u>Zagadnienie dwu ciał w ujęciu mechaniki klasycznej</u>

Układ wyróżniony przez symetrię **układ środka masy**, taki który jest układem inercjalnym. Energia potencjalna z jaką oddziaływują dwa ciała na siebie zależy wyłącznie od odległości pomiędzy nimi (wynika z II pr. Newtona)

Funkcja Lagrange'a takiego układu ma postać

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (względne odległości ciał)

$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ masa zredukowana

początek układu umieszczamy w środku masy $\Rightarrow m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$

$$\Rightarrow L = \frac{m \dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - U(|\vec{r}|)$$

$\Rightarrow$ Zagadnienie dwu oddziałujących ciał sprowadza się do rozwiązania zagadnienia ruchu jednego ciała (punktu) w zadanym zewnętrznym polu zewnętrznym $U(r)$

{ z 12 cutek przechodzimy do 6, gdyż 6 cutek pierwszych mamy z wyboru układu współrzędnych }

$U(|\vec{r}|)$ - jest polem centralnym
tzn. że siła działająca na cząstkę jest równoległa do wektora wodzącego w każdym punkcie

W polu centralnym jest zachowany moment pędu wzg. środka tego pola
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ ruch, który badany jest ruchem płaskim

V Ruch w polu centralnym.

Obracamy układ współrzędnych tak aby krzywa płaska (orbita) leżała w płaszczyźnie wyznaczonej przez osie układu współrzędnych wprowadzamy dogodne współrzędne np.: biegunowe

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(|\vec{r}|)$$

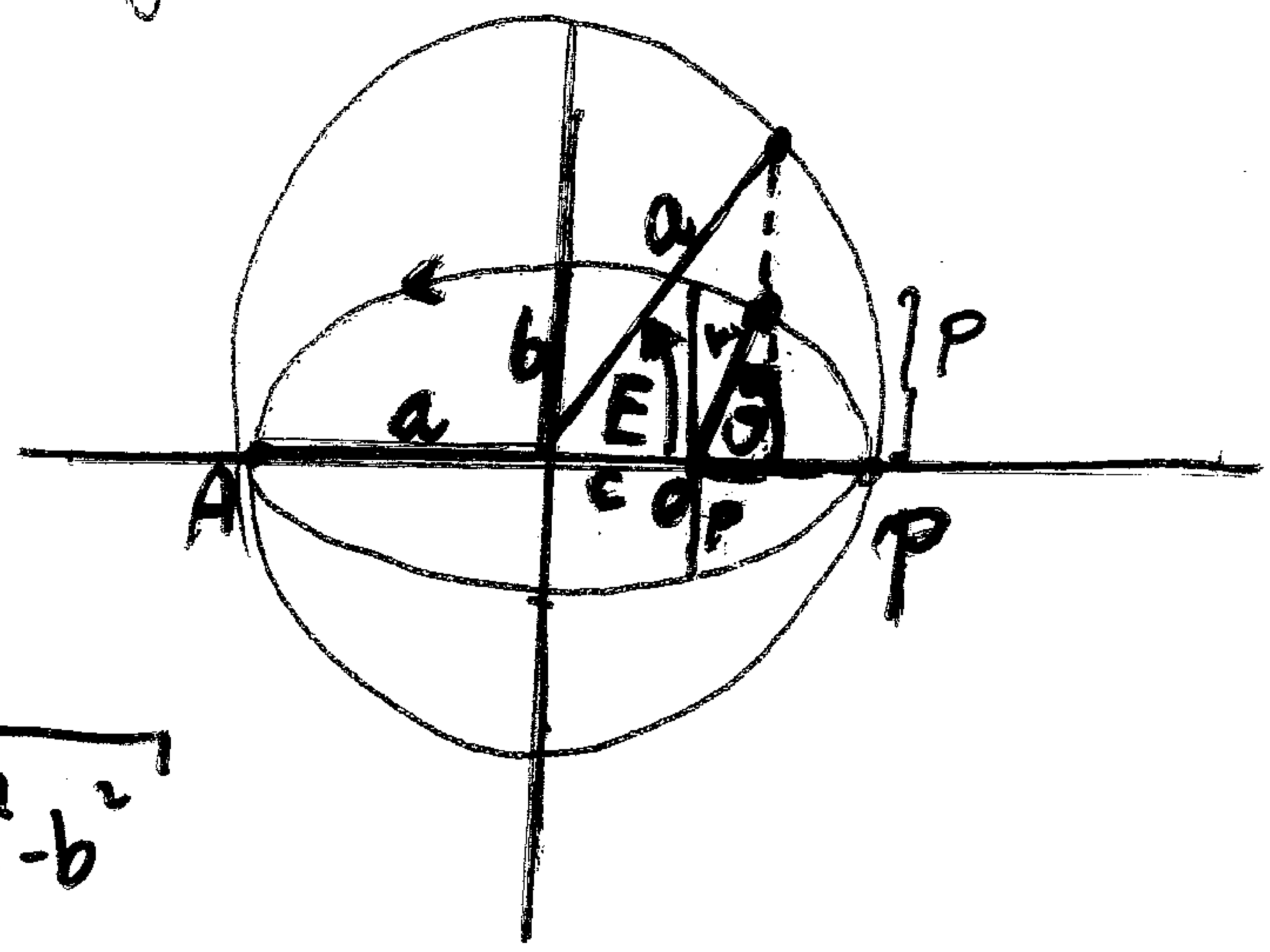
Lagrangian nie zależy od współrzędnej φ (φ jest współrzędną cykliczną)

Korzystamy z zasady zachowania energii i momentu pędu

$$\begin{cases} E_T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2) + U(r) \\ M = m r^2 \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E_T - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} + const$$

VI Zagadnienie dwu ciał - problem ~~prosty~~



r - promień wodzący

ϑ - anomalia prawdziwa

E anomalia mimośrodowa

p - parametr

P - perycentrum

A - apocentrum

AP linia absyd

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\frac{c}{a} = e$ mimośród elipsy

$p = \frac{b^2}{a}$

$p = a(1-e^2)$

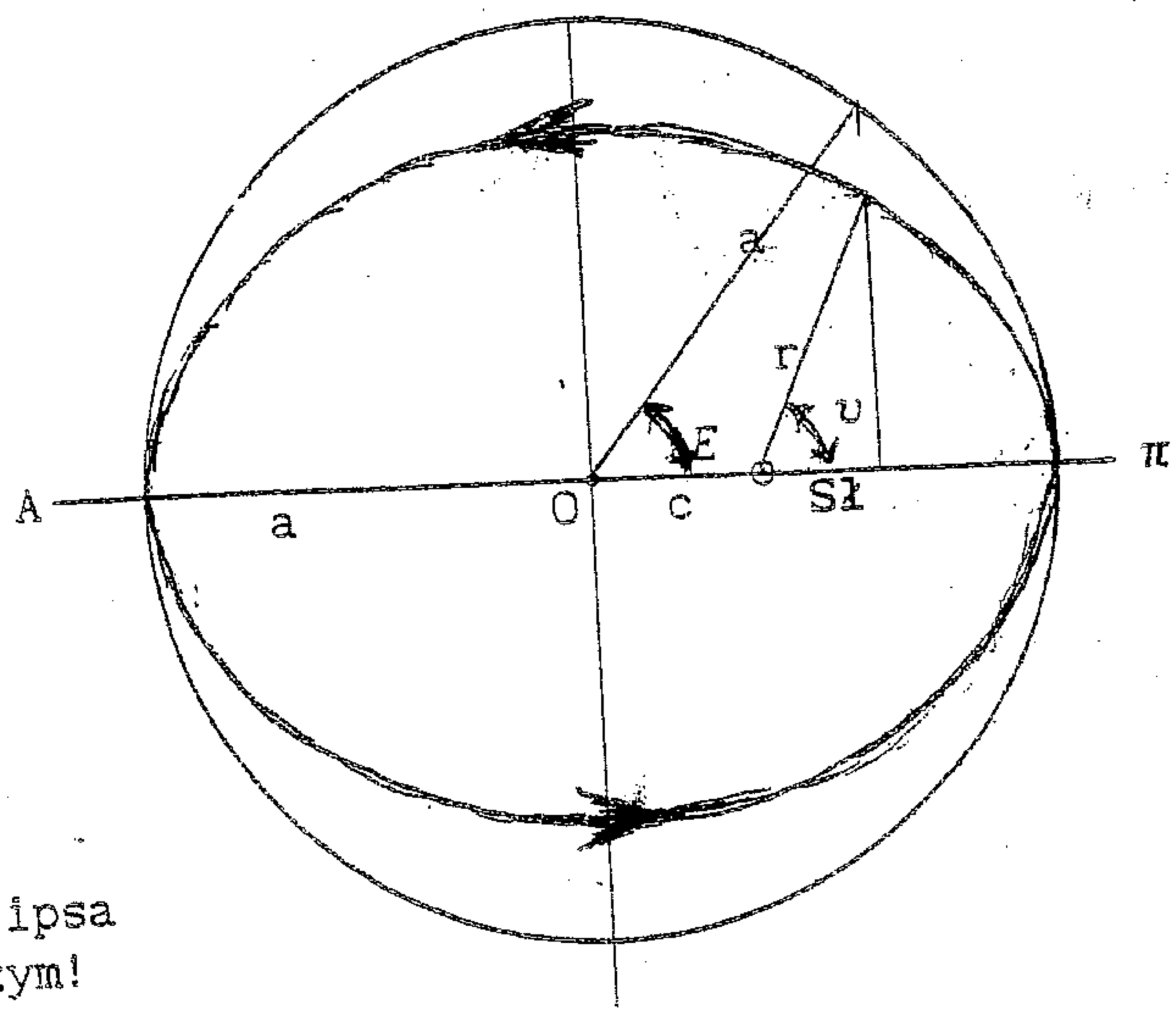
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$$

r. biegunowe elipsy

I

υ - anomalia prawdziwa
E - anomalia mimośrodowa
$\overline{A\Pi}$ - linia absyd
e - mimośród
p - parametr ogniskowy
A - aphelium
Π - peryhelium

M - anomalia średnia
P - okres obiegu planety
n - średni ruch dzienny
a - duża półoś

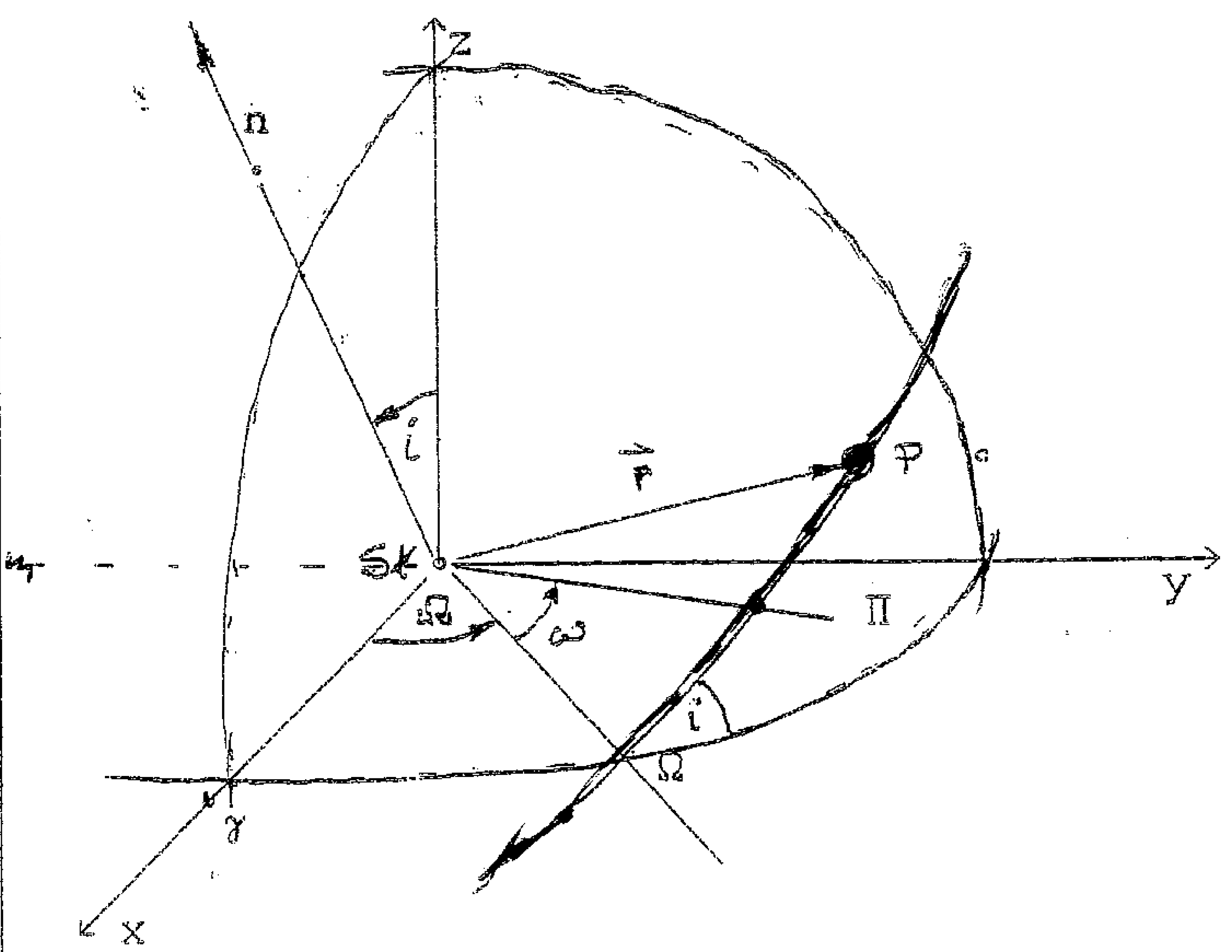


Okrąg w który wpisana jest elipsa
nazywa się okręgiem pomocniczym!

S - pozycja Słońca
(centrum)
γ - punkt Barana
Π - peryhelium

T przejście przez peryhelium
a, e kształt orbity

ω - długość perihelium.
Ω - długość węzła
wstępującego.
i - inklinacja



RYS.2.

I pr. Keplera determinuje kształt i wielkość orbity (10 T)

średnia dzienna prędkość polowa z okresu P planety wynosi

$$\frac{\pi ab}{P}\cdot t$$

r. zakreśli w czasie t pole równe

$$\frac{\pi ab}{P}t = \frac{1}{2}\int r^2 d\theta$$

całkując pr. ruchu otrzymamy wzór opisujący orbitę w postaci

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$$ gdzie

$$p = \frac{c^2}{k^2(M+m)}$$ M-masa ☉

$$e = \left(1+\frac{2Ec^2}{(M+m)k^4}\right)^{1/2}$$

$$C = \sqrt{p\,(M+m)}\cdot k$$ prędkość polowa

$$E = \frac{k^2(M+m)(e^2-1)}{2p} = \frac{k^2(M+m)}{2a}$$

energia całkowita.

11

I

Powyższe wzory pokazują, że mimośród orbity e (kształt orbity) zależy od energii E i zachodzi

$e = 1$ gdy $E = 0$ orbita jest parabolą

gdy $E > 0$ to $e > 1$ hiperbola

$E < 0$ elipsa

III prawo Keplera (okres obiegu)

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{a_2^3}{P_2^2} = \ldots = k^2 \text{ lub}$$

$$a_1^3 n_1^2 = a_2^3 n_2^2 = \ldots = k^2$$

n_i = średni ruch dzienny

k = stała Gaussa

→ Newton pokazał, że ścisła postać III prawa

$$n^2 a^3 = k^2 (M + m)$$

$$k = 6.673(10) \cdot 10^{-11} [m^3 kg^{-1} s^{-2}] = 6.707(10) \cdot 10^{-39} \hbar c \, [(GeV/c^2)^{-2}]$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

VI Prędkości a kształt orbity

(12) I

całka sił żywych (całka energii)

$$\vec{V}^2 = k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$\vec{V}$ wektor prędkości

Powyższe c. pozwala określić kształt orbity na podstawie wyliczonej wartości prędkości ciała w danym położeniu na orbicie.

$\vec{V}^2 < \frac{2k^2(M+m)}{r}$ przy $a>0$ orbita jest elipsą.

$\vec{V}^2 = \frac{2k^2(M+m)}{r}$ przy $a=\infty$ parabola

$\vec{V}^2 > \frac{2k^2(M+m)}{r}$ przy $a<0$ hiperbola

czyli otrzymujemy szacunkowy kształt orbity i wyliczamy a oraz e

$a=r \rightarrow$ koło

Prędkości na orbicie kołowej (13)

I

$a = r$.

a) $V = \sqrt{k^2(M+m)/a} = 7.91 \frac{km}{s}$

I pr. kosmiczna

b) V warunek na orbitę paraboliczną
dale prędkości ucieczki - II pr. kosm.
11.18 km/s

c) III pr. kosmiczna opuszczenie
układu Słonecznego 16.7 $\frac{km}{s}$

d) IV pr. kosmiczna opuszczenie
galaktyki 130 km/s

VIII Orientacja orbity w przestrzeni (4) I

R. Keplera

$$E - e\sin(E) = \frac{2\pi}{\underbrace{P}_{n}}(t-T) = n(t-T) = M$$

n - średni ruch dzienny

M anomalia średnia planety w epoce t

P - okres obiegu

E - anomalia mimośrodowa

e - mimośród

T - stała całkowania, moment przejścia ciała przez peryhelium

zadajemy t, mamy T, liczymy

$E \rightarrow \theta \rightarrow r$

R. K jest równaniem przestępnym, które rozwiązuje się metodą kolejnych przybliżeń → problem prosty