Φραγκίσκος Φούρλας

1059336

Α' έτος 2ο εξάμηνο

Elementary Cellular Automata

Περίληψη

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη ενός «Στοιχειώδους Κυψελοειδούς Αυτόματου» ("Elementary Cellular Automaton"), ανάπτυξη ενός γραφικού περιβάλλοντος που το προσομοιάζει και η χρήση αυτού για πειραματισμούς. Αρχικά θα γίνει αναφορά στη λειτουργεία ενός Elementary C.A. και σύγκρισή του με άλλα κυψελοειδή αυτόματα. Στην συνέχεια θα αναλυθεί ο τρόπος υλοποίησης και προγραμματισμού του αυτόματου συστήματος. Τέλος θα γίνει ανάλυση αξιοσημείωτων κανόνων λειτουργείας του στοιχειώδους αυτόματου και τα αποτελέσματα πειραματισμών με το πρόγραμμα προσομοίωσης.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα κυψελοειδές ή κυτταρικό αυτόματο είναι ένα υπολογιστικό μοντέλο που βασίζεται σε μια παράταξη κυψελών που βρίσκονται σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Η κατάσταση κάθε κελιού αλλάζει κάθε χρονική στιγμή σε σχέση με την προηγούμενη κατάσταση του ίδιου και των γειτονικών κελιών. Το Elementary C.A. είναι ένα από τα απλούστερα τέτοια συστήματα. Είναι μια μονοδιάστατη διάταξη κελιών που μπορούν να πάρουν μία από τις δύο καταστάσεις «μηδέν» και «ένα» που καθορίζεται από την προηγούμενη κατάσταση του ίδιου κελιού και των δύο άμεσα γειτονικών του. [1] Εφόσον η κατάσταση κάθε κελιού καθορίζεται από τρεις δυαδικές παραμέτρους υπάρχουν 2^3=8 διαφορετικές διατάξεις που καθορίζουν την κατάσταση ενός νέου κελιού. Ορίζοντας την κατάσταση του νέου κελιού, «ένα» ή «μηδέν», για κάθε μία από αυτές τις διατάξεις μας δίνει 2^8=256 διαφορετικούς κανόνες που ορίζουν όλα τα διαφορετικά Στοιχειώδη Κυψελοειδή Αυτόματα. Ο Stephen Wolfram ο οποίος μελέτησε αυτά τα αυτόματα στο βιβλίο του "A New Kind of Science" πρότεινε έναν τρόπο να ονομάσουμε αυτούς τους κανόνες. Αν βάλουμε στη σειρά το αποτέλεσμα (0 ή 1) κάθε διάταξης (000-111), παίρνουμε έναν δυαδικό αριθμό που αριθμεί τον συγκεκριμένο κανόνα **Σχ.1**. Στην συνέχεια της έκθεσης θα αναφερθώ σε αξιοσημείωτους τέτοιους κανόνες που δίνουν θαυμάσια και χρήσιμα υπολογιστικά συστήματα. [2] Η μονοδιάστατη φύση του Elementary C.A. το κάνει να διαφέρει από άλλα γνωστά κυτταρικά αυτόνομα όπως για παράδειγμα το διάσημο Game of Life του John Horton Conway που βασίζεται σε δύο διαστάσεις. Στην δική μας περίπτωση μπορούμε να απεικονίσουμε όλη την εξέλιξη του αυτόματου σε μία εικόνα ,σχεδιάζοντας κάθε κελί μαύρο ή άσπρο και στοιβάζοντας τις γενιές την μία κάτω από την άλλη.

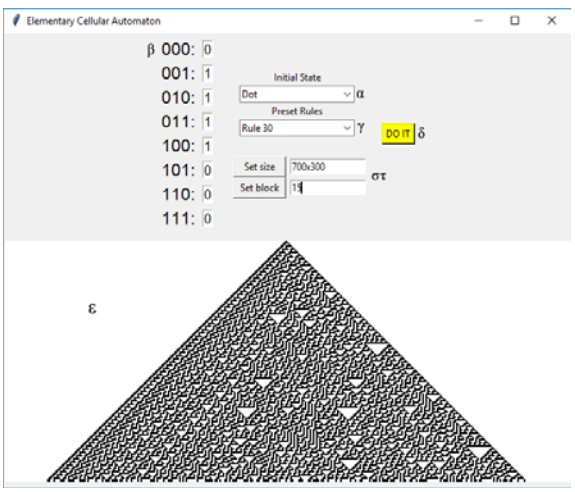
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	1	1	0	0	0

Σχήμα 1. Ο κανόνας 30: Wolfram code: 00011110 = 30. Στον πίνακα φαίνεται η τιμή ενός κελιού σε σχέση με προηγούμενες τιμές.

II. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΜΑΤΟΣ

A. *Υλοποίηση προγράμματος*

Ένας κύριος στόχος της εργασίας ήταν η ανάπτυξη προγράμματος που προσομοιάζει την εξέλιξη ενός Elementary C.A. στο χρόνο, δεδομένης μιας αρχικής κατάστασης και ενός κανόνα. Το πρόγραμμα έπρεπε να δίνει στον χρήστη την επιλογή του κανόνα και της αρχικής κατάστασης και να επιστρέφει μια γραφική απεικόνιση της εξέλιξης του συστήματος στον χρόνο.



Σχήμα 2. Το πρόγραμμα προσομοίωσης.

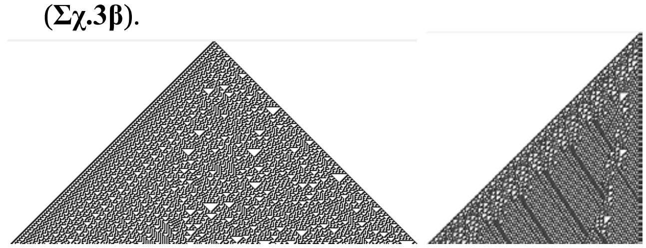
[3] Το πρόγραμμα αναπτύχθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Python 3 λόγω της ευκολίας που προσφέρει στην ανάπτυξη γραφικών εφαρμογών μέσω της βιβλιοθήκης tkinter. Η εφαρμογή δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να επιλέξει τον κανόνα του αυτόματου είτε μεταξύ προεπιλεγμένων από το αντίστοιχο dropdown menu (**Σχ.2α**) είτε θέτοντας κάθε κατάσταση ξεχωριστά (**Σχ.2β**). Στην συνέχεια ο χρήστης επιλέγει μια αρχική κατάσταση (**Σχ.2γ**):

- Dot: Ένα μαύρο κελί στην μέση του πίνακα με άσπρα κελιά
- Switching: Εναλλάξ μαύρα και άσπρα κελιά
- 2 black – 1 white/2 white – 1 black: Εναλλάξ δύο μαύρα ένα άσπρο κελί (ή αντίστροφα)
- Random: Τυχαία αρχική κατάσταση

Πατώντας το κουμπί *"DO IT"* (**Σχ.2δ**) το πρόγραμμα εμφανίζει έναν καμβά (**Σχ.2ε**) με το σχήμα που παράγει ο κανόνας του C.A. Το μέγεθος του καμβά και των κελιών ρυθμίζεται από τα αντίστοιχα textbox (**Σχ.2στ**) και πατώντας τα αντίστοιχα κουμπιά.

B. *Αξιοσημείωτοι κανόνες*

Πειραματιζόμενος με διαφορετικούς κανόνες και αρχικές συνθήκες γρήγορα κανείς διαπιστώνει την πολυπλοκότητα ενός τόσο απλού συστήματος. [4] Για τον λόγο αυτό ο Wolfram πρότεινε την κατάταξη των κανόνων σε τέσσερις κλάσεις κλιμακούμενης πολυπλοκότητας. Η πρώτη κλάση περιέχει κανόνες που γρήγορα τείνουν σε μια ομογενή σταθερή κατάσταση ενώ η δεύτερη σε ταλαντευόμενες δομές. Η τρίτη κλάση περιλαμβάνει κανόνες που δημιουργούν τυχαίες και χαοτικές δομές. Ταυτόχρονα κάθε σταθερή δομή που δημιουργείται γρήγορα καταστρέφεται (**Σχ.3α**). Τέλος η τέταρτη κλάση αποτελεί συνδυασμό των προηγούμενων κλάσεων με κανόνες που δημιουργούν δομές με ομογενή και επαναλαμβανόμενα αλλά και τυχαία μέρη (**Σχ.3β**).

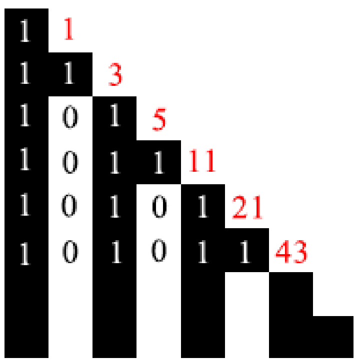


α **β**

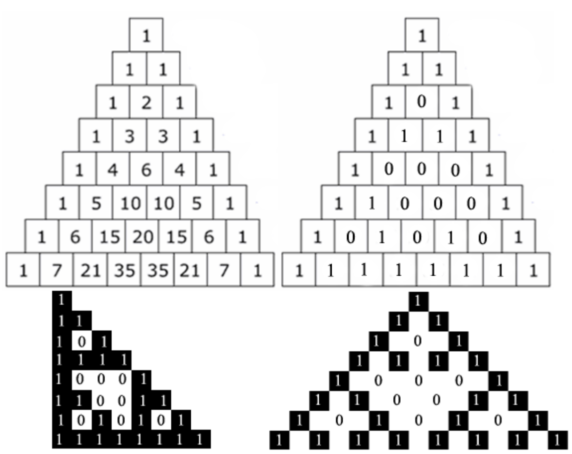
Σχήμα 3. Οι κανόνες 30 (α) και 110 (β)

Αξιοσημείωτο είναι πως σχέδια παρόμοια με αυτά που παράγει ο κανόνας 30 έχουν παρατηρηθεί στο κέλυφος ενός είδους θαλάσσιου σαλιγκαριού. Ο χαοτικός του χαρακτήρας οδήγησε τον Wolfram να χρησιμοποιήσει αυτό το αυτόματο στο πρόγραμμά του *"Mathematica"* για την παραγωγή τυχαίων ακεραίων.

Οι διάφοροι κανόνες όχι μόνο παράγουν ενδιαφέροντα, χαοτικά, γεωμετρικά σχήματα αλλά έχουν και μαθηματικό ενδιαφέρον. [6] Για παράδειγμα το 2000 ο κανόνας 110 αποδείχθηκε από τον Matthew Cook πως είναι Turing-πλήρης (Turing-complete), δηλαδή με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες, κάθε επιλύσιμο υπολογιστικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας αυτό το αυτόματο. Άλλοι κανόνες παράγουν γνωστές μαθηματικές ακολουθίες, εάν θεωρήσουμε κάθε κελί ως ένα ψηφίο δυαδικού αριθμού. [7] Παράδειγμα ενός τέτοιου κανόνα είναι ο 28 που δίνει την σειρά Jacobsthal η οποία ορίζεται ως $J_n=J_{n-1}+2*J_{n-2}$ με $J_0=J_1=1$ (1,1,3,5,11,21,43…) παρόμοια με την ακολουθία Fibonacci (**Σχ.4**). [1] Οι κανόνες 60 και 90 (ίδιος με 18, 26, 82, 146, 154, 210 και 218) δίνουν ένα σχήμα που απεικονίζει το τρίγωνο του Pascal, αν κάθε αριθμός αντικατασταθεί με το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 2. Με λίγα λόγια, όπου στο τρίγωνο υπάρχει περιττός αριθμός, στο σχήμα απεικονίζεται μαύρο κελί και, όπου άρτιος, άσπρο (**Σχ.5**). [8] Το σχήμα που δημιουργείται από αυτές τις ακολουθίες ονομάζεται *Τρίγωνο Sierpiński* και έχει τις δικιές του ενδιαφέρουσες ιδιότητες (**Σχ.6**).



Σχήμα 4. Ο κανόνας 28 δίνει την σειρά Jacobsthal σε δυαδικό σύστημα.



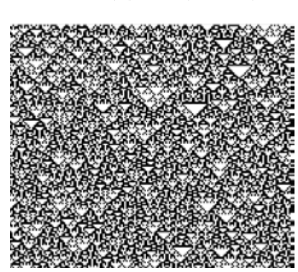
Σχήμα 5. Το τρίγωνο του Pascal [9] και το υπόλοιπό του διά δύο (πάνω) και οι κανόνες 60 και 90 (από αριστερά δεξιά, κάτω).

Σχήμα 6. Το τρίγωνο *Sierpiński [9]*

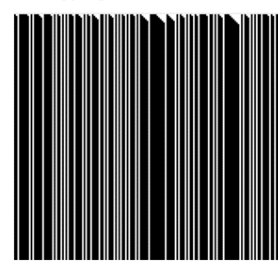
C. Αρχικές συνθήκες

Μέχρι τώρα όλοι οι κανόνες που μελέτησα εφαρμόστηκαν σε αρχική συνθήκη ένα μαύρο κελί στη μέση της διάταξης. Αυτή η αρχική συνθήκη είναι βολική διότι δίνει μια καθαρή αρχή χωρίς τυχαίους παράγοντες. Για τον λόγο αυτό είναι ευκολότερο να παρατηρήσουμε και να χαρακτηρίσουμε τις ιδιότητες κάθε κανόνα ξεκινώντας με αυτή την αρχική κατάσταση. Επιπλέον, ένα μαύρο κελί αντιπροσωπεύει τον αριθμό 1 στο δυαδικό σύστημα και έτσι κάθε κανόνας μπορεί να μελετηθεί σαν μαθηματική σειρά με αρχή το ένα, για παράδειγμα ο κανόνας 28 δίνει την σειρά Jacobsthal, όπως προαναφέρθηκε. Παρατηρούμε ακόμα πως οι περισσότεροι, αν όχι όλοι οι κανόνες στους οποίους αναφέρθηκα, είναι κανόνες άρτιου αριθμού. Το γεγονός αυτό εξηγείται εύκολα αν σκεφτεί κανείς πως, εφόσον η μελέτη τους γίνεται συνήθως με αρχική συνθήκη ένα μαύρο κελί, ο κανόνας για την συνθήκη 000 θα πρέπει να δίνει κελί με περιεχόμενο «μηδέν». Διαφορετικά όλα τα κελιά εκτός των τριών γειτονικών του αρχικού θα γίνονταν «ένα» από την δεύτερη κιόλας γενιά. Ενδιαφέρουσα όμως είναι και η συμπεριφορά των αυτόματων σε τυχαία αρχική κατάσταση.

Από τους πειραματισμούς που έκανα με διαφορετικούς κανόνες σε τυχαία αρχική κατάσταση φαίνεται πως το αυτόματο είτε γρήγορα φτάνει σε μια σταθερή κατάσταση (**Σχ.7α**) είτε συνεχίζει δημιουργώντας τυχαία επαναλαμβανόμενα μοτίβα (**Σχ.7β**).



α



β

Σχήμα 7. Οι κανόνες 90 και 110 με τυχαία αρχική κατάσταση

Το πρόγραμμα προσομοίωσης δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να θέσει ως αρχική κατάσταση εναλλασσόμενα κελιά «μηδέν» και «ένα». Ωστόσο εύκολα γίνεται κατανοητό πως αυτές οι αρχικές καταστάσεις συνήθως δεν δίνουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Αυτό διότι κάθε νέα γενιά εξαρτάται μόνο από δύο καταστάσεις: 101 και 010. Έτσι οι περισσότεροι κανόνες δίνουν τα ίδια αποτελέσματα και συνήθως φτάνουν σε τελική κατάσταση μετά από μία ή δύο γενιές. Παρόμοια αποτελέσματα δίνουν και οι άλλες επιλογές του προγράμματος, δύο «μηδέν» ένα «ένα» και αντίστροφα, για τους ίδιους λόγους.

III. ΣΥΝΟΨΗ

Τα κυψελοειδή αυτόματα είναι μαθηματικά μοντέλα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος τόσο για την πολυπλοκότητα των αποτελεσμάτων τους σε σχέση με την απλότητα του ορισμού τους όσο και για την πληθώρα των εφαρμογών τους. Οι τυχαίες συνδέσεις τους με μαθηματικά και λογικά προβλήματα δημιουργούν ερωτήματα για την λειτουργία τους. Από σχέδια στη φύση μέχρι πλήρη υπολογιστικά συστήματα, τα αυτόματα συνδέονται με πολλούς κλάδους της επιστήμης, πράγμα που τα καθιστά άξια μελέτης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. *Elementary cellular automaton.* (2018, April 28). https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_cellular_automaton

[2]. *Conways Game of Life.* (2018, May 28). https://en.wikipedia.org/wiki/Conways_Game_of_Life

[3]. Αβούρης, Ν, Κουκιάς, Μ, Παλιουράς, Β, & Σγάρμπας, Κ. (2016). *Python - Εισαγωγή στους υπολογιστές* (3η έκ.). Ηράκλειο Κρήτης: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[4]. *Cellular automaton - Classification.* (2018, June 02). https://en.wikipedia.org/wiki/Cellular_automaton#Classification

[5]. *Rule 30*. (2018, March 26). https://en.wikipedia.org/wiki/Rule_30

[6]. Rule 110. (2018, May 28). https://en.wikipedia.org/wiki/Rule_110

[7]. Sloane, N. J. A. (n.d.) *A001045*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. https://oeis.org/A001045

[8].https://www.mathsisfun.com/images/pascals-triangle-4.gif

[9]. *The evolution of the Sierpinski triangle* [Photograph]. (n.d.). Wikipedia, Wereon https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sierpinski_triangle_evolution.svg