第 8 章　Hamilton 圈

謊言將帶你走一條長路，
但永遠到不了家。
– 無名氏

1859 年，愛爾蘭數學家 Hamilton 發明了一種環遊世界的遊戲稱為「Icosian Game」，他把一個正十二面體的二十個頂點分別標上倫敦、巴黎、北京、東京、華盛頓等二十個大都市的名字，要求玩的人從某個城市出發、沿著正十二面體的稜邊通過每一個城市恰一次，最後回到出發的城市。這個遊戲在歐洲曾風靡一時，當時 Hamilton 以 25 個金幣的高價把這個專利賣給了一個玩具商，據說最後這場交易顯得很不划算——對那玩具商來說。

如果用圖論的觀點來處理這個問題的話 ①，首先我們可以先把正十二面體的圖嵌入到平面上、這樣會比較容易觀察些（如圖 8.1 所示）。而基本上這個遊戲的要求，就是在圖中找出個恰通過所有的點各一次的圈（也就是生成圈）。這並不會很難，各位不妨自己試試看。當年這個遊戲還可以有其它進一步的玩法，例如先給定其中一條由五點構成的路徑，要求找出包含它的一組解答等等。

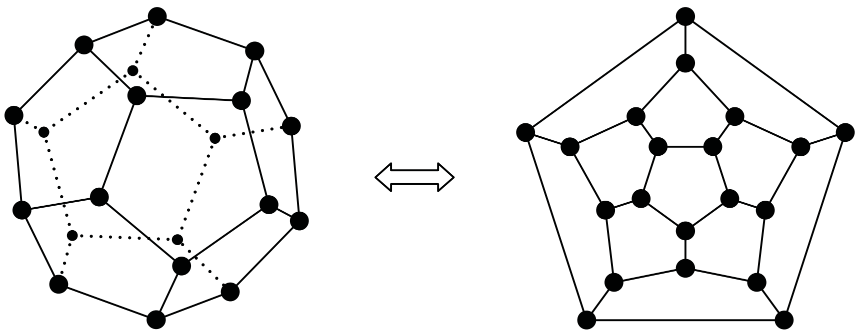

圖 8.1：正十二面體與其平面嵌入。

為了紀念 Hamilton，我們現在又將一個圖的生成圈稱為 **Hamilton 圈**（Hamiltonian cycle），類似地一個圖的生成路徑就叫 **Hamilton 路徑**（Hamiltonian path）。存在 Hamilton 圈的圖又稱為 **Hamilton 圖**（Hamiltonian graph）。於是，正十二面體就是一個 Hamilton 圖。在有向圖上我們也可以考慮其 Hamilton 圈（或路徑），也就是一個包含該圖所有點的同向圈（或路徑）。類似地有 Hamilton 圈的有向圖就叫 Hamilton 有向圖。

事實上 Hamilton 圈的概念在較早的時候就已經被 Kirkman 研究過，甚至更早可以追溯至 Euler 那個時代所流行的**騎士迴路問題**（knight's tour problem），該問題的目的是要用西洋棋當中的騎士（knight）、將棋盤上的 64 個格子不重複地走過每一格、最後回到一開始出發的那一格。這個問題與 Hamilton 的遊戲有異曲同工之妙。

Hamilton 圈的概念跟本書一開始介紹過的 Euler 迴路很像，只是把要求通過每條邊恰一次的要求給成通過每個點恰一次，但是這個差異就導致難度增加相當之多；事實上一直到現在都還沒有辦法對 Hamilton 圖做有效的刻畫，而這個問題至今仍是圖論當中的重要未解問題。一直到 1970 年代前，Hamilton 圈的研究一直和四色問題有很大的關連，而在那之後則與演算法和複雜度問題息息相關。本章中我們將介紹各種與 Hamilton 圈相關的議題。

8.1 存在 Hamilton 圈的必要條件

任何 Hamilton 圖一定都是 2-連通的，因為從圖中去掉任何一點、剩下的圖都有 Hamilton 路徑。這個必要條件顯然並非充分；例如以完全二分圖 $K_{m,n}$ 來說，它是 Hamilton 圖的充要條件為 $m=n$，因為 $K_{m,n}$ 中的任何一個圈上的點必定都是交錯地出現在兩部份當中。這意味著 2-連通的條件還可以再被增強。

如果用 $c(G)$ 來表示圖 G 的連通部分的個數，則我們有：

性質 8.1：若 G 有一個 Hamilton 圈，則對任意 $\varnothing \neq S \subseteq V(G)$ 都有 $c(G-S) \leq |S|$。

證明：G 中的 Hamilton 圈去掉 S 之後，剩下的點最多分成 $|S|$ 條路徑，每一路徑中的點都在 $G-S$ 當中的某連通部分當中（亦可能兩個以上的路徑出現在同一連通部分內），因此有 $c(G-S) \leq |S|$。 ■

圖 8.2 稱為 Herschel 圖，它是一個具有 11 個點的圖，我們可以將它去掉五個點之後得到六個連通部分，因此根據性質 8.1 可知它不是 Hamilton 圖。

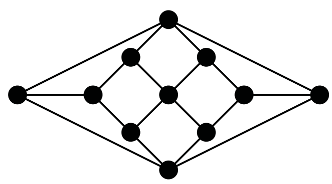

圖 8.2：Herschel 圖。

性質 8.1 的結論比 2-連通要強（因為取 S 為任何一點，則剩下的連通部分仍是一個，這就保證了 G 是 2-連通的），但它仍然無法保證 Hamilton 圈的存在，例如以 Petersen 圖來說，它滿足此性質的結論，但是它卻沒有 Hamilton 圈（見習題 8.1）。

然而，如果把結論再增強，或許就能成為 Hamilton 圈存在的充分條件。我們說一個圖 G 為 *t*-**強硬**（*t*-tough）、若對所有 $\varnothing \neq S \subseteq V(G)$ 都有 $tc(G-S) \leq |S|$ 的話。而一個圖 G 的**強硬度**（toughness）、記作 $t(G)$ 則是指使它為 *t*-強硬的 t 之最大值；例如 Petersen 圖的強硬度為 4/3。由性質 8.1，任何 Hamilton 圖的強硬度至少都是 1，而 Chvátal [2] 則猜想只要強硬度夠大就一定會有 Hamilton 圈，雖然 Hamilton 圖的強硬度不一定要大於 1（例如恰有 $t(C_n)=1$）。最早他本人猜想只要強硬度達到 3/2 就夠，不過 Thomassen 給出了對應的反例。隨後有一段時期人們相信只要強硬度為 2 的圖應該就會有 Hamilton 圈，不過 Enomoto、Jackson、Katerinis 和 Saito [11] 首先對任何 $\varepsilon > 0$ 造出了強硬度為 $2-\varepsilon$ 卻沒有 Hamilton 圈的圖，接著 Bauer、Brosersma 和 Veldman [11] 則造出了強硬度接近 9/4 的非 Hamilton 圖。到現在，Chvátal 猜想尚未能被解決。

由一開始 $K_{n,m}$ 的例子中我們可以曉得，二分圖具有 Hamilton 圈的必要條件是二部分的點數相同（事實上圖 8.2 也是一個二分圖，因此由它有 11 點便知它非 Hamilton 圖），而這顯然也不是必要條件。我們可能會希望在二分圖的情況得到一個判斷 Hamilton 圖的簡單條件，然而事實上我們有如下的結果：

定理 8.2：下列三件事情是等價的：

(1) 判斷任意的圖是否有 Hamilton 圈。
(2) 判斷任意的有向圖是否有 Hamilton 圈。
(3) 判斷任意的二分圖是否有 Hamilton 圈。

證明：$(2)\Rightarrow(1)$：給定一個圖 G，我們構造有向圖 D 如下：$V(D)=V(G)$，而對於那些在 G 當中有連邊的兩點，我們在 D 中連上兩條方向相反的邊。易知 D 有 Hamilton 圈若且唯若 G 有 Hamilton 圈，因此只要會判斷有向圖的情況即可判斷無向圖的情況。

$(1)\Rightarrow(2)$：給定有向圖 D，我們構造無向圖 G 如下。對於 D 中的每一點 v，我們在 G 中放一個 P_4、其一端為 a_v、另一端為 b_v；於是 G 中就有 $|V(D)|$ 那麼多個 P_4。接著我們將 $b_x a_y$ 相連、若且唯若 $xy \in V(D)$。易知這樣構造出來的圖 G 有 Hamilton 圈若且唯若 D 有 Hamilton 圈，因此會判斷無向圖的情況即能判斷有向圖的情況。

$(1)\Leftrightarrow(3)$：注意到前一個討論中構造出來的圖 G 是一個二分圖，因此會判斷二分圖的情況即可判斷任何有向圖、進而判斷任何無向圖的情況。而二分圖本身是無向圖的特例，因此兩者等價。 ■

8.2　存在 Hamilton 圈的充分條件

直觀來說，一個圖如果邊夠多，由一點要走到另一點的機會就大，因此有 Hamilton 圈的可能性也增加。Dirac 是第一個獲得這類定理的人，他證明若圖 G 滿足 $\delta(G) \geq |V(G)|/2$ 就會有 Hamilton 圈。這個條件是很緊的，例如 $K_{n,n+1}$ 就是一個恰不滿足此條件且沒有 Hamilton 圈的例子。

定理 8.3（Dirac [10]）：若圖 G 有 $n \geq 3$ 點且 $\delta(G) \geq n/2$，則 G 有 Hamilton 圈。

證明：用反證法，假設存在一個邊數最少的反例 G、其中 $\delta(G) \geq n/2$ 但沒有 Hamilton 圈，於是 G 並非完全圖，故存在不相鄰的相異兩點 u 和 v。因為 G 是最小反例，$G+uv$ 就有 Hamilton 圈 C，且 C 必包含 uv 這條邊。將 uv 從 C 中去掉，即可得到 G 當中的一條 Hamilton 路徑 $v_1v_2\cdots v_n$，其中 $v_1 = u$ 而 $v_n = v$。

令 $S = \{i : uv_{i+1} \in E(G)\}$ 且 $T = \{i : v_iv \in E(G)\}$。若存在 $i \in S \cap T$（如圖 8.3 所示），則我們可以取 $v_1v_{i+1}v_{i+2}\cdots v_nv_iv_{i-1}\cdots v_2v_1$ 為 G 的 Hamilton 圈，因此必有 $S \cap T = \varnothing$。

此時 $|S \cup T| = |S| + |T| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$，但 S 和 T 都不包含 n，因此 $|S \cup T| < n$，矛盾，定理得證。■

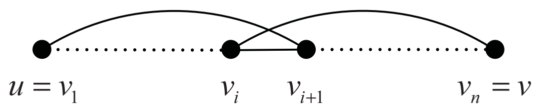

圖 8.3：只要有交錯的邊出現即能得到 Hamilton 圈。

由上述的證明，Ore 發現定理的條件其實只要「對任兩個不相鄰點 u 和 v 皆有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$」即可，甚至連「最小反例」的字眼也不必要，也就是說，用完全一樣的證明可以得到：

性質 8.4（Ore [17]）：若圖 G 有 $n \geq 3$ 點，且在 G 中有不相鄰兩點 u 和 v 使得 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$，則 G 有 Hamilton 圈若且唯若 $G+uv$ 有 Hamilton 圈。

後來，很多類似的定理都可以用一樣的手法證明，Bondy 和 Chvátal 是其中集其大成的，他們介紹了如下的概念。我們說圖 G 的 **Hamilton 包**（Hamiltonian closure，記作 $\mathcal{C}(G)$）是由 G 開始、持續操作下列動作直到不能繼續為止：找出不相鄰但度數和至少為 $|V(G)|$ 的兩點，將它們連起來造出一條新的邊。為了顯示出這樣的定義是沒問題的，我們首先要說明，無論我們以什麼樣的次序進行上述的加邊操作，結果都是一樣。

性質 8.5：圖的 Hamilton 包是唯一的。

證明：若 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 和 $f_1, f_2, \ldots, f_s$ 是圖 G 的兩種不同加邊順序、產生對應的 Hamilton 包為 G_1 和 G_2。若兩組邊集不相同、例如存在 $e_i = uv$ 不等於任何的 f_j，那麼取這樣的 e_i 使 i 最小，則 $G_1' = G + e_1 + e_2 + \cdots + e_{i-1}$ 為 G_2 的子圖、且 $e_i \notin E(G_2)$，這麼一來就有 $\deg_{G_2}(u) + \deg_{G_2}(v) \geq \deg_{G_1'}(u) + \deg_{G_1'}(v) \geq n$，而由 Hamilton 包的定義，我們還可以再把 uv 加入 G_2 當中，這跟 G_2 已經無法再加邊的假設矛盾。 ■

有了 Hamilton 包的觀念，性質 8.4 可以改寫成：

定理 8.6（**Bondy-Chvátal [5]**）：圖 G 有 Hamilton 圈若且唯若 $\mathcal{C}(G)$ 也有。

特別是當 $\mathcal{C}(G) = K_n$ 時，G 自然就有 Hamilton 圈（不過同樣地，這也不是必要條件，例如當 $n \geq 5$ 的時候 $\mathcal{C}(C_n)$ 就等於它自己）。如前所述 Dirac 的證明方法可以用來證明很多類似的結果，其中最一般的如下，我們以 Hamilton 包的方法證明之（更多類似的定理可以參見習題 8.7）。

定理 8.7（**Chvátal [7]**）：若圖 G 有 $n \geq 3$ 點且其度序列為 $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$。若 $i < n/2$ 時恆有 $d_i > i$ 或 $d_{n-i} \geq n - i$，則 G 有 Hamilton 圈。

證明：因為加邊不會降低點的度數，因此由定理 8.6，我們可以假設有 $\mathcal{C}(G) = G$，而我們只需證明有 $G = K_n$ 即可。假設 $G \neq K_n$，找出度數和最大的不相鄰兩點 u 和 v，並設 $\deg(u) \leq \deg(v)$。由 Hamilton 包的定義，必須有 $\deg(u) + \deg(v) < n$，於是 $\deg(u) < n/2$。取 $i = \deg(u)$。

由 u 和 v 的選取方式可知任何不與 v 相鄰的點之度數最多為 $\deg(u)$，而這樣的點之數目最少有 $n - 1 - \deg(v) \geq \deg(u) = i$ 個，因此 $d_i \leq i$。同理，任何不與 u 相鄰的點之度數最多為 $\deg(v)$，而這樣的點至少有 $n - 1 - \deg(u) = n - 1 - i$ 個，而又因為 $\deg(u) \leq \deg(v)$，所以度數不超過 $\deg(v) < n - i$ 的點至少有 $n - i$ 個，因此 $d_{n-i} < n - i$。可是這麼一來 $i < n/2$、$d_i \leq i$ 和 $d_{n-i} < n - i$ 的狀況和已知條件矛盾，故證明了定理。 ■

上述有關 Hamilton 圖的定理，也可以適當地寫成 Hamilton 路徑的定理，這主要是因為 G 有 Hamilton 路徑、若且唯若將 G 新增一點、連至 G 原本的所有點的新圖 ② 有 Hamilton 圈。例如，定理 8.3 和 8.7 可以改寫成：

定理 8.8：若圖 G 有 $n \geq 2$ 點且 $\delta(G) \geq (n-1)/2$，則 G 有 Hamilton 路徑。

定理 8.9：設圖 G 有 $n \geq 2$ 點且度序列為 $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$。若當 $i < (n+1)/2$ 時恆有 $d_i \geq i$ 或 $d_{n+1-i} \geq n-i$，則 G 有 Hamilton 路徑。

如果邊的連法有一些特殊性的話，Dirac 的結果還能夠再稍微改進，例如：

定理 8.10（Nash-Williams [15]）：具有 $2k+1$ 點的 k-正則圖有 Hamilton 圈。

證明：設圖為 G，將 G 新增一點 w 連至原來的所有點，令此新圖為 H。於是 H 有 $2k+2$ 點且 $\delta(H) = k+1$，因此由定理 8.3 知道 H 有 Hamilton 圈。將 w 移除便得到 G 有一 Hamilton 路徑 $P = v_0 v_1 \cdots v_{2k}$。類似於定理 8.3 的證明，如果對於某個 i 同時有 $v_0 v_i, v_{i-1} v_{2k} \in E$ 的話那 G 就有 Hamilton 圈，故我們僅需考慮這對所有 i 都不成立的情況。然而，因為 $\deg(v_0) = \deg(v_{2k}) = k$，於是此時對於任何 i，$v_0 v_i$ 和 $v_{i-1} v_{2k}$ 之中都恰有一個有連邊。底下分成兩種情況討論。

(1) 恰好是 v_0 連至 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 而 v_{2k} 則連至 $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{2k-1}$。

在這種情況中，如果對所有的 $0 < i < k$、v_i 的鄰居都僅限於 $v_0, v_1, \ldots, v_k$ 的話，那麼它們就必須每個都要連到 v_k，這麼一來 v_k 的度數就超過 k 了，因此總是必須有某一個 v_i 連到某個 v_j、其中 $0 < i < k$ 且 $k < j < 2k$。這麼一來我們就可以透過 $v_i v_j$ 得到一個 Hamilton 圈 $v_0 v_1 \cdots v_{i-1} v_i v_j v_{j+1} \cdots v_{2k-1} v_{2k} v_{j-1} v_{j-2} \cdots v_{i+2} v_{i+1} v_0$，如圖 8.4 所示。

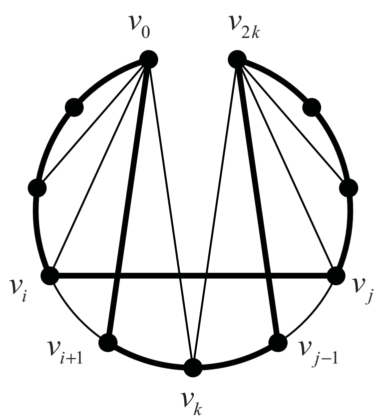

圖 8.4：第一種情況的連法，其中粗線條為一 Hamilton 圈。

(2) 存在 $0 < i < 2k$ 使得 $v_0 v_{i+1} \in E$ 但 $v_0 v_i \notin E$。

在這種情況中，根據我們的假設必有 $v_{i-1} v_{2k} \in E$，這麼一來 G 就會有一個長度為 $2k$ 的圈 $C = v_0 v_{i+1} v_{i+2} \cdots v_{2k-1} v_{2k} v_{i-1} v_{i-2} \cdots v_1 v_0$，我們將這個圈上的點依序重新命名為 $u_1 u_2 \cdots u_{2k}$，並

設 u_0 是唯一不在那上面的點。如果 u_0 和 C 上的相鄰兩點都相鄰，那就可以連接成一個 Hamilton 圈，因此只需考慮 u_0 恰好是每隔一點相鄰的狀況，不失一般性可假設 u_0 和 $u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1}$ 相鄰。隨便將 C 中的某個 u_{2i} 與 u_0 交換即能得到另一個長度為 $2k$ 的圈 C'。同樣地我們只需考慮 u_{2i} 和 C' 上的點間隔地相鄰的情況即可，這麼一來 u_{2i} 也必定是連至 $u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1}$；同樣的論點對 $1 \le i \le k$ 都適用。然而如果對任何的 $1 \le i \le k$、u_{2i} 都連至 u_1 的話，那麼包含 u_0 在內 u_1 就有了 $k+1$ 個鄰居，矛盾，因此 G 一定會有 Hamilton 圈。 ■

8.3 平面圖中的 Hamilton 圈

在第 7 章當中我們曾經提過，Tait 已經知道要證明平面圖的四色問題，只需要證明 3-連通 3-正則平面圖都可以 3-邊著色；接著很容易證明 3-正則 Hamilton 圖一定可以 3-邊著色（見習題 8.8），而他便直覺相信 3-連通 3-正則平面圖一定有 Hamilton 圈，於是他就認為他得到了另一種四色定理的證明方式。Tait 所做的這項工作正是在 Kempt「證明了」四色定理之後、但還沒被人發現其錯誤之前，由於 Tait 太相信 Kempt 的證明，以致於沒有認真地去思考是否真的 3-連通 3-正則平面圖一定會有 Hamilton 圈的這件事。

後來，Tutte 在 1940 年提出一個沒有 Hamilton 圈的 3-連通 3-正則平面圖，他所給出的對應證明比較土法煉鋼，而且有很長的一段時間裡他所給的例子是僅有的一個例子。之後 Grinberg 在 1968 年給了一個判定平版圖有沒有 Hamilton 圈的方法，使得驗證 Tutte 的例子變得容易許多。

定理 8.11（Grinberg [12]）：設 G 為平版圖。若 G 有一 Hamilton 圈 C，其內部有 f_i' 個 i 條邊的面、其外部有 f_i'' 個 i 條邊的面，則 $\sum_i (i-2)(f_i' - f_i'') = 0$。

證明：我們分別考慮 C 內部及外部的面，以便證明 $\sum_i (i-2) f_i' = \sum_i (i-2) f_i''$，而且都等於 $n-2$。當 C 內部沒有邊的時候，只有一個恰有 n 條邊的面，所以結果成立。如果 C 的內部有 $k \ge 1$ 條邊，取一條邊 e，若其兩邊的面一個有 s 條邊、另一個有 t 條邊，則當我們將 e 這條邊去掉時這兩個面會合成一個有 $s+t-2$ 條邊的面，此時 $\sum_i (i-2) f_i'$ 的變化量為 $(s-2)+(t-2)-(s+t-2-2)=0$，於是 $\sum_i (i-2) f_i'$ 的值不變，故由歸納法便知道其值恆為 $n-2$。同理也有 $\sum_i (i-2) f_i'' = n-2$。 ■

利用這個結果，我們現在可以來解釋 Tutte 所舉出的反例（稱為 Tutte 圖），該圖如圖 8.5 左邊的 G 所示，其中去掉中間一點和三條長邊之後會是三個同構於 H 的圖。檢查可知 G 是 3-連通 3-正則的平面圖。

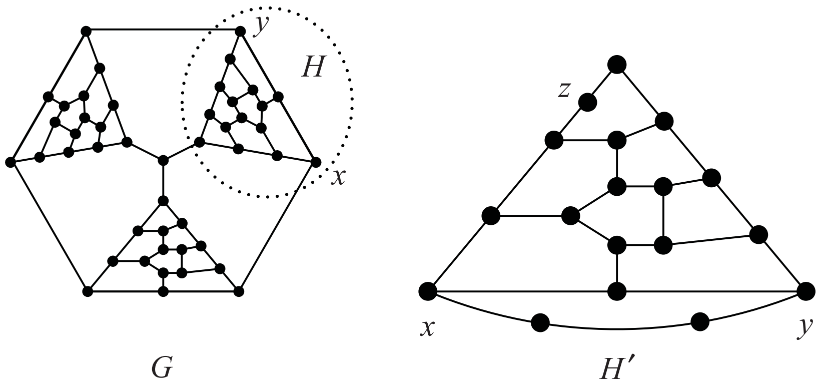

圖 8.5：Tutte 的反例。

如果 G 有 Hamilton 圈，那麼由於 G 中間的點只能從其中兩個 H 的部分通過，因此這個 Hamilton 圈一定包含了剩下的一個 H 部分的一個 x-y Hamilton 路徑。因此，G 有 Hamilton 圈的必要條件是圖 8.5 右邊的 H' 有 Hamilton 圈、其中 H' 是把 H 當中加入一條長度為 3 的 x-y 路徑、並且把上面的一條邊再細分為兩條邊、中間加入一個點 z。

H' 的面共有 4 條邊、5 條邊和 11 條邊三種（其中 4 條邊的面只有一個），於是 Grinberg 的條件變成

$$2\left(f_4'-f_4''\right)+3\left(f_5'-f_5''\right)+9\left(f_{11}'+f_{11}''\right)=0\ ,$$

可是由於 $f_4'+f_4''=1$，$f_4'-f_4''$ 不會是 3 的倍數，這麼一來上式的左側模 3 就不會是 0，因此 Grinberg 的條件不可能成立，故 G 沒有 Hamilton 圈。

Tutte 曾進一步猜想如果把「3-連通 3-正則」再加上「二分圖」的條件即能保證 Hamilton 圈的存在，不過若干年後 Horton 在 1976 年也舉出了一個有 96 點的反例。一個點數較少的反例可以參見 [13]。

雖然利用 Hamilton 圈的構想證明四色定理未能成功，不過 Tutte 所提出的另一個猜想卻導致另一個可行的途徑，他在 1966 年提出「任何 Petersen 圖-免除、無截邊的 3-正則圖都可以被 3-邊著色」這樣的猜想，將這個與 Tait 定理結合同樣能得到四色定理，因為任何平面圖當然都是 Petersen 圖-免除的。Tutte 的這個猜想最後確實被證明是正確的，而這也是由 Robertsen、Sanders、Seymour 和 Thomas [19] 四人所完成的工作。不過藉由這個路線證明四色定理並沒有比較簡單，因為它仍舊必須要利用電腦分析超過兩千種的構形。

8.4 Hamilton 圖與連通度

前面說過，邊多比較能保證 Hamilton 圈的存在。Dirac 是從度數著手，而另一方面，連通度較高也會有幫助。底下我們來看一個例子。

引理 8.12：設圖 G 滿足 $\delta(G)=k$，則 G 當中存在至少 $k+1$ 點的路徑。若 $k\geq 2$，則 G 中存在至少 $k+1$ 點的圈。

證明：取 G 中長度最長的路徑 P，並設其一端點為 v。由於 P 無法繼續延長，v 的所有鄰居都在 P 當中，因此由 $\delta(G)=k$ 便知 P 至少有 $k+1$ 點。當 $k\geq 2$ 的時候，取 v 與它在 P 上距離最遠的鄰居所連的邊，即可得到所要的圈。 ■

定理 8.13（Chvátal-Erdös [9]）：設 $G\neq K_2$。若 $\kappa(G)\geq\alpha(G)$，則 G 有 Hamilton 圈。

證明：令 $k=\kappa(G)$。顯然我們只需考慮 G 非完全圖的情況，此時有 $k\geq\alpha(G)\geq 2$。取 G 中最長的一個圈 C，由於有 $\delta(G)\geq\kappa(G)\geq 2$，由引理 8.12 便知 C 的長度至少為 $k+1$。

如果 $G-C$ 存在一連通部分 H，則 C 中至少有 k 點連邊到 H 當中，否則將 C 中連邊到 H 的點去掉會產生和 $\kappa(G)=k$ 矛盾的現象。設 $u_1,u_2,\ldots,u_k$ 是在 C 當中依序連到 H 上的 k 個點，而 a_i 為 u_i 在 C 上依序的後一點。如果這裡面存在 a_ia_j 兩點相鄰，那麼我們就可以從 u_i 穿過 H 連到 u_j、然後逆向回到 a_i 再連到 a_j 而得到一個更長的圈，如圖 8.6 所示。此外，如果任何 a_i 有連到 H，我們也可以從 u_i 穿過 H 連回 a_i 而得到更長的圈。

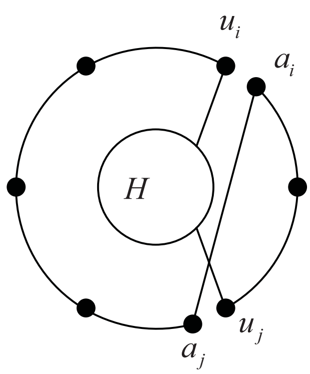

圖 8.6：a_ia_j 相鄰的情況。

因此根據我們的取法，a_i 應彼此獨立而且都沒有連到 H。於是所有的 a_i 外加 H 當中的任何一點就得到了一個大小為 $k+1$ 的獨立集，這跟 $\alpha(G)\le k$ 矛盾。因此 $G-C$ 不會剩下任何東西，也就是說 C 即為 Hamilton 圈。 ■

連通性的增加也能讓 Dirac 的條件變得較為寬鬆，例如有如下的結果：

定理 8.14（**Nash-Williams [16]**）：若 G 為含 n 點的 2-連通圖且 $\delta(G)\ge(n+2)/3$ 且 $\delta(G)\ge\alpha(G)$，則 G 有 Hamilton 圈。

此外，雖然 Tait 以為的「3-連通 3-正則平面圖有 Hamilton 圈」這件事是錯的，但稍微增強條件後就能得到一個正確的定理。Whitney 首先證明了四連通三角化平面圖都有 Hamilton 圈，而稍後這又被改進成為：

定理 8.15（**Tutte [20]**）：四連通平面圖必有 Hamilton 圈。

這些是比較困難的結果，我們在此就不證明了。

8.5　貨郎問題

貨郎問題（traveling salesman problem，簡稱 TSP）最早是 1930 年代由 Menger 等人所提出的，它有兩種型式。一種是，貨郎到各村去售貨，最後回到原出發點，每個村子都必須去過（不過不限次數），問題的要求是要設計一種路線，使得總需的旅行售貨時間最短。這個問題以圖論模型表示便是一個加權的完全圖 G、其每條邊 e 上都有一個非負的權重 $w(e)$、要求一個生成迴路 C 使得總權重 $\sum_{e\in C} w(e)$ 最小。如果模型中原有的圖 G 不是完全圖，我們可以把不存在的邊加進去，並設其權重為 ∞。另一種型式則是進一步要求貨郎到達每個村子恰一次，這種情況中就是改求一個總權重最小的 Hamilton 圈。

就演算法理論上來說，這兩種型式問題的難度是相當的，而目前大部分的研究都是針對第二種型式。這種貨郎問題其實就是 Hamilton 問題的一般化，因為當我們一律取 $w(e)=1$ 的時候，貨郎問題就等於 Hamilton 問題。然而，就演算法的觀點而言，Hamilton 問題跟決定性的貨郎問題都是 NP-完全問題，而最佳化的貨郎問題更是 NP-困難問題（參見 15.4 節），因此我們無法指望能夠設計出一個有效的演算法來解決它。不過，就像我們在考慮連通生成子圖問題時一樣，我們可以退而求其次地去尋找一個有效率的近似演算法。

在實際應用上，貨郎問題通常會有一個附加的條件，就是邊之間的權重關係應該要滿足三角不等式，也就是說對任三點 x, y, z 恆有

$$w(xz) \le w(xy) + w(yz) \text{，}$$

因為在現實的世界中就是如此。雖然加上這個條件後問題仍然是 NP-困難，但是就可以有一個好的近似演算法。

演算法 8.16：

1. 找出 G 的一個最小生成樹 T（例如使用 Kruskal 的貪求法）；
2. 將 T 的每一邊複製一份，得到一個各點均為偶點的重圖 T'；
3. 找出 T' 的一個 Euler 迴路 C'，設其通過的頂點依序為 $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2n-2}$，其中 $v_{2n-2} = v_0$；
4. 對於 C' 中重複出現的點，僅將其中指標最小的保留起來，最後剩下的 $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-1}}$ 再加上 $v_{i_n} = v_{i_0}$ 即為輸出的 Hamilton 圈。■

由於我們考慮的是完全圖，因此輸出的自然會是 Hamilton 圈。這個方法得到的 Hamilton 圈雖然未必是權重最小的，但也不會太差。

假定 C^* 是 G 的最小 Hamilton 圈，將 C^* 中任何一條邊去掉都會得到 G 的生成樹，因此 $w(T) \le w(C^*)$。由於三角不等式的緣故，對任意的 $i \le j$ 我們恆有

$$w(v_i v_j) \le \sum_{k=i}^{j-1} w(v_k v_{k+1}) \text{，}$$

因此

$$w(C) = \sum_{k=0}^{n-1} w(v_{i_k} v_{i_{k+1}}) \le \sum_{k=0}^{2n-3} w(v_k v_{k+1}) = w(C') = w(T') = 2w(T) \le 2w(C^*) \text{，}$$

也就是說，我們求得的 Hamilton 圈之權重不會超過最佳解的兩倍。

將上述的方法改進之後，Christofides 提出了如下的 1.5-近似演算法，這裡面把加權匹配的技巧也應用了進來。

演算法 8.17（Christofides [6]）：

1′. 找出 G 的一個最小生成樹 T；

2′. 令 $A = \{v : \deg_T(v) \text{ 為奇數}\}$（此時 $|A|$ 必為偶數，設為 $2r$）；

3′. 在 $G[A]$ 上面求出一個權重最小的完全匹配 M（例如 Edmonds 的加權匹配演算法）；

4′. 將 M 加入 T 中（若有重複就予以複製），產生一個各點為偶點的重圖 T'；

5′. 同演算法 8.16 的 3.；

6′. 同演算法 8.16 的 4.。 ■

我們來驗證這個演算法輸出的 C 有 $w(C) \le 1.5w(C^*)$。設 A 在 C^* 中的點依序為 $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{2r-1}}, v_{i_{2r}}$、其中 $v_{i_{2r}} = v_{i_0}$，則由三角不等式可知

$$w(C^*) \ge \sum_{k=0}^{2r-1} w(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) = \sum_{\substack{0\le k\le 2r-1 \\ 2|k}} w(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) + \sum_{\substack{0\le k\le 2r-1 \\ 2\nmid k}} w(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \ge 2w(M)，$$

因此 $w(M) \le w(C^*)/2$。而我們同樣有 $w(T) \le w(C^*)$，因此類似於先前的計算會有

$$w(C) \le w(C') = w(T') = w(T) + w(M) \le 1.5w(C^*)。$$

Christofides 的演算法是近似演算法最早期的例子之一，對於讓更多人投入近似演算法的研究具有一定程度的影響。然而，在 Christofides 之後，一直未能有人能將 1.5 這個倍數更進一步降低，這也是演算法中的一道經典未解問題。比較近期的一個結果是在 2006 年的時候，Berman 和 Karpinski [3] 提出了一個 8/7 -近似的多項式演算法、能夠解決當權重皆為 1 或 2 的情況下的三角不等式型貨郎問題。

如果將貨郎問題的條件更加強，假定 G 的點就畫在平面上、然後各邊的權重就依照它們的實際長度給定（這是三角不等式型貨郎問題的特例），這樣的型式稱為**平面貨郎問題**（planar TSP）或 **Euclid 貨郎問題**（Euclidean TSP）。平面貨郎問題可以有非常好的近似演算法；具體而言，Arora [1] 證明，對於任意的 $c > 1$ 都存在一個 $(1+1/c)$-近似演算法，其需時為 $O(n\ln^{O(c)} n)$。

習題

8.1 試證明 Petersen 圖的任何 2-因圖都同構於兩個 C_5。

8.2 (a) 設 x 和 y 為 Hamilton 二分圖 G 中的兩頂點。證明 $G-x-y$ 有完美匹配、若且唯若 x 和 y 分別在 G 的不同二部分中。

(b) 利用 (a) 的結果證明，從 8×8 的西洋棋盤中去掉兩個單位方格後的盤面可以分割成一些 1×2 的長方形、若且唯若去掉的兩個格子是不同顏色的。

8.3 若 $k \ge 3$，圖 G_k 是由兩個 $K_{k,k-2}$ 聯集起來、並在兩個 $K_{k,k-2}$ 有 k 點的部分之間加入 k 條邊的匹配（如圖 8.7 所示）。試決定出所有使得 G_k 有 Hamilton 圈的 k。

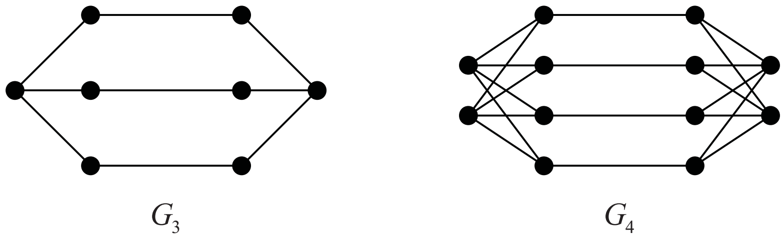

圖 8.7：G_3 和 G_4。

8.4 (a) 證明若 G 和 H 均為 Hamilton 圖，則 $G \square H$ 亦為 Hamilton 圖。

(b) 用此證明當 $k \geq 2$，超立方 Q_k 為 Hamilton 圖。

8.5 圖 G 的 k 次**次方**（power）、記作 G^k 之定義如下：

$$V\left(G^k\right)=V\left(G\right)，E\left(G^k\right)=\left\{xy:1\leq d_G\left(x,y\right)\leq k\right\}。$$

證明任何至少有三點的連通圖 G 的 3 次方 G^3 皆有 Hamilton 圈 ③。（提示：不失一般性可假設 G 為樹，並證明如下的更強結論：對於任一條邊 $xy \in V\left(G\right)$，G^3 中皆有一 Hamilton 圈包含了 xy 這條邊。）

8.6 (a) 證明 $t\left(G\right)\leq \kappa\left(G\right)/2$。

(b) 證明若 G 為爪-免除，則 $t\left(G\right)=\kappa\left(G\right)/2$。

8.7 若 $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ 為圖 G 的度序列，證明底下 $\left(i\right)\Rightarrow\left(i+1\right)$ 對 $1\leq i\leq 6$ 皆成立：

(1) （Dirac [10]）若 $1\leq k\leq n$ 則 $d_k \geq n/2$。

(2) （Ore [17]）若 $uv \notin E\left(G\right)$ 則 $\deg\left(u\right)+\deg\left(v\right)\geq n$。

(3) （Pósa [18]）若 $1\leq k<n/2$ 則 $d_k > k$。

(4) （Bondy [4]）若 $j<k$、$d_j \leq j$、$d_k < k$ 則 $d_j + d_k \geq n$。

(5) （Chvátal [7]）若 $d_k < k < n/2$ 則 $d_{n-k} \geq n-k$。

(6) （Las Vergnas [14]）若 $1\leq i,j\leq n$、$i+j\geq n$、$v_i v_j \notin E\left(G\right)$、$\deg\left(v_i\right)\leq i$、$\deg\left(v_j\right)<j$ 則 $\deg\left(v_i\right)+\deg\left(v_j\right)\geq n$。

(7) （Bondy-Chvátal [5]）$\mathcal{C}\left(G\right)=K_n$

8.8 試證明 3-正則的 Hamilton 圖皆可 3-邊著色。

8.9 我們說一個圖 G 可被**唯一地**（uniquley）k-邊著色、如果 G 的所有 k-邊著色僅差在顏色的名字交換而已的話。證明任何可被唯一 3-邊著色的 3-正則圖有 Hamilton 圈。

8.10 設 G 為三角化平面圖。證明我們可以將 G 的頂點分成兩個集合、分別導出林，若且唯若 G^* 有 Hamilton 圈。

8.11 對於圖 8.8 中的兩個圖，找出一個 Hamilton 圈、或者用 Grinberg 定理證明它們沒有 Hamilton 圈。

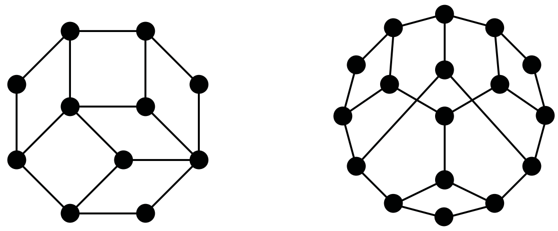

圖 8.8：這兩個圖是否有 Hamilton 圈？

8.12 證明圖 8.9 沒有 Hamilton 圈，並解釋為何無法直接使用 Grinberg 定理證明此事。

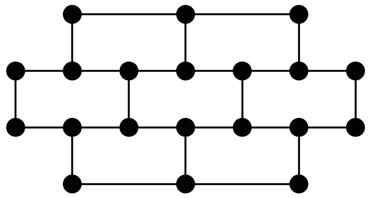

圖 8.9：一個非 Hamilton 平面圖。

8.13 圖 8.10 為 Grinberg 圖，利用 Grinberg 定理證明它沒有 Hamilton 圈。注意到這也是一個 3-連通 3-正則非 Hamilton 平面圖的例子。

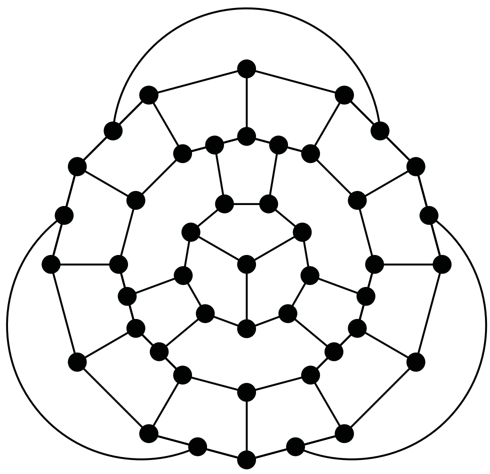

圖 8.10：Grinberg 圖。

8.14 目前已知最小的 3-連通 3-正則非 Hamilton 平面圖如圖 8.11 所示（38 點）。試證明它確實沒有 Hamilton 圈。

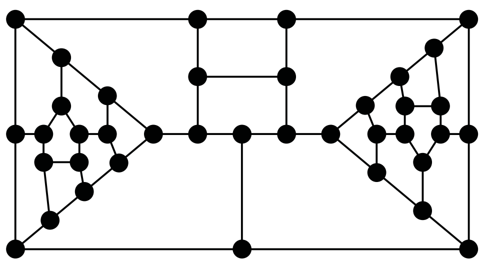

圖 8.11：Barnette-Bosák-Lederberg 圖。

附註

① Hamilton 當時在處理這個問題的時候用的是完全不一樣的觀點，他利用抽象代數的方式定義了一些符號，藉由那些符號所產生的群和正十二面體建立對應關係，然後藉由解代數式子來得到答案。這個方法不但比較複雜，而且也沒辦法推廣到一般的圖上。

② 這可以簡單地表示成 $G \vee K_1$。這裡 $G \vee H$ 稱為是 G 跟 H 的**聯合**（join），其定義為 $V(G \vee H) = V(G) \cup V(H)$ 、 $E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy : x \in V(G),\, y \in V(H)\}$ 。

③ Fleischner 曾證明一個進一步的結論：任何 2-連通圖的平方皆有 Hamilton 圈。

參考文獻

[1] S. Arora, Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems, *ACM*, vol. 45 (1998), pp. 753-782.

[2] D. Bauer, H. J. Broersma and H. J. Veldman, Not every 2-tough graph is Hamiltonian, *5th Twente Workshop on Graphs & Comb. Opt. Enschede, 1997, Discr. Appl. Math.*, vol. 99 (2000), pp. 317-321.

[3] P. Berman and M. Karpinski, $8/7$-Approximation algorithm for (1,2)-TSP, *Proc. 17th ACM-SIAM SODA* (2006), pp. 641-648.

[4] J. A. Bondy, Properties of graphs with constraints on degrees, *Stud. Sci. Math. Hung.*, vol. 4 (1969), pp. 473-475.

[5] J. A. Bondy and V. Chvátal, A method in graph theory, *Discr. Math.*, vol. 15 (1976), pp. 111-136.

[6] N. Christofides, Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem, *Report 388, Graduate School of Industrial Administration*, CMU, 1976.

[7] V. Chvátal, On Hamilton's ideals, *J. Comb. Theory*, *ser. B*, vol. 12 (1972), pp. 163-168.

[8] V. Chvátal, Tough graphs and Hamiltonian circuits, *Discr. Math.*, vol. 2 (1973), pp. 215-223.

[9] V. Chvátal and P. Erdös, A note on hamiltonian circuits, *Discr. Math.*, vol. 2 (1972), pp. 111-113.

[10] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 2 (1952), pp. 69-81.

[11] B. Enomoto, B. Jackson, P. Katerinis and A. Saito, Toughness and the existence of *k*-factors, *J. Graph Theory*, vol. 9 (1985), pp. 87-95.

[12] E. J. Grinberg, Plane homogeneous graphs of degree three without hamiltonian circuits, *Latvian Math. Yearbook*, vol. 5 (1968), pp. 51-58.

[13] B. Grünbaum, 3-connected configurations (n_3) with no Hamiltonian circuit, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, vol. 46 (2006), pp. 15-26.

[14] M. Las Vergnas, Sur une propriété des arbres maximaux dans un graphe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, ser. A-B, vol. 272 (1971), pp. 1297-1300.

[15] C. St. J. A. Nash-Williams, Valency sequences which force graphs to have hamiltonian circuits, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 17 (1996), pp. 466-467.

[16] C. St. J. A. Nash-Williams, Edge-disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency, in *Studies in Pure Mathematics*, Acad. Press., London (1971), pp. 157-183.

[17] O. Ore, Note on Hamilton circuits, *Am. Math. Monthly.*, vol. 67 (1960), pp. 55.

[18] L. Pósa, A theorem concerning Hamilton lines, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, vol. 7 (1962), pp. 225-226.

[19] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, A new proof of the four colour theorem, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, vol. 2 (1996), pp. 17-25 (electronic).

[20] W. T. Tutte, A theorem on planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 82 (1956), pp. 99-116.