第 7 章　圖著色

老師教我們顏色是紅、橙、黃、綠……，

你用的顏色為什麼是 1、2、3、4……？

– 鄰居小女孩

1850 年英國有一位學生 Francis Guthrie（後來成為南非大學數學教授）對於地圖著色很感興趣。許多地圖上都將地域作不同的區域劃分，例如分割成國家、縣市等等。依此方式劃分出來的區域示意圖本質上就是第 6 章提到的平版圖，其中各個區域就分別代表面，區域的邊界即邊，而邊匯集處為頂點。由於地圖上除了區域分隔線之外還有河川等等各種的線條，有時要清楚看出區域的分佈概況不是那麼方便，因此經常會將區域著色好讓人可以一眼看出那些地方是屬於那個區域的範圍。

圖 7.1：一張歐洲的地圖，將每個國家的範圍各著上一種顏色。

以這種方式將地圖著色時，要點就是相鄰的區域（即有共用邊的面）必須著不同的顏色，不然就會導致混淆。如果只是共用頂點倒還無所謂。為了達到這個目的，最簡單的方法當然是乾脆每個國家都塗不一樣的顏色，但這未必是好方法；首先你需要調配非常多種顏色的顏料（當然電腦發達的今天比較沒有這種問題），其次是地圖過份花花綠綠，看上去也不見得舒服。事實上如圖 7.1 所示，即便像歐洲這麼多國家的地圖，也只要用五六個顏色就可以達到我們的要求，而且實際上還可以用得更少。

根據他哥哥 Frederick Guthrie 的回憶 [9]，Francis 發現最多只要用四種顏色就可以將任何一張平面地圖的各區域著色、使得任兩個有共用邊界的區域都著不同顏色。並沒有清楚地記載他是不是有一個證明，但顯然下面這個圖告訴我們，要達到上述的結果，四個顏色是不能再減少的。

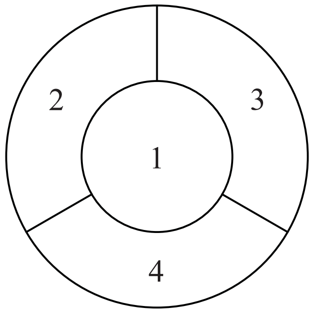

圖 7.2：必須使用四色的地圖。

在取得 Francis 的同意之下，哥哥把這個結果告訴他的老師、倫敦大學的數學教授 de Morgan，老師很高興地宣稱這是個新結果。不過連 Francis 都沒有能讓自己滿意的證明，de Morgan 雖然感覺這個答案是對的，但也一直未能找到好的證明。de Morgan 在 1852 年 10 月 23 日曾寫信給 Hamilton 尋求他的意見，而他在三天後回信，表示不會很快去思考這個問題。然而 de Morgan 的好奇心促使他到處宣傳這個問題，1860 年 4 月 14 日他更寫了一篇文章 [21] 討論這個問題。

問題於是流傳開來。美國邏輯學家 Peirce 對此有了回應 [6]，曾在哈佛的數學會發表一個「可能的證明」。Cayley 於 1878 年 6 月 13 日倫敦數學會 [36][37] 時曾詢問四色定理是否已經被證明，並且很快寫了一篇相關的短文，試著指出這個問題的困難度。真正的震撼是 Cayley 在劍橋的學生 Kempe 的證明 [14]，這個證明後來雖然被發現是錯的，但其中給出的 Kempe 鏈的觀念至今仍是著色問題的一個基礎起手式。Kempe 的文章雖被找出漏洞，但他很快地又加以修正 [15][16]，爾後一段時間裡大家都相信這個修正後的證明是正確的，而 Kempe 更因此在 1879 年被選為英國皇家學院院士。

順便要提到的一個人是 Tait。首先，Cayley 和 Kempe 都已經十分了解，證明四色定理時，可以假設每一個頂點的度數都是 3；因為，如圖 7.3 所示，假如有度數非 3 的頂點，我們可以將它擴張成一個圈、此時每個點的度數都是 3，等著完色之後再縮回原來的點。如果任何一個 3-正則的地圖都可以用四種顏色著完，那就表示任何地圖都可以四種顏色著完。

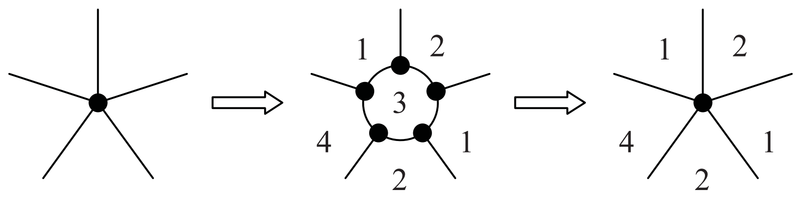

圖 7.3：不失一般性，可以假設每個頂點的度數為 3。

Tait 對四色定理有一個新的看法 [26][27]，他發現在 3-正則平版圖上將區域四著色、相當於將其邊三著色使得共用點的邊著不同顏色。Tait 只簡單地宣稱說邊著色可以用數學歸納法證明，因此四色定理就成立了。他太相信 Kempe 的證明是對的，因此也沒有好好地去思考他的邊著色定理的證明。

然而，經過十年，Heawood 在 1890 年發現 Kempe 的證明是錯的 [10]，不過若稍加修改就可以得到「五色定理」：任何地圖都可以只用五種顏色著完。於是一條通往著色競爭之門又再度開啟，人們花了百年，最後才在 1976 年時，由 Appel、Haken 和 Koch 藉著電腦的幫助，透過「**放電論證法**（discharging method）」證明四色定理，且看後文分解。四色定理雖然終於被證明是正確的，但是 Appel 等人用電腦產生的證明卻是龐大無比，很難讓數學家們滿意，因此至今人們都還在繼續努力，希望能找到一個簡潔而「可閱讀」的證明。正如同當時人們的評語所說的：「一個好的數學證明應該像一首詩，而這根本是電話簿」。雖然他們的證明後來被 Robertsen、Sanders、Seymour 和 Thomas [23] 簡化，不過還是不能避免利用到電腦來證明。

四色問題堪稱是圖論當中除了七橋問題之外最有名的問題。著色問題除了歷史性的挑戰之外，現今的許多實際應用問題如：排時、排序、時間表、頻道分配、資源分配、實驗設計等議題上都十分有用。圖著色與圖論的其他部分、數學的其他分支、甚至其他科學亦有很深而不可分離的關係。一百多年來的發展，已經產生了許多深奧的結果和工具，並且造就了許多具挑戰性的未解問題。

7.1 點著色

不難看出，在一個平版圖的面上著色，其實相當於是在它的對偶圖的點上著色、使得任兩相鄰的點都著不同色。在點上著色無論在圖解或者思考上都比較容易，而且可以推廣到非平面圖的情況，因此後來大家都習慣考慮點著色。現在我們來給點著色一些嚴格的定義。

一個圖 G 的 k-**著色**（k-coloring）是指一函數 $f: V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$，而一個**正常 k-著色**（proper k-coloring）則是指使得 $f(x) \neq f(y)$ 對所有 $xy \in E(G)$ 皆成立的 k-著色。圖

G 的**著色數**（chromatic number）$\chi(G)$ 是指使得 G 存在正常 k-著色的最小 k。如果 $\chi(G) \le k$，我們也會說 G **可以被 k-著色**（k-colorable）。在這個定義之下，四色定理的內容就是「任意平面圖 G 皆可四著色」。

在談著色的相關議題時還有下列的常用術語。圖 G 的一個**點團**（clique）是指兩兩相鄰的一些點所成的集合，也就是 G 的一個完全子圖之點集。而 G 的**點團數**（clique number）則是指 G 中最大點團的點數，記作 $\omega(G)$。此外回憶起圖 G 的一個穩定集（或叫獨立集）是指兩兩不相鄰的點所構成的集合，而 G 的穩定數即指最大的穩定集之點數，記作 $\alpha(G)$。顯然 S 是 G 的獨立集若且唯若 S 是 $\bar{G}$ 的點團，因此有 $\alpha(G)=\omega(\bar{G})$ 或 $\omega(G)=\alpha(\bar{G})$。

此外，若 f 是 G 的一個正常 k-著色，則 $V_i = f^{-1}(i)=\{x\in V(G): f(x)=i\}$、$1\le i\le k$ 會是 $V(G)$ 的一個分割（某些 V_i 可能是空集）。其實 G 的一個正常 k-著色也可以視為是將 $V(G)$ 分割成 k 個獨立集，其中每個集合都稱為一個**顏色類**（color class）。這些顏色類顯然是 $\bar{G}$ 當中的點團，因此著色的動作也可以視為是設法以最少的點團來覆蓋 $\bar{G}$ 的每一點之動作。定義 G 的**點團覆蓋數**（clique cover number）是指用來覆蓋 G 的所有點所需的最少點團數，記作 $\theta(G)$。於是，有 $\chi(G)=\theta(\bar{G})$ 或 $\theta(G)=\chi(\bar{G})$。

對於任何圖 G，我們都有如下的明顯性質：

性質 7.1：對於一個有 n 個點的圖 G 而言，恆有 $\chi(G)\ge\omega(G)$ 及 $\chi(G)\ge \dfrac{n}{\alpha(G)}$。

證明：第一個不等式是因為點團中的每個點都必須被著不同的顏色。第二個不等式則是因為每個顏色類都是獨立集，且各自最多只有 $\alpha(G)$ 個點。 ■

上述的兩個不等式都有例子可以達到等式，例如 K_n 就是。也有例子是絕對不等，例如 C_{2n+1}、其中 $n\ge 2$（此時易看出 $\chi(C_{2n+1})=3$），而稍後我們會再給出更顯著的例子。

定義了著色數 $\chi(G)$ 後，最理想的目標是能找出一個公式把 $\chi(G)$ 算出來，不過天下事情大抵都沒那麼順利。因此，退而求其次地，若能找出一個近似值也是一種好的結果。性質 7.1 就是在這種概念下給出的一個下界，不過這個下界相當粗糙。底下我們來看一些上界，這些上界的證明有很多方法，而我們採用的是跟演算法有關的技巧。基本的想法是，我們真的構造出一個正常的著色，那麼用的顏色數目必定就大於等於 $\chi(G)$ 了。

給定一個圖 G，我們採用**貪求著色法**（greedy coloring method）；首先將 G 的點做一個排序 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，再從 v_1 到 v_n 逐一將 v_i 著上一個最小的正整數、使得它不跟之前已經著過色的相鄰點衝突。

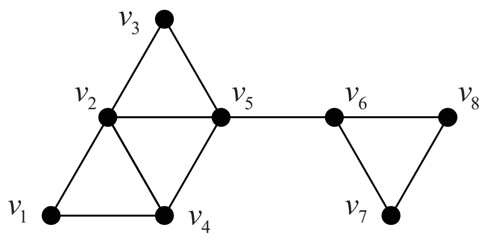

圖 7.4：圖 G 以及它的一種點排序。

以圖 7.4 為例，若依其上的點排序做貪求著色法，則 v_1 著 1、v_2 著 2、v_3 著 1、v_4 著 3、v_5 著 4、v_6 著 1、v_7 著 2、v_8 著 3，總共用了四色。這並不是一個最好的著色法，因為如果我們將點重新排序為 $v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_6, v_7, v_8$ 的話，那麼它們分別會被著色為 1, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 3，只用了三種顏色。其實這也是最佳著色法，因為 $\chi(G) \geq \omega(G) = 3$。

利用貪求著色法，我們可以求得各式各樣的上界。如果我們可以將 $V(G)$ 排成一個比較「好」的順序，那經常就能得到一個比較「好」的上界。

性質 7.2：$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$。

證明：任意對點做一個排序進行貪求著色，因為每個點最多只跟 $\Delta(G)$ 個點相鄰，因此用的顏色數頂多為 $\Delta(G) + 1$。 ■

更進一步來說，這個論證可以精鍊為：

性質 7.3：若圖 G 的度序列為 $d_1, d_2, \ldots, d_n$，則 $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min(d_i, i-1)$。

證明：在進行貪求著色時，每個點前面最多只有 $i-1$ 個已經著過色的點，而其中最多只有 d_i 個跟它相鄰，故得證。 ■

如果在這個性質當中我們進一步要求 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$，那得出來的上界會比較小。而應用完全相同的論證，上面的結果可以再精鍊為：

性質 7.4：給定圖 G 的一個點排序 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，並令 $G_i = G[v_1, v_2, \ldots, v_i]$ 為前 i 點的導出子圖，則 $\chi(G) \leq 1 + \max_i d_{G_i}(v_i)$。

在上述性質中，如果我們選的點排列滿足 $d_{G_i}(v_i) = \delta(G_i)$、即每次新抓進來的點的度數都是最小的，則可進一步得到下面的定理。

定理 7.5（Szekeres-Wilf，1968）：對任一圖 G 恆有 $\chi(G) \le 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$。

這一系列定理當中最集大成、證明也最長的要算是 Brooks 定理了。下面是 Lovász [24] 給的一個證法。

定理 7.6（Brooks [2]）：若 G 是非完全圖或奇圈的連通圖，則 $\chi(G) \le \Delta(G)$。

證明：令 $\Delta(G) = k$。我們可以假設有 $k \ge 3$，因為如果 G 非完全圖也非奇圈而 $k \le 2$ 的話，那 G 必定是二分圖，於是定理顯然成立。我們要設法造出一種點的排序、使得每個點都至多只有 $k-1$ 個編號較小的鄰居，這麼一來用貪求法著色就能得到所要的上界。

先考慮 G 不是 k-正則的情況。此時我們可以選出一個度數不足 k 的點作為 v_n。由於 G 是連通圖，我們可以從 v_n 開始取出生成樹（例如用 DFS）、並且從以顛倒的順序給予編號。這麼一來，因為除了 v_n 以外的每個點至少有連一條邊到一個編號較大的點，於是它們就至多只有 $k-1$ 個編號較小的鄰居，而根據取法 v_n 也是，所以定理成立。

因此再來要考慮 G 是 k-正則的情況。如果 G 有截點 x，則對每個 $\{x\}$-垂 G' 來說，x 在 G' 中的度數都小於 k，所以我們可以用剛才的方法造出 G' 的正常 k-著色，然後藉由交換顏色名稱使得每一個 $\{x\}$-垂當中 x 都被塗成同樣的顏色、再把這些著色合併就得到 G 的正常 k-著色了。

於是剩下的是 G 為 k-正則且又是 2-連通的情況。在這種情況中，不管我們怎麼排序最後一個頂點都還是會有 k 個編號較少的鄰居。但是如果這裡面有兩個鄰居是同樣顏色的，那貪求法著色仍然可以導致一個正常 k-著色。

假定我們可以找到一個點 v_n 具有兩個不相鄰的鄰居 v_1 和 v_2、而且 $G - \{v_1, v_2\}$ 仍是連通的，那麼我們對 $G - \{v_1, v_2\}$ 的點以 v_n 為根作生成樹排序、並且以顛倒的順序給予編號 $n, n-1, \ldots, 3$。這麼一來，除了 v_n 以外的每個點都至多只有 $k-1$ 個編號較小的鄰居。於是我們先強迫將 v_1, v_2 塗上同樣的顏色 1，然後再用貪求法即可得到 G 的正常 k-著色。

因此，我們只需證明當 $k \ge 3$ 時，對 k-正則 2-連通圖來說，上述的三個點 v_n, v_1, v_2 一定存在。隨便選一點 x，如果 $\kappa(G-x) \ge 2$，那就取 $v_1 = x$、v_2 是一個跟 x 距離為 2 的點（這樣的點一定存在，因為 G 不是完全圖且正則）、v_n 為 v_1 和 v_2 的共同鄰居。易看出這樣會滿足上述的條件。

而如果 $\kappa(G-x) = 1$，取 $v_n = x$。因為 G 沒有截點，x 在 $G-x$ 的每個葉區塊中都一定有一個不是 $G-x$ 的截點的鄰居，我們取兩個不同葉區塊的這種鄰居為 v_1 和 v_2（如圖 7.5 所示），於是它們必定不相鄰、而且 $G - \{v_1, v_2, x\}$ 是連通的。且因為 $k \ge 3$，x 必還有另外一個鄰居，這麼一來 $G - \{v_1, v_2\}$ 就是連通的。 ■

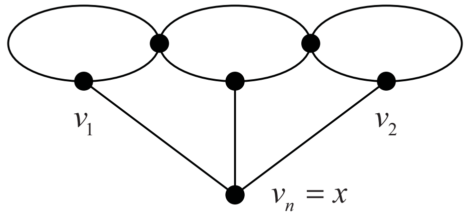

圖 7.5：定理 7.6 之證明示意圖。

如果點排序夠好的話，那麼貪求著色法就可能給出最佳的解；底下我們來看一個這樣的例子。在生物學中關於 DNA 的研究或時間排列的研究中，與實數軸上的區間相關的圖常常扮演一定的角色。一個圖 G 稱為**區間圖**(interval graph)，如果我們可以將它的各個頂點 v 對應到實數軸上的閉區間 I_v，使得而兩個相異頂點 u 和 v 相鄰若且唯若 I_u 和 I_v 重疊，也就是 $I_v \cap I_u \neq \varnothing$。其中 $\{I_v : v \in V(G)\}$ 稱為是 G 的**區間表示法**(interval representation)。例如圖 7.6 就是一個例子，其中右邊的每條粗線就代表對應的區間 I_v 的範圍。

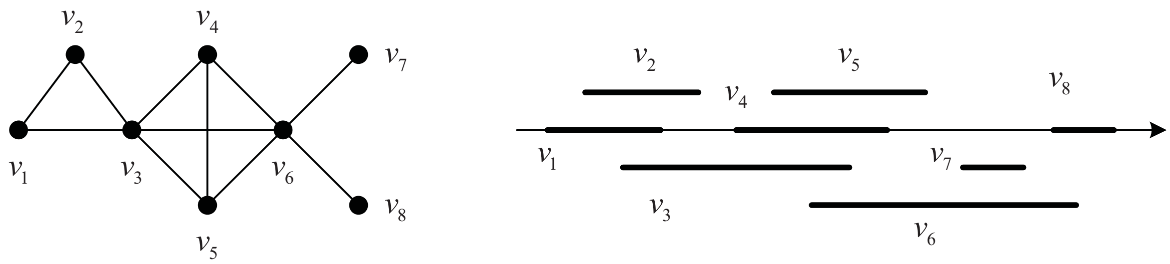

圖 7.6：一個有 8 點的區間圖及其區間表示法。

我們有如下的結果：

性質 7.7：若圖 G 為區間圖，則 $\chi(G) = \omega(G)$。

證明：將 G 的頂點依照其對應區間的左端點由小到大排列，並用貪求法著色。假如到最後一共用了 k 種顏色，設 x_k（設其對應區間為 I_k）為一個著 k 的點，那麼對每一個 $1 \leq i \leq k-1$、都存在一個 $x_i \in N(x_k)$ 使得 x_i 著色為 i、且 x_i 之順序位於 x_k 之前(也就是說，x_i 對應的區間 I_i 之左端點比 I_k 的左端點 a 要小)。因此，各個 I_i 都包含有 a，於是 $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ 是一個點團，因此得到 $k \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq k$，即 $\chi(G) = \omega(G)$。 ■

另一個有名的例子是可比圖，這個例子跟集合論中的 Dilworth 定理有關。考慮一個定義有二元關係 $\preccurlyeq$ 的集合 P，我們說 $(P, \preccurlyeq)$ 是一個**偏序集**(partially ordered set、簡稱 poset)、如果二元關係 $\preccurlyeq$ 滿足下列條件：

(1) 對任何 $x \in P$、恆有 $x \preccurlyeq x$。

(2) 若 $x \preccurlyeq y$ 且 $y \preccurlyeq x$，則 $x = y$。

(3) 若 $x \preccurlyeq y$ 且 $y \preccurlyeq z$，則 $x \preccurlyeq z$。

同時我們也說 $\preccurlyeq$ 是定義在 P 上的**偏序**（partial ordering）。注意到我們並沒有要求對於任何 $x, y \in P$ 都必有 $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$ 成立，有可能兩個都不成立，這樣的 x 跟 y 我們稱為**不可比較**（incomparable）的；反之如果至少有一個關係成立，我們就說 x 和 y 是**可比較**（comparable）的。如果 P 的一個子集 S 當中任兩個元素皆可比較，我們就說 S 是 P 當中的**鏈**（chain）；反之如果 S 當中任兩個元素皆不可比較，我們就說 S 是一個**反鏈**（antichain）。我們說一個元素 x 是**最小**（minimal）的、如果不存在 $y \neq x$ 使得 $y \preccurlyeq x$ 的話；注意到此時一個偏序集中的最小元素未必是唯一的。

給定一個偏序集 P，我們可以構造出一個對應的圖 $G_p = (P, E)$、其中

$$E = \{xy : x \neq y \text{ 且可比較}\},$$

這樣定義出來的圖 G_p 稱為**可比圖**（comparability graph）。如果將 P 中的元素排成 $x_1, x_2, \ldots, x_n$、使得 $x_i \preccurlyeq x_j$ 時必有 $i \leq j$，則根據偏序的定義，E 會滿足

$$\text{若 } i < j < k \text{、} x_i x_j \in E \text{ 且 } x_j x_k \in E \text{，則 } x_i x_k \in E \text{。} \tag{7.1}$$

反過來，如果一個圖 G 的點集可以被排序使得上面的條件 (7.1) 滿足，則易看出它也是某個有限偏序集所對應的可比圖，而這個滿足 (7.1) 的排序 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 就稱為是 G 的**可比序**（comprarbility ordering）。

有限偏序集 P 和其對應的可比圖 G_p 之間有這樣的關係：P 中的鏈相當於 G_p 中的點團、而 P 中的反鏈則相當於 G_p 中的獨立集。因此底下的性質就等同於著名的 Dilworth 定理（一個偏序集 $(P, \preccurlyeq)$ 中、覆蓋 P 的最少反鏈數等於 P 中鏈分解的最大基數）：

性質 7.8：若圖 G 為可比圖，則 $\chi(G) = \omega(G)$。

證明：將 G 的頂點排為可比序，按照此順序以貪求法著色。假設最後一共用了 k 種顏色，設 x_{i_k} 為一著 k 的點，於是存在 $i_{k-1} < i_k$ 使得 $x_{i_{k-1}}$ 著 $k-1$ 且 $x_{i_{k-1}} x_{i_k} \in E$，依此類推便知存在 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} < i_k$ 使得每個 x_{i_r} 著 r、而且 $x_{i_r} x_{i_{r+1}} \in E$。由可比性，這些點 x_{i_r} 構成一個點團，因此就得到 $k \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq k$、故 $\chi(G) = \omega(G)$。 ■

可比圖的例子包含二分圖、以及區間圖的補圖。對於二分圖 $G = (X, Y, E)$，若將 X 的點排在 Y 前面，立刻就得到了一個可比序，此時性質 7.8 便表明，當 G 有邊的時候有 $\chi(G) = \omega(G) = 2$，而當 G 沒邊的時候便是 $\chi(G) = \omega(G) = 1$。對於區間圖 G 的補圖 $\overline{G}$，

若將其頂點依照其對應的各個區間之右端點由小到大作排序，則易看出這會是可比序。於是由性質 7.8 知道有 $\chi(\bar{G})=\omega(\bar{G})$、或是 $\theta(G)=\alpha(G)$。

其實，對於任意可比圖 G 我們也有 $\theta(G)=\alpha(G)$，而這也就是相當於 Dilworth 定理的另一個形式：對於偏序集 $(P,\preccurlyeq)$，覆蓋 P 的最少鏈數等於 P 的反鏈分解之最大基數。這個結果有一個更一般的定理：

定理 7.9（Gallai & Mailgram，1960）：任何有向圖 G 的點集可分解成最多 $\alpha(G)$ 個點集、使得每個點集形成一個有向路徑。

證明：對於任一有向路徑 $P=x_0e_0x_1e_1\cdots x_{k-1}e_{k-1}x_k$，以 $\operatorname{ter}(P)$ 表示其最末點 x_k。對於 G 的任兩個有向路徑分解 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$，定義 $\mathscr{P}_1<\mathscr{P}_2$、如果 $|\mathscr{P}_1|<|\mathscr{P}_2|$ 且

$$\{\operatorname{ter}(P):P\in\mathscr{P}_1\}\subseteq\{\operatorname{ter}(P):P\in\mathscr{P}_2\}。$$

我們將證明一個更一般的結論：若 $\mathscr{P}$ 是 G 的一個最小（依照上面定義的偏序）有向路徑分解，則 G 中有一獨立集 $\{v_p:P\in\mathscr{P}\}$、其中 $v_p\in P$。底下對 $|G|$ 做歸納法證明之。

令 $\mathscr{P}=\{P_1,P_2,\ldots,P_m\}$ 為最小有向路徑分解，對每個 i 取 $v_i=\operatorname{ter}(P_i)$。假如 $\{v_i\}$ 是獨立集則結論已經成立，故底下假設 $v_2v_1\in E(G)$。這麼一來將 P_2 連至 v_1 仍是一有向路徑，而由 $\mathscr{P}$ 的最小性知道 v_1 不是 P_1 中唯一的點，於是我們取 $P'=P_1-v_1$、並取

$$\mathscr{P}'=\{P',P_2,P_3,\ldots,P_m\}，$$

這會是 $G'=G-v_1$ 的有向路徑分解。我們先證明 $\mathscr{P}'$ 是 G' 的最小有向路徑分解。

假設 G' 當中存在另一個有向路徑分解 $\mathscr{P}''<\mathscr{P}'$。此時如果存在 $P\in\mathscr{P}''$ 使得 $\operatorname{ter}(P)=\operatorname{ter}(P')$，那麼我們可以把 $\mathscr{P}''$ 中的 P 換成 Pv_1 而得到一個 G 的有向路徑分解、且比 $\mathscr{P}$ 更小，矛盾；類似地如果存在 $P\in\mathscr{P}''$ 使得 $\operatorname{ter}(P)=v_2$ 則把 P 換成 Pv_1 一樣會導致矛盾。於是 $\{\operatorname{ter}(P):P\in\mathscr{P}''\}\subseteq\{v_3,v_4,\ldots,v_m\}$，因此 $|\mathscr{P}''|\le|\mathscr{P}|-2$。但這樣一來 $\mathscr{P}''\cup\{v_1\}$ 仍舊會是比 $\mathscr{P}$ 更小的 G 之有向路徑分解，因此就證明了 $\mathscr{P}'$ 是 G' 的最小有向路徑分解。

於是，根據歸納假設，存在獨立集 $\{v_P:P\in\mathscr{P}'\}$ 使得 $v_p\in P$，然而這個獨立集也符合我們所要找的獨立集之條件，於是宣稱結論得證。 ■

推論 7.10：若圖 G 為可比圖，則 $\chi(\bar{G})=\omega(\bar{G})$、亦即 $\theta(G)=\alpha(G)$。 ■

剛才提到 $\omega(G)\le\chi(G)$，而這個不等式兩邊的差距可以任意地大；事實上，存在著色數任意大的圖使得其點團數為 2。Mycielski 首先構造出了這樣的一類例子，其造法如下。

對於一個給定的圖 $G=(V,E)$、其中 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，我們在 G 的旁邊放一樣多的點 $u_1,u_2,\ldots,u_n$，然後使 v_i 和 u_j 連邊、若且唯若 v_i,v_j 本來相鄰。最後再加入一個點 w，使其和所有的 u_i 連邊。這樣造出來的新圖稱為 G 的 Mycielski 圖，記作 $M(G)$。例如圖 7.7 中，若取 $G=P_2$，則造出來的 $M(G)=C_5$。

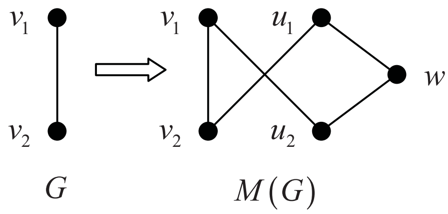

圖 7.7：一個 Mycielski 構造過程。

如果再考慮 $M(C_5)$，那會得到如下的圖 7.8，這個圖有特別的稱呼叫 **Grötzsch 圖**：

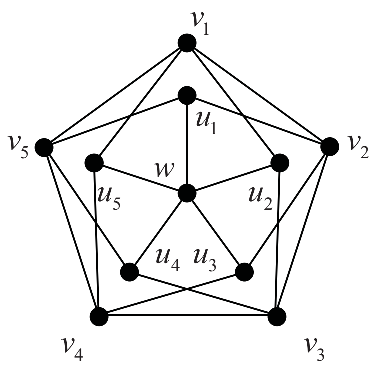

圖 7.8：Grötzsch 圖。

讀者可以驗證這個圖的著色數是 4。一般而言，有這樣的結果：

定理 7.11（**Mycielski [22]**）：若圖 G 之著色數為 k 而點團數 $\omega(G)\geq 2$，則 $M(G)$ 之著色數為 $k+1$ 且點團數為 $\omega(M(G))=\omega(G)$。

證明：令 $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$、$V(M(G))=V\cup U\cup\{w\}$，其中 $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$。根據構造過程，U 是獨立集，表示 U 跟 w 之間的點團最多只有兩點。對於 U 跟 V 之間的點團，將用到的 U 當中的點對應回原來的 V 當中的點就會得到 G 中的點團，矛盾。所以 $\omega(M(G))=\omega(G)$。

將 G 的正常 k-著色複製到 U 上面、並將 w 著新的顏色即可看出 $M(G)$ 的著色數不超過 $k+1$，而要證明 $\chi(M(G))=k+1$ 只要證明 $M(G)$ 的正常 k-著色不可能存在。假設 f 是 $M(G)$ 的正常 k-著色，不失一般性可以假設 $f(w)=k$，於是所有 U 中的點都被著色為 1 到 $k-1$。現在，如果有 v_i 使得 $f(v_i)=k$，我們將它改著色為 $f(u_i)$，這個更動的

動作在 V 中不會發生衝突，因為 v_i 在 V 中的鄰居也都是 u_i 的鄰居。但是這麼一來就得導致 G 的一個正常 $(k-1)$-著色，矛盾。 ■

因此，如果從 P_2 開始不斷地套用 Mycielski 構造法，就可以無限制地得到著色數很大但點團數僅為 2 的圖。因此，一個 k-色圖不見得需要包含 K_k 作為子圖，但是如果把條件稍微放弱一點倒是可以得到一些類似的必要條件。

定理 7.12（Dirac [5]）：任何著色數至少是 4 的圖 G 都包含有 K_4 的細分圖。

證明：假設定理不對，則存在一個點數最小的圖 G 使得 $\chi(G)\geq 4$ 但不包含 K_4 的細分圖。首先，G 不是完全圖，因此存在一個最小的截集 S、使得 G 恰有 $r\geq 2$ 個 S-垂 $G_1, G_2, \ldots, G_r$。因為各個 G_i 都不包含 K_4 的細分圖，根據 G 的最小性、就知道每個 G_i 都可 3-著色；對每個 G_i 取一個正常 3-著色 f_i。

如果 S 是一個點團，則 S 當中各點在每個 f_i 當中都被著成不同顏色，因此可以適度將各個 f_i 換色使得 S 的各點在每個 f_i 當中的著色都相同，這麼一來就可以將 f_i 合併而得到 G 的正常 3-著色。因此，S 當中存在不相鄰的兩點 x 和 y。

如果 $|S|=2$，那必定有其中一個 G_i、使得其任何一種 3-著色 f_i 都有 $f_i(x)=f_i(y)$（不然的話我們又可以將所有 f_i 合併），因此 G_i+xy 的著色數至少是 4。而由 G 的最小性，就知道 G_i+xy 至少包含了一個 K_4 的細分圖 H。如果 H 沒有用到 xy 則它也是 G 的子圖，但若 H 有用到 xy、將 xy 換成另一個 G_j 當中的另一條 x-y 路徑一樣可以得到一個 G 中的 K_4 之細分圖，矛盾。因此 $|S|\geq 3$，也就是說 G 是 3-連通的。

這麼一來，由於 $G-x$ 是 2-連通的，我們可以從中取一個至少 3 點的圈 C 出來。於是由引理 5.20，就知道存在有一個大小為 3 的 $x, V(C)$-扇，這個扇和 C 結合起來就得到了 G 當中的一個 K_4 之細分圖。 ■

在 1950 年時，Hajós 猜想任何 k-色圖都包含有 K_k 的細分圖。當 $k=2$ 時，這即是說任何 2-色的圖都有一條路徑（當然，只要有一條邊即可）。當 $k=3$ 時，這意味著任何 3-色圖都有圈。上面的定理證明了 $k=4$ 的情況。然而，1979 年 Catlin 證明了 Hajós 猜想對 $k\geq 7$ 都是錯的，至於 $k=5, 6$ 的情況則至今仍未解決。

在稍早的 1943 年，Hadwiger 曾提出一個略弱的猜想，認為任何 k-色圖都有 K_k 作為其次圖。在 $k\leq 4$ 的情況中這跟 Hajós 猜想是一樣的。Wagner 曾證明 $k=5$ 的情況其實等價於四色定理（其中一個方向由 Wagner 定理立得），所以如今知道是正確的。而 $k=6$ 的情況則由 Robertson、Seymour 和 Thomas 在 1993 年利用四色定理證明出來。至於 $k\geq 7$ 的情況則尚未解決。

7.2 平面圖著色

在本章一開始我們已經介紹過平面圖著色的歷史。現在眾所周知的最後結果（雖然不易證明）是：

定理 7.13（四色定理，Four Color Theorem）：任何平面圖均可四著色。

四色定理雖然證明很難，不過要證明五色定理倒是容易的。

定理 7.14（五色定理）：任何平面圖均可五著色。

證明：考慮平版圖 G，我們對 G 的頂點數 n 做歸納法。當 $n \le 5$ 時顯然 G 可以五著色。今假設 $n \ge 6$。根據推論 6.8，G 中一定存在一點 v 使得 $d(v) \le 5$，我們於是考慮 $G' = G - v$，根據歸納假設，G' 可以五著色。現在我們將 v 放回，如果 v 的鄰居總共只用了不超過四種顏色，那 v 就著剩下的一種顏色就完成了。今假設 v 有五個鄰居，且它們恰好都著不同顏色。我們令這五點依它們在平面上的順時鐘順序為 $v_1, v_2, \ldots, v_5$，且不失一般性我們假設這五點的顏色分別恰為 1~5。

如果 v_1 的鄰居當中沒有著 3 的，那麼我們可以將 v_1 改著 3，從而 v 就可以著 1。不然，我們從 v_1 開始，依序將著 3、著 1、著 3……的點全部都蒐集出來，假設蒐集出來的子圖並沒有連到 v_3，那麼我們就可以將這整個子圖的 1、3 色對調，並將 v 著 1，如圖 7.9 所示。

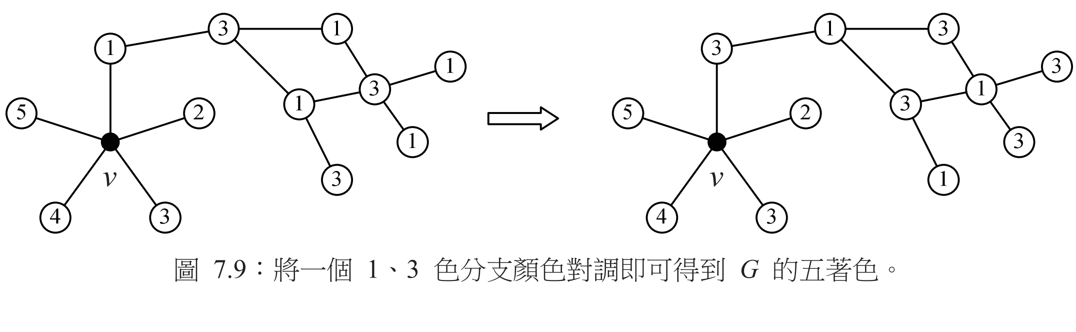

圖 7.9：將一個 1、3 色分支顏色對調即可得到 G 的五著色。

因此，考慮我們找出來的 1、3 色分支連到 v_3 的情況。此時必定會有一個 v_1-v_3 的 1、3 色路徑 $P_{1,3}$，且此路徑將 v_2 和 v_4 隔開。於是，如果我們從 v_2 開始蒐集 2、4 色分支，則此分支必定不會連到 v_4，否則中途必定會有邊和 $P_{1,3}$ 的邊交叉，與平版圖的假設矛盾。因此我們只要類似地將這個 2、4 色分支顏色對調就可以得到 G 的五著色。 ■

上面的這個證明的基本想法就是將一個有兩種顏色交錯出現的子圖加以對調，這是 Kempe 在他對四色問題的嘗試證明中提出的概念，如今我們將這種有兩種顏色交錯的路徑稱為 **Kempe 鏈**（Kempe chain）。原本 Kempe 是想要用類似的手法證明四色定理，他的構想如下：

Kempe 的證明：跟定理 7.14 的證明一樣，我們對頂點數 n 做歸納法，並考慮 $n \ge 5$ 的情況。同樣取出一點 v 使得 $d(v) \le 5$；假如 $d(v) \le 4$，那麼定理 7.14 的證明手法在這邊同樣適用，因此我們只需考慮 $d(v) = 5$、而且 v 的鄰居把四種顏色都用上的情況。因此，一定恰有一種顏色恰被用了兩次。

同時，我們可以假設那五個鄰居在平面上依序連成了一個圈；不然的話我們就補邊使它成為圈，如果補邊之後的新圖可以四著色，那去掉這些加入的邊後的原圖當然也沒問題。在這個假設之下，那兩個顏色相同的鄰居必定不會位於這個圈上相鄰的位置，而會被一個頂點隔開。不失一般性，我們可以假設點的分佈如圖 7.10 所示。

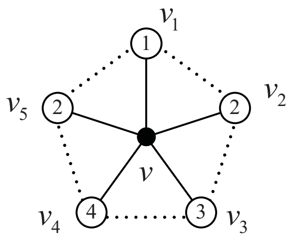

圖 7.10：五個鄰居的顏色分佈情況。

如同五色定理的證明，我們可以假定存在從 v_1 到 v_3 的 1、3 色路徑 $P_{1,3}$，以及從 v_1 到 v_4 的 1、4 色路徑 $P_{1,4}$，如圖 7.11 所示。如果不存在這樣的路徑的話我們都可以將 v_1 的顏色換掉而讓 v 可以著 1。

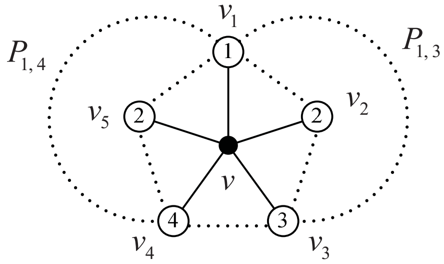

圖 7.11：兩條二色路徑。

此時，從 v_2 所連出的 2、4 色分支 H 必定會被 $P_{1,3}$ 包住而沒有連到 v_4，於是我們可以將 H 的顏色對調而將 v_2 著 4；同樣的道理，從 v_5 所連出的 2、3 色分支 H' 必定被 $P_{1,4}$ 包住，我們可以將它對調而將 v_5 著 3。這麼一來，就可以將 v 著 2 了。 ■

各位是否能看出上面的證明哪裡有問題？

問題在於把 H 跟 H' 同時換色不見得是可行的操作，因為它們之間可能會有邊相連，而這又是因為 $P_{1,3}$ 跟 $P_{1,4}$ 有交錯的可能，例如像圖 7.12 就是這樣的一個例子；在這個情況中，Kempe 的論證是沒辦法運作的。

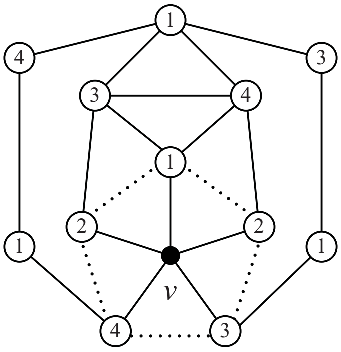

圖 7.12：一個使 Kempe 的論證失效的例子。

雖然 Kempe 的方法行不同，但是他的概念確實領導出證明的途徑。本質而言，他企圖找出若干種平面圖一定會包含的結構，接著他只需證明這每一種結構都能夠透過適度地處理便能被 4-著色即可。這樣的結構我們現在稱之為**構形**（configuration），意思是指一個三角化的平面圖中的某圈 C（稱為是該構形的**環**，ring）以及其內部的某個圖所構成的東西。對四色定理而言，我們說一組的構形是**不可避免的**（unavoidable）、如果任何定理的最小反例必定包含其中一個構形的話。而我們說一個構形是**可約的**（reducible），如果一個包含該構形的圖不可能是最小反例的話。應用這些術語，我們試圖做的事情等於是要找出一組全部都是可約的不可避免構形。Kempe 所期望的是如下的三個構形；順便一提，這樣的圖我們稱之為**輪**（wheel），也就是一個圈的各點再連至同一點的圖，常記作 W_n。

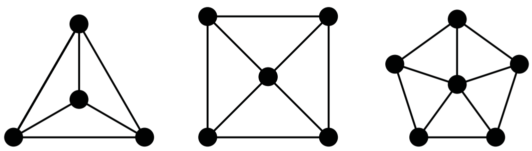
圖 7.13：W_3, W_4, W_5。

這三個構形確實是一組不可避免構形，而 Kempe 的論證證明了 W_3 和 W_4 是可約的，但他卻未能證明 W_5 是可約的。為了解決這個問題，就必須設法把最後剩下的情況再分成更多種的不可避免構形，然後持續地試圖證明那些構形是可約的。Heesch 在這方面做出了許多貢獻，他首先證明如果環的大小為 3 或 4 的構形都是可約的，也證明了環的大小為 5、且內部不止一個點的構形都是可約的。之後他也提出了更有系統的方法來尋找不可避免集和證明可約構形。到了 1977 年，由 Appel、Haken 和 Koch 首次提出的證明中，他們改進了 Heesch

的尋找法，利用電腦進行上千小時的運算，最後找出了一個由 1936 個可約構形所成的不可避免集合，每一個的環之大小至多為 14，因而證明了四色定理。在那之後，人們持續試圖將證明精簡化。而較為近期的結果是由 Robertsen、Sanders、Seymour 和 Thomas 給出，他們將不可避免構形減少至 633 個，但是還是需要利用電腦來運算。以現在的電腦運算能力來說，要證明四色定理大約只需花三小時左右。

在這一系列的研究中，他們用來產生不可避免集的方法便是所謂的「放電論證法」，其概念如下。首先我們知道在三角化的平版圖當中，度數的總和 $\sum \deg(v) = 2e(G) = 6n - 12$，我們將這個改寫成 $12 = \sum(6 - \deg(v))$，並且把 $6 - \deg(v)$ 想像成是每一個頂點上面的**電量**（charge）。因為電量的總和為 12，那就表示一定有頂點的電量是正的。我們透過一些**放電規則**（discharging rules）來轉移這些電量，而無論電量怎麼移動，總還是有些頂點是正的，我們就是藉由觀察那些頂點來得到新的構形。

利用放電理論證明四色定理，雖然概念不是很難，但整個篇幅卻很大，不容易放在一般的教科書上。可喜的是，這個工具後來被人們用在各式各樣的有關平面圖定理的證明時，常常能夠顯示出其特別的威力。以下是一個簡單的例子。

定理 7.15：如果 $G = (V, E)$ 是一個不含三角形且最小度數 $\delta(G) \ge 3$ 的平版圖，則存在某條邊 xy 使得 $\deg(x) + \deg(y) \le 8$。

證明：設 G 的面所成的集合為 F。我們說一個面 $f \in F$ 的度數 $\deg(f)$ 是指其所含的邊數（亦等於所含的點數）。定義每個點 v 的電量最初為 $c(v) = \deg(v) - 6$，而一面 f 最初的電量為 $c(f) = 2\deg(f) - 6$，則由 Euler 公式可得

$$\sum_{v\in V} c(v) + \sum_{f\in F} c(f) = \sum_{v\in V}(\deg(v) - 6) + \sum_{f\in F}(2\deg(f) - 6) = 2|E| - 6|V| + 4|E| - 6|F| = -12,$$

也就是說，一開始點和面的電量總和為負。接著我們開始放電，分成兩步驟：

(1) 因為 G 是簡單圖，且 G 不含三角形，所以對於任何面 f 都有 $\deg(f) \ge 4$。現在我們把 f 的電量均分給此面的所有 $\deg(f)$ 個點，而每個點得到

$$\frac{2\deg(f) - 6}{\deg(f)} \ge \frac{1}{2}$$

的電量。在這之後每個面的新電量都為零。

(2) 經過步驟 (1) 的放電後，現在每個點 v 的新電量為 $c'(v) \ge \deg(v) - 6 + \deg(v)/2$。這個量只有當 $\deg(v) = 3$ 時才會是負的，所以一定存在一些度數為 3 的點，令這些點之集合為 T。接著再把度數至少為 6 的點 v 的電量均分給其鄰居，每個鄰居得到 $c'(v)/\deg(v) \ge 1/2$ 的電量。在這之後，假設有某個 $x \in T$ 具有一個鄰居 y 使得 $\deg(y) \le 5$，那麼定理已經得證；而如果每個 $x \in T$ 的每個鄰居的度數都是 6 以上，那麼

剛才的第二次放電就會使得 x 的最新電量變成

$$c''(x) \geq \deg(v) - 6 + \deg(v)/2 + \deg(v)/2 \geq 0 ,$$

因此每個點和面的最新電量都是非負的，故總電量也非負。但原本的總電量卻是負的，這樣就得到了矛盾。 ■

在這個定理當中，如果 G 有三角形，那就不會得到 8 這麼好的上界。例如在正十二面體的每個面中間加上一個新的點連到所有該面的頂點，得到的新的平面圖的每條邊 xy 都有 $\deg(x) + \deg(y) = 11$（試試看能否再找到更大的例子，參見習題 7.19）。此外 G 除了顯然必須是簡單圖外，$\delta(G) \geq 3$ 這個條件也是重要的，不然 $K_{2,n}$ 這個平面圖中的每一條邊 xy 都有 $\deg(x) + \deg(y) = n + 2$ ，可以任意大。

雖然四色定理告訴我們任何的地圖都可以僅用四個顏色完成著色，不過這在實際的應用上未必是如此。因為有的時候，一個國家可能會有所謂的飛地（即與國家本土不連通的區域，例如美國的阿拉斯加州、或是德國的布辛格等等），而在繪製地圖的時候我們仍然會要求這些屬於同一個國家的分裂區域要塗成同樣的顏色；在這樣的條件限制之下，四個顏色就未必足夠用了。

在這個概念底下，我們可以考慮所謂的**帝國問題**（empire problem），其內容如下。給予一個平面圖 G_m ，設其點集 $V(G_m)$ 可分割成若干個穩定集 $P = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$（每個代表一個帝國），其中每個穩定集當中的頂點（帝國中的區域）之個數皆不超過 m 個，而我們要求在 G 上進行正常著色、使得每一個 S_i 當中的點都被著成同樣的顏色，並且將所需的最少色數記作 $\chi_e(G_m, P)$ 。首先我們有如下的簡單結果：

定理 7.16（Heawood [10]）：$\chi_e(G_m, P) \leq 6m$ 。

證明：我們對 $|P| = k$ 做歸納法。當 $k = 1$ 時結論顯然成立，現在假設 $k > 1$ 。不失一般性我們可以假定每個帝國的區域數就是恰好 m 個，於是此時有 $|V(G_m)| = km$ ，因此由引理 6.6 知道有 $|E(G_m)| \leq 3km - 6$ 。

現在我們定義一個帝國的度數 $\deg(S_i) = \sum_{v \in S_i} \deg(v)$、即其內部所有區域的度數總和，則帝國的平均度數不超過

$$\frac{2|E(G_m)|}{k} \leq \frac{6km - 12}{k} < 6m ,$$

因此必定有某個帝國 S_i 的度數小於 $6m$ 。由歸納假設知道 $G_m - S_i$ 可被 $6m$-著色，而因為 S_i 的度數小於 $6m$ 、它必定可塗上剩下的顏色而完成著色。 ■

Heawood 猜想這個上界其實也就是最佳結果，他同時對於 $m=2$ 的情況造出了一個具有 12 個帝國的地圖、使得一定要用上 12 種顏色才能著色，圖 7.14 所示的是稍後由 Kim 所給出的一個較為對稱的例子。注意到這裡面任兩個帝國都有在某處相鄰。

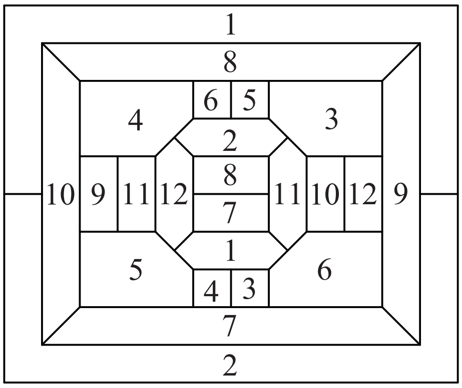

圖 7.14：一個需要 12 種顏色才能著色的帝國地圖，相同的數字代表相同帝國的領土。

隨後，Taylor 則針對 $m=3,4$ 分別造出了需要 18 色和 24 色的例子。最後，Jackson 和 Ringel 終於證明了 Heawood 的上界確實就是最佳結論：

定理 7.17（Jackson-Ringel [12]）：$\chi_e(G_m,P)\le 6m$，且對於任何 $m\ge 2$ 均存在 G_m 使得等式成立。

帝國問題還有其他變形，例如 Ringel 在 1959 年所提出的**地球月球問題**（earth-moon problem），這個問題考慮了若干個帝國和 m 個星球，每個帝國都在各個星球上恰有一塊土地，我們仍舊要著色使得相鄰帝國不同色、而同一個帝國的區域皆著相同顏色。這個問題是帝國問題的一種特例，不難看出我們可以將這個問題看作是考慮一個厚度為 m 的圖之著色問題。四色定理表明了當 $m=1$ 時需要四個顏色，而 Heawood 定理則說明了需要的顏色不會超過 $6m$ 種，不過究竟多少種才是必須的、則甚至連 $m=2$ 的情況都還沒有人能回答。Ringel 本人曾證明至少要 8 種顏色，而稍後 Sulanke 則舉出一個有 11 個帝國的例子（如圖 7.15 所示）說明至少要 9 種顏色。

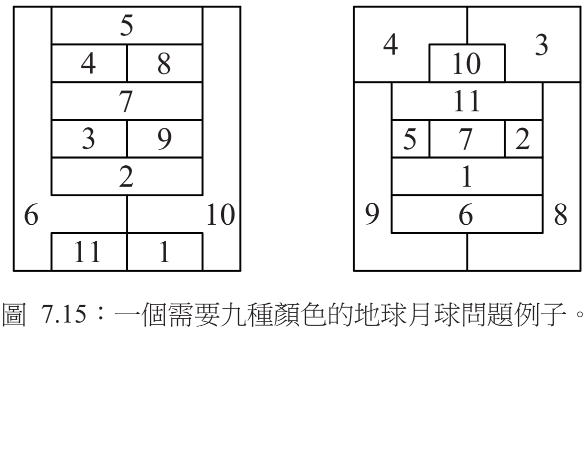

圖 7.15：一個需要九種顏色的地球月球問題例子。

7.3 邊著色

一個圖 G 的 k-**邊著色**（k-edge-coloring）是指一函數 $f: E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$，而一**正常 k-邊著色**（proper k-edge-coloring）是指滿足 $f(e) \neq f(e')$ 對所有相鄰的邊 e 和 e' 都成立的 k-邊著色。圖 G 的**邊著色數**（chromatic index）$\chi'(G)$ 是使得 G 存在正常 k-邊著色的最小非負整數 k（如果 G 沒有邊，定 $\chi'(G) = 0$）。

邊著色的概念是從 Tait 對於四色定理處理方式開始的，之後它也逐漸變成一種獨立而有趣的領域，同時本質上也可視為是點著色的一種特例。一般而言，如果 G 是一個重圖，我們可以定義 G 的**線圖**（line graph）$L(G)$、其點集 $V(L(G)) = E(G)$、且兩條邊在 $L(G)$ 相鄰若且唯若它們在 G 中相鄰，如圖 7.16 所示。在這個概念下，圖的邊著色問題其實就相當於是考慮其線圖的點著色問題。因此，我們恆有 $\chi'(G) = \chi(L(G))$。

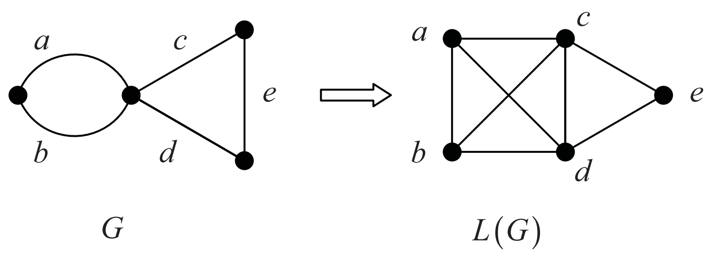

圖 7.16：圖 G 和它的線圖 $L(G)$。

顯然我們有 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$。另一個容易得到的下界是 $\chi'(G) \geq \dfrac{|E|}{\lfloor |V|/2 \rfloor}$，因為每一種顏色最多只能塗 $\lfloor |V|/2 \rfloor$ 條邊。以完全圖 K_n 為例，由上述的兩個下界便知道我們有 $\chi'(K_n) \geq n-1$ 及 $\chi'(K_n) \geq \dfrac{n(n-1)/2}{\lfloor n/2 \rfloor}$。當 n 是偶數的時候這兩個下界是一樣的，但當 n 是奇數的時候後者變成 $\chi'(K_n) \geq n$，稍微更強了一些。

事實上，這兩種情況中給出的下界都恰好就是 $\chi'(K_n)$ 的值。當 n 是偶數的時候，我們可以用如下的方式畫出其邊的 $(n-1)$-著色。在平面上取正 $n-1$ 邊形的頂點及其中心的這 n 點，然後按照圖 7.17 示意的方式給邊著色，如此就得到 $\chi'(K_n) = n-1$。而當 n 是奇數的時候，由 $n \leq \chi'(K_n) \leq \chi'(K_{n+1}) = n$ 就知道 $\chi'(K_n) = n$。

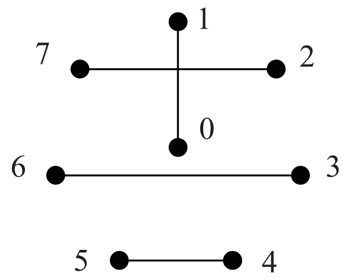

圖 7.17：K_8 的 7-邊著色的其中一種顏色之塗法。其他顏色的塗法則由旋轉此模式得到。

定理 7.18（König [17]）：對任意二分重圖 G 均有 $\chi'(G)=\Delta(G)$。

證明：沒有邊的情況是無聊的；而由推論 4.6 知道一個有邊的正則二分重圖 H 必有完美匹配，於是利用歸納法，就會得到 H 有正常 $\Delta(H)$-邊著色。所以我們只要證明 G 是某一個 $\Delta(G)$-正則二分重圖 H 的子圖即可。

首先，在 G 比較小的部分加點，使得二部分擁有同樣多的點。若此時的圖非正則，則兩邊均存在一點的度數小於 $\Delta(G)$，於是我們便將這兩點連邊。反覆這個程序，最終就能得到一個 $\Delta(G)$-正則圖 H 了。 ■

若要問 $\chi'(G)$ 的上界，我們很容易可以得到 $\chi'(G)\le 2\Delta(G)-1$ 這個結果：只要隨便決定一個邊的排序，然後用貪求法著色就行了。不過，這個上界是有點太粗糙了。其實一般而言要達到 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ 就已經不是很常見了。Vizing 給了如下的一個很好的結果：

定理 7.19（Vizing [30][31]）：對任意簡單圖 G 均有 $\chi'(G)\le\Delta(G)+1$。

證明 ①：我們對 G 的邊數做數學歸納法。當 G 沒有邊的時候定理當然是對的。現在給定一個有邊的圖 G，任取一邊 uv，並假設 $G-uv$ 有一個正常 $(\Delta(G)+1)$-邊著色 f。對於每個頂點 x，令 $M(x)=[\Delta(G)+1]\setminus\{f(xy):y\in N_{G-uv}(x)\}$、也就是所有沒有被與 x 相連的邊所使用的顏色所成的集合。因為一共有 $\Delta(G)+1$ 種顏色可用，因此 $M(x)\ne\varnothing$。

令 F 為滿足下面性質的點 v_n 所成的集合：存在 n 個相異點（n 不固定）

$$v_1=v, v_2, v_3, \dots, v_n \in N_G(u)$$

使得 $f(uv_{i+1})=c_i\in M(v_i)$ 對 $1\le i\le n-1$ 均成立。我們用反證法，假定 G 沒有正常一個 $(\Delta(G)+1)$-邊著色。先證明下面的 (A) 和 (B) 兩敘述。

(A) 對任意 $v_n\in F$ 恆有 $M(u)\cap M(v_n)=\varnothing$。

不然，取 $c_n \in M(u) \cap M(v_n)$，將 $uv = uv_1$ 著 c_1，並且對 $2 \le i \le n$ 把 uv_i 改著 c_i，就得到 G 的一個正常 $(\Delta(G)+1)$-邊著色，即為矛盾（如圖 7.18 所示）。

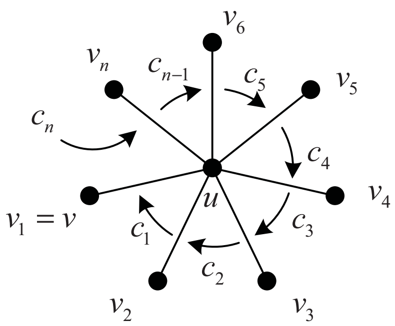

圖 7.18：如果 u 和 v_n 相連的邊有共同的未使用顏色 c_n，可以逐步交換得到所求的著色。

(B) 對於任意 F 中相異兩點 x 和 y，恆有 $M(x) \cap M(y) = \varnothing$。

否則，取 $s \in M(x) \cap M(y)$，再取 $t \in M(u)$，由 (A) 可知 $s \neq t$，因此 $s \notin M(u)$ 且 $t \notin M(x) \cup M(y)$。考慮在 $G - uv$ 中所有著了 s 或 t 的邊所導出的子圖 G_{st}，其每一點的度數不大於 2，所以 G_{st} 的每個連通部分都是圈或路徑。同時，在 G_{st} 當中，u、x、y 三點的度數都是 1，因此不能同時在一個連通部分當中；不妨假設 u 所在的連通部分 G_u 相異於 x 所在的連通部分 G_x。將 G_x 當中的顏色 s 和 t 互換，就可以得到 $G - uv$ 的另一個正常 $(\Delta(G)+1)$-邊著色 f'，此時對應的 $M'(u) = M(u)$ 且 $M'(x) = M(x) - \{s\} \cup \{t\}$，得到 $M'(u) \cap M'(x) \neq \varnothing$，而注意到 x 仍屬於對應的 F'，於是 f' 就與 (A) 矛盾。

在證明了 (A) 和 (B) 之後，我們在 F 中取一點 v_n 使得 n 是最大可能。由於 $M(v_n) \neq \varnothing$，可選取 $c_n \in M(v_n)$。由 (A)，$c_n \notin M(u)$，所以表示存在 $v_{n+1} \in N_G(u)$ 使得 $f(uv_{n+1}) = c_n$，而由 (B) 知道 v_{n+1} 和 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 都相異，因此 $v_{n+1} \in F$，這跟我們選取 v_n 的方式矛盾。 ■

由 Vizing 的結果，以後我們稱滿足 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 的圖為**第一類**（class 1），滿足 $\chi'(G) = \Delta(G)+1$ 的圖為**第二類**（class 2）。要判斷一個圖是屬於哪一類一般來說是難的。Vizing 證明了，如果簡單平面圖 G 滿足 $\Delta(G) \ge 8$，那麼 G 必定是第一類。相對地，如果 $2 \le \Delta(G) \le 5$，那麼都存在有簡單平面圖 G 屬於第二類的例子。但是剩下還有兩種情況他沒能證明：

猜想 7.20（Vizing 平面圖猜想 [31]）：所有使得 $\Delta(G) = 6$ 或 7 的簡單平面圖 G 都是第一類。

直到最近的 2001 年，Sanders 和 Zhao [25] 證明了 Vizing 猜想對於 $\Delta(G)=7$ 的情況確實是對的，不過對於 $\Delta(G)=6$ 的情形，目前仍尚未解決。

接下來我們要介紹一個定理描述邊著色和面著色之間的關連性，這也就是我們在本章開頭的時候曾經提過的、由 Tait 所發現的現象。先前我們在討論地圖著色的時候其實都是在原本地圖的對偶圖上面考慮點著色問題，而現在我們要回歸到原本的面著色。一開始我們已經解釋過，在考慮一般的面著色問題時，我們都可以假設圖是 3-正則的。除此之外，假如圖並非 2-邊連通，那就表示圖的各個面是被分開地包含在外圍面當中，這樣其實我們只需要分別考慮各個部分即可，因此我們還可進一步假設圖是 2-邊連通的。在這個概念之下，Tait 給出了如下的結果：

定理 7.21（Tait [26]）：一個簡單 2-邊連通 3-正則平版圖 G 的邊可 3-著色、若且唯若其面可以 4-著色。

證明：我們先假定 G 可被 4-面著色，並要構造其正常 3-邊著色。我們以二進位數對來表示面的四種顏色：00、01、10 和 11。對於 G 的任意一條邊 e，我們考慮包含 e 的兩個面、將它們對應的顏色逐位相加、並對二取餘數（例如 $01+11=10$ 等等），然後將 e 著上該顏色，我們宣稱這就是 G 的正常 3-邊著色。

首先，因為 G 是 2-邊連通的，任何一邊兩側的面必不相同，因此它們的顏色也必不相同，故邊不會被著上 00 這個顏色，於是總共至多只用了三種顏色。接著要驗證相鄰的邊被著上不同顏色。考慮一個頂點所連出的三條邊，它周圍的三個面的顏色 x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 都必不相同。因為 $x_iy_i \neq x_ky_k$，所以 $x_iy_i + x_jy_j \neq x_jy_j + x_ky_k$，亦即第 i 個面與第 j 個面所夾的邊之顏色不等於第 j 個面與第 k 個面所夾的邊的顏色。

反過來，假設 G 有正常的 3-邊著色，將其邊著上 1, 2, 3 三種顏色，我們要藉此構造其正常 4-面著色（用的是剛才所說的四種顏色）。設被著上那三種顏色的邊之集合分別為 E_1, E_2, E_3；此時由於 G 是 3-正則的，每個點所連出的三條邊顏色必都不相同，因此如果我們僅取出 G 當中以某兩種顏色所成的邊、所得到的子圖都會是 2-正則的（也就是一些圈）。現在我們令 $H_1 = E_1 \cup E_2$ 而 $H_2 = E_2 \cup E_3$，然後對於每個面 f，我們設其顏色的第 i 位代表在 H_i 當中包含 f 的圈之個數（對二取餘數）。例如圖 7.19 就是一個例子。

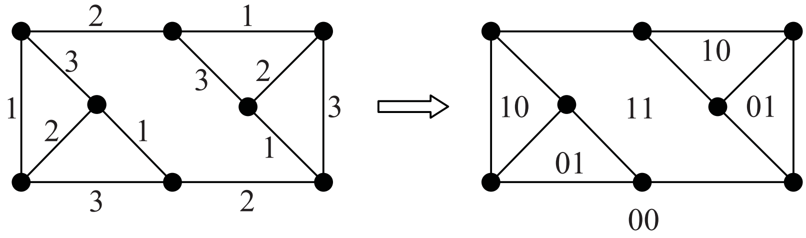

圖 7.19：一個著色的例子。

我們宣稱這樣會導致一個正常 4-面著色。考慮兩個不同的面 f, f' 共用著一條邊 e。由於 e 至少會在 H_1, H_2 之一出現（例如 H_1），因此 f 和 f' 必定一個在 H_1 的某圈當中、另一個在該圈之外，而其他的圈都只能同時包含這兩個面或同時不包含，這麼一來它們被 H_1 的圈所包圍的數目恰相差 1、因此它們顏色的第一位必不相同。 ■

由於這個定理，在 3-正則圖上的 3-邊著色又被稱為是 **Tait 著色**（Tait coloring）。這個結果還可以再進一步改良，首先我們需要引理。

引理 7.22：若 G 為 3-正則圖使得 $\kappa'(G)=2$，則 G 有子圖 G_1 和 G_2 以及點 $u_1, v_1 \in G_1$ 和 $u_2, v_2 \in G_2$、使得 $u_1v_1, u_2v_2 \notin E(G)$、且 G 是由 G_1 和 G_2 之間透過一個連結 u_1, v_1, u_2, v_2 的「梯子」所組成，如圖 7.20 所示。

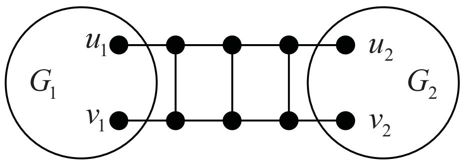

圖 7.20：G_1 和 G_2 透過「梯子」連接。

證明：如果 G 有兩條相鄰的邊構成的邊截集，那麼與它們共用點相連的第三條邊本身就會是一條截邊，這與 G 是 2-邊連通矛盾。因此 G 當中的一個最小邊截集之兩條邊 xy, uv 的四個端點都不相同。如果已經有 $xu, yv \notin E$，那麼我們就已經得到了所宣稱的梯子（僅由兩條邊組成）。

如果 $xu \in E$，我們就以如下的方法去延長梯子（當 $yv \in E$ 的時候也朝另一個方向做同樣的動作）：設 w 為 x 的第三個鄰居、而 z 為 u 的第三個鄰居。由於 $\{xw, uz\}$ 也是邊截集，所以同理必有 $w \neq z$，於是梯子便被延長。如果 $wz \notin E$、那麼就到此結束，不然就反覆進行這個操作，最終總是會得到兩個不相鄰的點（如果一直到了無法延伸的地步兩點卻仍相鄰那就與 3-正則的條件矛盾了），這樣就得到所要的梯子。 ■

定理 7.23：任何 2-邊連通 3-正則平面圖可被 3-邊著色的充要條件是任何 3-連通 3-正則平面圖可被 3-邊著色。

證明：必要性是顯然的，因為 3-連通的圖一定是 2-邊連通的。要證明充分性，設 G 為 2-邊連通 3-正則平面圖，我們對 $n(G)$ 做歸納法。首先當 $n=4$ 時唯一這樣的圖只有 K_4，它是可以被 3-邊著色的。

現在設 $n(G)>4$ 且定理對較小的 $n(G)$ 成立。如果 $\kappa'(G)\geq 3$，那麼根據定理 5.6 有 $\kappa(G)=\kappa'(G)$，由條件假設 G 已經可以被 3-邊著色了；因此我們只需考慮 $\kappa'(G)=2$ 的情況。此時引理 7.22 說明了我們可以將 G 表示為 G_1, G_2 和中間連接兩者的梯子，其中梯子的長度就是從 G_1 到 G_2 的距離。

現在，$G_1+u_1v_1$ 以及 $G_2+u_2v_2$ 都是 2-邊連通 3-正則平面圖，於是根據歸納假設這兩者各自存在正常 3-邊著色 f_1 和 f_2。適度地選取顏色的名稱使得 $f_1(u_1v_1)=1$、而 $f_2(u_2v_2)=1$ 或 2（視梯子長度的奇偶性而定）。接著回到 G 當中，先把 G_1 和 G_2 依照 f_1, f_2 著色，然後梯子的部分從 G_1 那側開始、將梯子的「縱邊」交錯地著上 1 跟 2、而「橫邊」則一律著上 3，這樣就可以完成 G 的正常 3-邊著色了（如圖 7.21 所示）。 ■

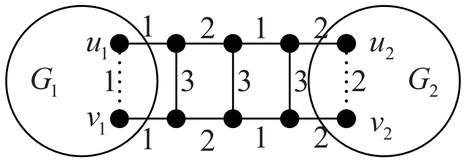

圖 7.21：著色方式示意圖。

7.4 列表著色

列表著色（list coloring）是點著色的一種推廣，在這種著色方式當中我們仍舊是要給每一點著上一種顏色，不過每個點各自可以使用的顏色集合可能各不相同，相較於先前的著色模式中每個點可用的顏色集合都是 $[n]$。這種著色概念由 Vizing [32] 和 Erdős-Rubin-Taylor [7] 獨立介紹出來。

對於圖 G 中的每一點 v，令 $L(v)$ 為可供 v 選擇的顏色集。一個正常列表著色是指一個正常著色 f 使得對於每一點 v 恆有 $f(v)\in L(v)$。如果無論 $L(v)$ 如何給定、只要都有 $|L(v)|\geq k$ 的話 G 皆可被列表著色，我們就說 G **可被列表 *k*-著色**（list *k*-colorable）或 ***k*-可選擇的**（*k*-choosable），而 G 的**列表著色數**（list chromatic number 或 choice number 或 choosability）$\chi_\ell(G)$ 則是指使 G 可被列表 k-著色的最小 k。

顯然有 $\chi_\ell(G) \geq \chi(G)$，不過這兩者之間的差距可以很大，稍後我們會看到一個例子。當 $|L(v)| \geq \Delta(G)+1$ 時，利用貪求法著色便可以得到和性質 7.2 一樣的上界，即 $\chi_\ell(G) \leq \Delta(G)+1$。一般來說，求 $\chi_\ell(G)$ 只會比求 $\chi(G)$ 更難。下面的這個證明證明了任何平面圖都可以被列表 5-著色（進而也就意味著平面圖都可以被 5-著色），但是值得注意的是證明過程中並沒有用到 Euler 公式。

定理 7.24（Thomassen [28]）：任何平面圖均可被列表 5-著色。

證明：我們可以只考慮三個點以上的情況。在圖中加邊並不會降低列表著色數，因此可以假設平版圖的外圍面邊界為圈 C，而有界面均為三角形（這稱為**近三角化**，near-triangulation）。我們將對圖的點數 n 做歸納法證明：指定 C 中兩相鄰點 v_1 和 v_2 之 $L(v_1)=\{1\}$ 和 $L(v_2)=\{2\}$、對 C 中其他點 u 有 $|L(u)| \geq 3$、且對 C 以外的點 v 有 $|L(v)| \geq 5$ 的話，那就恆有一正常列表著色。$n=3$ 的時候宣稱顯然成立。今假設 $n>3$，令 C 的點依序為 $v_1, v_2, \ldots, v_p$。證明分成兩種情況。

第一種情況是，C 有一條弦 $v_i v_j$，其中 $2 \leq i \leq j-2 \leq p-2$（參見圖 7.22）。由歸納法假設，圈 $C_1 = v_1 v_2 \cdots v_i v_j v_{j+1} \cdots v_p$ 及其內部可以被正常列表著色，此時 v_i 和 v_j 的顏色已經被固定，於是再對 $C_2 = v_i v_{i+1} \cdots v_j$ 及其內部應用歸納法假設，於是全部的點都可以被正常列表著色。

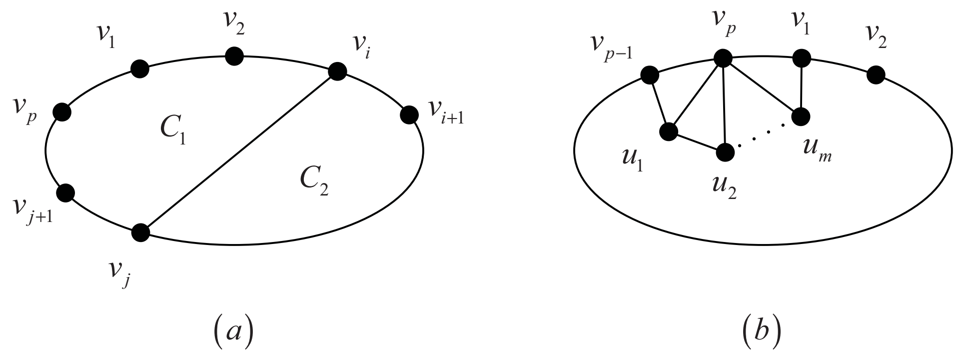

圖 7.22：定理 7.24 中的兩種情況。

第二種情況是 C 沒有弦。設 $v_{p-1}, u_1, u_2, \ldots, u_m, v_2$ 依序為 v_p 的鄰居，則因為有界面均為三角形的假設，$P = v_{p-1} u_1 u_2 \cdots u_m v$ 是一條路徑。選定兩種顏色 $a, b \in L(v_p) \setminus L(v_1)$ 預留給 v_p 使用，並且將每一個 $L(u_i)$ 都用 $L(u_i) \setminus \{a, b\}$ 取代。這麼一來，新的 $L(u_i)$ 至少包含三種顏色，於是可以應用歸納法假設，將除了 v_p 以外的點都正常列表著色。此時 v_p 的鄰居當中除了 v_{p-1} 以外都不會有別的點有可能用到 a 和 b，所以 v_p 至少可以從中選一種顏色來著，因此全部的點都可以被正常列表著色。 ■

上面的定理確實是最佳結果，因為在這之前 Voigt [33] 首先造出了一個 238 點的平面圖 G 使得 $\chi_\ell(G) > 4$，而稍後 Mirzakhani [20] 則改進成了一個 63 點的圖（見習題 7.27）。

一般講起來，求 $\chi_\ell(G)$ 總是比 $\chi(G)$ 要難，即使像 $K_{m,n}$ 這樣的例子我們要求 $\chi_\ell(K_{m,n})$ 都很不容易，相較於很顯然的 $\chi(K_{m,n}) = 2$ 而言。我們有如下的部分結果。

定理 7.25：若 $m = \binom{2k-1}{k}$，則 $\chi_\ell(K_{m,m}) > k$。

證明：令 $K_{m,m}$ 的兩部分為 A 和 B。將 $[2k-1] = \{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ 的所有 m 個相異 k-子集指定給 A 的相異點，同時也給 B 的相異點。如果 $K_{m,m}$ 此時有一列表著色 f，令 $S = \{f(x) : x \in A\}$。若 $|S| \le k-1$，則可取 $T \subseteq [2k-1] \setminus S$ 使得 $|T| = k$，此時 A 中對應 T 的點 v_T 的顏色 $f(v_T) \in S$ 與 $f(v_T) \in T$ 矛盾。而如果 $|S| \ge k$，則可取 k-子集 $T \subseteq S$，此時 B 中的對應 T 的點 u_T 的顏色 $f(u_T) \in T \subseteq S$，因此必存在 $v \in A$ 使得 $f(v) = f(u_T)$，與 $vu_T \in E$ 矛盾。 ■

由這個例子我們就可以看出，透過巧妙地安排每個點可用的顏色集，是有可能使得 $\chi_\ell(G)$ 和 $\chi(G)$ 相差任意地大；甚至不存在函數 f 使得 $\chi_\ell(G) < f(\chi(G))$。

既然可以考慮點的列表著色，同樣我們也可以談邊的列表著色，此時每個邊 e 都被賦予了一個可用的顏色集 $L(e)$，而一**正常列表邊著色**即一正常邊著色 f 使得對每條邊 e 都有 $f(e) \in L(e)$。**列表邊著色數** $\chi'_\ell(G)$ 即為使得 G 對於任意給定的一組 $|L(e)| = k$ 都可以被正常列表邊著色的最小 k。和前面一樣，若 $L(G)$ 為 G 的線圖，則有 $\chi'_\ell(G) = \chi_\ell(L(G))$。

然而，跟點的列表著色不同的是，$\chi'_\ell(G)$ 和 $\chi'(G)$ 之間的差距卻不大。舉例來說，一樣利用貪求法著色就可以得知有 $\chi'_\ell(G) \le 2\Delta(G) - 1$，因此就有 $\chi'_\ell(G) < 2\chi'(G)$，這和剛才那種不存在 f 使得 $\chi_\ell(G) < f(\chi(G))$ 的現象是截然不同的。事實上，許多人（Vizing、Gupta、Albertson、Collins、Tucker、Bollobás、Harris）甚至相信：

猜想 7.26（列表著色猜想）：對任意圖 G 都有 $\chi'_\ell(G) = \chi'(G)$。

Galvin [8] 證明了列表著色猜想對於二分圖都是對的，底下我們將證明 $K_{n,n}$ 的特例，有趣的是我們將會用到先前曾經介紹過的求婚法。我們先交代幾個定義：一個有向圖的**核**（kernel）是指一個獨立集 S、使得每個 S 以外的點都會指向 S 當中的某個點；如果一個有向圖的每一個導出子圖都有核，那我們就說它是**核完美的**（kernel-perfect）。給定一個函數 $f : V(G) \to \mathbb{N}$，我們說一個圖 G 是 f-**可選擇的**（f-choosable）、如果對於任何一組列表滿足 $|L(x)| = f(x)$、G 皆可列表著色的話。在這個意義之下，先前的 k-可選擇就是固定取 $f(x) = k$ 的特例。

引理 7.27（Bondy-Boppana-Siegel [8]）：設 D 為 G 的一個核完美之定向，並對所有 $x \in V(G)$ 取 $f(x) = 1 + \deg_D^+(x)$，則 G 是 f-可選擇的。

證明：我們對 $n(G)$ 做歸納法；當 $n(G)=1$ 時結論是顯然的。設 $n(G) \geq 2$，並考慮一組使得 $|L(x)| = f(x)$ 的列表。隨便指定一個出現在某列表當中的顏色 c、並令 $U = \{v : c \in L(v)\}$。令 S 是 $D[U]$ 的核，我們將 S 的所有點都著上顏色 c（由於 S 是獨立集，這麼做是可以的）。

接下來對於所有 $v \in U \setminus S$，我們將 c 從 $L(v)$ 中移除；同時對於其他的點的列表我們適度地移除顏色使得對於每個 $x \in V(D) \setminus S$ 都有 $|L(x)| = f'(x) = 1 + \deg_{D-S}^+(x)$（因為 S 是 U 的核，對於 $v \in U \setminus S$ 必有 $f'(x) < f(x)$，因此剛才移除 c 的動作不會有問題）。由歸納假設，$D-S$ 是 f'-可選擇的，於是我們只要將 $D-S$ 的列表著色和全部著上 c 的 S 結合即可得到 G 的列表著色了。 ■

定理 7.28：$\chi'_\ell(K_{n,n}) = n$。

證明：利用引理 7.27，我們只需證明 $L(K_{n,n})$ 具有核完美的定向、使得每個點的入度和出度都是 $n-1$ 即可。若我們將 $K_{n,n}$ 的每條邊依照它們所連接的兩點命名為 $(1,1),(1,2),\ldots,(n,n)$，不難看出 $L(K_{n,n})$ 的構造就是一個 $n \times n$ 的點陣列、其中兩點有連邊若且唯若它們位於同一行或同一列。

對於每個點 (r,s)，我們將它標上一個號碼 $(r+s-1) \bmod n$。接著定義 $L(K_{n,n})$ 的定向 D 如下：對於連接同一行點的邊，我們指定方向是從標號較小的點指向標號較大的點；而對於連接同一列點的邊，方向是反過來從標號較大的點指向標號較小的點。這麼一來容易看出對於每個點 v 都有 $\deg^-(v) = \deg^+(v) = n-1$。

現在我們要證明 D 是核完美的。隨便給予 $U \subseteq V(D)$，我們要利用穩定匹配問題來取得一個核。對於 $(r,b) \in U$，如果在 D 中有 $(r,a) \to (r,b)$，我們就說「r 喜歡 b 勝過 a」；於是對於 r 列來說，它所「喜歡」的行先是那些滿足 $\{s : (r,s) \in U\}$ 的行 s（依照對應點 (r,s) 的標號由大到小排列）、最後才是那些使得 $\{s : (r,s) \notin U\}$ 的行 s（順序怎樣無所謂）。類似地，對於行 s 來說，它所喜歡的列先是那些滿足 $\{r : (r,s) \in U\}$ 的列 r（依照對應點的標號由小到大排列）、然後才是那些使得 $\{r : (r,s) \notin U\}$ 的列 r（順序怎樣無所謂）。

利用演算法 4.16，我們可以得到一個穩定匹配 M，並且把 M 看做是它在 $L(K_{n,n})$ 當中所對應的 n 個點（依照行與列的配對），最後取 $S = M \cap U$。由於 M 是匹配，S 當中沒有兩點位於同一行或同一列，因此 S 是獨立集。接著我們要說明 $U \setminus S$ 當中的每一點都有指向 S 當中的某一點。

令 $x=(r,s)\in U\setminus S$、且其標號為 i。由於 $S=M\cap U$，因此有 $x\notin M$，故 M 當中必有另外兩點 $y=(r,b)$（設其標號為 j）和 $z=(a,s)$（設其標號為 k）。由於 M 是穩定匹配，必定是「r 喜歡 b 勝過 s」或「s 喜歡 a 勝過 r」，因此就表示有「($y\in U$ 且 $i<j$)或($z\in U$ 且 $i>k$)」，也就是說必有 $x\to y$ 或 $x\to z$，這樣就證明完畢了。 ■

習題

7.1 證明或反證：若 G 可被 k-著色，則存在一正常 k-著色使其某顏色類恰有 $\alpha(G)$ 點。

7.2 決定 Petersen 圖的著色數、點團數、穩定數和點團覆蓋數。

7.3 (a) 證明 $\max_{H\subseteq G}\delta(H)\le\Delta(G)$，並用此說明定理 7.5 比定理 7.2 強。

(b) 找出滿足 $\max_{H\subseteq G}\delta(H)=\Delta(G)$ 的所有圖 G。

7.4 若圖 G 恰有 r 個區塊 $G_1,G_2,\ldots,G_r$，證明 $\chi(G)=\max_i\chi(G_i)$ 且 $\omega(G)=\max_i\omega(G_i)$。

7.5 對於兩個圖 G_1 和 G_2，我們定義其 **Descartes 積**（Cartesian product）$G_1\square G_2$ 如下：

$$
\begin{aligned}
V(G_1\square G_2)&=\{(u,v):u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}\\
E(G_1\square G_2)&=\{(u_1,v)(u_2,v):u_1u_2\in E(G_1),v\in G_2\}\\
&\quad\cup\{(u,v_1)(u,v_2):u\in V(G_1),v_1v_2\in E(G_2)\}\text{。}
\end{aligned}
$$

試證明，一個具有 n 點的圖 G 可被 m-著色、若且唯若 $G\square K_m$ 存在一個大小為 n 的獨立集。

7.6 若圖 G 中任兩奇圈均相交，證明 $\chi(G)\le 5$。

7.7 平面上有一些直線，任三條不交在同一點。

(a) 試證明這些直線分割出來的區域可以被 2-著色。

(b) 考慮一圖 G，其頂點為上述直線的所有交點，而任兩點若是在同一直線上連續的點就在 G 中相鄰。證明 $\chi(G)\le 3$。

7.8 假設圖 G 是 P_4-免除的。證明無論點的排序如何，貪求著色法得到的都會是 G 的最佳著色。

7.9 設圖 G 不包含 C_4，試證明 $\chi(G)\le\alpha'(G)+2$（提示：對於 G 的最大匹配 M，設由 M 所導出的子圖為 H，試證明 H 可以被 $(|M|+1)$-著色、使得其中有兩個顏色恰只被使用一次）。

7.10 在一圓周上有 n 個點，$n \geq k(k+1)$。令 $G_{n,k}$ 是一個 $2k$-正則圖，其任一點與在圓周上兩方向最近的 k 點相鄰。例如 $G_{n,1}$ 就是 C_n，$G_{n,2}$ 如圖 7.23 所示。證明當 $k+1$ 整除 n 時 $\chi(G_{n,k}) = k+1$，否則 $\chi(G_{n,k}) = k+2$。

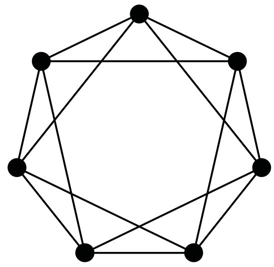

圖 7.23：$G_{7,2}$。

7.11 若 G 有 n 點 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，H 為 G 的子圖，G' 是在 $M(G)$ 中加入邊

$$\{u_i v_j : v_i v_j \in E(H)\}$$

所成的圖。試證：$\chi(G') = \chi(G) + 1$ 且 $\omega(G') = \max\{\omega(G), \omega(H) + 1\}$。

7.12 平面上的**單位距離圖**（unit-distance graph）是指無限圖 G、其點集 $V(G) = \mathbb{R}^2$、且任兩點相鄰的條件是它們在平面上的歐氏距離為 1。證明 $4 \leq \chi(G) \leq 7$。

7.13 不要使用四色定理，證明最多 12 點的的平面圖均可被 4-著色，並用此證明最多 32 邊的平面圖均可被 4-著色。

7.14 Grötzsch 定理（1959）證明了任何三角形免除的平面圖都可被 3-著色，由此可知對這樣的圖有 $\alpha(G) \geq n(G)/3$。Tovey 和 Steinberg（1993）進一步證明了對這樣的圖恆有 $\alpha(G) > n(G)/3$。試藉由下面的例子來證明這個結果是不能再改進的：定義 $G_1 = C_5$、其頂點為依序 a, x_0, x_1, y_1, z_1，而當 $k > 1$ 時、G_k 是把 G_{k-1} 再加上三個點 x_k, y_k, z_k 和五條邊 $x_{k-1}x_k, x_k y_k, y_k z_k, z_k y_{k-1}, z_k x_{k-2}$ 而成。圖 7.24 所示為 G_3。

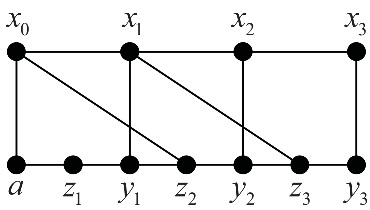

圖 7.24：G_3。

7.15 對於平面圖 G 來說，我們說 G 的一個 Euler 迴路是**不自交**（non-crossing）的、如果它在行進的過程當中不曾跨越自己的其他部分的話（相切則無妨）。

(a) 試證明若一個平面圖有 Euler 迴路，則它具有不自交的 Euler 迴路。

(b) 設 G 為一個三角化且具有不自交的 Euler 迴路 C，試證明 C 的任何子迴路之邊數均為 3 的倍數。

(c) 利用 (a) 和 (b) 證明 Heawood 的定理：任何具有 Euler 迴路的三角化均可 3-著色（Tsai-West [29]）。

7.16 定義一族平面圖如下。$G_1 = C_4$，而當 $n > 1$ 時，G_n 是將 G_{n-1} 外加上一個新的 C_4、並使該圈的每個點各連至原圖的外圍面上的連續兩點。例如 G_3 就如圖 7.25 所示。證明若 n 為偶數，則 G_n 的任何正常 4-著色都會使每個顏色恰用在 n 個點上。

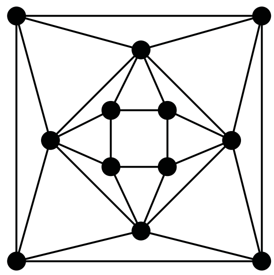

圖 7.25：G_3。

7.17 (a) 用四色定理證明任何外圍平面圖都可以被 3-著色。

(b) 接著試著不用四色定理證明同樣的結論。

(c) 利用這個結果證明下面的**畫廊定理**（Art Gallery Theorem）：假設一間畫廊的鳥瞰形狀是一個 n 邊的簡單多邊形，則有辦法設置 $\lfloor n/3 \rfloor$ 個守衛、使得畫廊內的任何一處都可以被某個守衛看見（例如在圖 7.26 例子中，畫廊的形狀為九邊形、而只要在黑點所示的位置設置三個守衛即可看到畫廊中的每一處）。對 $n \geq 3$，構造一個多邊形使得 $\lfloor n/3 \rfloor$ 個守衛是不能再減少的。

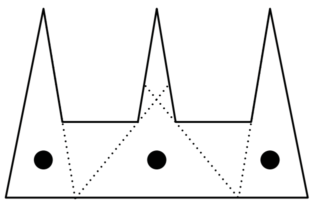

圖 7.26：一個需要三個守衛的九邊畫廊（考慮虛線的結構，不難看出兩個守衛是不夠的）。

7.18 試證明一個極大平面圖（加入任何一條邊都會成為非平面圖的平面圖）可被 3-著色、若且唯若它有 Euler 迴路。

7.19 設 G 是符合定理 7.15 的條件之平版圖。如果允許 G 有三角形，那是否有可能使得

$\min_{xy \in E}\left(\deg(x) + \deg(y)\right) > 11$？

7.20 利用定理 6.9，證明任何可以嵌入環面的圖都可被 7-著色（提示：先試著得到類似於引理 6.6 的結果）。注意到習題 6.2 已經說明了這個結果是無法再改進的，因此環面上的七色定理是遠比平面的四色定理簡單的。

7.21 透過構造邊著色的實例、來證明 Q_k 和 $K_{m,n}$ 都是第一類圖。

7.22 證明對任何二分圖 G、都有一個 $\Delta(G)$-正則的二分圖 H 包含 G。

7.23 利用 Brooks 定理證明若 $\Delta(G)=3$、則 G 可被 4-邊著色。注意這雖然是 Vizing 定理的特例，但證明中請勿使用 Vizing 定理。

7.24 設 G 是有截點的正則重圖。證明 $\chi'(G)>\Delta(G)$。

7.25 給定一個圖 G 的邊著色（不一定要正常），以 $c(v)$ 表示和點 v 相連的邊所使用的顏色之種數。在 G 的所有 k-邊著色當中，我們說一個著色是最佳的、如果它使得 $\sum_{v\in V(G)} c(v)$ 最大的話。

(a) 證明若 G 沒有一個連通部分為奇圈,則 G 有一種 2-邊著色使得對所有 v 使得 $\deg(v)\geq 2$ 都有 $c(v)=2$。

(b) 設 f 為 G 的最佳 k-邊著色，其中顏色 a 在 $u\in V(G)$ 處出現了至少兩次、而顏色 b 在 u 沒有出現。令 H 是 G 中所有著 a 或 b 的邊所成的子圖,證明 H 的某連通部分為奇圈。

(c) 設 G 為二分圖，用 (b) 說明 G 可被 $\Delta(G)$-邊著色。

7.26 用 Vizing 定理證明任何最大度數為 Δ 的圖 G 都有一種正常 $(\Delta+1)$-邊著色使得每個顏色都恰被使用 $\lceil e(G)/(\Delta+1)\rceil$ 或 $\lfloor e(G)/(\Delta+1)\rfloor$ 次。

7.27 (a) 在圖 7.27 當中我們以 S 表示 $[4]$，而 $\bar{i}$ 則表示 $S\setminus\{i\}$。證明圖中的顏色集選取法會使得該圖無法被正常列表著色。

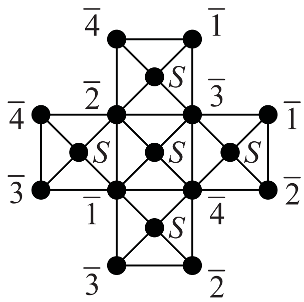

圖 7.27：試證明此圖無法正常列表著色。

(b) 底下我們以 $\bar{i}$ 表示 $[5]-\{i\}$，於是每個集合的大小都是 4。將圖 7.28 再新增一個點、給於顏色集 $\bar{1}$、並將它與圖 7.28 中所有外圍面上的點連邊。證明這個新圖沒有辦法被列表著色。

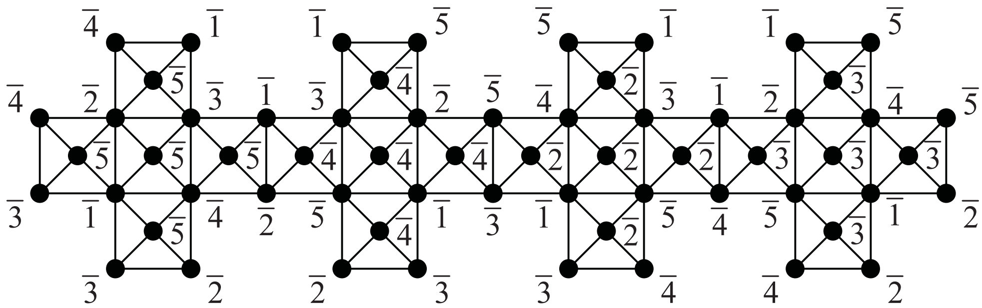

圖 7.28：試證明此圖再加入所述的一點之後無法正常列表著色。

7.28 試證明如果 G 為 $(2K_2)$-免除的，則 $\chi(G) \le \binom{\omega(G)+1}{2}$。

7.29 設 G 的著色數為 k，且 f 為 G 的正常 k-著色（使用顏色 $1, 2, \ldots, k$），T 為一個樹使得其點集為 $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$。證明存在一個嵌射 $\varphi: V(T) \to V(G)$、使得若 $w_i w_j \in E(T)$ 則 $\varphi(w_i)\varphi(w_j) \in E(G)$、而且 $f(\varphi(w_i)) = i$ 對所有 i 均成立。換句話說，G 當中包含了任何一種 k 個頂點的樹、以任何可能的 k 著色方式。

附註

① 感謝 David Cariolaro 提供本證明；更一般的結果可參見 [3] 和 [35]。

參考文獻

[1] V. A. Aksionov, O. V. Borodin, L. S. Mel'nikov, G. Sabidussi, M. Stiebitz and B. Toft, Deeply asymmetirc planar graphs, *J. Combin. Theory, Ser. B*, vol. 95 (2005), pp. 68-78.

[2] R. L. Brooks, On colouring the nodes of a network, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 37 (1941), pp. 194-197.

[3] D. Cariolaro, On fans in multigraphs, *J. Graph Theory*, vol. 51 (2006), pp. 301-318.

[4] A. Cayley, On the colouring of maps, *Proc. Roy. Geog. Soc.* (New Series), vol. 1 (1879), pp. 259-261.

[5] G. A. Dirac, A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs, *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 27 (1952), pp. 85-92.

[6] C. Eisele, *The new elements of mathematics by Charles S. Peirce*, vol. III/1, Mouton, Den Haag, 1976, pp.476-477.

[7] P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor, Choosability in graphs. In *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Arcata, Congr. Num.*, vol. 26 (1979), pp. 125-157.

[8] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph, *J. Combin. Theory, Ser. B*, vol. 63 (1995), pp. 153-158.

[9] F. Guthrie, Note on the colouring of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, vol. 10 (1880), pp. 727-728.

[10] P. J. Heawood, Map-colour theorem, *Quout. J. Pure Appl. Math.*, vol. 24 (1890), pp. 332-338.

[11] J. van den Heual and S. McGuinness, Coloring the square of a planar graph, *J. Graph Theory*, vol. 42 (2003), pp. 110-124.

[12] B. Jackson and G. Ringel, Solution of Heawood's empire problem in the plane, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 347 (1984), pp. 146-153.

[13] T. R. Jensen and B. Toft, *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[14] A. B. Kempe, On the geographical problem of the four colours, *Amer. J. Math.*, vol. 2 (1879), pp. 193-200.

[15] A. B. Kempe, How to colour a map with four colours, *Nature*, vol. 21 (1879-80), pp. 399-400.

[16] A. B. Kempe, [Untitled abstract], *Proc. London Math. Soc.*, vol. 10 (1878-9), pp. 229-231.

[17] D. Kőnig, Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, *Math. Ann.*, vol. 77 (1916), pp. 453-465.

[18] K.-W. Lih and W.-F. Wang, Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two, *SIAM J. Disc. Math.*, vol. 17 (2003), pp. 264-275.

[19] L. Lovász, Three short proofs in graph theory, *J. Comb. Theory, ser. B*, vol. 19 (1975), pp. 269-271.

[20] M. Mirzakhani, A small non-4-choosable planar graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, vol. 17 (1996), pp. 15-18.

[21] A. de Morgan, Review of *On the philosohpy of discovery: chapters historical and critical*, by W. Whewell, D.D. Athenaeum, no. 1694 (1860), pp. 501-503.

[22] J. Mycielski, Sur le coloriage des graphes, *Coll. Math.*, vol. 3 (1955), pp. 161-162.

[23] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas, The four-colour theorem, *J. Combin. Theory*, Ser. B, vol. 70 (1997), pp. 2-44.

[24] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs, *Combinatorica*, vol. 13 (1993), no. 3, pp. 279-361.

[25] D. P. Sanders and Y. Zhao, Planar graphs of maximum degree seven are class I., *J. Combin. Theory, Ser. B*, vol. 83 (2001), no. 2, pp. 201-212.

[26] P. G. Tait, On the colouring of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, vol. 10 (1878-80), pp. 501-503.

[27] P. G. Tait, Note on a theorem in the geometry of position, *Trans. Roy. Soc. Edinb.*, vol. 29 (1880), pp. 657-660. = *Sci. Papers*, vol. 1, pp. 408-411.

[28] C. Thomassen, Every planar graph is 5-choosable, *J. Combin. Theory, Ser. B*, vol. 62 (1994), pp. 180-181.

[29] M.-T. Tsai and D. B. West, A new proof of 3-colorability of Eulerian triangulations, *Ars Math. Contemp.*, vol. 4 (2011), no. 1, pp. 73-77.

[30] V. G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a *p*-graph, *Diskret. Analiz.*, vol. 3 (1964), pp. 758-759.

[31] V. G. Vizing, Critical graphs with a given chromatic class (Russian), *Metody Diskret. Analiz.*, vol. 5 (1965), pp. 9-17.

[32] V. G. Vizing, Vertex colorings with given colors (in Russian), *Metody Diskret. Analiz.*, vol. 29 (1976), pp. 3-10.

[33] M. Voigt, List colourings of planar graphs, *Discr. Math.*, vol. 120 (1993), pp. 215-219.

[34] K. Wagner, Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe (German), *Math. Ann.*, vol. 114 (1937), no. 1, pp. 570-590.

[35] H. P. Yap, *Some Topcis in Graph Theory*, *London Math. Soc.*, Lecture Note Series 108, 1986.

[36] [Report of meeting, 13 June 1878], *Proc. London Math. Soc.*, vol. 9 (1877-8), pp. 148.

[37] [Report of London Mathematical Society meeting], *Nature*, vol. 18 (1878), pp. 294.