

## 第 5 章 連通

地下鐵真的還滿連通的；  
事實上，我不管要找些什麼都不難。

– GG Allin

連通的基本概念我們在第 1 章已經做過初步的介紹。連通和度數同樣可以說是圖論中最基本的概念，由於它實在太過基本，常常會使得我們在思考圖論問題的時候遺漏了不連通的情況而使得定義或者定理的敘述出現瑕疵，即便在各個圖論專書裡這種狀況也可說是屢見不鮮。不過即便如此，這種小錯誤所導致的影響也不至於太嚴重，畢竟對於不連通的圖來說，各連通部分之間毫無關連可言，所以任何討論都只需要對個別的連通部分來研究即可。

樹是邊最少的連通圖，而在第 3 章當中我們曾經舉過最小生成樹的例子來說明連通圖的概念在網路架設上的應用。只不過，當時我們是架設一個樹狀的網路來連結各個工作站，而這種作法會有個潛在的風險存在：假如其中一部分斷線，那麼直到該部分被修復之前，整個網路就會有部分的工作站是無法連通的，而在這之間或許就已經因此而造成了不少損失。為了避免發生這樣的狀況，實際上我們在架設網路的時候會希望網路的「連通程度」強一些，使得即便有一小部分斷線，整個網路仍然能繼續維持運作。而同樣地，如何使用最少條的線路（或者更進一步地、用最少的架設成本）就能達到這個目的，便是我們想知道的；這就是所謂的**倖存網路設計問題**（survival network design problem）。然而，這卻是一個非常困難而且至今尚未能有效解決的問題。在本章中我們除了探討連通性之外，我們也會同時給予這個問題一個部分的回答。

### 5.1 連通度與邊連通度

在前述的問題中，我們可以從兩個不同的層面來檢視問題。一種情況是連接工作站之間的線路因損壞而斷線，另外一種情況是工作站本身當機而使得所有連接到該工作站的線路都無法運作，這兩種情況分別對應了將線路圖中的邊或頂點移除的情況。於是我們可以個別針對這兩種不同的觀點來討論一個圖的連通程度。

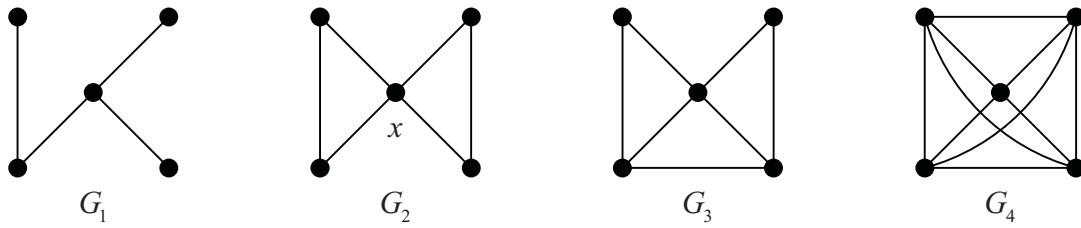


圖 5.1：四個連通程度不同的圖。

在圖 5.1 當中有四個不同的連通圖，但是其連通程度都不一樣。 $G_1$  是樹，刪除任何一條邊都會使它不連通，而刪除掉任何一個不是葉的頂點也有同樣的效果。 $G_2$  刪除任何一條邊仍然保持連通，但是如果把中間的頂點  $x$  刪除掉就不連通了。 $G_3$  可以承受刪除一條邊或一個頂點，但是刪除兩條邊或兩個頂點就可以使它不連通。 $G_4$  事實上就是  $K_5$ ，它刪除三條邊或三個頂點以外都還能維持連通。

為了精確刻畫一個圖  $G$  的連通程度，我們引入**連通度** (connectivity) 和**邊連通度** (edge-connectivity) 這兩個量，分別記做  $\kappa(G)$  和  $\kappa'(G)$ 。 $\kappa(G)$  是指最小的點集  $S$  之大小，使得  $G-S$  不連通或者只剩一個頂點，其中刪除之後會使得圖不連通的點集稱為是**分集** (separating set) 或**截集** (vertex cut)。如果  $\kappa(G) \geq k$ ，我們就說  $G$  是  **$k$ -連通** ( $k$ -connected) 的。類似地， $\kappa'(G)$  則是指使得  $G-F$  不連通或只剩一個頂點的最小邊集  $F$  之大小，其中使得  $G-F$  不連通的邊集  $F$  是叫做**切斷集** (disconnecting set)。而如果  $\kappa'(G) \geq k$ ，我們就說  $G$  是  **$k$ -邊連通** ( $k$ -edge-connected) 的。

在連通度的定義當中額外多了一個情況是刪除之後只剩一個頂點，其實這個情況是針對完全圖而來的，因為完全圖  $K_n$  無論刪除幾點都還是連通的，但是為了方便起見我們仍定義其連通度為  $n-1$ ，這是為了要使得一些相關定理對完全圖也能成立。除了完全圖之外，連通度其實都等於最小的截集之大小。類似地，邊連通度的定義中關於一個頂點的特殊情況也是針對當  $G$  恰只有一個頂點時所設計；而當  $G$  不止一個頂點時，邊連通度都等於最小的切斷集之大小。

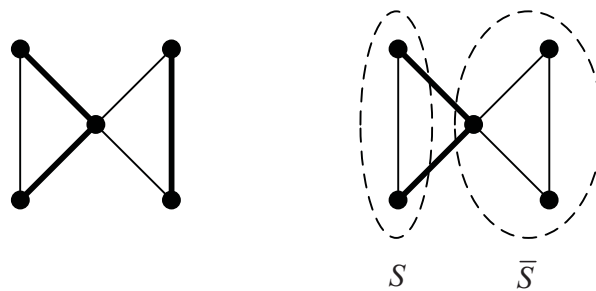


圖 5.2：切斷集與邊截集。

邊截集的定義要稍微複雜一點；給定兩個點集  $S, T$ ，我們以  $[S, T]$  表示所有一端在  $S$  當中、另一端在  $T$  當中的邊所形成的集合，即

$$[S, T] = \{xy \in E(G) : x \in S, y \in T\}.$$

用這個符號，所謂的**邊截集** (edge cut) 是指型如  $[S, \bar{S}]$  這樣的集合，其中  $S$  是  $V(G)$  的非空真子集、而  $\bar{S}$  表示  $S$  的補集。圖 5.2 展示了邊截集的樣子。我們可以看得出來邊截集一定是切斷集，因為它至少會把圖分成  $G[S]$  和  $G[T]$  兩半；不過反之卻不一定，因為切斷集裡面可以有更多的邊。

底下我們來觀察若干個例子。

**例 5.1：**以圖 5.1 當中的四個圖來說，我們有  $\kappa(G_1) = \kappa'(G_1) = 1$ ， $\kappa(G_2) = 1$  而  $\kappa'(G_2) = 2$ ， $\kappa(G_3) = \kappa'(G_3) = 2$ ， $\kappa(G_4) = \kappa'(G_4) = 4$ 。 ■

**例 5.2：** $\kappa(K_n) = n-1$  而  $\kappa(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$ 。

因為  $K_n$  沒有切斷集，所以  $\kappa(K_n) = n-1$ ；一般而言，對任一非完全圖恆有  $\kappa(G) \leq |V(G)| - 2$ 。假設  $K_{m,n}$  的兩部分為  $X$  和  $Y$ 。我們發現，任何  $K_{m,n}$  的導出子圖只要  $X$  和  $Y$  裡面各有一點就會是連通的，因此任何截集一定要完全包含  $X$  或  $Y$ 。然而， $X$  和  $Y$  本身就確實都是截集，因此就得到  $\kappa(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$ 。 ■

直接用定義要說明  $\kappa'(K_n)$  和  $\kappa'(K_{m,n})$  是多少可能會稍微冗長，但是因為底下的一個定理，其實我們很容易就能判斷它是多少。首先我們證明引理：

**引理 5.3：**將一條邊刪去至多將連通度減少 1，亦即  $\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - xy) \leq \kappa(G)$ 。

**證明：**設  $xy \in E(G)$  且  $G' = G - xy$ 。此時  $\kappa(G - xy) \leq \kappa(G)$  顯然成立。如果  $\kappa(G') < \kappa(G)$ ，那就表示  $G'$  有一個大小小於  $\kappa(G)$  的截集  $S$ ，因此  $S$  不是  $G$  的截集。因此， $G' - S$  恰有兩個連通部分  $H_1$  和  $H_2$ 、其中  $x \in H_1$  而  $y \in H_2$ 。此外，在  $G - S$  當中，連接  $H_1$  和  $H_2$  的邊僅有  $xy$ 。

如果任何一個部分、例如  $H_1$ 、至少有兩點的話，則  $S \cup \{x\}$  就構成了  $G$  的截集，因此  $\kappa(G) \leq \kappa(G') + 1$ ，結合假設就得到  $\kappa(G') = \kappa(G) - 1$ 。最後，如果  $G - S = P_2$ ，那就表示  $|S| = n(G) - 2$ ，但因為  $|S| < \kappa(G)$ ，於是  $\kappa(G) \geq n(G) - 1$ ，也就是說  $G$  是完全圖，因此  $\kappa(G') = n(G) - 2 = \kappa(G) - 1$  仍成立。 ■

**定理 5.4 (Whitney [9], 1932)：** $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$ 。

**證明：**因為與度數最小的那個點相連的邊顯然構成一個邊截集，所以有  $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ 。而根據引理 5.3，我們至少要將圖刪除  $\kappa(G)$  條邊才有辦法使得圖不連通，這樣立刻就得到  $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ 。 ■

利用定理 5.4，因為  $\kappa(K_n) = \delta(K_n) = n-1$ ，因此由夾擠就知道  $\kappa'(K_n) = n-1$ ；類似地因為  $\kappa(K_{m,n}) = \delta(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$ ，所以有  $\kappa'(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$ 。我們再看一個例子。

**例 5.5：**考慮超立方  $Q_k$ 。因為  $\delta(Q_k) = k$ ，因此根據定理就知道  $\kappa(Q_k) \leq \kappa'(Q_k) \leq k$ 。底下我們用歸納法證明  $\kappa(Q_k) \geq k$ （因此就證明了  $\kappa(Q_k) = \kappa'(Q_k) = k$ ），即任何截集的大小至少都是  $k$ 。

當  $k=1$  的時候  $\kappa(Q_k) \geq k$  成立。假設  $k \geq 2$ ，並假設已經有  $\kappa(Q_{k-1}) \geq k-1$ 。注意到  $Q_k$  可以看作是兩個  $Q_{k-1}$  相對應的點連接而成，我們把這兩個  $Q_{k-1}$  的部分分別叫做  $Q$  和  $Q'$ 。對於任何  $Q_k$  的截集  $S$ ，假設  $Q-S$  和  $Q'-S$  都是連通的，則因為  $Q_k-S$  不連通， $S$  必定包含了  $Q$  和  $Q'$  之間每組對應點的其中一點，這麼一來就有  $|S| \geq 2^{k-1} \geq k$ （因為  $k \geq 2$ ）。因此不失一般性我們可以假定  $Q-S$  不連通，則根據歸納假設， $Q \cap S$  至少包含了  $k-1$  點，而因為  $Q_k-S$  不連通， $S$  至少也包含了  $Q'$  當中的點（不然  $Q$  中的點都可以透過  $Q'$  中的路徑連接），因此  $S$  就至少有  $k$  點。 ■

在定理 5.4 中，不等式都有可能是絕對不等，而且差距可以任意地大。我們令  $G_n$  為一個由兩個  $K_{2n}$  構成、且各自有  $n$  個點連到另外一個共通點所構成的圖，例如圖 5.3 所示的為  $G_2$ 。易看出對於  $G_n$  來說，我們恆有  $\kappa(G_n) = 1$ 、 $\kappa'(G_n) = n$  而  $\delta(G_n) = 2n-1$ 。因為  $n$  可以任意選取，就表示三個數值之間的差距可以任意地大（更進一步的結果可見習題 5.3）。

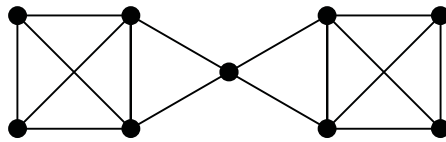


圖 5.3： $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$  的例子。

不過，在某些條件之下，這些數值可能會被迫相等。例如：

**定理 5.6：**若  $G$  為 3-正則圖，則  $\kappa(G) = \kappa'(G)$ 。

**證明：**令  $S$  為最小的截集，即  $|S| = \kappa(G)$ 。我們只要造出一個同樣大的切斷集  $F$  即可，這麼一來根據  $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$  就能得到所要的結論。

令  $H_1, H_2$  為  $G - S$  的兩個連通部分。對於任何  $v \in S$ ，由於  $S$  是最小截集， $v$  在  $H_1$  與  $H_2$  當中都必各有鄰居（為什麼？），又因為  $G$  是 3-正則， $v$  必定在其中某一部份當中只有一個鄰居，那我們就把連往該鄰居的邊加入  $F$  中。如果  $v$  在兩部分當中都只有一個鄰居但第三個鄰居不屬於  $S$ ，那隨便將連往  $H_1$  或  $H_2$  的其中一邊加入  $F$ 。最後，如果  $v$  在  $H_1$  與  $H_2$  中都只有一個鄰居、且第三個鄰居  $u$  也屬於  $S$ ，那  $v$  必定呈現如圖 5.4 所示的狀態，此時我們必須將  $v$  和  $u$  連往同一側的邊選出、例如都選連往  $H_1$  的邊。注意到這樣一來我們一共選了  $|S|$  條邊放入  $F$  中、而  $F$  確實會切斷所有從  $H_1$  通往  $H_2$  的路徑，這樣就完成了證明。 ■

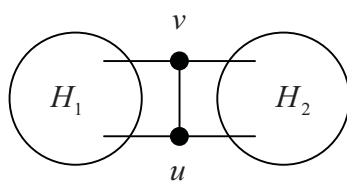


圖 5.4：定理 5.6 之證明示意圖。

刪除之後會使得連通部分增加的點或邊就分別被稱為**截點**（cut-vertex）和**截邊**（cut-edge）。注意到對於不連通圖來說任何點集合都是截集，但是截點和截邊卻仍有不無聊的意義。含有截點的連通圖稱為**可分離圖**（separable graph），此時該圖至多為 1-連通。不過，沒有截點的連通圖也不見得就是 2-連通，因為那有可能是  $K_1$  或  $K_2$ 。我們說  $G$  的一個**區塊**（block）是指一個極大的、沒有截點的連通子圖。不過，雖然對區塊本身來說其內部沒有截點，但它卻可能包含有  $G$  的截點。圖 5.5 包含了三個區塊，分別以虛線標示出來；其中有兩個區塊分別同構於  $K_5$  和  $K_2$ 。這三個區塊藉由兩個截點互相連接。

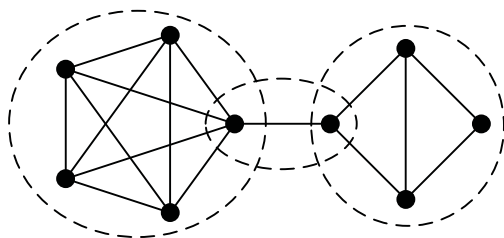


圖 5.5：區塊示意圖。

注意到如果某條邊本身自成一個區塊，那該邊就必定是截邊，不然該邊應該會被包含在一個更大的區塊當中。如果一個區塊至少有三點，那就是 2-連通的。

**性質 5.7：**圖的任兩個區塊至多交於一點。

**證明：**假設區塊  $B_1$  和  $B_2$  共同含有  $v_1$  和  $v_2$  這兩點。首先， $B_1 \cup B_2$  是連通的，這是因為對其中任兩點  $u$  和  $v$ ，由於有  $u-v_1$  和  $v_1-v_2$  這兩條路徑，合成得到  $u-v$  路徑。

接著，若從  $B_1 \cup B_2$  中去掉任一點  $z$ ，由於  $B_1 - z$  和  $B_2 - z$  依照定義都是連通的、而且至少還有一個  $v_i$  連接這兩部分，因此  $B_1 \cup B_2 - z = (B_1 - z) \cup (B_2 - z)$  仍是連通的，這表示  $B_1 \cup B_2$  沒有截點，這就和極大的假設矛盾。 ■

由於每一條邊本身都是一個沒有截點的子圖，於是由定義它必定被包含在某個區塊內，而由上述性質它也只能被包含在一個區塊內，因此各個區塊就構成了原圖的一個分解。

由圖 5.5 的例子我們知道區塊是有可能相交的。事實上，若兩區塊交於一點，則該點必為原圖的截點；反過來，原圖的截點也一定是兩個或多個區塊的共同點。於是，當  $G$  是連通的時候，其區塊之間彼此透過  $G$  的截點連接，感覺就有點像是一個由區塊所構成的樹；而其中只包含一個截點的區塊就稱為**葉區塊** (leaf block)，將這種區塊除了它所包含的截點以外的部分刪除掉之後圖仍然會是連通的。例如圖 5.5 中左右兩側的區塊就是葉區塊。易知一個非單一區塊的連通圖都至少有兩個葉區塊。

若  $G$  有  $r$  個區塊  $B_1, B_2, \dots, B_r$  和  $s$  個截點  $c_1, c_2, \dots, c_s$ ，則我們構造一個圖  $G^* = (V^*, E^*)$ 、稱為是  $G$  的**區塊截點圖** (block-cutpoint graph)，其中

$$V^* = \{B_1, B_2, \dots, B_r, c_1, c_2, \dots, c_s\},$$

$$E^* = \{B_i c_j : c_j \in B_i\},$$

這就是把剛才說的那種「區塊構成的樹」具體表現出來的結果，於是  $G^*$  必為林，其中各個  $c_j$  的度數至少都為 2，而  $G$  的葉區塊恰為  $G^*$  的葉。當  $G$  是連通的時候， $G^*$  就是樹。

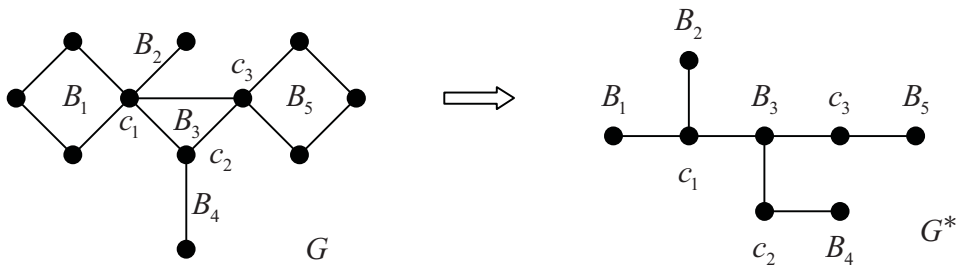


圖 5.6：圖  $G$  及其區塊截點圖  $G^*$ 。

利用 DFS，我們可以取得圖的區塊狀態之資料，不過這邊就先不多提了。

## 5.2 2-連通圖

在了解了基本的連通概念後，我們希望可以了解更多關於  $k$ -連通圖的性質。我們先從 2-連通開始討論。首先，我們說兩條  $u$ - $v$  路徑**內部互斥** (internally disjoint)，如果它們除了  $u$  和  $v$  以外沒有別的公共點。底下的定理首先給了一個關於 2-連通圖的第一個刻畫。

**定理 5.8 (Whitney, 1932):** 一個至少有三點的圖  $G$  為 2-連通的充要條件是任兩點  $u$  和  $v$  之間都存在兩條內部互斥的路徑。

**證明：**充分性是容易證明的。如果任兩點之間都有內部互斥的兩條路徑，那無論將  $G$  刪除掉哪一點，任兩點之間都至少還會有一條路徑，因此  $G$  是 2-連通的。

要證明必要性，假設  $G$  是 2-連通圖，對於任意兩點  $u$  和  $v$ ，我們對  $k = d(u, v)$  做歸納法證明它們之間一定有兩條內部互斥的路徑。

當  $k = 1$  時，首先注意到  $G - uv$  仍是連通的，因為  $\kappa'(G) \geq \kappa(G) \geq 2$ 。因此， $u$  和  $v$  在  $G - uv$  當中一定有路徑連接，而這個路徑顯然和  $uv$  這條邊是內部互斥的。

接著，假設  $k \geq 2$ ，並假設必要性對較小的  $k$  成立。取一條最短的  $u$ - $v$  路徑、並假設這條路徑在  $v$  之前的的一點叫  $w$ ，於是就有  $d(u, w) = k - 1$ 。根據歸納假設， $u$  和  $w$  之間存在兩條內部互斥路徑  $P$  和  $Q$ 。假如  $v \in P$  或  $v \in Q$ ，那立刻就得到了兩條內部互斥的  $u$ - $v$  路徑。現假設  $v \notin P$  且  $v \notin Q$ ；由於  $G$  是 2-連通的，在  $G - w$  當中  $u$  和  $v$  必定還有一條路徑  $R$  連接。如果  $R$  和  $P$  或  $Q$  是內部互斥的，那就證明完畢；而如果  $R$  和  $P$  與  $Q$  都有共用的內部點，我們假定這些共用點當中最後一個（依照它們在  $R$  上的順序）為  $z$ ；不失一般性我們假設  $z \in P$ ，如圖 5.7 所示。這麼一來我們就得到了所要的內部互斥路徑：一條是沿著  $P$  的  $u$ - $z$  路徑加上沿著  $R$  的  $z$ - $v$  路徑，另一條是  $Q$  加上邊  $wv$ 。 ■

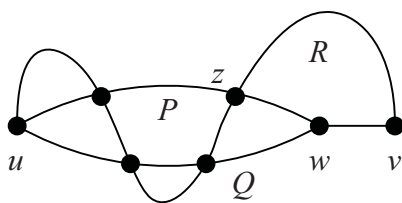


圖 5.7：定理 5.8 之證明示意圖。

接下來我們要看若干種 2-連通的等價定義方式，首先我們有引理：

**引理 5.9：**設  $G$  為  $k$ -連通圖。若將  $G$  增加一點  $v$ 、使其和  $G$  的至少  $k$  點連邊，則得到的新圖  $G'$  也是  $k$ -連通的。

**證明：**我們只要證明  $G'$  的任何截集  $S$  之大小都至少為  $k$  即可。若  $v \in S$ ，那麼  $S \setminus \{v\}$  就是  $G$  的截集，於是  $|S \setminus \{v\}| \geq k$ ，所以  $|S| \geq k+1$ 。若  $v \notin S$  但  $N(v) \subseteq S$ ，則也有  $|S| \geq k$ 。最後，若  $v$  和其某個鄰居都不屬於  $S$ ，那麼這兩點在  $G' - S$  當中就屬於同一個部分，因此  $S$  必須是  $G$  的截集，故仍有  $|S| \geq k$ 。 ■

**定理 5.10：**對一個至少有三點的圖  $G$  來說，下列敘述等價，且都表示  $G$  為 2-連通：

- (1)  $G$  連通且沒有截點。
- (2) 對所有  $x, y \in V(G)$ ，都存在內部互斥的  $x, y$ -路徑。
- (3) 對所有  $x, y \in V(G)$ ，都有圈同時通過  $x$  和  $y$ 。
- (4)  $\delta(G) \geq 1$ ，且任兩條  $G$  的邊都落在一個共同的圈中。

**證明：**定理 5.8 已經說明了  $(1) \Leftrightarrow (2)$ ；而因為兩條內部互斥的路徑合起來就構成一個圈、反之一個圈可以拆成兩條內部互斥的路徑，因此就有  $(2) \Leftrightarrow (3)$ 。 $(4) \Rightarrow (3)$  也是容易的：首先因為  $\delta(G) \geq 1$ ， $x$  和  $y$  都至少有一條相連的邊，我們就將它們選出並利用 (4) 的條件；而如果選出的恰為同一條邊，那就另外隨便再選一條邊並利用條件即可。

最後要證明  $(3) \Rightarrow (4)$ 。由於  $G$  任兩點都有圈通過，因此知道其實根本有  $\delta(G) \geq 2$ 。考慮任兩條邊  $uv$  和  $xy$ （這四點可能有兩點相同，但不影響底下論證），我們將  $G$  加入兩點  $w$  和  $z$ ，使  $w$  和  $u, v$  相連、 $z$  和  $x, y$  相連。根據引理 5.9，如此得到的新圖  $G'$  會是 2-連通的，所以根據 (3) 知道有圈通過  $w$  和  $z$ 。但是根據我們的造法，這個圈一定同時通過  $u, v, x, y$ ，且不包含邊  $uv$  和  $xy$ （如圖 5.8 所示）。因此只要將該圈當中  $u, w, v$  路徑和  $x, z, y$  路徑分別換成邊  $uv$  和  $xy$  就得到所求的圈。 ■

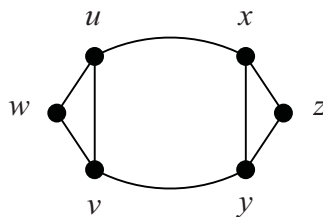


圖 5.8：定理 5.10 之證明示意圖。

對於圖  $G$ ，對一條邊  $uv$  作**細分**（subdivide）是指將該邊上加上一個新的點  $w$ ，讓原本的邊  $uv$  變成一條路徑  $uwv$ 。如果一個圖  $H$  可以藉由反覆對  $G$  進行細分操作後得到，我們就說  $H$  是  $G$  的**細分圖**（subdivision）。

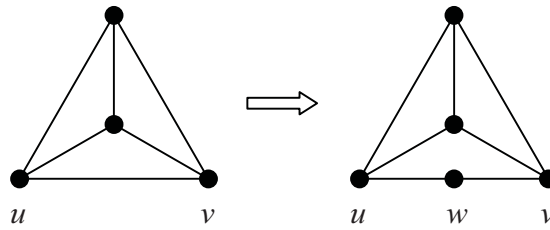


圖 5.9：對  $K_4$  進行一次細分操作之後會得到右邊的圖。

根據定理 5.10，我們可以得到下面的結果：

**推論 5.11：**若  $G$  為 2-連通圖，則  $G$  的細分圖也是 2-連通的。

**證明：**我們只要證明對  $G$  做一次細分後的圖滿足定理 5.10 的敘述 (4) 即可，剩下的用歸納法就能得到待證結論。假設我們將  $G$  的邊  $uv$  做細分，並新增了一個點  $w$ ，得到的新圖為  $G'$ 。對於  $G'$  中任兩條邊  $e$  和  $f$  來說，如果它們都不等於  $uw$  或  $wv$ ，那它們就是  $G$  中的邊，於是根據敘述 (4) 就有一個圈通過  $e$  和  $f$ ；如果該圈有用到邊  $uv$ ，那換成路徑  $uwv$  之後仍是  $G'$  中的圈。如果  $e = uw$  而  $f \neq wv$ ，那就在  $G$  中取通過  $uv$  和  $f$  的圈，並且同樣將  $uv$  換成路徑  $uwv$ 。如果  $e = uw$  且  $f = wv$ ，那就在  $G$  中取通過  $uv$  和另外隨便一條邊的圈並做同樣的修改。 ■

再來的下一個問題是，我們如何能夠用一個有系統的方式構造出所有的 2-連通圖。為了解決這個問題，我們引入**耳朵** (ear) 的概念。圖  $G$  的耳朵是指一條極大的路徑、使得它除了端點之外的點度數皆為 2、且被包含在  $G$  的一個圈當中。 $G$  的**耳分解** (ear decomposition) 則是指將  $G$  分解成  $P_0, P_1, \dots, P_k$ ，使得  $P_0$  為圈、而對  $i \geq 1$  來說  $P_i$  皆為  $P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_i$  的耳朵，如圖 5.10 所示。

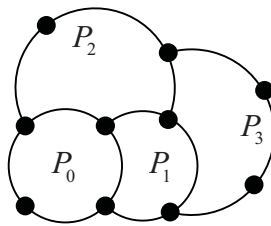


圖 5.10：一個耳分解的例子。

下面的定理告訴我們，利用耳分解，我們可以構造出所有的 2-連通圖：

**定理 5.12 (Whitney, 1932)：**圖  $G$  為 2-連通的充要條件是它有耳分解。此外，若  $G$  為 2-連通圖，則  $G$  當中的任何一個圈都是  $G$  的某種耳分解中一開始的那個圈。

**證明：**先證明充分性。由於圈本身是 2-連通的，我們只要證明將 2-連通圖添加一個耳朵仍然是 2-連通即可。事實上，增加耳朵的動作可以看做是增加一條邊之後再對那條邊做細分，由於新增邊和細分（根據推論 5.11）都能維持 2-連通性，因此就證明完畢。

其次證明必要性，我們從  $G$  的任何一個圈  $P_0$  開始構造  $G$  的耳分解。底下以  $G_i$  表示  $P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$ 。對於  $G_i$  來說，如果  $G_i \neq G$ ，就選一條邊  $uv \in E(G) - E(G_i)$  和另一條邊  $xy \in E(G_i)$ 。根據定理 5.10 (4)，存在一個圈通過  $uv$  和  $xy$ ，於是我們就將該圈中包含  $uv$  且邊都不屬於  $E(G_i)$  的極大子路徑取出，令為  $P_{i+1}$ 。易看出每次  $P_{i+1}$  都會是  $G_{i+1}$  的耳朵。如此反覆，最終就能得到  $G$  的耳分解。 ■

利用類似的概念，我們也可以處理 2-邊連通的對應問題。在這之前，我們先來給予 2-邊連通圖一個類似於定理 5.10 的刻畫。

**引理 5.13：**連通圖  $G$  為 2-邊連通的充要條件是每一條邊都被包含在某個圈中。

**證明：**要證明充分性，我們只需證明  $G$  刪除任何一條邊  $e$  都還是連通的即可。考慮  $G$  中任兩點  $u$  和  $v$ ，因為  $G$  為連通、它們之間存在一條路徑  $P$ 。如果  $P$  有用到  $e$ ，我們在  $G$  中找一個包含  $e$  的圈  $C$ ，然後將  $C - e$  插入原來  $e$  在  $P$  中的位置，即得到一條新的  $u-v$  道路。因此  $G - e$  仍是連通的。

接著證明必要性。如果  $G$  是 2-邊連通，根據定義，對於任何一條邊  $uv \in E(G)$ ， $G' = G - uv$  都還是連通的，因此在  $G'$  中就存在一條  $u-v$  路徑。將這條路徑加入  $e$  就得到一個包含  $e$  而屬於  $G$  的圈了。 ■

定義  $G$  的**閉耳朵** (closed ear) 是指  $G$  的一個圈  $C$ 、使得  $C$  中除了一點以外的度數都是 2；而  $G$  的**閉耳分解** (closed-ear decomposition) 就是指  $G$  的一個分解  $P_0, P_1, \dots, P_k$ ，使得  $P_0$  為圈、且對  $i \geq 1$  來說  $P_i$  為  $P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$  的耳朵或閉耳朵。底下是 2-邊連通的對應定理，其證明和定理 5.12 幾乎是一樣的。

**定理 5.14：**圖  $G$  為 2-邊連通的充要條件是它具有閉耳分解。此外，若  $G$  為 2-邊連通圖，任何  $G$  中的圈都是  $G$  的某種閉耳分解中一開始的那個圈。

**證明：**先證明充分性。一開始的圈本身是 2-邊連通，因此只要證明加入耳朵或閉耳朵都能維持 2-邊連通性即可。如果加入的是閉耳朵，這些新加入的邊自然被包含在這個閉耳朵（為一個圈）中。如果加入的是耳朵，設其端點為  $u$  和  $v$ ，則因為原本是連通的、存在有一個  $u-v$  路徑，而這個路徑連同該耳朵就構成了一個圈，故新加入的邊仍都被包含在一個圈當中。因此由引理 5.13，新的圖仍是 2-邊連通的。

接著要證明必要性，我們一樣從  $G$  的任意一個圈  $P_0$  開始造閉耳分解。底下一樣以  $G_i$  表示  $P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$ 。對於  $G_i$  來說，如果  $G_i \neq G$ ，我們就選一條邊  $uv \in E(G) - E(G_i)$  使得  $u \in G_i$ （因為  $G$  為連通，故這樣的邊存在）。根據引理 5.13，存在一個圈  $C$  包含  $uv$ ，於是我們從  $v$  開始沿著  $C$  走、直到再次回到  $G_i$  為止，圖中經過的部分要不就是一條路徑要不就是一個圈，總之就令它為  $P_{i+1}$ 。於是  $P_{i+1}$  就會是  $G_{i+1}$  的耳朵或閉耳朵。如此反覆，最終就能得到  $G$  的閉耳分解。 ■

我們可以將 2-邊連通應用在有向圖的情況上。回憶起在第 1 章我們曾經談過在有向圖上有所謂「強連通」的概念，也就是說對於任何兩點  $u$  和  $v$  都存在一條從  $u$  到  $v$  的路徑；而有向圖的連通性便是藉由強連通來定義。對一個有向圖  $G$ ，其分集或截集  $S$  就是指使得  $G-S$  不強連通的點集，而  $G$  的連通度（仍記作  $\kappa(G)$ ）便是最小的集合  $S$  之大小、使得  $S$  是截集或  $G-S$  只剩一點， $k$ -連通的意義和前面也一樣。邊連通度的概念推廣到有向圖的強連通性時也是直接做類推即可。

下面的引理和前面的定理 5.12 之證明內容有相似之處。

**引理 5.15：**將一個同方向的耳朵或閉耳朵  $P$  加入一個強連通的有向圖  $G$ ，結果仍是強連通的。

**證明：**假設  $P$  的端點為  $s$  和  $t$ （若是閉耳朵的情況，則這兩點一樣），而  $P$  上的邊之方向都是從  $s$  指向  $t$ 。若要從  $u \in G \cup P$  走到  $v \in G \cup P$ ，可依下列方法走：首先， $u$  不管是在  $G$  中或  $P$  中，都可以先走到  $t$ ，其次再由  $t$  經由  $G$  中的路徑走到  $s$ ，最後再從  $s$  走到  $v$ ，這也是一樣，不管  $v$  在  $G$  中或在  $P$  中都做得到。 ■

現在我們來考慮這樣的一個問題。假設有一天政府突發奇想要把所有的道路都弄成單行道，但是條件是要避免有任何地點無法抵達。以圖論的方式描述的話，這就相當於是要在一個給定的無向圖上面找一個定向、使得對應的有向圖是強連通的；這樣的定向就稱為是**強定向**（strong orientation）。底下的定理刻畫了強定向存在的條件。

**定理 5.16 (Robbins [8], 1939)：**圖  $G$  有強定向，若且唯若  $G$  為 2-邊連通。

**證明：**如果  $G$  有強定向，顯然  $G$  必須是連通的。而如果  $G$  有截邊，那麼無論將這個截邊定成什麼方向，都會有一邊的點無法前往另一邊，因此  $G$  必定是 2-邊連通的。

反過來，假設  $G$  為 2-邊連通，那麼定理 5.14 說明了  $G$  有閉耳分解。我們只要將初始的圈定成同方向的圈，然後依照耳分解逐次加入同方向的（封閉或開放之）耳朵，根據引理 5.15 就得到最後的定向會是強定向。 ■

### 5.3 $k$ -連通性與 Menger 定理

Whitney 定理顯示 2-連通性可以用內部互斥路徑的存在來刻畫，底下我們要將這個事實推廣到  $k$ -連通的情況上面。一開始，我們要來先考慮局部的情況，也就是對於相異兩點  $x, y \in V(G)$  去考慮它們之間的連通情況。我們定義一個  $x$ - $y$  截集 ( $x$ - $y$  cut) 是指一個不包含  $x$  和  $y$  的點集  $S$ 、使得  $G-S$  當中沒有任何  $x$ - $y$  路徑 (因此它也必定是普通的截集)。此外，若  $X, Y$  為點集 (未必互斥)，我們說一條  $X$ - $Y$  路徑是指一條起點在  $X$  當中、終點在  $Y$  當中的路徑，而一個  $X$ - $Y$  截集 ( $X$ - $Y$  cut) 則是指一個點集  $S$  (可能含有  $X \cup Y$  中的點)、使得  $G-S$  當中沒有任何  $X$ - $Y$  路徑。

以  $\kappa(x, y)$  表示最小的  $x$ - $y$  截集大小<sup>①</sup>，然後以  $\lambda(x, y)$  表示最多條兩兩內部互斥的  $x$ - $y$  路徑之數目，則 Whitney 定理就相當於是說  $G$  為 2-連通若且唯若  $\lambda(x, y) \geq 2$  對任意  $x, y$  皆成立。易看出，由於  $x, y$  之間存在  $\lambda(x, y)$  條兩兩內部互斥的  $x$ - $y$  路徑，任何  $x$ - $y$  截集就必須包含這些路徑的至少各一點，因此就有  $\kappa(x, y) \geq \lambda(x, y)$ 。事實上若  $x, y$  不相鄰，也有  $\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$ ，而這就是著名的 Menger 定理。以下我們要用另外一種方式來證明它。類似前面，我們用  $\lambda(X, Y)$  表示最多條兩兩互斥的  $X$ - $Y$  路徑的數目、 $\kappa(X, Y)$  表示最小的  $X$ - $Y$  截集大小，我們也有  $\kappa(X, Y) \geq \lambda(X, Y)$ 。如果  $x$  和  $y$  不相鄰，我們有

$$\kappa(x, y) = \kappa(N(x), N(y)) \text{ 以及 } \lambda(x, y) = \lambda(N(x), N(y)),$$

因此要證明  $\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$ ，只要證明  $\kappa(X, Y) = \lambda(X, Y)$  即可。

**定理 5.17：**在圖  $G = (V, E)$  中，若  $X, Y \subseteq V$  則  $\kappa(X, Y) = \lambda(X, Y)$ 。

**證明：**令  $k = \kappa(X, Y)$ ，由  $\kappa(X, Y) \geq \lambda(X, Y)$ 、我們只需證明存在  $k$  條兩兩互斥的  $X$ - $Y$  路徑。我們對  $|E|$  做歸納法；當  $|E| = 0$  時，顯然  $|X \cap Y| = k$ ，所以存在  $k$  條單點的  $X$ - $Y$ 「路徑」。現在假設結論對邊數較少的圖成立，而  $G$  有一條邊  $e = xy$ 。此時若  $e$  有端點在  $X$  中的話我們就當  $G \cdot e$  當中的對應收縮點  $v_e$  是在  $X$  當中； $e$  有端點在  $Y$  中的情況亦同。如果  $G$  沒有  $k$  條兩兩互斥的  $X$ - $Y$  路徑，則  $G \cdot e$  也沒有，因為  $G \cdot e$  中的  $X$ - $Y$  路徑若含  $v_e$ 、則將其展回  $xy$ ，可以得到  $G$  中的  $X$ - $Y$  路徑。由歸納法假設， $G \cdot e$  有一個少於  $k$  點的  $X$ - $Y$  截集  $S'$ ，此時必有  $v_e \in S'$ 、不然  $S' \subseteq V$  將是  $G$  的一個少於  $k$  點的  $X$ - $Y$  截集。因此， $S = (S' \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\}$  便是  $G$  的一個  $X$ - $Y$  截集，因此恰含  $k$  點。

再來考慮圖  $G - e$ 。因為  $x, y \in S$ ，每一個  $G - e$  的  $X$ - $S$  截集必也是  $G$  的  $X$ - $Y$  截集，因此最少有  $k$  點。由歸納法假設， $G - e$  有  $k$  條兩兩互斥的  $X$ - $S$  路徑。同理， $G - e$

也有  $k$  條兩兩互斥的  $S$ - $Y$  路徑。因為  $S$  是  $X$ - $Y$  截集，這兩組路徑在  $S$  之外不相交，所以可以合成  $k$  條兩兩互斥的  $X$ - $Y$  路徑。 ■

**推論 5.18 (Menger 定理 [7]):** 若  $x$  和  $y$  為不相鄰之兩點，則  $\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$ 。

應用這個 Menger 定理，底下我們可以得到全域的結論：

**推論 5.19:** 設圖  $G$  至少有兩點，則  $G$  為  $k$ -連通的充要條件是， $\lambda(x, y) \geq k$  對所有  $x, y \in V(G)$  皆成立。

**證明:** 若  $\lambda(x, y) \geq k$  對任兩點  $x$  和  $y$  皆成立、且  $G$  至少有兩點，則立刻得知  $G$  至少有  $k+1$  點（為什麼？），且任意刪去  $k-1$  點都不會破壞剩下的任兩點之間的路徑，因此  $G$  是  $k$  連通的。

反過來，若  $G$  為  $k$ -連通，對於不相鄰的兩點  $x$  和  $y$  來說我們顯然要有  $\kappa(x, y) \geq k$ ，因此由 Menger 定理可知  $\lambda(x, y) \geq k$ ，故只需證明對於相鄰的兩點  $x$  和  $y$  也有  $\lambda(x, y) \geq k$  即可。令  $G' = G - xy$ ，則根據引理 5.3， $\kappa(G') \geq \kappa(G) - 1$ 。因此根據 Menger 定理有  $\lambda_G(x, y) = 1 + \lambda_{G'}(x, y) = 1 + \kappa_{G'}(x, y) \geq 1 + \kappa(G') \geq \kappa(G) \geq k$ 。 ■

如果我們把  $x$ - $y$  截集等等的定義推廣到有向圖上的話，定理 5.17、推論 5.18 和推論 5.19 仍然是成立的，證明也相同，只要把其中  $N(x)$  和  $N(y)$  換成  $N^+(x)$  和  $N^-(y)$  即可。Menger 定理除了可以考慮有向圖的板本之外，也可以考慮邊版本（無向圖和有向圖都可以）。對圖  $G$  中相一兩點  $x$  和  $y$ ，一個使得  $G - F$  當中沒有  $x$ - $y$  路徑的邊集  $F$  稱為是一個  $x$ - $y$  **切斷集** ( $x$ - $y$  disconnecting set)。以  $\kappa'(x, y)$  表示最小的  $x$ - $y$  切斷集的大小，並以  $\lambda'(x, y)$  表示最多條兩兩互斥的  $x$ - $y$  路徑的數目，則利用類似的方法，也可以證明有  $\kappa'(x, y) = \lambda'(x, y)$  成立。

最後我們來看另外一種  $k$ -連通的刻畫，這可以看做是定理 5.10 (3) 的推廣。令  $x \in V(G)$  而  $U \subseteq V(G)$  為點集，底下我們說一個  $x, U$ -**扇** ( $x, U$ -fan) 是指一些從  $x$  到  $U$  的路徑之集合，使得裡面任兩條路徑都僅共用  $x$  這一點。

**引理 5.20:** 圖  $G$  為  $k$ -連通的充要條件是，它至少有  $k+1$  個點、且對於任何  $x \in V(G)$  與  $U \subseteq V(G)$  使得  $|U| \geq k$  都存在一個大小為  $k$  的  $x, U$ -扇。

**證明:** 若  $G$  為  $k$ -連通，顯然它必須有  $k+1$  點。對於任何  $x \in V(G)$  與  $U \subseteq V(G)$  使得  $|U| \geq k$ ，我們在  $G$  中加入一個新點  $y$  使它和  $U$  的所有點連邊，令這個新圖為  $G'$ 。由

引理 5.9 知道  $G'$  也是  $k$  連通的，於是根據 Menger 定理，必須存在  $k$  條兩兩內部互斥的  $x$ - $y$  路徑。將  $y$  刪除掉之後這些路徑就構成了  $G$  中一個大小為  $k$  的  $x, U$ -扇。

反過來，假設  $G$  滿足所述條件，則對任何  $x \in V(G)$ ，我們取  $U = V(G) \setminus \{x\}$ ，由大小為  $k$  的  $x, U$ -扇之存在性就可以知道  $\deg(x) \geq k$ ，也就是說  $G$  滿足  $\delta(G) \geq k$ 。接著，任意給定  $u, v \in V(G)$ ，取  $U = N(u)$ ，於是  $|U| \geq k$ ，所以由條件知道存在大小為  $k$  的  $v, U$ -扇，將這個扇中的路徑繼續連到  $u$  就得到  $k$  條兩兩內部互斥的  $u$ - $v$  路徑了。於是由 Menger 定理知道  $G$  是  $k$ -連通的。 ■

**定理 5.21 (Dirac, 1960 [1]):** 設  $k \geq 2$ 。若  $G$  為  $k$ -連通，則任意  $k$  點都有一個圈通過這  $k$  點。

**證明:** 我們對  $k$  做歸納法； $k = 2$  的情況已經由定理 5.10 (3) 證明之。現在假設  $k \geq 3$ ，且定理對  $k-1$  成立。對於任意的  $k$  個點，令它們所成的點集為  $S$ 。任取一點  $x \in S$ ，由於  $G$  也是  $k-1$  連通的，由歸納假設知道存在一個圈  $C$  通過  $S \setminus \{x\}$  的每一個點。如果  $C$  本身就只有那  $k-1$  個點，那麼由引理 5.20 知道存在一個大小為  $k-1$  的  $x, C$ -扇，於是我們只要將其中連接  $C$  上相鄰兩點的路徑取出，就可以連接  $x$  而完成一個通過  $S$  所有點的圈了。

因此，考慮  $n(C) \geq k$  的情況。此時由引理 5.20，存在一個大小為  $k$  的  $x, C$ -扇，我們要從中找出兩條連接到  $x$  但保留住其他  $S$  中的點的路徑。設  $S \setminus \{x\}$  的點在  $C$  上依序為  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ ，並以  $V_i$  表示存  $v_i$  開始到（但不包含） $v_{i+1}$  的部分（其中  $v_k = v_1$ ）。如此一來  $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}$  構成了  $V(C)$  的一個分割。由於剛才的  $x, C$ -扇一共有  $k$  條路徑，根據**鴿籠原理** (pigeonhole principle) 必有兩條路徑連到了同一個  $V_i$ ，於是這兩條路徑連接在  $C$  上的點之間必定沒有任何  $v_i$ ，我們就用這兩條路徑連接到  $x$  就完成所要的圈了。 ■

雖然這些定理都讓我們更加了解  $k$ -連通的性質，但是這些定理都不利於改寫成演算法。以 Menger 定理來說，我們會需要對於每一對點  $u, v \in V(G)$  去計算  $\kappa(u, v)$ ；這個步驟會用到所謂的**最大流量最小截集演算法** (max-flow min-cut algorithm)，其需時為  $O(nm)$ 、其中  $n$  為點數  $m$  為邊數。由於  $m = O(n^2)$ ，因此這個演算法相當於是  $O(n^3)$  的需時。由於我們需要對每一對點都進行這個操作，然後再求其最小值以得到  $\kappa(G)$ ，這樣的作法總共會需要  $O(n^5)$  的時間，並不是很好。Even 和 Tarjan [2] 曾經將這個想法加以改良，作出了一個需時為  $O(n^{4.5})$  的演算法，然而這個改進仍舊有限。

一直到現在，如何有效地算出一個圖的連通度仍舊是一個持續被研究的問題，許多針對不同特殊類型圖的演算法也很多。而在 2006 年時，Gabow [3] 提出了目前已知最快的、適用

於一般圖的演算法，能夠在  $O\left((n + \min\{\kappa^{5/2}, \kappa n^{3/4}\})m\right)$  的時間內決定有向圖的連通度，而無向圖的情況則是將  $m$  改成  $\kappa n$ 。

## 5.4 最小連通圖

最後，讓我們回到本章一開始提到的倖存網路設計問題。應用前面的術語，這個問題的要求就是要在一個對邊賦予權重的完全圖  $K_n$  上面找出一個權重最小的  $k$ -連通生成子圖  $G$ 。然而，這個問題目前只有  $k=1$  的情況被有效地解決，也就是第 3 章中的 Kruskal 演算法，至於  $k>1$  的情況，可以證明這其實是屬於 NP-困難的問題，因此沒辦法指望會存在一個有效率的演算法。至於有向圖的情況，甚至連  $k=1$ （亦即找出一個權重最小的強連通生成子圖）都是 NP-困難。

因此，如今學者在研究這個問題的時候，主要是考慮所謂的**近似演算法**（approximation algorithm），也就是一個充分有效率的演算法、它能輸出一個權重「接近最小」的  $k$ -連通生成子圖。在這類的議題當中，我們會說一個演算法是  $\rho$ -**近似**（ $\rho$ -approximation），如果它總是能夠輸出一個結果是不超過最佳值的  $\rho$  倍；例如 Zhao、Nagamochi 與 Ibaraki [10] 曾做出一個用來處理有向圖之  $k=1$  的情況的線性演算法，使得該演算法為  $5/3$ -近似。這一類的演算法非常多，各有不同的對象、速度和近似程度，更多關於這一系列演算法的稍早結果可以參見 Khuller [6]。一直到現在，這類的近似演算法都還在持續地被改良當中。

不過，雖然加權的情況是困難的，但如果我們不考慮加權的情況，只希望找出  $K_n$  裡邊數最少的  $k$ -連通生成子圖，那倒是已經由 Harary 所解決了。基本上這個問題也就相當於是在問，對於一個  $n$  點的  $k$ -連通圖來說（當然  $k < n$ ），它至少要有幾條邊？由於我們有

$$n\kappa(G) \leq n\delta(G) \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e,$$

因此就知道至少要有  $\lceil nk/2 \rceil$  條邊，而 Harary 藉由實際構造例子證明了  $\lceil nk/2 \rceil$  確實就是答案。底下我們把他構造出來的圖記為  $H_{n,k}$ 。他分成三種情況構造：

1.  $k$  為偶數：

以  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  為點集，然後對每個  $i$  將它對  $i \pm j \pmod{n}$  都連邊、其中  $j = 1, 2, \dots, k/2$ 。

2.  $k$  為奇數， $n$  為偶數：

先造  $H_{n,k-1}$ ，然後將  $i, i+n/2$  連邊、其中  $1 \leq i \leq n/2$ 。

3.  $k$  為奇數,  $n$  為奇數:

先造  $H_{n,k-1}$ , 然後將  $0$  與  $(n\pm 1)/2$  各連一條邊、再將  $i, i + \frac{n+1}{2}$  連邊、其中  $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ 。

圖 5.11 展示這三種不同的情況。

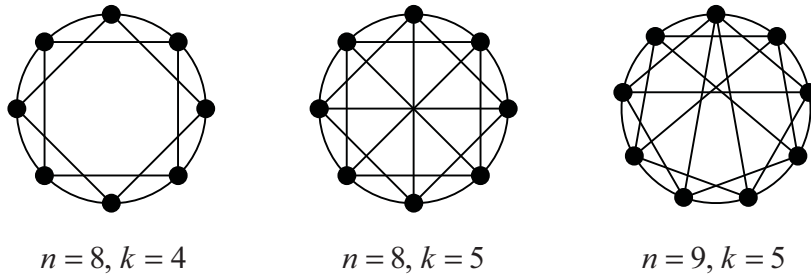


圖 5.11 : Harary 構造法。

**定理 5.22 (Harary, 1962 [5]):** 上述構造法造出的是邊數最少的  $n$  點  $k$ -連通圖。

**證明:** 直接計算可知造出來的圖確實有  $\lceil nk/2 \rceil$  條邊, 因此我們只需證明它們的連通度至少為  $k$  即可。利用反證法, 假設存在一個截集  $S$  使得  $|S| < k$ , 則我們從  $H_{n,k} - S$  的兩個不同部分中各取一點為  $i$  和  $j$ 。令

$$U = \{i, i+1, \dots, j-1, j\} \pmod{n}, V = \{j, j+1, \dots, i-1, i\} \pmod{n},$$

不失一般性可以假設  $|U \cap S| < k/2$ 。這麼一來,  $U - S$  就形成了一個序列

$$i = u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_m = j,$$

其相鄰兩項的差不超過  $k/2$ 。當  $k$  為偶數時, 根據造法, 這個序列相鄰兩點之間都有連邊, 因此是一個路徑, 這與  $i$  和  $j$  來自不同部分矛盾。如果  $k$  是奇數而  $|U \cap S| < (k-1)/2$ , 那這樣的路徑也是存在的。

只有當  $k$  是奇數且  $|U \cap S| = |V \cap S| = (k-1)/2$  的時候這樣的路徑才可能不存在, 且此時  $U$  所對應的序列必須是除了某兩項間隔為  $(k-1)/2$  以外, 其他任兩項的間隔都是 1;  $V$  的情況亦同。這就表示,  $i$  和  $j$  所屬的連通部分各自都是編號連續的點所構成, 如圖 5.12 所示。

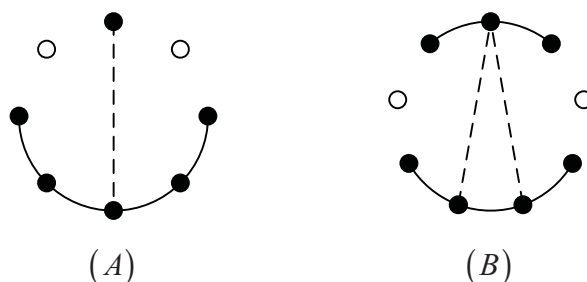


圖 5.12：(A) 為  $n$  是偶數的情況，(B) 為  $n$  是奇數的情況。其中白點表示  $S$ 。

可是，這麼一來易看出  $U$  跟  $V$  一定藉由連往對面的邊連接；其中 (B) 的情況中的兩條邊至少會有一條出現。這就表示圖仍是連通的，仍得到矛盾。 ■

## 習題

5.1 對於下列兩個圖，分別求出其  $\kappa(G)$ ,  $\kappa'(G)$ ,  $\delta(G)$ 。

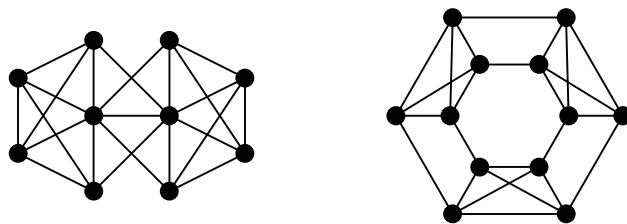


圖 5.13：兩個連通圖。

5.2 在  $K_{m,n}$  當中，令  $S$  是由二部分其中一邊的  $a$  個點和另一邊的  $b$  個點所組成。

(1) 以  $a, b, m, n$  表示出  $||[S, \bar{S}]||$ 。

(2) 利用 (1) 和計數論證證明  $\kappa'(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$ 。

(3) 證明  $K_{3,3}$  的任何七條邊都構成其切斷集、但沒有七條邊構成邊截集。

5.3 對於任意的  $k, l, m$  使得  $0 < k \leq l \leq m$ ，構造出一個簡單圖  $G$  使得  $\kappa(G) = k$ 、 $\kappa'(G) = l$  而  $\delta(G) = m$ 。

5.4 證明若  $\delta(G) \geq n(G) - 2$  則  $\kappa(G) = \delta(G)$ ，並在  $n \geq 4$  時構造一個  $n$  點的圖  $G$  使得  $\delta(G) = n - 3$  而  $\kappa(G) < n - 3$ 。

5.5 試證明或否定下面敘述：如果一個直徑為 2 的圖有截點，則其補圖有孤立點。

5.6 證明當  $\Delta(G) \leq 3$  的時候都有  $\kappa(G) = \kappa'(G)$ （這推廣了定理 5.6）。

5.7 設  $G = (V, E)$ 、其中  $V = \{1, 2, \dots, 11\}$ 、 $E = \{ij : \text{GCD}(i, j) > 1\}$ 、其中 GCD 表示最大公因數。決定出  $G$  的區塊。

- 5.8 所謂的**仙人掌** (cactus) 是指每個區塊都是邊或圈的連通圖，如圖 5.14 所示。試證一棵有  $n$  點的仙人掌至多有  $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$  條邊。

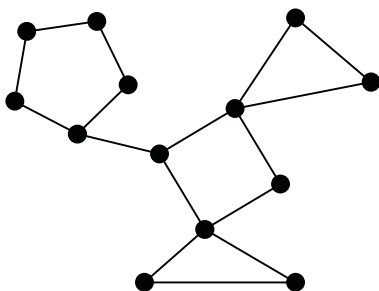


圖 5.14：仙人掌。

- 5.9 證明一個圖的每一點都是偶點、若且唯若其每一個區塊都有 Euler 迴路。
- 5.10 證明一個圖是 2-連通、若且唯若對於任三個相異點  $(x, y, z)$  都存在通過  $y$  的  $x$ - $z$  路徑。
- 5.11 所謂一個 2-連通圖的**貪求耳分解** (greedy ear decomposition) 是指一個從一個最長的圈開始、並逐次加上剩下的圖中最長的耳朵的耳分解。利用貪求耳分解證明每個 2-連通、爪-免除的圖  $G$  皆包含有  $\lfloor n(G)/3 \rfloor$  個兩兩互斥的  $P_3$ 。
- 5.12 利用 Menger 定理證明對 3-正則圖  $G$  有  $\kappa(G) = \kappa'(G)$ 。
- 5.13 令  $G$  是一個沒有孤立點的圖。證明若  $G$  沒有偶圈，則  $G$  的每個區塊都是一條邊或一個奇圈。
- 5.14 對於超立方  $Q_k$ ，藉由具體對任兩點  $x, y$  構造出  $k$  條兩兩內部互斥的  $x$ - $y$  路徑的方式，證明它是  $k$ -連通的。
- 5.15 假設  $\kappa(G) = k$  而  $\text{diam}(G) = d$ 。證明  $n(G) \geq k(d-1) + 2$  且  $\alpha(G) \geq \lceil (1+d)/2 \rceil$ 。對於  $k \geq 1$  和  $d \geq 2$ ，構造圖  $G$  使得  $\kappa(G) = k$  且  $\text{diam}(G) = d$  並符合兩個式子中的等式情況。
- 5.16 利用 Menger 定理 (當  $x$  和  $y$  不相鄰時有  $\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$ ) 證明 König-Egerváry 定理 (若  $G$  為二分圖則  $\alpha'(G) = \beta(G)$ )。
- 5.17 (1) 我們說一個  $k$ -連通圖是**極小  $k$ -連通的** (minimally  $k$ -connected)，如果將它的任何一條邊去掉都會破壞其  $k$ -連通性的話。Halin 5.18[4] 曾證明對極小  $k$ -連通圖  $G$  來說必有  $\delta(G) = k$ 。試利用耳分解證明  $k = 2$  的情況。
- (2) 類似地，一個極小  $k$ -邊連通圖就是指去掉任何一邊都會破壞其  $k$ -邊連通性的  $k$ -邊連通圖。證明對任何這樣的圖來說也都有  $\delta(G) = k$ 。
- 5.18 (1) 令  $G$  有  $n$  個點，每點度數分別為  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ 。證明若  $d_j \geq j + k$  對所有  $j \leq n - 1 - d_{n-k}$  皆成立，則  $G$  為  $(k+1)$ -連通的。

- (2) 假定  $0 \leq j+k \leq n$ 。試構造一個  $n$  點的圖  $G$  使得  $\kappa(G) \leq k$  且  $G$  有  $j$  個度數為  $j+k-1$  的點、 $n-j-k$  個度數為  $n-j-1$  的點、以及  $k$  個度數為  $n-1$  的點。這個結果就什麼角度而言說明了 (1) 已經是最佳結論了？

## 附註

- ① 如果  $x$  和  $y$  本身相鄰的話， $x$ - $y$  截集就不存在，此時我們定  $\kappa(x, y) = \infty$ 。

## 參考文獻

- [1] G. A. Dirac, In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen, *Math. Nachr.*, vol. 22 (1960), pp. 61-85.
- [2] S. Even and R. E. Tarjan, Network flow and testing graph connectivity, *SIAM J. Comput.*, vol. 4 (1975), no. 4, pp. 507-518.
- [3] H. N. Gabow, Using expander graphs to find vertex connectivity, *J. ACM*, vol. 53 (2006), no. 5, pp. 800-844 (electronic).
- [4] R. Halin, A theorem on  $n$ -connected graphs, *J. Comb. Th.*, vol. 7 (1969), pp. 150-154.
- [5] F. Harary, The maximum connectivity of a graph, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 48 (1962), pp. 1142-1146.
- [6] S. Khuller, Approximation algorithms for finding highly connected subgraphs, In D. S. Hochbaum, ed., *Approximation Algorithms for NP-Hard Problems*, 1996, pp. 236-265.
- [7] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.*, vol. 10 (1927), pp. 95-115.
- [8] H. E. Robbins, A theorem on graphs, with an application to a problem in traffic control, *Amer. Math. Monthly*, vol. 46 (1939), pp. 281-283.
- [9] H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.*, vol. 54 (1932), pp. 150-168.
- [10] L. Zhao, H. Nagamochi, T. Ibaraki; A linear time  $5/3$ -approximation for the minimum strongly-connected spanning subgraph problem, *Inform. Process. Lett.*, vol. 86 (2003), no. 2, pp. 63-70.