第 4 章　匹配

是前生註定姻緣莫錯過，
願天下有情人終成眷屬。
– 古諺

4.1.　婚姻問題面面觀

匹配問題就是配對問題， 或著是婚姻問題， 也可以視爲委員會推派代表的問題、 就是**相異代表系**（System of Distinct Representatives、縮寫爲 SDR）問題， 甚至叫做**橫截理論**（Transversal Theory）[22]。

在委員會推派代表的問題裏， 某個團體中的一群人， 組成若干個性質不一的委員會， 每個人可能參加幾個不同的委員會， 視個人意願而定。 問題是， 能否每個委員會各推派一位代表出來共同議事； 推派代表的前題是， 不同委員會推派出來的代表要相異， 所以有相異代表的名稱。

再以婚姻問題來闡述， 因爲這樣可以問更多面相的問題。 婚姻是人生的大事， 有一群男生和女生， 都已經到了適婚年齡， 但是每一位女生都不願意草率地處理自己的終生大事， 往往會排除一些她不喜歡的男生， 於是， 實際上有一個她認爲可以接受爲配偶的名單； 當然， 相對地， 這些名單中的男生也要喜歡她， 不然就不會放在名單上。要成爲一個成功的月下老人， 要問的是：

1. 有沒有可能湊合這些男女， 使得每一位女生都和某一位她認可的男生結婚？

很容易就可以看出這並非永遠可能， 例如有好幾個女生的名單上同時只有同一個男生，這樣就沒辦法成功配對 （假定一夫多妻制在這邊是行不通的）。 既然這並非永遠可能，

那麼， 就必須改問：

2. 在什麼條件下可以滿足每一位女生的心願？
3. 一般而言最多可以滿足幾位女生的心願？
4. 若撮合一對男女月老就可以獲得一個紅包，如何配對月老可以獲得最多賞錢？
5. 如何匹配才會使得婚後這些家庭最爲美滿？
6. 考慮室友的配對（這時候就沒有兩性之分）時上述問題的答案爲何？

比起現實生活， 這裡是把整個故事情節稍微簡化了許多， 不過這卻是許多現實的社會或經濟問題的基本模型。 據說， König 在二十世紀初就是因爲著迷於這些問題， 才致力於圖論的研究， 進而在 1936 年寫下圖論的第一本書。 本章將用圖論的語言來描述並處理上述的問題。

考慮一個二分圖、 其一部分點代表所有這 n 個女生、 另一部分代表男生、 可以配對的男女之間連一條邊。

第 1 個問題是要問， 能不能找到 n 條兩兩不相交的邊？

第 2 個問題是要問， 能找到的條件爲何？

第 3 個問題是要問， 如果不能， 最多能找到幾條兩兩不相交的邊？

第 4 個問題涉及美滿的定義， 並沒有標準答案， 本章最後將談到穩定婚姻問題。

第 5 個問題是考慮邊有權重的問題。

第 6 個問題是考慮一般圖的問題。

4.2. 匹配與完美匹配

在一個圖 G 中， 一些兩兩不相鄰的邊所成的集合 M 稱爲 G 的一個**匹配**（matching），M 中每條邊的每個端點稱爲是**被 M 許配**（M-saturated）。 如果 G 的每個點都被 M 許配， 則稱 M 爲一個**完美匹配**（perfect matching）。 在所有 G 的匹配當中邊數最多的， 稱爲是 G 的一個**最大匹配**（maximum matching）。 完美匹配一定是最大的， 反之則不一定。

圖 4.1 中， G 的粗線表示 G 的一個完美匹配， 而那實際上也是唯一的完美匹配

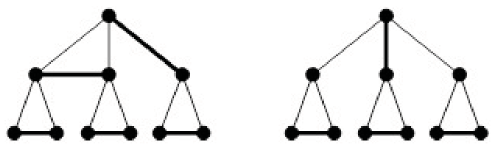

圖 4.1: 圖 G 中的粗線表示一個完美匹配、圖 H 中的粗線表示一個最大匹配。

（請檢驗此事）。不難看出 H 不會有完美匹配，其中的粗線表示一個最大匹配；H 總共有 27 個不同的最大匹配（請有系統地說明此事）。基本上重邊並不影響有沒有匹配的事情，因爲任何匹配都只會從一組重邊中至多取出一邊，因此本章雖然是針對簡單圖在討論，但是所有的結論套用到重圖上也都會成立。

例 4.1. 完全二分圖 $K_{n,n}$ 的完美匹配的個數。

解： 假設 $K_{n,n}$ 的點集分成 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 和 $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ 兩部分，則 $K_{n,n}$ 的完美匹配可以看成是 X 到 Y 的一對一映成函數，因此共有 $n!$ 個完美匹配。■

例 4.2. 完全圖 K_n 的完美匹配的個數。

解： 假設 K_n 有 f_n 個完美匹配，而方便起見約定 $f_0 = 1$。完全圖要有完美匹配，點的數目必須是偶數，因此 $f_{2m-1} = 0$。要將 $2m$ 個人配對，可以先固定某一個人，則有 $2m-1$ 種方法可以將他和別人配對；剩下的 $2m-2$ 個人有 f_{2m-2} 種完美匹配的方法，因此就得到遞迴關係 $f_{2m} = (2m-1)f_{2m-2}$、當 $m \geq 1$ 時。由歸納法就可以得到 $f_{2m} = (2m-1)(2m-3)\ldots(3)(1) = (2m)!/(2^m m!)$，這種階乘記做 $(2m-1)!!$。■

例 4.3.（Bernoulli-Euler 錯放信封問題） 某人給 n 個人各寫了一封信，並準備了 n 個寫好對應收件人地址的信封。一個一般人可能比較不會問的怪問題是：有多少種方法可以把信紙放到信封中，使得所有的信紙都放錯了信封？

解： 令 G_n 是把 $K_{n,n}$ 去掉所有 x_iy_i $(1 \leq i \leq n)$ 這 n 條邊所成的圖，那麼 G_n 的完美匹配個數 g_n 就是這個問題的答案。

一開始顯然有 $g_1 = 0$ 而 $g_2 = 1$。一般而言，當 $n \geq 3$ 時，點 x_1 可以有 $n-1$ 種許配的方式，也就是可以和除了 y_1 以外的任何 y_i 相配。此時，如果對應的 x_i 配到了

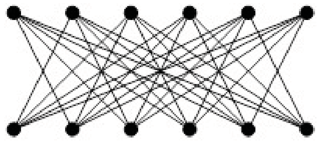

圖 4.2: G_6。

y_1， 那麼除了 x_1, x_i, y_1, y_i 這四點以外， 剩下的部分會是 G_{n-2}， 因此這種情況中一共會有 g_{n-2} 種完美匹配； 而如果 x_i 跟 y_1 不相配， 則在從 G_n 扣除 x_1, y_i 以及邊 x_iy_1 之後， 剩下的部分等同於 G_{n-1}， 因此一共有 g_{n-1} 種完美匹配。 這樣就得到遞迴關係

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 1, \quad g_n = (n-1)(g_{n-1} + g_{n-2}) \text{ 當 } n \geq 3\text{。}$$

若要解 g_n 的通式， 可以考慮將最後一個遞迴關係改寫

$$g_n - ng_{n-1} = -(g_{n-1} - (n-1)g_{n-2}) \text{ 當 } n \geq 3\text{。}$$

反覆套用上式， 即得到

$$g_n - ng_{n-1} = (-1)^{n-2}(g_2 - 2g_1) = (-1)^n\text{，}$$

或者可以將兩邊同除以 $n!$， 改寫為 $\frac{g_n}{n!} - \frac{g_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$， 然後將此式的 n 以 $2, 3, \ldots, n$ 代入並逐式求和， 便解得

$$g_n = n!\left(\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!}\right) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\text{。}$$

讀者可以自行驗證最後的等式成立。 其實最後這一個 g_n 的通式也可以從排列組合的觀點、應用排容原理算出來。 ■

一般而言一個圖不一定有完美匹配， 不過卻一定有最大匹配。 若能求得最大匹配， 自然就能知道這個圖是否有完美匹配了。 因此， 可以把焦點放在求最大匹配的問題上。 這邊會用底下這樣的重要工具。

假設 M 是圖 G 的一個匹配， 而 $P = v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\, e_3\, v_3\, \ldots\, v_{k-1}\, e_k\, v_k$ 是 G 中的一條路徑。 若所有下標為偶數或所有下標為奇數的邊 e_i 都在 M 中， 就說 P 是一條 **M-交錯路徑**（M-alternating path）。 若 k 是奇數， v_0 和 v_k 都未被 M 許配， 且所有偶數下標的 e_i 都在 M 中， 則稱 P 為一條 **M-可擴張路徑**（M-augmenting path）。

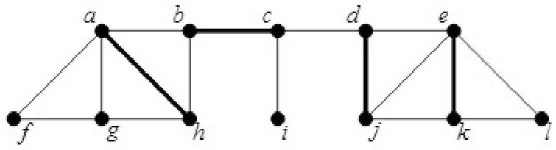

圖 4.3: $M = \{ah, bc, dj, ek\}$ 是 G 的一個匹配。

在圖 4.3 當中， $M = \{ah, bc, dj, ek\}$ 是圖 G 的一個匹配， 而其中 $P_1 = (a, h, b, c)$、$P_2 = (a, h, b, c, i)$、$P_3 = (f, a, h, b, c)$ 以及 $P_4 = (f, a, h, b, c, i)$ 都是 M-交錯路徑，同時 P_4 也是一條 M-可擴張路徑。

尋找一條 M-可擴張路徑 P 的用意在於， 可以藉由 P 將 M 更動成一個擁有更多條邊的匹配。 精確而言， 令 M' 是將 M 把 $P \cap M$ 的邊去掉、 再加上 $P \backslash M$ 的邊所成的邊集， 而這會是比 M 多一條邊的匹配。 用符號表示的話就是

$$M' = M \triangle P = (M \cup P) \backslash (M \cap P),$$

其中 $A \triangle B$ 稱爲 A 和 B 的**對稱差**（symmetric difference）。 值得注意的是， 這邊把 P 想像成是路徑的所有邊所成的集合。 於是， 透過這樣的操作， 圖 4.3 中的 M-可擴張路徑 P_4 就可以得到一個新的匹配 $M' = \{fa, hb, ci, dj, ek\}$。

根據上面的討論， 對於一個匹配 M 而言， 如果存在 M-可擴張路徑我們就知道 M 不會是最大匹配； 而反過來這也是對的：

定理 4.4. （**Berge [3]**） 設 M 是圖 G 的匹配， 則 M 是 G 的最大匹配的充要條件爲 G 中沒有 M-可擴張路徑。

證明： 定理的必要性如前面所述。 反過來， 假設 G 裡沒有 M-可擴張路徑， 則對於任何 G 中的匹配 M' 來說， 考慮 $M \triangle M'$ 所構成的圖 H， 易看出有 $\Delta(H) \leq 2$， 所以 H 的任何連通部分要不是路徑就是圈。 如果是路徑， 易看出一定是 M-交錯路徑， 但根據假設， 這不會是 M-可擴張路徑， 因此這條路徑中屬於 M 的邊必不少於屬於 M' 的那些邊。 如果是圈， 則這個圈中屬於 M 的邊跟屬於 M' 的邊是一樣多的。 統整起來得到 $|M| \geq |M'|$， 因此就確定了 M 是最大匹配。 ■

Berge 定理雖然給了最大匹配的條件一個刻畫， 但這還不夠好用。 主要的問題在

於， 給定一個匹配 M， 要檢查有沒有 M-可擴張路徑並不完全容易， 而且一般來說，希望能夠得到一個以 G 的結構來描述的定理。

4.3. 二分圖匹配

在本章一開始的婚姻問題當中， 如果將這些男生女生分做兩邊當作點集， 然後將互相認爲可以結婚的一對連邊， 那麼問題就可以轉化成二分圖的匹配問題； 因爲此時邊都只存在於男生和女生之間 （爲了避免思想太過於前衛，必須假設這是對的）。 精確而言，以 X 表示所有女生的集合， Y 表示所有男生的集合， 而如果 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 可以相配， 就連一條邊 xy 以表示之， 於是這樣構成了一個二分圖 G， 其二部份即爲 X 跟 Y。 如此一來， 本章開頭的前三個問題就相當於：

1. 圖 G 是否有一個匹配 M 許配了 X 的每一點（稱這樣的匹配爲 **X-完美匹配**）？
2. 什麼條件下 G 有 X-完美匹配？
3. 圖 G 的最大匹配有幾條邊？

前面已經談到了一種狀況是， 有較多的女生同時只喜歡較少的男生， 這種狀況下必定不可能有辦法讓所有女生都找到對象， 所以 G 存在 X-完美匹配的一個必要條件是，對於任何 $S \subseteq X$， 如果我們以 $N(S)$ 表示 S 當中的點之所有鄰居所構成的集合、即

$$N(S) = \{y : y \text{ 跟某個 } x \in S \text{ 相鄰}\}$$

的話[1]， 那麼都必須要有 $|N(S)| \geq |S|$ 才行。

有趣的是， 這也是充分條件。 合起來就是 P. Hall 在 1935 年提出的著名定理：

定理 4.5.（P. Hall [14]） 假設二分圖 G 的二部份是 X 和 Y， 則 G 中有 X-完美匹配的充要條件是， 對於任何 $S \subseteq X$ 都有 $|N(S)| \geq |S|$（此條件稱爲 **Hall 條件**）。

證明： 定理的必要性如前面所述。 至於充分性， 底下將給出三種不同的證明。

證法一： 對 $k = |X|$ 做數學歸納法。 當 $k = 1$ 時， 因爲 $|N(X)| \geq |X| = 1$， 把 X 中唯一的點對到它的任一鄰居就得到了 X-完美匹配。 今假設 $k \geq 2$， 考慮兩種情況。

[1] 也可以寫成 $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$。 不過， 有些作者主張應該要把本身給扣除掉， 也就說他們會定義成 $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) \backslash S$。 當然如果 S 內部沒有連邊的話這兩種定義是沒有差別的。

第一種情況是， 對所有 $\emptyset \neq S \subset X$ 恆有 $|N(S)| \geq |S|+1$。 任選一點 $x \in X$，並取它的一個鄰居 $y \in Y$， 然後令 $G' = G - \{x, y\}$， 這也是二分圖， 其二部份分別爲 $X' = X - x$ 和 $Y' = Y -$。 對於任何 $S \subseteq X'$ 恆有 $N_{G'}(S) \supseteq N_G(S) - y$， 因此

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|,$$

故由歸納假設， G' 有一個 X'-完美匹配， 把它加上 xy 就得到了 G 的 X-完美匹配。

第二種情況是， 假設存在某個 $\emptyset \neq S^* \subset X$ 使得 $|N(S^*)| = |S^*|$。 此時考慮兩個圖， 一個是由 $S^* \cup N(S^*)$ 所導出的子圖 G_1， 另一個是由 $(X - S^*) \cup (Y - N(S^*))$ 所導出的子圖 G_2， 並記對應的二部份爲 $X_1 = S^*, Y_1 = N(S^*)$ 和 $X_2 = X - S^*, Y_2 = Y - N(S^*)$。 G_1 滿足 Hall 條件， 因爲對於每個 $S \subseteq X_1$ 恆有 $|N_{G_1}(S)| = |N_G(S)| \geq |S|$，所以根據歸納假設 G_1 有 X_1-完美匹配。 G_2 也滿足 Hall 條件， 因爲對每個 $S \subseteq X_2$ 有

$$|N_{G_2}(S)| + |N_G(S^*)| = |N_G(S \cup S^*)| \geq |S \cup S^*| \geq |S| + |S^*|,$$

但是 $|N_G(S^*)| = |S^*|$， 所以 $|N_{G_2}(S)| \geq |S|$ 成立， 因而 G_2 有 X_2-完美匹配。 兩個合起來就得到 G 的 X-完美匹配了。 □

證法二： 不妨假設 G 是滿足 Hall 條件的最小圖， 也就是說， 在 G 中去掉任何一條邊都會導致 Hall 條件不滿足。 如果 G 不是這樣的圖， 就逐一把邊去掉直到它滿足這個性質爲止。 在這種前提下， 只需證明 X 的每一點的度數都是 1（易知必定大於 0）即可； 因爲， 這麼一來根據 Hall 條件有 $N(X)| = |X|$、即 X 中每一點的鄰居都不相同， 那麼立刻就得到了一個 X-完美匹配。 假設有一點 $x \in X$ 有兩個鄰居 $y_1, y_2 \in Y$，則考慮 $G_i = G - xy_i$、$i = 1, 2$ 的這兩個圖。 根據假設， G 滿足 Hall 條件但 G_1, G_2 不滿足， 所以存在 $S_1, S_2 \subseteq X$ 使得

$$|N_G(S_i)| \geq |S_i| > N_{G_i}(S_i) \geq |N_G(S_i)| - 1、i = 1, 2,$$

所以得到 $|N_G(S_i)| = |S_i|$ 且 $N_{G_i}(S_i) = |N_G(S_i)| - 1 = |S_i| - 1$； 事實上可以看出有 $x \in S_i$、$y_i \in N_G(S_i)$ 以及 $N_{G_i}(S_i) = N_G(S_i) - \{y_i\}$。 所以得到下面這樣的不等式，矛盾。

$$\begin{aligned}|S_1|-1+|S_2|-1 &= |N_{G_1}(S_1)|+|N_{G_2}(S_2)| \\ &= |N_{G_1}(S_1)\cup N_{G_2}(S_2)|+|N_{G_1}(S_1)\cap N_{G_2}(S_2)| \\ &\geq |N_G(S_1\cup S_2)|+|N_G(S_1\cap S_2-\{x\})| \\ &\geq |S_1\cup S_2|+|S_1\cap S_2-\{x\}| \\ &= |S_1|+|S_2|-1\text{。}\quad\square\end{aligned}$$

證法三： 假設 M 是 G 的一個最大匹配， 但存在一點 $x\in X$ 沒有被 M 許配。 令集合 $A=\{z\in V(G):$ 存在由 x 到 z 的 M-交錯路徑$\}$， 由定義可以知道下面幾點事實：

1. $x\in A$。
2. 對於 $A\cap X-\{x\}$ 中的任一點 u， 必存在對應的一點 $u'\in A\cap Y$ 使得 $uu'\in M$。
3. 對任何 $z\in A\cap X$，皆有 $N_G(z)\subseteq A$。
4. $A\cap Y$ 中的每一點 y 一定都被 M 許配， 否則就存在一條 x 到 y 的 M-可擴張路徑， 和 M 是最大匹配的假設矛盾； 因此， 存在 $u\in A\cap X-\{x\}$ 使得 $y=u'$。

綜合上述四點， 可以得到 $|N(A\cap X)|=|A\cap Y|=|A\cap X|-1$， 這和假設矛盾， 所以 M 必須是一個 X-完美匹配。 $\square$ ■

推論 4.6. 對於正整數 k，任何 k-正則二分圖恆有完美匹配。

證明： 只要驗證 Hall 條件成立即可。 對任何 $S\subseteq X$， 連接 S 和 $N(S)$ 的邊恰有 $k|S|$ 條， 而每一 $N(S)$ 中的點最多只和其中 k 條相連， 因此 $|N(S)|\geq k|S|/k=|S|$。 ■

值得注意的是，上面的推論對於 k-正則二分重圖也是對的， 這在第 **??** 章會用到。

定理 4.5 的三種證法各有其特點。 第二種方法是利用良序原理， 簡潔可愛。 第一種方法是最傳統的（強）數學歸納法， 看起來比第二種方法略爲複雜， 不過卻可以利用同樣的手法來證明定量的定理。 將 X 中的度數條件改變， 可以得到各種不同的結果。

定理 4.7. 假設二分圖 G 的二部份爲 X 和 Y。 如果 X 中每個點的度數至少爲 2， 而且 $|N(S)|\geq|S|$ 對所有 $S\subseteq X$ 恆成立， 則 G 最少有兩個不同的 X-完美匹配。

證明： 證明方式如同定理 4.5 的第一種證明， 其中在第一種情況時 y 至少有兩種選法，而對應的兩種 G' 皆有 X'-完美匹配， 因此就得到 G 至少有兩個 X-完美匹配。 而第二種情況中， G_1 有兩個 X_1-完美匹配（其中對 $x \in S^*$ 皆有 $d_{G_1}(x) = d_G(x)$）， 而 G_2 至少有一個 X_2-完美匹配（其中對 $x \in X - S^*$ 有可能 $d_{G_2}(x) < d_G(x)$）， 所以合起來 G 至少也有兩個 X-完美匹配。 ■

定理的第三種證法最有利於設計演算法。 在定理的證明中， 是一下直指最大匹配 M， 而爲了設計成演算法， 要從 $M = \emptyset$ 開始， 逐次尋找 M-可擴張路徑， 直到做不下去爲止。 假設 G 是一個二分圖， 其二部份爲 X 和 Y。 下面的方法是由 König 和 Egerváry 提出來的 [2]。

演算法 4.8.（交錯路徑演算法）

輸入：以 X 和 Y 爲其二部份的一個二分圖 G。

輸出：圖 G 的一個最大匹配 M。

方法：

1. 令 $M \leftarrow \emptyset$；
2. 對所有 $v \in X \cup Y$ 設定其指標 $P(v) \leftarrow 0$；
3. 令 $S \leftarrow \{X$ 當中未被 M 許配的點 $\}$；
4. 每當（S 中有點時取出一點 v）：
5. { 當 $v \in X$ 時改以 a 稱呼 v
6. { 若 $P(a) = 0$，則設定 $P(a) \leftarrow a$；
7. 對所有（$b \in N(a)$ 使得 $P(b) = 0$）{ 設 $P(b) \leftarrow a$； $S \leftarrow S \cup \{b\}$；} }
8. 當 $v \in Y$ 時時改以 b 稱呼 v：
9. { 若（b 被 M 許配給 $a \in X$）{ 設 $P(a) \leftarrow b$； $S \leftarrow S \cup \{a\}$；}
10. 否則 由 b、$P(b)$、$P(P(b)) \ldots$ 一直找到指向自己的點時，便會得到一條 M-可擴張路徑 P，令 $M = M \triangle P$ ；回到步驟 2 重做； }

}

[2]有些中文著作把這個演算法叫做匈牙利演算法， 這是不對的。 匈牙利演算法一般都是指稍後的演算法 4.11 才對。

不妨先來看一個例子以了解這個演算法的運作方式。 考慮圖 4.4， 其中頂點的名字由 v_1 到 v_{10}， 而每一條線都是邊， 且粗線條表示到達某個階段時， 選出來的 M。 此時剛結束了前一次的迴圈操作並回到步驟 2。

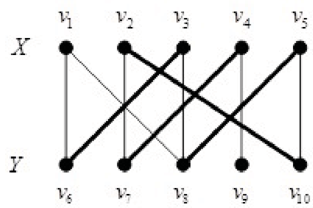

圖 4.4: 一個二分圖運行交錯路徑演算法的某個階段。

執行完步驟 2 之後， 每個頂點都沒有指向任何別的點， 如圖 4.5 左圖所示。 其中我們將 S 當中的點圈起來。 對 v_1 進行完一次迴圈操作後， 情形如圖 4.5 右圖所示，其中用箭頭來表示每個點的指標。

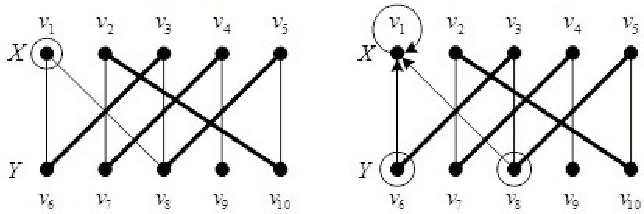

圖 4.5: 初始狀態以及進行過第一次迴圈後的狀態。

接下來，對 v_6 跟 v_8 分別進行一次操作後， 狀態如圖 4.6 左圖所示。 然後 v_3 的鄰居都已經有指標對象了， 因此不會進行任何操作。 從 v_5 開始繼續進行 5 次迴圈操作後， 會得到如圖 4.6 右圖的結果。

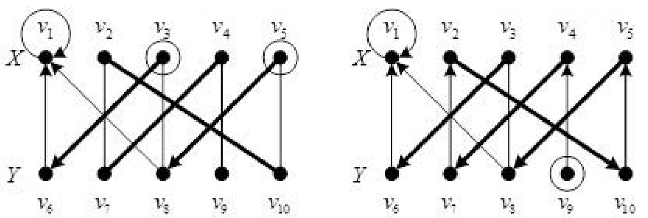

圖 4.6: 進行完第三次迴圈跟第八次迴圈之後的狀態。

而此時找到了 $v_9 \in Y$ 並沒有被 M 許配。 於是，從 v_9 開始逐點循著指標值往回找， 就會得到 $v_9\, v_4\, v_7\, v_2\, v_{10}\, v_5\, v_8\, v_1$ 是一個 M-可擴張路徑， 將這個路徑換過來之後，就得到如圖 4.7 所示的擴充後的 M。

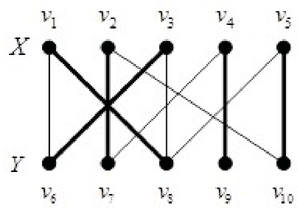

圖 4.7: 擴充之後的 M。

完成這個動作後演算法會回到步驟 2。 此時因為 X 的所有點都被許配， 因此演算法就會結束並輸出 M。 整個運作方式大致就是如此。

這個演算法的時間複雜度為 $O(|X||E|)$， 因為步驟 2 至多被執行了 $|X|$ 次， 而每次至多花費 $|E|$ 的時間找出 M-可擴張路徑。 直觀上頗容易接受這個演算法的正確性，因為如果步驟 4 的迴圈執行完畢之後都沒有發生步驟 10 的情況， 那似乎就意味著 M-可擴張路徑不存在， 從而根據 Berge 定理， M 是一個最大匹配。 只不過， 光靠這個演算法的迴圈過程是不會找遍所有的路徑的， 所以到底有沒有遺漏也很難說。 尤其是在執行迴圈的時候並沒有限定要以什麼樣的順序來取 v （雖然在上面的例子中是按照點的編號順序， 但不一定要如此）， 這使得要直接應用 Berge 定理證明這個演算法的正確性更加不方便。

因此， 要換一個方法來證明這個演算法的正確性。 先介紹一個與匹配對偶的觀念。圖 $G=(V,E)$ 的一個**點覆蓋**（vertex cover）是一個點集 $C \subseteq V$， 使得 E 中的每一條邊 xy 都與 C 中的某點相連， 即 $\{x,y\} \cap C \neq \emptyset$。 對於任一圖的一個匹配 M 及一個點覆蓋 C， 每一個 $e \in M$ 均可選定其一端點 $x_e \in C$， 於是 $e \mapsto x_e$ 是一個從 M 到 C 的 1-1 函數 （因為 M 是一個匹配， 當 $e \neq e'$ 時必有 $x_e \neq x_{e'}$）， 因此恆有 $|M| \leq |C|$，所以有下面的**弱對偶不等式**（weak duality inequality）

$$\max_M |M| \leq \min_C |C|,$$

其中 M 過所有 G 的匹配而 C 過所有 G 的點覆蓋。

現在來說明這個演算法的正確性。 假設 M^* 是這個演算法所輸出的邊集， 定義 $C^* = \{a \in X: \ a$ 無指標$\} \cup \{a \in Y: \ a$ 有指標$\}$， 其中指標的部分以演算法最後停下來之前的狀態爲準。 因爲每次 M 都是對一個 M-可擴張路徑作對稱差， 故 M^* 必定是一個匹配。 而 C^* 是一個點覆蓋。 如果不是， 則存在 $xy \in E, x \in X, y \in Y$ 使得 $x, y \notin C$， 因此 x 有指標且 y 無指標。 x 有指標表示 x 曾經屬於 S 過。 如果 $xy \in M$， 那只有可能是迴圈之前在運作 y 的時候將 x 放入 S， 但是這麼一來 y 就不可能沒有指標， 所以 $xy \notin M$。 但這麼一來迴圈在運作 x 的時候必定會將 y 的指標設爲 x，也矛盾， 因此就得到 C^* 是一個點覆蓋。

接著， 宣稱有 $|C^*| \leq |M^*|$。 要證明這一點， 只需找到一個從 C^* 到 M^* 的 1-1 函數即可。 當 $a \in X$ 使得 a 沒有指標時， a 必定被 M^* 許配（不然 a 的指標會在接下來的步驟中立刻被設爲自己）， 因此可以作映射 $a \mapsto e_a$， 其中 e_a 是 M^* 中與 a 相連的邊。 當 $a \in Y$ 使得 a 有指標時， a 也必定被 M^* 許配（不然將找到一條 M^*-可擴張路徑）， 所以同樣可以作映射 $a \mapsto e_a$； 這個映法不會跟前一種情況衝突， 因爲 a 有指標表示跟 a 配對的點 a' 的指標必定指向 a。

於是， 結合上面的結論， 會得到

$$|M^*| \leq \max_M |M| \leq \min_C |C| \leq |C^*| \leq |M^*|,$$

因而所有的不等式必須是等式， 故 M^* 是一個最大匹配而 C^* 是一個最小覆蓋。 這同時證明了**強對偶等式**（strong duality equality）：

定理 4.9.（König-Egerváry 定理 [15]） 對於二分圖 G， 恆有 $\max_M |M| = \min_C |C|$， 其中 M 過所有 G 的匹配而 C 過 G 的點覆蓋。

另外一對和匹配與點覆蓋相似的概念是獨立集與邊覆蓋。 圖 $G = (V, E)$ 的一個**獨立集**（independent set）或**穩定集**（stable set）是一些兩兩不相鄰的點所成的集合，而一個**邊覆蓋**（edge cover）則是一個邊集 $C' \subseteq E$、使得任何 $x \in V$ 都與 C' 中至少一邊相連； 一個圖存在邊覆蓋的條件是它沒有孤立點。 考慮上述四種概念大小的極值：

$\alpha(G)$ 表示圖 G 中最大的獨立集之點數（這又稱爲穩定數，stability number）。

$\alpha'(G)$ 表示圖 G 中最大匹配之邊數。

$\beta(G)$ 表示圖 G 中最小點覆蓋之點數。

$\beta'(G)$ 表示圖 G 中最小邊覆蓋之邊數。

利用這些符號，König-Egerváry 定理中的公式就可以記爲 $\alpha'(G) = \beta(G)$。 而這些參數的其他關係式可參見習題 4.13。

4.4. 加權二分圖匹配

再來思考一個如下的具體問題， 這也跟二分圖匹配有關。

假設現在有 n 塊農地， 以及 n 種作物要栽種。 因爲農地條件的不同， 作物在不同農地成長的收益也會不同。 試問在一塊農地種植一種作物的規劃下， 要如何分配農地和作物的組合， 才能使得總收益最大？

如果以圖論方式描述， 可以構造一個完全二分圖、一部分是 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 表示農地、 而另一部分是 $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ 表示作物。 對於每條邊 x_iy_j， 給予一個非負的權重 $w_{i,j}$ 表示將兩者搭配所能得到的收益。 這麼一來， 上面的問題就相當於是要找一個完美匹配 M、使得權重總和 $w(M) = \sum_{x_iy_j \in M} w_{i,j}$ 最大。 這樣的問題稱爲**分配問題**（assignment problem）。 這個問題可以有很多變型， 例如根據工作的效率分配工人和任務、根據距離的遠近分配倉庫和工廠等等， 具體應用很多。

另外一個問題是這樣。 現在政府突然宣稱國內農業收成過剩， 爲了加以控制， 政府將補助所有停止生產的單位。 如果停止使用農地 x_i， 那政府將支付 u_i 的金額。 如果停止栽種作物 y_j， 那政府將支付 v_j 的金額。 顯然， 如果 $u_i + v_j < w_{i,j}$， 那當然寧可繼續栽種也不要領政府的補助金。 因此， 如果政府希望停止一切栽種行爲， 就必須使得 $u_i + v_j \geq w_{i,j}$ 對所有 i, j 都成立。 此時對政府而言， 問題在於要如何選擇 u_i 和 v_j 才能達到停止所有農地及栽種作用生產的目的、 同時又使得 $\sum_i u_i + \sum_j v_j$ 最小。 滿足 $u_i + v_j \geq w_{i,j}$ 的一組數值 u_i, v_j 稱爲是一個**加權覆蓋**（weighted cover）， 以 (u, v) 表示， 而其總和 $c(u, v) = \sum_i u_i + \sum_j v_j$ 則稱爲是其**開銷**（cost）。

這兩個問題聽起來像是不同的問題， 其實有極密切的關係， 是成對偶的兩個問題。

引理 4.10. 設 $K_{n,n}$ 爲加權二分圖， 則對任何完美匹配 M 和加權覆蓋 (u, v) 都有 $c(u, v) \geq w(M)$。 這個等式成立若且唯若 M 是由一些使得 $u_i + v_j = w_{i,j}$ 的邊 x_iy_j 所組成； 此時 M 和 (u, v) 都是最佳化的。

證明： 因爲 M 許配了每一個頂點， 因此將所有相對應的條件 $u_i+v_j \geq w_{i,j}$ 相加就得到 $c(u,v) \geq w(M)$。 而假如 $c(u,v)=w(M)$， 那所有用到的條件式都必須是等式； 此時因爲 (u,v) 的開銷不能再更小、M 的權重也不能更大， 所以兩者都是最佳化的。 ■

根據這個引理， 爲解決前述兩問題就必須著眼那些使得 $u_i+v_j=w_{i,j}$ 成立的邊。對一個加權的 $K_{n,n}$ 和其加權覆蓋 (u,v)， 我們定義**相等子圖**（equality subgraph）$G_{u,v}$ 是其生成子圖、 包含了所有滿足 $u_i+v_j=w_{i,j}$ 的邊 x_iy_j。 底下介紹的演算法是由 Kuhn 和 Munkres 給出， 當中應用到了 4.3 節的交錯路徑演算法， 因此爲了紀念 König 和 Egerváry 兩人， Kuhn 將這個演算法命名爲**匈牙利演算法**（Hungarian algorithm）。

演算法 4.11. （匈牙利演算法）

輸入：加權的 $K_{n,n}$ 其中邊 x_iy_j 有非負權重 $w_{i,j}$。
輸出：最大權重的完美匹配 M 和最小開銷的加權覆蓋 (u,v)。
方法：
1. 令 (u,v) 使得 $u_i=\max_j w_{i,j}$、$v_j=0$；
2. 利用交錯路徑演算法找出 $G_{u,v}$ 的一個最大匹配 M；
3. 如果（M 是完美匹配）{傳回 M 是一個最大權重匹配、(u,v) 爲最小加權覆蓋；}
4. 不然 { 取 Q 爲 $G_{u,v}$ 的一個大小爲 $|M|$ 的點覆蓋；
5. 　　令 $\varepsilon=\min\{u_i+v_j-w_{i,j} : x_i\in X\backslash Q, y_j\in Y\backslash Q\}$；
6. 　　對所有的 $x_i\in X\backslash Q$，將 u_i 減少 ε；
7. 　　對所有的 $y_i\in Y\cap Q$，將 v_j 增加 ε；
8. 　　回到步驟 2 重做。}

在 4.3 節的論證中， 交錯路徑演算法除了可以傳回最大匹配外， 也可以順便傳回一個最小的點覆蓋， 這是步驟 4 當中用來產生 Q 的方法。

要證明這個演算法是正確的， 首先一開始 (u,v) 確實是一個加權覆蓋， 必須說明每次調整 (u,v) 之後它仍然是加權覆蓋。 以 (u',v') 表示調整之後的新值。 對於 $x_i\in X\cap Q$ 連到 $y_i\in Y\backslash Q$ 的邊來說 u_i,v_j 的值都沒有改變。 對於那些從 $x_i\in X\backslash Q$ 連到 $y_i\in Y\cap Q$ 的邊來說， 一加一減之後自然還是有 $u_i'+v_j'=u_i+v_j$。 如果 $x_i\in X\cap Q$ 且 $y_i\in Y\cap Q$， 那 $u_i'+v_j'=u_i+v_j+\varepsilon$、不減反增， 因此 $u_i'+v_j'\geq w_{i,j}$ 還是成立。

最後，如果 $x_i \in X\backslash Q$ 且 $y_i \in Y\backslash Q$，則 $u'_i + v'_j = u_i + v_j - \varepsilon$、根據 ε 的選法這還是大於等於 $w_{i,j}$ 的。所以確實 (u', v') 是加權覆蓋。

接著，演算法只有當 M 是完美匹配的時候才會停止，所以根據前面的引理，步驟 2 停止之後傳回的結果確實是最大匹配和最小加權覆蓋。所以只要說明這個演算法確實會停即可。事實上，整個演算法至多會在 n^2 次迴圈之後停止。首先注意到，每次調整完之後 M 所包含的邊還是會出現在新的 $G_{u,v}$ 當中（因爲 Q 是一個點覆蓋，所以 M 的每條邊 e 都至少會有一個端點 z_e 在 Q 中，此時 $e \mapsto z_e$ 會是 M 到 Q 的 1-1函數，但是由於 $|M| = |Q|$，所以這也是一個映成函數，得知 M 的每一邊 x_iy_j 恰有一端點在 Q 中，因此根據剛才所說的，$u'_i + v'_j$ 不變），所以每次新取出來的最大匹配 M 只會更大、絕不會變小。因爲一個匹配最多只能變大 n 次，只要證明 M 至多在 n 次迴圈之後一定會變大即可。

回憶起 4.3 節當中，交錯路徑演算法找出點覆蓋是在迴圈的最後一次、它會從 S 的所有點開始找 M-可擴張路徑，假設過程中它探索過的點集爲 U，那它給出的 Q 就等於 $(X\backslash U) \cup (Y \cap U)$。每次調整完之後，所有 M 的邊和那些 M-可擴張路徑中的邊都會被保留下來。而根據 ε 的取法，至少會有一條新的邊被加入 $G_{u,v}$ 中，那條邊是從 $X \cap U$ 連到 $Y\backslash U$ 的，因此如果新增的邊沒有導致一個 M-可擴張路徑，那它就會使得 $Y \cap U$ 變大。但是 $Y \cap U$ 最多只能變大 n 次，因此終究必須導致一個 M-可擴張路徑並使 M 變大。這樣就完成了證明。

4.5. 一般圖匹配

一般圖存在完美匹配的條件比二分圖更爲複雜。首先，對於一個圖 G 的各個連通部分，稱那些有奇數個點的部分爲**奇連通部分**，並把這樣的部分之個數用 $o(G)$ 表示。如果 G 有一個完美匹配 M，則對任何 $S \subseteq V(G)$ 而言，在 $G - S$ 的每個奇連通部分 P 當中都至少要有一點 x 使得它被 M 許配到 P 外面的一點 x^*，而且這個 x^* 必定屬於 S。由於不同的 x 對應的 x^* 皆不相同，因此就有 $o(G - S) \le |S|$ 對所有 $S \subseteq V(G)$ 皆成立。這個條件稱爲 **Tutte 條件**，它不僅是圖存在完美匹配的必要條件，同時也是充分條件。Tutte 原來的證明 [25] 方式是利用代數的 Pfaffian，而底下是採用 Lovász [19] 的證明方法。

定理 4.12.（**Tutte [25]**） 圖 G 存在完美匹配， 若且唯若 $o(G-S) \leq |S|$ 對所有 $S \subseteq V(G)$ 都成立。

證明： 必要性如同剛才所述。 要證明充分性， 假設存在一個圖 G 滿足 Tutte 條件但沒有完美匹配。 注意到對於任何 $S \subseteq V(G)$、在 $G-S$ 當中加入新的邊並不會使得奇連通部分的數目增加（爲什麼？）， 因此對於任何 $G' = G+e$， 都有 $o(G'-S) \leq o(G-S) \leq |S|$， 即 Tutte 條件仍然滿足。 於是不失一般性， 可以假設 G 只要再加入任何一條邊就會有完美匹配， 不然就逐漸加邊直到滿足這件事爲止。

假設 G 有 n 個點， 根據 Tutte 條件、若取 $S=\emptyset$ 即可知道 n 是偶數。 現在我們取 S 爲 G 當中所有度數爲 $n-1$ 的點、也就是跟其他所有點都相鄰的點之集合。 底下分成兩種情況討論， 要說明 G 實際上有完美匹配。

第一種情況是 $G-S$ 的各個連通部分都是完全圖。 此時可以將各個 $G-S$ 的連通部分當中的點任意匹配， 使得只有奇連通部分會各有一個點剩下。 但是由於 $o(G-S) \leq |S|$， 可以從 S 當中任意抓一些點出來來跟那些奇連通部分剩下的點匹配。 此刻還沒有被匹配的點只剩下 S 當中的某些點， 而這些點根據假設是兩兩相鄰的； 但是由於 n 是偶數， 剩下的點也有偶數個， 所以它們必定可以被匹配完成， 這樣就完成了 G 的完美匹配。

第二種情況是 $G-S$ 有某些連通部分不是完全圖， 於是易知存在不相鄰的兩點 x, z 使得它們有共同鄰居 $y \in G-S$。 而既然 $y \notin S$， 那就表示還有另一個點 w 使得 y 跟 w 不相鄰。 現在根據假設， 在 G 中加入任何一條邊都會導致有完美匹配， 因此可以令 M_1, M_2 分別爲 $G+xz$ 和 $G+yw$ 之後所得到的完美匹配。 設 $M_1 \triangle M_2$ 構成的圖爲 H， 於是 xz 跟 yw 都在 H 當中。 由定理 4.4 的證明當中可以看出 H 的各連通部分都是偶圈。 若能說明 $H \cup \{xy, yz\}$ 有一個不使用 xz 和 yw 的完美匹配， 那麼加上 $M_1 \cap M_2$ 就會得到 G 的完美匹配。 易看出， 假如 xz 跟 yw 在 H 當中不屬於同一個偶圈的話， H 必定有完美匹配， 因爲只要適當地在每一個偶圈中選取那些屬於 M_1 或 M_2 的邊即可。 現在假設 xz 跟 yw 屬於 H 當中的同一個偶圈 C。 從 y 開始， 沿著 w 的方向逐一取出屬於 M_1 的邊， 直到碰到 x 或 z 爲止。 假設碰到 z（如圖 4.8 所示）那麼就將 zy 這條邊選出來。 然後在 C 剩下的部分中選取那些屬於 M_2 的邊， 這樣就完成了一個滿足要求的完美匹配了。 ■

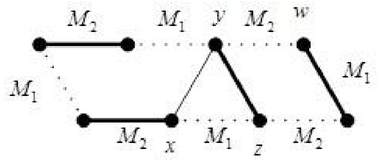

圖 4.8: 選取方式示意圖。

定理 4.13.（**Petersen [23]**）對於 3-正則連通圖 G，若去掉任何一條邊後 G 都仍是連通的，那 G 一定有完美匹配。

證明： 只要驗證 Tutte 條件成立即可。任給定 $S \subseteq V(G)$，考慮 $G-S$ 的各個奇連通部分 H，令 m 為 S 和 H 之間的邊數。H 內部的頂點度數和爲 $3|V(H)|-m$，不過作爲一個圖，H 內部的頂點度數和必須是偶數，所以 m 必爲奇數，因爲$|V(H|$ 爲奇數。而根據假設 $m \neq 1$（不然將這條邊去掉就會導致 G 不連通），故 $m \geq 3$。

然而，S 當中的每個點至多跟諸奇連部分連三條邊，而各個奇連通部分反過來則至少跟 S 當中的點連三條邊，故有 $3o(G-S) \leq 3|S|$，即 $o(G-S) \leq |S|$。 ■

可以將完美匹配的概念作如下的推廣。回憶起圖 G 的因圖即 G 的生成子圖，而一般地，圖 G 的 k-**因圖**（k-factor）即指 G 的一個 k-正則生成子圖。在這個定義下，一個圖的完美匹配跟它的一個 1-因圖本質上是相同的[3]，而容易看出，所謂的 2-因圖就是一個由若干不相交的圈所構成的生成子圖。

在這種想法之下，很自然地會去考慮在什麼情況下一個圖會具有 k-因圖。下面的定理是其中的一個特例。

定理 4.14.（**Petersen [23]**）對任何 $k \geq 1$、$2k$-正則圖必有 2-因圖。

證明： 只需討論圖是連通的情況即可。假定 G 是一個點集爲 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 的 $2k$-正則連通圖，於是 G 有 Euler 迴路 C。定義一個二分圖 H 如下：其二部份爲 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 和 $w_1, w_2, \ldots, w_n$，而 u_i 跟 w_j 相鄰若且唯若 v_j 在 C 上緊隨著 v_i 之後。由於 C 通過每個點恰好 k 次，H 爲 k-正則圖，根據推論 4.6，H 有完美匹配 M。M 的每一條邊都對應於 C 的某條邊，將這些對應的邊取出，連同 G 的所有點就構成了 G 的 2-因圖，因爲每個點都恰有一條在 C 上的「入邊」跟「出邊」被 M 選中。 ■

[3]精確而言，兩者的差別在於，匹配是邊的子集，而 1-因圖則是一個子圖。

4.6. Edmonds 的花被演算法

這一節要考慮在一般的圖中找尋匹配的演算法。

由 Berge 定理（定理 4.4）知道， 圖 G 中的一個匹配 M 爲最大匹配、若且唯若 G 中沒有 M-可擴張路徑。 理想的狀況是， 從任一個匹配 M 開始， 逐次尋找 M-可擴張路徑、增大 M、一直到做不下去爲止。 這樣的一個策略在 G 是二分圖的時候就是先前的交錯路徑演算法。 這個演算法很重要的是， 當從 S 當中取出一點 v 來進行操作時，會因爲 $v \in X$ 或 $v \in Y$ 而有不同的作法， 這主要是因爲 M-可擴張路徑是由不在 M 中的邊和 M 中的邊交錯排列出來的。

在一般圖 G 當中， 並沒有像二分圖那樣的點集分割 $V = X \cup Y$， 於是爲了模仿二分圖的演算法， 可以一面操作、一面賦予每個點 x 一個類別 $t(x)$。 一般來說， 當從 S 中取出一點 v 後， 如果 v 沒有指標，改稱 v 爲 a， 我們除了令它指向自己之外，更設 $t(a) = X$。 接下來， 在每次的迴圈當中， 若 $t(a) = X$， 就對所有沒有指標的 $b \in N(a)$ 執行「將 b 指向 a；$t(b) \leftarrow Y$；$S \leftarrow S \cup \{b\}$」。 類似地， 若 $t(v) = Y$，改稱 v 爲 b， 就試著去找許配給 b 的 a 執行「將 a 指向 b；$t(a) \leftarrow X$；$S \leftarrow S \cup \{a\}$」。這樣的程序幾乎可以完成大部分的工作， 直到發生了有兩個同類別的點相鄰（這在二分圖當中是不會發生的）才會出問題。 圖 4.9 是一個這樣的例子。

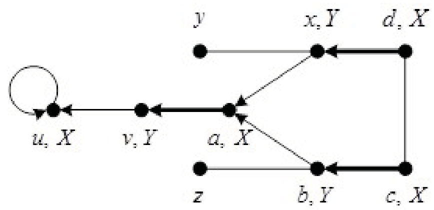

圖 4.9: M 的邊（粗線）、點的名稱以及它們各自的類別。

值得注意的是， 這個例子中已經停止了迴圈動作， 但是仍未找到 M-可擴張路徑，這在二分圖的情況中是不會發生的。 此處， 由於 c 和 d 相鄰， 以致於找到的 M-交錯路徑 $Q_1 : u\,v\,a\,b\,c$ 和 $Q_2 : u\,v\,a\,x\,d$ 可以合作提供出更大的可能， 也就是可以將 Q_1 接著 Q_2 的反方向而造出 M-交錯路徑 $u\,v\,a\,b\,c\,d\,x$， 而若再往 y 走就可以得到一條 M-可擴張路徑了。 類似地， 也可以由 Q_2 接著反轉的 Q_1 而得到 $u\,v\,a\,x\,d\,c\,b\,z$ 這個 M-可擴張路徑。 之所以可以這樣做全是因爲在奇圈 $a\,b\,c\,d\,x\,a$ 當中正反兩種方向都是 M-交錯路徑

的緣故。

一般來說， 就圖 G 的一個匹配 M 以及未被 M 許配的點 u， 一個**花朵**（flower）是指兩條由 u 到同一點 x 的 M-交錯路徑聯集的結果， 當然這兩條路徑的長度必然一奇一偶。 一個花朵中的兩條路徑之最大共同部分稱爲它的**花柄**（stem）； 花朵扣除花柄之後是一個奇圈， 稱爲其**花被**（blossom[4]）； 花柄和花被的交接點稱爲花朵的**基點**（basis）。 在圖 4.9 中， $u\,v\,a\,b\,c\,d$ 和 $u\,v\,a\,x\,d$ 構成一個花朵， 其花柄爲 $u\,v\,a$、花被爲 $a\,b\,c\,d\,x\,a$， 而基點爲 a。

著名的 Edmonds 花被演算法就是在前述的模仿二分圖的演算法時， 若遇到相鄰的兩個同類點， 往前回溯就可以得到一個花朵。 Edmonds 解決問題的方法是， 把對應的花被收縮成一個**假點**（pseudo vertex）， 取代其原來基點的位置， 然後再繼續做。 這種收縮的動作可能會一再地出現。 如果某個時候， 在收縮後的圖中出現了可擴張路徑， 就返回來將此路徑中路過的假點擴張成原來的花被、並在此花被中選一個適合的方向， 把這個可擴張路徑還原回原圖當中的可擴張路徑。 若收縮到最後還是得不到可擴張路徑， 那麼也可以證明此時的匹配已經是最大匹配了。

在此， 並不仔細寫下演算法， 而以實例來說明這個過程。 圖 4.10 是一個有九個點的圖， 其中已經有一個三條邊的匹配 M（以粗線表示）。 從 u 開始做分類動作， 直到出現了同樣都是 Y 類別的兩點 e 和 f。

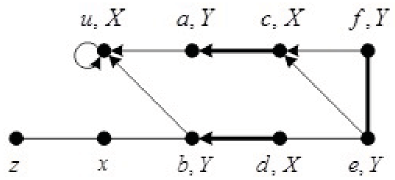

圖 4.10: Edmonds 花被演算法的其中一個階段。

從這兩點往前回溯， 即可得到一個基點爲 c 的花被 $c\,e\,f\,c$， 於是將它收縮成一個假點 C 如圖 4.11 左圖所示（以方點表示之）。 接著， 再次出現了兩個同類型的相鄰點 C 和 d， 回溯之後可得到以 u 爲基點的花被 $u\,b\,d\,C\,a$， 於是再將它縮成一點 U， 如圖

[4]不瞞諸位讀者， 這邊 blossom 要怎麼翻譯才能與 flower 有所區隔曾經是一個相當傷腦筋的問題。 原本 blossom 指的是果樹的花， 但是在這邊並不是這個意思， 而是用來指「花朵扣除掉花柄」之後的部位， 這個部位叫做花被（perianth）， 但這是個艱澀的植物學用語， 推想或許當初 Edmonds 因爲沒有深入研究所以才拿 blossom 來借代。 因此， 最後決定依照這個詞在這邊的意義翻譯成「花被」。

4.11 右圖所示。

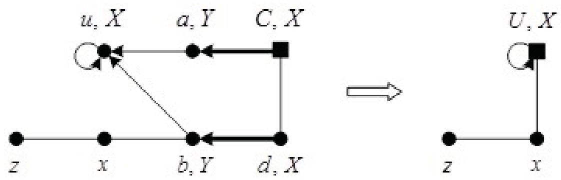

圖 4.11: Edmonds 的花被收縮過程。

此時從 U 開始做， 立刻就可以得到一個可擴張路徑爲 xU； 將路徑中的 U 換成它原來的花被 $ubdCau$ 即可得到第二階段中的可擴張路徑 $x\,b\,d\,C\,a\,u$， 接下來再把裡面的 C 換回原來的花被即可得到最一開始的可擴張路徑 $x\,d\,b\,e\,f\,c\,a\,u$。 將這個路徑換過來之後， 得到如圖 4.12 所示的樣子。

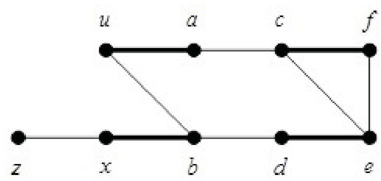

圖 4.12: 替換一次可擴張路徑之後的情形。

再從 z 開始做演算法， 整個過程如圖 4.13 所示； 經過了兩次收縮之後， 找不到任何可擴張路徑。 這就意味著圖 4.12 中的匹配已經是最大匹配了， 以下要說明此事。

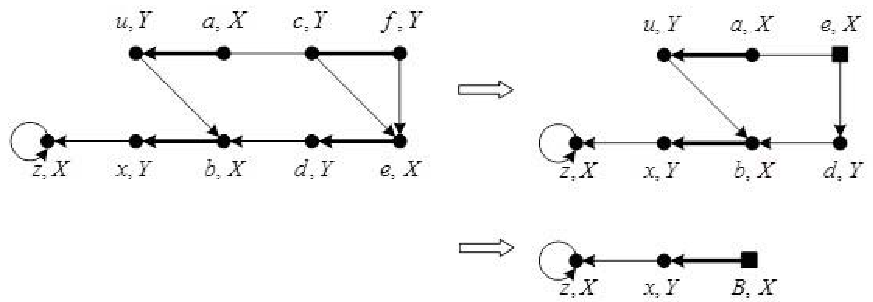

圖 4.13: 下一輪演算法的過程。

採取的方法也是對偶的方法， 類似於匹配與點覆蓋的想法。 一個圖 $G = (V, E)$ 的**奇集覆蓋**（odd set cover） 是指一點集族 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$、其中各個 $|C_i|$ 均爲奇

數， 且對於 G 中任一邊 e， 或者其一端點自成某個 C_i、或者其兩端點同時屬於某個 C_i 當中。 例如 $\{\{x\},\{b,d,e,f,c,a,u\}\}$ 就是上面例子的一個奇集覆蓋。 定義一個奇集覆蓋 $\mathcal{C}$ 的**値**（value）爲

$$c(\mathcal{C})=\sum_{|C_i|=1}1+\sum_{|C_i|\geq 3}\frac{|C_i|-1}{2}。$$

首先我們考慮一個奇集覆蓋當中有兩個集合 C_i 和 C_j 相交的情況。 當 $|C_i|=1$ 而 $|C_j|\geq 3$ 時， 不妨設 $C_i=\{x\}$ 而 $C_j=\{x,y,\ldots\}$， 此時注意到將 C_j 換成 $\{y\}$ 和 $C_j\backslash\{x,y\}$ （若 $|C_j|=3$ 則略過此集）之後仍會是原圖的一個奇集覆蓋， 而且值不會改變。 另一種情況是 $|C_i|\geq 3$ 且 $|C_j|\geq 3$， 此時若 $|C_i\cup C_j|$ 爲奇數就用 $C_i\cup C_j$ 取代原來的 C_i 和 C_j； 而若 $|C_i\cup C_j|$ 是偶數則從 $C_i\cup C_j$ 中取一點 y、 並以 $\{y\}$ 和 $C_i\cup C_j\backslash\{y\}$ 取代 C_i 和 C_j； 這樣仍會是奇集覆蓋， 而且值不會增加。 因此， 在考慮奇集覆蓋的時候總是可以假設其中的集合是兩兩互斥的。

對於任一個匹配 M 和任一個元素兩兩互斥的奇集覆蓋 $\mathcal{C}$， M 中的任一個邊 e 或者有一端點自成某 C_i、或者兩個端點都在某個 C_i 當中， 將 e 映射至 C_i。 在這個映射中， 由於只有一點的 C_i 至多被一條 M 中的邊映射到、 而三點以上的 C_i 至多被 $(|C_i|-1)/2$ 條 M 中的邊映射到， 因此 $|M|\leq c(\mathcal{C})$ 恆成立， 進而有

$$\max_M|M|\leq\min_{\mathcal{C}}c(\mathcal{C})，$$

其中 M 過 G 的所有匹配、$\mathcal{C}$ 過 G 的所有奇集覆蓋。 事實上想必各位已經猜到這個不等式其實是一個等式。 要說明這件事， 只要具體找到匹配 M^* 和奇集覆蓋 C^* 使得 $|M^*|=c(C^*)$ 即可。 G 有完美匹配的情況是簡單的， 因此底下假設 G 沒有完美匹配。

設 M^* 是 Edmonds 花被演算法停下來時的匹配。 收縮到最後的小圖當中的每一個假點， 將其擴張（可能需數次）後會得到 G 中的一個奇數點集合 C， 其中含有 $(|C|-1)/2$ 條 M 中的邊。 將所有這種 C、以及所有類別爲 Y 的點 x 所成的集合 $\{x\}$、 以及所有沒有被分類的的點之集合 U （這樣的點會被 M 配成一對對， 因此會有偶數個點） 再加上另外任一點 a （由於 M^* 不是完美匹配， 這樣的點必存在） 所成的集合、這三類集合收集起來就得到了 C^* 。 第三類集合是只有當 U 非空的時候才需要。

首先要說明 C^* 是一個奇集覆蓋。 對於任何 $e\in E(G)$， 如果 e 不在最後的小圖中出現， 那它就會被上述的第一類集合覆蓋。 如果 e 有在最後的小圖中出現， 且它有一

個端點的類別為 Y、那麼它就會被上述的第二類集合覆蓋；如果 e 有一個端點的類別為 X，則根據演算法，另一個端點的類別必定為 Y，所以它還是會被第二類集合覆蓋；最後如果兩個端點都沒有被分類，那就會被第三類集合覆蓋。因此 C^* 是奇集覆蓋。

接著，剛才已經提到，假點對應的 C 會覆蓋 $(|C|-1)/2$ 條 M 中的邊，而第二類集合各自會覆蓋一條 M 的邊，第三類集合會覆蓋 $|U|/2$ 條 M 的邊，這導致了 $|M^*| \geq c(C^*)$，和前面的不等式結合就得到 $|M^*| = c(C^*)$ 了。

定理 4.15.（Edmonds[6]） $\max_M |M| = \min_{\mathcal{C}} c(\mathcal{C})$，其中 M 過 G 的所有匹配、$\mathcal{C}$ 過 G 的所有奇集覆蓋。

若圖 G 有 n 點 m 邊，則 Edmonds 原來的演算法費時為 $O(n^4)$，而 Ahuja-Magnanti-Orlin [1] 則在實作上將他的方法改良至 $O(n^3)$。Even-Kariv [8] 則提出了不同的方法將速度改良至 $O(n^{5/2})$。目前最好的方法是由 Micali-Vazirani [21] 提供，Vazirani [27] 證明了其費時為 $O(n^{1/2}m)$。

Edmonds [7] 也曾給出加權一般圖的匹配演算法，這個方法由 Gabow [9] 和 Lawler [17] 改良為 $O(n^3)$ 的時間，而之後 Gabow [10] 和 Gabow-Tarjan [11] 則給出了更好的演算法。

4.7. 穩定婚姻問題

現在再次回到本章開頭的婚姻議題。記得當時提出的問題還有最後一個還沒解決，就是「如何匹配才會使得婚後這些家庭最為美滿」。這個問題牽涉到的因素當然非常地多，不過最根本地，被配對的兩人至少要充分地喜歡彼此婚姻才有可能美滿，這是無庸置疑的。因此本節我們不妨就從這個角度試著來用數學的方式探討這個問題。

在之前充當月下老人的時候，請女生填寫的是「她們喜歡的男生清單」，不過這樣的問卷設計方式未免也太過於簡化問題了。通常照道理來講那些她填為「喜歡」的男生當中，她喜歡的程度可能有所差別；而那些她沒有填為「喜歡」的男生可能也並沒真的嚴重到她打死也不結婚的程度，只是相對而言她比較沒有那種意願而已。假如今天她真的除了那個男生以外都找不到其他對象的話，基於家族壓力之類的考量，她恐怕還是只好跟他結婚。因此所謂喜不喜歡只是程度的問題，並非絕對的。

因此， 可以考慮稍微把問題做如下的擴充。 假設現在有男女各 n 人， 請他們填寫他們對於異性的偏好順序， 製作一個對應的表格。 例如下面圖中顯示的是有四男（小寫字母）四女（大寫字母）彼此偏好的順序表。 每一格有兩個數字， 第一個代表男生對女生的偏好序， 第二個則是女生對男生的偏好序。 例如第一個格子中的 1, 3 表示 A 在 a 心目中是第一人選， 但 a 在 A 的心中只排名第三。

	A	B	C	D
a	1, 3	2, 3	3, 2	4, 3
b	1, 4	4, 1	3, 3	2, 2
c	2, 2	1, 4	3, 4	4, 1
d	4, 1	2, 2	3, 1	1, 4

圖 4.14: 一組偏好資料。

現在要根據這組資料來幫他們決定一個「穩定」的匹配方式。 假設今天匹配完了之後， 這裡面存在一對男女， 他們並沒有被配對， 但是他們喜歡對方的程度都勝於他們目前的配偶， 那麼這樣的組合就很有可能會私奔去了； 這樣的匹配方式就叫做**不穩定**的匹配。 舉例來說， 假設我們將上面的八個人作這樣的匹配

$$a \leftrightarrow A、b \leftrightarrow B、c \leftrightarrow C、d \leftrightarrow D，$$

那麼這就是不穩定的匹配。 因爲其中 b 和 D 沒有被配對， 可是 b 喜歡 D 的程度勝過他目前的配偶 B， 同樣地， D 喜歡 b 的程度也大於她目前的配偶 d。 反過來， 如果匹配當中沒有不穩定的組合， 那就稱爲是**穩定**的匹配。 例如

$$a \leftrightarrow C、b \leftrightarrow D、c \leftrightarrow A、d \leftrightarrow B，$$

就是一個穩定的匹配。 讀者可以檢查， 就算其中任何一個人想要移情別戀， 對方也不會理睬他， 因爲對方比較喜歡目前的配偶。

現在就有若干問題可以問了。 什麼樣的喜好組合可以導致穩定匹配的存在？ 又應該如何去尋找？ 令人印象深刻的是， 無論這些人的喜好組合如何， 穩定匹配永遠都存在。 Gale 和 Shapley 提出了如下的**求婚法**（proposal algorithm）可以找出穩定匹配。

演算法 4.16. （Gale-Shapley 男方求婚法 [12]）

輸入：男女各 n 人，每個人對異性都有一個喜好排行表。

輸出：一種穩定配對。

方法：

1. 所有男生各自向他們最喜好的女生求婚；
2. 每當（有女生被兩個以上的男生求婚）
3. { 該女生暫時保留所有求婚者當中她最喜好的一個，而拒絕其他人；
3. 被拒絕的男生退而求其次去向除了曾經拒絕過他的人以外最喜好的女生求婚；}
4. 所有女生接受其唯一求婚者的求婚，配對完成。

要說明這個演算法的正確性， 首先注意到每個女生最多只會拒絕 $n-1$ 個男生， 因此這個演算法總是會停下來（更進一步的結果見習題 4.28）， 此時， 每個男生都已經求過婚、且每個女生最多只接受一個求婚， 因此這會是一個男女之間的匹配。 接著， 假設這個匹配裡面存在不穩定配對， 不失一般性設爲 (a, B)， 其中 a 喜歡 B 多過他的配偶 A， 而 B 喜歡 a 多過她的配偶 b。 由於 a 比較喜歡 B， 因此他必定曾經跟 B 求過婚； 但由於最後沒有跟 B 配對， 表示 a 被拒絕而且當時 B 身旁有一個候選的求婚者是 B 比較喜歡的， 因而這個求婚者在 B 的排名中也優先於 b， 可是這麼一來不可能最後 B 卻跟 b 配對在一起， 矛盾。 因此就得證這個匹配是穩定的。

穩定匹配不一定只有一種， 然而可以證明這種男方求婚法會給出**男性最佳匹配**（man optimal matching）， 也就是說， 如果還存在其他的穩定匹配， 那麼裡面任何一個男生的配偶排名都不會比男方求婚法給出的結果更好（見習題 4.29）。 類似的道理， 反過來如果採用女方求婚法， 就會得到女性最佳匹配。

進而， 透過數學的邏輯推演， 我們不經意地居然也得到了一個小小的人生哲學， 亦即在尋找人生伴侶的過程中應該盡量主動， 才能爲自己謀得最大利益。

穩定匹配的觀念不僅可以應用在這邊所說的婚姻問題上， 諸如學生申請學校的志願塡寫與學校對學生的優先錄取順序、 公司職務合適的人選順位跟員工的擔任意願等等的問題都可以用這種方式來處理， 應用非常廣泛。

4.8. 習題

4.1. 定義 n **維超立方**（n-dimensional hypercube）之點集爲所有長度爲 n 的二進字

串， 而兩個頂點相鄰若且唯若它們的字串恰有一位不同。 如果把頂點的二進字串看作是這些頂點在 n 維空間中的座標， 那麼就容易看出 Q_n 其實就相當於是 n 維空間中的單位立方塊， 故名。 圖 4.15 展示了 Q_1 到 Q_3 的圖。

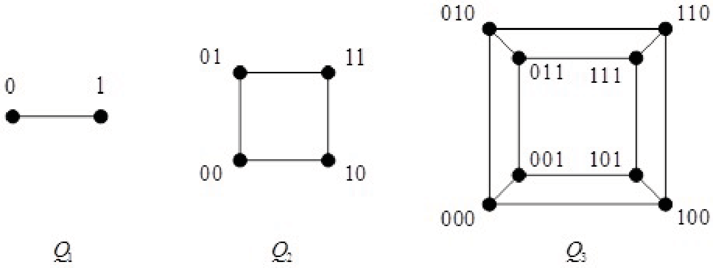

圖 4.15: Q_1 到 Q_3。

證明對於 $n \geq 2$， Q_n 至少有 $2^{2^{n-2}}$ 種完美匹配。

4.2. 試證明若 M 是 Q_n 當中的一個匹配、使得 M 當中相異邊的端點都不相鄰 （換句話說， M 是一個導出匹配）， 則 M 被包含在 Q_n 的某個完美匹配當中（Vandenbussche-West [26]）。

4.3. 證明或舉例否定： 任何樹至多只有一個完美匹配。

4.4. 試證明若一個具有 $2n$ 點的圖恰只有一個完美匹配， 則它至多只有 n^2 條邊， 並對任何 $n \geq 1$ 構造一個具有 n^2 條邊的例子。

4.5. 設圖 G 有兩個匹配 M 和 N 滿足 $|M| > |N|$。 試證明存在匹配 M' 和 N' 使得 $|M'| = |M| - 1$， $|N'| = |N| + 1$， $M' \cup N' = M \cup N$ 且 $M' \cap N' = M \cap N$。

4.6. 若將定理 4.7 中的假設「每點的度數至少爲 2」改爲「每點的度數至少爲 r」， 則可以得到什麼結論？

4.7. 對非負整數 t， 一個 (t, n)-集合族是指一個集合族 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ 使得對所有非空子集 $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ 均有 $|A(J)| \geq |J| + t$、 其中 $A(J) = \bigcup_{i \in J} A_i$。 一個最小 (t, n)-集合族是指一個 (t, n)-集合族、 使得若去掉當中任何一個集合 A_i 中的任何一個元素都將不再是 (t, n)-集合族。 試證明一個最小 (t, n)-集合族中的任一集合 A_i 均恰有 $t + 1$ 個元素。

4.8. 兩個人在圖 G 上玩遊戲， 規則如下： 第一個人先選取任一點開始， 之後兩人輪流選取一個未被選過、但和前一次對方選的點相鄰的點。 無法繼續選取的人算輸。

試證明：若 G 有完美匹配， 則第二個人有必勝策略； 否則第一個人有必勝策略。

4.9. 設 $r \le n$， 一個 $r \times n$ 階**拉丁矩陣**（Latin matrix）是一個 $r \times n$ 矩陣、 其元素均爲 $1, 2, \ldots, n$ 中的數、而且同行或同列都沒有相同的數。 試證明：當 $r < n$ 時， 任一個 $r \times n$ 階拉丁矩陣均可增加第 $r+1$ 列、使其成爲一個 $(r+1) \times n$ 階拉丁矩陣。

4.10. 一個每行每列和都是 1 的非負實數矩陣稱爲**雙重隨機矩陣**（doubly stochastic matrix）， 這樣的矩陣中若其元素爲 0 或 1， 則稱爲**置換矩陣**（permutation matrix）。 試證明， 任一雙重隨機矩陣 Q 都可以表示成 $Q = c_1P_1 + c_2P_2 + \ldots + c_mP_m$， 其中 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ 是和爲 1 的非負實數， $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 爲置換矩陣。

4.11. 試找出圖 4.16 的一個完美匹配， 或證明它沒有完美匹配。

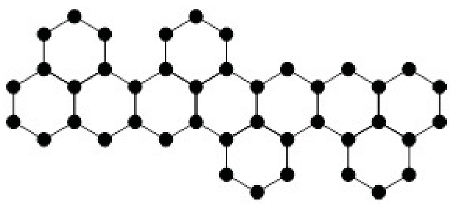

圖 4.16: 這個圖是否存在完美匹配？

4.12. 設 X 和 Y 爲二分圖 G 之二部份， 且 G 有 X-完美匹配。

(a) 若 $S, T \subseteq X$ 滿足 $|N(S)| = |S|$ 和 $|N(T)| = |T|$， 試證明 $|N(S \cap T)| = |S \cap T|$。

(b) 證明 X 中存在一點 a 使得對任何 $b \in N(a)$ 恆存在一個 X-完美匹配包含 ab。

4.13. (a) 證明任一圖 G 中的一點集 S 是獨立集若且唯若 $\overline{S}$ 是一個點覆蓋， 因此， $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$。

(b) 證明任一沒有孤立點的圖 G 恆有 $\alpha'(G)+\beta'(G)=|V(G)|$。

(c) 證明若二分圖 G 沒有孤立點， 則 $\alpha(G)=\beta'(G)$。

4.14. (a) 仿效 Hall 定理的第三種證法去證明 König-Egerváry 定理。

(b) 反過來利用 König-Egerváry 定理推出 Hall 定理。

4.15. 試證明對於正則二分圖來說， 任何一條邊都被包含在某個完美匹配當中， 並對於任何 $k\geq 1$ 構造一個 k-正則二分圖使得其中存在兩條邊並未被包含在某個完美匹配當中。

4.16. 想像在某種體育項目當中， 一共有 n 個人參加比賽， 而他們之間兩兩都必須比一次， 比賽結果只有輸贏兩種， 不會平手。 問題是：什麼樣的勝場數組合是有可能出現的？ Landau [16] 曾證明：對於 n 個整數 $s_1,s_2,\ldots,s_n$ 來說， 存在那樣的一種 n 個選手之間的賽事、使得第 i 個選手總共恰贏 s_i 場， 若且唯若對於每個 $1\leq k\leq n$、任意的 k 個 s_i 之和均至少爲 $\binom{k}{2}$、且等號當 $k=n$ 時成立。 試利用 Hall 定理證明 Landau 的結論（Bang-Sharp [2]）。

4.17. 求以下矩陣爲邊權重的 $K_{5,5}$ 的一個最大權重完美匹配：

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & 15 & 9 & 26 \\ 5 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 3 & 23 & 8 \\ 4 & 6 & 26 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 27 & 9 \end{bmatrix}$$

4.18. 有 n 個公車司機， n 條費時分別爲 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的上午路線以及 n 條費時分別爲 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 的下午路線。 如果他的工時總和超過 t 就要付他加班費。 公司的目標是要分配每個司機一條上午路線及一條下午路線， 使得所有司機超時的總和越小越好。

將上述問題化爲加權二分圖問題， 並證明將第 i 長的上午路線和第 i 短的下午路線分配給同一個司機即可達到公司的目的。

4.19. 證明一棵樹 T 有完美匹配的充要條件是 $o(T-v)=1$ 對 T 中的每一個點 v 都成立。

4.20. 證明沒有孤立點的圖 G 有一個至少 $|V(G)|/(1+\Delta(G))$ 條邊的匹配。

4.21. 假設圖 G 滿足 $o(G-S) \leq |S|$ 對所有 $S \subseteq V(G)$ 皆成立， 而且 T 是滿足 $o(G-T) = |T|$ 的最大點集。

(a) 證明 $G-T$ 的所有連通部分都有奇數點， 進而證明 $T \neq \emptyset$。

(b) 對於 $G-T$ 的任一連通部分 C， 證明 $C-x$ 對於所有 $x \in V(G)$ 都滿足 Tutte 條件。

(c) 設 $\mathcal{C}$ 是 $G-T$ 的所有連通部分所成的集合， 考慮以 $T \cup \mathcal{C}$ 爲點集、以

$$\{tC : t \in T, C \in \mathcal{C}, N_G(t) \cap C \neq \emptyset\}$$

爲邊集的二分圖 H。 利用 Hall 定理證明 H 有一匹配、其大小爲 $|\mathcal{C}|$。

(d) 利用 (a), (b), (c) 證明 Tutte 定理。

4.22. 證明 3-正則圖 G 有完美匹配的充要條件是 G 可以分解爲一些 P_4。

4.23. 設 G 是一個 $2m$-正則圖， T 是有 m 條邊的樹， 且其直徑小於 G 的最小圈長， 證明 G 可以分解爲一些 T。

4.24. 對每一個整數 $k \geq 2$， 構造出一個沒有完美匹配的 k-正則圖。

4.25. 證明有偶數個頂點的連通圖如果是爪-免除的， 則一定有完美匹配。

4.26. 依照下列的男方與女方之偏好順序列表， 求出男方求婚法與女方求婚法的結果。

男方 $\{u,v,w,x,y,z\}$	女方 $\{a,b,c,d,e,f\}$
$u : a > b > d > c > f > e$	$a : z > x > y > u > v > w$
$v : a > b > c > f > e > d$	$b : y > z > w > x > v > u$
$w : c > b > d > a > f > e$	$c : v > x > w > y > u > z$
$x : c > a > d > b > e > f$	$d : w > y > u > x > z > v$
$y : c > d > a > b > f > e$	$e : u > v > x > w > y > z$
$z : d > e > f > c > b > a$	$f : u > w > x > v > z > y$

4.27. 乍看之下， 好像也可以用加權二分圖匹配的方法來解決美滿婚姻問題： 首先我們設法定義出一種「美滿程度指標」來衡量每一對男女配對之後的結果， 然後再用匈牙利演算法找出整體而言美滿程度最高的配對方式。 但請問這樣會造成什麼問題？

4.28. (a) 證明在求婚法當中， 至多只有一個男生會被拒絕 $n-1$ 次。

(b) 試構造一種偏好組合， 使得進行求婚法的時候每次迴圈過程中都恰只有一個男生被拒絕， 且到最後除了一個男生被拒絕了 $n-1$ 次以外其他男生都被拒絕了 $n-2$ 次。 作爲推論， 求婚法總會在不超過 $(n-1)^2$ 次迴圈內完成。

4.29. 證明男方求婚法會給出男性最佳匹配。

4.9. 參考文獻

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network Flows*, Prentice Hall, 1993, pp. 483-494.

[2] C. M. Bang and H. Sharp Jr., Score vectors of tournaments, *J. Combin. Theory, Ser. B*, vol. 26 (1979), no. 1, pp. 81-84.

[3] C. Berge, Two theorems in graph theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* vol. 43 (1957), pp. 842–844.

[4] G. J. Chang, On the number of SDR of a (t, n)-family, *EuropeanJ. Combin.*, vol. 10 (1989), pp. 231-234.

[5] G. J. Chang, Corrigendum, *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 73 (1996), pp. 190-192.

[6] J. Edmonds, Paths, trees, and flowers, *Canad. J. Math.*, vol. 17 (1965), pp. 449-467.

[7] J. Edmonds, Maximum matchings and a polyhedron with $0, 1$-vertices, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, vol. 69B (1965), pp. 73-77.

[8] S. Even and O. Kariv, An $O(n^{2.5})$ algorithm for maximum matching in general graphs, In *Proc. 16thSymp. Found. Comp. Sci.* IEEE (1975), pp. 100-112.

[9] H. N. Gabow, An efficient implementation of Edmonds' algorithm for maximum matchings on graphs, *J. Assoc. Comp. Math.*, vol. 23 (1975), pp. 221-234.

[10] H. N. Gabow, Data structures for weighted matching and nearest common ancestors with linking, In *Proc. 1st ACM-SIAM Symp. Disc. Algs.* (San Francisco 1990) SIAM (1990), pp. 434-443.

[11] H. N. Gabow and R. E. Tarjan, Faster scaling algorithm for general graph matching problems, Tech. Rept. CU-CS-432-89 Dept. Comp. Sci., Univ. Colorado-Boulder (1989).

[12] D. Gale and L. S. Shapley, Colledge admissions and the stability of marriage, *Amer. Math. Monthly*, vol. 69 (1962), pp. 9-15.

[13] M. Hall Jr., Distinct representatives of subsets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 54 (1948), pp. 922-956.

[14] P. Hall, On representation of subsets, *J. LondonMath. Soc.*, vol. 10 (1935), pp. 26-30.

[15] D. König, Graphok es matrixok, *Mat. Fiz. Lapok.* vol. 38 (1931), pp. 116-119. (Hungarian with German summary)

[16] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure, Bull. Math. Biophys., vol. 15 (1953), pp. 143-148.

[17] E. L. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids.* Holt, Rinehart, and Winston (1976).

[18] J. Y.-T. Leung and W.-D. Wei, A comparison theorem of permanents and a proof of a conjecture on (t, n)-familites, *J. Combin. Theory Ser. A.*, vol 61 (1992), pp. 98-112.

[19] L. Lovász, Three short proofs in graph theory, *J. Comb. Theory, Ser. B*, vol. 19 (1975), pp. 269-271.

[20] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fundamenta Math.*, vol. 10 (1927), pp. 96-115.

[21] S. Micali and V. V. Vazirani, An $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs, In *Proc. 21th IEEE Symp. Found. Comp. Sci.*, ACM (1980), pp. 17-27.

[22] L. Mirsky, *Transversal Theory*, Academic Press, New York, 1971.

[23] J. Petersen, Die Theorie der regularen Graphen, *Acta. Math.*, vol. 15 (1891), pp. 193-220.

[24] R. Rado, On the number of systems of distinct representatives of sets, *J. London Math. Soc.*, vol. 42 (1967), pp. 107-109.

[25] W. T. Tutte, The factorization of linear graphs, *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 22 (1947), pp. 107-111.

[26] J. Vandenbussche and D. B. West, Matching extendability in hypercubes, *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 23 (2009), no. 3, pp. 1539-1547.

[27] V. V. Vazirani, A theory of alternating paths and blossoms for proving correctness of the $O(|V|^{1/2}|E|)$ general graph matching algorithm, *Combinatorica*, vol. 14 (1994), pp. 71-91.

[28] 王子俠， 相異代表系統簡介， 數學傳播， 第四卷第四期（民國 69 年 12 月），8-12 頁。

[29] 張鎮華， 相異代表系古今談， 數學傳播， 第十卷第一期（民國 75 年 2 月），53-59 頁。