

## 第 6 章 平面圖

哥倫布之後人類知道世界是圓的，  
當政治經濟上的藩籬撤除，  
科技進步創造了無障礙的溝通，  
世界變得平坦了。

— Thomas L. Friedman

相傳古代有一位國王，臨死前留下遺囑，把土地分給他的五個兒子。這五個兒子在自己的領地上各修築了一座宮殿，他們還想修一些道路，使得每兩座宮殿之間之間有一條道路直接連通、又要求道路不能交叉。結果，這五個王子雖然費盡苦心設計，卻始終不能造出他們希望的這些道路。

鏡頭拉回現代，話說某個森林裡住了三戶人家，他們是世仇，不管任何大小事情都發誓老死不相往來。然而，如今他們需要各自建立管線以連接到水、電、瓦斯三種不同的資源設施，而基於老死不相往來的誓言，這些管線也要求不能交叉。他們有可能完成這樣的管線配置嗎？

以圖論的觀點來看，這兩個問題本質上都是要將一個給定的圖**嵌入**（embed）平面的問題。所謂將圖嵌入平面，簡單地說就是將圖畫在平面上、但使得不同的邊不要在畫出來的圖形上交叉的工作；一般而言這也是我們畫圖時的期望，因為如果畫出來的邊相交，可能會造成一些「交叉處是否有頂點」的理解上的麻煩。

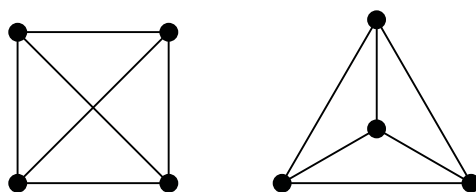


圖 6.1：與其將  $K_4$  畫成左邊這樣，不如畫成右邊這樣更能夠避免誤會。

上面的兩個故事當中，我們遇到了要將圖嵌入平面的問題，其中前者考慮的是  $K_5$ ，後者考慮的是  $K_{3,3}$  <sup>①</sup>。而在現代的超大型積體電路（VLSI）中，同樣也會遇到要讓龐大的線路在電路板上能夠實現、使得不相交的線路彼此能避開的問題，具體的應用相當廣泛。

## 6.1 平面圖

直觀來說，一個圖稱為**可嵌入**（embedable into）一曲面  $S$ ，是指我們可以將此圖畫在  $S$  上、使得兩條邊若相交也只會交在他們共有的端點上（如果有這種端點的話）。這樣的定義當然有欠嚴格，不過基本上已經足夠我們使用；而如果讀者有興趣，可以參見附錄 A，屆時我們會給予關於所謂圖的繪製、嵌入以及其他的概念做數學上的一個嚴格的討論。

如果一個圖  $G$  可嵌入平面，我們就說  $G$  是**平面圖**（planar graph），例如  $K_4$ 、 $K_{2,3}$  等都是平面圖。前面的故事中曾經提到的  $K_5$  和  $K_{3,3}$  則不是平面圖，也就是說，不管怎麼把這兩個圖畫在平面上，它們都一定會有邊相交的情況出現：

**命題 6.1：** $K_5$  和  $K_{3,3}$  不是平面圖。

**證明：**假設  $K_5$  或  $K_{3,3}$  可以嵌入平面，取其一個生成圈  $C$ ，這個  $C$  必定被畫成一個平面上的閉曲線。 $C$  上的弦必須整條被畫在  $C$  的內側或外側，此外，端點在  $C$  上順序交錯的兩條弦會起衝突，所以必須一條畫在  $C$  內、一條畫在  $C$  外。

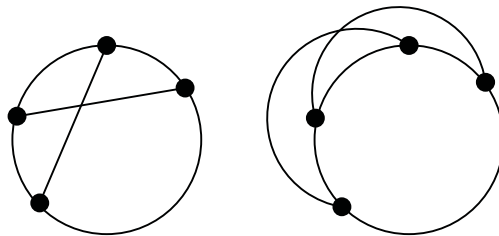


圖 6.2：如果端點在  $C$  上順序交錯的兩條弦同時被畫在  $C$  內或  $C$  外就會導致衝突。

在  $K_5$  的情況中一共有五條弦，因此必有三條弦同在外或同在內，但是這三條當中必有兩條會衝突； $K_{3,3}$  的情況中有三條弦，但其中任兩條都會衝突，所以也會導致矛盾。 ■

雖然  $K_5$  和  $K_{3,3}$  不能嵌入平面，但是它們卻可以嵌入**環面**（torus，甜甜圈狀的曲面）或**Möbius 帶**（Möbius strip 或 Möbius band，可以想像成是將紙帶的一端扭轉半圈後與另一端黏合後的產物）。圖 6.3 顯示出將  $K_5$  嵌入環面以及將  $K_{3,3}$  嵌入 Möbius 帶的畫法，讀者則可以試著找出將  $K_5$  嵌入 Möbius 帶及將  $K_{3,3}$  嵌入環面的畫法。

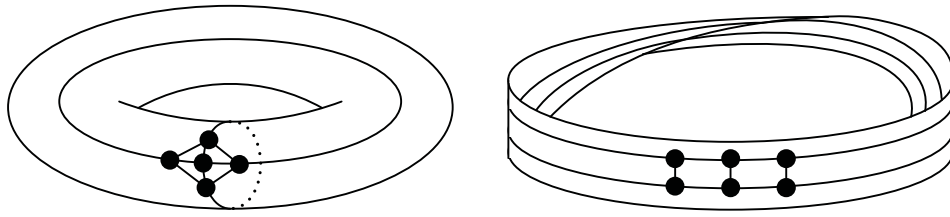


圖 6.3：  $K_5$  嵌入環面和  $K_{3,3}$  嵌入 Möbius 帶的畫法。

需注意的是，當我們把圖畫在曲面上時，我們應當想像線條是同時存在於面的正反兩側（這是因為在嚴格定義中，我們是把圖形映射到曲面上而非曲面的單側，詳情參見附錄 A），因此以上面的 Möbius 帶的例子來講，那兩條曲線是只繞了一圈就得以回來並只有上下交換一次，而非繞了兩圈後交換兩次。

稍微精確一點的話，我們可以用如下的平面圖示來表達我們把那兩個圖畫在環面跟 Möbius 帶上的方式：

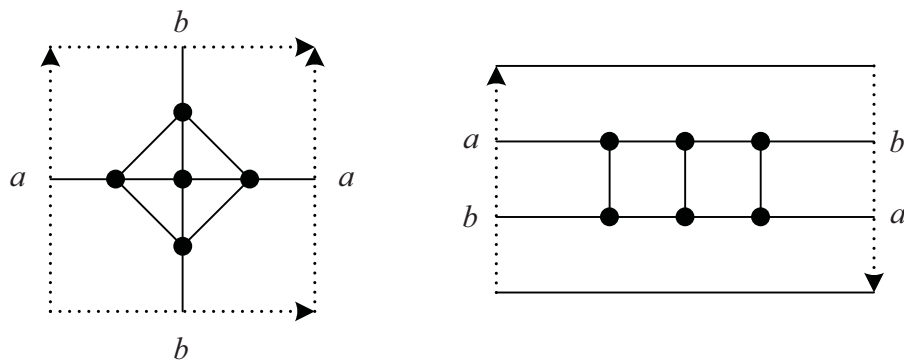


圖 6.4：  $K_5$  嵌入環面和  $K_{3,3}$  嵌入 Möbius 帶的「平面畫法」。

這兩個圖要這樣看。邊緣的虛線箭頭標示兩組對邊「黏起來的方向」。在環面的情況中、上下與左右兩組對邊箭頭的方向相同，表示它們要以同樣的方向黏合，因而產生一個環面。Möbius 帶的左右對邊箭頭方向相反，表示要扭轉一次再黏合。而邊緣上的字母表示圖的邊要如何對應接合。應用這種圖示，就可以比較輕鬆地表現立體空間中曲面上的圖了。

值得一提的是，如果我們不是把圖畫在二維的平面或曲面上、而是「畫」在三維空間中的話（也就是讓每條邊對應於三維空間中的曲線），那麼我們永遠有方法把圖畫出來、使得任兩條邊不相交。一種最簡單的畫法是把圖  $G$  的所有點依序排在  $x$  軸上，然後如果兩點在  $G$  當中有連邊，我們就選取一個包含  $x$  軸的平面、然後在這個平面上畫一條弧線連接這兩點。因為過  $x$  軸的平面有無限多種選法，因此我們可以為  $G$  中的每一條邊都選取不同的平面，這麼一來自然畫出來的邊就都不會相交了。這種畫法中我們用了弧線，不過如果要求畫出來的線條都是直線段，在三維空間中一樣是任意的圖都辦得到（見習題 6.3）。這種把圖的邊都

畫成直線段的嵌入法稱為**直線嵌入** (straight-line embedding)；Wagner [25] 和 Fáry [7] 曾經證明，任何平面圖都存在平面的直線嵌入（見習題 6.4）。

圖嵌入曲面上之後，曲面被其圖形所分隔出來的各個區域稱為是其**面** (face)，往後我們常以  $f$  表示一個圖嵌入曲面後的面數。同一個圖嵌入曲面的方法不一定只有一種，有的時候不同的嵌入決定出來的各個面甚至可能會不相同。基於這個緣故，我們一定要先決定好嵌入的方式之後才能來談圖的面，不然面會無法定義。

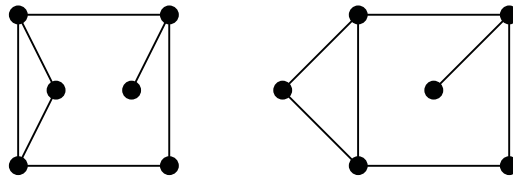


圖 6.5：同一個平面圖的兩種不同平面嵌入。這兩種不同嵌入所決定出來的面有本質上的差異。

一個平面圖連同其某個特定的平面嵌入稱為是一個**平版圖** (plane graph)；當我們提到平版圖時，心裡想的是一個已經妥善嵌入平面之後的平面圖。每個平版圖都恰有一個無界的面，稱為**外圍面** (outer face)。

每條邊都會屬於其兩側的面所有，而此時我們會說這兩個面是相鄰的。一種特殊的情況中，如果一條邊的兩側是同一個面，則我們會說這個面與它自己相鄰。

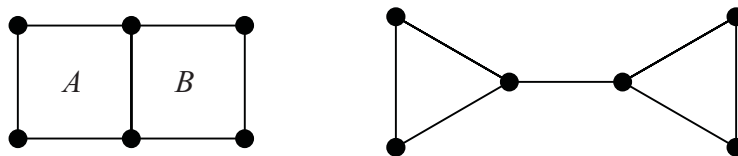


圖 6.6：左圖中面  $A$  與面  $B$  相鄰，右圖中外圍面與自己相鄰。

給予一個平版圖  $G$ ，我們可以構造一個新的平版圖  $G^*$  如下：在  $G$  的各個面  $X$  中任取一點  $x$  作為  $G^*$  的頂點，而若  $G$  的兩個面  $X$  跟  $Y$  隔著邊  $e$  相鄰，我們就在  $G^*$  中對應的兩頂點  $x$  跟  $y$  之間穿過  $e$  連一條邊  $e^*$ 。如此構造出來的新平版圖  $G^*$  稱為是  $G$  的**對偶圖** (dual graph)。

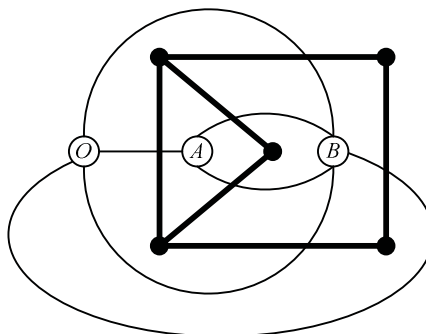


圖 6.7：黑點與粗線表示原圖，白點與細線表示其對偶圖。

我們如何知道  $G^*$  是平版圖？事實上考慮  $G^*$  的每個頂點  $x$ ，其連出去的線條都是從自己出發後連到環繞面  $X$  的每條邊上，易看出我們可以使得這些線條不要交叉；而在  $X$  的另一側也是發生同樣的事情。結合起來，就知道  $G^*$  是平版圖了。

考慮上面圖 6.7 的例子，我們會發現做了一次對偶  $G^*$  之後，若再做一次對偶，則會回到原本的圖  $G$ 。這件事若且唯若  $G$  是連通的時候會成立，證明留給讀者當習題（見習題 6.5）。基於這個操作有這樣的性質，我們才會稱之為對偶。

同構的不同平版圖之對偶可能會不同構，圖 6.8 是一個簡單的例子：

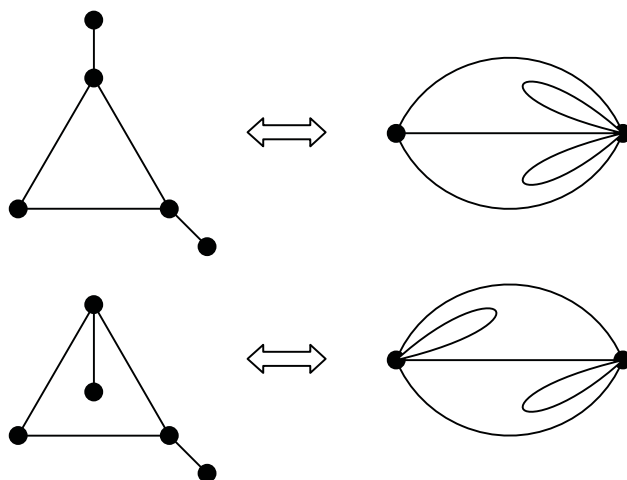


圖 6.8：兩組對偶的平版圖，其中左邊的兩個圖是同構的，但右邊兩個並不同構。

我們注意到，平版圖  $G$  的每條邊  $e$  都會對應於  $G^*$  的一條邊  $e^*$ 。底下的定理更加強了兩者之間的關連。

**定理 6.2：**對任意連通的平版近圖  $G$ ，一個邊集  $S \subseteq E$  是  $G$  中的圈，若且唯若對應的  $S^* = \{e^* : e \in S\}$  是  $G^*$  中的極小切斷集。

**證明：**假設我們把  $G^*$  按照定義跟  $G$  畫在一起。若  $f$  為  $G$  的面，則我們以  $f^*$  表示在  $G^*$  中對應的頂點。注意到兩點  $f_1^*$  和  $f_2^*$  落在  $G^* \setminus S^*$  的同一個連通部分的充要條件是  $f_1$  和  $f_2$  位於  $\mathbb{R}^2 \setminus S$  的同一個連通區域中（也就是說，假設我們把  $G$  畫在紙上、然後拿剪刀把  $S$  對應的邊都剪開，那麼  $f_1$  和  $f_2$  會在同一張紙上），因為每一個在  $G^* - S^*$  中的  $f_1^* - f_2^*$  路徑都對應於一條在  $\mathbb{R}^2 \setminus S$  上連接  $f_1$  和  $f_2$  的弧線，反之亦然。於是，如果  $S$  是  $G$  中的圈，那麼  $G^* \setminus S^*$  就恰有兩個連通部分，因此  $S^*$  是  $G^*$  中的切斷集。而從  $S$  當中去掉任何一邊都會使得  $G^* \setminus S^*$  連通，故  $S^*$  是極小的。

反過來，如果邊集  $S$  使得  $S^*$  是  $G^*$  中的切斷集，那麼根據上面的論述， $S$  就會包含了  $G$  當中的某個圈。如果進一步  $S^*$  是極小切斷集，那麼  $S$  就不能再有更多的邊，故  $S$  就是  $G$  中的圈。 ■

## 6.2 Euler 多面體公式

**Euler 多面體公式** (Euler polyhedral formula) 是他 [6] 在 1758 年研究多面體的頂點、邊和面數之間的關連時發現的現象，而這個公式如今在圖論中有廣泛的應用。事實上，如果將多面體稍微「吹漲」，我們會發現多面體其實可以視為是嵌入球面的圖；而下面的引理 6.3 則說明了，球面跟平面只是彼此的一種投影，因此研究球面上的圖跟研究平面上的圖本質上是同樣的事情。

**引理 6.3：**一個圖可嵌入平面的充要條件是它可以嵌入球面。

**證明：**我們令球面  $S$  跟平面  $P$  相切，取過切點的直徑之另一端點為  $N$  (即北極)。此時任何過  $N$  而不與  $P$  平行的直線都會交  $S \setminus \{N\}$  於一點  $A$ 、並交  $P$  於一點  $B$ 。這個對應關係造成了  $S \setminus \{N\}$  與  $P$  的一個對射，而這個對射也會將  $S$  上的曲線映到  $P$  的曲線，反之亦然 (如圖 6.9 所示)。所以當一個圖畫在  $S$  上時，只要小心選取  $N$  使得它避開圖，就可以利用上述的映射將圖投影到平面上。反之亦然。 ■

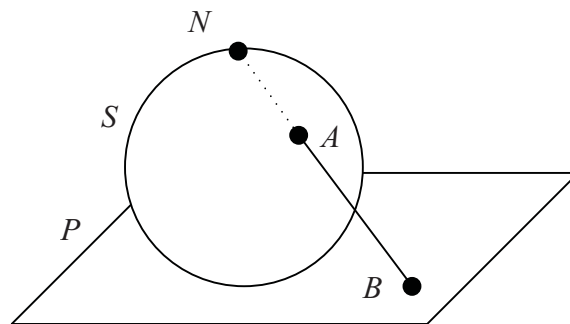


圖 6.9：球極投影。

上面的證明中所用的對應關係就是所謂的**球極投影** (stereographic projection)，這個概念在下一節當中也會用到。基於引理 6.3，Euler 的公式實際上就是在描述平面圖的一種特性。不過，由於 Euler 原先考慮的對像是多面體，因此他顯然腦海中不會想到有迴邊的圖，然而底下的證明中我們並不排除這種情況。總結起來，Euler 多面體公式是這麼說的：

**定理 6.4：**如果以  $n$ 、 $e$ 、 $f$  分別表示連通平版近圖  $G$  的點數、邊數和面數的話，則有  $n - e + f = 2$ 。

**證明：**我們對  $n$  進行歸納法。當  $n=1$  時，如果  $e=0$ ，那就只有一個外圍面，即  $f=1$ ，故公式成立；而每增加一條邊 (在這個情況中會是迴邊) 時它就會將既有的一個面一分為二，因此面同樣是增加一個，故公式對於  $n=1$  的情況恆成立。



現在考慮  $n > 1$  的情況。由於  $G$  是連通的，總會有一個不是迴邊的邊。我們將這條邊收縮，則得到的近圖  $G'$  也是連通平版近圖。注意到將不是迴邊的邊收縮不會改變面數（其兩側的面只是周邊變短而已，不會消失），而點數跟邊數在這種情況下分別減少 1，所以  $n - e + f$  的值維持不變；由歸納假設，在收縮後其值為 2，因此本來也是 2。 ■

**推論 6.5：**如果以  $n$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $k$  分別表示平版近圖  $G$  的點數、邊數、面數和連通部分個數的話，則有  $n - e + f = k + 1$ 。

**證明：**不連通的情況中，整體的外圍面只是把個別的連通圖的外圍面加以黏合。 ■

利用這則公式，我們可以重新給予  $K_5$  和  $K_{3,3}$  的非平面性一個不同的證明。首先我們有引理：

**引理 6.6：**對一個至少有三點的簡單平版圖  $G$  恆有  $e \leq 3n - 6$ 。若  $G$  中沒有三角形，則  $e \leq 2n - 4$ 。

**證明：**如果  $G$  不連通，我們可以加一些邊使它連通，而這個動作只是讓  $e$  增加卻沒改變  $n$ ，所以我們只要證明  $G$  是連通的情況就夠了。此時由 Euler 多面體公式， $n - e + f = 2$ ，而由於  $n \geq 3$  且  $G$  是簡單圖，每個面都至少有三條邊，而當我們在計算邊的時候，每條邊都會被其兩側的面各算一次、共算了兩次，因此這意味著  $2e \geq 3f$ 。代入 Euler 多面體公式整理後就得到  $e \leq 3n - 6$ 。而當  $G$  沒有三角形的時候，每個面就變成至少四條邊，所以  $2e \geq 4f$ ，代入 Euler 多面體公式就得到  $e \leq 2n - 4$ 。 ■

**推論 6.7：** $K_5$  和  $K_{3,3}$  都不是平面圖。

**證明：**假設它們已經嵌入平面成了平版圖。 $K_5$  有五個點十條邊，代入引理 6.6 的第一則不等式得到  $10 \leq 3 \times 5 - 6 = 9$ ，矛盾；而  $K_{3,3}$  有六個點九條邊，同時它是二分圖、不會有三角形，因此套用引理 6.6 的第二個不等式得到  $9 \leq 2 \times 6 - 4 = 8$ ，也矛盾。 ■

如同上面所看到的，我們不需要仔細研究這兩個圖的結構，只要從一個很簡單的數量觀點就可以得到矛盾，這就是 Euler 多面體公式帶來的便利之處，類似的觀點在後面還會有許多應用。多面體公式另外一個有用的推論是：

**推論 6.8：**對於任何平面圖  $G$  必有  $\delta(G) \leq 5$ 。

**證明：**假設  $G$  中每一點的度數都大於 5，那麼就有  $2e \geq 6n$ ，這與引理 6.6 的第一條不等式  $e \leq 3n - 6$  矛盾。 ■

後面的圖 6.10 中正十二面體所對應的平版圖就是一個達到最大可能度數的 5-正則圖。

接著我們來看 Euler 多面體公式的一個古典的應用，即利用該公式證明正多面體只有五種。假設一個正多面體有  $n$  個頂點、 $e$  條邊、 $f$  個面，而且每個點都連到  $k$  條邊、每個面都由  $\ell$  條邊圍成（這是正多面體的條件）。如同本節開頭所說的，這個正多面體可以視為是嵌入球面的圖，然後再利用引理 6.3 將圖投影到平面上來，於是它就變成了一個平版圖，而且會滿足 Euler 多面體公式  $n - e + f = 2$ 。

現在，由於每點的度數都是  $k$ ，每個面有  $\ell$  條邊，而在做這兩種計算時每條邊都會被算兩次，因此有  $kn = 2e = \ell f$ 。代入公式就會得到  $(2/k - 1 + 2/\ell)e = 2$ 。由於  $e$  和 2 都是正數，這表示  $2/k + 2/\ell > 1$ ，整理後得到  $(k-2)(\ell-2) < 4$ 。又因為  $k$  跟  $\ell$  顯然都必須大於等於 3，所以  $(k, \ell)$  就只有五種可能： $(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$ 。而固定了  $k$  跟  $\ell$  之後，代回  $(2/k - 1 + 2/\ell)e = 2$  會解出唯一的  $e$ ，而連帶地  $n$  跟  $f$  也會唯一地解出，因此就只有唯一一種可能的正多面體；而實際上這五種組合對應的正多面體也都可以被具體構造出來，因此就確定了就有這五種而且也只有這五種，同時也知道正多面體所代表的圖的對偶圖也是正多面體（因為對偶操作會把  $n$  跟  $f$  互換且把  $k$  跟  $\ell$  互換，而其結果依然是一個正多面體）。對應的多面體如下：

$k$	$\ell$	$e$	$n$	$f$	名稱	對偶圖
3	3	6	4	4	正四面體	正四面體
3	4	12	8	6	正六面體（立方體）	正八面體
4	3	12	6	8	正八面體	正六面體
3	5	30	20	12	正十二面體	正二十面體
5	3	30	12	20	正二十面體	正十二面體

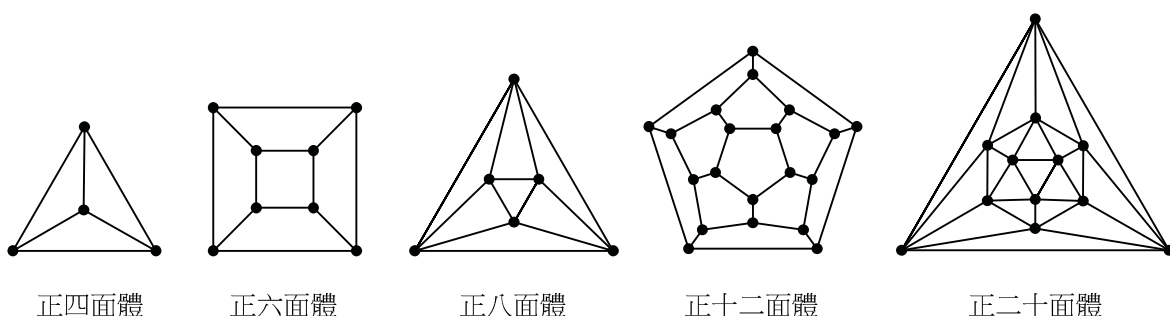


圖 6.10：五個正多面體的平版圖畫法。

Euler 多面體公式有若干種不同的推廣，例如將公式推廣到不同虧格 (genus) 的曲面上。虧格是幾何中的一種概念，大意指這個曲面有幾個「洞」的意思，例如平面跟球面都是虧格為 0、而先前提到的環面則是虧格為 1。推廣後的公式如下：



**定理 6.9**：設曲面的虧格為  $\gamma$ ，則任何嵌入此曲面、使得分割出來的每一個面都沒有洞的連通圖，會滿足關係式  $n - e + f = 2 - 2\gamma$ 。

證明的方式跟原本的公式很類似，只要嚴格地確定歸納法的第一步會對就行了。這個公式又稱為是 **Euler-Poincaré 公式**，而裡面的  $2 - 2\gamma$  這個數值又被稱為是 **Euler 特徵值** (Euler characteristic)。

此外，多面體公式也可以推廣到更高維度的情況。三維裡面我們有點、線（也就是邊）、面的概念可以談，而到了更高維的時候則還有體、超體……等等構成「多面體」的要素；如果我們把點、線、面、體、超體……分別用  $n_0, n_1, n_2, \dots$  表示，則有：

**定理 6.10 (Schläfli-Poincaré 公式 [13][15])**：  $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 \cdots + (-1)^{k-1} n_{k-1} = 1 - (-1)^k$ 。

Euler 多面體公式就是這個公式取維度  $k = 3$  時的特例。

## 6.3 Kuratowski 定理

前面我們已經理解到  $K_5$  和  $K_{3,3}$  都不是平面圖，既然如此，顯然所有包含  $K_5$  或  $K_{3,3}$  作為子圖的圖都不可能是平面圖。不過，這個說法還可以再加強一點，亦即所有  $K_5$  或  $K_{3,3}$  的細分圖都不應該出現，因為基本上把某一條邊拆成數條邊並不影響該圖能不能畫在平面上的問題。

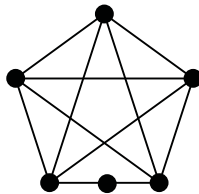


圖 6.11：  $K_5$  的一個細分圖，注意到這個圖並不包含  $K_5$  作為子圖。

厲害的事情是，Kuratowski [12] <sup>②</sup> 證明了，任何非平面圖都一定包含了  $K_5$  或  $K_{3,3}$  的細分圖作為子圖，因此就得到了一個刻畫平面圖的充要條件如下。其中我們說  $G$  的 **Kuratowski 子圖** 是指  $G$  同構於  $K_5$  或  $K_{3,3}$  的細分圖的子圖。

**定理 6.11 (Kuratowski, 1930)**：圖  $G$  是平面圖，若且唯若它沒有 Kuratowski 子圖。

本節的主要目標是要證明這個經典的結果。整個證明大致分成兩個階段：首先，假設這個定理不成立，那根據良序原理一定有一個最小的反例，而我們證明這個最小反例必定是 3-連通的；接著，我們再證明定理對 3-連通的圖成立，於是定理就證完了。

一開始先引入下面這個有用的簡單事實，它說明我們可以把一個平面圖的任何一面「翻到外面去」：

**引理 6.12：**若  $F$  是平版圖  $G$  的某個面的邊集，則有辦法找到  $G$  的一種平面嵌入，使得  $F$  是其外圍面的邊集。

**證明：**先將嵌入利用球極投影投影到球面上，然後再從  $F$  所包圍的面中選一點當北極、再次投影回平面上即可。 ■

根據前面的概念，所謂的極小非平面圖就是指一個非平面圖、使得它的所有真子圖都是平面圖。假設  $S$  是一個點集，我們取  $G-S$  的一個連通部分和  $S$  做聯集、由這個點集所導出的子圖稱為是一個  **$S$ -垂** ( $S$ -lobe)。

**引理 6.13：**若  $G$  為極小非平面圖，則  $G$  是 2-連通的。

**證明：**若  $G$  不連通，則我們可以挑選其中一個部分出來，根據定義這個部分以及剩下的其他部分各自都是平面圖，我們只要將這個部分嵌入在其他部分的嵌入的某一面當中即可得到  $G$  的平面嵌入。

若  $G$  有一個截點  $v$ ，令  $G_1, G_2, \dots, G_k$  為對應的各個  $\{v\}$ -垂。根據定義， $G_1, G_2, \dots, G_k$  都是平面圖，利用引理 6.12，對於每一個  $G_i$  我們都可以找到一種嵌入使得  $v$  是在最外圍的面上。我們只要擠壓這些嵌入、使得每一個都塞在不超過  $360^\circ/k$  的角度範圍中，然後再把每個嵌入的  $v$  黏起來就能得到  $G$  的嵌入了。 ■

接下來我們就要證明，如果定理存在最小反例，則它必定是 3-連通的：

**引理 6.14：**設  $S = \{x, y\}$  是  $G$  的截集。如果  $G$  非平面圖，則將邊  $xy$  加入某個  $S$ -垂當中將得到一個非平面圖（不管  $xy$  是否屬於  $E(G)$ ）。

**證明：**假設  $G_1, G_2, \dots, G_k$  是對應的  $S$ -垂，並令  $H_i = G_i \cup xy$ 。如果每個  $H_i$  都是平面圖，那麼利用引理 6.12，我們可以將它們嵌入成邊  $xy$  落在最外面的樣子。這麼一來， $H_1$  跟  $H_2$  就可以根據邊  $xy$  接在一起，並且再次利用引理將  $xy$  翻到外面，然後繼續接  $H_3$ ；如

此反覆，終能得到  $G \cup xy$  的平面嵌入，因而也得到了  $G$  的平面嵌入，矛盾。因此必定有某個  $G_i \cup xy$  不是平面圖。 ■

**引理 6.15：** 假設  $G$  沒有孤立點，而且是沒有 Kuratowski 子圖的非平面圖當中邊數最少的，那麼  $G$  是 3-連通的。

**證明：** 引理的假設表示將  $G$  刪除任何一條邊都將得到平面圖（因為刪除邊不會產生 Kuratowski 子圖），因此  $G$  是一個極小非平面圖（因為  $G$  沒有孤立點，刪除任何點都將導致邊減少），所以根據引理 6.13， $G$  至少是 2-連通的。

現在假設  $G$  僅為 2-連通，那就表示存在一個兩點的截集  $S = \{x, y\}$ 。由於  $G$  非平面圖，根據引理 6.14，將邊  $xy$  加入某個  $S$ -垂會得到一非平面圖  $H$ ，可是  $H$  的邊比  $G$  少，因此根據假設  $H$  必須要有 Kuratowski 子圖  $K$ 。既然  $G$  沒有 Kuratowski 子圖，表示  $K$  含有  $xy$  這條邊。可是， $x$  跟  $y$  必定跟每一個  $S$ -垂中的點都有連邊，因此如果我們將  $K$  當中的  $xy$  換成通過另一個  $S$ -垂的  $x$ - $y$  路徑，那就會得到  $G$  的 Kuratowski 子圖，矛盾。這就證明了  $G$  至少是 3-連通的。 ■

因此，只要我們能證明 Kuratowski 定理對 3-連通圖成立即可證明定理的全部，而我們準備用歸納法完成這個部分。首先我們有如下的引理。

**引理 6.16 (Thomassen [18])：** 任何至少有五個點的 3-連通圖  $G$  都存在一條邊  $e$  使得  $G \cdot e$  仍為 3-連通。

**證明：** 隨便考慮一條邊  $e = xy$ 。如果  $G \cdot e$  不是 3-連通，那就表示有一個兩點的截集  $S$ 。既然  $G$  本身是 3-連通的， $S$  必定包含了收縮後的  $e$ 。假設  $S$  當中的另外一點為  $z$ ，則注意到  $\{x, y, z\}$  構成了  $G$  的一個截集。我們暫且把這個  $z$  稱為是  $e$  的配對點。

現在我們用反證法，假設將  $G$  的任何一條邊收縮掉後都不再是 3-連通。於是按照上面的說法，任意一條邊都會有一個配對點。我們在  $G$  的所有邊當中選一邊  $e = xy$  和其配對點  $z$ ，使得  $G - \{x, y, z\}$  具有一個最大的連通部分  $H$ 。令  $H'$  是  $G - \{x, y, z\}$  的另外一個連通部分。由於  $\{x, y, z\}$  是最小的截集，這三個點在  $H$  和  $H'$  當中都會各自有鄰居。我們假定  $z$  在  $H'$  中的鄰居是  $u$ （如圖 6.12 所示），並令  $v$  是邊  $uz$  的配對點。

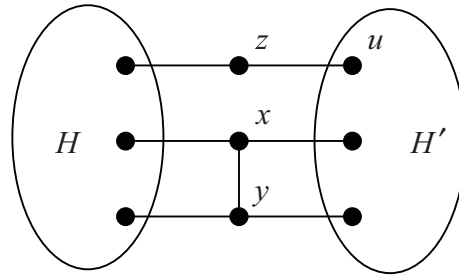


圖 6.12：引理 6.16 的證明圖示。

依照前面的說法， $G - \{z, u, v\}$  是不連通的。可是， $G$  中由  $V(H) \cup \{x, y\}$  所導出的子圖  $H''$  卻是連通的。如果有  $v \in H''$ ，我們注意到  $H'' - v$  仍然是連通的，因為不然的話  $G - \{z, v\}$  就已經是不連通圖了。因此  $v \notin H''$ ，所以  $G - \{z, u, v\}$  就會有一個連通部分包含了  $H''$ ，於是這個連通部分就比  $H$  還要大，與我們的選取法矛盾。 ■

接下來我們需要說明 Kuratowski 子圖和收縮邊這個動作之間的關係。

**引理 6.17：**若  $G$  沒有 Kuratowski 子圖，則任何  $G \cdot e$  也都沒有。

**證明：**只要證明「若  $G \cdot e$  有 Kuratowski 子圖  $H$ ，則  $G$  也有」即可。令  $z$  是  $G \cdot e$  當中對應於原來的  $e = xy$  的點。如果  $z \notin H$ ，那  $H$  本身也是  $G$  的 Kuratowski 子圖。如果  $z \in H$  且把  $z$  換回  $xy$  之後、與  $z$  在  $H$  中相連的邊至多只有一條在  $G$  中與  $x$  相連（或者至多只有一條在  $G$  中與  $y$  相連）的話，那把  $z$  換回  $xy$  或換成其中一點就可以得到  $G$  的 Kuratowski 子圖了。

於是剩下的情況就只有， $H$  是  $K_5$  的細分圖、 $z$  在  $H$  中與四條邊相連、而且這四條邊在  $G$  中分別有兩條與  $x$  相連、兩條與  $y$  相連。我們假設  $u_1, u_2$  是在  $G$  中以一條路徑和  $x$  「相鄰」的那兩點，而  $v_1, v_2$  相對地就是以一條路徑和  $y$  相鄰的兩點（見圖 6.13）。於是我們可以看出，將  $z$  換回  $xy$ 、並移除  $u_1-u_2$  以及  $v_1-v_2$  路徑就會得到  $G$  的一個同構於  $K_{3,3}$  的細分圖，其中  $y, u_1, u_2$  是其中一部份而另外三點是另一部份。 ■

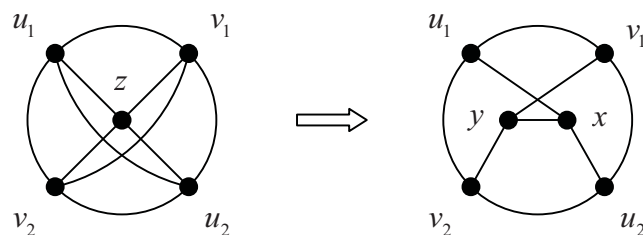


圖 6.13：引理 6.17 證明中剩下的情況。

現在我們要來完成 Kuratowski 定理的證明。事實上我們準備要證明一個更加精確的結果，這是由 Tutte 在 1960 年代提出的。我們定義一個平面圖的**凸嵌入** (convex embedding) 是指它的一個平面嵌入、使得每個面的邊界都是凸多邊形。Tutte 證明了：

**定理 6.18：**設  $G$  為沒有 Kuratowski 子圖的 3-連通圖，那  $G$  就存在一個使得沒有三頂點共線的凸嵌入。

**證明：**我們對  $G$  的點數  $n$  做歸納法。當  $n \leq 4$  的時候， $G = K_4$  是唯一的 3-連通圖，而圖 6.1 之右圖的畫法已經顯示出它有凸嵌入。接著考慮  $n \geq 5$ ，並假設定理已經對較小的  $n$  成立。利用引理 6.16，我們在  $G$  中取一條邊  $e = xy$  使得  $H = G \cdot e$  仍是 3-連通圖，並設  $z$  是收縮之後對應的點。根據引理 6.17， $H$  沒有 Kuratowski 子圖，因此根據歸納假設， $H$  有凸嵌入使得三點不共線。我們要用這個嵌入來造出  $G$  的對應嵌入。

在  $H$  的嵌入當中，將那些與  $z$  相連的邊全部去掉，我們就會得到一個包含有  $z$  的面（可能是外圍面）。由於  $H - z$  至少為 2-連通，這個面的邊界會是一個圈  $C$ ，且  $z$  在  $H$  中的所有鄰居都落在  $C$  上。這些鄰居在  $G$  中可能是  $x$  或  $y$  的鄰居，或者兩者皆是。

令  $x$  在  $G$  中的鄰居依照它們在  $C$  上的順序分別為  $x_1, x_2, \dots, x_k = x_0$ 。如果  $y$  的全體鄰居在  $C$  上都落在某段  $x_i$  到  $x_{i+1}$  之間的話，我們只要把  $x$  擺在原本  $z$  在  $H$  的嵌入中的位置、並將  $y$  擺在  $xx_i$  和  $xx_{i+1}$  的夾角中間，我們就能得到  $G$  的嵌入如圖 6.14 所示。因為  $G$  是 3-連通，所以  $y$  除了  $x$  以外在  $C$  上至少有兩個鄰居，我們把其中最靠近  $x_i$  和  $x_{i+1}$  的鄰居分別設為  $v_1$  和  $v_2$ （當然，它們有可能其實就是  $x_i$  和  $x_{i+1}$ ）。此時我們只要確定  $y$  的位置落在  $xv_1$  和  $xv_2$  的夾角之間（亦即避開圖中的灰色區域。注意到，如果這種灰色區域存在，那麼根據假設它們原本在  $H$  當中會是面，因此為凸多邊形），就可以保證包含  $xy$  的那兩個面為凸多邊形。至於其他包含  $y$  的面，我們只要使  $y$  和  $x$  充分靠近，必定就能保證它們都是凸多邊形（因為這些面原本也都對應於  $H$  中的某個面，因此只要  $y$  充分地靠近  $x$ 、即  $z$  所在的位置，這些新的面的形狀就會充分地接近原來的形狀）。此外只要稍微調整  $y$  的位置就能使得三點不共線。於是  $G$  就有所求的三點不共線凸嵌入了。

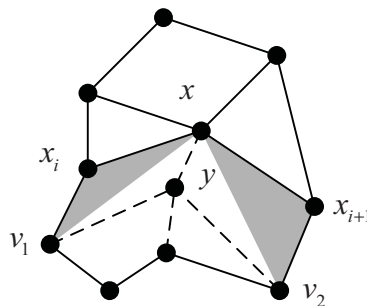


圖 6.14：可以直接得到  $G$  的嵌入的情形。 $z$  落在外圍面的情況也類似。

如果上述情況不成立，那就只有兩種可能： $x$  和  $y$  有三個共同鄰居，或者  $y$  有兩個鄰居  $u, v$  和  $x$  的兩個鄰居  $x_i, x_{i+1}$  交錯地分佈在  $C$  上，如圖 6.15 所示。在第一種情況中，將  $x, y$  以及那三個鄰居連同  $C$  就成了一個  $K_5$  的細分圖；而第二種情況中這六個點連同  $C$  則會構成  $K_{3,3}$  的細分圖，都不可能。 ■

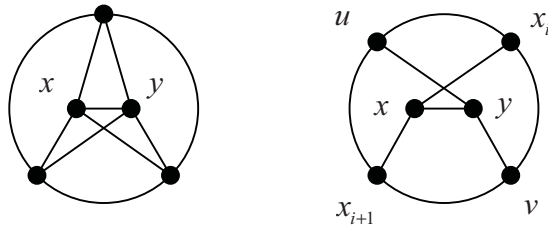


圖 6.15：剩下的兩種情況都會導致 Kuratowski 子圖出現。

因此，上面的結果整合起來就意味著 Kuratowski 定理的成立。

另外一種很重要的平面圖刻畫方式跟所謂的「次圖」有關。我們說圖  $H$  是圖  $G$  的**次圖** (minor)、記作  $H \leq G$  <sup>③</sup>，如果  $H$  可以藉由反覆地將  $G$  進行刪除邊、收縮邊或刪除孤立點的動作而得到 <sup>④</sup>。顯然  $G$  所有的細分圖都以  $G$  為其次圖 (因為我們可以藉由將度數為 2 的點旁邊的邊收縮掉以得到  $G$ )，但是反之則未必 (除了某些特殊情況，見習題 6.12)。圖 6.16 就是一個簡單的例子。

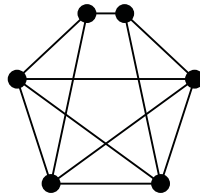


圖 6.16： $K_5$  為此圖之次圖，但此圖不包含  $K_5$  之細分圖。

顯然平面圖的次圖仍舊是平面圖，所以平面圖必定不可能有  $K_5$  或  $K_{3,3}$  作為次圖，而類似於 Kuratowski 定理，這個敘述反過來也對：

**定理 6.19 (Wagner, 1937)：**圖  $G$  是平面圖，若且唯若  $K_5, K_{3,3} \not\leq G$ 。

利用 Kuratowski 定理，我們不難證明這個結果，留給讀者作習題 (見習題 6.13)。



## 6.4 外圍平面圖

我們說一個平面圖是**外圍平面圖** (outerplanar graph)，如果它具有一種平面嵌入方式使得所有的點都位於外圍面的邊界上。類似地，一個外圍平面圖連同這種嵌入方式就稱為**外圍平版圖** (outerplane graph)。

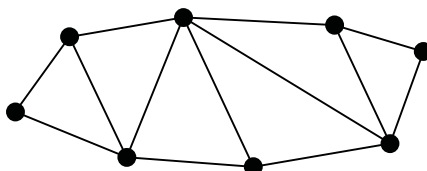


圖 6.17：一個外圍平版圖。

外圍平面圖是平面圖一種比較容易處理的特例，當我們考慮關於一般平面圖的性質時，經常會先考慮在外圍平面圖上驗證看看，這就類似於樹在一般圖問題當中的地位。具體的例子我們在之後再來談，而這邊我們先來看一些關於外圍平面圖的基本性質。

**引理 6.20：**2-連通外圍平版圖  $G$  的外圍面之邊界是  $G$  的生成圈。

**證明：**根據定義，所有的點都在外圍面的邊界上。如果這個邊界不是圈，那它就必須通過某點超過一次，這麼一來這個點就會是一個截點。 ■

**引理 6.21：**設 2-連通外圍平版圖的點、邊、面數為  $n, e, f$ ，則  $e \leq 2n - 3$ 。

**證明：**每個面至少都有三邊，但是根據引理 6.20，外圍面恰有  $n$  邊，因此會得到

$$3(f-1) + n \leq 2e, \text{ 亦即 } f \leq \frac{2e-n}{3} + 1,$$

代入 Euler 多面體公式就會得到  $e \leq 2n - 3$ 。 ■

**定理 6.22：** $K_4$  和  $K_{2,3}$  是平面圖但不是外圍平面圖。

**證明：**容易驗證它們都是 2-連通平面圖。如果  $K_4$  是外圍平面圖，根據引理 6.21 有  $6 \leq 2 \times 4 - 3 = 5$  矛盾；而  $K_{2,3}$  沒有生成圈（不然這會導致一個二分圖具有長度為 5 的圈），故也不是外圍平面圖。 ■

類似地，諸位可能會猜到是否將上面的定理反過來可以得到類似 Kuratowski 定理或 Wagner 定理的結論。這確實沒錯，而且利用 Kuratowski 或 Wager 定理，要證明外圍平面圖的情況是比較容易的。

**定理 6.23：**圖  $G$  是外圍平面圖若且唯若  $K_4, K_{2,3} \not\leq G$ 。

**證明：**必要性如前所述。要證明充分性，我們在  $G$  當中新增一個頂點  $v$ ，使它與原來的所有頂點都相鄰。令這個新的圖為  $G'$ 。如果  $K_4, K_{2,3} \not\leq G$ ，那麼就有  $K_5, K_{3,3} \not\leq G'$ ，因此根據 Wagner 定理， $G'$  是一個平面圖。考慮  $G'$  的任一種平面嵌入，則  $G$  在對應的嵌入中必定有一個面包含所有的點（這個面即  $v$  所在的位置），利用引理 6.12 將這個面翻到外面去就可以得到  $G$  的外圍平面嵌入。 ■

而關於細分圖的敘述之定理亦可用完全相同的論證處理之。

不止是 Wagner 定理還是定理 6.23，其實很多類圖形的判別準則都可以表示成「排除掉某個清單中的圖作為次圖」這樣的形式。相對來講，一個圖是否為平面圖的判斷準則是比較簡單的，而要判斷一個圖是否能嵌入其他類型的曲面會是比較複雜而困難的問題。舉例來說，我們目前已經知道有超過八百種基本的次圖結構是在判斷一個圖能不能嵌入環面時必須被排除的，可是排除掉這些之後是否已經意味著該圖就能嵌入環面，目前仍舊不知道。

只不過，可以確定的是，這個清單一定是有限的。關於這個現象的一般性結論是由 Wagner 在 1937 年所猜想<sup>⑤</sup>，並最後由 Robertson 與 Seymour 所證明的重大定理所給出：

**定理 6.24（次圖定理，Robertson & Seymour [14]，1983-2004）：**對於任意一個由無窮個圖構成的集合，裡面總是有某個圖是別的圖的次圖。

這個定理也被稱為是 Robertson-Seymour 定理，它被認為是截至目前為止圖論中最困難而且也最讓人感到不可思議的定理，是兩人在 1983 到 2004 年間陸續由二十篇系列論文所發表，其證明全部加起來足足超過五百頁，並且開創了圖論中許多嶄新的理論和思路。根據這個定理，我們立刻可以得到如下的結果。首先我們定義，對於一個圖族  $\mathcal{S}$ （即圖所構成的集合），如果  $\mathcal{S}$  當中的圖的次圖也都屬於  $\mathcal{S}$ ，我們就說  $\mathcal{S}$  是**次圖封閉**的（minor-closed）。

**推論 6.25：**如果一個圖族  $\mathcal{S}$  是次圖封閉的，那麼就存在一個有限個圖的集合  $\mathcal{S}'$ ，使得命題「 $G \in \mathcal{S}$  若且唯若對於所有  $G' \in \mathcal{S}'$ ， $G' \not\leq G$ 」成立。

**證明：**令  $\bar{\mathcal{S}}$  是  $\mathcal{S}$  的補集，並取  $\mathcal{S}'$  是  $\bar{\mathcal{S}}$  當中所有在  $\bar{\mathcal{S}}$  裡面沒有別的圖作為次圖的圖所構成的集合，則  $\mathcal{S}'$  必是有限的，不然根據次圖定理， $\mathcal{S}'$  裡面一定有某個圖是  $\mathcal{S}'$  中另一個圖的次圖，跟  $\mathcal{S}'$  的選法矛盾。

如果  $G \in \mathcal{S}$ 、但是存在某個  $G' \in \mathcal{S}'$  使得  $G' \leq G$ ，則因為  $\mathcal{S}$  是次圖封閉的，得到  $G' \in \mathcal{S}$ ，這與  $G' \in \mathcal{S}' \subseteq \bar{\mathcal{S}}$  矛盾。反過來，如果  $G \notin \mathcal{S}$ ，但對所有的  $G' \in \mathcal{S}'$  恆有  $G' \not\leq G$ ，那麼特別地就有  $G \notin \mathcal{S}'$ （否則  $G \leq G$  與前一則敘述矛盾），所以  $G$  在  $\bar{\mathcal{S}}$  當中至少有一

個別的次圖；令  $G^*$  是  $G$  在  $\bar{\mathcal{S}}$  當中的次圖當中點邊最少的一個，於是  $G^*$  在  $\bar{\mathcal{S}}$  當中再也沒有別的次圖，故  $G^* \in \mathcal{S}'$  但  $G^* \leq G$ ，矛盾。 ■

例如，Wagner 定理就是在上面的推論中取  $\mathcal{S}$  為「所有平面圖所構成的圖族」的特例，而它所找到的  $\mathcal{S}' = \{K_5, K_{3,3}\}$ ，而定理 6.23 顯示若取  $\mathcal{S}$  為外圍平面圖之圖族，就會得到  $\mathcal{S}' = \{K_4, K_{2,3}\}$ 。類似地，如果取  $\mathcal{S}$  為林之圖族（這也是次圖封閉的），則  $\mathcal{S}' = \{C_3\}$ 。這些都是比較簡單的例子，而一般來說要精確描述一個次圖封閉集合的排除清單都不是容易的工作。目前為止，除了平面（以及等價的球面）之外的曲面當中唯一已經被確認出完整的次圖排除清單的只有**射影平面**（projective plane），其排除清單由 35 個圖所構成。

另外，對應於 Kuratowski 定理，如果把次圖定理的內容改成細分圖的話會成立嗎？結果是不會，無窮圖集中不見得一定有一個圖包含了另一個圖的細分圖（見習題 6.15），而其結果是，如果要用細分圖作為排除清單，可能就有必要列出無限個圖才有辦法。

## 6.5 平面程度的度量

如前所述我們知道並不是所有圖都是平面圖，或者，更正確地說，幾乎所有的圖都不是平面圖<sup>⑥</sup>。對於非平面圖，我們有興趣想了解它們究竟跟平面圖有多接近。要如何衡量圖跟平面圖接近程度的方法有很多，本節中將介紹兩種，一種稱為**厚度**（thickness），另一種是**交叉數**（crossing number）。

一個圖  $G$  的厚度  $t(G)$  是指最小的正整數  $k$ 、使得我們可以將  $G$  分解成  $k$  個平面圖。可以想像我們在透明的投影片上各畫上一些平面圖、使得疊起來之後的圖形會變成原來的圖  $G$ ，而這個需要的最少投影片張數就是所謂的厚度。例如  $K_5$  和  $K_{3,3}$  雖然不是平面圖，但是前者可以分成  $K_{1,4}$  和  $K_4$  兩個平面圖、而後者可以分成  $K_{1,3}$  和  $K_{2,3}$ ，故有  $t(K_5) = t(K_{3,3}) = 2$ 。圖  $G$  的交叉數  $c(G)$  則是指當我們把  $G$  畫在平面上時，邊的內點相交的最少可能次數<sup>⑦</sup>。

**性質 6.26：**對任意有  $n$  點  $m$  邊的圖  $G$ ，恆有  $t(G) \geq m/(3n-6)$ 。若更進一步  $G$  沒有三角形，則  $t(G) \geq m/(2n-4)$ 。

**證明：**這是因為根據引理 6.13， $G$  所分出的每個平面圖都不會超過  $3n-6$  條邊；而若  $G$  沒有三角形則不會超過  $2n-4$  條邊。 ■

**推論 6.27：** $t(K_n) \geq \lceil (n+2)/6 \rceil$ 。

**證明：**當  $n \leq 4$  時推論顯然成立。而當  $n \geq 5$  時，由性質 6.26 知道有

$$t(K_n) \geq \frac{n(n-1)/2}{3n-6} = \frac{n+1}{6} + \frac{2}{6n-12},$$

因此  $t(K_n) \geq \lceil (n+2)/6 \rceil$ 。

其實對大部分  $K_n$  來說，等式  $t(K_n) = \lceil (n+2)/6 \rceil$  是成立的。要說明此事，只要能將  $K_n$  的邊分解為  $\lceil (n+2)/6 \rceil$  個部分、每個部分皆能組成平面圖即可。以  $n=8$  為例，首先畫一個  $K_4$  的平版圖，其頂點為 1, 2, 3, 4；接著在其四個面上各加入點  $1', 2', 3', 4'$  並各自連到該面的三個點，使得只剩下  $ii'$  以及  $i'j'$  ( $i \neq j$ ) 尚未連邊（圖 6.18 中的  $G_1$ ）。 $K_8$  剩餘的邊很容易就可以畫成平版圖  $G_2$ 。注意到圖中  $G_1$  跟  $G_2$  的點的擺放位置並不一樣，但這其實並沒有關係，因為我們只要以任何一種方式確認  $G_2$  存在平面畫法，我們就可以接著畫出  $G_2$  的另一種平面嵌入、使得點的位置跟  $G_1$  的位置是一樣的（參見習題 6.16）。

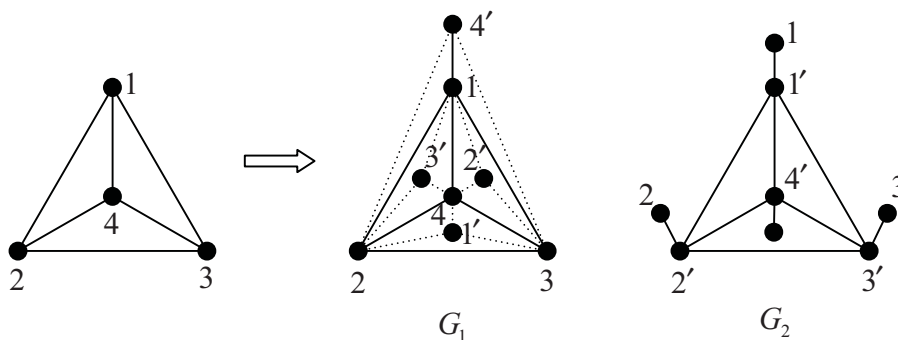


圖 6.18：  $K_8$  的邊分解成兩個平面圖  $G_1$  和  $G_2$ 。

對於大部分的  $n$  值， $K_n$  的厚度都可以用類似上面的構造方式確定出來；比較困難的是  $K_9$  和  $K_{10}$ 。由推論 6.27 我們只知道  $t(K_{10}) \geq t(K_9) \geq 2$ ，而由  $t(K_8) = 2$  亦可輕易得到  $t(K_{10}) \leq 3$ 。事實上  $t(K_{10}) = t(K_9) = 3$ ，這個證明是困難的。總結起來，Beineke [2]、Beineke & Harary [3]、Vasak [24] 及 Alekseev & Gonchakov [1] 證明了：

**定理 6.28：**  $t(K_n) = \begin{cases} \lceil (n+2)/6 \rceil, & n \neq 9, 10; \\ 3, & n = 9, 10. \end{cases}$

有的時候，為了實際的需要，我們必須將一個非平面圖畫在平面上，例如晶片上的電路設計，就對應於將圖畫在平面上的設計。這時候，線路的交叉可能會造成晶片功能降低，甚至產生問題。所以，一個交叉較少的畫法就顯得格外重要，這個時候我們就必須考慮交叉數的問題。對於平面圖  $G$  來說都有  $c(G) = 0$ ，而圖 6.15 則顯示  $c(K_5) = c(K_{3,3}) = 1$ 。

**例 6.29：**  $c(K_6) = 3$  而  $c(K_{3,2,2}) = 2$ 。

對於一個有  $n$  點的圖  $G$  來說，假設我們已經將它畫在平面上使其僅有  $c(G)$  個交叉。取  $G$  的最大平版子圖  $H$ ，則知道  $c(G) \geq e(G) - e(H)$ ，因為  $H$  以外的每一條邊都必須和  $H$  交叉。可是  $H$  最多也只有  $n$  點，所以  $e(H) \leq 3n - 6$ ，或者如果  $G$  沒有三角形的話，還有  $e(H) \leq 2n - 4$ 。

由於  $K_6$  有 15 條邊，而 6 點的平面圖最多是 12 條邊，所以  $c(K_6) \geq 15 - 12 = 3$ 。而由圖 6.19 的畫法知道  $c(K_6) = 3$ 。

而  $K_{3,2,2}$  有 16 條邊，但 7 點的平面圖最多是 15 條邊，所以  $c(K_{3,2,2}) \geq 16 - 15 = 1$ 。但是圖 6.19 的畫法只能讓我們知道有  $c(K_{3,2,2}) \leq 2$ 。為了改進下界，我們進一步考慮  $K_{3,2,2}$  的子圖  $K_{3,4}$ ，它有 7 個點和 12 條邊，且沒有三角形。沒有三角形的 7 點平面圖最多是 10 條邊，因此  $c(K_{3,4}) \geq 12 - 10 = 2$ ，故  $c(K_{3,2,2}) = c(K_{3,4}) = 2$ 。■

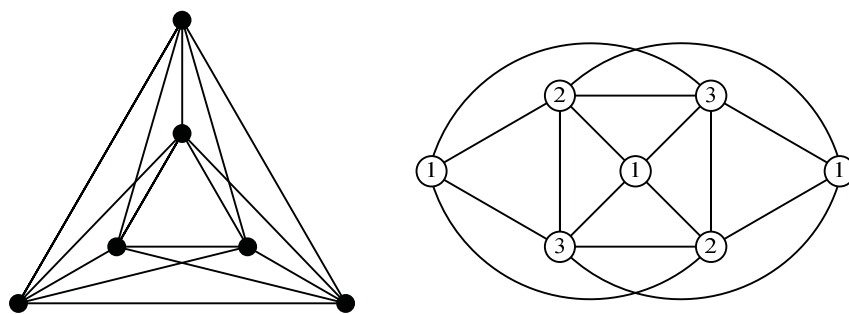


圖 6.19：  $K_6$  和  $K_{3,2,2}$  的畫法。右圖的數字標示出圖的三部分。

將上述例子的概念抽離出來，並做一點小小的推廣，就可以得到：

**性質 6.30：**若圖  $G$  有  $m$  邊，而  $k$  是其平面子圖最大的邊數，則  $c(G) \geq m - k$ 。更進一步而言， $c(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2}$ 。

**證明：**假設已經將  $G$  畫在平面上使得僅有  $c(G)$  個交叉。令  $H$  是  $G$  最大平版子圖，則  $e(H) \leq k$ ，因此  $E(G) \setminus E(H)$  和  $E(H)$  之間最少有  $m - k$  個交叉，故  $c(G) \geq m - k$ 。

令  $G' = G \setminus E(H)$ ，則  $G'$  至少有  $m - k$  條邊，而且如果  $H'$  是  $G'$  的最大平版子圖，則  $E(G') \setminus E(H')$  和  $E(H')$  之間最少有  $(m - k) - k$  個交叉。繼續用同樣的方法，會得到至少有

$$\sum_{i=1}^s (m - ik) = ms - k \frac{s(s+1)}{2}$$

個交叉點，其中  $s = \lfloor m/k \rfloor$ ，或者可以說  $m = sk + r$ 、其中  $0 \leq r < k$ 。用  $s = (m - r)/k$  代入，就可以得到

$$c(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2} + \frac{r(k-r)}{2k}.$$



相較於前面的定理 6.28，目前我們並不清楚  $c(K_n)$  的確切值。利用性質 6.30 來計算  $c(K_n)$  可以得到

$$c(K_n) \geq \frac{(n(n-1)/2)^2}{2(3n-6)} - \frac{n(n-1)/2}{2} = \frac{1}{24}n^3 + O(n^2),$$

但這個下界其實並不好，因為實際上  $c(K_n)$  是一個類似  $n$  的四次多項式的數值。首先，如果我們將  $K_n$  的點畫在一個圓周上，則任四點最多有一對邊相交，因此可以得到

$$c(K_n) \leq \binom{n}{4} = \frac{1}{24}n^4 + O(n^3)$$

這個結果。更精確的結果是：

**定理 6.31 (Guy [10]):**  $\frac{1}{120}n^4 + O(n^3) \leq c(K_n) \leq \frac{1}{64}n^4 + O(n^3)$ 。

**證明：**我們利用計數論證來證明下界如下。 $K_n$  的一個使得交叉數最少的畫法包含了  $n$  個  $K_{n-1}$ ，每個至少都有  $c(K_{n-1})$  個交叉，這些加起來一共有  $nc(K_{n-1})$  個交叉，但每個交叉都被重複算了  $n-4$  次，因此知道  $(n-4)c(K_n) \geq nc(K_{n-1})$ 。利用這個關係，我們要用歸納法證明  $c(K_n) \geq \frac{1}{5}\binom{n}{4}$ 。當  $n=5$  時這確實成立。而當  $n>5$  時有

$$c(K_n) \geq \frac{n}{n-4}c(K_{n-1}) \geq \frac{n}{n-4} \frac{1}{5} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} = \frac{1}{5}\binom{n}{4},$$

因此就得到下界。

要證明上界，我們考慮  $n=2k$  的情況。我們知道將圖畫在平面上跟把圖畫在球面、或一個圓柱體上都是等價的。現在我們將其中  $k$  個點平均地放在圓柱的上緣、另外  $k$  個點放在下緣的對應處，於是圓柱的上下面分別連成了  $k$ -點團、而圓柱的側面則連接著所有上下的邊。我們可以將圓柱側面的邊依照它所連接的上下兩點錯開的程度自然地分成  $k$  類，數值從 1 到  $k$  不等，如圖 6.20 所示。注意到邊的斜向總是往同一個方向，而且如果要連接對應的點，邊實際上是繞了側面一圈之後再連接。



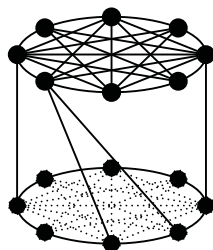


圖 6.20：圓柱畫法。圖中顯示的是錯開度分別為 1 和 2 的邊。

我們可以用同樣的軌跡畫同一類的邊、使得同一類的邊彼此不會交叉。現在，考慮上下各取兩點  $x, y$  和  $z, w$ ，並假設  $x, z$  在順序上是在前面的。由圖 6.21 我們不難看出， $x, y, z, w$  會有交叉、若且唯若  $y, z, w$  是遞增順序。於是，在側面的交叉數一共是  $k \binom{k}{3}$  那麼多，故總共的交叉數便是  $c(K_n) \leq 2 \binom{k}{4} + k \binom{k}{3} = \frac{1}{64} n^4 + O(n^3)$ 。

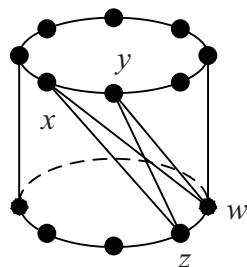


圖 6.21：交叉情況之示意圖。

再來我們考慮  $c(K_{m,n})$ 。按照普通的畫法，會把兩部分的點放在一組平行線上，然後中間的邊全部都畫成直線。如果按照這種畫法，任意從兩部分中各取兩點所連的邊都會恰有一個交叉，所以知道  $c(K_{m,n}) \leq \binom{m}{2} \binom{n}{2}$ 。不過，我們可以稍做一點小改變，使得這個上界縮小成原來的四分之一左右。首先，將第一部份的  $m$  點分成兩半，其中  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  點放在正  $x$  軸上、另外的  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  點放在負  $x$  軸上。同樣地，把第二部分的其中  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  點放在正  $y$  軸上，另外  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  點放在負  $y$  軸上。這麼一來，就會得到

$$c(K_{m,n}) \leq \left\{ \binom{\lceil m/2 \rceil}{2} + \binom{\lfloor m/2 \rfloor}{2} \right\} \left\{ \binom{\lceil n/2 \rceil}{2} + \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\} = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

的結果 (Zarankiewicz [27])。Guy [8] 猜想這個上界就是真正的答案，而 Kleitman [11] 也證明當  $\min\{m, n\} \leq 6$  時這確實是對的。Woodall [26] 用電腦幫忙驗證了更多的情況，使得目前尚不確定的最小例子改進到  $K_{7,11}$  和  $K_{9,9}$ 。另外，利用 Kleitman 的結果，Guy [9] 證明了  $c(K_{m,n}) \geq m^{\frac{m-1}{5}} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  (見習題 6.20)。

最後我們要舉一個交叉數在平面幾何問題上的應用。在這之前，我們需要一個比性質 6.30 更強的結果：

**定理 6.32**：設簡單圖  $G$  有  $n$  點  $m$  邊。如果  $m \geq 4n$ ，則  $c(n) \geq \frac{m^3}{64n^2}$ 。

**證明**：我們準備對  $n$  做歸納法。當  $n \leq 11$  時， $m \leq n(n-1)/2 \leq 5n$ 。令  $m = \alpha n$ ，其中  $4 \leq \alpha \leq 5$ ，此時  $\alpha - 3 \geq \alpha^3/64$ ，所以

$$c(G) \geq m - 3n = (\alpha - 3)n \geq \frac{\alpha^3 n}{64} = \frac{m^3}{64n^2}。$$

值得注意的是無論  $n$  是多少，只要  $m \leq 5n$  上面的論證都可行。

於是我們考慮  $m > 5n$  的情況，此時有  $n > 11$ ，並且假定定理對於較小的  $n$  都已經成立。給定一個  $G$  的最佳畫法，並考慮所有子圖  $G-x$ ，其中  $x \in V(G)$ 。 $G$  的畫法中的每一交叉點會出現在  $n-4$  個  $G-x$  的對應畫法當中，所以  $(n-4)c(G) \geq \sum_{x \in V(G)} c(G-x)$ 。由歸納法假設， $c(G-x) \geq (m-d(x))^3/64(n-1)^2$ ，所以

$$c(G) \geq \sum_{x \in V(G)} \frac{(m-d(x))^3}{64(n-1)^2(n-4)}。$$

將右式視為是  $d(x)$  的函數，則由其凸性知道可以將  $d(x)$  換成其平均值  $2m/n$ ，於是

$$c(G) \geq \frac{n(m-2m/n)^3}{64(n-1)^2(n-4)} \geq \frac{m^3}{64n^2}。 \quad \blacksquare$$

Erdős [5] 在 1946 年曾提問，在平面上給  $n$  個點，最多可以產生多少距離為 1 的點對。首先我們可以將點放在單位格子點上，這樣可以產生  $2n - O(\sqrt{n})$  單位距離點對。將這個作法再精鍊，Erdős 可以做到大約  $n^{1+c/\ln \ln n}$  那麼多的單位距離點對。從線性到非線性的解是一大進步，但這然比  $n^{1+\varepsilon}$  還小，無論  $\varepsilon$  是多小的正數。

Erdős 也給了一個  $O(n^{3/2})$  的上界。其想法如下，因為兩個單位圓最多交在兩點，單位距離圖  $G$  不能含有  $K_{2,3}$ ，其中  $G$  是以該  $n$  點為頂點、並將距離為 1 的點對連邊。基於這個理由，任兩點最多有兩個公共鄰居，而又因為每個點  $v$  皆為其  $\binom{d(v)}{2}$  個鄰居的共同鄰居，所以  $2\binom{n}{2} \geq \sum_v \binom{d(v)}{2}$ 。由於函數的凸性，我們可以用平均度數  $2m/n$  來取代  $d(v)$ ，得到

$$2\binom{n}{2} \geq n\binom{2m/n}{2}，並由此解得  $m \leq \frac{n}{4} + \frac{n}{4}\sqrt{8n-7}。$$$

Spencer、Szemerédi 和 Trotter [16] 用數論的方法，將上界降低到  $O(n^{4/3})$ 。下面我們提供一個 Székely [17] 利用定理 6.32 給的造法。

**定理 6.33**：平面上  $n$  個點中最多有  $8n^{4/3}$  組單位距離對。

**證明：**只要在不減少單位距離對的情況下逐步調整每個點或點對的位置，我們可以假定這些點全部都被包含在至少兩組單位距離對當中；如果有一個點只被包含在一個單位距離對裡，我們可以將它對著其配對點移動或旋轉、直到它和另外一點也為單位距離為止。

令  $P$  為一個  $n$  點的最佳配置，使得它具有  $q$  個單位距離對。現在我們由  $P$  來造一個圖，不過這次不是把單位距離對連邊，而是對每一個點畫一個半徑為 1 的圓；如果這個點被包含在  $k$  個單位距離對中，那麼對應的  $k$  個點就會把該圓分成  $k$  段弧線，而這些弧線就是我們要造的圖  $G$  的邊。於是  $G$  有  $2q$  條邊。

由於兩點至多可以同時出現在兩個單位圓上，而最糟的情況就是這兩個圓上面就只有這兩點，因此  $G$  最多可能會有四重邊，但是不會有更多重。如果有重邊，我們就只保留其中一個並去掉其他的邊，於是得到一個至少有  $q/2$  條邊的簡單圖  $G'$ 。

我們可以假設有  $q \geq 8n$ ，不然定理的上界自動已經成立。於是，套用定理 6.32，就知道  $G'$  至少會有  $\frac{1}{512}q^3/n^2$  個交叉。不過，因為我們是以圓弧畫邊，任兩個圓頂多只有兩個交叉，而總共有  $n$  個圓，因此至多只有  $2\binom{n}{2}$  個交叉。於是便可由  $\frac{1}{512}q^3/n^3 \leq 2\binom{n}{2}$  解得  $q \leq 8n^{4/3}$ 。 ■

## 習題

- 6.1 是否對於任意正整數  $n$  均存在一個有  $n$  點的 4-正則平面圖？若有，請構造之；若沒有，請證明。
- 6.2 試將  $K_7$  嵌入到環面上。
- 6.3 考慮三維空間中的一條參數曲線  $\ell: (x, y, z) = (t, t^2, t^3)$ ，試證明這個曲線上任意相異四點都不共面（提示：可考慮 Vandermonde 行列式）。因此，給定任意圖  $G$ ，我們都可以將它的點依序排列在這個曲線上，然後以直線連接有連邊的點，因為任意四點不共面所以這些直線彼此都不會相交。這就完成了任意圖的三維直線嵌入。
- 6.4 (a) 假設  $R$  是平面上的一個被至多五條邊的簡單多邊形（即邊不交叉的多邊形）所包圍的區域，試證明  $R$  當中存在一點  $x$  可以「看到」 $R$  當中的所有點，也就是說，任意給定  $R$  中的另一點  $y$ ，則  $xy$  的連線段都落在  $R$  之中。  
 (b) 試用 (a) 的結果，配合歸納法證明 Fáry 定理：任何平面簡單圖都存在一種直線嵌入。這種嵌入又叫 Fáry 嵌入。
- 6.5 給定一個平版圖  $G$ ，在繪製其對偶  $G^*$  時我們使每條對偶邊  $e^*$  僅穿過  $e$  而不和其他邊相交。試證明下列敘述：  
 (a)  $G^*$  為連通圖。

(b) 若  $G$  為連通，則  $G^*$  的每一面恰包含一個  $G$  的頂點。

(c)  $(G^*)^* = G$  若且唯若  $G$  是連通的。

6.6 證明  $n$  點的平版圖若和其對偶圖同構，則此圖恰有  $2n-2$  條邊。對  $n \geq 4$ ，造出一個和其對偶圖同構而有  $n$  點的平版圖。

6.7 證明沒有 6-連通的平面圖。

6.8 造出無限個簡單平面圖，使其最小度數為 5，而恰有 12 個點度數為 5。

6.9 證明有  $n$  點且腰圍為  $k$  的簡單平面圖最多有  $(n-2)\frac{k}{k-2}$  條邊。利用這個結論證明 Petersen 圖不是平面圖。

6.10 圖 6.22 為 Headwood 圖，其點集為  $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$ ，邊集為  $E = \{ij : 0 \leq i \leq 13, j = (i+1) \bmod 14\} \cup \{ij : 0 \leq i \leq 13, 2 \nmid i, j = (i+5) \bmod 14\}$ 。試證明 Headwood 圖不是平面圖。

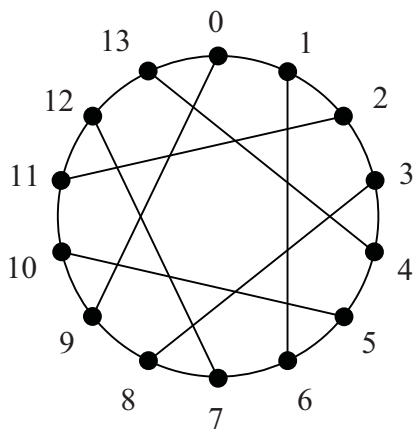


圖 6.22 : Headwood 圖。

6.11 如果一個二元關係  $\preceq$  滿足反身性、遞移性和**反對稱性** (antisymmetric, 也就是說  $a \preceq b$  且  $b \preceq a$  可以導致  $a = b$ ) 的話，我們就說  $\preceq$  是一個**偏序** (partial ordering) 關係。試驗證次圖關係  $\leq$  是一個偏序關係。

6.12 設  $H$  滿足  $\Delta(H) \leq 3$ ，證明  $G$  包含  $H$  的細分圖若且唯若  $H$  為  $G$  的次圖。

6.13 利用 Kuratowski 定理證明 Wagner 定理。

6.14 證明一個至少有 6 點的 3-連通圖如果包含有  $K_5$  的細分圖，那就必定包含有  $K_{3,3}$  的細分圖。

6.15 試構造一族無限個圖，使得其中沒有一個包含另一個的的細分圖。

6.16 設  $G$  為平面圖，其頂點為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，且設  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$  為平面上  $n$  個給定的相異點。試證明存在  $G$  的一種平面嵌入、使得每一個點  $v_i$  都被畫在  $p_i$  的位置上。

6.17 求  $t(K_{4,4})$  和  $t(K_{5,5})$ 。

- 6.18 圖  $P_n^k$  的點集為  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 、邊集為  $\{ij : 1 \leq |i - j| \leq k\}$ 。試求  $c(P_n^3)$  和  $c(P_n^4)$ 。
- 6.19 令  $f(n) = c(K_{n,n,n})$ 。
- (a) 證明  $3c(K_{n,n}) \leq f(n) \leq 3\binom{n}{2}$ 。
- (b) 證明  $c(K_{3,3,1}) = 3$ ， $5 \leq c(K_{3,3,2}) \leq 7$  且  $9 \leq c(K_{3,3,3}) \leq 15$ 。
- (c) 利用 (b) 及遞迴關係證明  $f(n) \geq n^3(n-1)/6$ 。
- (d) 證明  $f(n) \leq \frac{9}{16}n^4 + O(n^3)$ （這改進了 (a) 的上界  $\frac{3}{4}n^4 + O(n^3)$ ）。
- 6.20 根據 Kleitman 的結果，我們有  $c(K_{6,n}) = 6\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 。利用這個結果和計數論證說明：
- (a)  $c(K_{m,n}) \geq m \frac{m-1}{5} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 。
- (b)  $c(K_n) \geq \frac{1}{80}n^4 + O(n^3)$ （Guy [10]。這改進了定理 6.31 的結果）。

## 附註

- ① 可能基於該故事， $K_{3,3}$  有個別名叫**設施圖**（utility graph）。關於三個房子和三種設施之間的管線架設問題，據了解是由 H. E. Dudeney [4] 在 1917 年提出的，該故事後來甚至被改編成了一個受到全球網友熱烈討論的網路小遊戲（<http://www.supuzzle.com>），但是，當然，那個小遊戲在完全不作弊的情況下是無解的（可是因為其操作介面有一些小漏洞的緣故，陸續有網友發現了「破解之道」，乃至於網路上仍有謠傳三個房子與設施的問題是有解的，但其實那些都是歪解而已）。
- ② 全名 Kasimir Kuratowski。據說他有一次曾經向 Harary 問起  $K_5$  和  $K_{3,3}$  的符號是怎麼來的，結果他回答「 $K_5$  的  $K$  是指 Kasimir，而  $K_{3,3}$  的  $K$  是指 Kuratowski！」
- ③ 或者有些書上可能會記做  $H \preceq G$ 。這兩種符號都暗示著它實際上是一個偏序關係（見習題 6.11）。
- ④ 不難看出，這也相當於是說： $H$  可以藉由將  $G$  的某個子圖反覆進行收縮邊的動作後得到。某些書上的定義會遺漏掉刪除孤立點的這個操作；但若根據這種定義，Wagner 定理和 6.4 節提到的次圖定理都不會成立。
- ⑤ 雖然，據說 Wagner 曾經表示過其實他從來沒有提出過這樣的猜想。
- ⑥ 關於這個敘述的精確說法，我們可以考慮所有由不超過  $n$  個點所構成的圖，並去計算其中有多少是平面圖。如果我們將該比例記作  $P(n)$  的話，可以證明有  $P(n) \rightarrow 0$ 。細節可以參考後面的定理 13.21 以及習題 13.8。
- ⑦ 其他的圖論著作中可能會將  $t(G)$  記作  $\vartheta(G)$ 、而將  $c(G)$  記作  $\nu(G)$ （此為希臘字母 nu）。

## 參考文獻

- [1] V. R. Alekseev, V. S. Gonchakov; Thickness of arbitrary complete graphs, *Math. Sbornik.*, vol. 101 (143) (1976), pp. 212-230.
- [2] L. W. Beineke, The decomposition of complete graphs into planar subgraphs, *Graph Theory Theor. Physis*, Acad. Prees, New York (1967), pp. 139-154.
- [3] L. W. Beineke, F. Harary; The genus of the  $n$ -cube, *Cand. J. Math.*, vol. 17 (1965), pp. 494-496.
- [4] H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Nelson (1917).
- [5] P. Erdős, On sets of distances of  $n$  points, *Am. Mat. Mo.*, vol. 53 (1946), pp. 248-50.
- [6] L. Euler, Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, *Novi. Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol*, vol. 4 (1758), pp. 140-160.
- [7] I. Fáry, On the straight line representations of planar graphs, *Acta Sci. Math.*, vol. 11 (1948), pp. 229-233.
- [8] R. K. Guy, The decline and fall of Zarankiewicz's theorem, in: *Proof Techniques in Graph Theory* (ed. F. Harary), Acad. Prees (1969), pp. 63-69.
- [9] R. K. Guy, Sequences associated with a problem of Turán and other problems, *Proc. Combin Conf. Balatonfüred 1969*, *Bolyai János Matematikai Társulat* (1970), pp. 553-569.
- [10] R. K. Guy, Crossing numbers of graphs, in: *Graph Theory & Appl.*, Kalamazoo 1972 (ed. Y. Alavi et al), *Lect. Notes Math.* 303, Springer (1972), pp. 111-124.
- [11] D. J. Kleitman, The crossing number of  $K_{5,n}$ , *J. Combin. Theory*, vol. 9 (1970), pp. 315-323.
- [12] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, vol. 15 (1930), pp. 271-283.
- [13] H. Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, vol. 117 (1893), pp. 144-145.
- [14] N. Robertson and P. Seymour, Graph Minors. XX. Wagner's conjecture, *Journal of Combinatorial Theory*, ser. B, vol. 92(2) (2004), pp. 325-357
- [15] L. Schläfli, Theorie der vielfachen Kontinuität, *Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gessel*, vol. 38 (1901), pp. 1-237.



- [16] J. H. Spencer, E. Szemerédi, and W. T. Trotter, Unit distances in the Euclidean plane, in: *Graph Theory and Combinatorics* (Cambridge, 1983), Academic Press (1984), pp. 293-303.
- [17] L. A. Székely, Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry, *Combin. Probab. Comput.*, vol. 6 (1997), pp. 353-358.
- [18] C. Thomassen, Planarity and duality of finite and infinite graphs, *J. Combin. Theory* (B), vol. 29 (1980), pp. 244-271.
- [19] C. Thomassen, Kuratowski's Theorem, *J. Graph Theory*, vol. 5 (1981), pp. 225-241.
- [20] W. T. Tutte, Convex representation of graphs, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 10 (1960), pp. 304-320.
- [21] P. Turán, A note of welcome, *J. Graph Theory*, vol. 1 (1977), pp. 7-9.
- [22] W. T. Tutte, The non-biplane character of the complete 9-graph, *Cand. Math. Bull.*, vol. 6 (1963), pp. 319-330.
- [23] W. T. Tutte, How to draw a graph, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 13 (1963), pp. 743-767.
- [24] J. Vasak, The thickness of the complete graph having  $6m + 4$  points, Manuscript, cited in N. Hartsfield & G. Ringel., *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 192.
- [25] K. Wager, Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, vol. 46 (1936), pp. 21-22.
- [26] D. R. Woodall, Cyclic-order graphs and Zarankiewicz's crossing-number conjecture, *J. Graph Theory*, vol. 17 (1993), pp. 657-671.
- [27] K. Zarankiewicz, On a problem of P. Turán concerning graphs, *Fund. Math.*, vol. 41 (1954), pp. 137-145.