20220325

作业

1

> 化下列λ-阵为标准型：

1.

> $$\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

。■

2.

> $$\begin{pmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

2

> 求不变因子

1.

> $$\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$$

先求行列式：按第$1,2$行展开得

$$
=\begin{vmatrix}\lambda+\alpha & \beta \\ -\beta & \lambda+\alpha\end{vmatrix}^2=((\lambda+\alpha)^2+\beta^2)^2\neq 0
$$

且易知$((\lambda+\alpha)^2+\beta^2)$在$\mathbb{R}$中不可约（即为$\mathbb{R}$上的标准分解式）。

因为行列式$\neq 0$，知秩为4。求行列式因子：

1. $D_1=1$（$A\binom{1}{3}=1$）
2. $D_2=1$（$A\binom{1,2}{3,4}=1$）
3. $D_3=1$（$\deg A\binom{1,2,3}{2,3,4}=1$，故$\deg D_3\leq 1$，因为$D_3=((\lambda+\alpha)^2+\beta^2)^k$知$D_3=1$）
4. $D_4=((\lambda+\alpha)^2+\beta^2)^2$（因为$D_4=$行列式）

因此，不变因子为：

1. $d_1=D_1=1$
2. $d_2=D_2/D_1=1$
3. $d_3=D_3/D_2=1$
4. $d_4=D_4/D_3=((\lambda+\alpha)^2+\beta^2)^2$

2.

> $$
> \begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2\end{pmatrix}
> $$

求行列式，为$\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5\neq 0$。

求行列式因子：

1. $D_1=1$（$A\binom{1}{2}=-1$）
2. $D_2=1$（$A\binom{1,2}{2,3}=1$）
3. $D_3=1$（$A\binom{1,2,3}{2,3,4}=-1$）
4. $D_4=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$

因此，不变因子为：

1. $d_1=D_1=\boxed{1}$
2. $d_2=D_2/D_1=\boxed{1}$
3. $d_3=D_3/D_2=\boxed{1}$
4. $d_4=D_4/D_3=\boxed{\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5}$

20220329

1

> 求下列复阵的Jordan标准型

1.

> $$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

求$\lambda E-A$的标准型得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) \end{pmatrix}$$

计算得该复阵的Jordan标准型为：

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}}$$

2.

> $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

考虑如何求$\lambda E-A$的初等因子：

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

按前两列展开，得其行列式$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 4 & \lambda+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^4$。

又因为当$\lambda=1$时$A\binom{2,3,4}{1,2,3}=3\neq 0$，故$(A\binom{2,3,4}{1,2,3},(\lambda-1)^4)=1$，因而$A$的$1,2,3$阶行列式因子均为$1$。

因此，可得该复阵的Jordan标准型为：

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3.

> $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

考虑$A-\lambda E$:

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

其行列式为$(\lambda-1)^4$。又因为当$\lambda=1$时$A\binom{1,2,3}{2,3,4}=8\neq 0$，故$(A\binom{1,2,3}{2,3,4},\lambda-1)=1$，故$A$的$1,2,3$阶行列式因子均为$1$。

因此，可得该复阵的Jordan标准型：

$$\boxed{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

2

> 已知不变因子值，求初等因子。（分别在$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$上）

1)

> $1,\dots,1,\lambda,\lambda^2(\lambda-1),(\lambda-1)^3(\lambda+1)\lambda^2$

$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$上的初等因子**均为**$\boxed{\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,(\lambda-1)^3,\lambda+1}$。

2)

> $1,\dots,1,\lambda^2+1,\lambda(\lambda^2+1),\lambda^3(\lambda^2+1)^2(\lambda-1)(\lambda^2-2)$

$\mathbb{Q}$上的初等因子为$\boxed{\lambda^2+1,\lambda^2+1,(\lambda^2+1)^2,\lambda,\lambda^3,\lambda-1,\lambda^2-2}$。

$\mathbb{R}$上的初等因子为$\boxed{\lambda^2+1,\lambda^2+1,(\lambda^2+1)^2,\lambda,\lambda^3,\lambda-1,\lambda-\sqrt{2},\lambda+\sqrt{2}}$。

$\mathbb{C}$上的初等因子为$\boxed{\lambda+i,\lambda+i,(\lambda+i)^2,\lambda-i,\lambda-i,(\lambda-i)^2,\lambda,\lambda^3,\lambda-1,\lambda-\sqrt{2},\lambda+\sqrt{2}}$。

3

> 已知矩阵的初等因子值，求不变因子值

1)

> $\lambda\quad\lambda^2\quad\lambda^2\quad\lambda-\sqrt{2}\quad(\lambda-\sqrt{2})^2\quad\lambda+\sqrt{2}\quad(\lambda+\sqrt{2})^2$

不变因子为：$\boxed{1,\dots,1,\lambda,\lambda^2(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}),\lambda^2(\lambda-\sqrt{2})^2(\lambda+\sqrt{2})^2}$。

2)

> $\lambda-1 \quad (\lambda-1)^3 \quad \lambda+1 \quad \lambda+1 \quad (\lambda+1)^3 \quad \lambda-2 \quad (\lambda-2)^2$

不变因子为：$\boxed{1,\ldots,1,\lambda+1,(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2),(\lambda+1)^3(\lambda-1)^3(\lambda-2)^2}$。

4

> 求下列阵的有理标准形（视为$\mathbb{Q}$上）

1.

> $$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

因为该矩阵的特征多项式为$\lambda^3-6\lambda^2-15\lambda+37$，易验证在$\mathbb{Q}$上不可约，故其有理标准型为：

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -37 \\ 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}}$$

2.

> $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

求该矩阵的标准型得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^4 \end{pmatrix}$$

因此，其有理标准型为：

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}}$$

20220401

习题8.1

2

> 判断实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 中的下列函数组是否线性无关：

(2)

> $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x$

取 $x=0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ ，因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$$

所以它们线性无关。■

(5)

> $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, \cdots, e^{nx}$

取任意$n+1$个互不相同的$x_1, \ldots, x_{n+1}$，分别令$x=x_1, \ldots, x_{n+1}$，因为范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & (e^{x_1})^1 & (e^{x_1})^2 & \ldots & (e^{x_1})^n \\ 1 & (e^{x_2})^1 & (e^{x_2})^2 & \ldots & (e^{x_2})^n \\ 1 & (e^{x_3})^1 & (e^{x_3})^2 & \ldots & (e^{x_3})^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & (e^{x_{n+1}})^1 & (e^{x_{n+1}})^2 & \ldots & (e^{x_{n+1}})^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(e^{x_i}-e^{x_j}) \neq 0$$

所以它们线性无关。■

6

> 说明数域 K 上所有 n 级对称矩阵组成的集合 V_1，对于矩阵的加法与数量乘法，形成K上一个线性空间，求V_1的一个基和维数。

因为K^n是线性空间，要证其子集 V_1 是成线性空间只需证：

1. 加法封闭：$\forall A, B \in V_1$，有$A+B=A^T+B^T=(A+B)^T$，故$A+B \in V_1$。
2. 数量乘法封闭：$\forall k \in K, A \in V_1$，有$kA=kA^T=(kA)^T$，故$kA \in V_1$。

因此V_1是线性空间。

考虑 $A_{ij}=E_{ij}+E_{ji}$。则对所有$A_{ij}\ (i<j)$与E_{ii}，易证：

1. 线性无关。
2. 所有V_1中矩阵都可被它们表出。

故它们构成一组基。维数即为基的数量$\frac{(n+1)n}{2}$。■

7

> 说明数域 K 上所有 n 级斜对称矩阵组成的集合 V_2，对于矩阵的加法与数量乘法，形成K上一个线性空间，求V_1的一个基和维数。

因为K^n是线性空间，要证其子集 V_2 是成线性空间只需证：

1. 加法封闭：$\forall A, B \in V_1$，有$A+B=-A^T-B^T=-(A+B)^T$，故$A+B \in V_2$。
2. 数量乘法封闭：$\forall k \in K, A \in V_1$，有$kA=k(-A^T)=-(kA)^T$，故$kA \in V_1$。

因此 V_2 是线性空间。

考虑 $A_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$。则对所有A_{ij} $(i<j)$，易证：

1. 线性无关。
2. 所有V_1中矩阵都可被它们表出。

故它们构成一组基。维数即为基的数量$\frac{(n-1)n}{2}$。■

9

> 在 K^3 中，设
>
> $$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$
> $$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$
>
> 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵，并且求向量 $\alpha=(2,5,3)^T$ 分别在这两个基下的坐标 X, Y 。

过渡矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{pmatrix}$$

坐标

$$X=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\alpha=\begin{pmatrix}2\\-5\\10\end{pmatrix}$$
$$Y=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{-1}\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

10

> 证明：在数域 K 上的 n 维线性空间 V 中，如果每一个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 V 的一个基。

因为 $\mathrm{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \dim\langle\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\rangle = \dim V = n$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关。因此，

1. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关
2. V 中的每一个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出

故 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 V 的一个基。$\blacksquare$

11

> 设 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，$F$是一个域。定义域为 X 的所有 F 值函数组成的集合记作 F^X，它是域 F 上的一个线性空间。求F^X的一组基和维数。并且求函数 f 在这个基下的坐标。

对$i = 1, 2, \ldots, n$，令 f_i 为满足以下条件的函数：

$$f_i(x) = \begin{cases} 1_F, & x = x_i \\ 0_F, & x \neq x_i \end{cases}$$

易知f_i线性无关。

则对于任何$f \in F^X$，有$f = \sum_i f(x_i) f_i(x)$，故任何 f 都能被 f_i 表出。

因此，f_i 是一组基，f在这组基下的坐标是$(f(x_1), \ldots, f(x_n))^T$。

~~20220405（清明节）~~

20220407

习题8.2

2

> 设 A 是数域 K 上的一个 n 级矩阵。证明：数域 K 上所有与 A 可交换的矩阵组成的集合是 $M_n(K)$ 的一个子空间，把它记作 $C(A)$。

因为$C(A) \subseteq M_n(K)$，只需证明$C(A)$在加法与数量乘法下封闭。

1. 加法：$\forall B, C \in C(A)$，有$(B + C)A = BA + CA = AB + AC = A(B + C)$。故$B + C \in C(A)$。
2. 数量乘法：$\forall k \in K, B \in C(A)$，有$(kB)A = k(BA) = k(AB) = A(kB)$，故$kB \in C(A)$。

因此，$C(A)$是子空间，得证。$\blacksquare$

3

> 设$A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$是数域$K$中两两不同的数，求$C(A)$的一个基和维数。

$$
\begin{aligned}
B \in C(A) &\iff AB = BA \\
&\iff \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}B = B\operatorname{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \\
&\iff (a_i b_{ij})_{n\times n} = (b_{ij}a_j)_{n\times n} \\
&\iff \forall i \neq j, b_{ij} = 0 && (\because a_i\text{与}a_j\text{至少有一个} \neq 0)
\end{aligned}
$$

故$C(A)$的一个基为(E_{ii})（$i = 1, \ldots, n$），维数为n。■

4

> 设数域K上的3级矩阵
>
> $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> 求$C(A)$的维数和一个基。

解$AX = XA$的其次线性方程组得其维数为3，一个基为：

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

7

> 设V是域F上一个n维线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$V$的一个基，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$是$V$的一个向量组，并且
>
> $$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$
>
> 证明：$\langle\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\rangle$的维数等于$n \times s$矩阵$A$的秩。

设$A = (a_{ij})_{n\times s}, r = \operatorname{rank}(A)$，则$\beta_i = \sum_j \alpha_j a_{ji}$。取$A$的列的一个极大线性无关组，设为第$a_1, \ldots, a_r$列，则易证$\beta_{a_1}, \ldots, \beta_{a_r}$为$(\beta_i)$的一个极大线性无关组。故$\dim\langle\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\rangle = \operatorname{rank}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = r$。

10*

> 设$V_1, V_2 \cdots, V_s$是域F上线性空间V的s个真子空间，证明：如果$\operatorname{char} F = 0$，则$V$中至少有一个向量不属于$V_1, V_2, \ldots, V_s$中任何一个。

数学归纳法：

1. $s = 1$时：由**真**子空间知显然。
2. $s = k+1$时：由归纳假设，存在$\alpha \notin V_1 \cup \cdots \cup V_k$。
   1. 若$\alpha \notin V_{k+1}$，则$\alpha \notin V_1 \cup \cdots \cup V_{k+1}$，得证。
   2. 否则，若$\alpha \in V_{k+1}$：取$\beta \notin V_{k+1}$。易知$\forall l \in F, \beta + l\alpha \notin V_{k+1}$。

      因为$i \leq k$时，$\alpha \notin V_i$，V_i为线性空间，所以当$\gamma \in V_i, l \neq 0$时$l\alpha + \gamma \notin V_i$。

因此，$|\{\beta+l\alpha\}\cap V_i|\le 1$。故存在$l_0\in F$使得$l_0\alpha+\gamma\notin V_i,\forall i$。得证。■

12

> 设$V=K^4$，$V_1=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$，$V_2=\langle\beta_1,\beta_2\rangle$，其中
> $$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-3\\5\\-4\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}4\\-3\\3\\1\end{pmatrix},$$
> 分别求$V_1+V_2,V_1\cap V_2$的一个基和维数。

将$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$化成行最简形得：

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得V_1+V_2的一个基$\boxed{(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1)}$，知$\boxed{\dim(V_1+V_2)=3}$。

可以看出来，$\dim V_1=2,\dim V_2=2$，知$\dim V_1\cup V_2=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=\boxed{1}$。

由于$\beta_2+\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$，知$\beta_1+\beta_2=\boxed{(5,-1,5,2)^T}$为一组基。

14

> 证明：数域K上每一个n维线性空间V都可以表示成n个一维子空间的直和。

任取V的一组基$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$，知$V=\langle a_1,\dots,a_n\rangle=\sum_i\langle\alpha_i\rangle$，$\dim V=n=\sum_i\dim\langle\alpha_i\rangle$，故$\sum_i\langle\alpha_i\rangle$是直和，$V=\bigoplus_{i=1}^n\langle\alpha_i\rangle$。■

15

> 用$M_n^0(K)$表示$M_n(K)$中迹为0的矩阵组成的集合，K是数域。

(1)

> 证明：$M_n^0(K)$是线性空间$M_n(K)$的一个子空间。

只需证明封闭性：

1. 加法：$\forall A,B\in M_n^0(K)$有$\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)=0$，故$A+B\in M_n^0(K)$。
2. 纯量乘法：$\forall A\in M_n^0(K),k\in K$有$\operatorname{tr}(kA)=k\operatorname{tr}(A)=0$，故$kA\in M_n^0(K)$。

得证。■

(2)

> 证明：$M_n(K)=\langle I\rangle\oplus M_n^0(K)$。

先证$M_n(K)=\langle I\rangle+M_n^0(K)$：

$\forall A\in M_n(K)$，取$B=\frac{\operatorname{tr}(A)}{n}I,C=A-\frac{\operatorname{tr}(A)}{n}I$，知$B\in\langle I\rangle,C\in M_n^0(K)$。

再证是直和：因为显然$\langle I\rangle\cap M_n^0(K)=\langle 0\rangle$，所以是直和。

综上，得证。■

16

> 设A是数域K上的n级矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$是$A$的全部不同的特征值，用$V_{\lambda_j}$表示$A$的属于$\lambda_j$的特征子空间。证明：$A$可对角化的充分必要条件是
>
> $$K^n=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$$

$$\begin{aligned}
A\text{可对角化}&\iff\sum_i\dim V_{\lambda_i}=n\\
&\iff\sum_i V_{\lambda_i}=K^n\qquad\qquad(\because V_{\lambda_i}\text{两两的交为}0)\\
&\iff\bigoplus_i V_{\lambda_i}=K^n
\end{aligned}$$

得证。■