经济学原理第一次作业

1.

> （偏好与选择）已知张三的效用函数为 $U = X^\alpha + Y^\alpha$，参数 $\alpha > 0$。求 $X = 10, Y = 5$ 时的边际替代率 MRS_{XY}。

由定义。

$$MRS_{XY} = \frac{\partial U/\partial X}{\partial U/\partial Y} = \frac{\alpha 10^{\alpha-1}}{\alpha 5^{\alpha-1}} = \boxed{2^{\alpha-1}}$$

2.

> （交换、分工与货币）荒岛上只有鲁滨逊和星期五两个人，他们可以通过劳动摘到椰子或者捕鱼。假定鲁滨逊只捕鱼的话每天最多能捕 10 条鱼，只摘椰子的话最多能摘 5 个。星期五只捕鱼的话每天最多能捕 8 条鱼，只摘椰子的话最多能摘 12 个。（假设两人的生产可能性边界都是线性的，且鱼和椰子树都是整数，即鲁滨逊少捕 2 条鱼就可以多摘 1 个椰子，而星期五少捕 2 条鱼就可以多摘 3 个椰子）。
>
> 两人的效用函数分别如下：假设X为鱼的数量，Y为椰子的数量，
>
> 鲁滨逊的效用函数为: U = X + 1.6Y
>
> 星期五的效用函数为: U = XY

(1)

> 假设两人无法进行交易，此时求他们每个人的最优选择。（注意 X， Y 都只能取整数）。

计算可得，鲁滨逊的生产可能性边界上的效用函数 U 的值为：

X	Y	U = X + 1.6Y
10	0	**10（此时最大）**
8	1	9.6
6	2	9.2
4	3	8.8
2	4	8.4
0	5	8

星期五的生产可能性边界上的效用函数 U 的值为：

X	Y	Z = XY
8	0	0
7	1	7
6	3	18
5	4	20
4	6	**24（此时最大）**
3	7	21
2	9	18
1	10	10
0	12	0

因此，鲁滨逊的最优选择是 $(X, Y) = (10, 0)$，星期五的最优选择是 $(X, Y) = (4, 6)$（X为鱼的数量，Y为椰子的数量）。

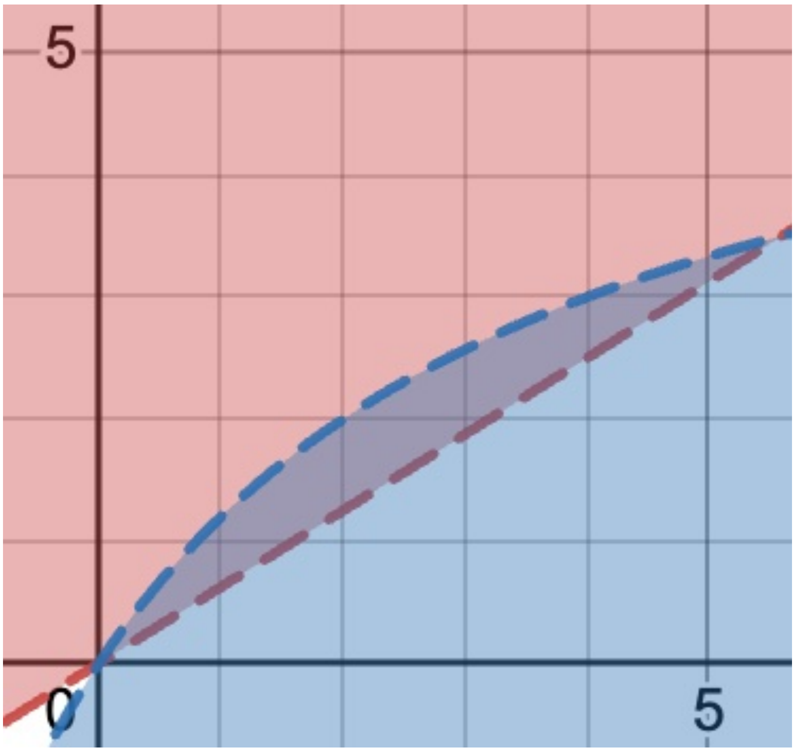
(2)

> 假设两人在劳动时选择了（1）中的最优选择，然后两人碰头进行交易。求可能的交易结果以及此时椰子和鱼的价格。（假设只有两个人在交易后的效用都严格大于交易前的效用，此时交易才会发生。）（此处价格指的是鱼和椰子的相对价格。）

假设交易过后，鲁滨逊的 $(X', Y') = (10 - \Delta X, 0 + \Delta Y)$， 星期五的 $(X', Y') = (4 + \Delta X, 6 - \Delta Y)$，则 $\Delta X, \Delta Y$ 为正整数，且需要满足：

$$\begin{cases} -\Delta X + 1.6\Delta Y > 0 \\ (4 + \Delta X)(6 - \Delta Y) > 24 \end{cases}$$

考虑其函数图像的相交部分：



解得 $(\Delta X, \Delta Y) = (1,1)$或$(3,2)$。

所以，可能的交易结果为：

1. 鲁滨逊用 1 个鱼换了 1 个椰子。此时的相对价格（鱼/椰子）为 1 。
2. 鲁滨逊用 3 个鱼换了 2 个椰子。此时的相对价格（鱼/椰子）为 1.5 。

(3)

> 假设两人在劳动时选择了（1）中的最优选择，此时岛上又来了罗宾斯，他愿意以 1:1 的比例交易鱼和椰子（数量不限）。求鲁滨逊和星期五此时的最优选择。

此时，设最后鲁滨逊的组合为 (X_1, Y_1)，星期五的组合为 (X_2, Y_2)。

假设鲁滨逊和星期五不进行交易。

考虑鲁滨逊的决策。他在 $\Delta X + \Delta Y = 0$ 的前提下，要最大化 $X + 1.6Y$。换句话说，要最大化 $\Delta X + 1.6\Delta Y = 0.6\Delta Y$。很明显，鲁滨逊只需要最大化 ΔY 即可。此时他的最优选择为 $(X_1, Y_1) = (0, 10)$ 。

考虑星期五的决策。他在 $\Delta X + \Delta Y = 0$的前提下，要最大化

$$(4+\Delta X)(6+\Delta Y) - 24 = 2\Delta X - \Delta X^2 = 1 - (1-\Delta X)^2$$

此时当 $\Delta X > 0$ 时有【略，原因见下】

> 作业第2题的第3小问因为题目出的有些歧义，所以第3小问就不用写了
>
> *——助教*

3.

> （消费者选择与需求曲线）假设一个双人间宿舍住着 A、B 两个同学，面对两种商品：辣条（用 x 表示）和可乐（用 y 表示）。A 同学的效用函数为 $U_A=\min(\frac{x}{2},y)$，这一效用函数形式被称作 Leontief 效用函数，此时两种商品对 A 来说是完全互补关系。B 同学的效用函数为线性形式 $U_B=x+2y$，此时两种商品对 B 来说是完全替代关系
>
> 为了理解完全替代和完全互补的含义，请考虑以下场景：

(1)

> 假设 A 同学拿着 10 元钱去超市买辣条和可乐，辣条的市场价格 $p_x=1$，可乐的市场价格 $p_y=3$，假设 A 同学想让自己的效用最大，则 A 同学最终购买辣条和可乐的量是多少?

显然，当 $xp_x+yp_y\le 10$时，由 $p_x,p_y>0$ 可知，当 U_A 最大时， $U_A=\min(\frac{x}{2},y)=\frac{x}{2}=y$:

解

$$\begin{cases}xp_x+yp_y=10\\ \frac{x}{2}=y\end{cases}$$

得 $(x,y)=(4,2)$。

(2)

> 将(1)中的 A 同学换成 B 同学，B 同学最终购买辣条和可乐的量是多少?

相当于求 $x+3y\le 10$ 时 $U_B=x+2y$ 的最大值。

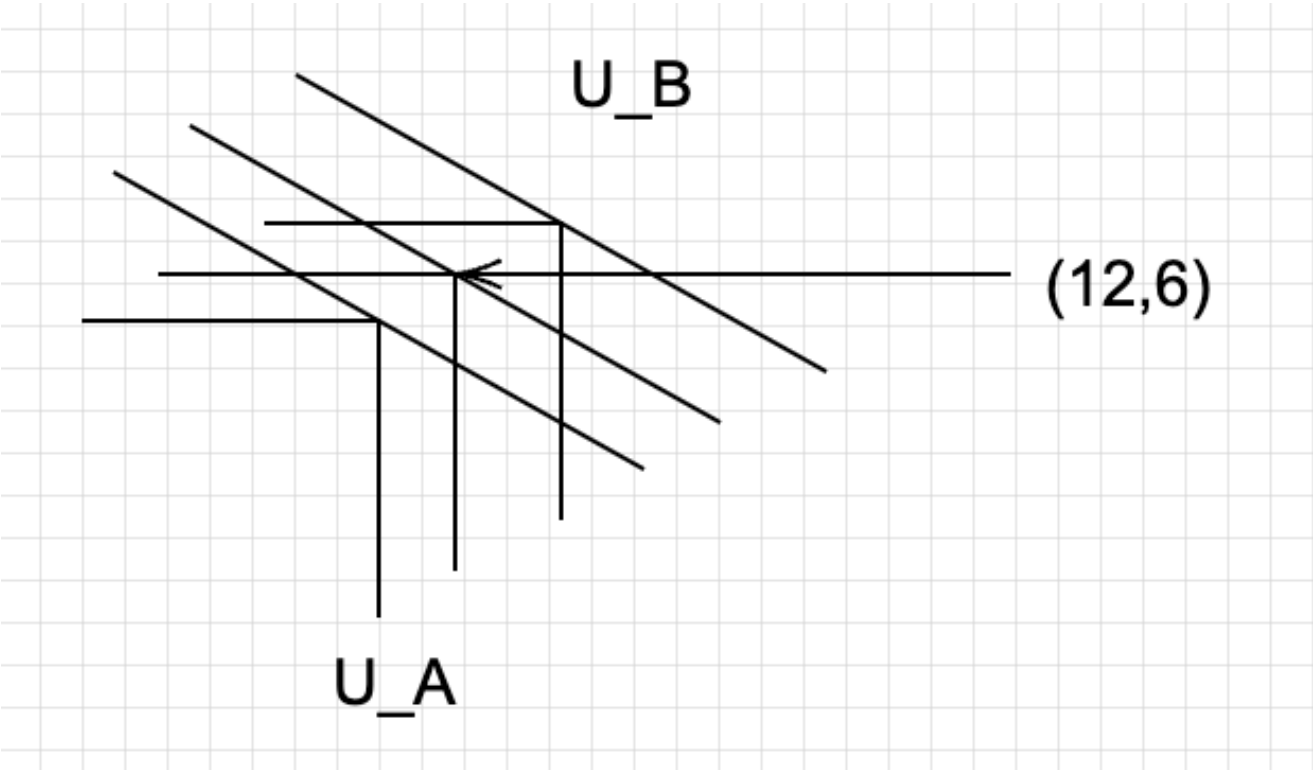
$$U_B=x+2y=(x+3y)-y\le 10-y\le 10$$

等号当 $y=0,x=10$ 时取到。

(3)

> (交换、分工与货币)假设 A、B 两个人在宿舍里屯了 20 袋辣条和 10 瓶可乐，除此之外没有别的食物。一天深夜里，A、B 两人都饥肠辘辘，与此同时，宿舍深夜门禁导致他们不能出门买其他食物。因此理性的他们只能分配这些现有的辣条和可乐(Hint:可以用埃奇沃思盒分析下面的题目)。
>
> (3) 假设 A 拥有 8 袋辣条、4 瓶可乐，剩下都由 B 拥有，如果双方可以交换，且不存在任何的交易成本，则理性的 A、B 二人交换后，A 拥有多少辣条和可乐?

由题意，$(x_A,y_A)=(8,4)$，$(x_B,y_B)=(12,6)$:



如图，显然任何使 U_A 增加的交易都会使得 U_B 减小，反之亦然。

所以，交换后，$(x'_A, y'_A) = (x_A, y_A) = (8, 4)$，$(x'_B, y'_B) = (x_B, y_B) = (12, 6)$。

另外，也可以用数学语言进行证明。

因为 A、B 都理性，所以在交易后的 $U'_A \geq U_A$，因为开始时$x_A = \frac{y_A}{2}$，故 $x'_A - x_A \geq 0, y'_A - y_A \geq 0$。

又因为 B 理性，故 $U'_B \geq U_B$，即 $(x'_B - x_B) + (y'_B - y_B) \geq 0$。

又因为交易在两者之间进行，所以 $(x'_A - x_A) = -(x'_B - x_B)$，$(y'_A - y_A) = -(y'_B - y_B)$。

所以，有

$$0 \leq (x'_B - x_B) + (y'_B - y_B) = -(x'_A - x_A) - (y'_B - y_B) \leq 0$$

因此，交换后，$(x'_A, y'_A) = (x_A, y_A) = (8, 4)$，$(x'_B, y'_B) = (x_B, y_B) = (12, 6)$。

(4)

> 假设 A 拥有 8 袋辣条、6 瓶可乐，剩下都由 B 拥有，如果双方可以交 换，且不存在任何的交易成本，最终理性的 A、B 二人交换后，A 可能拥有多少辣条和可乐?(Hint:最终答案是一个区间)

显然，A 最后拥有的 (x'_A, y'_A) 满足 $\frac{x'_A}{2} = y'_A$。否则，，因为 A 是理性的，A 可以把多余的东西和 B 进行交换，甚至送给 B，这对 A 并没有损失。

因此，设 A 最后拥有的 $(x'_A, y'_A) = (2a, a)$。

由 $U'_A \geq U_A, U'_B \geq U_B$ 知：

$$\begin{cases} U'_A = a \geq 4 \\ U'_B = (20 - 2a) + 2(10 - a) = 40 - 4a \geq U_B = 20 \end{cases}$$

解得 $4 \leq a \leq 5$。

因此，A 可能拥有的 $(x'_A, y'_A) \in \{(x,y) \mid x = 2y, y \in [4,5]\}$。B 可能拥有的 $(x'_B, y'_B) \in \{(x,y) \mid x = 2y, y \in [5,6]\}$。

4.

> （消费者选择与需求曲线）小余前往商店购买两种商品。假设他的总收入为 m，两种商品的价格分别为 p_1, p_2 ，而他的购买量分别为x_1, x_2，其效用函数为：$U(x_1,x_2) = x_1 + \ln x_2$

(1)

> 写出他面临的预算约束、消费最优化条件

预算约束为：

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

消费最优化条件为：

$$\frac{\partial U(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial U(x_1,x_2)/\partial x_2} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2} = -1\text{，否则}x_1 = 0\text{或}x_2 = 0$$

其中 $\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}x_2$ 表示 $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ 的隐函数导数，它的值为 $-\frac{p_2}{p_1}$。

解得条件为：

1. 当 $m \geq p_1$ 时 $x_2 = \frac{p_1}{p_2}, x_1 = \frac{m}{p_1} - 1$
2. 当 $m < p_1$ 时 $x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}$。

(2)

> （以下两问不考虑角点解，即小余购买的最优产品组合总是满足 x_1、x_2 均为正）
>
> (2) 当商品 2 涨价 10%后，小余对 2 种商品的购买量如何变化？收入效应、替代效应对x_2 的分别作用？

由题意，$p'_2 = 1.1p_2$

因为不考虑角点解，所以 $x'_2 = \frac{p'_1}{p'_2} = \frac{10}{11}\frac{p_1}{p_2} = \frac{10}{11}x_2$ 。

故商品 1 的购买量增加了 $\frac{1}{11}$，商品 2 的购买量减少了 $\frac{1}{11}\frac{p_1}{p_2}$。

因为收入变化不影响价格 p_1, p_2 ，所以不影响 $x_2 = \frac{p_1}{p_2}$ ，因此**收入效应为零**。

替代效应相当于考虑当等效用曲线 $x_1 + \ln x_2 = U$ 固定时， x_2 如何随该曲线的隐函数 $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}$ 变化。

计算得

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2} = -\frac{1}{x_2}$$

知，当商品 2 相对价格下降，即 $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}$ 上升时， x_2 上升。**——这是替代效应。**

(3)

> 写出小余选择的商品 1 最优购买量x_1^* (Hint: x_1 是有关 m, p_1, p_2 的函数)

因为不考虑角点解，由(1)知：

$$x_1^* = \frac{m}{p_1} - 1$$