20220304

1)

> $$f(x)=2x^3-3x^2+\lambda x+3$$
> $$g(x)=x^3+\lambda x+1$$
>
> λ 为何值时，f,g 有公因子?

f,g 有公因子 $\iff f,g$的结式$R(f,g)=0$。

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}2&-3&\lambda&3&0&0\\0&2&-3&\lambda&3&0\\0&0&2&-3&\lambda&3\\1&0&\lambda&1&0&0\\0&1&0&\lambda&1&0\\0&0&1&0&\lambda&1\end{vmatrix}=-2x^3-18x^2-15x+26$$

因式分解，得$R(f,g)=-(x+2)(2x^2+14x-13)$，故$R(f,g)=0\iff\boxed{x=-2,-\frac{7\pm5\sqrt{3}}{2}}$.

2)

> 求 $R(x^n+x+1,x^2-3x+2)$.

显然，$n\geq 2$。

$$R(x^n+x+1,x^2-3x+2)=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&1&1&0\\0&1&0&\cdots&0&1&1\\1&-3&2&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&0&0\\0&0&0&\cdots&-3&2&0\\0&0&0&\cdots&1&-3&2\end{vmatrix}=:A$$

将该矩阵沿第一、第二行分解得下列行列式：

1. $A\binom{1,2}{1,2}=2^n$
2. $A\binom{1,2}{1,n+1}=2\times(2^n-1)$
3. $A\binom{1,2}{1,n+2}=2^{n+1}-1$
4. 当$n>2$时，$A\binom{1,2}{n,2}=-4\times(2^{n-2}-1)$
5. 当$n>2$时，$A\binom{1,2}{n,n+1}=2$
6. $A\binom{1,2}{n,n+2}=(-1)^{1+2+n+(n+2)}\times(-3)=3$
7. 当$n>2$时，$A\binom{1,2}{n+1,2}=-2\times(2^{n-1}-1)$
8. $A\binom{1,2}{n+1,n+2}=1$

当$n>2$时，和为$3\times2^n+9$。$n=2$时，和为21，也满足此式，故总和为$\boxed{3\times2^n+9}$。

3)

> 设$f,g\in F[x],\lambda\in F$。证明：$R(f,(x-\lambda)g(x))=(-1)^{\deg f}f(\lambda)R(f,g)$.
>
> 提示：依次第 $1,2,...$ 列之 λ 倍加到后一列上，再从第 $2,...,m$ 行乘λ加到上一行上。

考虑$R(f,(x-\lambda)g(x))$：

$$\begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_i & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & \cdots & a_i & \cdots & a_0 \\ b_m & \cdots & b_i-\lambda b_{i+1} & \cdots & -\lambda b_0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m & \cdots & b_i-\lambda b_{i+1} & \cdots & -\lambda b_0 \end{vmatrix}$$

依次第 $1,2,...$ 列之 λ 倍加到后一列上，得：

$$\begin{vmatrix} a_n & \cdots & \sum_{k=i}^n a_k\lambda^{k-i} & \cdots & f(\lambda) & \cdots & f(\lambda)\lambda^{m-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & \cdots & \sum_{k=i}^n a_k\lambda^{k-i} & \cdots & f(\lambda) \\ b_m & \cdots & b_i & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m & \cdots & b_i & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

再从第 $2,...,m$ 行乘$-\lambda$加到上一行上，得：

$$\begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_i & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & \cdots & \sum_{k=i}^n a_k\lambda^{k-i} & \cdots & f(\lambda) \\ b_m & \cdots & b_i & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m & \cdots & b_i & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将行列式按最后一列展开，得：

$$(-1)^{n+m+m}f(\lambda)\begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_i & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & \cdots & a_i & \cdots & a_0 \\ b_m & \cdots & b_i & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m & \cdots & b_i & \cdots & b_0 \end{vmatrix}=(-1)^{\deg f}f(\lambda)R(f,g)$$

得证。■

习题7.5

1(2)

> 判断 $f(x)=x^3+2x^2-11x-12$ 有无重因式。

$f'(x)=3x^2+4x-11$，$(f'(x),f(x))=1$。

由定理3知，$f(x)$无重因式。■

6

> 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中求一个没有重因式的多项式 $g(x)$，使它与 $f(x)$ 含有完全相同的不可约多项式（不计重数）；然后求$f(x)$的标准分解式：
>
> $$f(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$$

$f'(x)=5x^4-12x^3+6x^2+4x-3$，$(f'(x),f(x))=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$.

令$g(x)=\frac{f(x)}{(f'(x),f(x))}=\boxed{x^2-1}$即满足题意。

$f(x)=g(x)\cdot(f'(x),f(x))$ 的标准分解式是 $\boxed{(x-1)^4(x+1)}$。

7

> 证明：$K[x]$中一个 n 次多项式 $f(x)$ 能被它的导数整除的充分必要条件是它与一个一次因式的 n 次幂相伴。

$n=0$时，$f'(x)=0$，而$0\nmid f(x)$，不满足题目条件。下面假设$n\neq 0$。

设$f(x)$有$m\geq 1$个不同的不可约多项式$p_k(x)$，它的标准分解式为$c\prod_{k=1}^m p_k^{d_k}(x)$：易知 $n=\sum_{k=1}^m d_k\deg p_k(x)$，$(f'(x),f(x))=\prod_{k=1}^m p_k^{d_k-1}(x)$。

$$\begin{aligned}
f'(x)|f(x) &\iff (f'(x),f(x))\sim f'(x)\\
&\iff \deg(f'(x),f(x))=n-1\\
&\iff \deg\frac{f(x)}{(f'(x),f(x))}=1\\
&\iff \sum_{k=1}^m \deg p_k(x)=1\\
&\iff m=1,\deg p_1(x)=1\\
&\iff f(x)\sim p_1^n(x)
\end{aligned}$$

得证。■

习题7.6

1

> 设 $f(x)=x^5+7x^4+19x^3+26x^2+20x+8\in\mathbb{Q}[x]$，判断 -2 是不是多项式 $f(x)$ 的根，如果是的话，它是几重根?

$f(-2)=0$，故-2是多项式$f(x)$的根。

$f(x)=(x+2)^3(x^2+x+1)$，故 -2 是 $f(x)$ 的 $\boxed{3}$ 重根。

2

> 设 $f(x)=2x^3-7x^2+4x+a\in\mathbb{Q}[x]$，求 a 值，使 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 中有重根，并且求出相应的重根及其重数。
>
> （提示:$c\in\mathbb{Q}$是$f(x)$的重根 $\iff$ $x-c$是$f(x)$的重因式 $\iff$ $x-c$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式 $\iff$ $x-c$是$(f(x),f'(x))$的因式）

$f'(x)=6x^2-14x+4=2(x-2)(3x-1)$。

由提示，c 是重根 $\Rightarrow (x-c)\mid f'(x)$。

1. $c=2$：$f(c)=a-4=0\Rightarrow a=4$。此时$f(x)=(x-2)^2(2x+1)$，重数为2。
2. $c=\frac{1}{3}$：$f(c)=\frac{17}{27}+a\Rightarrow a=-\frac{17}{27}$。此时$f(x)=\frac{1}{27}(3x-1)^2(6x-17)$，重数为 2。

综上，$\boxed{a=4,-\dfrac{17}{27}}$。

3

> 求下列复系数多项式在复数域上的公共根。
>
> $$f(x)=x^3-x^2-x-2,\quad g(x)=x^4-2x^3+2x^2-3x-2$$
>
> （提示：$a\in\mathbb{C}$是$f(x)$与$g(x)$的公共根 $\iff$ $x-a$是$f(x)$与$g(x)$的公因式 $\iff$ $x-a$是$(f(x),g(x))$的因式）

求$(x^3-x^2-x-2,x^4-2x^3+2x^2-3x-2)$得$x-2$。

因此，$f(x)$与$g(x)$在复数域上的公共根是$\boxed{x=2}$。

4

> 设 $f(x)=x^4-5x^3+ax^2+bx+9\in\mathbb{Q}[x]$，如果3是$f(x)$的二重根，求$a,b$。

因为3是二重根，所以$(x-3)^2|f(x)$。

设$f(x)=g(x)(x-3)^2$，知$\deg g=2$，设$g(x)=ux^2+vx+w$，考虑$f(x)$的首位和末尾得$u=1,w=1$，故有：

$$x^4+(w-6)x^3+(10-6w)x^2+(9w-6)x+9=x^4-5x^3+ax^2+bx+9$$

解得$w=1$，故$\boxed{a=4,b=3}$。

5

> 证明：在$K[x]$中，如果$(x+1)|f(x^{2n+1})$，则$(x^{2n+1}+1)|f(x^{2n+1})$。

因为$(x+1)|f(x^{2n+1})$，知$x=-1$时$f(x^{2n+1})=0$，即$0=f((-1)^{2n+1})=f(-1)$。

又因为$f(-1)=0$，知$(x+1)|f(x)$。代入$x:=x^{2n+1}$即得$(x^{2n+1}+1)|f(x^{2n+1})$。■

6

> 设$f_1(x),f_2(x)\in\mathbb{Q}[x]$，证明：如果
>
> $$(x^2+x+1)|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$$
>
> 则1是$f_i(x)$的根，$i=1,2$。

显然$f_1(x),f_2(x)\in\mathbb{C}[x]$，代入$x=\pm\omega$（其中$\omega$为3次单位根），得：

$$0|f_1(1)\pm\omega f_2(1)$$

因此，$f_1(1)\pm\omega f_2(1)=0$解得$f_1(1)=0,f_2(1)=0$。

因此1是$f_i(x)(i=1,2)$的根。■

9

> 设K是一个数域，设R是（或者可以看成是）K的一个交换扩环。设$a\in R$，且$J_a\neq\{0\}$，其中J_a表示$K[x]$中那些多项式组成的集合，它们中每一个在R中有根a，即
>
> $$J_a=\{f(x)\in K[x]\mid f(a)=0\}$$
>
> 证明：

(1)

> J_a中存在唯一的首项系数为1的多项式$m(x)$，使得J_a的每个多项式都是$m(x)$的倍式。

因为$J_a\neq\{0\}$，所以J_a中存在非零多项式，令$m'(x)$为其中次数最小且首项为1的多项式。只需证$\forall f(x)\in J_a$有$m'(x)|f(x)$。

反证法：设$\exists f(x)\in J_a$使得$m'(x)\nmid f(x)$，由带余除法，存在$g(x),h(x)$（$0\le\deg h(x)<m'(x)$）使得：

$$f(x)=g(x)m'(x)+h(x)$$

因为R满足乘法交换律，代入$x=a$得：

$$f(a)=g(a)m'(a)+h(a)$$

因为$f(a)=m'(a)=0$，故$h(a)=f(a)-g(a)m'(a)=0$，因此$h(x)\in J_a$。$\deg h(x)<\deg m'(x)$与$m'(x)$是J_a中次数最小的非零多项式矛盾。■

(2)

> 如果R是无零因子环，则$m(x)$在$K[x]$中不可约。

反证法：若$m(x)$在$K[x]$中可约，设$m(x)=u(x)v(x)$（$\deg u(x),\deg v(x)>0$）。代入a得

$$0=m(a)=u(a)v(a)$$

因为R无零因子，因此$u(a)$与$v(a)$中至少有一个等于0。不妨设$u(a)=0$。

由此$u(x)\in J_a$，而$m(x)\nmid v(x)$，与(1)矛盾，故假设不成立。■

20220308

1)

> 分别求$x^n+a\in\mathbb{R}[x]$在$\mathbb{R},\mathbb{C}$中的不可约分解。

因为 $x^n+a=0$ 的所有复数解是 $x_k=\sqrt[n]{-a}e^{\frac{2\pi ki}{n}}$（$k=0,\dots,n-1$），$x^n+a$ 在 $\mathbb{C}$ 中的不可约分解是 $x^n+a=\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)=\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}(x-\sqrt[n]{-a}e^{\frac{2\pi ki}{n}})}$。

下面求x^n+a在$\mathbb{R}$中的可约分解。

若$a=0$，则$x^n=\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}x}$。

若 $n=2m-1$ 为奇数，则 $x^n+a=0$ 仅有一个实数根，故其唯一分解由 1 个一次因式和 $m-1$ 个二次因式构成：

$$\begin{aligned}x^n+a&=\prod_{k=-(m-1)}^{m-1}(x-\sqrt[n]{-a}e^{\frac{2\pi ki}{n}})\\&=(x-\sqrt[n]{-a})\prod_{k=1}^{m-1}(x-\sqrt[n]{-a}e^{\frac{2\pi ki}{n}})(x-\sqrt[n]{-a}e^{-\frac{2\pi ki}{n}})\\&=(x-\sqrt[n]{-a})\prod_{k=1}^{m-1}(x^2-\sqrt[n]{-a}(e^{\frac{2\pi ki}{n}}+e^{-\frac{2\pi ki}{n}})+\sqrt[n]{a^2})\\&=\boxed{(x-\sqrt[n]{-a})\prod_{k=1}^{m-1}(x^2-2\sqrt[n]{-a}\cos\frac{2\pi k}{n}+\sqrt[n]{a^2})}\end{aligned}$$

若$n=2m$为偶数，且$a>0$，则 $x^n+a=0$ 没有实根，故其唯一分解由 m 个二次因式构成：

$$
\begin{aligned}
x^n+a &= \prod_{k=0}^{2m-1}\left(x-e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}\sqrt[n]{a}\right)\\
&= \prod_{k=0}^{m-1}\left(x-e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}\sqrt[n]{a}\right)\left(x-e^{-\frac{(2k+1)\pi i}{n}}\sqrt[n]{a}\right)\\
&= \prod_{k=0}^{m-1}\left(x-e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}\sqrt[n]{a}\right)\left(x-e^{-\frac{(2k+1)\pi i}{n}}\sqrt[n]{a}\right)\\
&= \boxed{\prod_{k=0}^{m-1}\left(x-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a^2}\right)}
\end{aligned}
$$

若$n=2m$为偶数，且$a<0$，则$x^n+a=0$有两实根$x=\pm\sqrt[n]{-a}$。故其唯一分解由 2 个一次因式和 $m-1$ 个二次因式构成：

$$
\begin{aligned}
x^n+a &= \prod_{k=0}^{2m-1}(x-e^{\frac{2k\pi i}{n}}\sqrt[n]{-a})\\
&= (x-\sqrt[n]{-a})(x+\sqrt[n]{-a})\prod_{k=1}^{m-1}(x-e^{\frac{2k\pi i}{n}}\sqrt[n]{-a})(x-e^{-\frac{2k\pi i}{n}}\sqrt[n]{-a})\\
&= \boxed{(x-\sqrt[n]{-a})(x+\sqrt[n]{-a})\prod_{k=1}^{m-1}\left(x-2\cos\frac{2k\pi i}{n}\sqrt[n]{-a}+\sqrt[n]{a^2}\right)}
\end{aligned}
$$

2)

> 证明$\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4m}=\frac{\sqrt{2}}{2^m}$

引理：$\prod_{k=1}^{m-1}\cos\left(\frac{k}{2m}\pi\right)=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$。证明：

$$
\left(\prod_{k=1}^{m-1}\cos\left(\frac{k}{2m}\pi\right)\right)^2=(-1)^{m-1}\prod_{0<k<2m,k\neq 2}\cos\left(\frac{k}{2m}\pi\right)
$$

考虑

$$
\begin{aligned}
\frac{x^{4m}-1}{x^4-1} &= 1+x^4+\cdots+x^{4m-4}\\
&= \prod_{0<k<2m,k\neq m}\left(x^2-2\cos\left(\frac{k}{2m}\pi\right)x+1\right)
\end{aligned}
$$

代入$x=i$得

$$
\begin{aligned}
m &= \prod_{0<k<2m,k\neq m}\left(-2\cos\left(\frac{k}{2m}\pi\right)i\right)\\
&= (-1)^{m-1}2^{2m-2}\prod_{0<k<2m,k\neq m}\cos\left(\frac{k}{2m}\pi\right)
\end{aligned}
$$

整理得

$$\prod_{0<k<2m,k\neq m}\cos\left(\frac{k}{2m}\pi\right)=(-1)^{m-1}\frac{m}{2^{2m-2}}$$

整理即证。

由引理：

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4m}&=\prod_{k=1}^{m}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4m}\\&=\frac{\prod_{k=1}^{2m-1}\cos\frac{k\pi}{4m}}{\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m}}\\&=\frac{\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m-1}}}{\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2^m}\end{aligned}$$

得证。■

习题7.7

3

> 设A是实数域上的n级斜对称矩阵，它的特征多项式$|\lambda I-A|$记作$f(\lambda)$。证明：

(1)

> $f(\lambda)$的复根都是纯虚数或零；

(2)

> 如果A可逆，则$f(\lambda)$的不可约因式都是二次的。

由(1)，$f(\lambda)$的不可约因式是$\lambda-b$或$\lambda^2+a\ (a>0)$。

因为A可逆，故$f(\lambda)$的常数项$|A|\neq 0$，故$\lambda\nmid f(\lambda)$，因此$f(\lambda)$的不可约因式只能为$\lambda^2+a\ (a>0)$形式，都是二次的，得证。■

20220311

习题7.8

1

> 求下列多项式的全部有理根：

(2)

> $2x^4-x^3-19x^2+9x+9$

代入$x=\pm1,\pm3,\pm9,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{9}{2}$知$\boxed{x=-3,-\dfrac{1}{2},1,3}$为原多项式的全部有理根。

2

> 下列整系数多项式在有理域上是否不可约?

(2)

> $7x^5+18x^4+6x-6$

令$p=3$，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理域上***不可约***。

(4)

> x^4-2x^3+2x-3

令$p=2$，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理域上***不可约***。

(5)

> x^p+px^2+1

因为p是奇素数，有$p\geq3$。令$p:=p$，由艾森斯坦判别法，该多项式在有理域上***不可约***。

(6)

> x^3+x^2-3x+2

代入$x=\pm1,\pm2$都不等于0，知该多项式在有理域上***不可约***。

4

> 设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$是一个次数大于零的整系数多项式，证明：如果$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$是一个奇数，则1和$-1$都不是$f(x)$的根。

因为$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$是一个奇数，

$$f(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\equiv1\not\equiv0\pmod 2$$
$$f(-1)=(-1)^na_n+(-1)^{n-1}a_{n-1}+\cdots-a_1+a_0\equiv f(1)\equiv1\not\equiv0\pmod 2$$

因此，$f(1)\neq0,f(-1)\neq0$。故1和-1都不是$f(x)$的根。■

5

> 设$f(x)$是一个次数大于零且首项系数为1的整系数多项式，证明：如果$f(0)$与$f(1)$都是奇数，则$f(x)$没有有理根。

因为$f(x)$首项系数为1，若$f(x)$有有理根a，则a一定为整数。

对整数a，$f(a)$为整数，且在mod 2意义下必有$f(a)\equiv f(0)$或$f(a)\equiv f(1)$成立。

又因为$f(0)\equiv 1\equiv f(1)$，因此$f(a)\equiv 1\not\equiv 0$。故$f(x)$没有整数根，故而没有有理根。■

6

> 设$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$是整系数多项式，证明：如果 $(a+b)c$ 是奇数，则$f(x)$在有理数域上不可约。

因为$(a+b)c$是奇数，故$a+b$与c均为奇数。

因此，在mod 2意义下有$f(0)=c\equiv 1$，$f(1)=1+(a+b)+c\equiv 1+1+1\equiv 1$。

因此，$f(x)$不存在整数根。

因为$f(x)$首项系数为1，故$f(x)$的所有有理数根均为整数。因此，$f(x)$不存在有理数根，故而不存在形如$(x-a), a\in\mathbb{Q}$的因式。

又因为$\deg f(x)=3$，若$f(x)$可约则必定有形如$(x-a)$的因式。因此，$f(x)$在有理数域上不可约。■

习题7.11

7

> 设 $f(x)=x^5-x^2+1\in\mathbb{Z}[x]$，判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是否不可约。

因为$f(x)$首项为1，$f(1)\equiv f(0)\equiv 1\pmod 2$，故$f(x)$在$\mathbb{Q}$不存在次数为1的因式。

因此，若$f(x)$可约，则$f(x)$为一个次数为2的因式$g(x)\in\mathbb{Z}[x]$与一个次数为3的因式$h(x)\in\mathbb{Z}[x]$的乘积。

因为$1\equiv f(x)=g(x)h(x)\pmod 2$，因此，$g(0)\equiv 1$且$g(1)\equiv 1$。

因此，$g(x)$只可能为$x^2+\bar{1}x+1$。但$\bar{1}x^5+\bar{1}x^2+\bar{1}=(\bar{1}x^3+\bar{1}x^2)(\bar{1}x^2+\bar{1}x+\bar{1})+\bar{1}$。故$g(x)\nmid f(x)$。

因此，$f(x)$在$\mathbb{Q}$上***不可约***。■

8

> 设 $f(x)=x^4+3x^3+3x^2-5\in\mathbb{Z}[x]$，判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是否不可约。

令$p=3$，由艾森斯坦判别法知$f(x)$在有理数域上***不可约***。■

20220315

习题7.9

2

> 把3元齐次多项式$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$写成两个3元齐次多项式的乘积。

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=\boxed{(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)}$$

3

> 设$f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$，且$g \neq 0$。证明：如果对于使$g(c_1, \cdots, c_n) \neq 0$的任意一组元素$c_1, \cdots, c_n \in K$，都有$f(c_1, \cdots, c_n) = 0$，则$f(x_1, \cdots, x_n) = 0$。

数学归纳法：$n = 1$时，因为$g(x_1) = 0$只有有限个根，存在无穷多的x_1使得$g(x_1) \neq 0$，故$f(x_1)$在无穷多个点上取0，故$f(x_1) = 0$。

设$n = k$时已证，下证$n = k + 1$。

任取取$x_1 = a \neq 0$，显然此时$g(a, x_2, \ldots, x_{k+1}) \neq 0$，由归纳假设知$f(a, x_2, \ldots, x_{k+1}) = 0$。

设$f = \sum_{n_1 \cdots n_{k+1}} a_{n_1 \cdots n_{k+1}} \prod_i x_i^{n_i} = \sum_{n_2 \cdots n_{k+1}} \left(\prod_{i \neq 1} x_i^{n_i}\right) \left(\sum_{n_1} a_{n_1 \cdots n_{k+1}} x_1^{n_1}\right)$。由多项式相等的定义，知$\forall n_2, \ldots, n_{k+1} \in \mathbb{N}$有$\sum_{n_1} a_{n_1 \ldots n_{k+1}} x_1^{n_1} = 0$对所有$x_1 \neq 0$成立，故而$\sum_{n_1} a_{n_1 \ldots n_{k+1}} x_1^{n_1} = 0$。

因此，$f = \sum_{n_2 \cdots n_{k+1}} \prod_{i \neq 1} x_i^{n_i} \left(\sum_{n_1} a_{n_1 \cdots n_{k+1}} x_1^{n_1}\right) = 0$。得证。■

4

> 设$f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$，如果存在$h \in K[x_1, \ldots, x_n]$，使得$f = gh$，则称$g$整除$f$，记作$g | f$。此时称$g$是$f$的一个因式。如果$f | g$，并且$g | f$，则称$f$和$g$是相伴的，记作$f \sim g$。

(1)

> 证明：$f \sim g \iff f$与g相差一个常数因子；

对于$f = 0$或$g = 0$显然成立。下面假设$f, g \neq 0$：

$\Longleftarrow$：显然。

$\Longrightarrow$：

$$\begin{aligned} f \sim g &\Longrightarrow (f \mid g) \wedge (g \mid f) \\ &\Longrightarrow (f = h_1 g) \wedge (g = h_2 f) \\ &\Longrightarrow f = h_1 h_2 f \\ &\Longrightarrow \deg f = \deg h_1 h_2 + \deg f \qquad (\because f, g \neq 0 \therefore h_1, h_2 \neq 0) \\ &\Longrightarrow \deg h_1 h_2 = 0 \\ &\Longrightarrow f\text{与}g\text{相差一个常数因子} \end{aligned}$$

得证。■

(2)

> $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$称为不可约的，如果$f$的因式只有零次多项式以及$f$的相伴元。否则称为可约的。证明：在$K[x, y]$中，多项式$x^2 - y$是不可约的。

考虑$x^2 - y = gh$：g, h必有一个y的最高次数是0，不妨设是g。

设$h = h_1(x)y + h_2(x)$，$g = g_1(x)$（$h_1, g_1 \neq 0$）：

$hg = h_1(x)g_1(x)y + h_2(x)g_1(x)$。比较$y$的系数知$h_1(x)g_1(x) = 1$，故$g_1(x)$为常数。因此，$h \sim x^2 = y$。

所以$x^2 - y$的因式只有零次多项式以及它的相伴元，故不可约。■

20220318

习题7.10

3

> 在$K[x_1,x_2,x_3]$中，用初等对称多项式表示出下列对称多项式：

(1)

> $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^3x_3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3;$

待定系数法：在首项消去的过程中，首项幂指数组只可能是$(3,1,0),(2,2,0),(2,1,1)$。

令原式$f=\sigma_2\sigma_1^2+a\sigma_2^2+b\sigma_3\sigma_1$，代入$x_1=x_2=x_3=1$与$x_1=x_2=1,x_3=0$得：

$$\begin{cases}6=27+9a+3b\\2=4+a\end{cases}$$

综上，$a=-2,b=-1$。故$f=\boxed{\sigma_2\sigma_1^2-2\sigma_2^2-\sigma_3\sigma_1}$。

(2)

> $x_1^4+x_2^4+x_3^4$

由牛顿公式：

$$\begin{aligned}s_4&=\sigma_1s_3-\sigma_2s_2+\sigma_3s_1\\s_3&=\sigma_1s_2-\sigma_2s_1+3\sigma_3\\s_2&=\sigma_1s_1-2\sigma_2\\s_1&=\sigma_1\end{aligned}$$

逐一代入得$s_4=\boxed{\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2}$。

4

> 在$K[x_1,\cdots,x_n]$中，用初等对称多项式表示出下列对称多项式（$n\geq 3$）：

(2)

> $\sum x_1^2x_2^2x_3$

待定系数法：考虑首项消去的过程中首项幂指数组的取值。

1. $n=3$：首项只可能是$(2,2,1)$。原式$=\boxed{\sigma_2\sigma_3}$。
2. $n=4$：首项只可能是$(2,2,1,0)$，$(2,1,1,1)$。

   待定系数法，设原式$=\sigma_3\sigma_2+a\sigma_4\sigma_1$：

   代入$x_i=1$得$a=-3$。

   因此，原式$=\boxed{\sigma_3\sigma_2-3\sigma_4\sigma_1}$
3. $n\geq 5$：首项只可能是$(2,2,1,0,0,\ldots),(2,1,1,1,0,\ldots),(1,1,1,1,1,\ldots)$。

待定系数法，设原式$=\sigma_3\sigma_2+a\sigma_4\sigma_1+b\sigma_5$。

显然a,b不随n变化而变化。代入$x_i=1$得$60=10n(n-1)+5an(n-3)+b(n-3)(n-4)$。解得$a=-3,b=5$。

因此，原式$=\boxed{\sigma_3\sigma_2-3\sigma_4\sigma_1+5\sigma_5}$。

20220322

作业

1

> 已知$f(x)=x^3+px^2+qx+r$有三个根x_1,x_2,x_3。

a)

> 设$x_i\neq 0(\forall i)$，求$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}$。