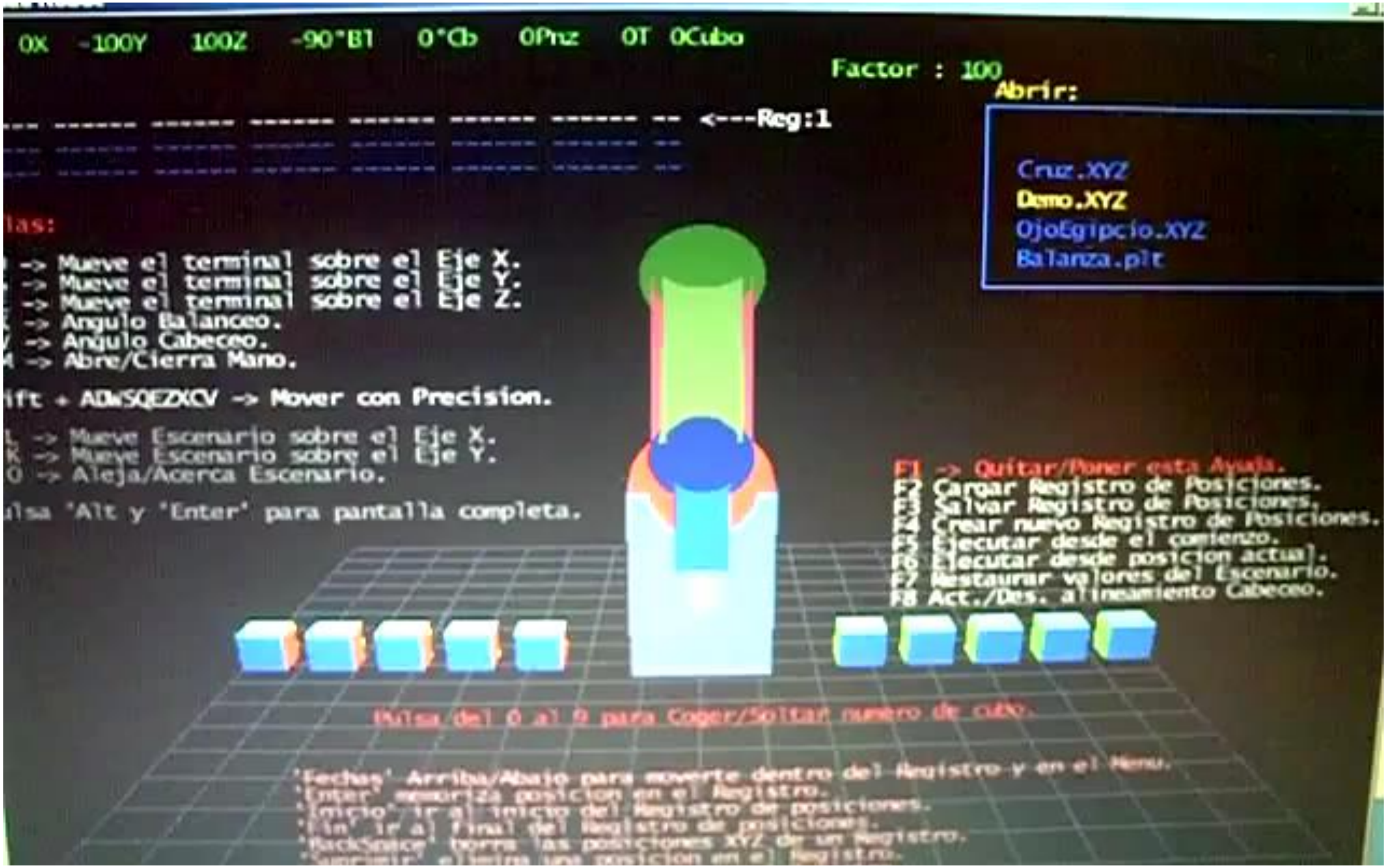
COMPUTACION VISUAL

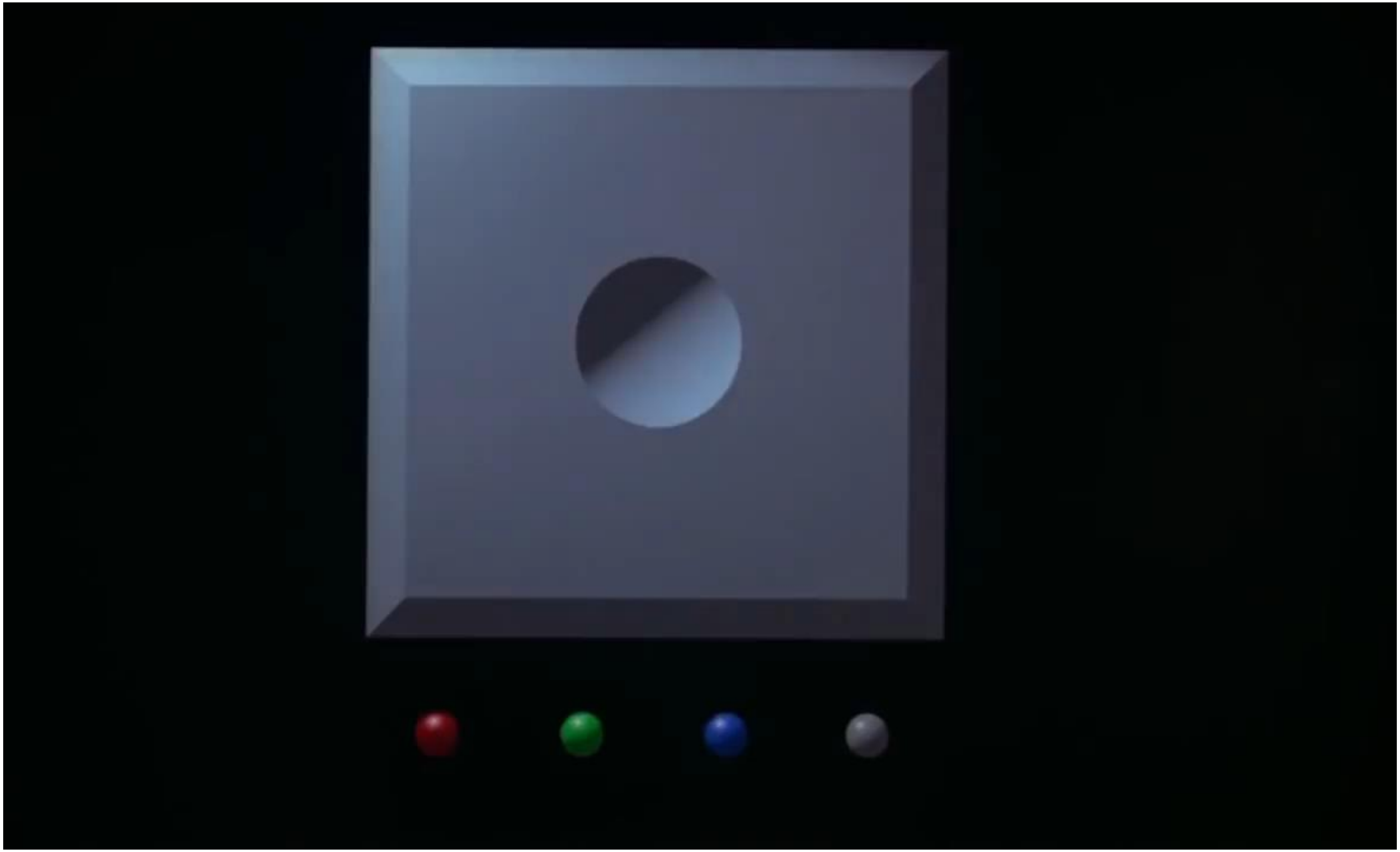
TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS 3D

Prof. John Ledgard Trujillo Trejo

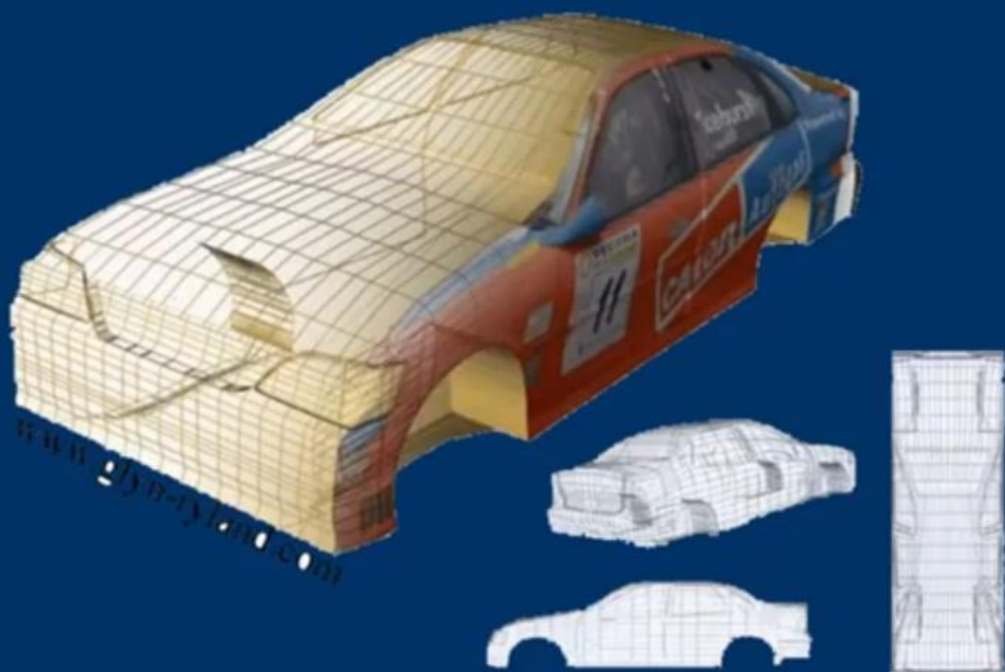
Facultad de Ingeniería de Ingeniería de Sistemas
Departamento de Ciencias de la Computación
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Introducción





- Gran parte de los problemas de ingeniería son 3D



- Independiente de su representación 3D, hay que realizar un ‘mapeo’ a 2D

Introducción

La generación de un mundo 3D requiere 3 componentes esenciales:

- El mundo 3D de los objetos
- La o las fuentes de luz
- La cámara o el ojo que observa la escena

Al mundo virtual que generemos lo denominaremos escena y a los objetos en la misma, actores.

Una cámara especifica nuestra posición de vista y ciertos parámetros de vista (longitud focal, tamaño de la imagen, etc.).

Usaremos *transformaciones geométricas* para posicionar y mover actores y cámaras en la escena. También usaremos estas transformaciones para modelar objetos.

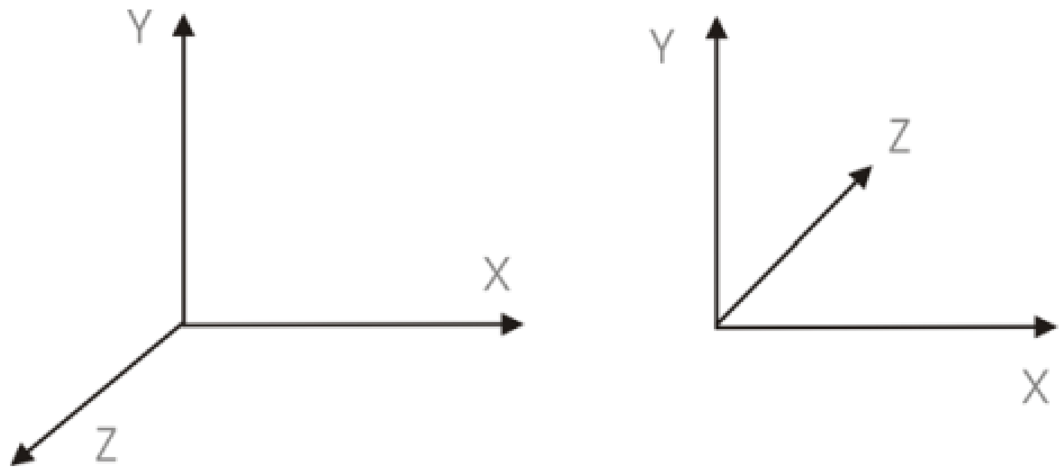
Introducción

Las transformaciones geométricas nos permitirán, entre otras cosas,

- Crear múltiples copias de objetos en la escena
- Mapear puntos de un sistema de coordenadas en otro.
- Cambiar la forma de los objetos
- Posicionar objetos en una escena
- Proyectar escenas tridimensionales en la pantalla
- Crear animaciones
- ...

Sistemas de referencia

Para la visualización de los objetos, éstos han de quedar ubicados en un **sistema universal de referencia (SUR)**, en el cual el eje Z, p. ej., puede tener su origen en el plano $Z-$ (*orientación derecha*), por lo que se dirige hacia el observador , o bien tener *orientación izquierda*

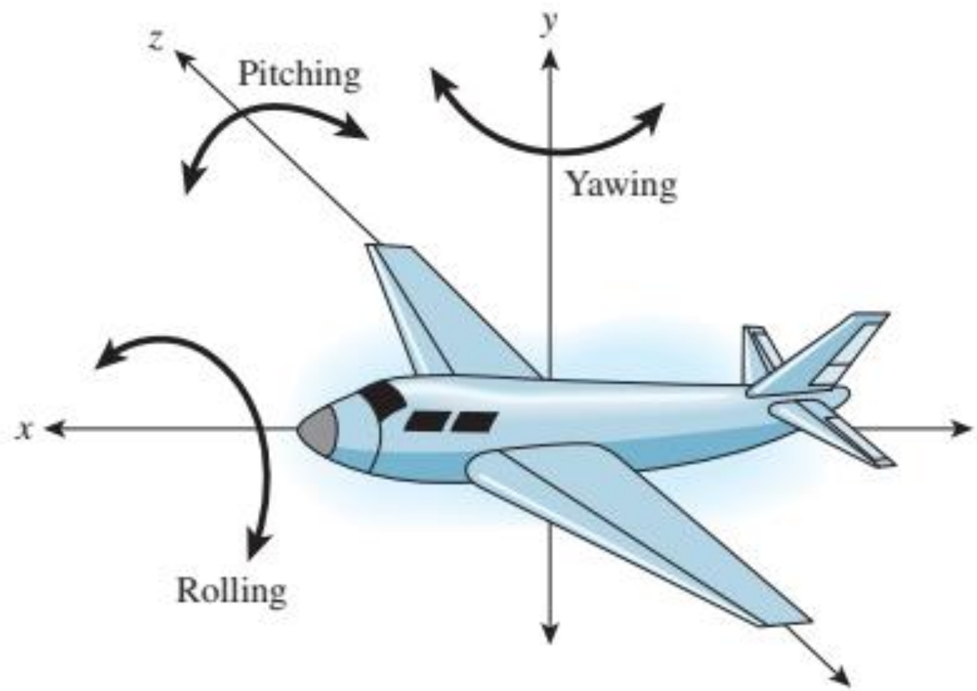


Sistemas de referencia con orientación diferente

Todas las coordenadas de los distintos objetos han de estar dadas en uno de estos sistemas de referencia.

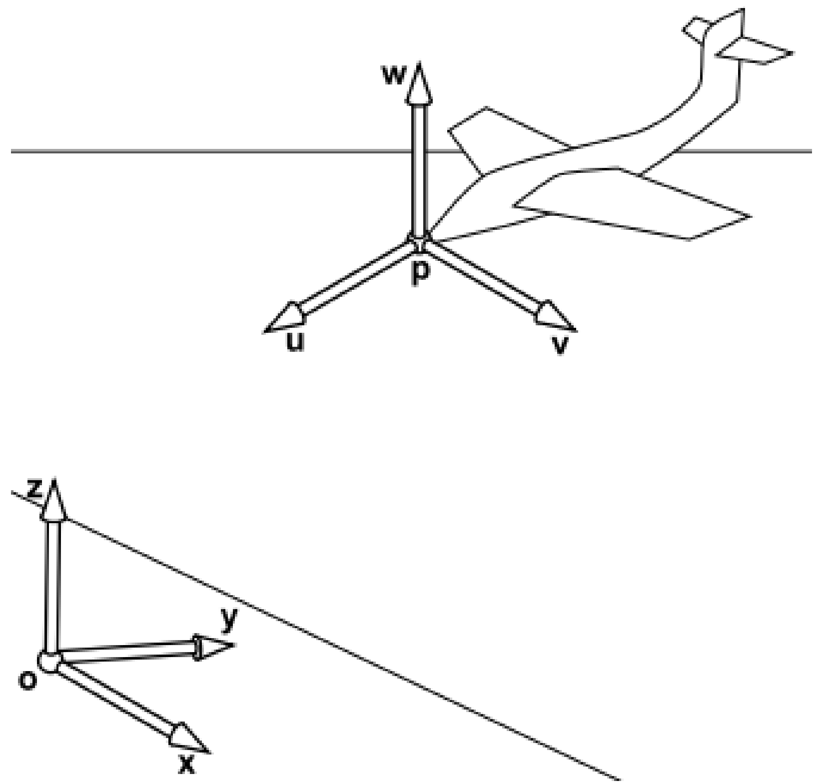
Sistemas de referencia

En este mundo 3D que generaremos, cada objeto se crea en su sistema de coordenadas local. Por otro lado, su ubicación en el mundo, está dada por su posición en un sistema de coordenadas global: es el sistema de coordenadas del mundo.



Sistemas de referencia

Las transformaciones pueden llevarse a cabo sobre los objetos o sobre todo el ambiente 3D. Así tenemos transformaciones locales y transformaciones globales.



Transformaciones lineales y matrices

La variación de la posición y/o el tamaño de los objetos, con respecto a los sistemas de referencia, se hace mediante *transformaciones lineales*. Las *transformaciones lineales* que veremos serán las siguientes: **traslación**, **cambio de escala**, **giro**, y **reflexión**.

Transformaciones lineales y matrices

La *Informática Gráfica* suele utilizar la *notación matricial* para describir las transformaciones lineales de los objetos. La convención más empleada es que el punto (vértice) que se quiere transformar, se exprese mediante un vector horizontal, multiplicado por la *matriz de transformación*. Por ejemplo, en la expresión $(x', y') = (x, y) \cdot \mathbf{M}$, la matriz correspondiente a la transformación lineal estaría indicada por $\mathbf{M}$; el punto inicial (antes de la transformación) sería el (x, y), y el resultado (o sea, la ubicación del punto en el sistema de referencia después de la transformación lineal) sería el (x', y').

Dado que el estudio de las transformaciones lineales sobre modelos poliédricos es más intuitivo, en adelante supondremos que los objetos (modelos) son de este tipo. Así, si un poliedro (objeto) tiene n vértices, para trasladar, girar, etc. un objeto, se deberá *aplicar la misma transformación lineal a los n vértices del poliedro*. En general, *se aplicará la transformación a todos los puntos significativos de los objetos*.

Composición de matrices

La **composición de matrices** es una de las principales razones para trabajar con sistemas homogéneos. Matemáticamente consiste en la multiplicación de las matrices *en un orden determinado*.

Supongamos que tenemos el punto **P** = $(x, y, z, 1)$ del espacio tridimensional, que como vemos está expresado en un sistema homogéneo. Al hacer

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1)\mathbf{T}$$

$$(x'', y'', z'', 1) = (x', y', z', 1)\mathbf{R}$$

lo que se consigue es mover primero el vértice **P**, y luego girarlo. Se puede llegar a un resultado final idéntico, si multiplicamos el vector **P** por la matriz resultante de componer **T** y **R** (en este orden). Así, siendo **M** = T.**R**, se tiene que

$$(x'', y'', z'', 1) = (x, y, z, 1) \cdot \mathbf{M}$$

Composición de matrices

El orden en que se multiplican las matrices es importante ya que por lo general, *el producto de matrices no es conmutativo.*

En la composición de matrices pueden intervenir tantos factores (matrices) como se requieran. Así, siendo $\mathbf{M_n}$ la **matriz compuesta** o **neta** resultante de la composición de las matrices $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T_2}$, y $\mathbf{S}$ (o sea, $\mathbf{M_n} = \mathbf{T_1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T_2} \cdot \mathbf{S}$), al multiplicar un punto por esta matriz obtendremos el mismo punto final que hallaríamos multiplicándolo sucesivamente por las matrices que la componen .

Extensión de las Transformaciones a Otras Dimensiones

Las trasformaciones geométricas 3D son extensiones de las transformaciones geométricas 2D, pero con la incorporación del eje *Z* [Hearn 95]. En [Hollasch, 91] se muestra que los puntos y operaciones vectoriales en el espacio 4D son simples extensiones de su contraparte 3D.

Transformaciones Geométricas 3D

- **La representación de las transformaciones en 2D como matrices de 3x3 tiene un equivalente para las transformaciones 3D, las cuales son representadas como matrices de 4x4.**
- **Para permitir esto, el punto (x,y,z) será representado en coordenadas homogéneas como (W.x, W.y, W.z, W), con W ≠ 0. Si W ≠ 1, entonces W es dividido dentro de las tres primeras coordenadas homogéneas para así obtener el punto cartesiano 3D (x,y,z).**
- **Esto implica, que dos puntos homogéneos H1 y H2 representan el mismo punto 3D sí y solo sí H1 = c. H2, para cualquier constante c ≠ 0.**

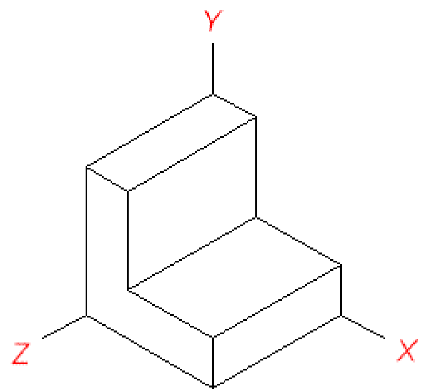
$$(X,Y,Z) \longrightarrow (X,Y,Z,W)$$

Coord. Normales   Coord. Homogéneas

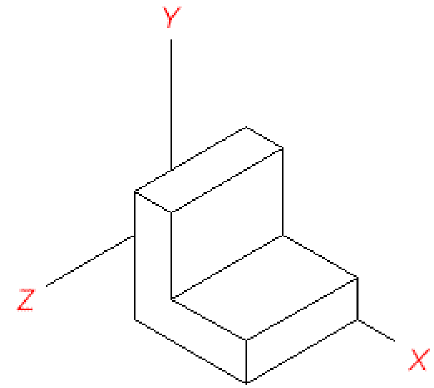
W: Valor distinto de cero

Transformaciones Geométricas 3D: Traslación

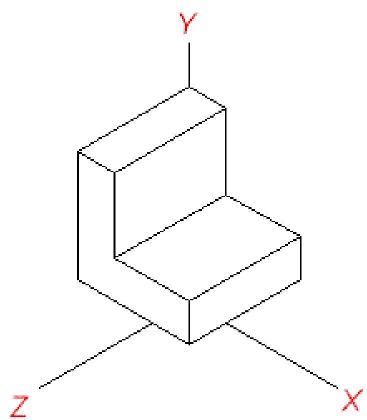
La matriz de traslación en 3D es una simple extensión de 2D



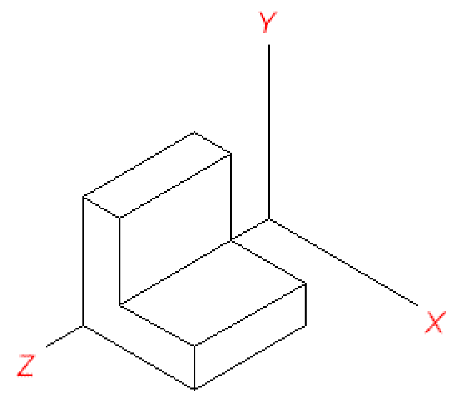
Original object position



Translated in X

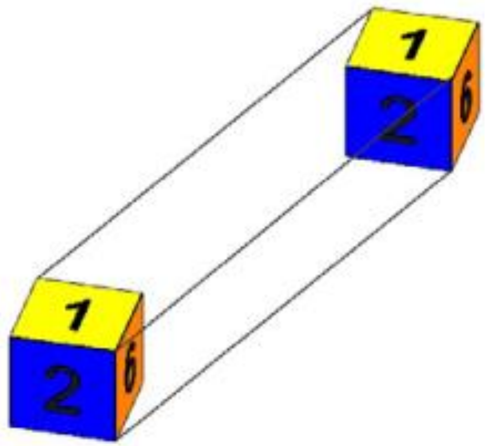


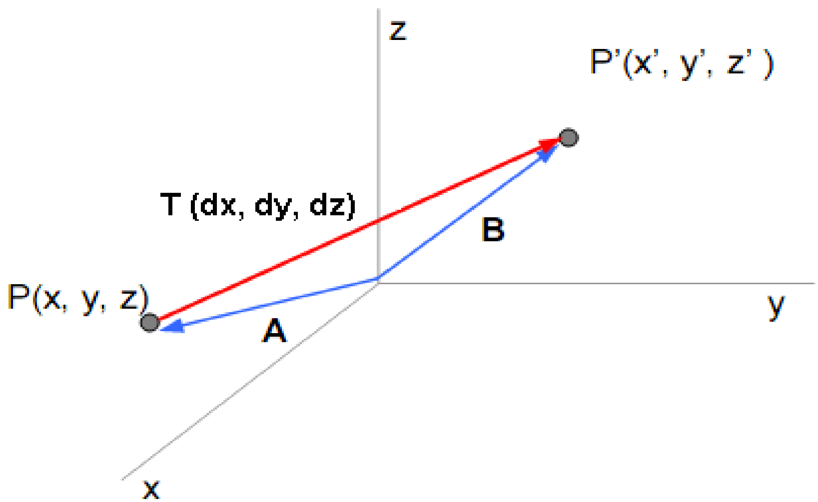
Translated in Y



Translated in Z

Transformaciones Geométricas 3D: Traslación





$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$
$$z' = z + d_z$$

Transformaciones Geométricas 3D: Traslación

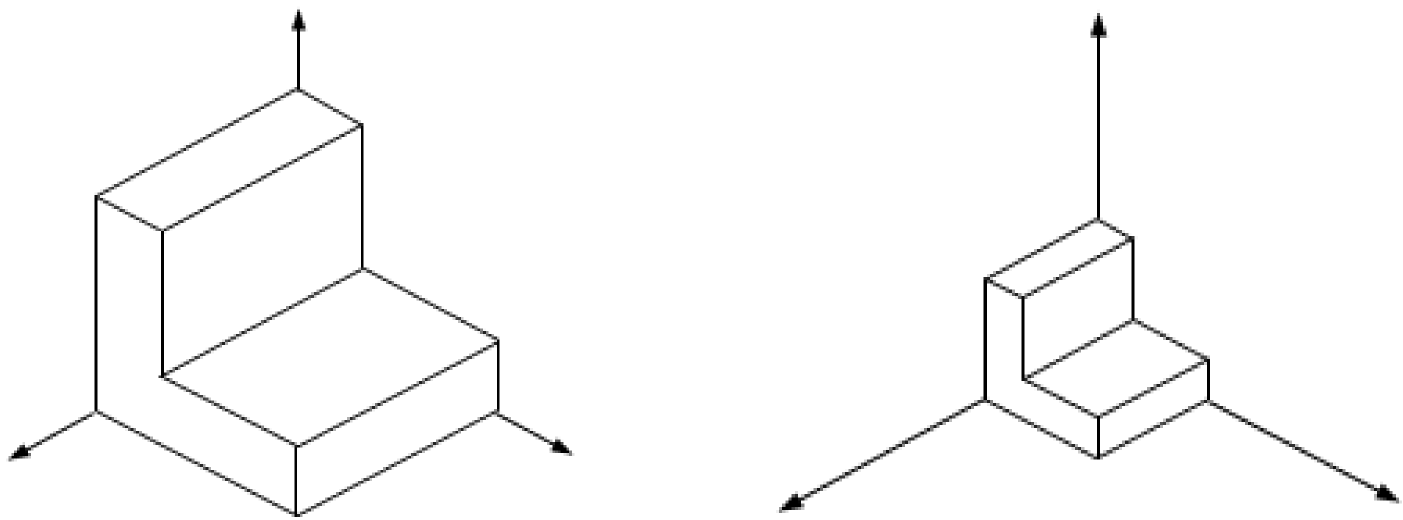
$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar esta matriz por el vector de puntos x, y, z, 1 queda:

$$T(dx, dy, dz) \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \\ 1 \end{vmatrix}$$

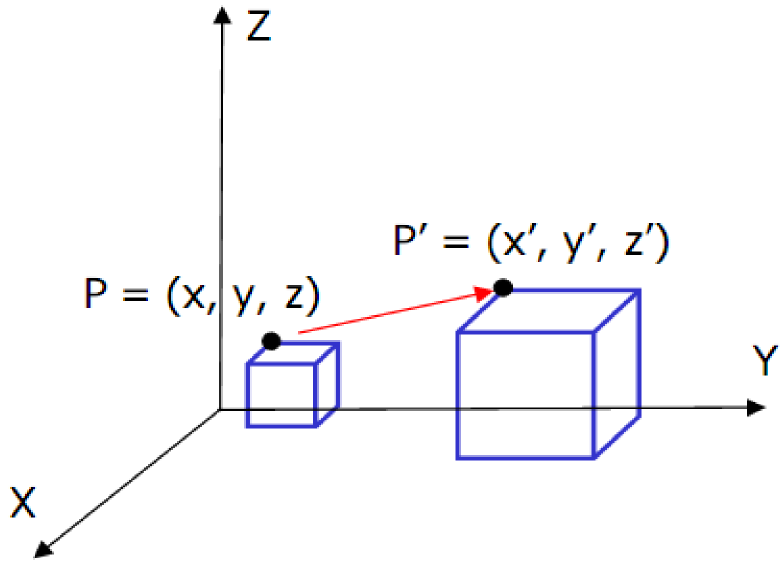
Transformaciones Geométricas 3D: Escalado

La matriz de escalamiento es similarmente extendida:



Transformaciones Geométricas 3D: Escalado

La matriz de escalamiento es similarmente extendida:



$$x' = s_x \cdot x$$
$$y' = s_y \cdot y$$
$$z' = s_z \cdot z$$

Transformaciones Geométricas 3D: Escalado

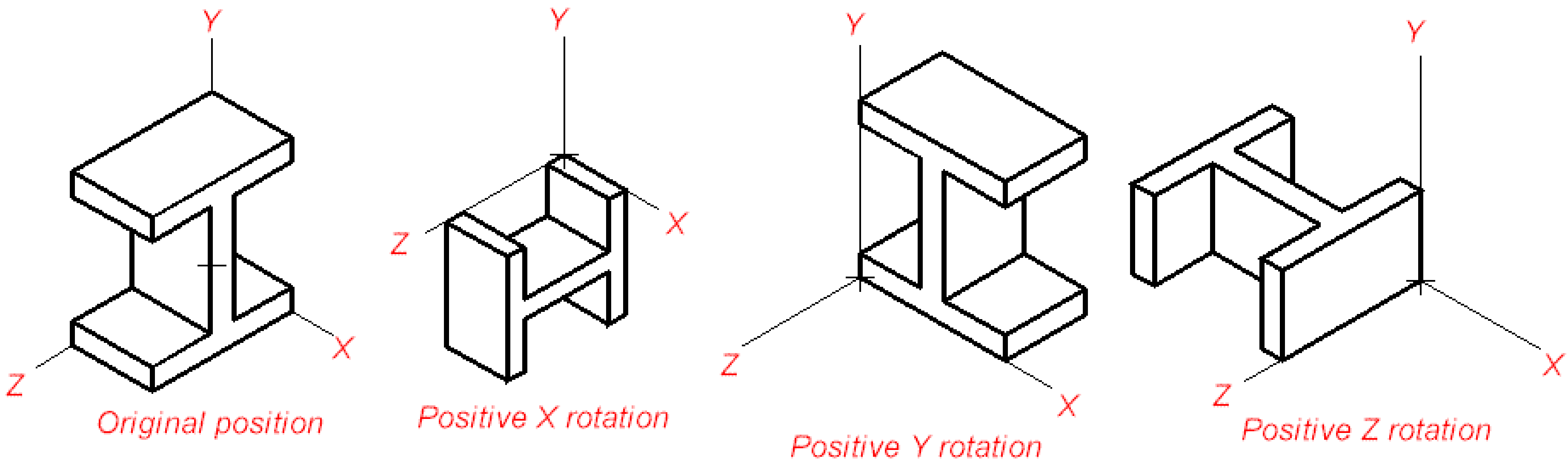
$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar esta matriz por el vector de puntos x, y, z, 1 queda:

$$S(Sx, Sy, Sz) \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \cdot Sx \\ y \cdot Sy \\ z \cdot Sz \\ 1 \end{vmatrix}$$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

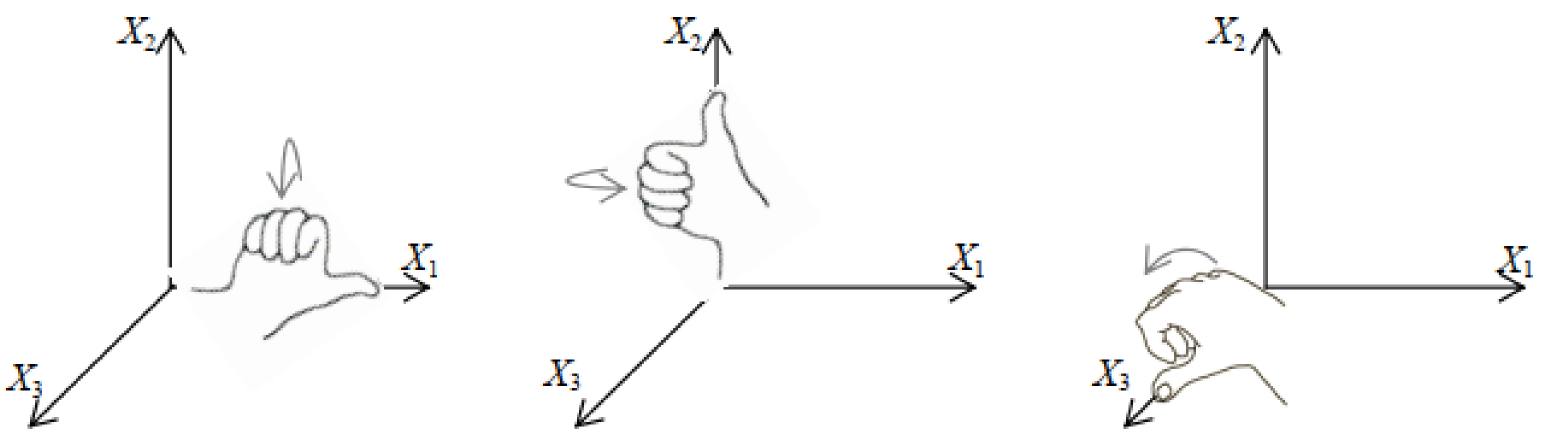
A diferencia de la rotación en el espacio 2D, donde para hacer rotar un objeto se necesita un punto (cero-dimensional), en 3D para hacer rotar un objeto se necesitan dos puntos no coincidentes que determinan un segmento de recta, cuya línea de soporte define un eje lineal (uni-dimensional) de rotación.



John Ledgard Trujillo Trejo ©
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

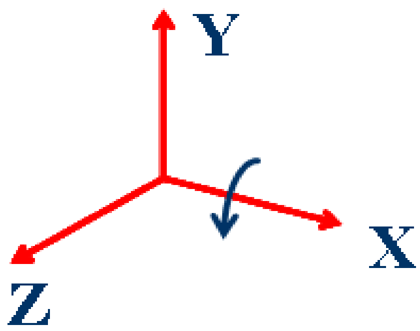
Por convención, los ángulos de rotación positivos producen rotaciones en contra de las manecillas del reloj sobre el eje de rotación, esto es si se observa el giro desde la parte positiva del eje hacia el origen. Otra forma de determinar la dirección de un giro positivo es mediante la **regla de la mano derecha** (Figura), que dice que: *"Si se coloca el dedo pulgar de la mano derecha sobre el eje de rotación apuntando hacia la parte positiva de dicho eje, el giro natural del resto de los dedos indica la dirección positiva del giro".*



Regla de la mano derecha para obtener la dirección de un giro positivo en 3D.

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

La rotación con respecto al eje x:



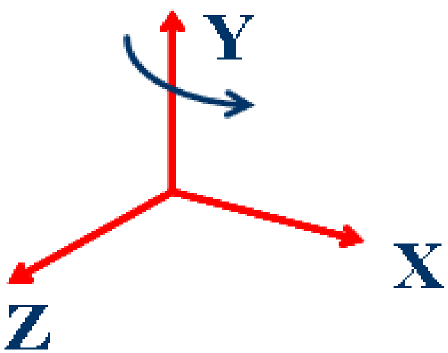
$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\theta & -Sen\theta & 0 \\ 0 & Sen\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar esta matriz por el vector de puntos x, y, z, 1 queda:

$$R_x(\theta)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cdot\cos(\theta) - z\cdot sen(\theta) \\ y\cdot sen(\theta) + z\cdot\cos(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

La rotación con respecto al eje y:



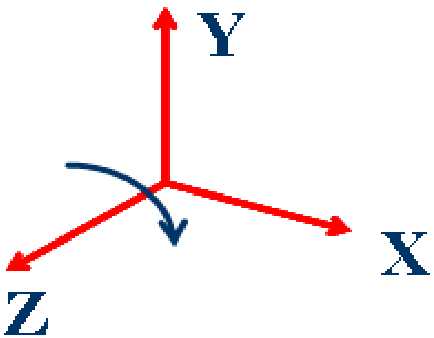
$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos\theta & 0 & Sen\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Sen\theta & 0 & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar esta matriz por el vector de puntos x, y, z, 1 queda:

$$R_y(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\theta) + z \cdot sen(\theta) \\ y \\ -x \cdot sen(\theta) + z \cdot \cos(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

La rotación con respecto al eje z:



$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sen\theta & 0 & 0 \\ Sen\theta & Cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar esta matriz por el vector de puntos x, y, z, 1 queda:

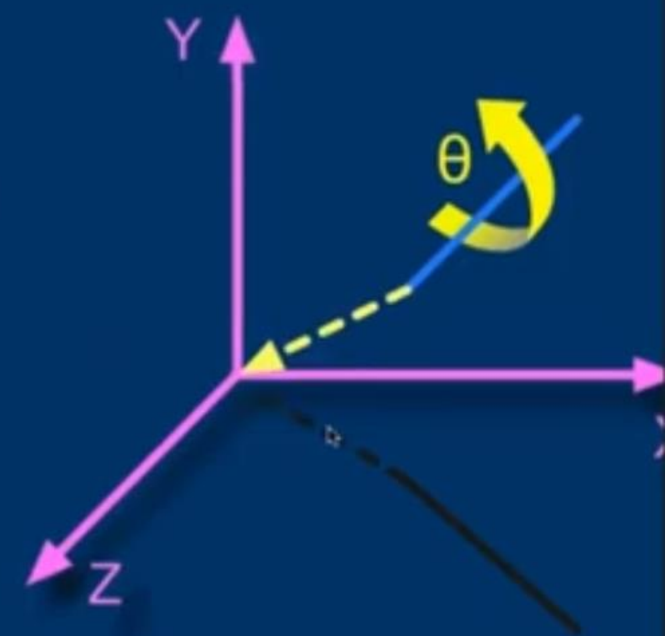
$$R_z(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\theta) - y \cdot sen(\theta) \\ x \cdot sen(\theta) + y \cdot \cos(\theta) \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  - Trasladar el eje arbitrario al origen
  - Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  - Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  - Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  - Aplicar la traslación inversa

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

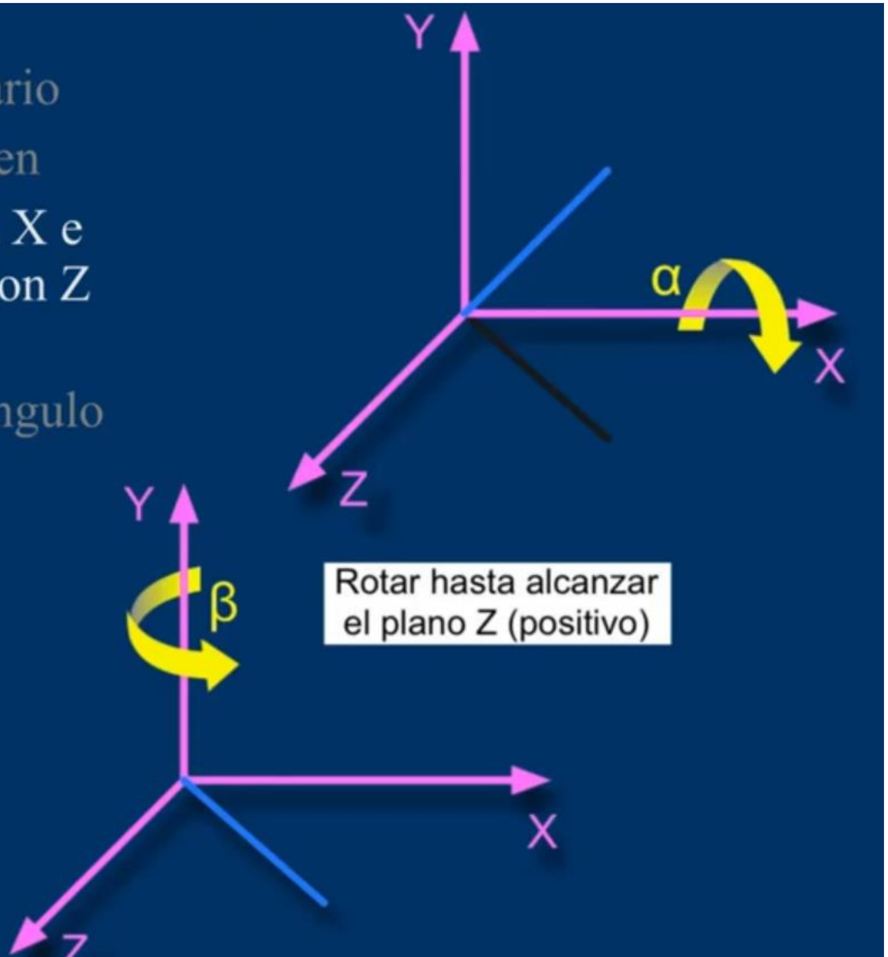
- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  - Trasladar el eje arbitrario al origen
  - Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  - Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  - Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  - Aplicar la traslación inversa



$$M = T(-dx, -dy, -dz)$$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  - Trasladar el eje arbitrario al origen
  - Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  - Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  - Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  - Aplicar la traslación inversa

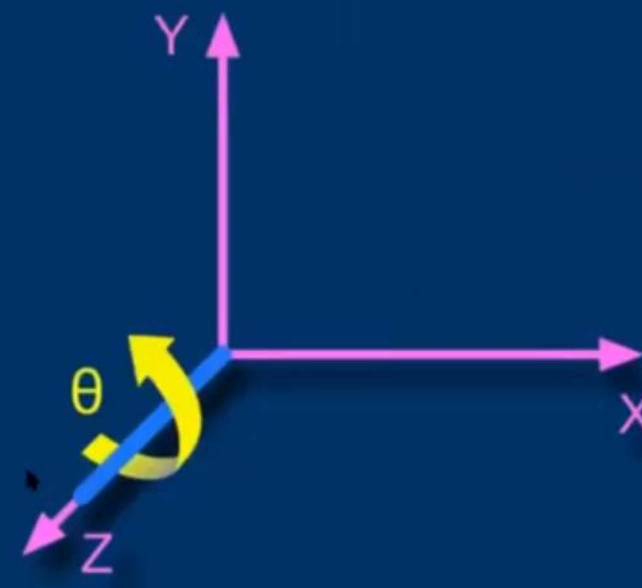


$M = Rotx(-\alpha) * T(-dx, -dy, -dz)$

$M = Roty(\beta) * Rotx(-\alpha) * T(-dx, -dy, -dz)$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

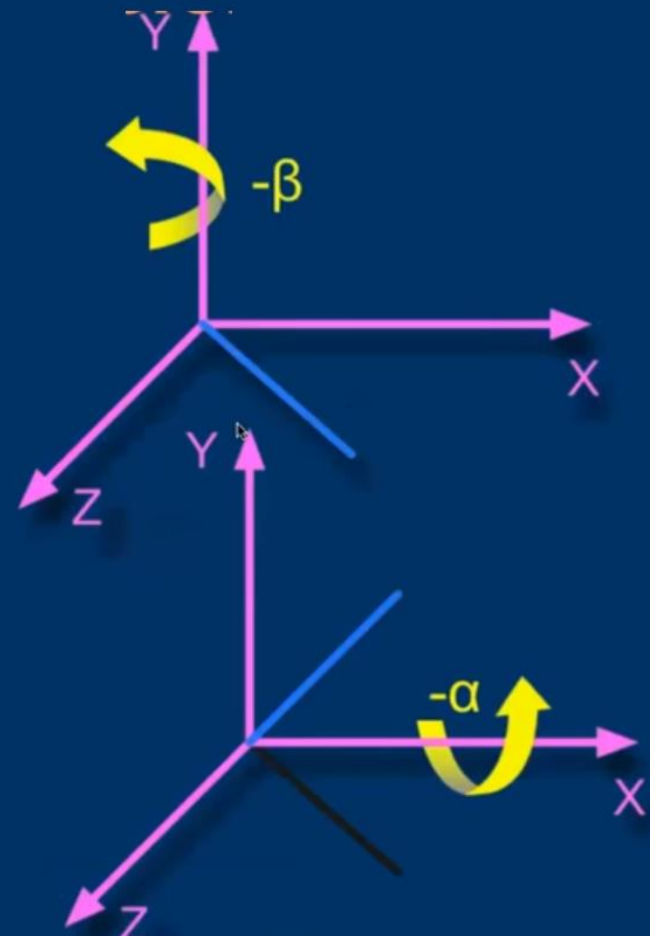
- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  - Trasladar el eje arbitrario al origen
  - Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  - Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  - Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  - Aplicar la traslación inversa



$$M = Rotz(\varphi) * Roty(\beta) * Rotx(\alpha) * T(-dx, -dy, -dz)$$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

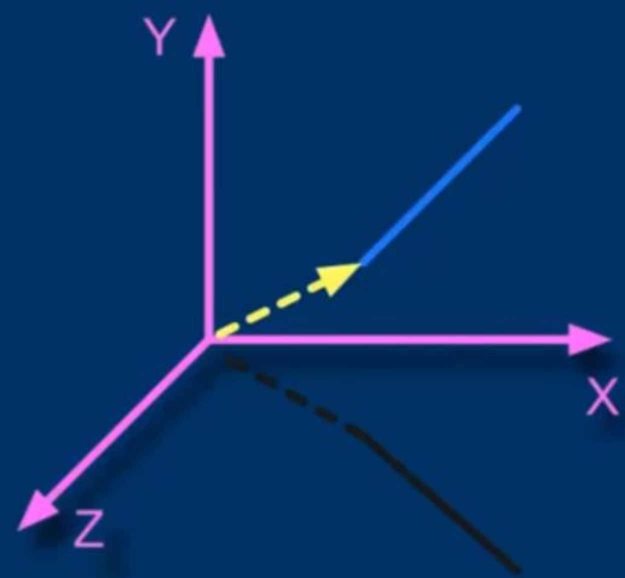
- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  - Trasladar el eje arbitrario al origen
  - Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  - Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  - Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  - Aplicar la traslación inversa



$M = Rotx(-\alpha)\, Roty(-\beta) * Rotz(\varphi) * Roty(\beta) * Rotx(\alpha) * T(-dx, -dy, -dz)$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  - Trasladar el eje arbitrario al origen
  - Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  - Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  - Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  - Aplicar la traslación inversa



$$M = T(dx, dy, dz) * Rotx(-\alpha) * Roty(-\beta) * Rotz(\varphi) * Roty(\beta) * Rotx(\alpha) * T(-dx, -dy, -dz)$$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

- El efecto espejo es extensible a 3D
  - Reflexión c/r a un plano

Plano $x = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plano $y = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plano $z = 0$

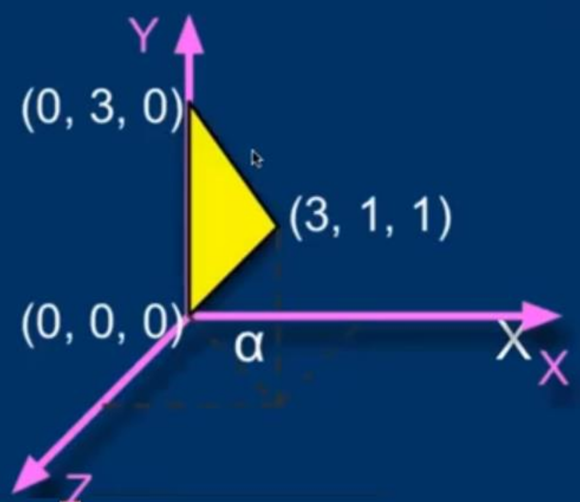
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Reflexión c/r al origen (0, 0, 0)

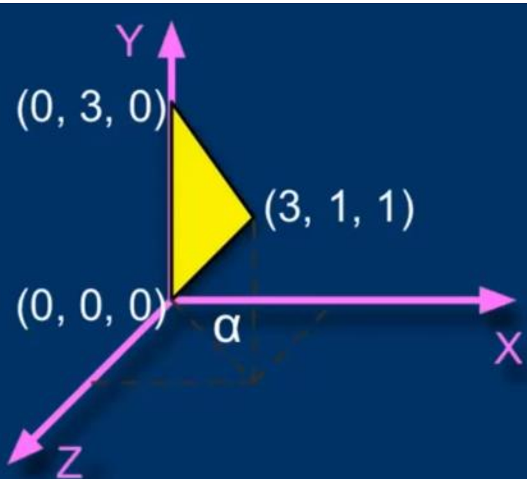
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

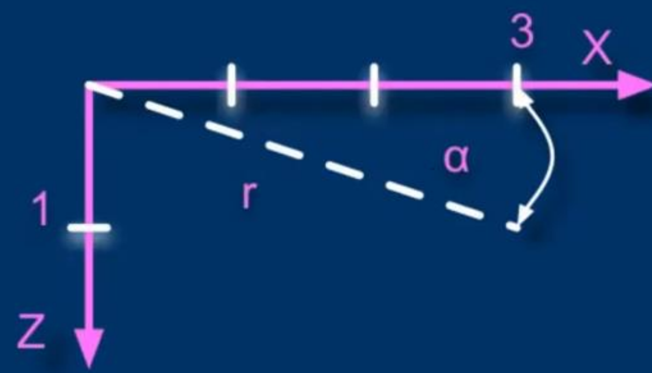
Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

- Reflexión c/r a un plano arbitrario se obtiene por combinación de traslaciones, rotaciones y reflexiones básicas
- Ejemplo:
  - Calcular la reflexión del punto P(2, 2, -1) c/r al plano definido por los puntos A(0, 0, 0), B(0, 3, 0) y C(3, 1, 1).



Transformaciones Geométricas 3D: Rotación





- Solución:

  $r\cos(\alpha) = 3; \quad r\sin(\alpha) = 1; \quad r^2 = 3^2 + 1^2 = 10$
- despejando,
- $\cos(\alpha) = 3 / 10^{1/2}$ y $\sin(\alpha) = 1/10^{1/2}$
- entonces,

  $M = [Rot_y(-\alpha)]\,[\,Reflex(z = 0)]\,[Roty\,(\alpha)]$

  $P' = M\,P$

Transformaciones Geométricas 3D: Sesgo

Existen tres formas de aplicar la operación de corte o sesgado. La primera de ellas deja las coordenadas z del objeto inalteradas, la segunda deja las coordenadas y inalteradas y la tercera deja las coordenadas x inalteradas. En cada caso los coeficientes de la matriz modifican las otras dos coordenadas restantes independientemente. Las matrices correspondientes son las siguientes.

$$SH_x(sh_y, sh_z) = \begin{bmatrix} 1 & sh_y & sh_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SH_z(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sh_x & sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SH_y(sh_x, sh_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ sh_x & 1 & sh_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

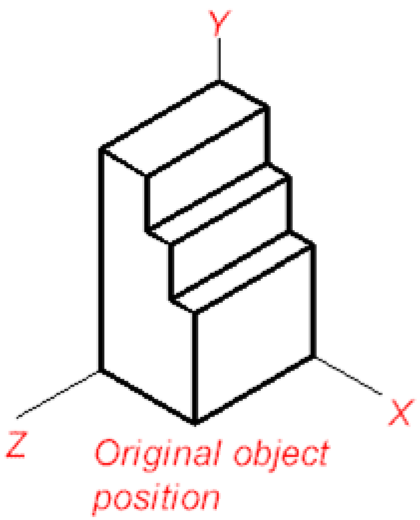
Composición de Transformaciones Geométricas 3D

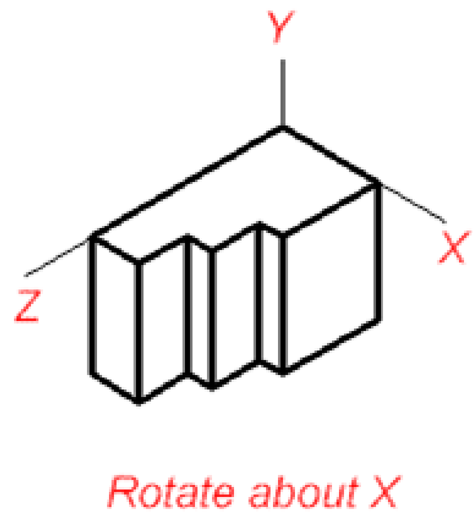
- Se pueden aplicar sucesivas transformaciones a un punto.
  - Al resultado de la primera transformación:
    - $M1 \cdot P$
  - se aplica una segunda transformación:
    - $M2 \cdot [M1 \cdot P] = [M2 \cdot M1] \cdot P$
- La composición de transformaciones se realiza mediante el producto de matrices

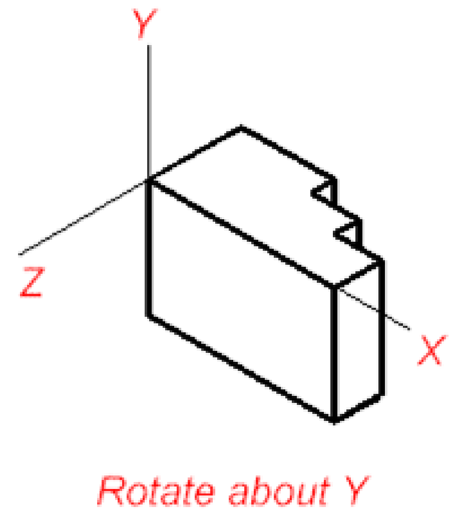
$$M = Mn \,.\, Mn\text{-}1 \,.\, \ldots \cdot M2 \,.\, M1$$

Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

La composición de transformaciones no es conmutativa

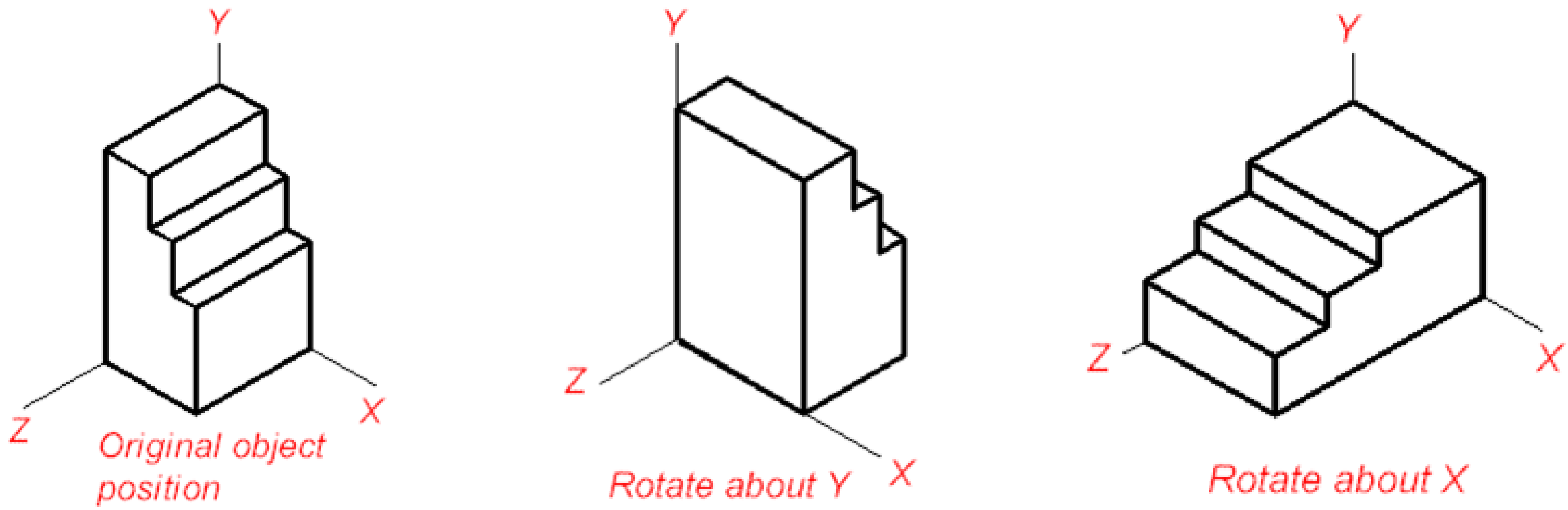






Transformaciones Geométricas 3D: Rotación

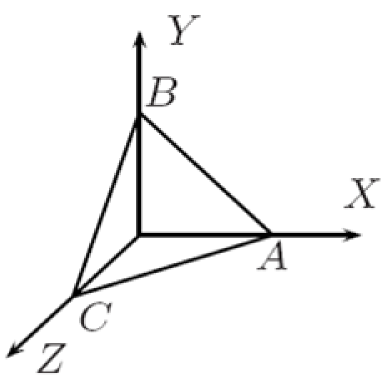
La composición de transformaciones no es conmutativa

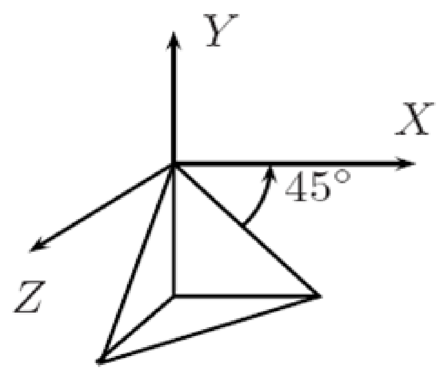


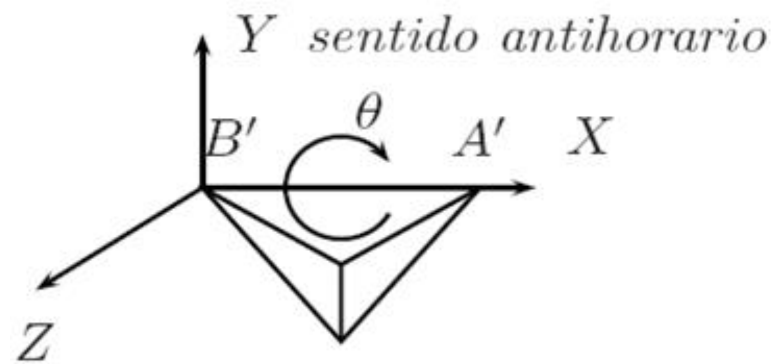
Problemas

Dado el siguiente sólido, un prisma piramidal con aristas en O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) y C = (0, 0, 1).
Halle la matriz de rotación con respecto al eje que se encuentra sobre las arista AB, considerando que el sentido de rotación es efectuada en la dirección de Z hacia el plano xy.

Solución: El diseño del sólido es como se muestra en la figura:







Problemas

La matriz de transformación estaría dada por:

$$M = T(0,1,0).R_z(-45°).R_x(-\theta).R_z(45°).T(0,-1,0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ 0 & -sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

- Eduardo Azevedo y Aura Conci. Computação Gráfica
- Foley J., Van Dame A., Feiner S., Hughes J., Phillips R. Computer Graphics: Principles and Practice. Addison – Wesley Publishing Company, Massachusetts. 1996
- Hoschek J., Lasser D. A.K. Peters Ltd. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. Wellesley Massachusetts. 1993
- Hearn D., Baker M.P. Gráficas por computadora. Prentice - Hall Hispanoamericana. 1998

COMPUTACION VISUAL

Facultad de Ingeniería de Ingeniería de Sistemas
Departamento de Ciencias de la Computación
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS