

# COMPUTACION GRAFICA

## TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS 2D

**Prof. John Ledgard Trujillo Trejo**

**Facultad de Ingeniería de Ingeniería de Sistemas  
Departamento de Ciencias de la Computación  
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**



# Motivación



# Motivación

- ❑ Objetivo de la Computación Gráfica: crear una imagen bidimensional de una escena 3D.
- ❑ Tareas involucradas:
  - Colocación de los objetos en la escena y animación de los mismos.
  - Definición de un punto de vista y una forma de visualización (volumen de visualización)
  - Mapeado de coordenadas 3D en coordenadas 2D
- ❑ Las tareas involucradas se llevan a cabo mediante procesos de transformación y proyección.



# Motivación

- ❑ Con los algoritmos de primitivas podemos dibujar en pantalla
- ❑ El siguiente paso consiste en permitir modificar o manipular dichas primitivas → Transformaciones Geométricas
  - Para poder implementar aplicaciones de diseño
  - Para poder realizar animaciones
  - Para interactuar con la escena
  - Crear múltiples copias de objetos en la escena
  - Mapear puntos de un sistema de coordenadas en otro.
  - Cambiar la forma de los objetos
  - Posicionar objetos en una escena
  - Proyectar escenas tridimensionales en la pantalla
  - Crear animaciones



# Motivación

- ❑ Las transformaciones básicas que se necesitan son:
  - Traslación: cambios en la posición
  - Rotación: cambios en la orientación
  - Escalado: cambios en el tamaño
- ❑ Usaremos transformaciones geométricas para posicionar y mover actores y cámaras en la escena.
- ❑ También usaremos estas transformaciones para modelar objetos.



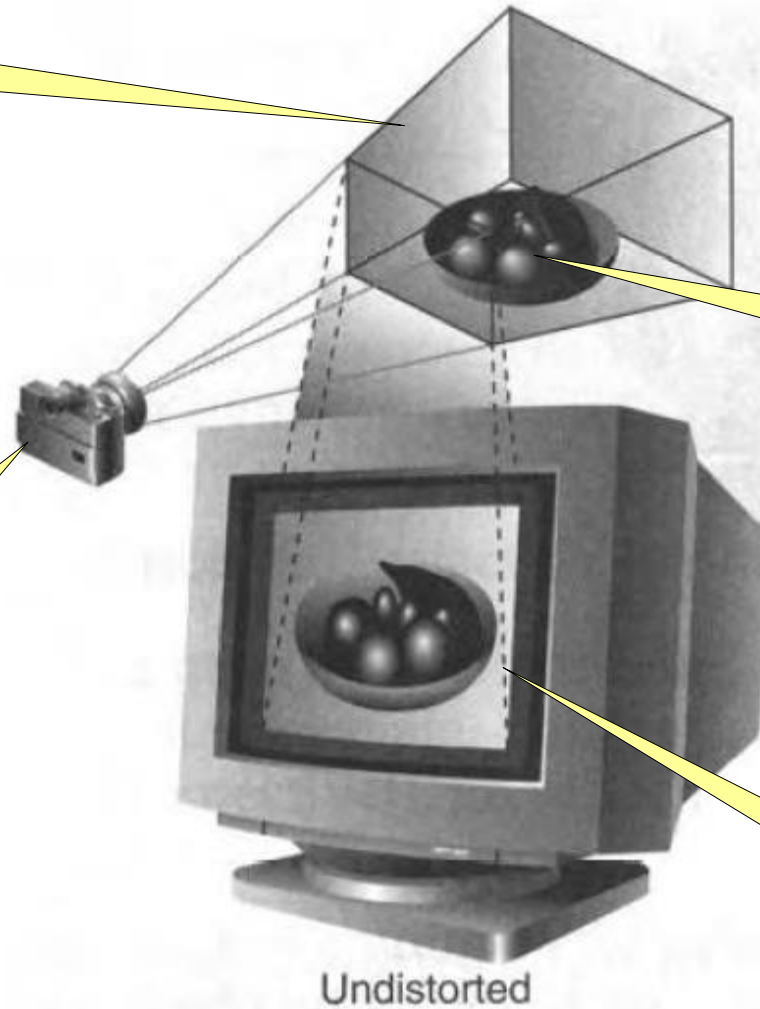
# Motivación

Proyección

Cámara /  
Observador  
(localizada  
en el espacio 3D)

Escena  
3D

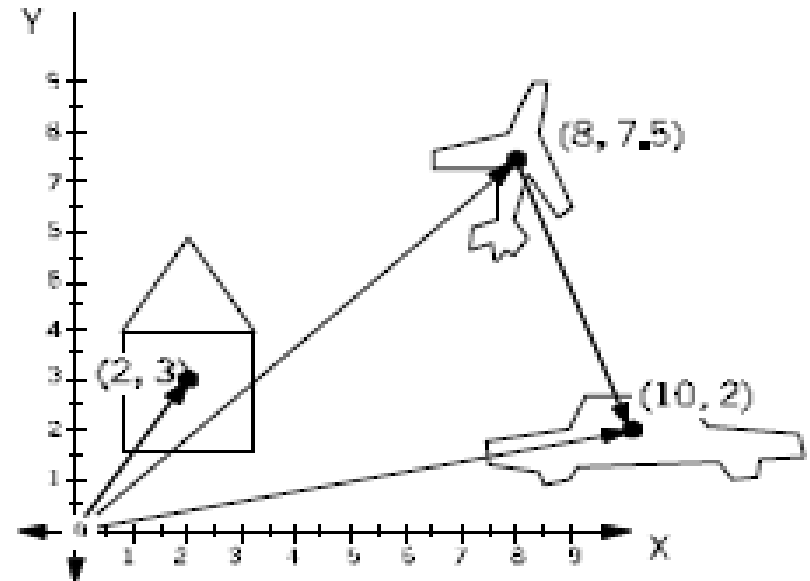
Resultado  
2D





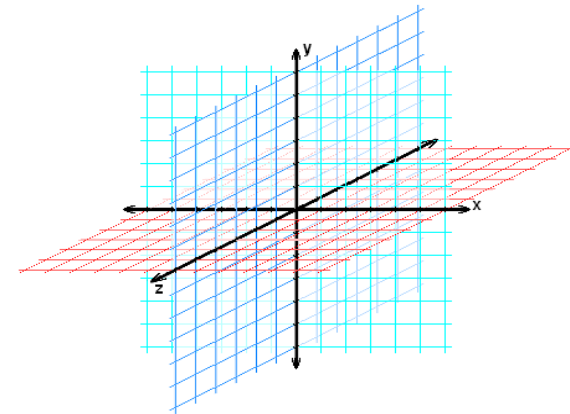
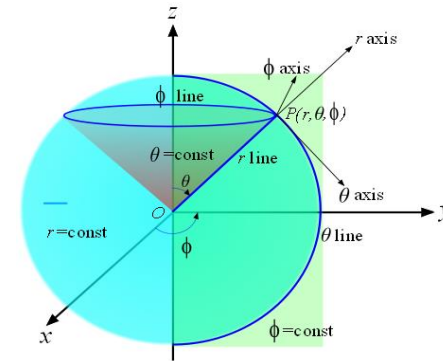
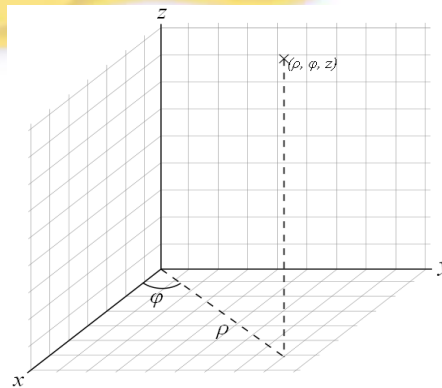
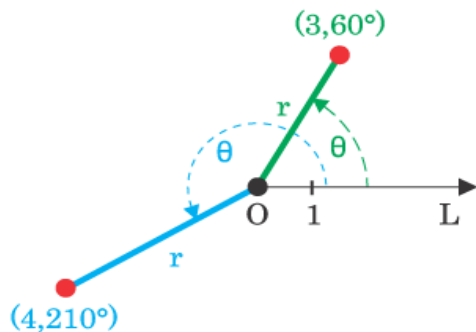
# Motivación

- En una escena nos centraremos en los conceptos matemáticos que permiten describir:
- el espacio
  - los objetos que residen en él
  - sus posiciones
  - los movimientos de los objetos dentro del espacio



# Motivación

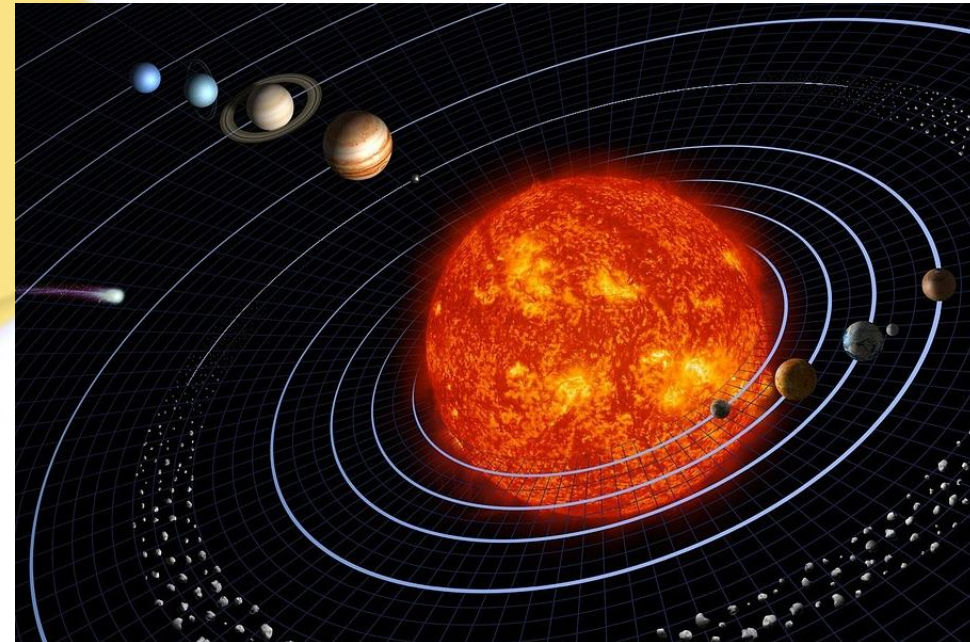
- ❑ Un sistema referencial es un sistema de coordenadas que permite describir la situación de un punto en el espacio.
- ❑ Existen múltiples sistemas de coordenadas.
  - Cartesianas
  - Polares
  - Cilíndricas
  - Esféricas...





# Transformaciones Geométricas

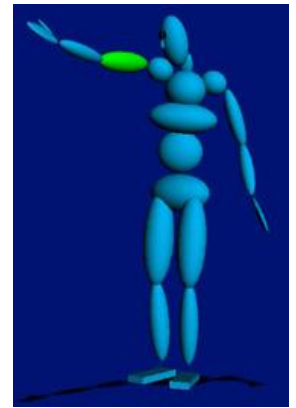
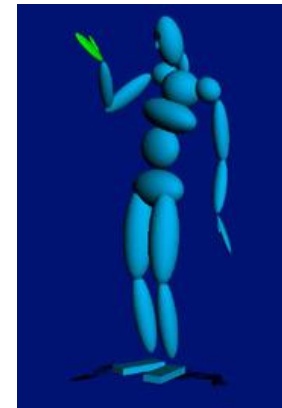
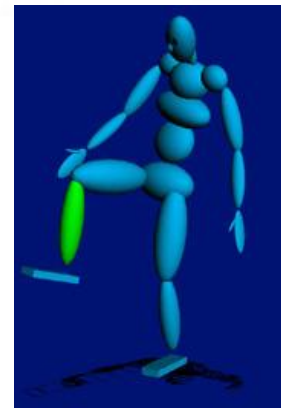
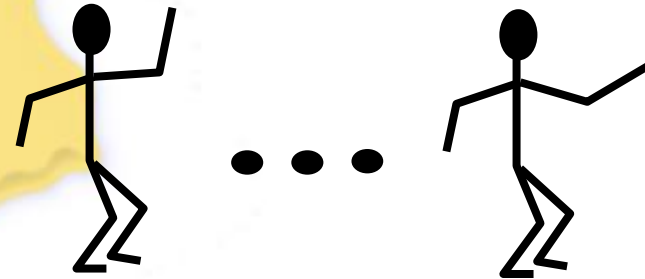
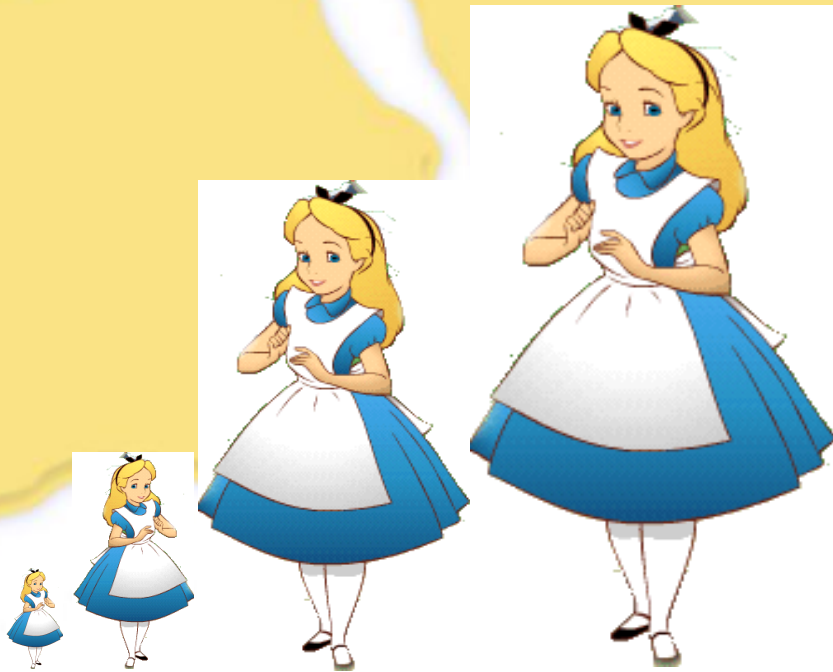
- ❑ **Las transformaciones geométricas modifican la posición, orientación y el tamaño de los objetos y el observador en la escena.**
  - **Las transformaciones geométricas son utilizadas para manipular los objetos dentro de un modelo 3D.**
  - **Transformaciones como la traslación, rotación y escalado permiten simular el movimiento de los objetos, así como situar los objetos y el observador en la posición adecuada.**



# Transformaciones Geométricas

Las transformaciones geométricas permiten cambiar la posición, orientación y tamaño de los objetos.

En estas escenas se ven involucradas traslaciones, rotaciones compuestas, además de escalamientos entre otras.



# Transformaciones Geométricas

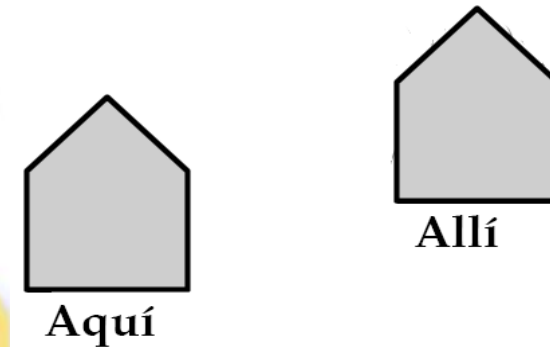
□ Una transformación geométrica es una función matemática que transforma un punto o conjunto de puntos en otro punto o conjunto de puntos, dentro del sistema de referencia global de la escena.

- Las transformaciones geométricas se pueden expresar mediante ecuaciones.
- La representación matricial permite comprender mejor a las ecuaciones, lo cuál es aprovechado en la ingeniería.
- Las matrices traen mucha información, además de permitir una mejor representación de datos.
- A través de las composiciones matriciales estas pueden ser representadas en una única matriz de transformación

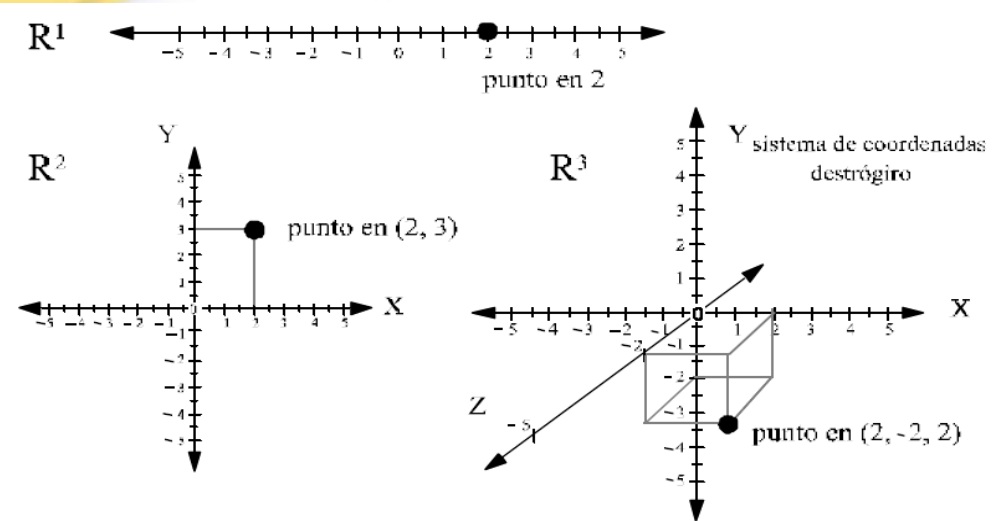


# Transformaciones Geométricas

- **Problema: ¿Cómo mover un objeto?**
  - En la vida real sabemos como mover un objeto
  - ¿Cómo hacerlo en un ordenador?
  - **Objetivo: Mover la casa de "aquí" a "allí"**
- **Se necesita cuantificar: "aquí" y "allí"**

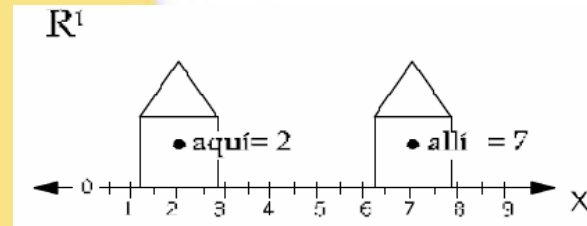


- **Solución: Utilizar un sistema de coordenadas**
  - Define el espacio de forma numérica
  - Proporciona una métrica: permite describir la distancia entre 2 puntos
  - Ejemplo: 1, 2 y 3 dimensiones

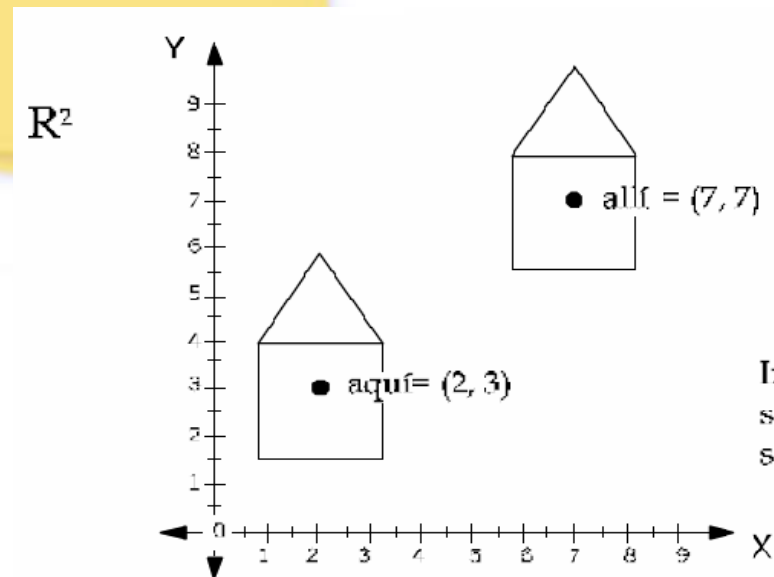


# Transformaciones Geométricas

- Un objeto se representa por polígonos.
- Un polígono es una colección de vértices y aristas.
- Para transformar un objeto se transforman sus vértices.
- Del sistema local al sistema global: transformaciones.
- Ejemplo: Utilizando los sistemas de coordenadas tenemos instrucciones cuantitativas para mover la casa.



Instrucción para mover: sumar 5



Instrucción para mover:  
sumar 5 a  $x$ ,  
sumar 4 a  $y$





# Transformaciones Geométricas

➤ **¿Cómo podemos relacionar distintos objetos?**

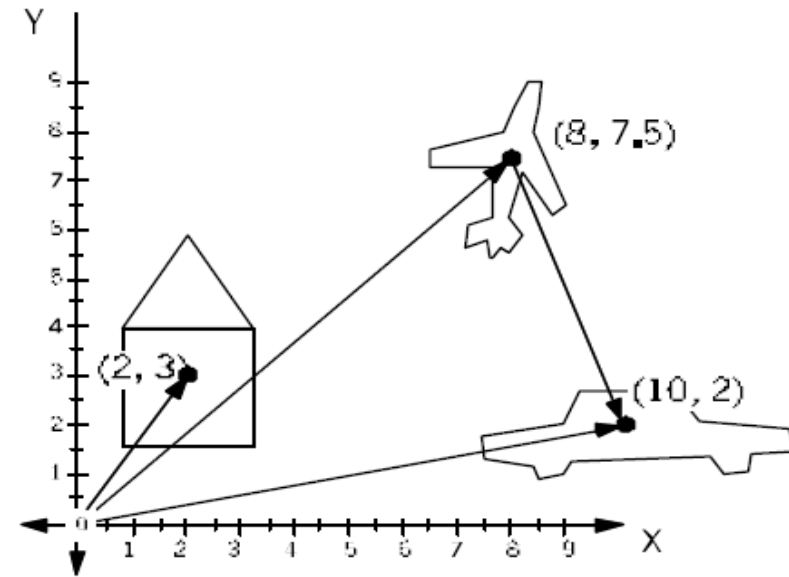
- Se puede considerar la localización de los objetos con respecto a un punto central de referencia llamado origen.
- Un vector indica cual es la dirección a seguir desde el origen y la longitud del camino hasta llegar a un punto.

➤ **Notación del vector: fila  $[x \ y]$  o columna  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$**

- P. Ej : el vector que apunta al centro del coche

➤ **Los vectores se utilizan en CG para:**

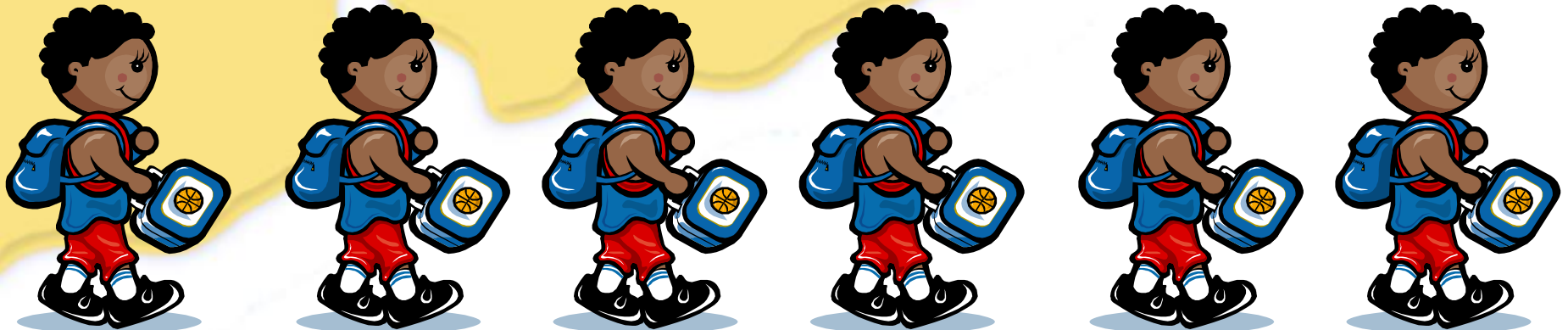
- Representar las posiciones de los vértices
- Determinar la orientación de una superficie  
Vector normal a la superficie
- Para modelar la interacción de la luz  
Vector de incidencia de la luz





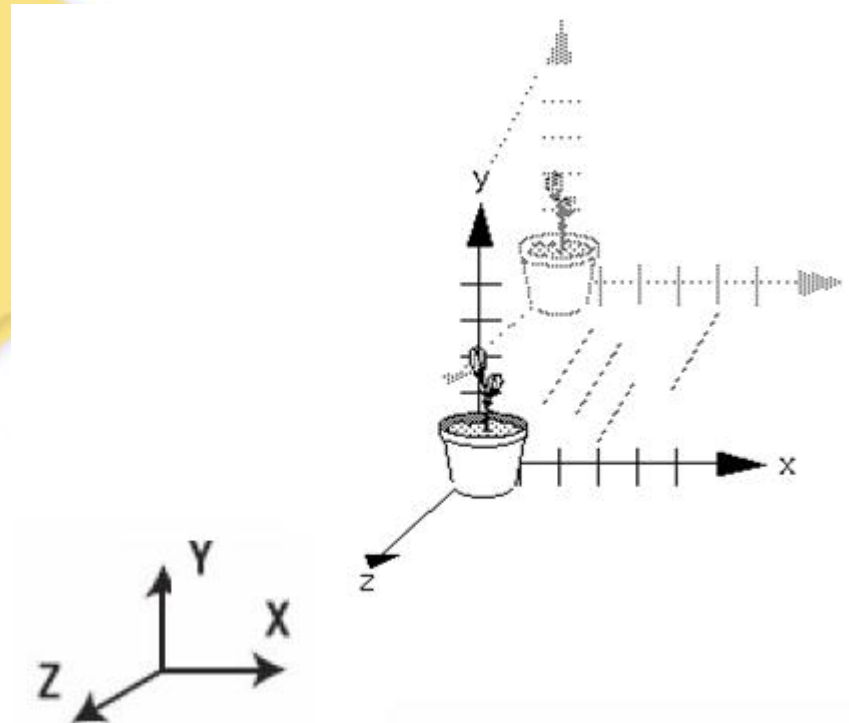
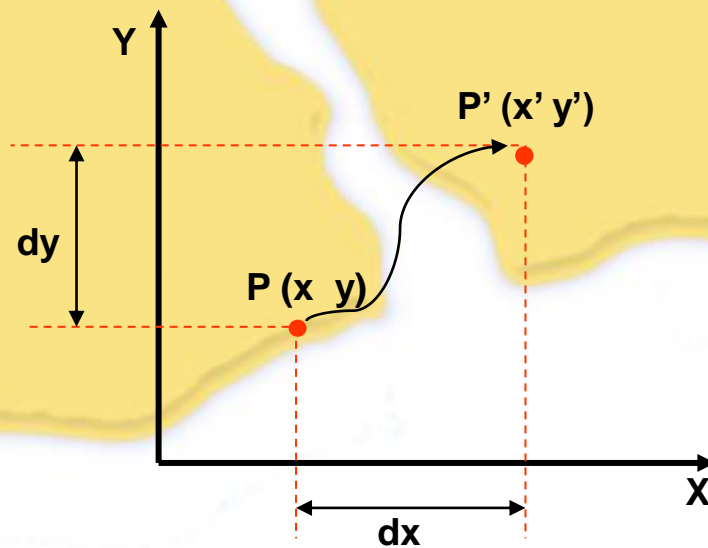
# Traslación

- ❑ La operación de traslación consiste en modificar la posición de un punto en el plano definido por las coordenadas  $(x, y)$ , mediante un movimiento en línea recta desde la posición actual (posición inicial) a la posición final.



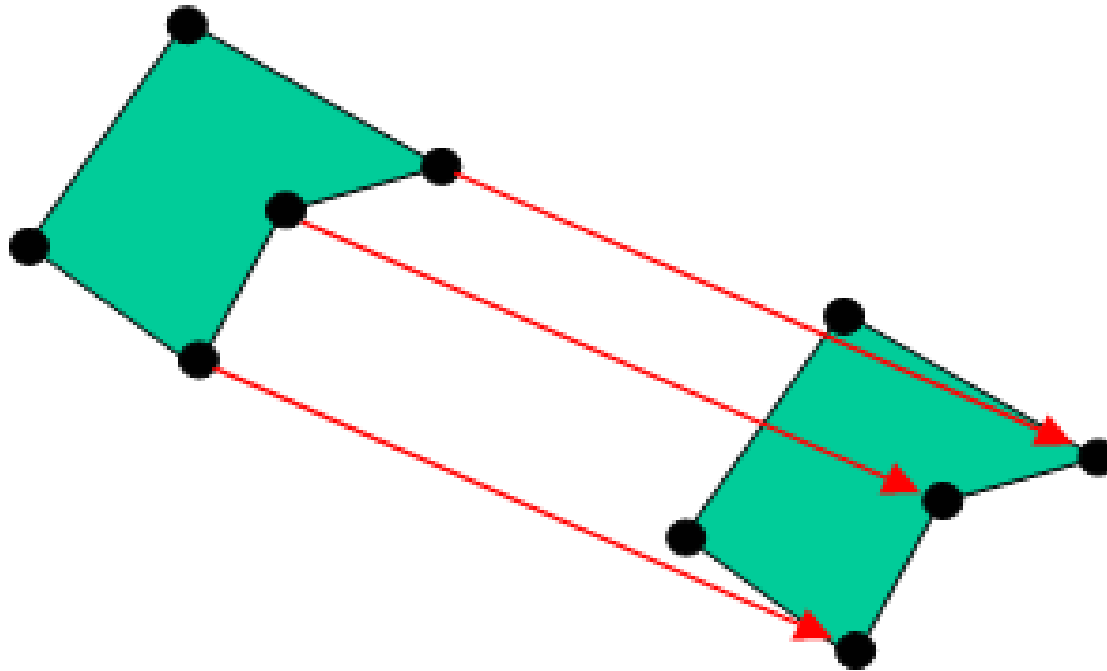
# Traslación

- Se traslada cada punto  $P(x,y)$   $dx$  unidades paralelamente al eje  $x$  y  $dy$  unidades paralelamente al eje  $y$ , hacia el nuevo punto  $P'(x',y')$ .



# Traslación

- Es una transformación rígida: el objeto no se deforma.
- Para trasladar todos los puntos de una línea, simplemente se traslada los puntos extremos. En las nuevas posiciones vuelven a unirse los vértices.
- Para trasladar polígonos, trasladamos sólo sus vértices y redibujamos.



# Traslación

Esta operación consiste en sumar a las coordenadas de cada punto, los valores de los desplazamientos en las dos direcciones  $x$  e  $y$ .

La traslación no modifica la geometría del objeto, sólo su posición en el espacio.

Las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}x' &= x + dx \\ y' &= y + dy\end{aligned}$$

Si se definen los vectores columna queda:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix},$$

entonces la ecuación anterior puede ser expresada como:

$$P' = P + T$$



# Traslación

Una forma de efectuar la traslación de un objeto es aplicándole a cada punto del mismo la ecuación anterior.

Vector de desplazamiento  $T = (-3, -2)$

$$(x_1, y_1) = (2, 3)$$

$$(x_2, y_2) = (1, 1)$$

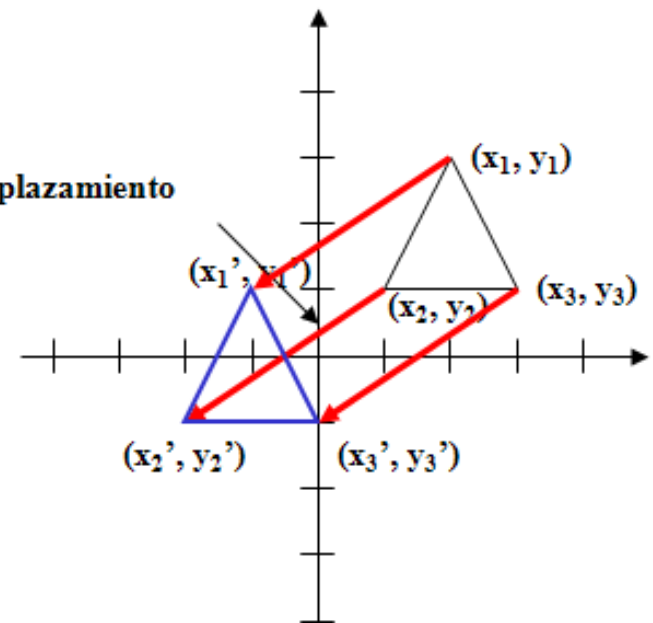
$$(x_3, y_3) = (3, 1)$$

$$(x_1', y_1') = (2, 3) + (-3, -2) = (-1, 1)$$

$$(x_2', y_2') = (1, 1) + (-3, -2) = (-2, -1)$$

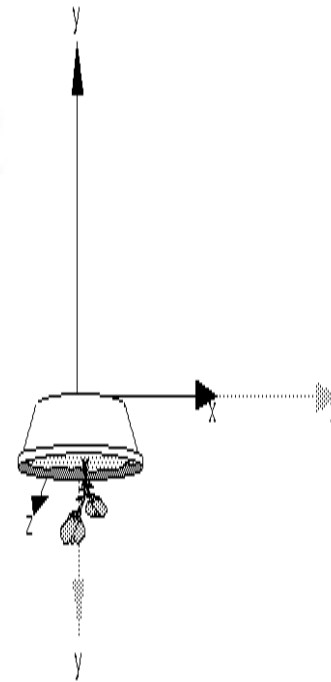
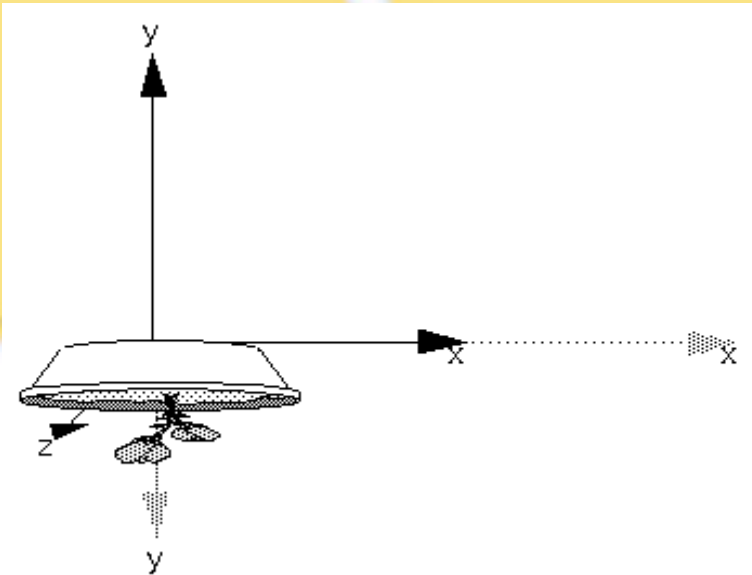
$$(x_3', y_3') = (3, 1) + (-3, -2) = (0, -1)$$

Vector de desplazamiento



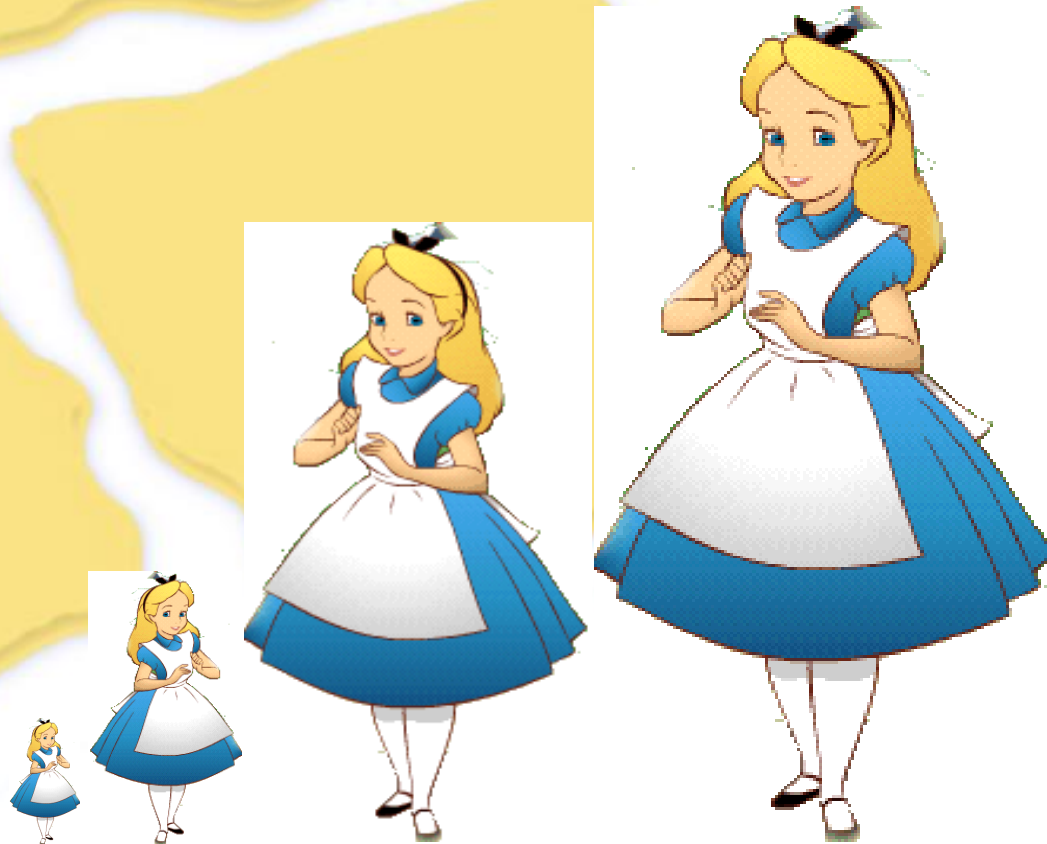
# Escalamiento

- ❑ La operación de escalado modifica la distancia de los puntos sobre los que se aplica, respecto a un punto de referencia.
- Consiste en cambiar el tamaño del objeto.
- Se realiza respecto a un punto



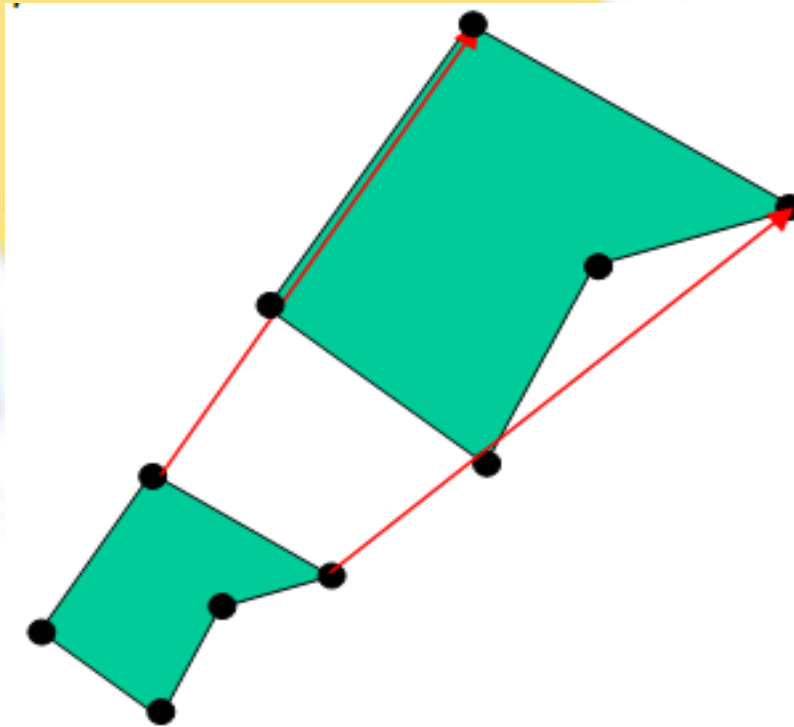


# Escalamiento



# Escalamiento

- Es una transformación rígida: el objeto se deforma en ciertos casos.
- Para escalar líneas rectas escalamos sólo sus extremos.
- Para escalar polígonos, escalamos sólo sus vértices y redibujamos.



# Escalamiento

- El escalamiento se hace con un factor  $Sx$  en el eje  $x$  y en un factor  $Sy$  en el eje  $y$ , y un punto o eje de referencia.
- La transformación de escalamiento puede expresarse con las siguientes multiplicaciones

$$x' = Sx \cdot x$$

$$y' = Sy \cdot y$$

- En forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow P' = S \cdot P$$

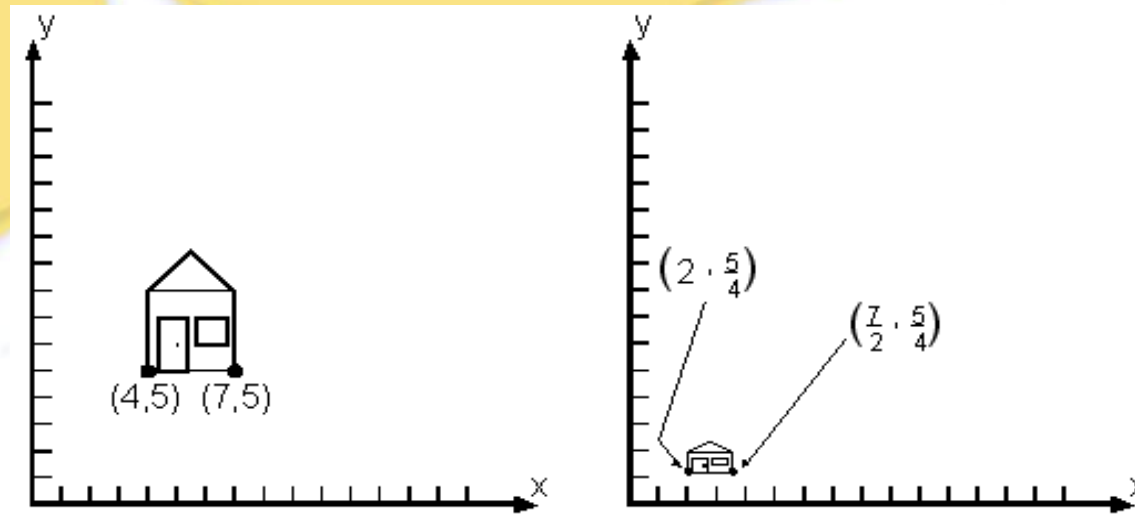
Matriz S



# Escalamiento

## ❑ Escalado respecto al punto origen:

- Si  $S_x, S_y > 1$ , la distancia entre el objeto y el punto de referencia aumenta.
- Si  $S_x, S_y < 1$ , la distancia entre el objeto y el punto de referencia disminuye.
- Si  $S_x, S_y = 1$ , la operación no tiene ningún efecto.



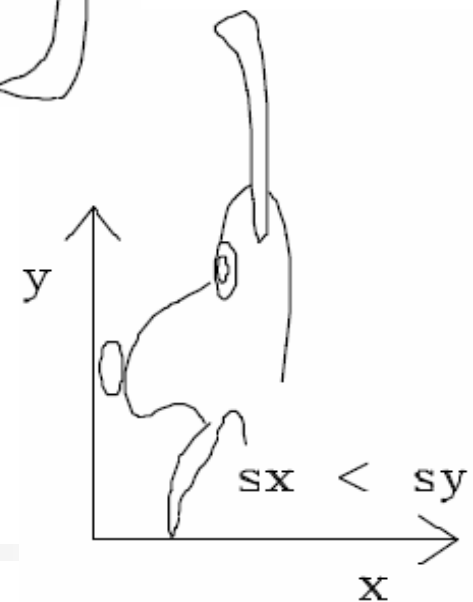
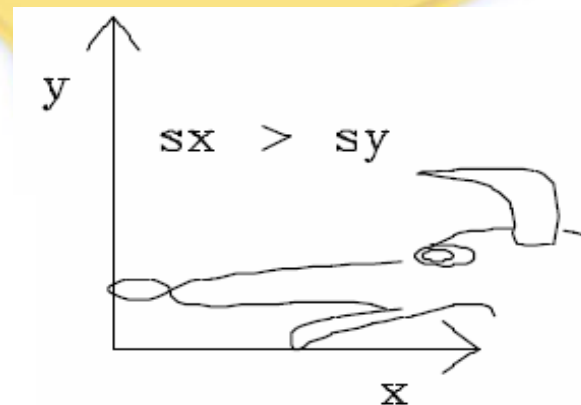
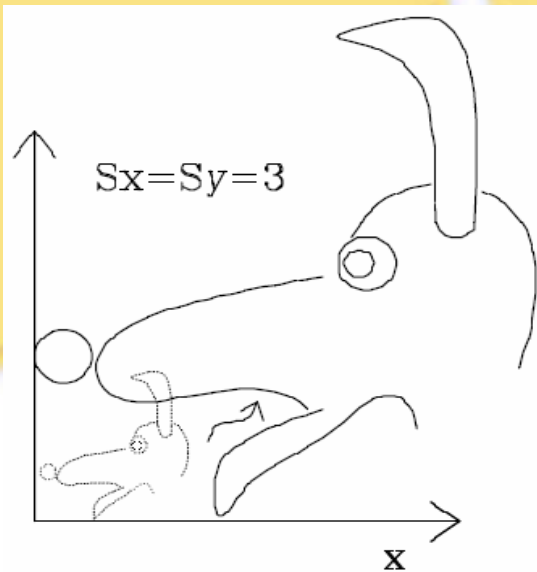
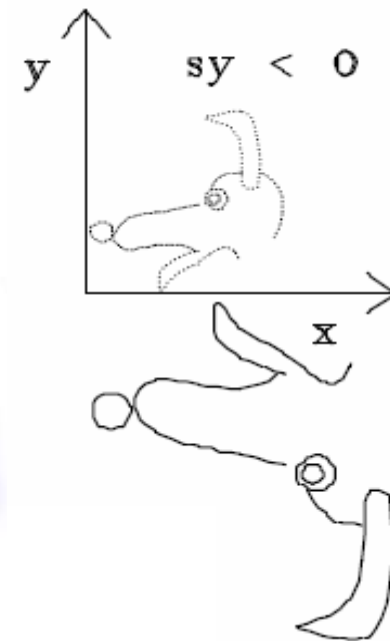
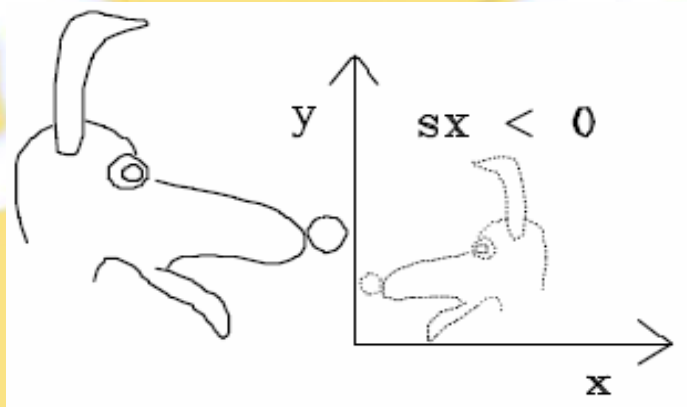
# Escalamiento

## ➤ Dos tipos de escalado:

- **Escalado uniforme:** El factor de escala es el mismo en las dos coordenadas, es decir  $S_x = S_y$ , y por lo tanto varía el tamaño pero no la forma del objeto.
- **Escalado diferencial:** El factor de escala es distinto en cada dirección, es decir  $S_x$  es distinto de  $S_y$ , y se produce una distorsión en la forma del objeto.
  - Si  $|S_x| > 1$  y  $|S_y| > 1$  aumenta el tamaño, Si  $|S_x| < 1$  y  $|S_y| < 1$  disminuye
  - Si  $S_x = S_y$  escalado uniforme, Si  $S_x \neq S_y$  escalado no uniforme
  - Si  $S_x < 0$  el objeto se refleja respecto al eje Y
  - Si  $S_y < 0$  el objeto se refleja respecto al eje X



# Escalamiento





# Escalamiento

## Ejemplo de escalamiento

Factores de escalamiento  $T = (2, -1)$

$$(x_1, y_1) = (2, 3)$$

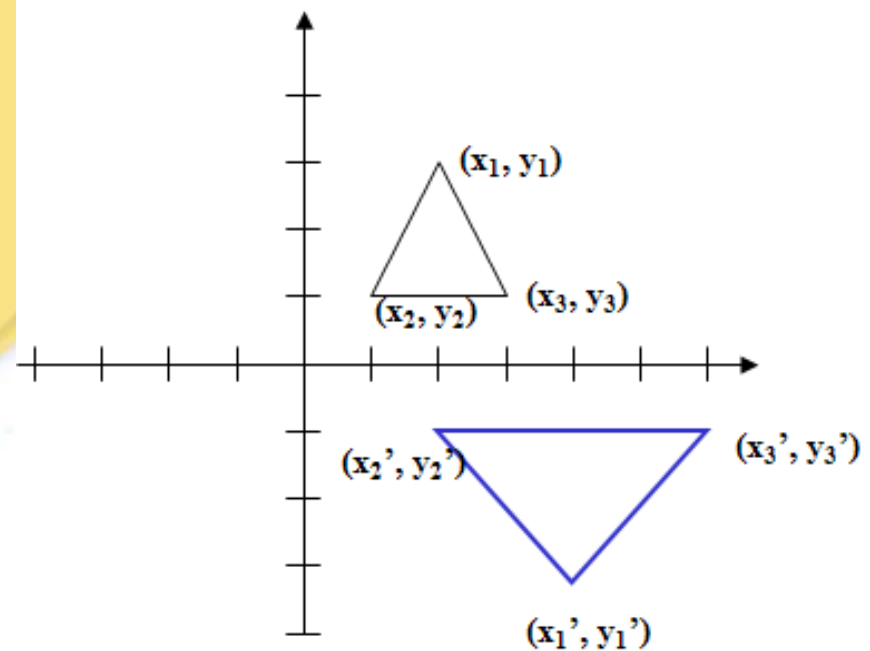
$$(x_2, y_2) = (1, 1)$$

$$(x_3, y_3) = (3, 1)$$

$$(x_1', y_1') = (2 \cdot 2, (-1) \cdot 3) = (4, -3)$$

$$(x_2', y_2') = (2 \cdot 1, (-1) \cdot 1) = (2, -1)$$

$$(x_3', y_3') = (2 \cdot 3, (-1) \cdot 1) = (6, -1)$$



# Escalamiento

**Reflexión: Corresponde a escalar usando coeficientes negativos:**

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ reflexión respecto al eje } y$$



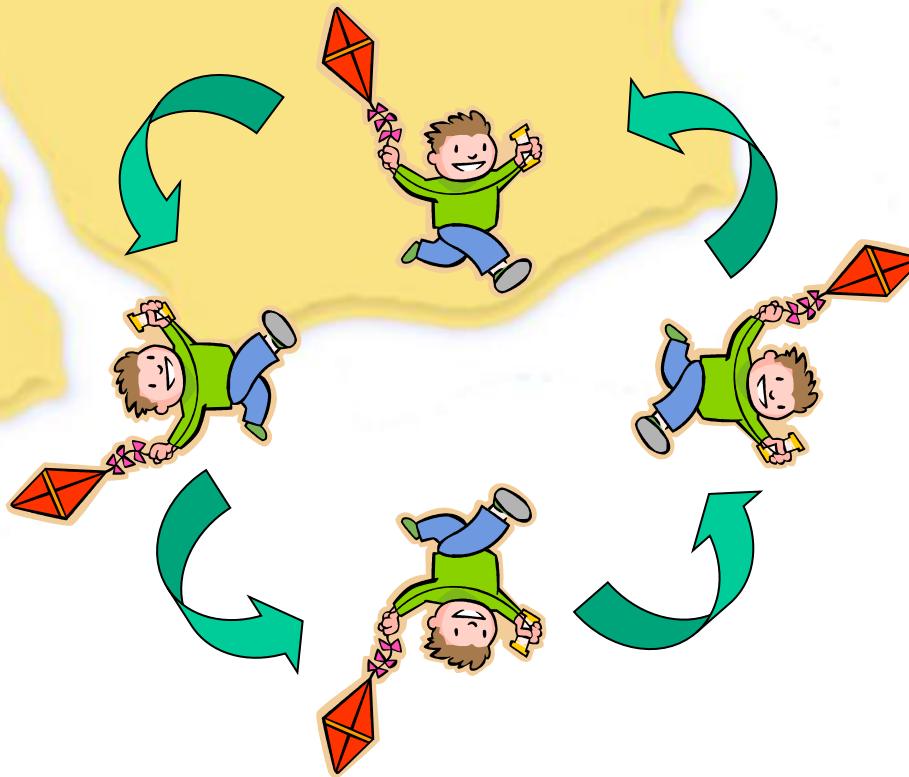
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ reflexión respecto al origen}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ reflexión respecto al eje } x$$



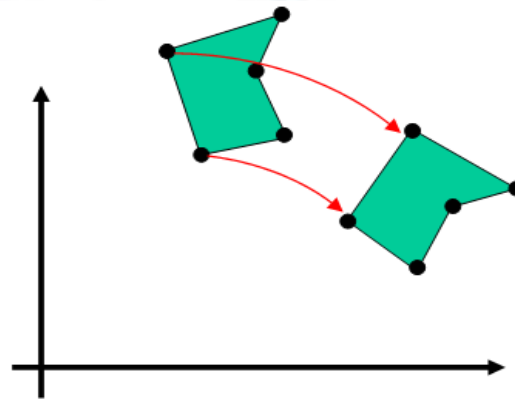
# Rotación

- ❑ La operación de **rotación** o **giro** desplaza un punto a través de la circunferencia definida sobre un centro determinado, es decir, siguiendo un movimiento circular.



# Rotación

- Igual que en la traslación, esta operación no modifica la geometría del objeto, sólo su posición.
- Se utiliza para orientar objetos.
- Se realiza respecto a un punto
- Los ángulos positivos se miden en sentido contrario al giro de las agujas del reloj, es decir, un giro desde x hacia y se considera positivo.
- Es una transformación rígida: el objeto no se deforma.
- Para rotar líneas rectas rotamos sólo sus extremos.
- Para rotar polígonos, rotamos sólo sus vértices y redibujamos.



# Rotación

La rotación de un ángulo que transforma al punto  $P(x,y)$  en  $P'(x',y')$   
Por trigonometría tenemos

$$x = r \cdot \cos \phi, \quad y = r \cdot \sen \phi,$$

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \phi) = r \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta - r \cdot \sen \phi \cdot \sen \theta$$

$$y' = r \cdot \sen(\theta + \phi) = r \cdot \cos \phi \cdot \sen \theta + r \cdot \sen \phi \cdot \cos \theta$$

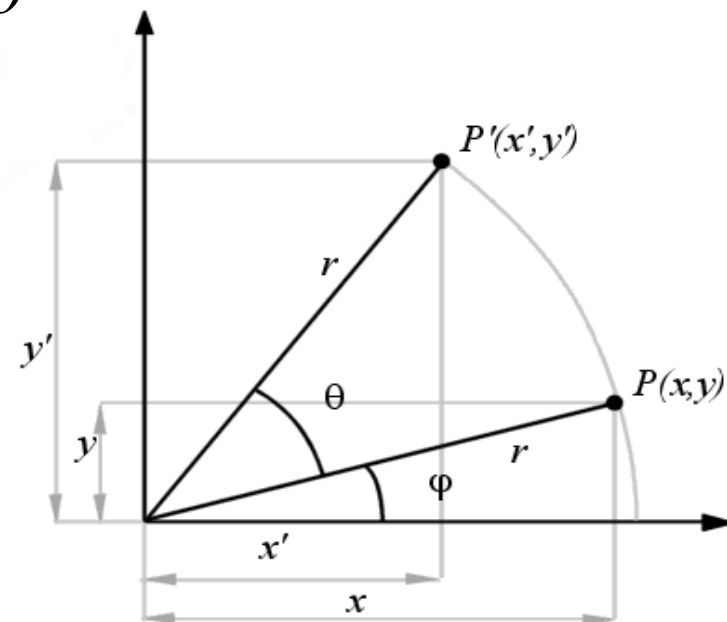
$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sen \theta$$

$$y' = x \cdot \sen \theta + y \cdot \cos \theta$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sen \theta \\ \sen \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow P' = R \cdot P$$

Matriz R



# Rotación

## Ejemplo de rotación

Ángulo de rotación  $\theta = 45^\circ$

$$(x_1, y_1) = (2, 3)$$

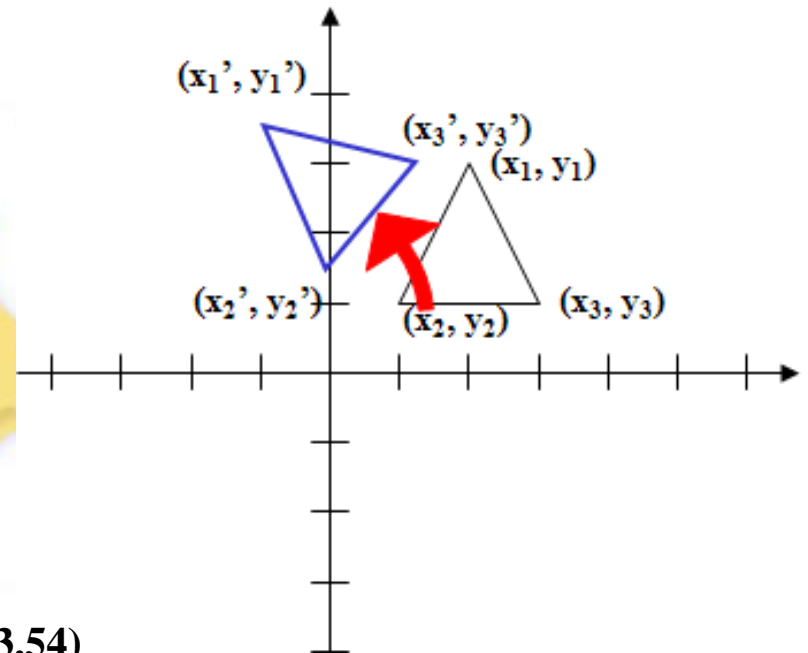
$$(x_2, y_2) = (1, 1)$$

$$(x_3, y_3) = (3, 1)$$

$$\begin{aligned}(x_1', y_1') &= (2\cos(45^\circ) - 3\sin(45^\circ), 3\cos(45^\circ) + 2\sin(45^\circ)) \\ &= (2*0.707 - 3*0.707, 3*0.707 + 2*0.707) = (-0.707, 3.54)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_2', y_2') &= (3\cos(45^\circ) - \sin(45^\circ), \cos(45^\circ) + 3\sin(45^\circ)) \\ &= (3*0.707 - 0.707, 0.707 + 3*0.707) = (1.414, 2.828)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_3', y_3') &= (\cos(45^\circ) - \sin(45^\circ), \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ)) \\ &= (0.707 - 0.707, 0.707 + 0.707) = (0, 1.414)\end{aligned}$$





# Homogenización de coordenadas

Las representaciones matriciales obtenidas hasta ahora para traslación, escalamiento y rotación son, respectivamente

$$P' = T + P$$

$$P' = S \cdot P$$

$$P' = R \cdot P$$

**Problema:** La traslación es tratada de forma diferente

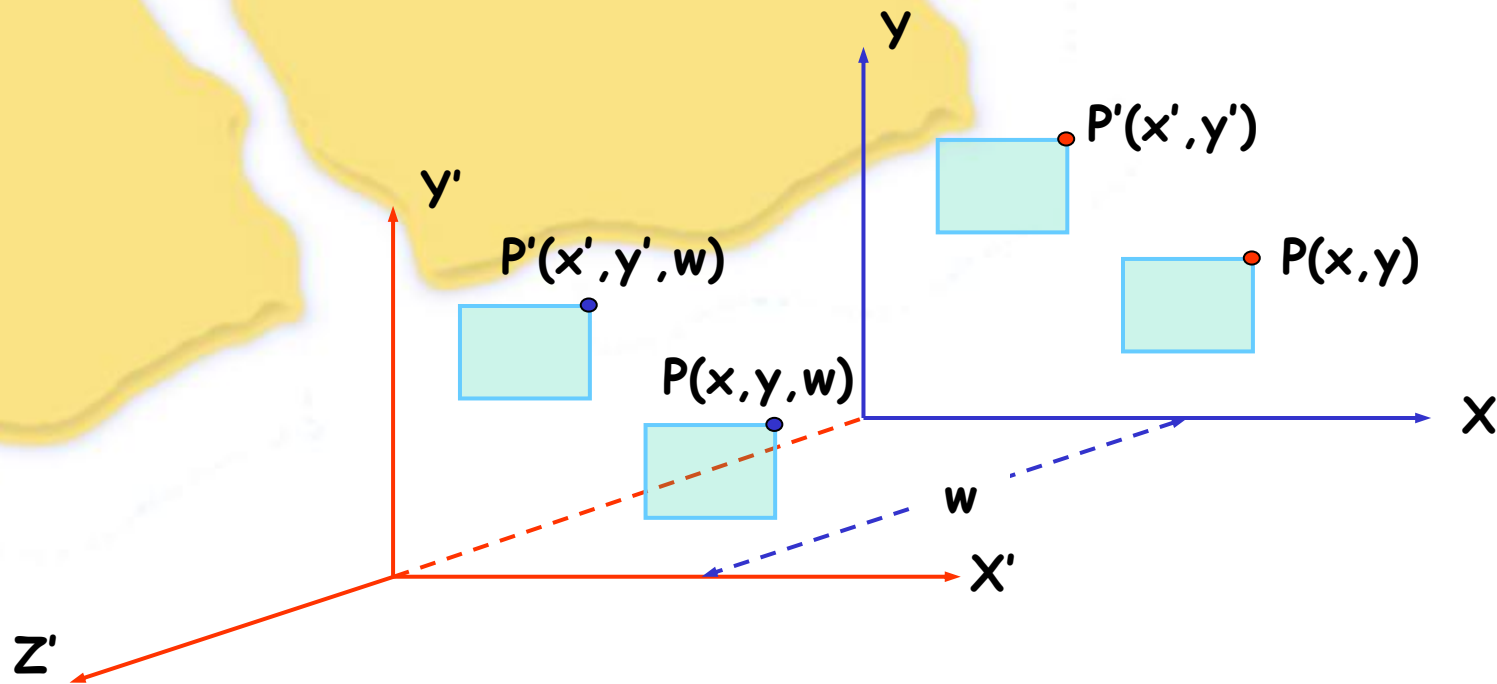
**Solución:** Utilizar un sistema de coordenadas homogéneas



# Homogenización de coordenadas

Se introduce una coordenada adicional al sistema de referencia  $XY$  respetando todas las operaciones.

Las matrices de transformación se redimensionan y las transformaciones son llevadas a cabo en el sistema  $XYW$ .



# Homogenización de coordenadas

- Las coordenadas homogéneas de  $(x, y)$  son  $(x', y', w)$ , donde
  - $x = x'/w$
  - $y = y'/w$
  - $w$  no puede ser 0.
- Para un punto concreto del plano existen infinitas representaciones en coordenadas homogéneas
- $(4, 5)$  se puede representar como
  - $(8, 10, 2)$
  - $(4, 5, 1)$
  - $(12, 15, 3)$



# Homogenización de coordenadas

- Las ecuaciones de traslación pasan a ser una matriz 3x3 en coordenadas homogéneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Esta ecuación puede ser representada de la siguiente forma:

$$P' = T(dx, dy) \cdot P,$$

- Donde  $T(dx, dy)$  es la matriz de transformación

$$T(dx, dy) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Homogenización de coordenadas

- Las ecuaciones de Escalamiento pasan a ser una matriz 3x3 en coordenadas homogéneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Esta ecuación puede ser representada de la siguiente forma:

$$P' = S(Sx, Sy) \cdot P$$

- Donde  $S(Sx, Sy)$  es la matriz de transformación

$$S(Sx, Sy) = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Homogenización de coordenadas

- Las ecuaciones de Rotación pasan a ser una matriz 3x3 en coordenadas homogéneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Esta ecuación puede ser representada de la siguiente forma:

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

- Donde  $R(\theta)$  es la matriz de transformación

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Homogenización de coordenadas

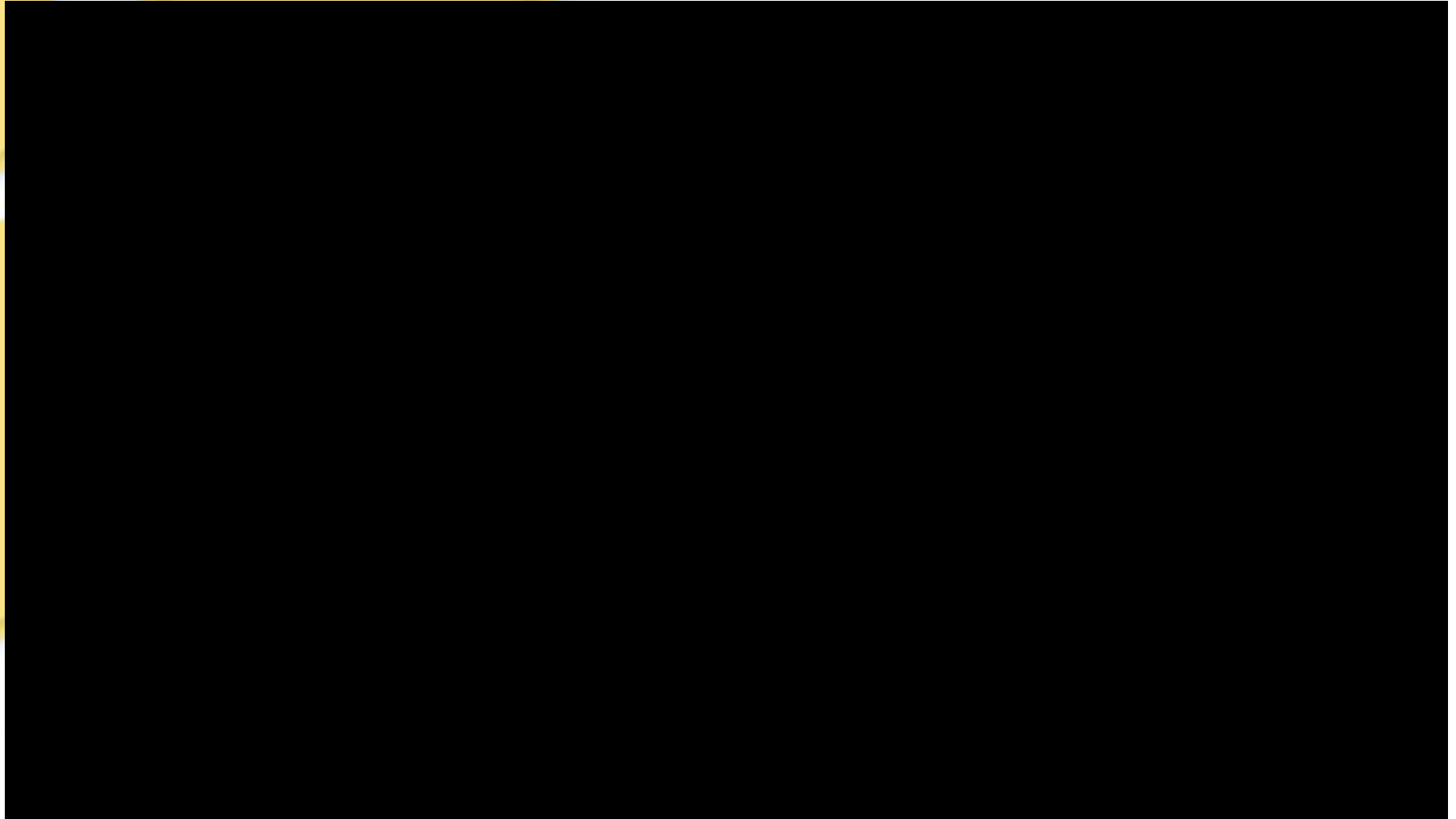
## ➤ Ventajas de las coordenadas homogéneas:

- **Facilitan las operaciones de concatenación de transformaciones, mediante el producto de matrices.**
- **Las tarjetas aceleradoras de gráficos implementan en hardware las operaciones matriciales con coordenadas homogéneas, mejorando el rendimiento de estas operaciones. Si las operaciones se realizasen por software requerirían un gran poder de cómputo**



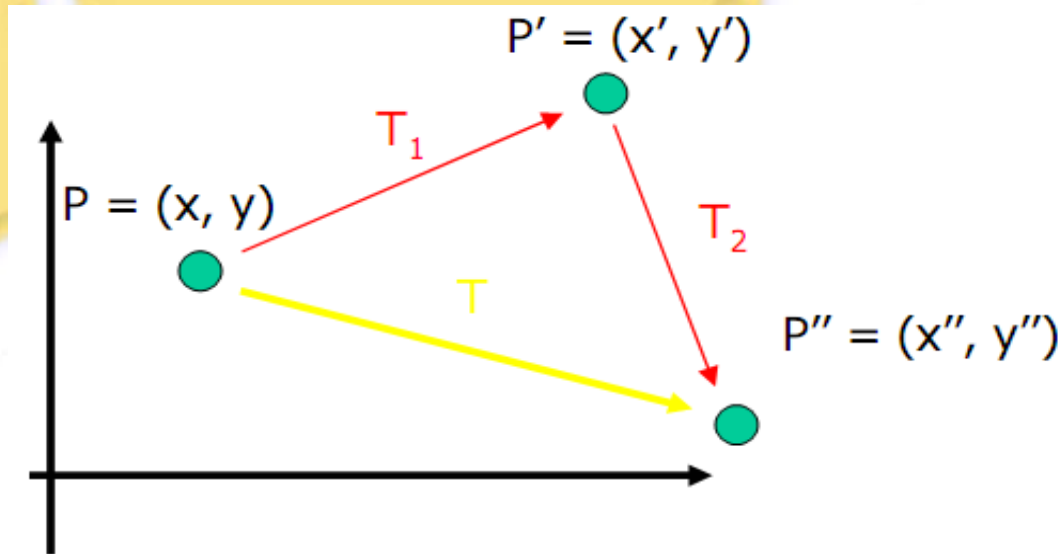


# Homogenización de coordenadas



# Concatenación de Transformaciones: Traslación

- La aplicación consecutiva de transformaciones geométricas se denomina concatenación
- El resultado es otra transformación geométrica equivalente.
- En notación matricial equivale al producto de matrices
- Supongamos que realizamos 2 traslaciones consecutivas.



# Concatenación de Transformaciones: Traslación

$$P' = T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot P'$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot (T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P) = (T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})) \cdot P$$

➤ Y nos queda realizar el producto matricial

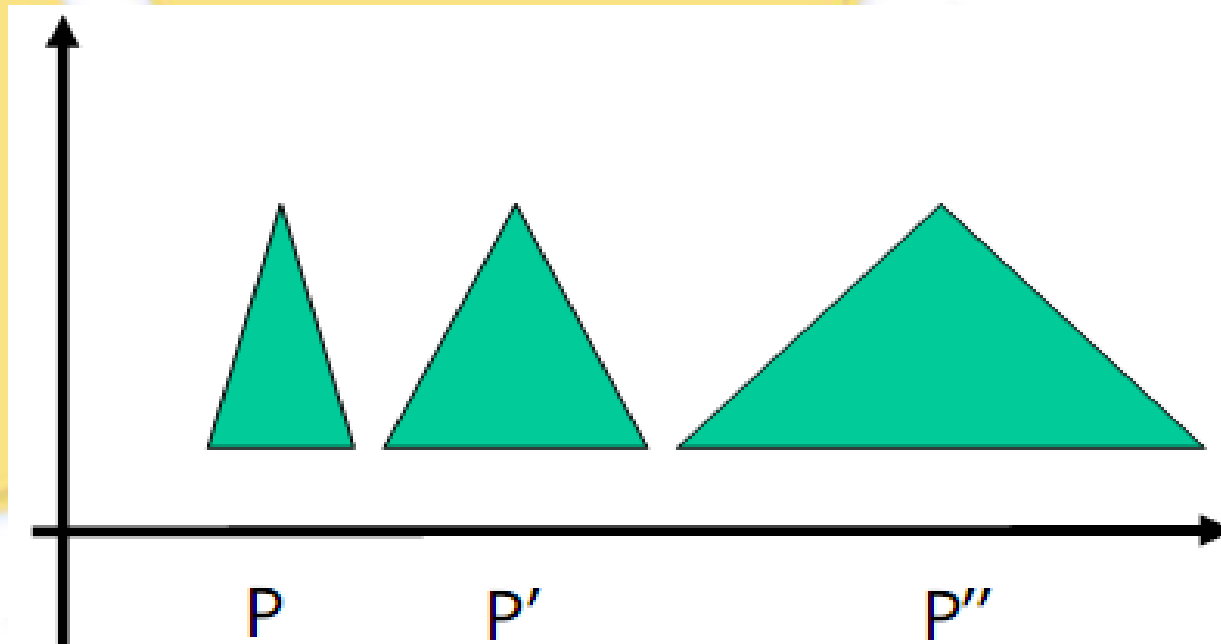
$$T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})$$

$$T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Concatenación de Transformaciones: Escalamiento

- Supongamos que realizamos 2 escalados consecutivos.



# Concatenación de Transformaciones: Escalamiento

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot P' \quad P' = S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P$$

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot (S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P) = (S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})) \cdot P$$

➤ Y nos queda realizar el producto matricial

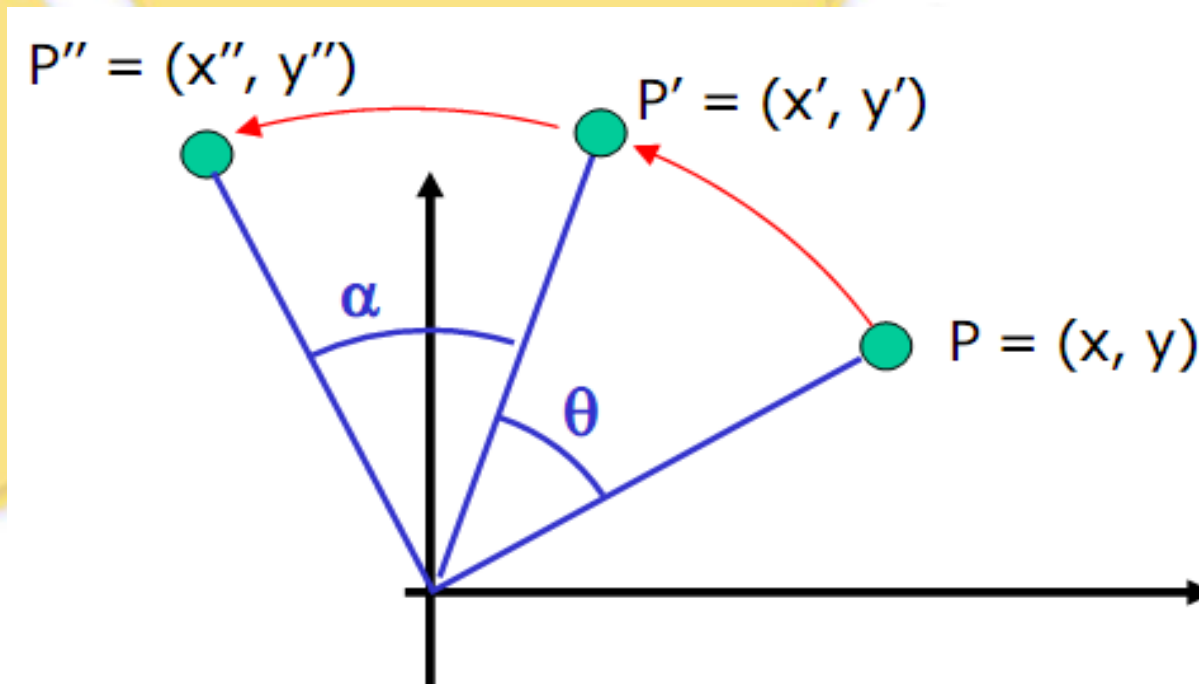
$$S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})$$

$$S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1}) = \begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x2} \cdot s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} \cdot s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Concatenación de Transformaciones: Rotación

- Supongamos que realizamos 2 rotaciones consecutivas.



# Concatenación de Transformaciones: Rotación

$$P'' = R(\alpha) \cdot P'$$

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

$$P'' = R(\alpha) \cdot (R(\theta) \cdot P) = (R(\alpha) \cdot R(\theta)) \cdot P$$

➤ Y nos queda realizar el producto matricial

$$R(\alpha) \cdot R(\theta)$$

$$R(\alpha) \cdot R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





# Concatenación de Transformaciones: Rotación

$$R(\alpha) \cdot R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta) & -(\cos(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\theta)) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\sin(\theta) & -\sin(\alpha)\sin(\theta) + \cos(\alpha)\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\alpha \pm \theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) \mp \sin(\alpha)\sin(\theta)$$

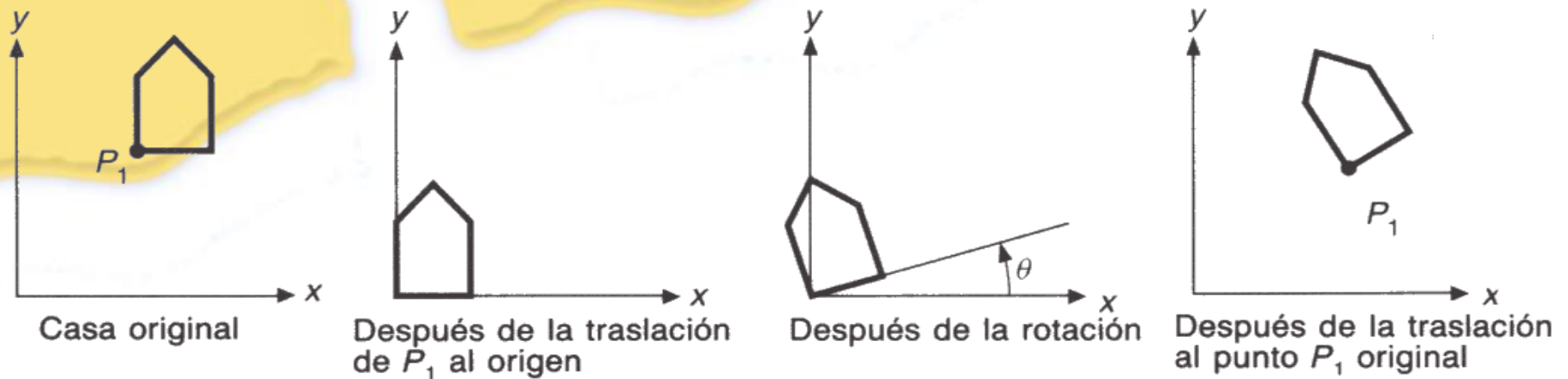
$$\sin(\alpha \pm \theta) = \cos(\alpha)\sin(\theta) \pm \sin(\alpha)\cos(\theta)$$

$$R(\alpha) \cdot R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \alpha) & -\sin(\theta + \alpha) & 0 \\ \sin(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Composición de Transformaciones

- Las aplicaciones utilizan movimientos más complejos que se pueden conseguir combinando transformaciones básicas.
- ¿Cómo se puede aplicar a un objeto una operación compleja en la que intervengan varias operaciones básicas encadenadas?
  - Empleando la composición o multiplicación de las matrices asociadas a las operaciones básicas.



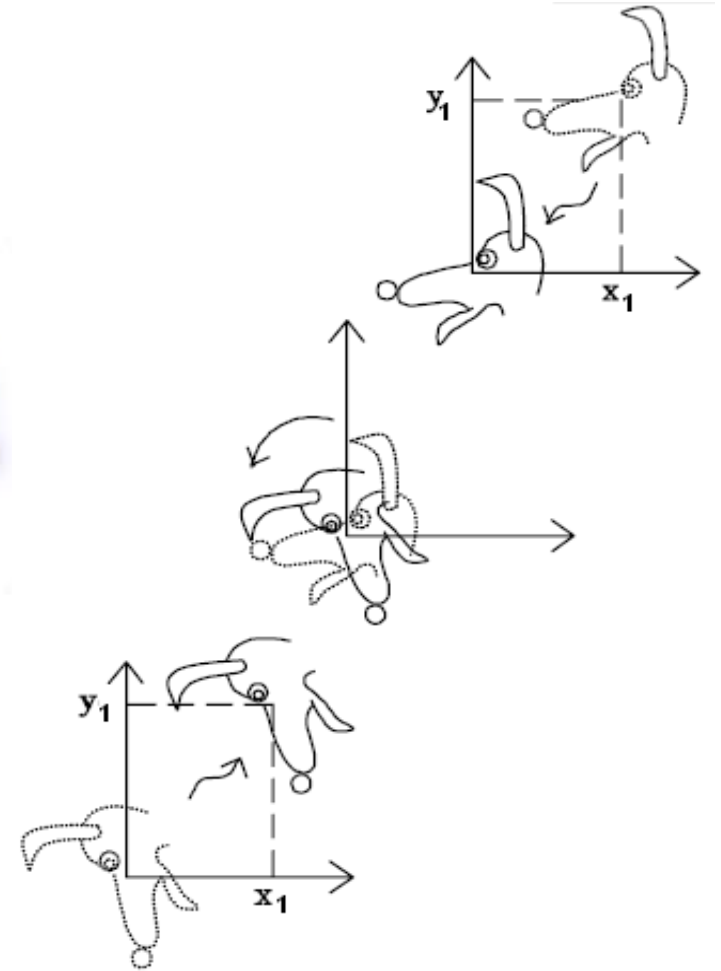
# Composición de Transformaciones

## Ejemplo:

- Rotar un objeto con respecto a un punto arbitrario  $P1$  distinto del origen de coordenadas.

Se convierte el problema original en tres subproblemas separados y sencillos de resolver.

- 1.- Trasladar el punto  $(-x_1, -y_1)$  al origen de coordenadas.
- 2.- Rotar el objeto.
- 3.- Trasladar  $(x_1, y_1)$  a su posición original.



# Composición de Transformaciones

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_1, -y_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & x_1(1 - \cos \theta) + y_1 \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & y_1(1 - \cos \theta) - x_1 \text{sen} \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- **Otro Ejemplo: Escalar un objeto respecto a un punto arbitrario P1.**

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

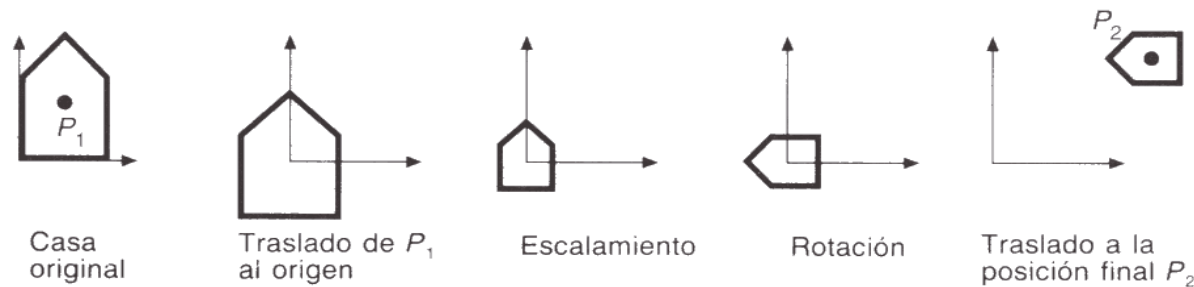


# Composición de Transformaciones

## ➤ Ejemplo:

Escalado y rotación del pentágono, como aparece en la figura. La secuencia de operaciones a realizar es la siguiente:

1. Trasladar el punto P1 al origen de coordenadas.
2. Efectuar el escalado.
3. Efectuar la rotación.
4. Trasladar el origen a la posición P2, donde se ubicará el pentágono.

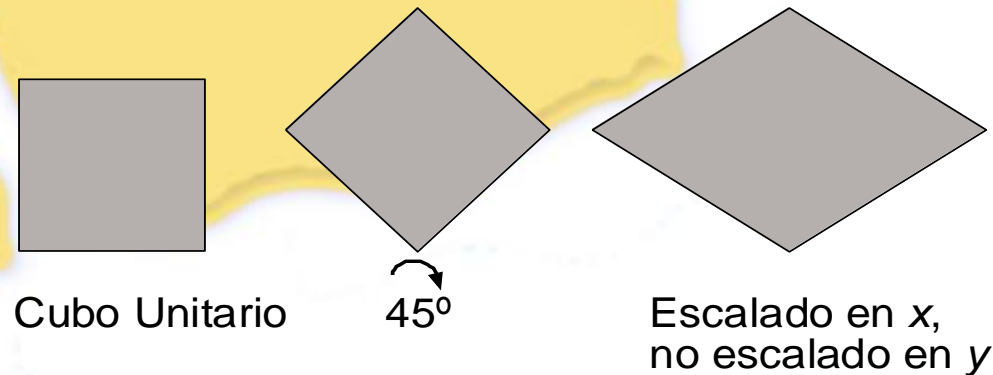


$$T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)$$



# Otras Transformaciones

- El producto de una secuencia arbitraria de matrices de rotación, traslación y escalamiento constituyen una transformación afín, teniendo la propiedad de conservar el paralelismo de las líneas, pero no longitudes ni ángulos.
- Rotaciones, escalamientos y traslaciones subsiguientes no podrían hacer que las líneas dejen de ser paralelas.



**Un cubo unitario rotado  $45^\circ$  en sentido horario y luego escalado no uniformemente. El resultado es una transformación afín de la figura inicial, donde se mantiene el paralelismo de las líneas, pero no las longitudes ni ángulos originales.**



# Otras Transformaciones

- Produce un desplazamiento de los puntos sin alterar los ejes.



$$SH_x = \begin{pmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$SH_x$ : Cizalla paralela al eje x

$$x' = x + sh_x y$$

$$Y' = y$$

$$SH_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$SH_y$ : Cizalla paralela al eje y

$$x' = x$$

$$Y' = sh_y x + y$$

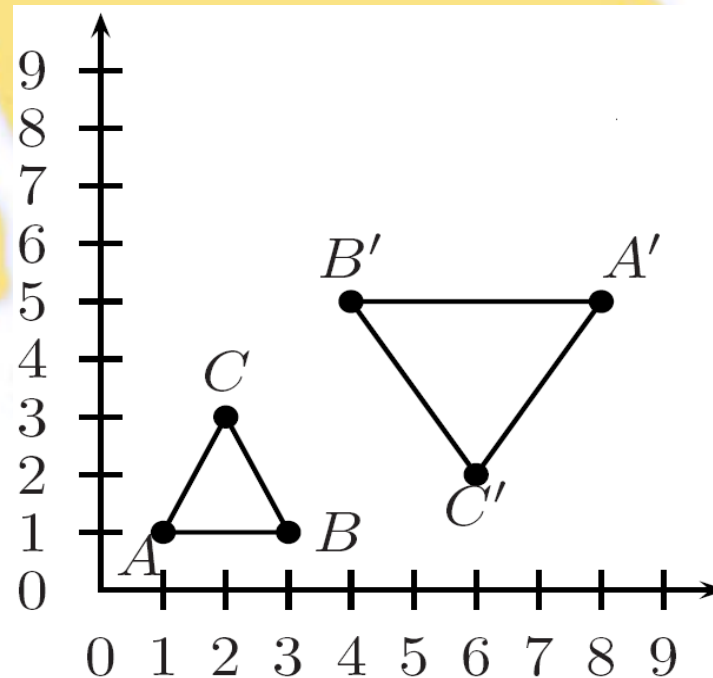




# Problemas

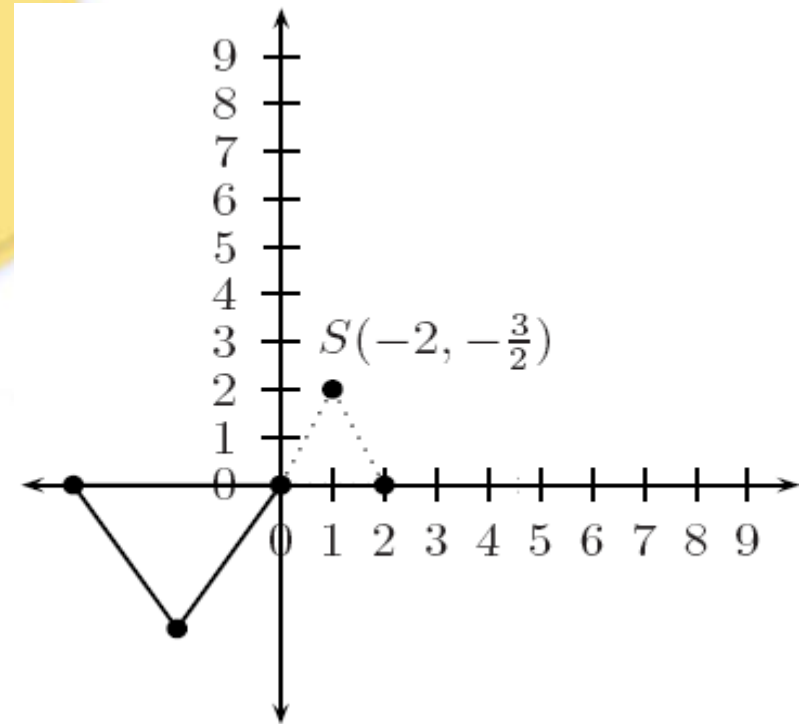
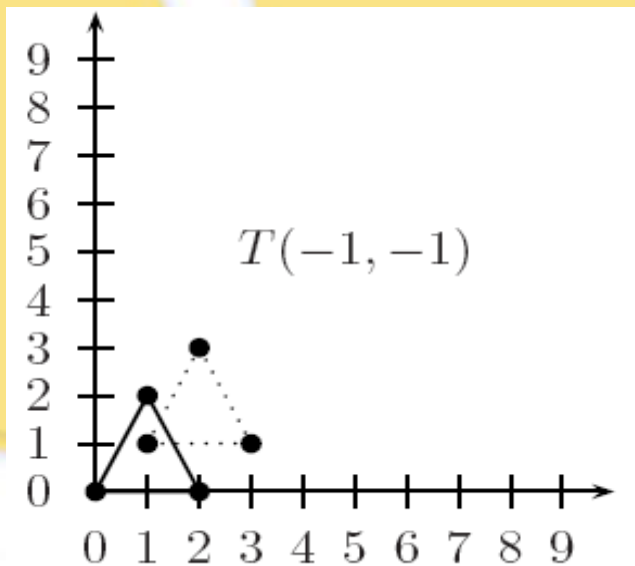
Determine la transformación geométrica  $M$  que transforma al triángulo de vértices  $A = (1, 1)$ ,  $B = (3, 1)$ ,  $C = (2, 3)$  en el triángulo de vértices  $A' = (8, 5)$ ,  $B' = (4, 5)$  y  $C' = (6, 2)$  ( $A' = M.A$ ,  $B' = M.B$  y  $C' = M.C$ )

Solución: Dibujamos el triángulo  $ABC$  y luego de su transformación



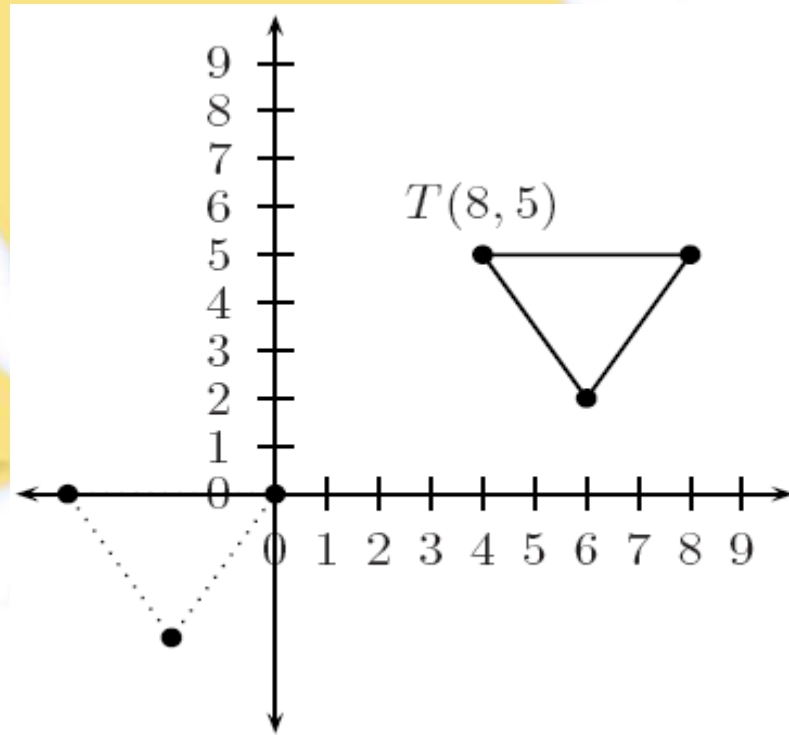
# Problemas

1. Trasladamos el triángulo ABC al origen de coordenadas:
2. Escalamiento con reflexión con respecto al origen



# Problemas

3. Trasladamos el triángulo ABC a la posición final para obtener A'B'C':



# Problemas

**Así la sucesión de transformaciones serán: una traslación al origen, un escalamiento de -2 unidades en el eje x y  $-3/2$  unidades en el eje y, esto es para conseguir la reflexión del triángulo con respecto a los ejes coordenados, y por ultimo una traslacion de 8 unidades en el eje x y 5 unidades en el eje y. De esta manera obtendremos la matriz de transformación como la siguiente composición de matrices:**

$$M = T(8, 5).S(-2, -\frac{3}{2}).T(-1, -1)$$

De manera explícita se tendrá:

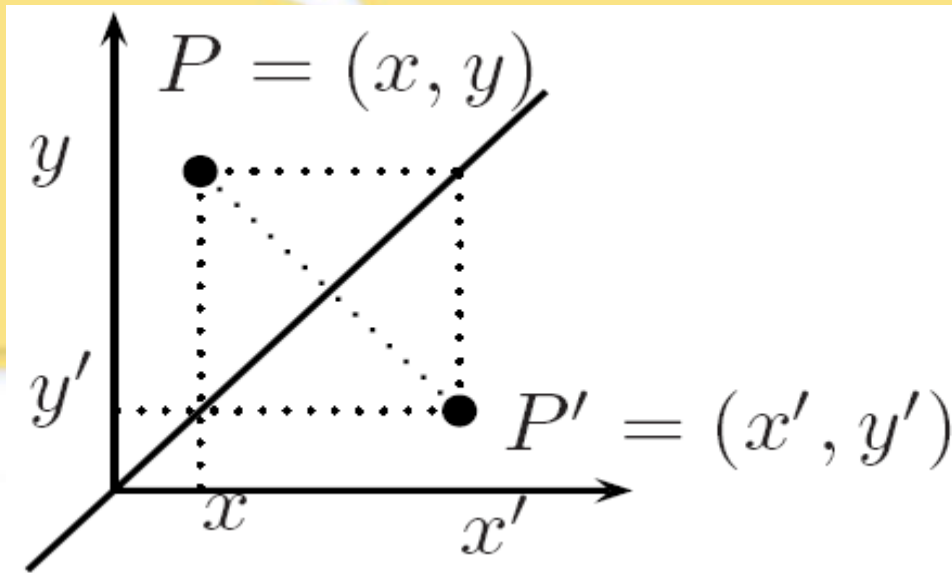
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Problemas

Obtenga la transformación geométrica que permite la reflexión de un punto  $P = (x, y)$  con respecto a la recta  $y = x$ .

Solución: El razonamiento es puramente geométrico, usando nociones de congruencia de triángulos se tiene que:



$$\begin{cases} y' = x \\ x' = y \end{cases}$$



# Problemas

Entonces se tiene que:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = Refle_{y=x} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Refle_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puede verificarse que:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

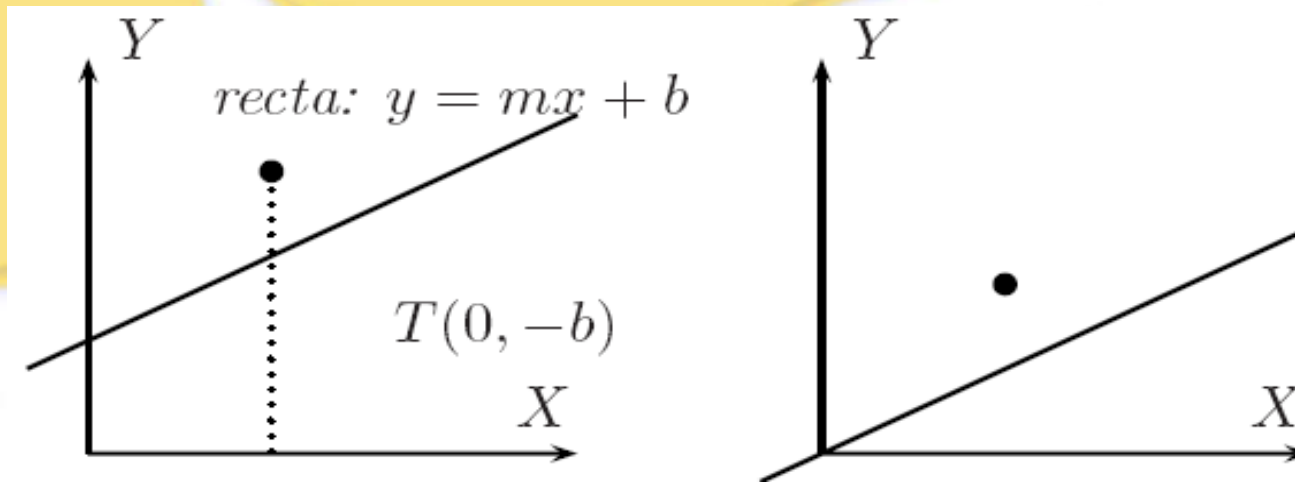


# Problemas

Obtenga la transformación geométrica de reflexión con respecto a una recta arbitraria  $y = mx + b$ .

Solución:

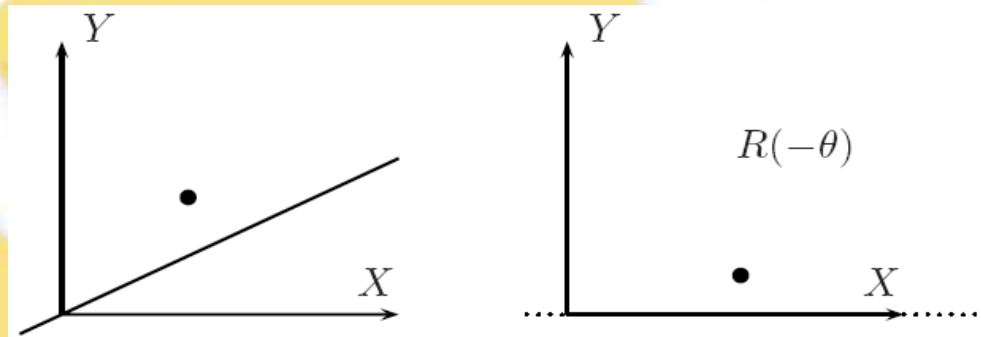
1. Trasladamos, tanto la recta como el punto  $P = (x, y)$ ,  $-b$  unidades en el eje  $y$ , con esto conseguimos que la recta pase por el origen de coordenadas.



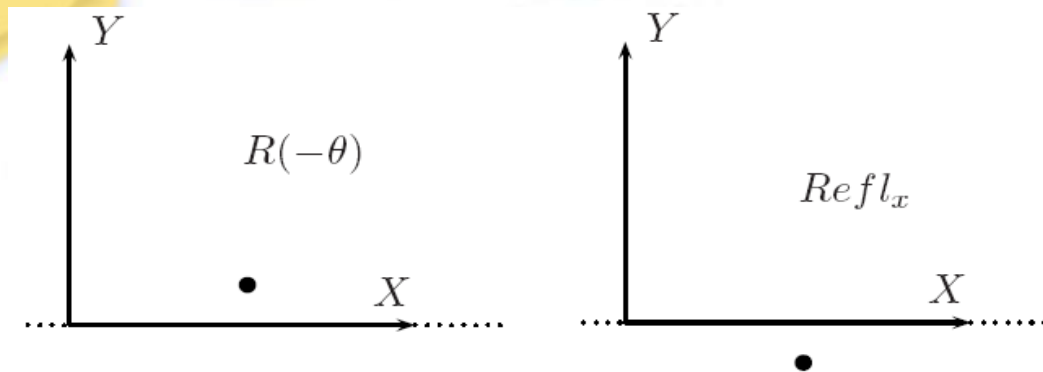


# Problemas

2. Rotamos un ángulo  $\theta$  apropiado, el cual viene dado por  $\tan(\theta) = m$ , esto se hace de tal forma que la recta coincida con el eje  $x$ ;

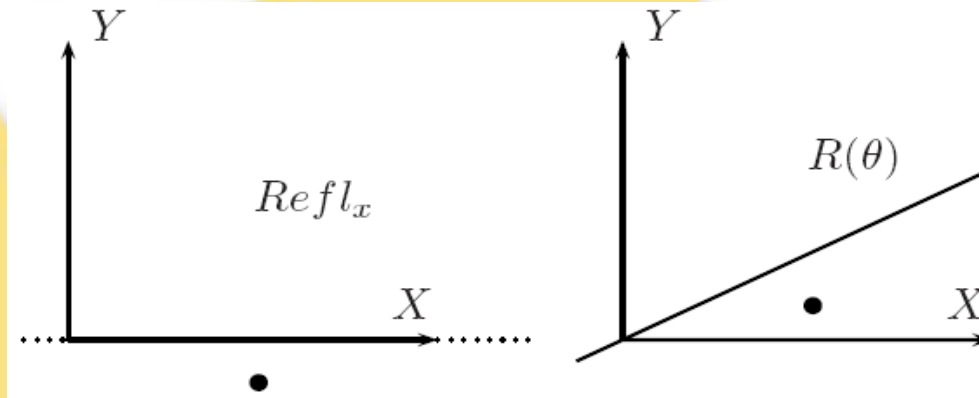


3. Hacemos la reflexión de las coordenadas con respecto al eje  $x$

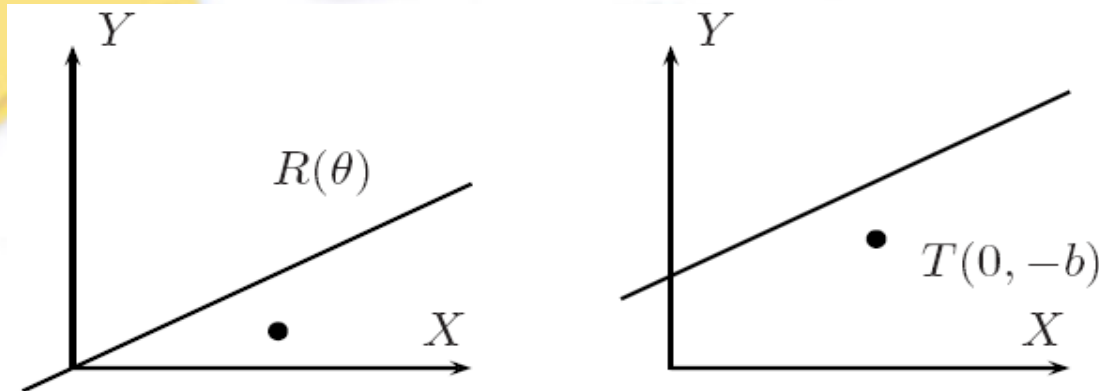


# Problemas

4. Retornamos aplicando una rotación en el sentido inverso al considerado en los pasos anteriores



5. Finalmente una traslación de  $b$  unidades en el sentido contrario considerado en el eje  $y$ .



# Problemas

La secuencia de transformaciones seria:

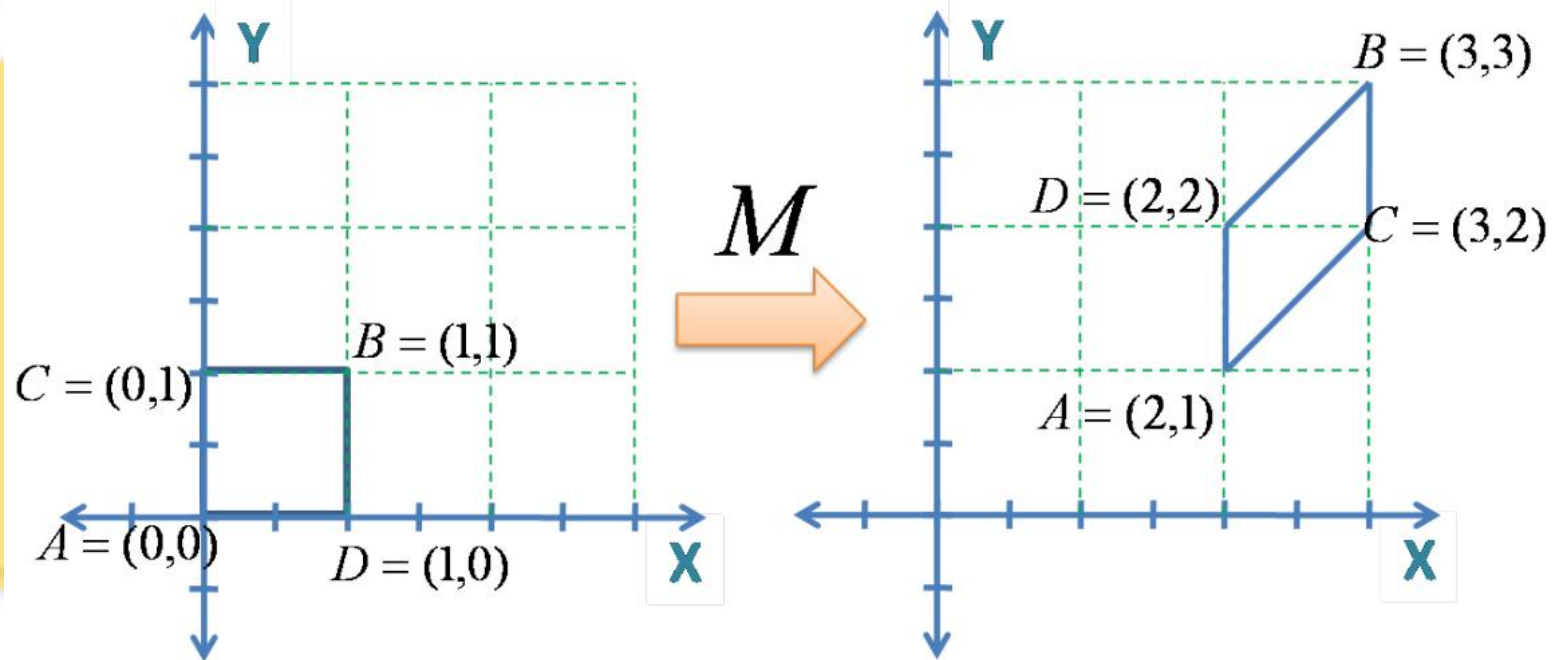
$$M = T(0, b).R(\theta).Ref_{l_x}.R(-\theta).T(0, -b)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Problemas

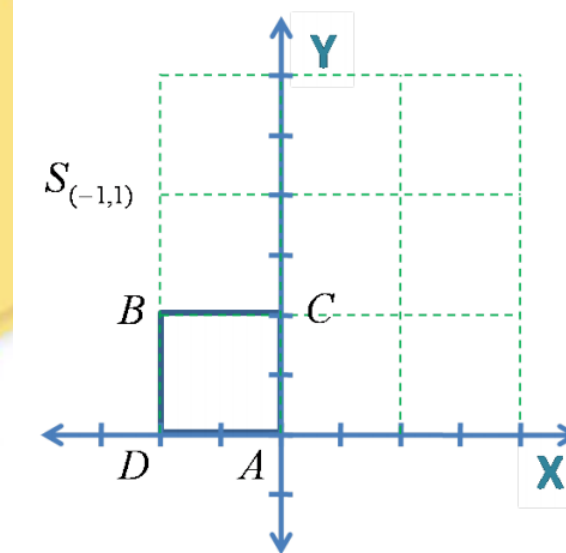
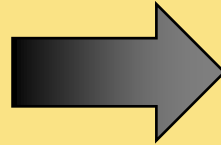
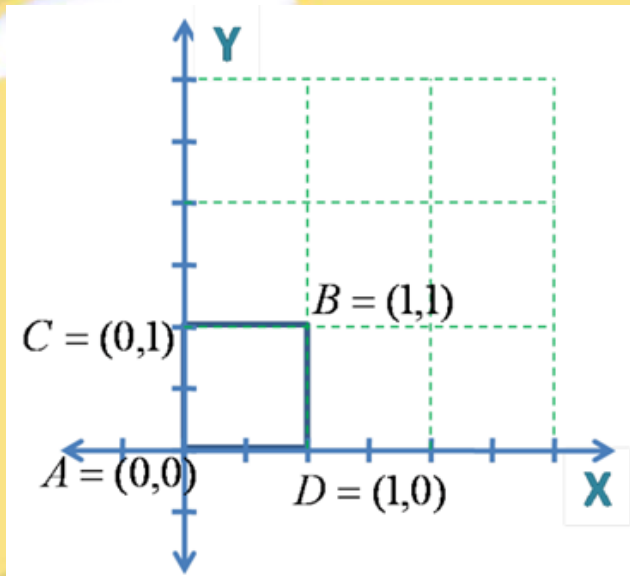
Obtener la matriz de la figura siguiente:



# Problemas

Solución:

1. Primero apliquemos escalamiento (reflexión con respecto al eje X)



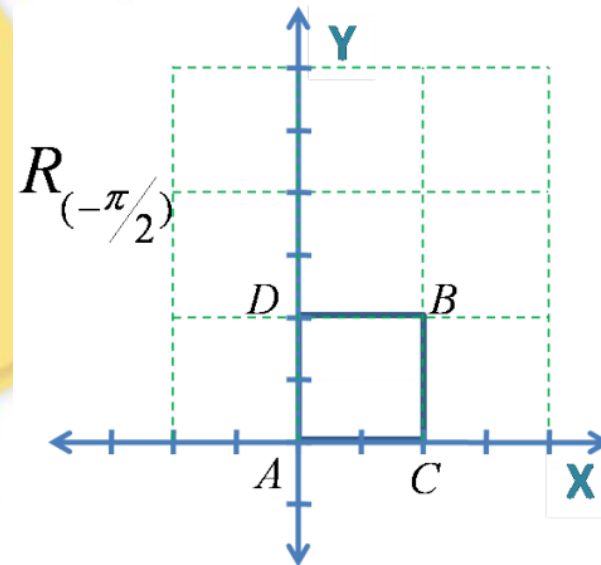
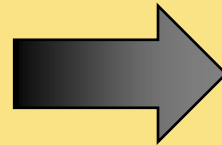
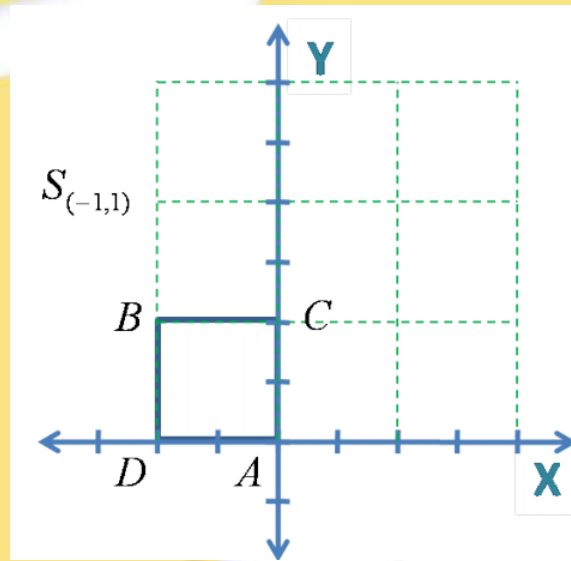
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Problemas

Solución:

2. Rotación con respecto al punto A.



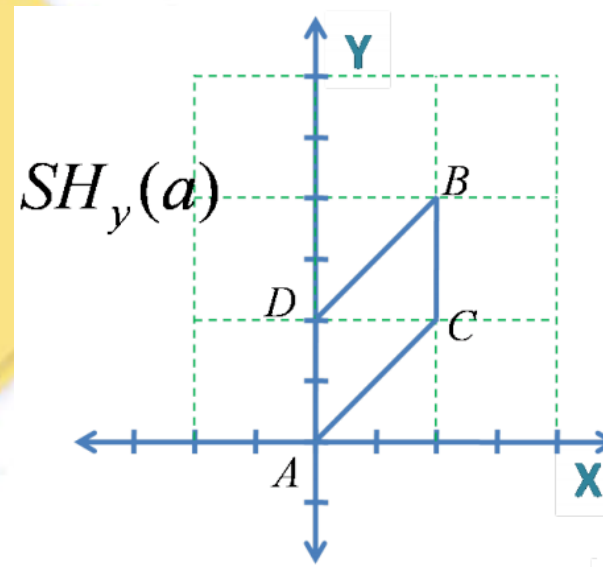
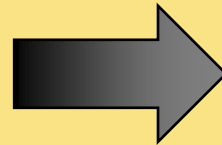
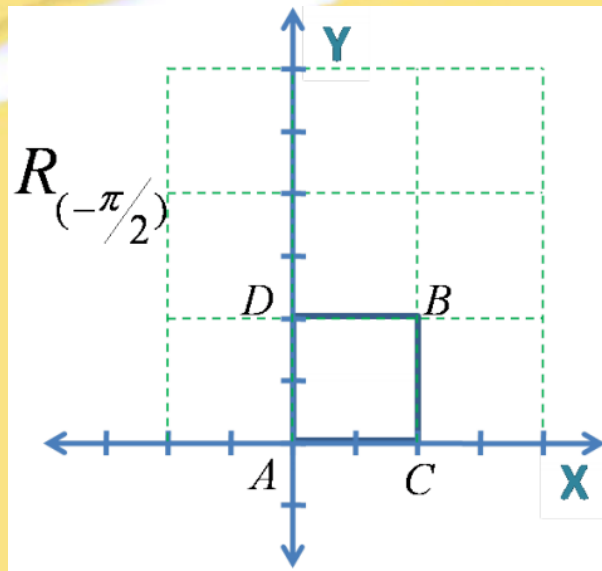
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Problemas

Solución:

## 3. Cizalla en dirección del eje Y



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$2 = a + 1$$
$$a = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

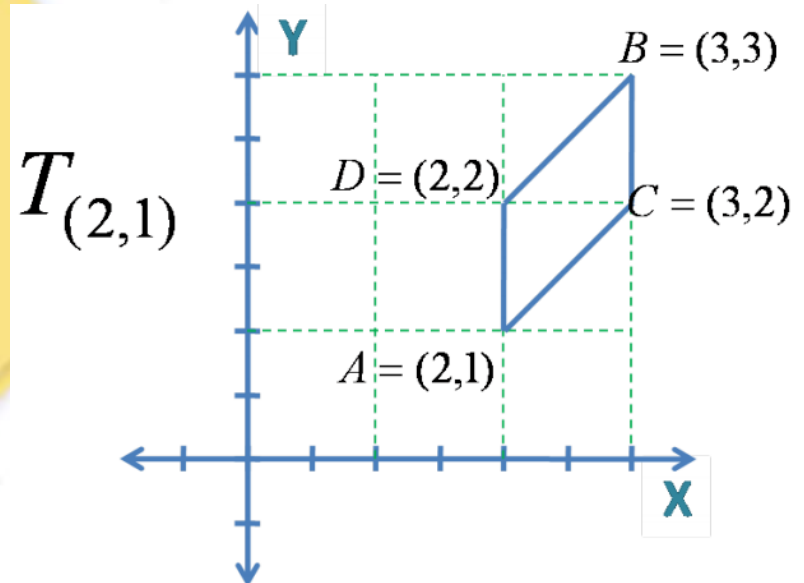
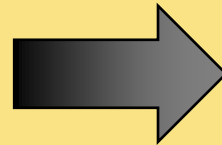
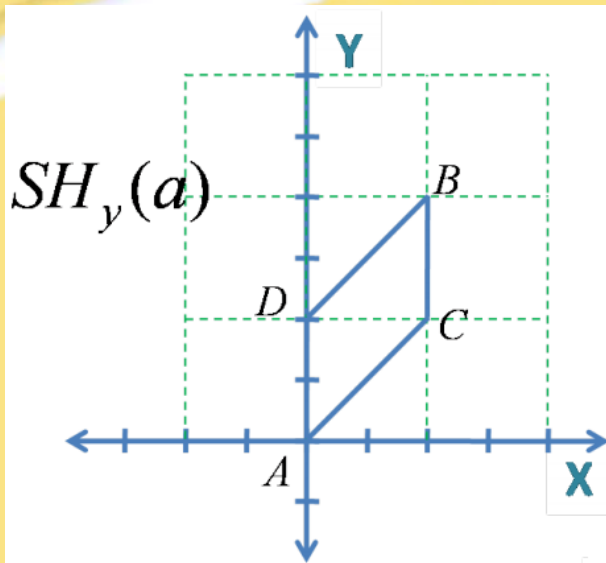




# Problemas

Solución:

## 4. Traslación



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Problemas

Solución:

4. Finalmente la matriz de transformación M será:

$$M = T_{(2,1)} S H_Y(1) R_{\left(\frac{-\pi}{2}\right)} S_{(-1,1)}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Problemas

Solución:

## 5. La prueba

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# BIBLIOGRAFIA

- ❑ Eduardo Azevedo y Aura Conci. Computação Gráfica
- ❑ Foley J., Van DAME A., Feiner S., Hughes J., Phillips R. Computer Graphics: Principles and Practice. Addison – Wesley Publishing Company, Massachusetts. 1996
- ❑ Hoschek J., Lasser D. A.K. Peters Ltd. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. Wellesley Massachusetts. 1993
- ❑ Hearn D., Baker M.P. Gráficas por computadora. Prentice - Hall Hispanoamericana. 1998



# ¿PREGUNTAS?



**Facultad de Ingeniería de Ingeniería de Sistemas  
Departamento de Ciencias de la Computación  
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**