

公交查询系统最佳乘车路线选择的问题

摘要

本文针对满足查询者的各种不同需求的线路选择问题，基于遍历算法找出所有可行路线的基础上，以不同需求为目标建立不同的单目标或多目标优化模型，给出不同需求下的最优出行路线方案。

问题一要求在仅考虑公汽线路的出行选择下，对六组出行目标给出相应最佳线路方案。将附录中的 520 条公汽线路依据上下行、环行等特征处理为 2×520 条单行公汽线路导入 Excel 中。任意给定起点、终点，以换乘次数为基础约束条件，通过遍历算法，找到所有可行路线方案。以换乘次数、运行时间、方案花费等为单目标建立优化模型。再根据查询者不同的偏好对换乘次数和运行时间赋予不同权重建立多目标优化模型。结果显示，对六组出行目标均能给出满足不同需求的相应出行路线方案。

问题二要求在公汽、地铁路线的共同出行选择下，对六组出行目标给出相应最佳线路方案。在问题一处理好的数据中，将公汽站点与地铁站点中可相互换乘的站点重命名为同一站点，并加入 2×2 条地铁单行线路。与第一问的模型与算法相同，在所有可行路线方案中，以地铁优先、换乘次数、运行时间、方案花费等为单目标建立优化模型。再根据查询者不同的偏好对换乘次数和运行时间赋予不同权重建立多目标优化模型。结果显示，对六组出行目标均能给出满足不同需求的相应出行路线方案。

问题三要求考虑所有站点之间的步行时间。在不同出行路线方案中建立步行时间优化模型。以步行接受度为约束，通过遍历步行发生节点，找到步行时间，进而确定步行最优路线方案。在问题二的多目标优化模型中加入步行时间约束，得到多目标最优出行路线方案。结果显示，对六组出行目标均能给出满足不同需求的相应出行路线方案。

最后，模型中的部分数据来源于网络，可能会对计算产生部分影响，但不会影响模型整体。我们对模型中应用的遍历算法进行优化改进，使得程序运行更加准确、快速。

关键词 遍历算法 多目标优化 最优路线 模糊处理

一、问题的重述

1.1 问题背景

我国人民翘首企盼的第 29 届奥运会明年 8 月将在北京举行,届时有大量观众到现场观看奥运比赛,其中大部分人将会乘坐公共交通工具(简称公交,包括公汽、地铁等)出行。这些年来,城市的公交系统有了很大发展,北京市的公交线路已达 800 条以上,使得公众的出行更加通畅、便利,但同时也面临多条线路的选择问题。针对市场需求,某公司准备研制开发一个解决公交线路选择问题的自主查询计算机系统。

1.2 需要解决的问题

这个系统的核心是线路选择的模型与算法,另外还应该从实际情况出发考虑,满足查询者的各种不同需求。需要解决的问题有:

1. 仅考虑公汽线路,给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。并根据附录数据,利用你们的模型与算法,求出以下 6 对起始站→终到站之间的最佳路线(要有清晰的评价说明)。

- (1) S3359→S1828 (2) S1557→S0481 (3) S0971→S0485
(4) S0008→S0073 (5) S0148→S0485 (6) S0087→S3676

2. 同时考虑公汽与地铁线路,解决以上问题。

3. 假设又知道所有站点之间的步行时间,请你给出任意两站点之间线路选择问题的数学模型。

二、模型假设

- (1) 假设所有路线的拥堵情况相同,不存在地区不同交通拥堵也不同的情况;
(2) 假设查询者在选择出行方式的时候如果可以乘坐地铁就选择地铁出行;
(3) 假设查询者的等车时间、公交车的行驶速度、乘车费用固定及车站之间的间隔等条件都相同,其余参数如下:

相邻公汽站平均行驶时间(包括停站时间): 3 分钟

相邻地铁站平均行驶时间(包括停站时间): 2.5 分钟

公汽换乘公汽平均耗时: 5 分钟(其中步行时间 2 分钟)

地铁换乘地铁平均耗时: 4 分钟(其中步行时间 2 分钟)

地铁换乘公汽平均耗时: 7 分钟(其中步行时间 4 分钟)

公汽换乘地铁平均耗时: 6 分钟(其中步行时间 4 分钟)

公汽票价: 分为单一票价与分段计价两种,标记于线路后;其中分段计价的票价为: 0~20 站: 1 元; 21~40 站: 2 元; 40 站以上: 3 元

地铁票价: 3 元(无论地铁线路间是否换乘)

(4) 假设乘客选择公交线路时,只考虑出行方便,与公交其他因素(服务态度,公交设施等)无关;

(5) 假设同一地铁站所对应的任意两个公汽站之间能够通过地铁站进行换乘,而且不需要支付地铁费;

(6) 乘坐公交时,如果乘客能够乘坐一辆公交到达目的地,则不会选择换乘。

(7) 乘客使用软件选择路线时,系统无故障,推荐最优路线均符合建立的模型。

三、符号说明

符号	含义
H_1	公汽换公汽的次数
T	行程总时间
ST	从起始站到终点站的乘车总站数
M	花费总费用
x_i	第 i 条公汽线路
M_{xi}	在第 i 条公汽线路上花费的费用
A_i	第 i 条公汽线路的计价方式
a_i	从起始站到终点站所经的第 i 条公汽线路的站数
H_2	公汽换地铁的换乘次数
H_3	地铁换地铁的换乘次数
H_4	地铁换公汽的换乘次数
x_i^j	乘坐第 i 条公汽线路所历站数
y_i^j	乘坐地铁线路 T1 或 T2 所历总站数
t_{XY}	站点 X 到站点 Y 的步行时间

四、数据处理

4.1 数据统计

我们将附录所给公汽线路和地铁线路的信息导入 Excel 进行统计，结果如下：

表 4.1 数据统计表

公汽线路					地铁线路		站点数	
分段 计价	单一 票价	上下行 路径相 同	上下行路 径不同	环行 线路	直行 线路	环行 线路	公汽 站点	环行站 点
283 条	237 条	409 条	89 条	22 条	1 条	1 条	3957 个	39 个
公交系统共有 520 条线路					地铁线路共 2 条		站点总数 3996 个	

4.2 数据处理

由于所给的数据格式不利于程序软件直接读取和操作，运用 Excel 将数据处理

为规范格式，存储为程序可调用的数据文件。

把公汽线路信息以及地铁线路信息分别导入到 Excel 表格中，将全部的公共交通数据共生成 4 个矩阵。矩阵形式为 $x_i = [b_1, b_2, \dots, b_k]$ 其中，矩阵 1 为 1040×89 的公汽线路矩阵，表示公共汽车运行线路与站点信息；矩阵 2 为 4×89 的地铁线路矩阵，表示地铁运行线路与站点信息；矩阵 3 为 1044×89 的公汽地铁线路矩阵，即将矩阵 1 与矩阵 2 合并，表示公共汽车与地铁结合起来的运行线路与站点信息；矩阵 4 为 39×6 的公汽地铁换乘矩阵，表示地铁站点对应可换乘的公交站点信息。

五、建模前的准备

5.1 影响因素的调查

公交乘客出行路径选择模型的研究对于公交乘客信息系统的研究和开发有着重要的意义。实现公交系统的最优路线的查询，重点在于如何实现查询者的个人满意度最高的问题。通过查阅相关文献，发现现有的出行路径选择模型多为基于出行距离最短、出行耗时较少的最短路径模型，但实际调查却表明，“换乘次数”是大部分公交乘客在选择出行路径时的首要考虑因素。具体调查结果如下：

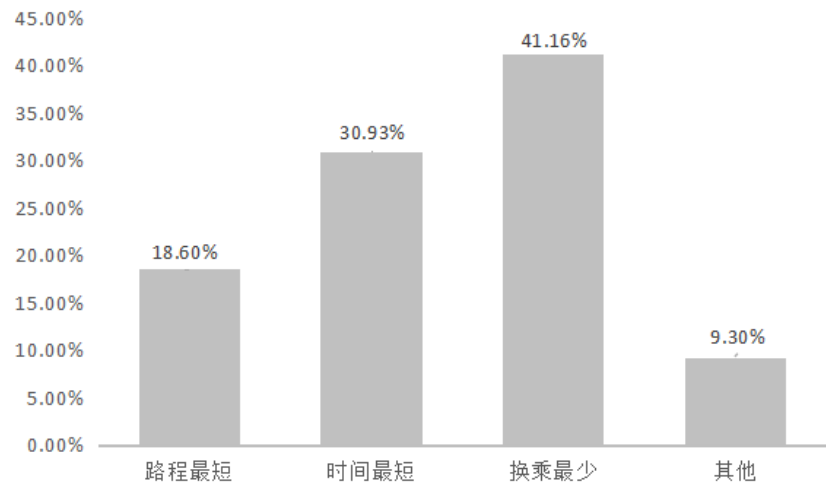


图 5.1 调查影响因素分布图

5.2 路线的表示

由于附录所给公汽线路信息包括上下行不同、上下行相同和环行的线路，现对公汽线路的数据表示进行以下修改：

(1) 上下行不同的公汽线路：在上行公汽线路数前加数字 1，下行公汽线路数前加数字 2，以公汽线路 L002 为例

L002

上行：S3748 S2160 S1223 S1404 S2377 S1477 S2017 S2019 S1321 S1381 S1383
S1691 S3766 S1729 S2654 S3231 S3917 S2303 S1327 S3068 S2833 S1733
S2113 S2636 S0012 S1968 S0004

下行：S0004 S1968 S0012 S2636 S2113 S2112 S2833 S0618 S1327 S2303 S3917
S3231 S2654 S1729 S3766 S1691 S1383 S1381 S1321 S2019 S2017 S1477
S1404 S1223 S2160 S3748

表 5.1 上下行不同的数据表示

1002	3748	2160	1223	1404	2377	1477	2017	2019	1321	1381
	1691	3766	1729	2654	3231	3917	2303	1327	3068	2833
	1733	2113	2636	12	1968	4				
2002	4	1968	12	2636	2113	2112	2833	618	1327	2303
	3917	3231	2654	1729	3766	1691	1383	1381	1321	2019
	2017	1477	1404	1223	2160	3748				

(2) 上下行相同公交线路：直接在公交线路前加数字 0，以公交线路 L110 为例
L110

S3919 S2646 S3410 S3607 S3618 S0063 S3859 S1400 S3546 S1697 S3239 S1315

S3906 S3680 S2425 S3416 S2498 S2459 S2458 S1470

表 5.2 上下行相同的数据表示

0110	3919	2646	3410	3607	3618	63	3859	1400	3546	1697
	3239	1315	3906	3680	2425	3416	2498	2459	2458	1470

(3) 环行公交线路

在这里我们假设所有环线都是双向环线，则可以等效为两条线路：

顺时针方向： $b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_4$ ；

逆时针方向： $b_1 \rightarrow b_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_2$ 。

经过分析，此两条“单行路线”线路的作用等同于原环形路线，则环形线路也可以对应上、下行路线。

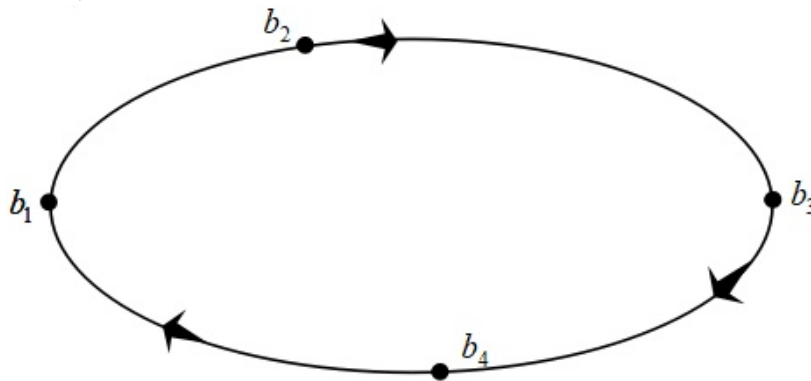


图 5.2 环行路线示意图

六、问题一的分析、模型的建立与求解

6.1 问题分析

问题一要求在只考虑公交车线路的情况下，给出 6 对起始站到终点站之间的最佳路线。针对此问题，我们建立以换乘次数为第一目标、行程时间为第二目标、出行费用为第三目标的多目标优化模型。

首先，利用基于一定约束条件下的遍历算法求出在对换乘次数的约束下 6 对起始站到终点站之间的所有可行路线。然后，结合所建立的数学模型，在这些可行路线中搜寻不同目标下的最优路线。

先判断没有换乘（直达）的情况是否存在，如果存在，则程序直接结束，站点总数则采用给同一线路上的站点排序的方法求出。由于只考虑了公汽之间的换乘，则出行耗时只与换乘次数和所经站数有关。对于出行费用，则在换乘次数的基础上，引入分段计价函数也可求得。

6.2 模型的建立

6.2.1 单目标最优路线模型的建立

找出任意两个公汽站点间的可行路线，根据不同需求建立目标函数不同的优化模型，就可以对这些路线按不同需求进行选择，找出最优路线。

(1) 建立以换乘次数最少作为目标函数的模型：设 H_1 表示公汽换乘公汽的换乘次数

$$\begin{aligned} \min H_1 \\ s.t. \begin{cases} H_1 > 0 \\ H_1 \in Z \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

(2) 建立以时间最短作为目标函数的模型：设 T 为行程总时间， ST 表示从起始站到终点站的乘坐总站数，则行程总时间 T 可表示为乘车时间与换乘时间之和

$$T = 5H_1 + 3(ST - 1) \quad (2)$$

(3) 建立以费用最少为目标函数的模型：设 M 为花费的总费用， x_i 表示附录所给的第 i 条公汽线路，则 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ 表示从起始站到终点站所经的所有 k 条公汽线路。 Mx_i 表示在第 i 条公汽线路上所花费的费用， A_i 为第 i 条公汽线路的计价方式（ $A_i = 1$ 表示单一票价， $A_i = 2$ 表示分段计价）， a_i 表示从起始站到终点站所经的第 i 条公汽线路的站点数

$$\begin{aligned} M = \min \sum_{i=1}^k Mx_i \\ \begin{cases} 1, 0 \leq a_i \leq 20, A_i = 2 \\ 2, 21 \leq a_i \leq 40, A_i = 2 \\ 3, 41 \leq a_i, A_{i-1} = 2 \\ 1, A_i = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

6.2.2 多目标最优路线模型的建立

(1) 对时间的模糊处理

由于时间与换乘次数、花费费用之间的单位不同，考虑建立多目标最优路线的准确性，在计算时取可行路线中时间从小到大的 12 条线路，最小的三条对应数字 0，依次增加，最大的三条对应数字 3。

(2) 最优路线的建立

用 $[1,2,3,4]$ 表示查询者对不同需求的偏重程度为 [不看重，较为看重，相当看重，最看重]

根据查询者对时间、换乘次数及花费的需求不同，现设对时间的需求偏重度为 a ，对换乘次数的需求偏重度为 b ，花费费用的需求偏重度为 c ，在要求时间较短、换乘较少的前提下，建立多目标情况下的最优路线。

$$\begin{aligned} \min D = aT + bH + cM \\ \begin{cases} T \leq 2 \\ H \leq 2 \\ T, H, M \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

6.3 模型的求解

6.3.1 基于换乘次数约束下的遍历算法

通过查阅相关文献，发现人们的换乘次数的需求较高，40%的人满意的换乘次数在2次以内，定义所寻出行方案最多可乘3辆公汽。即利用此信息作为遍历算法的约束条件。算法的具体步骤如下：

步骤一：给定数据库中任意起始点（起点记为A点，终点为B点），遍历附件所给公汽线路全部数据信息，首先找到n条运行线路中包含A点的线路 x_1, x_2, \dots, x_n ， $x_i = [b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^m]$ ， b_i^j 表示组成第i条线路的站点，其中j表示站点所处行数。

步骤二：对于第i条线路（ $1 \leq i \leq n$ ），即在 x_i 中，存在 $a_i^j = A$ ，分别从 a_i^{j-1} 和 a_i^{j+1} 出发，遍历包括线路 x_i 在内的所有站点，找出含 a_i^{j-1} 和 a_i^{j+1} 的所有线路。

步骤三：定义最大换乘次数 $k=2$ ，包含站点 a_i^{j-1} 和 a_i^{j+1} 的线路为 a_i^j 所处原线路时，初始换乘次数不变，否则初始换乘次数 $k+1$ 。

步骤四：当 $0 \leq k \leq 2$ 时，满足此条件的线路为出行方案，即对于任意的A、B点，有 $[x_1, x_2, x_3]$ 表示 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$ 为出行方案。

步骤五：对于处理好的任意线路 $x_i = [b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^m]$ ，只允许 $b_i^1 \rightarrow b_i^2 \rightarrow \dots \rightarrow b_i^m$ ，即行车方向只为下行。对于已得出的出行方案 $[x_1, x_2, x_3]$ ， $[b_1^i, b_1^j, b_2^i, b_2^j, b_3^i, b_3^j]$ ，若 $i > j$ ，则不符合要求，故定义此类出行方案不可行。

6.3.2 求出包含起始站点的线路

以找从起始点S3359到终点S1828为例，首先找出包含S3359的所有线路，如表6.1所示：

表 6.1 包含站点 S3359 的线路

L324（上行）	L484（上行）	L469（上行）	L436（上行）	L378
L324（下行）	L484（下行）	L469（下行）	L436（下行）	

6.3.3 找出不区分上、下行时的出行路线

以找从起始点S3359到终点S1828为例，当换乘次数为1时找出的在不区分上、下行时的出行路线如图6.1所示。

```

[1436, 1167, 0]
[1436, 1167, 0]
[1436, 2167, 0]
[1436, 2167, 0]
[1436, 1217, 0]
[1436, 1217, 0]
[1436, 1217, 0]
[1436, 1217, 0]
[1436, 2217, 0]
[1436, 2217, 0]
[1436, 2217, 0]
[1436, 2217, 0]
[2436, 1167, 0]
[2436, 1167, 0]
[2436, 2167, 0]
[2436, 2167, 0]
[2436, 1217, 0]
[2436, 1217, 0]
[2436, 1217, 0]
[2436, 1217, 0]
[2436, 2217, 0]
[2436, 2217, 0]
[2436, 2217, 0]
[2436, 2217, 0]

```

图 6.1 部分出行路线示意图

6.3.4 筛选在约束条件下的所有可行路线

以从起始点 S3359 到终点 S1828 为例，在约束换乘次数为 1 次且起始路线为 L436，筛选所得的所有可行路线如下：

```

[2436, 2167, 0] 18 3359 49 1784 32 1784.0 33 1828.0 32 101
[2436, 2167, 0] 18 3359 50 1241 31 1241.0 33 1828.0 34 107
[2436, 2217, 0] 18 3359 49 1784 16 1784.0 17 1828.0 32 101
[2436, 2217, 0] 18 3359 50 1241 15 1241.0 17 1828.0 34 107
[2436, 2217, 0] 18 3359 51 3695 14 3695.0 17 1828.0 36 113
[2436, 2217, 0] 18 3359 52 2606 11 2606.0 17 1828.0 40 125

```

图 6.2 所有可行路线示意图

再分别找出起始路线为 L436 换乘次数为 0 次、2 次的所有可行路线；继续找出 L484、L469、L378、L324 换乘次数为 0 次—2 次的路线并整合，即为所有可行路线。

表 6.2 部分所有可行路线

[1469, 2167, 0] 9 3359.0 33 519.0 12 519.0 33 1828.0 45 140
[1469, 2217, 0] 9 3359.0 36 2364.0 0 2364.0 17 1828.0 44 137
[2436, 2167, 0] 18 3359 49 1784 32 1784.0 33 1828.0 32 101
[2436, 2217, 0] 18 3359 52 2606 11 2606.0 17 1828.0 40 125
[2324, 1201, 41] 9 3359.0 11 2027.0 6 2027.0 20 1790.0 8 1790.0 13 1828.0 21 73
[2324, 1201, 41] 9 3359.0 11 2027.0 6 2027.0 21 458.0 9 458.0 13 1828.0 21 73
[1378, 1201, 41] 18 3359.0 21 2027.0 6 2027.0 20 1790.0 8 1790.0 13 1828.0 22 76
[1378, 1201, 41] 18 3359.0 21 2027.0 6 2027.0 21 458.0 9 458.0 13 1828.0 22 76
[1469, 2217, 2167] 9 3359.0 38 304.0 2 304.0 16 1784.0 32 1784.0 33 1828.0 44 142
[1469, 2217, 2167] 9 3359.0 39 3192.0 3 3192.0 15 1241.0 31 1241.0 33 1828.0 44 142
[2469, 1201, 41] 38 3359.0 40 2027.0 6 2027.0 20 1790.0 8 1790.0 13 1828.0 21 73
[2469, 1201, 41] 38 3359.0 40 2027.0 6 2027.0 21 458.0 9 458.0 13 1828.0 21 73
[2484, 1201, 41] 22 3359.0 24 2027.0 6 2027.0 20 1790.0 8 1790.0 13 1828.0 21 73
[2484, 1201, 41] 22 3359.0 24 2027.0 6 2027.0 21 458.0 9 458.0 13 1828.0 21 73
[2436, 2217, 2167] 18 3359 50 1241 15 1241.0 16 1784.0 32 1784.0 33 1828.0 34 112
[2436, 2217, 2167] 18 3359 51 3695 14 3695.0 15 1241.0 31 1241.0 33 1828.0 36 118

6.3.5 单目标模型求解结果分析

利用 Python 软件，对上述算法进行实现，得到的 6 对起始站→终到站之间的

最佳路线如下：

(1) 以换乘次数最少为目标的最优路线（如表 6.3）

表 6.3 换乘最少公汽路线表

起始站—终点站	乘车路线与所经站点	最少换乘次数	所用时间（分钟）	费用
S3359—S1828	L469（S3359—S2364）→L021（S2364—S1828）	1	137	3
S1557—S0481	L363、L084（S0157—S1919）→L2189（S1919—S3186）→L460（S3186—S0481）	2	106	3
S0971—S0485	L013（S0971—S2184）→L417（S2184—S0485）	1	128	3
S0008—S0073	L159（S0008—S0291）→L058（S0291—S0073）	1	83	2
S0148—S0485	L308（S0148—S0036）→L156（S0036—S2210）→L417（S2210—S0485）	2	106	3
S0087—S3676	L454（S0087—S3496）→L209（S3496—S3676）	1	65	2

①S3359—S1828：最少的换乘次数为 1 次，此线路需要的时间为 137 分钟，所需费用为 3 元，换乘最少的最优线路为 1 条；

②S1557—S0481：最少的换乘次数为 2 次，此线路需要的时间为 106 分钟，所需费用为 3 元，换乘最少的最优线路为 2 条；

③S0971—S0485：最少的换乘次数为 1 次，此线路需要的时间为 128 分钟，所需费用为 2 元，换乘最少的最优线路为 2 条；

④S0008—S0073：最少的换乘次数为 1 次，此线路需要的时间为 83 分钟，所需费用为 2 元；

⑤S0148—S0485：最少的换乘次数为 2 次，此线路需要的时间为 106 分钟，所需费用为 3 元；

⑥S0087—S3676：最少的换乘次数为 1 次，此线路需要的时间为 65 分钟，所需费用为 2 元。

(2) 以时间最短为目标的最优路线（如表 6.4）

表 6.4 最短时间公汽路线表

起始站—终点站	乘车路线与所经站点	最短时间（分钟）	换乘次数	费用
S3359—S1828	L324、L469、L484（S3359—S2027）→L201（S2027—S1790）→L041（S1790—S1828）	73	2	3

S1557—S0481	L363、L084(S157—S1919)→L2189 (S1919—S3186)→L460(S3186—S0481)	106	2	3
S0971—S0485	L119、L263(S0971—S1609)→L140 (S1609—S3037)→L104(S3037—S0485)	115	2	3
S0008—S0073	L355(S0008—S2755)→L017 (S2755—S0483)→L057、L170 (S0483—S0073)	70	2	3
S0148—S0485	L308(S0148—S0036)→L156 (S0036—S2210)→L417(S2210—S0485)	106	2	3
S0087—S3676	L021、L206、L393、L454(S0087—S2210)→L097、L462(S0427—S3676)	49	2	3

①S3359—S1828：最短时间为 73 分钟，此线路需要换乘 2 次，所需费用为 3 元，时间最短的最优路线为 3 条；

②S1557—S0481：最短时间为 106 分钟，此线路需要换乘 2 次，所需费用为 3 元，时间最短的最优路线为 2 条；

③S0971—S0485：最短时间为 115 分钟，此线路需要换乘 2 次，所需费用为 3 元，时间最短的最优路线为 2 条；

④S0008—S0073：最短时间为 70 分钟，此线路需要换乘 2 次，所需费用为 3 元，时间最短的最优路线为 4 条；

⑤S0148—S0485：最短时间为 106 分钟，此线路需要换乘 2 次，所需费用为 3 元，时间最短的最优路线为 2 条；

⑥S0087—S3676：最短时间为 49 分钟，此线路需要换乘 2 次，所需费用为 3 元，时间最短的最优路线为 8 条。

(3) 以花费最少为目标的最优路线(如表 6.5)

表 6.5 最少花费公交线路表

起始站—终点站	乘车路线与所经站点	费用最少	所用时间	换乘次数
S3359—S1828	L324、L469、L484(S3359—S2027)→L201(S2027—S1790)→L041(S1790—S1828)	3	73	2
	L469(S3359—S2364)→L21(S2364—S1828)		137	1
S1557—S0481	L363、L084(S157—S1919)→L2189(S1919—S3186)→L460(S3186—S0481)	3	106	2
S0971—S0485	L013(S0971—S2184)→L417	3	128	1

	(S2184—S0485)		115	2
	L119、L263 (S0971—S1609) → L140 (S1609—S3037) → L104 (S3037—S0485)			
S0008—S0073	L159 (S0008—S0291) → L058 (S0291—S0073)	2	83	1
S0148—S0485	L308 (S0148—S0036) → L156 (S0036—S2210) → L417 (S2210—S0485)	3	106	2
S0087—S3676	L454 (S0087—S3496) → L209 (S3496—S3676)	2	65	1

①S3359—S1828：费用最少为 3 元，若选择第一种乘车方式，则需换乘 2 次，花费时间为 73 分钟；若选择第二种乘车方式，则只需换乘 1 次，花费时间为 137 分钟；费用最少的线路共为 4 条；

②S1557—S0481：费用最少为 3 元，此线路需要换乘 2 次，所花费时间为 106 分钟，时间最短的最优路线为 2 条；

③S0971—S0485：费用最少为 3 元，若选择第一种乘车方式，则只需换乘 1 次，花费时间为 128 分钟；若选择第二种乘车方式，则需换乘 2 次，花费时间为 115 分钟；费用最少的线路共为 3 条；

④S0008—S0073：费用最少为 2 元，此线路需要换乘 1 次，所花费时间为 83 分钟，时间最短的最优路线为 1 条；

⑤S0148—S0485：费用最少为 3 元，此线路需要换乘 2 次，所花费时间为 106 分钟，时间最短的最优路线为 1 条；

⑥S0087—S3676：费用最少为 2 元，此线路需要换乘 1 次，所花费时间为 65 分钟，时间最短的最优路线为 1 条。

6.3.6 多目标模型求解结果分析

通过查阅大众对出行路径选择的相关文献，结合调查结果，在无特殊要求的情况下，给换乘次数、时间要求以及费用根据不同查询者对不同需求的偏重度赋予权值，找到最佳出行路线方案。

七、问题二的分析、模型的建立与求解

7.1 问题分析

问题二在问题一的基础上考虑可以搭乘地铁，乘客的选择更加灵活。主要的变化是：（1）地铁相邻站点之间的距离较公汽站点大，而运行时间却相对减少；（2）地铁票价稍高但是固定且在地铁线路之间换乘不需另外支付交通费用。

地铁与公汽之间进行换乘时，由于地铁站点不可能与公汽站点都建在同一个地方，因此从地铁站到公汽站的步行时间相对较多。而且位于与地铁换乘的公汽站点还可以通过本地铁站进行免费耗时换乘到下一个公汽站，可以把跨公交站的步行视为一种免费耗时的交通方式。

因此可以将地铁站与地铁可以换乘的公交站进行统一，将统一后的站点视为新的公交站点，依然从换乘次数的角度来求解模型。由于乘坐地铁所花费的时间较少，

因此假设人们在选择出行方式是优先选择乘坐地铁。

7.2 模型的建立

7.2.1 地铁与可换乘公汽的数据统一

由于位于与地铁换乘的公汽站点可以通过本地铁站免费耗时换乘到下一公汽站，因此地铁站与其可换乘公汽站之间可以任意换乘，则将它们进行统一，看作是同一个公汽站点。如第 24、25 个地铁站：

D24: S0537, S3580

D25: S0526, S0528, S0527, S0525

将 D24、S0537、S3580 这三个站点均用数字 240000 进行替换，将 D25、S0526、S0528、S0527、S0525 这五个站点均用数字 250000 进行替换。

在问题一公汽数据信息的基础上加入 T_1 、 T_2 两条地铁线路，构建一个新的矩阵，该矩阵的部分数据如表 7.1 所示。

表 7.1 统一矩阵的部分数据

1217	2217	11	21	12	22
1828	2364	10000	230000	260000	370000
1671	727	20000	220000	120000	360000
1783	304	30000	210000	270000	350000
1784	3192	40000	200000	280000	340000
1241	294	50000	190000	290000	330000
1239	3057	60000	180000	300000	180000
3695	2262	70000	170000	310000	320000
3512	301	80000	160000	320000	310000

7.2.2 单目标最优路线模型的建立

(1) 建立以换乘次数最少作为目标函数的模型：设 H_1 表示公汽换乘公汽的换乘次数、 H_2 表示公汽换地铁的换乘次数、 H_3 表示地铁换地铁的换乘次数， H_4 表示地铁换公汽的换乘次数。

$$\begin{aligned} \min H &= H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \\ s.t. &\begin{cases} H_i > 0, \quad i=1, \dots, 4 \\ H_i \in Z \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

(2) 建立以时间最短作为目标函数的模型：乘坐公汽数可表示为 $X:(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ，其中 x_i 依次表示乘公交线路编号；乘坐的地铁数可表示为 $Y:(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ， $y_j = T_1, T_2$ 。包含地铁和公汽在内的整条线路表示为 $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_k$ ，其中 $z_j \in X \cup Y$ ，将 $z_j \in X$ 和 $z_j \in Y$ 分离开来依次排列，即在整条线路中分别找出乘坐地铁和公汽的线路。

定义 x_i^l 为乘坐第 i 条公汽线路所历站数， y_j^l 为乘坐第 j 条地铁线路所历站数，然后定义换乘次数如下：

$$(z_k, z_{k+1}) \text{ 的次数} = \begin{cases} H_1, & z_k, z_{k+1} \in X \\ H_2, & z_k \in X, z_{k+1} \in Y \\ H_3, & z_k, z_{k+1} \in Y \\ H_4, & z_k \in Y, z_{k+1} \in X \end{cases} \quad (6)$$

因此，可建立以下时间最短的最优路线模型。

$$\begin{aligned} \min & 3 \sum_{i=1}^m x_i^l + 2.5 \sum_{j=1}^m y_j^l + 5H_1 + 4H_3 + 7H_4 + 6H_2 \\ & \begin{cases} x_i^l, y_j^l > 0 \\ x_i^l, y_j^l \in Z \\ 0 \leq H_i \leq 2, i=1, \dots, 4 \\ H_i \in Z \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

(3) 建立以费用最少为目标函数的模型：设 M 为花费的总费用， y_i 表示乘坐地铁线路 T_1 或 T_2 的次数

$$\begin{aligned} M = \min & \sum_{i=1}^k M_{x_i} + 3y_i \\ & \begin{cases} y_i = 0, 1, 2 \\ y_i \in Z \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

7.2.3 多目标最优路线模型建立

问题二的多目标优化模型在问题一的基础上增加了查询者在选择出行方式的时候，如果可以乘坐地铁就选择地铁出行的意愿程度。

在对时间已经模糊处理的前提下，设对时间的需求偏重度为 a ，对换乘次数的需求偏重度为 b ，花费费用的需求偏重度为 c ，对地铁的需求程度为 d ，在要求时间较短、换乘较少和对地铁有一定需求的前提下，建立多目标情况下的最优路线。

$$D = \begin{cases} 0, & \text{可以不乘坐地铁} \\ 1, & \text{尽量乘坐地铁} \end{cases} \quad (9)$$

$$\min D = aT + bH + cM + dD$$

$$\begin{cases} T \leq 2 \\ H \leq 2 \\ T, H, M \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

7.3 模型求解

7.3.1 基于换乘次数约束下的遍历算法

在对数据进行统一后，此算法步骤与问题一相同。

7.3.2 筛选在约束条件下的所有可行路线

以找从起始点 S014 到终点 S0485 为例，在约束换乘次数不超过 2 次的条件下，筛选所得的所有可行路线如下：

[1024, 11111, 1104] 16 148.0 20 1.2 1 1.2 20 3.1 27 3.1 32 485.0 28 87.5
 [1024, 11111, 2469] 16 148.0 20 1.2 1 1.2 20 3.1 18 3.1 23 485.0 28 87.5
 [1024, 11111, 2395] 16 148.0 20 1.2 1 1.2 20 3.1 44 3.1 49 485.0 28 87.5
 [1024, 11111, 2450] 16 148.0 20 1.2 1 1.2 20 3.1 50 3.1 55 485.0 28 87.5
 [1024, 11111, 1051] 16 148.0 20 1.2 1 1.2 20 3.1 24 3.1 29 485.0 28 87.5

图 7.1 可行路线示意图

7.3.3 单目标最优路线模型结果分析

利用 Python 软件，对算法进行实现，得到的 6 对起始站→终到站之间包含地铁与公交所有线路的最佳路线如下：

(1) 在乘坐地铁需求优先的情况下，以换乘次数最少为目标的最优路线（如表 7.1）

表 7.2 换乘最少公交线路表

起始站—终点站	乘车路线与所经站点	最少换乘次数	所用时间（分钟）	费用
S3359—S1828	L469（S3359—S2364）→L021（S2364—S1828）	1	137	3
S1557—S0481	L363、L084（S0157—S1919）→L2189（S1919—S3186）→L460（S3186—S0481）	2	106	3
S0971—S0485	L094（S0971—S056）→T1（D1—D21）→L051（S0466—S0485）	2	100	5
	L013（S0971—S2184）→L417（S2184—S0485）	1	128	3
S0008—S0073	L159（S0008—S0291）→L058（S0291—S0073）	1	83	2
	L200（S0008—S2543）→T1（D15—D12）→L057（S0609—S0073）	2	65.5	5
S0148—S0485	L308（S0148—S0036）→L156（S0036—S2210）→L417（S2210—S0485）	2	106	3
	L024（S0148—S1487）→T1（D02—D12）→L057（S0609—S0073）	2	65.5	5
	L024（S0148—S1487）→T1（D15—D12）→L057（S0609—S0073）			
S0087—S3676	L454（S0087—S3496）→L209（S3496—S3676）	1	65	2
	L021（S0087—S0630）→T2（D29—D36）→S3676	1	36	4

①S3359—S1828：最少的换乘次数为 1 次，此线路需要的时间为 137 分钟，所需费

用为 3 元，换乘最少的最优线路为 1 条；

②S1557—S0481：最少的换乘次数为 2 次，此线路需要的时间为 106 分钟，所需费用为 3 元，换乘最少的最优线路为 2 条；

③S0971—S0485：最少的换乘次数为 1 次，此线路不需要乘坐地铁，所需要的时间为 128 分钟，所需费用为 2 元，换乘最少的最优线路为 1 条；若选择地铁出行，则最少的换乘次数 2 次，所需要的时间为 100 分钟，所需费用为 5 元，换乘最少的最优线路为 1 条；

④S0008—S0073：最少的换乘次数为 1 次，此线路不需要乘坐地铁，所需要的时间为 83 分钟，所需费用为 2 元，换乘最少的最优线路为 1 条；若选择地铁出行，则最少的换乘次数 2 次，所需要的时间为 65.5 分钟，所需费用为 5 元，换乘最少的最优线路为 1 条；

⑤S0148—S0485：最少的换乘次数为 2 次，若不选择乘坐地铁，所需要的时间为 106 分钟，所需费用为 3 元，换乘最少的最优线路为 1 条；若选择乘坐地铁出行，所需要的时间为 65.5 分钟，所需费用为 5 元，换乘最少的最优线路为 2 条；

⑥S0087—S3676：最少的换乘次数为 1 次，若不选择乘坐地铁，所需要的时间为 65 分钟，所需费用为 2 元，换乘最少的最优线路为 1 条；若选择乘坐地铁出行，所需要的时间为 36 分钟，所需费用为 4 元，换乘最少的最优线路为 1 条。

(2) 以时间最短为目标的最优路线（如表 7.3）

表 7.3 最短时间公汽路线表

起始站—终点站	乘车路线与所经站点	最短时间（分钟）	换乘次数	费用
S3359—S1828	L484（S3359—S3727）→L485（S3727—S1784）→L167（S1784—S1828）	64	2	3
S1557—S0481	L363、L084（S157—S1919）→L2189（S1919—S3186）→L460（S3186—S0481）	106	2	3
S0971—S0485	L094（S0971—S056）→T1（D1—D21）→L051（S0466—S0485）	100	2	5
S0008—S0073	L200（S0008—S2543）→T1（D15—D12）→L057（S0609—S0073）	65.5	2	5
S0148—S0485	L024（S0148—S1487）→T1（D02—D12）→L057（S0609—S0073）	87.5	2	5
	L024（S0148—S1487）→T1（D15—D12）→L057（S0609—S0073）			
S0087—S3676	L021（S0087—S0630）→T2（D29—D36）→S3676	1	36	4

①S3359—S1828：由于同一地铁站对应的任意两个公汽车站之间可以通过地铁站换

乘，因此最短时间为 64 分钟，此线路需要换乘 2 次，所需费用为 3 元，时间最短的最优路线为 1 条；

②S1557—S0481：最短时间为 106 分钟，此线路需要换乘 2 次，所需费用为 3 元，时间最短的最优路线为 2 条；

③S0971—S0485：最短时间为 100 分钟，此线路需要乘坐地铁，需要换乘 2 次，所需费用为 5 元，时间最短的最优路线为 1 条；

④S0008—S0073：最短时间为 65.5 分钟，此线路需要乘坐地铁，需要换乘 2 次，所需费用为 5 元，时间最短的最优路线为 1 条；

⑤S0148—S0485：最短时间为 87.5 分钟，此线路需要乘坐地铁，需要换乘 2 次，所需费用为 5 元，时间最短的最优路线为 2 条；

⑥S0087—S3676：最短时间为 36 分钟，此线路需要乘坐地铁，需要换乘 1 次，所需费用为 4 元，时间最短的最优路线为 1 条；

(3) 以花费最少为目标的最优路线（如表 7.4）

表 7.4 最少花费公汽路线表

起始站—终点站	乘车路线与所经站点	费用最少	所用时间	换乘次数
S3359—S1828	L484 (S3359—S3727) → L485 (S3727—S1784) → L167 (S1784—S1828)	3	64	2
	L469 (S3359—S2364) → L21 (S2364—S1828)		137	1
S1557—S0481	L363、L084 (S157—S1919) → L2189 (S1919—S3186) → L460 (S3186—S0481)	3	106	2
S0971—S0485	L013 (S0971—S2184) → L417 (S2184—S0485)	3	128	1
	L119、L263 (S0971—S1609) → L140 (S1609—S3037) → L104 (S3037—S0485)		115	2
S0008—S0073	L159 (S0008—S0291) → L058 (S0291—S0073)	2	83	1
S0148—S0485	L308 (S0148—S0036) → L156 (S0036—S2210) → L417 (S2210—S0485)	3	106	2
S0087—S3676	L454 (S0087—S3496) → L209 (S3496—S3676)	2	65	1

①S3359—S1828：费用最少为 3 元，若选择第一种乘车方式，则需换乘 2 次，花费时间为 73 分钟；若选择第二种乘车方式，则只需换乘 1 次，花费时间为 137 分钟；费用最少的线路共为 4 条；

②S1557—S0481：费用最少为 3 元，此线路需要换乘 2 次，所花费时间为 106 分钟，

时间最短的最优路线为 2 条；

③S0971—S0485：费用最少为 3 元，若选择第一种乘车方式，则只需换乘 1 次，花费时间为 128 分钟；若选择第二种乘车方式，则需换乘 2 次，花费时间为 115 分钟；费用最少的线路共为 3 条；

④S0008—S0073：费用最少为 2 元，此线路需要换乘 1 次，所花费时间为 83 分钟，时间最短的最优路线为 1 条；

⑤S0148—S0485：费用最少为 3 元，此线路需要换乘 2 次，所花费时间为 106 分钟，时间最短的最优路线为 1 条；

⑥S0087—S3676：费用最少为 2 元，此线路需要换乘 1 次，所花费时间为 65 分钟，时间最短的最优路线为 1 条。

八、问题三的分析、模型的建立

8.1 问题分析

已知所有站点之间的步行时间，问题二中已经把公汽站点与地铁站点中可以相互换乘的站点重命名为相同站点。公汽与地铁之间两两相互换乘的步行时间已知，故任意站点之间（包括相同站点换乘）的步行时间已知。

事实上，出行即为便利。任意查询者对步行时间有一定容忍限度，故地铁站点之间步行具有不可行性，而在可能具有步行性的公汽两站点中，总存在至少一条公交线路可以直达。因此步行的优越性即体现在：减少换乘次数、缩短运行时间、减少方案花费。

取不同查询者在出行方案中对步行时间的容忍限度为步行时间接受度。以此为约束找到步行时间最少的出行路线方案，并在问题二的模型中加入步行时间约束，建立多目标优化模型，找出不同需求下的最佳出行路线方案。

8.2 模型建立

8.2.1 建立步行时间优化模型

任意给定起点 A、终点 B，设查询者对出行路线方案的步行时间接受度为 t_1 ，实际出行路线方案所需步行时间为 t_2 ，则可行方案需要满足 $0 \leq t_2 \leq t_1$ 。

为体现步行的优越性，步行节点发生于：①起点 A 到第一次乘车点、②末次下车点到终点 B、③中间换乘点。

①步行节点发生于起点 A 到第一次乘车点

步骤一：遍历 A、B，若有直达路线则为最优方案；

步骤二：若无直达方案，从 A 点出发，在 $0 \leq t_{AX} \leq t_1$ 的约束下找到所有 X 站点，遍历 $X \rightarrow B$ 的直达方案，若存在，即为所求；

步骤三：若 $X \rightarrow B$ 无直达路线，则从 X 点出发，在 $0 \leq t_{XY} \leq t_1 - t_{AX}$ 的约束下，遍历 $Y \rightarrow B$ 的直达方案，若存在，即为所求；

步骤四：以此进行，若无法满足约束，则不存在符号步行时间接受度的步行节点发生于起点 A 到第一次乘车点的出行路线方案。

②步行节点发生于末次下车点到终点 B

即为当步行节点发生于起点 A 到第一次乘车点时步行时间优化的相反模型。

③步行节点发生于中间换乘点

则必发生于可能具有步行性的公汽站点中，且只能发生一次。若多于一次，则

失去了步行的优越性。即步行的优越性体现于将换乘次数为 3 次的出行路线方案简化为换乘次数为 2 次，将换乘次数为 3 次的出行路线方案简化为换乘次数为 2 次。

在问题二求得所有可行路线的基础上，在原出行路线方案中的非首尾车中的步行时间，若上车点 m 与下车点 n 之间的步行时间 $t_{mn} \leq t_1$ ，则出行路线方案即为所求。

④当 $\begin{cases} t_{mn} \leq t_1 \\ t_{AX} \leq t_1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t_{mn} \leq t_1 \\ t_{ZB} \leq t_1 \end{cases}$ 时，若 $t_{mn} + t_{AX} + \dots + t_{ZB} \leq t_1$ ，则步行节点可发生于①②③种情况，出行路线方案即为所求。

比较不同步行节点的出行路线方案的步行时间，步行时间最短的即为所求。

8.2.2 建立多目标优化模型

问题三的多目标优化模型在问题二的基础上增加了步行时间接受度的约束。在对出行时间和步行时间已经模糊处理的前提下，设对时间的需求偏重度为 a ，对换乘次数的需求偏重度为 b ，花费费用的需求偏重度为 c ，对地铁的需求程度为 d ，对步行时间的接受度为 e ，在要求时间较短、换乘较少、对地铁有一定需求和一定的步行时间接受度的前提下，建立多目标情况下的最优路线。

$$\begin{aligned} \min D &= aT + bH + cM + dD + eT_2 \\ &\begin{cases} T, T_2 \leq 2 \\ H \leq 2 \\ T, H, M, T_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

九、模型评价与改进

9.1 模型的优点

(1) 对于冗乱繁多的数据，首先将数据信息以矩阵的形式进行存储，使得无论是公汽换乘公汽、公汽换乘地铁、地铁换乘公汽都有相对应的矩阵；

(2) 将上下行相同、上下行不同以及环行的路线都看作是上下行不同的路线，并针对不同的路线进行不同的表示；

(3) 对乘客心理进行了调查，使得多目标最优路线模型的确立更加科学合理，求解更有依据；

(4) 针对不同的指标来建立最优路线查找模型具有简洁明确的优点；

(5) 模型利用在一定约束条件下的遍历算法，将换乘次数作为筛选种类，使得编程变得简单，而且大大的节省了计算时间；

(6) 若不考虑换乘次数的约束，路线会十分繁多，通过模型简化分析，我们只输出了最优的路线，这样使得模型的实用性提高。

9.2 模型的缺点

(1) 模型只考虑了换乘次数小于 3 的情况，没有考虑更多的换乘次数，具有一定的局限性；

(2) 在建模与编程过程中，使用的数据只是现实数据的一种近似，因而得出的结果可能与现实情况有一定的差距；

(3) 没有对程序进行进一步的优化，使得当数据量很庞大时，程序运行时间过长。

9.3 模型改进

在对模型的求解时，本文应用的递推优化算法是一般的遍历算法，尽管有一定的约束条件，遍历算法在执行时的时间会大大缩小，但程序还是较为复杂，不能保证在一定有限的时间下给出结果。

针对这个弊端，我们查找了相关资料来改进算法。我们发现用蚁群算法可能更加有效。该算法利用了蚂蚁在寻食过程中选择路线的自催化行为来实现最短路的求解。我们可以通过线路信息素强度的更新机制，实现以换乘次数最少和公交出行站点最少的公交出行路径选择优化目标。而且这个算法的搜索过程采用分布式计算方式，多个个体同时进行并行计算，大大提高了算法的计算能力和运行效率。

十、参考文献

- [1]姜启源.谢金星.叶俊.《数学模型》，2011年1月：249-268；
- [2]司守奎，孙玺菁. 数学建模算法与应用[M]. 北京：国防工业出版社，2012.
- [3]王莉.李文权.公共交通系统最佳路径算法.东南大学学报（自然科学版），2004年3月：34-02；
- [4]杨新苗,王伟,马文腾.基于 GIS 的公交乘客出行路径选择模型[J].东南大学学报(自然科学版),2000(06):87-91.)
- [5]韩君如,徐鹏.乘客公交出行路线选择影响因素分析[J].黑龙江交通科技,2018,41(12):192-193.
- [6]陈佳.基于百度地图 API 的公交路线查询系统的设计与开发[J].信息通信,2017(12):52-53.
- [7]孙贻宝. 智能公交信息服务系统 IOS 终端的构建与关键技术研究[D].武汉大学,2017.
- [8]何苑,郝梦岩.基于百度地图的移动公交查询系统的设计与实现[J].山西电子技术,2015(05):45-47.
- [9]钱雨波,王金祥.基于 Python 的多叉树遍历算法[J].信息记录材料,2019,20(05):240-241.
- [10]黄敬,王志坚.基于遍历算法的无人机救援模型研究[J].科技风,2019(12):70-71.