CAPÍTULO 1
LÓGICA PROPSICIONAL

1 INTRODUÇÃO

"Logic is the technique by which we add conviction to truth[1]."
Jean de la Bruyere

A lógica é a ciência da *avaliação sistemática de argumentos* em busca do convencimento. A lógica busca o convencimento, a certeza que existe na forma dos argumentos e não conteúdo destes argumentos. Busca a verdade pela análise de um argumento em relação a sua estrutura de construção, de forma racional, formal e estruturada.

A lógica está tão enraizada na sociedade ocidental que ser considerado ilógico é uma espécie de ofensa. A leitora deve maximizar o efeito desta ofensa se o ofendido for da minha geração. A geração que cresceu assistindo o ***Sr. Spock*** falando da lógica como se fora a disciplina mais importante do universo. Mesmo que não seja a disciplina mais importante do universo, a lógica está em praticamente tudo que fazemos todos os dias, sem que sequer percebamos.

Usamos os conceitos da lógica para justificar opiniões, definir teorias e reforçar observações sobre o mundo e sobre aquilo que fazemos com ele. Usamos a lógica para concluir, com nosso foro íntimo, e para convencer outras pessoas das nossas conclusões. A lógica, seus conceitos e argumentos permeiam as relações humanas desde antes dos tempos de Aristóteles e, desde então, se diz popularmente ***quanto mais frágil o argumento mais alta a voz***. A falta da lógica marca, e marcou ao longo da história, o começo de períodos conturbados.

Neste livro, vamos nos dedicar a lógica formal, matemática, voltada ao uso na resolução de problemas computacionais. Disciplina que suporta todo o desenvolvimento de software, técnicas de inteligência artificial e o estudo de linguagens formais e regulares, as linguagens que usamos para criar linguagens de programação. Definiremos argumentos, premissas, teses, conclusões, antecedentes, consequentes e outros tantos conceitos que permitirão que a leitora encontre a verdade em uma afirmação. Para isso, vamos estudar lógica proposicional, ou **cálculo proposicional**, lógica predicativa, ou **cálculo predicativo** e o **cálculo de sequentes**.

A leitora há que entender, e perdoar, neste livro usarei os termos **cálculo proposicional** e **cálculo predicativo**. Não se trata de nenhuma fixação com a matemática recorro a estes termos apenas na vã esperança de manter este estudo dentro da ciência da computação e longe da filosofia. E, para deixar claro desde já, que estudaremos **provas matemáticas**. Assim, quando digo que

[1] Em tradução livre: A lógica é a técnica que usamos para adicionar convicção a verdade.

vamos estudar a validade de um argumento, me refiro a verdade absoluta e incontestável sedimentada sobre uma camada estável de matemática.

A lógica matemática e computacional, não está só interessada no convencimento, este convencimento precisa, inequivocamente se estruturado sobre uma **prova irrefutável da verdade**.

A lógica, diferentemente do português, inglês ou mandarim, é uma linguagem artificialmente criada sobre uma estrutura matemática para permitir a análise de argumentos, garantir que esta análise seja compreendida por qualquer um que conheça a linguagem, e encontrar a verdade. A verdade, a conclusão que obtemos sobre argumentos só pode assumir dois estados. Ou o argumento é verdadeiro, ou falso. Em qualquer um dos casos, quando chegamos à conclusão de forma lógica e inequívoca esta conclusão será a verdade.

O objetivo da lógica é encontrar a verdade. Não, é muito mais que isso, o objetivo da lógica é encontrar a prova da verdade. E este é o ponto principal de todo este esforço 2500 anos de construção do pensamento. Que começou uma, ou duas gerações antes de Aristóteles e continua até os Século XXI. Nenhuma disciplina antiga é tão atual quanto a lógica.

Quando estudamos lógica queremos definir se um determinado argumento é verdadeiro, ou falso; dando a mesma importância a qualquer um dos resultados. Desde que o resultado verdade, ainda que o argumento seja falso. Ficou complicado?

A amável leitora pode definir a lógica como sendo a ciência da avaliação de argumentos. Nesta ciência temos dois resultados possíveis para cada argumento, eles podem ser verdadeiros ou falsos. A lógica quer encontrar este resultado com convicção. Esta convicção, esta certeza, a verdade absoluta sobre um argumento, seja ele verdadeiro ou falso é o que aprenderemos como encontrar, juntos, ao longo de todo este livro.

1.1 Argumentos

Os argumentos, no que concerne à lógica, são sentenças que suportam um raciocínio específico e permitem uma conclusão de forma indutiva ou dedutiva.

Um argumento será verdadeiro só, e somente só, suas premissas e sua conclusão forem verdadeiras.

A forma do argumento é importante, a lógica se preocupa com a forma. Uma das formas lógicas mais antigas, o silogismo é composto de duas sentenças, chamadas de **premissas, ou proposições,** e uma sentença chamada de **conclusão**.

Como disse anteriormente, a avaliação dos argumentos é a função principal da lógica e esta avaliação é feita a luz do raciocínio. Veremos isso de forma matemática ao longo deste capítulo, mas enquanto fundamentamos o conhecimento necessário, suponha que você suporte o seguinte argumento: ***todos os filósofos são inteligentes*** e que em algum ponto da sua vida social um amigo, lhe apresente a Amanda com a sentença: ***Amanda é filósofa***. A conclusão lógica e irrefutável é que ***Amanda é inteligente***.

Este foi nosso primeiro exemplo de raciocínio lógico. Duas **proposições**, ou premissas, se preferirem, levam a uma **conclusão**. Podemos contestar as proposições apresentadas em busca da sua verdade particular. Por exemplo, podemos discutir se é verdade que todos os filósofos são inteligentes ou podemos discutir se Amanda realmente é filósofa. Neste caso, teríamos que ter **argumentos** para avaliar a verdade de *todos os filósofos são inteligentes*, ou ainda verificar se é verdade que *Amanda é filósofa*. Contudo, se soubermos que as duas **proposições** são válidas, somos forçados, pela lógica, a inferir que ***Amanda é inteligente*.** Além de nosso primeiro exemplo de **silogismo** acabamos de ver o nosso primeiro exemplo de **inferência**. Estes são conceitos que transpassam nossa geração, talvez seja necessário voltar uns 2500 anos para entender como chegamos até aqui.

1.2 Muitos gregos, poucos fatos

Marcamos o começo do estudo da lógica com Aristóteles (384 A.C. –322 A.C.) ainda que os poucos escritos de sua própria autoria que chegaram até nós indiquem que o próprio Aristóteles estudou com professores que já ensinavam lógica. A palavra lógica tem origem na palavra grega *λογική*[2] que, originalmente significava: aquilo que foi dito. Com o tempo a palavra logo assumiu o sentido de razão. Este pobre autor gostaria de pensar que esta modificação no sentido da palavra esteja totalmente relacionada ao estudo da racionalidade das sentenças, por meio da lógica.

Aristóteles era filho do médico do rei da Macedônia e ficou órfão ainda jovem. Não perdeu seu status na corte e foi criado em abundância e conforto. Aprendeu poesia e retórica e teve o privilégio de estudar **Platão** em Atenas, em uma das mais prestigiosas escolas da época. Estão nos tratados de Aristóteles os primeiros registros escritos do estudo da lógica e algumas das ideias que pavimentaram o caminho da ciência. Contudo, ele não estudava lógica sozinho.

Na Grécia Antiga a lógica floresceu na Escola de Megara onde se estudavam quebra-cabeças lógicos e **paradoxos**, encontrando, discutindo e registrando a existência de alguns destes fenômenos do pensamento. Todos muito importantes para a evolução da ciência. Além das escolas de Atenas e

[2] Lógica escrito em grego arcaico.

Megara, a Escola Estoica, também da cidade Atenas, fundada por ***Zeno de Citium*** quase 100 anos antes de Aristóteles, ainda nos tempos em que ***Sócrates*** era o grande professor de Atenas, teve importante influência no desenvolvimento do pensamento lógico.

Da Escola Estoica, vamos destacar o professor ***Diodorus Cronus***. Estão nos tratados de Aristóteles a indicação de que foi Cronus quem considerou o raciocínio lógico baseado em três sentenças onde a terceira indica a conclusão. O mesmo raciocínio que vimos no exemplo da Amanda e que cristaliza aquilo que Aristóteles chamou de silogismo. A palavra silogismo também é de origem grega e significa conclusão, ou inferência.

Não temos muita certeza sobre a relação entre Cronus e Aristóteles cremos que Cronus tenha influenciado Aristóteles, talvez como um contemporâneo mais velho ou como um concorrente. O pouco que restou escrito desta época, conservado pelos mouros, não permite nenhuma conclusão definitiva. Parece que foi Aristóteles que primeiro percebeu a importância da forma na definição da verdade e, seus estudos e conclusões sobre os silogismos constituem, ainda hoje, o melhor estudo sobre o tema e, nos últimos 2300 anos, sofreram apenas revisões menores e complementares.

A maioria dos livros de lógica atribuem a Aristóteles a criação dos silogismos, contudo isto não está realmente claro, não há como verificar se foi Aristóteles, Cronus, o algum outro professor da época. Talvez tenha sido uma consequência do trabalho, em cooperação ou concorrência, de duas, ou três gerações de estudiosos gregos. A Aristóteles podemos atribuir o mérito de perceber que a forma da argumentação tem mais impacto na percepção da verdade que o conteúdo dos argumentos, a forma final que usamos para os silogismos e o uso de letras para representar proposições. Não é pouca coisa, é mais que suficiente para dizermos que a lógica como conhecemos hoje, começou na Escola de Atenas, nos escritos de Aristóteles. Por outro lado, o cálculo proposicional deve sua origem a Escola Estoica, a Cronus, ou a ***Chrysippus,*** este último responsável pelo estudo de dois argumentos importantíssimos para a prova matemática os *Modus Ponens* e *Tollens*, além, é claro, do Silogismo Hipotético e da própria inclusão da análise condicional nas análise do raciocínio lógico.

1.3 Silogismos

"... um silogismo completo, a premissa antes da consequência, a consequência antes da conclusão ..."

Machado de Assis, Dom Casmurro.

Silogismos são estruturas de raciocínio formadas por duas sentenças, chamadas de premissas, ou proposições, e uma conclusão. Lembre-se silogismo significa conclusão. Quando Aristóteles usou este nome para este processo estava realmente definindo uma fórmula para a conclusão da verdade. O silogismo, como definido por Aristóteles, é a forma de ordenar as premissas de para conduzir o raciocínio à conclusão lógica. Sejam as premissas verdadeiras, ou falsas, a conclusão mostrará a verdade.

Vimos um silogismo, de forma completamente informal, quando falamos que *Amanda é inteligente*. Devemos nos preocupar com a forma. O silogismo deve ser escrito e organizado de modo a explicitar as sentenças separando as premissas da conclusão, como pode ser visto nos Exemplo 1.1 e 1.2.

Exemplo 1.1: exemplo de silogismo.

Todos os filósofos são inteligentes
Amanda é filósofa
Portanto, Amanda é inteligente

Exemplo 1.2: exemplo de silogismo.

Todos os homens são mortais
Sócrates é um homem
Portanto, Sócrates é mortal

É possível perceber que estes exemplos compartilham uma estrutura comum, que pode ser usada para qualquer conjunto de argumentos.

Todos x são y
z é x
Portanto, z é y

Esta estrutura não garante a correção do raciocínio nem das proposições, veja, o Exemplo 1.3.

Exemplo 1.3: exemplo de falácia.

Todos os corvos são pretos.
Os corvos são pássaros.
Portanto, todos os pássaros são pretos.

O Exemplo 3 está perfeitamente formado, mas a conclusão não é correta, mas o silogismo está perfeito e o argumento é válido perante a lógica contudo, sabemos que a conclusão está errada. Se isso acontece o silogismo deve estar errado. De fato, nestes casos encontramos uma falácia, uma palavra com origem no latim significando truque, no sentido de ser enganado. Uma falácia é um engano no silogismo. As duas premissas no Exemplo 3 são verdadeiras, mas combinadas não provam que a conclusão é verdadeira. Existem apenas 64 tipos de silogismos possíveis e, se for o caso, voltaremos a isso no futuro. Talvez em um Apêndice. Lembre-se a leitora lê, poucas horas depois que escrevi.

Depois de Aristóteles, Cronus e seus contemporâneos; a lógica viajou entre os romanos, e árabes, voltando a Europa apenas nos anos 1200, quase sempre entre estudiosos de teologia. Vou tomar a liberdade de marcar o nascimento da lógica matemática graças os esforços de um homem em busca da paz Gottfried-Willhelm Leibniz.

1.4 A busca pela paz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), viveu na Alemanha durante no final do iluminismo e foi um dos mais produtivos matemáticos da história. Atingiu o ápice da sua produção científica desenvolvendo o cálculo integral e diferencial de na mesma época que **Isaac Newton** de forma independente. Para o nosso esforço em entender a lógica, interessam seus trabalhos com aritmética binária publicados em *Explication de l'Arithmétique Binaire*[3] e uma análise detalhada das operações matemáticas que podemos fazer com proposições . Leibniz acreditava ser capaz de criar uma linguagem universal para representar a lógica e o raciocínio. De forma que a verdade pudesse ser encontrada a partir da análise lógica da relação entre proposições reduzidas a um sistema simbólico e, neste caminho estruturou algumas das operações que usamos até hoje.

Figura 1-1 - Retrato de Leibniz, pintado em Christoph Bernhard Francke (FRANCKE, 2020)

Leibniz sonhava com a solução dos problemas mundiais por meio de uma linguagem universal que estruturasse o raciocínio lógico e levasse a descoberta da verdade. Seu trabalho inspirou George Boole, no Século XIX e **Gottolob Frege**

[3] Em tradução livre: Explicações da Aritmética Binária, disponível online em: ***https://hal.archives-ouvertes.fr/ads-00104781/document#:~:text=Explication%20de%20l%E2%80%99arithm%C3%A9tique%20binaire%2C%20qui%20se%20sert%20des,le%20sens%20des%20anciennes%20figures%20chinoises%20de%20Fohy.***

no Século XX que criou o cálculo de predicados, tema de outro capítulo deste mesmo livro..

1.5 Álgebra Booleana

George Boole, em 1854 ***The Laws of Thought*** apresentando o que conhecemos hoje como **Álgebra Booleana**. Neste ponto da história, Boole dispunha dos conceitos de proposição, de operações matemáticas para estas proposições, e uma aritmética de números binários. Faltava uma álgebra que permitisse completar a estrutura matemática da lógica. Coube a Boole, filho de um comerciante de classe média a honra de completar o sonho de Leibnitz. Curiosamente o interesse de Boole pela lógica surge da disputa entre ***Augustus De Morgan*** e Willian Hamilton. Este era um momento de efervescência matemática. Muitos estudiosos haviam reconhecido que sistemas algébricos não tinham relação com números e que estes conceitos poderiam ser expandidos para englobar outros objetos, e outras áreas de pesquisa. Boole publicou um pequeno trabalho, The *Mathematical Analysis of Logic*[4], um trabalho imediatamente reconhecido como sendo o precursor de toda uma nova área da matemática. Boole, conseguira criar as leis da álgebra simbólica para a lógica, de forma matemática, elegante e simples. Tão simples que álgebra desenvolvida por Boole, as leis de operação matemática com proposição, puderam ser implementadas em circuitos eletrônicos e quase um século após The *Mathematical Analysis of Logic,* vimos o surgimento do computador eletrônico. O próximo passo importante neste caminho é o Paradoxo de Russel. Mas antes, o que é um paradoxo?

1.6 Paradoxos

Paradoxo é uma sentença que não tem a verdade bem definida, se a sentença for verdadeira, o argumento é falso. Se a sentença for falsa, o argumento é verdadeiro. Um dos mais antigos e famosos, o ***paradoxo do mentiroso***, pode ser ligado às escolas gregas de filosofia, é simples e pode ser demonstrado com uma sentença: **eu sempre minto**. E deixo que a leitora responda, a sentença em destaque neste parágrafo é verdadeira ou falsa?

Para responder esta pergunta, classificando esta proposição, existem algumas considerações que devemos fazer. Vamos, antes de qualquer coisa chamar a sentença **eu sempre minto** de p.

Se p é verdadeira, então "**eu sempre minto"** é verdadeira. Portanto, p deve ser falsa. A hipótese de que p é verdadeira leva à conclusão de que p é

[4] Em tradução livre: A Análise Matemática da Lógica. Disponível em: ***http://www.gutenberg.org/files/36884/36884-pdf.pdf***. Muito interessante ver que em 1874, os escritores também citavam outros autores, textualmente, no idioma original do citado. No caso do Boole, ele cita Aristóteles, em Grego.

falsa, ou seja, existe uma contradição. Mas, a coisa fica ainda mais interessante se p é falsa, então "**eu sempre minto**" é falsa. Portanto, p deve ser verdadeira. A hipótese de que p é falsa leva à conclusão de que p é verdadeira, ou seja, outra contradição. Visto isso é preciso dizer que **eu minto às vezes** não é uma proposição.

Esta é uma boa hora para levantar-se, tomar uma água e lembrar que o estudo da lógica é fundamental para o progresso da humanidade. Esfriar a cabeça e lembrar que estamos lidando com paradoxos desde que Sócrates caminhava sobre as praias da Grécia e ficar aborrecido com eles é, praticamente, um pré-requisito para ser humano.

Do ponto de vista da filosofia, esta frase, provavelmente cunhada no Século VI A.C. quase trezentos anos antes de Aristóteles e Cronus, por um Cretense mitológico chamado de ***Epinemides***, sequer é considerada um paradoxo.

O paradoxo do mentiroso vem dando nós nas mentes mais brilhantes da história desde então. E aparece como se fosse um vírus, nos lugares mais inesperados. Paulo de Tarso, São Paulo para os católicos, utiliza uma variação deste paradoxo em uma das Epístolas a Tito (cap. 1 v:12 e 13):

12. Um deles, seu próprio profeta, disse: Os cretenses são sempre mentirosos, bestas ruins, ventres preguiçosos.
13. Este testemunho é verdadeiro. Portanto, repreende-os severamente, para que sejam sãos na fé.

Há uma carga gigantesca de ironia, da parte de Paulo, nestes dois versos, que está aborrecendo filósofos e teólogos há quase 2000 anos. Contudo, vou deixar a análise teológica e filosófica destes dois versos para hora, lugar, texto e escritor certos.

Figura 1-2 - Este não é um cachimbo, De René Margritte. Uma pintura de 1929, ou um paradoxo? (MAGRITTE, 2011)

O paradoxo do mentiroso não é o único paradoxo importante, apenas o mais simples e já que este é um livro de lógica matemática, e vamos dar nós em nossas próprias mentes. O paradoxo do mentiroso aparece na lógica, na matemática, na teologia, e na arte, tal é o impacto que ele provoca em o conhece e estuda.

Já que estamos dando nós em cérebros, precisamos falar dos Paradoxos de Zeno. Ou pelo menos de um deles que está relacionado com Leibniz.

Zeno, Zenon, ou Zenão em português, conhecido como ***Zeno de Eleia*** também se preocupou com paradoxos antes dos tempos de Aristóteles. Seus paradoxos influenciam a física e a matemática. E aborrecem estudiosos até os dias de hoje. Um deles, o paradoxo do deslocamento, é frequentemente utilizado para explicar o cálculo diferencial e integral. Infelizmente não restou nada dos escritos de Zeno e tudo que temos sobre ele está nos trabalhos de Aristóteles, milagrosamente preservados pelos estudiosos árabes e persas. A leitora deve estar curiosa sobre este paradoxo que achei tão importante a ponto de mencionar aqui, então responda a seguinte questão:

> *Considere a lâmpada do seu escritório, esta lâmpada está ligada a um interruptor e você pode desligar, ou ligar a lâmpada, infinitas vezes, em um espaço finito de tempo que mediremos. A lâmpada começa ligada, um minuto depois você a desliga, passam-se 30 segundos e você a liga novamente, mais quinze segundos se vão e você a desliga e, a cada passagem da metade do tempo gasto na última interação, você muda o estado da lâmpada. Depois de dois minutos, a lâmpada estará apagada ou acesa?*

Pare agora. Nem que seja por alguns minutos e tente responder esta questão. Não tem pressa. Eu espero.

Voltou? Não existe uma resposta correta, o infinito, colocado no enunciado leva esta questão ao domínio dos paradoxos. Não temos como verificar o estado da lâmpada porque como o você irá mudar o estado de aceso para apagado infinitamente e a cada mudança o tempo fica menor não temos como saber o número de transições que ocorrerão. Dizemos que o número de transições de estado tende ao infinito. Uma frase que usamos com frequência quando encontramos ligeiramente próximo de um paradoxo na matemática.

Uma das primeiras versões deste Paradoxo de Zeno, a mais antiga que chegou até nosso tempo, está relacionada com flechas, pintores e alvos. Coisas comuns na época de Zeno e raras na nossa. Usei a metáfora da lâmpada que vi há alguns anos por achar que seria mais adequada a nossos tempos de energia elétrica e computação quântica.

> *Só para que não restem dúvidas, paradoxos não são proposições. Por definição um paradoxo é uma sentença que não pode ser provada verdadeira ou falsa.*

Estes foram dois exemplos de paradoxos importantes para a lógica e para a matemática, mas não se comparam os paradoxos e avanços que encaramos a partir do final dos anos 1800 para a computação, computabilidade e complexidade. Entre estes o Paradoxo de Russel se destaca.

1.7 O Paradoxo de Russell

Bertrand Russel (1872 – 1970) tentou reescrever toda a matemática a partir da Teoria dos Conjuntos, conforme fora postulada por Georg Cantor, e fracassou ao encontrar um dos mais famosos paradoxos da história da matemática. Esta pretensão, provar toda a matemática a partir da Teoria dos Conjuntos não era exclusiva de Russell, outros matemáticos antes dele, e alguns depois, perseguiram este objetivo. Entre estes últimos destacam-se ***Kurt Gödel*** e ***Alonzo Church*** cujos trabalhos, em lógica e nas teorias da computabilidade e complexidade têm impacto direto na criação do mundo em que vivemos e serão, estudados neste livro, assim que se tornarem relevantes na nossa trajetória.

Russell, além de ser escritor, estudou filosofia, matemática e lógica. Em 1901, estudando a Teoria dos Conjuntos de ***Georg Cantor***, encontrou um paradoxo na definição de conjuntos. O mesmo paradoxo já havia sido estudado, mas não publicado por ***Ernst Zermelo*** em 1899 e pelo próprio Georg Cantor em 1890. Contudo, a história atribui este paradoxo a Russell graças a sua publicação. A tentativa de Russell e Alfred North Whitehead, registrada no livro *Principia Mathematica* contribuiu definitivamente para o formalismo da lógica incluindo-a definitivamente na matemática. A simbologia de linguagem da lógica que adotamos neste livro tem origem no *Principia Mathematica*. Veremos, é claro, a versão mais atualizada possível desta simbologia. O paradoxo de Russel pode ser definido da seguinte forma:

Considere A como o conjunto formado por todos os conjuntos que não contém a si mesmos. De tal forma que: $A = \{S | S \notin S\}$. Seria A um elemento de si mesmo? Seria o conjunto A um elemento do conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmos?

Vamos pensar um pouco sobre isso. Se A é um elemento A isso significa que ele é um elemento de si mesmo. Logo, pela própria definição de A ele não poderia conter a si mesmo, já que A é o conjunto de conjuntos que não contém a si mesmos. Como esta opção é impossível, devemos concluir que A não é um elemento de si mesmo. Mas, se ele não contém a si mesmo. Ele precisa, necessariamente, ser um elemento do conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmo. E pronto, lá se foi a teoria dos conjuntos por água abaixo, levando consigo uma parte importante do cérebro deste pobre autor.

Uma consequência importante do trabalho de Russell foi despertar a curiosidade matemática para a formalização da Matemática. ***Alonzo Church*** segui este caminho e acabou criando uma área da matemática, o Cálculo Lambda, que suporta uma parte importante do Cálculo de Sequentes, que veremos no Capítulo 3, deu origem as linguagens de programação funcional e revolucionou a forma como avaliamos os tipos de variáveis em computação.

Outra consequência do trabalho de Russell, a formalização da linguagem de representação de proposições e operações entre proposições. Anteriormente estudadas por Leibnitz, e Boole. Russell ajudou a estruturar a parte da matemática que chamamos de **cálculo proposicional**.

2 CÁLCULO PROPOSICIONAL

No **Cálculo Proposicional** vamos usar as proposições como operandos em expressões lógicas. Esta é uma linguagem formal com dois elementos construtores: a proposição e os operadores. A proposição, é uma declaração, na forma de sentença, que é verdadeira $\boldsymbol{ou}$ falsa. Nunca as duas conclusões ao mesmo tempo e nunca sem um destas conclusões. Os operadores são, na linguagem natural, as palavras, conectivos, que usamos para criar proposições complexas. São cinco operadores básicos que definirão as fórmulas que usaremos neste cálculo.

> *Chama-se de conectivo a palavra que usamos para criar proposições, proposições compostas, a partir de composições atômicas.*

A proposição é uma declaração, na forma de sentença fechada, cuja verdade só pode ser demonstrada em um de dois estados diferentes. Ou a proposição é verdadeira, ou é falsa. Além disso, as chamaremos de atômicas porque uma proposição não pode ser dividida em outras proposições. Uma proposição jamais será verdadeira E falsa e, da mesma forma uma proposição não poderá ser nem verdadeira e nem falsa. Se olharmos a definição de proposição vemos uma aplicação do conectivo $\boldsymbol{ou}$ este conectivo, quando usado em português significa que só pode existir um de dois estados possíveis.

> *Sentenças fechadas são aquelas que podemos definir como verdadeiras ou falsas. O caso contrário, as sentenças abertas são aquelas onde não podemos determinar sua verdade ou falsidade. Proposições são sentenças abertas.*

O **Cálculo Proposicional** é a parte da lógica matemática que estuda a existência das proposições; sua verdade ou falsidade; a criação de proposições simples (ou atômicas) e a criação de proposições complexas (ou compostas). E, principalmente as fórmulas que criaremos para criar proposições compostas, ou complexas, combinando todas estas proposições por meio de cinco operadores.

2.1 Proposições

Vamos começar estudando as proposições, sua verdade e estrutura, na forma sentencial, a forma como falamos e escrevemos em linguagem natural. Começando com o Exemplo 2.1.

Exemplo 2.1: proposições

1. Lima é a Capital da China
2. Paris é a Capital da França
3. $1 + 1 = 2$
4. Todos os gatos são animais

Todas as declarações do Exemplo 4 são proposições. Todas estas sentenças, ou são verdadeiras (2 e 4), ou falsas (1, 3) e não resta dúvida sobre a verdade de cada uma destas declarações. Aqui, no domínio da linguística e do racional, a prova matemática é dispensável.

A verdade de três das proposições apresentadas no Exemplo 4 é inerente ao conjunto interno de conhecimento da própria leitora. Conjunto este formado pelos milhares de proposições que fomos aceitando como verdadeira ao longo da vida. Uma delas, podemos provar matematicamente, ainda que o esforço seja enorme, será mínimo se comparado ao esforço necessário para provar as outras três. A proposição "1+1=2" foi matematicamente provada em um pouco mais de 360 páginas, por Russell no *Principia Mathematica*.

Até este ponto temos usado sentenças escritas em uma linguagem natural, o português. As linguagens naturais são complexas e permitem a ocorrência de ambiguidades, levando a conclusões erradas ou incompletas. Como pode ser visto no Exemplo 2.2.

Exemplo 2.2: caso de ambiguidade.

Sexo ruim é melhor que nada.
Nada e melhor que sexo bom.
Portanto, sexo ruim é melhor que sexo bom.

Ambiguidade e complexidade são características indesejadas a qualquer momento, não raro elas levam a falácias e impedem a validação de uma prova matemática. Aristóteles, Leibniz, Russell e Boole, perceberam isso e, ao longo dos séculos, desenvolveram uma notação matemática para representar proposições e as operações que podemos fazer com elas justamente para garantir a inexistência de ambiguidades.

As proposições que usamos nos exemplos anteriores são ditas atômicas, ou simples, elas estão contidas em si mesmo e sua verdade depende apenas da sua aceitação como verdadeiras ou falsas. A verdade, ou falsidade da proposição pode ser discutida, mas para cada discussão, em algum ponto, precisaremos partir de um conhecimento de verdade, ou falsidade, de alguma proposição básica e, criar toda a estrutura de prova. Neste livro, sempre que restarem dúvidas, ou estabelecerei a verdade, ou falsidade, ou indicarei o caminho para a sua prova.

Representaremos as proposições atômicas, como fizemos antes de forma informal, por letras minúsculas. As letras p, q, r, s, t são as letras que usaremos com mais frequência. Também usaremos as letras maiúsculas T para representar verdadeiro e F para representar falso como símbolos para indicar a verdade de uma determinada proposição. Assim, podemos usar as mesmas proposições do Exemplo 4 para construir o Exemplo 2.3:

Exemplo 2.3: identificação algébrica de preposições.

1. $p\ = \text{Escreva este texto ainda hoje.}$
2. $q\ = \text{Paris é a Capital da França.} \mid q\ =\ T$
3. $r\ = 1\ +\ 1\ =\ 2 \mid r\ =\ F$
4. $s\ = \text{Todos os gatos são animais.} \mid s\ =\ T$

Toda proposição é uma sentença, mas, nem toda sentença é uma proposição, como podemos ver no Exemplo 2.4:

Exemplo 2.4: sentenças e proposições.

1. Escreva este texto ainda hoje.
2. $x\ +\ 4\ =\ 6$
3. $r\ = 1\ +\ 1\ =\ 2 \mid r\ =\ F$
4. $s\ = \text{Todos os gatos são animais.} \mid s\ =\ T$

A sentença do Exemplo 2.4.1 não é uma proposição porque não é uma declaração e a sentença do Exemplo 2.4.2 não é uma proposição porque não temos como garantir se ela é verdadeira ou falsa. Observe que, no Exemplo 2.4.2, assim que for atribuído um valor a x, poderemos definir se a sentença é verdadeira ou falsa e teremos uma proposição.

As regras da sintaxe definem a estrutura de cada proposição enquanto a semântica é responsável pela interpretação. A semântica define a atribuição do valor verdadeiro T ou falso F para cada proposição. Para cada forma, definida pela sintaxe de cada idioma, uma regra semântica define a verdade de cada proposição.

Exercícios

Classifique as sentenças a seguir como proposição, ou não.

a) Olhe que lindo pôr do sol!
b) Você joga futebol?
c) Três mais dois igual a cinco.
d) $X\^{}2 + 3 = 20$
e) Carlos é careca.
f) Francisco não é o Papa.
g) Ele foi campeão mundial com o Brasil em 1970.

A prova, que tanto buscamos, é uma construção sintática que permite a dedução de uma fórmula a partir de um conjunto de outras fórmulas, que chamaremos de ***axiomas***, conhecimento dado *a priori*, por meio do uso das ***regras de inferência***. As proposições atômicas podem ser combinadas por meio de operações, com nomes derivados da linguagem natural, tais como E, OU, $implica$ e $negação$. O mais simples é a negação.

2.2 Operador unário - Negação

Temos um e apenas um operador unário em cálculo proposicional, o operador de negação, em inglês *not*, representando por $\neg$ ou, em alguns livros, $\sim$. Operadores unários são aqueles que usam apenas um operando. Se uma proposição é verdadeira a aplicação deste operador a transforma em falsa e vice-versa. Por causa desta inversão, este operador também pode ser chamado de inversor ou *inverter* em inglês.

Podemos usar o operador de negação quantas vezes for necessário, sempre a frente de proposição que estamos operando, por exemplo, a negação da proposição q é representada por $\neg\, q$ ou $\sim q$ que se lê como ***não q***. Coo disse, podemos aplicar o operador $\neg$ quantas vezes for necessário, a qualquer proposição de tal forma que se $q \equiv T$ logo $\neg q \equiv F$ e se $r \equiv F$ logo $\neg\neg r \equiv F$.

A leitora há de me ajudar com um problema. Precisamos tirar o sinal de igual $(=)$ do nosso vocabulário. Pelo menos neste livro. Este sinal não tem muito sentido em lógica, por isso, no parágrafo anterior, eu o substituí por $(\equiv)$ o sinal de equivalência. Um dos sinais de equivalência, conforme o caso, usaremos outros. Mas, veremos na hora certa.

2.3 Operadores binários

Operadores binários são aqueles que são aplicados a dois operadores e determinam a relação entre eles. Temos quatro operadores binários no cálculo proposicional.

1. A conjunção ou operador $E\ (and)$ representado por $\wedge$ tal que a conjunção entre p e q e representada por $p\ \wedge\ q$.
2. A disjunção ou operador $Ou\ (or)$ representado por $\vee$ tal que a disjunção entre p e q e representada por $p\ \vee\ q$.
3. A condicional, ou implicação, representada pelo operador $\Rightarrow$ tal que: $p\ \Rightarrow\ q$.
4. A Bicondicional representada pelo operador $\Leftrightarrow$ tal que: $p\ \Leftrightarrow\ q$.

3 OPERAÇÕES E OPERADORES

“Todas as verdades são de entendimento simples e fácil, uma vez que elas foram descobertas. O problema está em descobri-las.”
Galileu Galilei.

As sentenças são claras e sua definição depende do idioma utilizado. Você deve ter aprendido o alfabeto, a sintaxe e a semântica do português, como falado no Brasil, nos ciclos básicos de educação e com sua família. Aqui, vamos pegar este conhecimento para escrever sentenças declarativas que possam ser classificadas como proposições.

Proposição é uma sentença declarativa que só pode ser falsa ou verdadeira. Sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas não podem ser proposições já que é impossível determinar a verdade destas sentenças. *Hoje está chovendo muito!* Não é uma proposição enquanto, *hoje está chovendo muito é* uma proposição. Então podemos dizer, só para lembrar, que:

> *Proposição é todo conjunto de palavras que exprimem um pensamento de sentido completo que pode ser verdadeiro ou falso.*

As proposições seguem alguns princípios criados no século 3 A.C e são atribuídos a ***Chrysippus***, professor da Escola Estoica. A leitora há de lembrar, conversamos sobre esta escola anteriormente neste mesmo livro. Em uma forma puramente literal e sentencial podemos enunciar estes princípios como:

1. **Princípio de identidade: uma proposição verdadeira é verdadeira e uma proposição falsa é falsa.**

2. **Princípio da não contradição: nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa.**

3. **Princípio do terceiro excluído: uma proposição será verdadeira ou falsa. Não há alternativa.**

As proposições podem ser atômicas, ou simples, e compostas, ou moleculares. Proposições simples, são aquelas contidas em si mesmo: *todo homem é mortal*; *Beatriz é alta*; *o Papa é argentino*. Todas estas declarações são proposições. Ainda que a leitora não conheça a Beatriz, a maior discordância estaria em determinar se a proposição é verdadeira ou falsa. Mas, não existe outra possibilidade, ou a Beatriz é alta ou baixa. As outras dependem do seu conhecimento interno. Para criar proposições compostas, usamos conectivos, para relacionar uma proposição com a outra. Como pode ser visto no Exemplo 3.1.

Exemplo 3.1: proposições compostas, representadas por sentenças

1. *Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta.
2. *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês*
3. **Ou** *Marcela é curitibana,* **ou** *gaúcha.*
4. **Se** *os gatos são mamíferos,* **então** *eles mamam na infância.*
5. *Joana será aprovada* ***se, e somente se****, tirar mais que 8.*

No Exemplo 3.1 estão destacados os conectivos (*e; ou; não; então..se; e se, e somente se*). Estes conectivos, que serão transformados em operadores lógicos, estão transformando proposições atômicas em proposições compostas. As proposições apresentadas no Exemplo 3.1 estão na forma de sentenças e, salvo engano, estão de acordo com as normas da língua portuguesa como falada e escrita no Brasil.

Para transformar as sentenças em fórmulas lógicas precisaremos de um conjunto de símbolos que chamaremos de alfabeto e representaremos por Σ_{CP}. Estamos começando nosso estudo da lógica pelo **cálculo proposicional** (CP), para tanto, usaremos o alfabeto $\Sigma_{CP} = \{p;\ q; r; s; t; T; F; \wedge; \vee; \neg; \rightarrow; \leftrightarrow; (;)\}$.

Com os 14 símbolos do alfabeto Σ_{CP} a amável leitora deve ser capaz de transformar qualquer proposição composta em fórmula lógica. Os símbolos T e F serão usados, respectivamente, para indicar a verdade e a falsidade de uma proposição seja ela composta ou simples. A leitora irá me permitir expandir este alfabeto sempre que eu precisar de mais variáveis proposicionais além de p, q, r, s e t que definimos como elementos do conjunto Σ_{CP}. Para a realização dos cálculos proposicionais, estes símbolos serão utilizados para substituir as sentenças proposicionais por variáveis proposicionais, na forma exposta no Exemplo 3.2.

Exemplo 3.2: uso de variáveis para representar sentenças proposicionais

1. $\boldsymbol{p}$: *Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta.
2. $\boldsymbol{q}$: *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês*
3. $\boldsymbol{r}$: **Ou** *Marcela é curitibana,* **ou** *gaúcha.*
4. $\boldsymbol{s}$: **Se** *os gatos são mamíferos,* **então** *eles mamam na infância.*
5. $\boldsymbol{t}$: *Joana será aprovada* ***se, e somente se****, tirar mais que 8.*

No Exemplo 3.3 vemos estas mesmas proposições já representadas na forma matemática. Observe que em todos os casos separamos as proposições, representamos por variáveis e aplicamos os operadores.

Exemplo 3.3: uso de variáveis para representar sentenças proposicionais

1.	*Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta. ***p***: todo homem é mortal; ***q***: Beatriz é alta	$p \wedge q$
2.	*Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês* ***p***: Paris é a capital da Argentina; ***q***: o Papa é francês	$p \wedge \neg q$
3.	Ou Marcela é curitibana, ou gaúcha. ***p***: Marcela é curitibana; ***q***: Marcela é gaúcha.	$p \vee q$
4.	Se os gatos são mamíferos, então eles mamam na infância. ***p***: gatos são mamíferos; ***q***: gatos mamam na infância.	$p \rightarrow q$
5.	Joana será aprovada se, e somente se, tirar mais que 8. ***p***: joana está aprovada; ***q***: Joana tirou nota maior que 8.	$p \leftrightarrow q$

Ao longo de todo este trabalho vamos usar a palavra proposição substituindo a expressão variáveis proposicionais.

Se usarmos os símbolos de Σ, e apenas estes símbolos, para criar uma fórmula lógica, diremos que esta fórmula está bem formada. Isto é importante porque **apenas as fórmulas lógicas bem formadas têm validade na lógica matemática**. Você não pode inferir a verdade de uma fórmula se ela não estiver de acordo com as regras léxicas, sintáticas e semânticas da linguagem. No caso, nossa linguagem é o cálculo proposicional.

Neste ponto da prosa, precisamos destacar que a linguagem da lógica proposicional não é regular e permite ambiguidades. Os símbolos $()$, parênteses, são usados para evitar possíveis ambiguidades isolando proposições compostas. **Não podemos encontrar a verdade de proposições ambíguas.** A leitora já sabe escrever proposições compostas em cálculo proposicional, agora pode praticar um pouco.

Exercícios

Crie representações lógicas para as seguintes sentenças caso isso seja possível.

a) Lima não está na Itália e Paris está na França.

b) Sandra é morena logo é bonita.

c) Vou de ônibus ou a pé.

d) Aviões voam só e somente se tiverem asas.

e) Nádia não é romena.

f) Janaína comprou um carro e um apartamento.

g) Quem compra carro e apartamento tem dinheiro.

Já sabemos usar as variáveis proposicionais e os parênteses, nosso próximo passo é entender os operadores $\land, \lor, \neg, \rightarrow$ *e* $\leftrightarrow$, não necessariamente nesta ordem. Mas, antes disso uma palavrinha sobre Tabelas verdade.

3.1 Tabelas verdade

As tabelas verdade são representações gráficas criadas para permitir a visualização e consequente análise de todas as proposições em uma determinada fórmula lógica. A criação das tabelas verdade é creditada a ***Ludwig Wittgenstein*** (1889 – 1951) que, na página 34 do seu livro “*Some Remarks on Logical Form*”[5], escreveu *“... e podemos representar o produto p e q da seguinte forma...”* e colocou a imagem que pode ser vista na Figura 3.2.

Nesta representação de uma conjunção, ao relacionar todos os estados possíveis relativos as proposições envolvidas em uma conjunção, Wittgenstein,

p	q	
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Figura 3-1 - Tabela verdade de Wittgenstein para uma conjunção (WITTGENSTEIN, 1929).

[5] Em tradução livre: algumas observações sobre a forma da lógica.

criou um dos aparelhos cognitivos mais importantes para o entendimento das fórmulas proposicionais. A álgebra que Boole desenvolveu, tão elegante e simples, se torna uma ferramenta eficiente de análise lógica. Como disse antes, tão simples e eficiente que acaba por se tornar a base de toda a eletrônica digital e computação que movimenta este começo de Século XXI.

A cada linha da tabela verdade, onde avaliamos o resultado da operação de acordo com os valores das proposições operandos, damos o nome de interpretação.

No caso da tabela apresentada na Figura 3.1, Wittgenstein, listou as quatro interpretações possíveis da operação de conjunção. A leitora há de lembrar que vimos a negação ($\neg$), a conjunção ($\wedge$), a disjunção ($\vee$), a operação condicional, ou implicação ($\Rightarrow$) e a bicondicional, ou implicação dupla ($\Leftrightarrow$). Vimos estas operações de forma despretensiosa. Agora, podemos nos aprofundar na linguagem formal da lógica matemática. Para tanto, teremos que voltar e ver cada uma destas operações, sua relação com a teoria dos conjuntos e com a eletrônica e as suas Tabelas Verdade. Antes, contudo, vamos juntos observar que estas operações transformam proposições atômicas em proposições compostas de tal forma que:

O valor lógico de uma proposição composta depende unicamente dos valores lógicos as proposições atômicas que a formam.

3.2 Negação $\neg$

Usamos o operador de negação para transformar uma proposição verdadeira em falsa e vice-versa. Fazemos isso cotidianamente. Aqui, cabe uma ressalva: a negação pode negar a própria negação. Isto quer dizer que mesmo sendo um operador unário, nada impede que este operador possa ser aplicado n vezes ao mesmo operando. Como pode ser visto no Exemplo 3.4.

Exemplo 3.4: negação em forma sentencial e proposicional.

1. $\boldsymbol{p}$: Beatriz é alta.
2. $\neg\boldsymbol{p}$: Beatriz não é alta.
3. $\neg\neg\boldsymbol{p}$: Beatriz é alta.
4. $\boldsymbol{q}$: O papa não é francês.

5. $\neg q$: O papa é francês

É preciso ter muito cuidado ao observar as sentenças negativas já que elas podem ter diversas formas sintáticas equivalentes no português, como falado no Brasil, o que pode ser visto no Exemplo 3.5:

Exemplo 3.5: diversas formas sentenciais para a negação.

1. $\boldsymbol{p}$: Lógica não é fácil.
2. $\boldsymbol{q}$: Não é verdade que lógica é difícil.
3. $\boldsymbol{r}$: É falso que Beatriz é alta.

Wittgenstein criou as Tabelas Verdade e eu lhe disse que esta era uma importante ferramenta cognitiva para a análise de fórmulas proposicionais então (olha uma implicação aqui!) vamos começar a usar as Tabelas Verdade pela mais simples de todas: a Tabela Verdade da Negação, que pode ser vista na Tabela 3.1.

Cálculo Proposicional		Álgebra Booleana	
p	$\neg p$	P	$\bar{P}$
T	F	1	0
F	T	0	1

Tabela 3.1 - Tabela Verdade da negação em notação do cálculo proposicional e da Álgebra Booleana.

Existe uma relação muito próxima entre a lógica matemática e a teoria dos conjuntos. Na teoria dos conjuntos a negação é representada de forma indireta pelo símbolo $\notin$ de tal forma que a sentença $a\ pertence\ ao\ conjunto\ L$ é representada por $a \in L$, a negação desta proposição será dada por $a \notin L$ e deve lida como $a\ não\ pertence\ ao\ conjunto\ L$. O diagrama de Venn para esta operação pode ser visto na Figura 3.3.

A aplicação do cálculo proposicional na eletrônica, primeiro com relés e válvulas e finalmente com transistores, levou a criação de circuitos eletrônicos para a aplicação de operações lógicas em grande escala culminando nos

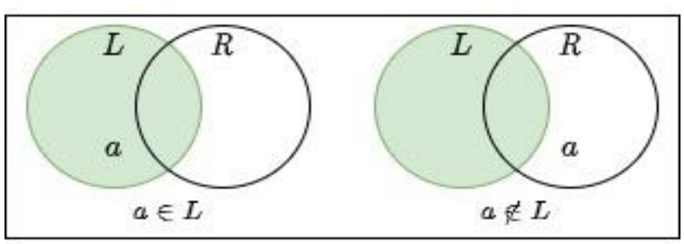


Figura 3-2 - Diagrama de Venn da negação representada na teoria dos conjuntos

microprocessadores que movimentam toda a economia mundial. Estes circuitos possuem uma representação gráfica especial para as operações lógicas se são conhecidos como portas lógicas.

Em Álgebra Booleana, aplicada a eletrônica, representamos a negação pelo símbolo de uma proposição em letra maiúscula com uma barra horizontal, $\overline{P}$, que se lê: negação de P ou P barrado. A implementação eletrônica da operação de negação é realizada pelo circuito inversor, ou *inverter* em inglês, que pode ser visto na representação gráfica da porta lógica inversora na Figura 3.3.2.

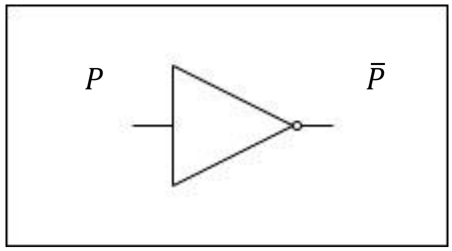


Figura 3-3 - Símbolo do inversor em circuitos lógicos. Fonte: o autor (2020)

Voltaremos a negação, assim que revisarmos as cinco operações do cálculo proposicional. Uma já foi, faltam quatro.

3.3 Conjunção $\wedge$

A conjunção representada pelo símbolo $\wedge$, inicialmente era chamada de produto lógico. A conjunção representa logicamente a existência do conectivo E, AND em inglês, ligando duas proposições atômicas e criando uma proposição complexa. A leitora precisa lembrar que a conjunção é uma operação binária. Todas as conjunções terão dois, e somente dois, operados. A conjunção ligará sempre duas proposições.

Todas as sentenças onde existe o conectivo E, e todas as sentenças com sintaxe diferente, mas mesma semântica, representam uma proposição conjuntiva, ou simplesmente uma conjunção. No Exemplo 3.4 podemos ver algumas conjunções.

Exemplo 3.4: conjunções com conjunção não explicita pelo conectivo E

1. $\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda, o quadrado não.
2. $\boldsymbol{q}$: O Papa não é pop e Zico não é paulista.
3. $\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta e $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida.

É preciso ter muito cuidado com a linguagem natural na hora de interpretar seu sentido para inferir as fórmulas lógicas equivalentes. No

Exemplo 3.5 podemos dividir cada uma das proposições em outras duas e representá-las por meio da operação conjunção.

Exemplo 3.5: aplicação da conjunção

1.	$\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda e $\boldsymbol{q}$: o quadrado não.	$\boldsymbol{p \wedge q}$
2.	$\boldsymbol{r}$: O Papa não é pop e $\boldsymbol{s}$: Zico não é paulista.	$\boldsymbol{r \wedge s}$
3.	$\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta e $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida.	$\boldsymbol{t \wedge u}$

A Tabela Verdade da conjunção pode ser vista na Tabela 3.2.

Cálculo Proposicional				Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{p}$	q	$p \wedge p$		$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$P \cdot Q$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$		0	0	**0**
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$		0	1	**0**
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$		1	0	**0**
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$		1	1	**1**

Tabela 3.2 - Tabela Verdade da operação conjunção em cálculo proposicional e em Álgebra Booleana.

Observe a diferença entre as práticas adotadas nas duas formas matemáticas da Tabela Verdade desta mesma operação lógica. Enquanto em cálculo proposicional começamos a tabela com os valores verdadeiros, em Álgebra Booleana, começamos a tabela com os valores falsos. Nos dois casos, a operação conjunção resultará em um resultado verdadeiro (T), se, e somente se, as duas proposições operandos forem verdadeiras.

Uma herança dos tempos passados quando a conjunção era chamada de produto lógico, pode ser vista na representação desta operação na Álgebra Booleana, ainda hoje, usamos o símbolo · para representar a conjunção, para lembrar a leitora, este é o símbolo utilizado para representar o produto escalar. O Exemplo 3.6 apresenta casos de conjunção.

Exemplo 3.6: sentenças exemplos de conjunção em cálculo proposicional

			Resultado
1.	$\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda **e** $\boldsymbol{q}$: o quadrado não.	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{T}$
2.	$\boldsymbol{r}$: O Papa não é pop **e** $\boldsymbol{s}$: Zico não é paulista.	$\boldsymbol{r \wedge s}$	$\boldsymbol{F}$
3.	$\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta **e** $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida.	$\boldsymbol{t \wedge u}$	?

No Exemplo 3.6.1, a verdade é clara e indiscutível, no Exemplo 3.6.2, podemos discutir se o Papa é pop, ou não. Entretanto, com certeza, Zico não é paulista e basta uma proposição falsa para definir a verdade da conjunção. Por fim, no Exemplo 3.6.3, não temos como definir o resultado da conjunção simplesmente porque faltam as informações necessárias para definir se uma, ou as duas, proposições são verdadeiras. Ainda que, tanto a sentença quanto a proposição estejam corretamente formatadas, não temos como avaliar a verdade da conjunção.

A conjunção também tem representação na teoria dos conjuntos e pode ser representada pela interseção entre dois conjuntos $P \cap Q$ e pode ser vista no Diagrama de Venn apresentado na Figura 3.4.1.

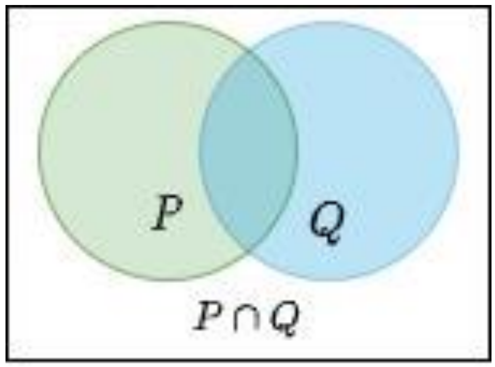


Figura 3-4 - Diagrama de Venn da conjunção. Fonte: o autor (2020).

Na eletrônica o circuito que implementa a conjunção é a porta lógica AND que pode ser vista na Figura 3.4.2.

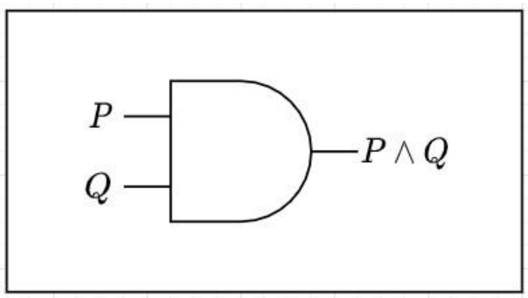


Figura 3-5 - Porta And, implementação da operação conjunção. Fonte: o autor (2020)

Formalmente analisamos as conjunções buscando a função verdade $V()$ de cada um dos operandos. Como pode ser visto nos Exemplos 3.7, 3.8 e 3.9, onde uso o símbolo matemático $\therefore$ apenas para indicar a relação entre a aplicação das funções verdade em cada passo na busca da verdade da conjunção.

Exemplo 3.7: exemplo de busca da verdade para a conjunção

		Resultado	
1.	Pelé praticava Futebol e Ayrton Sena automobilismo.		
	$\boldsymbol{p}$: Pelé praticava Futebol	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: Ayrton Sena praticava automobilismo.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$

2. $\boldsymbol{V(p \wedge q) \therefore V(p) \wedge V(q) \therefore T \wedge T \therefore V(p \wedge q) \therefore T}$ $\boldsymbol{V(p \wedge q)}$ $\boldsymbol{T}$

Pelé praticava Futebol e Ayrton Sena automobilismo, é uma proposição verdadeira

A última linha do Exemplo 3.7 (3.7.2) pode ser lida como: a verdade da conjunção entre p e q é igual a verdade de p em conjunção com a verdade de q, como as duas proposições são verdadeiras faremos a conjunção entre duas verdades de tal forma que a conjunção entre p e q é verdadeira.

Exemplo 3.8: exemplo de busca da verdade para a conjunção

			Resultado
1.	Brasília é a capital do Brasil e da Argentina.		
	$\boldsymbol{p}$: Brasília é a capital do Brasil.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: Brasília é a capital da Argentina.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$
2.	$\boldsymbol{V(p \wedge q) \therefore V(p) \wedge V(q) \therefore T \wedge F \therefore V(p \wedge q) \therefore F}$	$\boldsymbol{V(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{F}$
	Brasília é a capital do Brasil e da Argentina, é uma preposição falsa.		

Exemplo 3.9: exemplo de busca da verdade para a conjunção

			Resultado
1.	Peru fica na Europa e é um país.		
	$\boldsymbol{p}$: Peru fica na Europa.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: Peru é um país.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$
2.	$\boldsymbol{V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge T = V(p \wedge q) = F}$	$\boldsymbol{V(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{F}$
	Peru fica na Europa e é um país, é uma proposição falsa.		

Assim como a negação, a conjunção tem algumas propriedades bem interessantes que deixaremos para discutir adiante. Depois que passarmos por todas as cinco operações do cálculo proposicional. Faltam duas.

3.4 Disjunção ∨

A disjunção, operação proposicional que representa o conectivo Ou, *OR* em inglês, é representada pelo símbolo ∨ do alfabeto Σ_{CP} que definimos anteriormente, foi inicialmente chamada de adição lógica. A disjunção é uma operação binária, utiliza dois e apenas dois operandos e será verdadeira se qualquer um dos operandos for verdadeiro.

Em linguagem natural, como o português falado no Brasil, a conjunção é representada pela conjunção ou, e seus equivalentes semânticos. A leitora deve tomar cuidado aqui. Eu usei a expressão *palavra ou* porque gramaticalmente tanto o E, quanto o OU, em português, estão na classe gramatical conjunção. Também é preciso lembrar que, no português, falado e escrito no Brasil, as expressões, *isto é* e *ou seja*, são sinônimos de ou. E viva a língua portuguesa! O Exemplo 3.10 apresenta casos de disjunção.

Exemplo 3.10: exemplos de disjunção

			Resultado
1.	$\boldsymbol{p}$: Einstein era alemão ou $\boldsymbol{q}$: Einstein foi físico.	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{T}$
2.	$\boldsymbol{r}$: O Chile é um país, isto é, $\boldsymbol{s}$: não é uma cidade.	$\boldsymbol{r \wedge s}$	$\boldsymbol{F}$

A Tabela Verdade da disjunção pode ser vista na Tabela 3.

Cálculo Proposicional		
p	q	$p \wedge p$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$

Álgebra Booleana		
P	Q	$P + Q$
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**2**
1	1	**1**

Tabela 3.3 - Tabela Verdade da operação disjunção em cálculo proposicional e em Álgebra Booleana.

Novamente podemos observar as discrepâncias que existem entre a notação do cálculo proposicional e da Álgebra Booleana. Tanto a ordem de distribuição dos estados possíveis quanto o uso do símbolo $+$. O uso do símbolo $+$ persistiu até os primeiros anos do século XX, mesmo no cálculo proposicional, quando esta operação era chamada de adição lógica. A relação entre a disjunção e a teoria dos conjuntos pode ser vista na Figura 3.5.1.

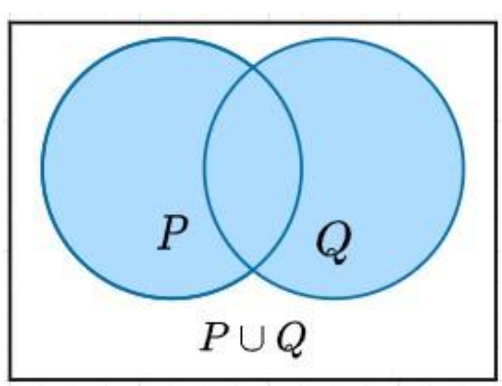


Figura 3-6 - Diagrama de Venn da disjunção na teoria dos conjuntos

A disjunção é representada nos circuitos eletrônicos pela porta OU, OR em inglês que pode ser vista na Figura 3.5.2.

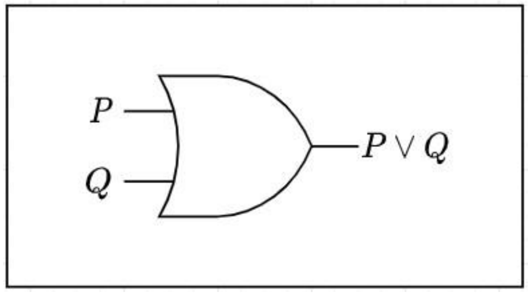


Figura 3-7 - Porta OR representação da disjunção em circuitos eletrônicos.

A descoberta da verdade, por meio da função verdade $V()$ de uma disjunção pode ser encontrada com a análise de cada uma das proposições que compõem o conjunto de operandos. Seguindo o mesmo padrão de pensamento que usamos para a conjunção, e disjunção. Entretanto, lembre-se no caso da implicação um operando é a hipótese e o outro a conclusão. O uso da implicação pode ser visto no Exemplo 3,10.

Exemplo 3.11 disjunção

			Resultado
1.	Homens são mortais ou faz sol a noite.		
	$\boldsymbol{p}$: Homens são mortais.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: Faz sol a noite.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$
2.	$\boldsymbol{V(p \vee q) \therefore V(p) \vee V(q) \therefore T \vee F \therefore\ V(p \vee q) \therefore V}$	$\boldsymbol{V(p \vee q)}$	$\boldsymbol{T}$

Homens são mortais ou faz sol à noite, é uma preposição verdadeira.

O mesmo que se passou com a negação e a conjunção, se dá com a disjunção. Vamos analisar as propriedades da disjunção assim que passarmos por todas as cinco operações do cálculo proposicional. Faltam duas.

3.5 Condicional, ou implicação $\rightarrow$

Chamaremos de condicional qualquer sentença que contenha o conectivo *se..então*, e a representaremos por $\rightarrow$. As proposições na forma condicional, ou de implicação, ou ainda, de implicação material para evitar qualquer confusão com a inferência que veremos no futuro. As proposições condicionais, serão representadas por representadas por $p \rightarrow q$, onde p será chamada de hipótese e q é chamada de conclusão.

Uma condicional será falsa se, e somente se, q for falso. Ou seja, a condicional será falsa se a hipótese p implicar em uma falsidade.

A implicação é a declaração mais comum na matemática e se destaca entre aquelas que são mais mal entendidas. Para não fugir dos gregos, vamos voltar a ***Pitágoras*** que viveu nos tempos de Sócrates, professor de Platão, que por sua vez foi professor de Aristóteles e, parece que estou recitando uma descendência ***Klingon***.

Se a amável leitora tomar o cuidado de pedir para qualquer aluno do ciclo médio de ensino declarar o Teorema de Pitágoras ouvirá, quase certamente, que $x^2 + y^2 = z^2$. O que soa correto, parece correto, mas está errado. Esta declaração é falsa. Caso contrário ela teria que ser verdadeira para qualquer valor de x, y e z. Esta equação é falsa, por exemplo para qualquer $x = y = z$. Uma forma correta de enunciar este teorema seria o famoso:

A hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

De fato, poderíamos encontrar outras fórmulas de declarar este teorema, mas como estamos preocupados com a forma e com a lógica, vou tentar uma forma um pouco mais detalhada:

Se x e y são os lados de um triângulo retângulo com hipotenusa z, então $x^2 + y^2 = z^2$ (LEVIN, 2019).

Parece pouco importante, mas é justamente a correção da declaração que permite inferir sua verdade ou falsidade. A leitora poderia lembrar que lá no final dos anos 1600, ***Leibnitz*** foi estudar lógica na esperança que a comprovação da verdade se transformasse em uma ferramenta para a solução de conflitos, sem a necessidade de gritos, armas e mortes.

A forma correta de descrever um teorema simples como o de Pitágoras é importante. Principalmente porque, neste caso, a forma correta demonstra a importância da implicação.

A Tabela Verdade da operação condicional pode ser vista na Tabela 3.4.

Cálculo Proposicional		
$\boldsymbol{p}$	q	$p \rightarrow q$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{T}$

Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$P \rightarrow Q$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Tabela 3.4 - Tabela Verdade do operador condicional - implicação - em cálculo proposicional.

A forma mais simples de entender a implicação é considerar que ela representa um contrato, ou uma promessa. À lógica interessa que esta promessa seja verdadeira, ou falsa, para que possa ser considerada uma implicação. Considere, por exemplo, que você disse ao seu filho:

Se tirar 10 na prova, lhe darei R$1.000,00.

Tendo feito tal sandice, a leitora terá que lidar com algumas hipóteses. Considere, quer representaremos esta promessa por duas proposições: p: tirar 10 na prova e q: lhe darei R$1.000,00. A proposição será verdadeira se você cumprir a promessa. Caso contrário será falsa.

Primeiro Suponha que seu filho tirou 10 na prova, então $p = V$ *e você mantenho a promessa, logo* $q = V$. *A proposição é verdadeira.*

Considere agora que seu filho tirou 10 na prova, então $p = V$ *e você não cumpro a promessa, logo* $q = F$. *A proposição é falsa.*

Suponha que seu filho tirou 8 na prova, e, ainda assim, você lhe dá os R$ 1000,00, $p = F$ *e* $q = V$*, mesmo que a hipótese seja falsa, neste caso, a conclusão é verdadeira e a promessa foi mantida. A proposição é verdadeira.*

Por fim, suponha que seu filho tirou 7 e você não paga os R$1.000,00, neste caso, $p = F$ *e* $q = F$ *a proposição ainda é verdadeira porque a promessa não foi quebrada. Você não precisa pagar o valor combinado.*

Na teoria dos conjuntos a implicação pode ser representada pelo Diagrama de Venn apresentado na Figura 3.6.1.

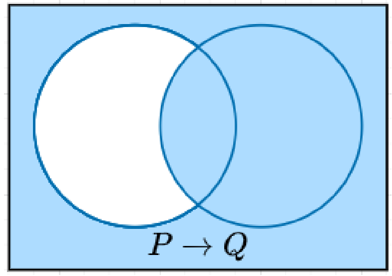


Figura 3-8 - Implicação representada no diagrama de Venn

Na eletrônica não temos uma porta lógica exclusiva para representar a implicação, mas podemos fazer uma combinação de portas para implementar a mesma lógica apresentada na Tabela Verdade 3.4. A representação gráfica deste circuito pode ser vista na Figura 3.6.2.

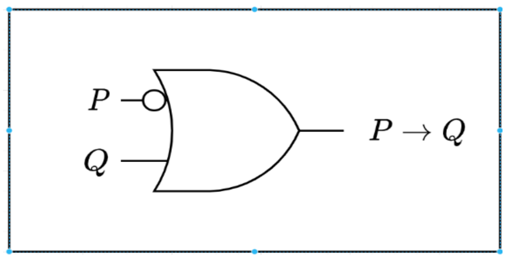


Figura 3-9 - Combinação de portas lógicas, inversor e ou, criando implicação em circuitos eletrônicos.

Muito, muito importante. A leitora não deve esquecer que não estamos falando de consequência. Estamos falando de conclusão. O operador condicional é apenas um conectivo lógico e alguns argumentos podem não fazer sentido e ainda assim serem logicamente corretos. O exemplo 3.10 mostra o uso da função verdade para a busca da verdade na implicação

Exemplo 3.12: busca da verdade em implicação

		Resultado	
	$\boldsymbol{p}$: Alagoas está na região sul.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: Minas gerais está na região norte.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$
1.	$\boldsymbol{V(p \to q) \therefore V(p) \to V(q) \therefore T \to T \therefore V(p \to q) \therefore T}$	$\boldsymbol{V(p \to q)}$	$\boldsymbol{T}$

Alagoas está na região sul então Minas Gerais está na região norte.

A implicação pode ter diversas formas sintáticas na língua portuguesa, como falada e escrita no Brasil como pode ser visto nas seguintes sentenças:

a) Se chove, fico molhado;

b) Quando chove, fico molhado;

c) Chover implica ficar molhado;

d) Toda vez que chove, fico molhado;

e) Chover é condição suficiente para fico molhado;

f) Ficar molhado é condição necessária para chover;

g) Chover é uma condição para ficar molhado.

A implicação tem valor inestimável nos paradigmas de programação procedural, estruturado e orientado a objetos é esta estrutura lógica que define o comportamento do artefato de código para a tomada de decisão no fluxo de comandos chamado de *"if..them..else"*. Não é sem motivo que esta estrutura seja chamada de condicional.

Que soem os tambores! Agora só falta uma operação do cálculo proposicional.

3.6 Bicondicional ou implicação dupla ↔

Chamamos de bicondicional, ou implicação dupla, a toda sentença que utilize o conectivo se, e somente se. A implicação dupla é representada por ↔. Uma proposição composta bicondicional será verdadeira se os dois operadores forem verdadeiros e se os dois operadores forem falsos. Representa as sentenças que usam, ou podem ser resumidas ao uso do conectivo *se e somente se*.

A forma simplificada de memorizar a ação da operação de implicação dupla se explicita na frase: **os dois ou nenhum**. Ou os dois operandos são verdadeiros ou nenhum é verdadeiro. Nos dois casos a proposição composta representada pela implicação dupla será verdadeira.

A Tabela Verdade da operação bicondicional pode ser vista na Tabela 3.7.

Cálculo Proposicional		
p	q	$p \leftrightarrow q$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{T}$

Álgebra Booleana		
P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Tabela 3.7 - Tabela Verdade do operador bicondicional em cálculo proposicional e Álgebra Booleana.

A implicação dupla não foge à regra. Existem várias estruturas sintáticas que representam esta construção lógica. Como pode ser visto no Exemplo 3.10

Exemplo 3.13: busca da verdade em implicação sentencial.

		Resultado
$\boldsymbol{p}$: Há fogo.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{q}$: há fumança.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$

1. $\boldsymbol{V(p \leftrightarrow q) \therefore V(p) \leftrightarrow V(q) \therefore T \leftrightarrow T \therefore\ V(p \leftrightarrow q) \therefore T \quad V(p \rightarrow q) \qquad T}$

O haver fogo é condição suficiente e necessária para que haja fumaça.

Esta relação acontece sempre que p é uma condição suficiente para q e, q é uma condição necessária para p.

A representação da implicação dupla com teoria dos conjuntos pode ser vista no diagrama de Venn apresentado na Figura 3.7.1.

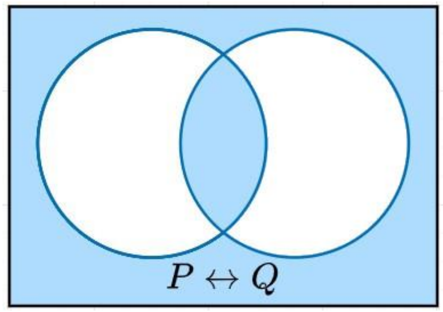


Figura 3-10 - Diagrama de Venn representando o operador bicondicional

No caso da eletrônica a implicação dupla é representada pela porta XNOR que pode ser vista na Figura 3.7.2.

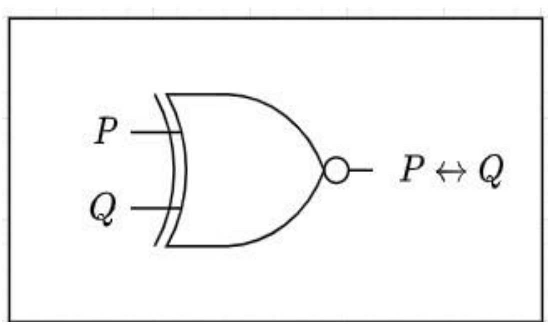


Figura 3-11 - Porta XNOR que representa a implicação dupla em circuitos eletrônicos.

Exercícios

Considerando as sentenças a seguir, marque aquelas que são proposições atômicas, ou simples, e compostas. Nos dois casos, represente estas sentenças de forma da lógica proposicional.

a) Eu estudo informática;

b) Se a > 0 então a é um inteiro positivo.

c) Flamengo é o melhor time do mundo.

d) Está frio, mas casa não está gelada.

e) João trabalha ou estuda.

f) O ar-condicionado ser consertado é suficiente para ser ligado.
g) Python é uma linguagem de programação.
h) Se o cão está latindo, o cão está na casa.
i) O gato não subiu na árvore.
j) Não é o caso que o Brasil seja pequeno.
k) Sandra não mente se a pergunta for de matemática.
l) Se o aluno estudar então ele não irá ficar reprovado.
m) Flamengo é campeão e Vasco é segundo colocado.
n) Ana não é estudiosa.
o) Amanda trabalha ou estuda.

4 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES LÓGICAS

Para estudar as propriedades dos operadores precisamos definir a equivalência entre duas fórmulas que será representada pelo símbolo $\equiv$. Observe que vamos usar este símbolo apenas para a definir as propriedades das operações e que ele não faz parte do alfabeto das Fórmulas Bem Formadas. Pelo menos, não por enquanto.

Dizemos que $P \equiv Q$ se a verdade de P e Q forem as mesmas. De tal forma que:

$$(se\ V(P) = V(Q) = T \therefore P \equiv Q) \vee (se\ V(P) = V(Q) = F \therefore P \equiv Q)$$

Agora podemos ver as propriedades de cada uma das operações lógicas.

4.1 Propriedades da Negação $\neg$

A negação de p é definida de tal forma que se $v(p) \equiv T$ então a $v(\neg p) \equiv F$ e, da mesma forma se $v(p) \equiv F$ então a $v(\neg p) \equiv T$. A negação pode ser representada pela Tabela Verdade 4.1-1.

p	$\neg p$
T	F
F	T

Tabela 4.1-1: tabela verdade da negação

Podemos provar que a negação possui as seguintes propriedades:

1. Dupla negação: A negação de uma negação é a verdade original. De tal forma que $\neg\neg P \equiv P$. Que pode ser representado na Tabela Verdade 4.1-2.

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
T	F	T
F	T	F

Tabela 4.1-2 - Dupla negação.

2. Distributividade: a negação é distributiva tanto em relação a conjunção ($\wedge$) quanto em relação a disjunção ($\vee$), de tal forma:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

A propriedade distributiva da negação pode ser provada por meio das Tabelas Verdade 4.1.3 e 4.1.4:

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \wedge \neg q)$
T	*T*	*T*	***F***	*F*	*F*	***F***
T	*F*	*T*	***F***	*F*	*T*	***F***
F	*T*	*T*	***F***	*T*	*F*	***F***
F	*F*	*F*	***T***	*T*	*T*	***T***

Tabela 4.1-3 - distributividade da negação sobre a disjunção

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
T	*T*	*T*	***T***	*F*	*F*	***T***
T	*F*	*F*	***T***	*F*	*T*	***T***
F	*T*	*F*	***T***	*T*	*F*	***T***
F	*F*	*F*	***F***	*T*	*T*	***F***

Tabela 4.1-4 - distributividade da negação sobre a conjunção.

Esta distributividade da negação sobre a conjunção e disjunção é conhecida como Teorema de De Morgan, em homenagem a ***Augustus De Morgan***. Ainda que Aristóteles tenha feito considerações sobre esta propriedade nos seus tratados. Estas relações foram nomeadas em homenagem a De Morgan. De Morgan, contemporâneo e amigo de Boole foi um dos primeiros a comentar os trabalhos de Boole e foi o primeiro a publicar a prova lógica desta verdade usando a Álgebra de Boole.

4.2 Propriedades da conjunção ($\wedge$)

A conjunção entre p e q representada por $p \wedge q$, que se lê $p\ e\ q$, é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \wedge q) \equiv T$, se e somente se $p \equiv T$ e $q \equiv T$. Ou em outras palavras a conjunção só é verdadeira se p e q forem verdadeiros. A conjunção apresenta as seguintes propriedades:

1. Comutativa: $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$;

p	q	$(p \wedge q)$	$(q \wedge p)$
T	*T*	***T***	***T***
T	*F*	***F***	***F***
F	*T*	***F***	***F***
F	*F*	***F***	***F***

Tabela 4.2-1- a conjunção é comutativa

2. Associativa: $r \wedge (p \wedge q) \equiv (r \wedge p) \wedge q$;

p	q	r	$(p \wedge q)$	$r \wedge (q \wedge p)$	$(r \wedge p)$	$(r \wedge p) \wedge q$
T	*T*	*T*	*T*	***T***	*T*	***T***
T	*T*	*F*	*T*	***F***	*F*	***F***
T	*T*	*T*	*T*	***T***	*T*	***T***
T	*F*	*F*	*F*	***F***	*F*	***F***
F	*T*	*T*	*F*	***F***	*F*	***F***
F	*T*	*F*	*F*	***F***	*F*	***F***

F	F	T	F	**F**	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	**F**

Tabela 4.2-2 - propriedade associativa da conjunção

3. Distributiva:

a) Conjunção sobre a conjunção: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$

p	q	r	$(q \wedge r)$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	T	F	F	**F**	T	F	**F**
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	F	F	F	**F**	F	F	**F**
F	T	T	T	**F**	F	F	**F**
F	T	F	F	**F**	F	F	**F**
F	F	T	F	**F**	F	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

Tabela 4.2-3 - distribuição da conjunção sobre a conjunção

b) Conjunção sobre a disjunção: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	T	F	T	**T**	T	F	**T**
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	F	F	F	**F**	F	F	**F**
F	T	T	T	**F**	F	F	**F**
F	T	F	T	**F**	F	F	**F**
F	F	T	T	**F**	F	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

Tabela 4.2-4 - distribuição da conjunção sobre a disjunção

c) Idempotência: $p \wedge p \equiv p$

4.3 Propriedades da disjunção $\vee$

A disjunção entre p e q representada por $p \vee q$, que se lê p *ou* q é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \vee q) \equiv T$, se e somente se $p \equiv T$ *ou* $q \equiv T$. Ou em outras palavras a disjunção é verdadeira se p ou q forem verdadeiros. A disjunção apresenta as seguintes propriedades:

1. Comutativa: $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

p	q	$(p \vee q)$	$(q \vee p)$
T	T	**T**	**T**
T	F	**T**	**T**
F	T	**T**	**T**
F	F	**F**	**F**

Tabela 4.3-1 - a disjunção é comutativa.

2. Associativa: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee r$
T	T	T	T	**T**	T	**T**

T	T	F	T	***T***	T	***T***
T	T	T	T	***T***	T	***T***
T	F	F	F	***T***	T	***T***
F	T	T	T	***T***	T	***T***
F	T	F	T	***T***	T	***T***
F	F	T	T	***T***	F	***T***
F	F	F	F	***F***	F	***F***

Tabela 4.3-2 - propriedade associativa da disjunção.

4. Distributiva:

d) Disjunção sobre a conjunção: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	r	$(\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$	$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$
T	T	T	T	***T***	T	T	***T***
T	T	F	F	***T***	T	T	***T***
T	T	T	T	***T***	T	T	***T***
T	F	F	F	***T***	T	T	***T***
F	T	T	T	***T***	T	T	***T***
F	T	F	F	***F***	T	F	***F***
F	F	T	F	***F***	F	T	***F***
F	F	F	F	***F***	F	F	***F***

Tabela 4.3-3 - distribuição da disjunção sobre a conjunção

e) Disjunção sobre a disjunção: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	r	$(\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$	$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$
T	T	T	T	***T***	T	T	***T***
T	T	F	T	***T***	T	T	***T***
T	T	T	T	***T***	T	T	***T***
T	F	F	F	***T***	T	T	***F***
F	T	T	T	***T***	T	T	***T***
F	T	F	T	***T***	T	F	***T***
F	F	T	T	***T***	F	T	***T***
F	F	F	F	***F***	F	F	***F***

Tabela 4.3-4 - distribuição da conjunção sobre a disjunção

f) Idempotência: $p \vee p \equiv p$

4.4 Propriedades da implicação →

A implicação, ou operação condicional de p em q representada por $p \rightarrow q$, que pode ser lida como "se p *então* q, é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \rightarrow q) \equiv F$, se e somente se $q \equiv F$. Ou em outras palavras a implicação de p em q é falsa se o consequente q for falsa, independentemente do valor do antecedente p. A Tabela Verdade da implicação pode ser vista em Tabela 4.4.1

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$
T	T	***T***
T	F	***F***
F	T	***T***

F	F	**T**

Tabela 4.4-1 – tabela verdade da implicação (condicional)

Com relação as propriedades podemos destacar que a implicação é:

1. Comutativa em relação ao antecedente: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	**T**	T	**T**
T	T	F	F	**F**	F	**F**
T	T	T	T	**T**	T	**T**
T	F	F	F	**F**	F	**F**
F	T	T	T	**T**	T	**T**
F	T	F	F	**F**	F	**F**
F	F	T	T	**T**	T	**T**
F	F	F	F	**F**	F	**F**

Tabela 4.4-2 – propriedade comutativa da implicação no antecedente.

2. Distributiva: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	T	F	F	**F**	T	F	**F**
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	F	F	F	**F**	F	F	**F**
F	T	T	T	**T**	T	T	**T**
F	T	F	F	**F**	T	F	**F**
F	F	T	T	**T**	F	T	**T**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

Tabela 4.4-3 – propriedade distributiva da implicação

3. Contrapositiva: $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	**T**	**T**
T	F	**F**	**F**
F	T	**T**	**T**
F	F	**T**	**T**

Tabela 4.4-4 – propriedade distributiva da implicação

A implicação também é transitiva: $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r)$; reflexiva: $p \rightarrow p$. Veremos estas propriedades com mais cuidado no futuro.

Podemos encontrar Fórmulas Bem Formadas equivalentes a implicação usando tanto a conjunção quanto a disjunção:

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

As relações entre a implicação, a conjunção e a disjunção podem ser vistas na Tabela 4.4.4.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	q	$(\neg p \vee q)$	p	$\neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$
T	T	**T**	F	T	**T**	T	F	**T**	F	F	**T**

T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.4-4 – equivalência da implicação e fórmulas conjuntiva e disjuntiva.

4.5 Propriedades da implicação dupla, ou bi condicionalidade ↔

Definimos a implicação dupla de p em q, $(p \leftrightarrow q)$ como sendo a operação lógica que será verdadeira se e somente se, $p \equiv q \equiv T \vee p \equiv q \equiv F$. Ou, a implicação dupla só será verdadeira se p e q forem verdadeiros ou se p e q forem falsos. A tabela verdade da implicação dupla pode ser vista na Tabela 4.5.1

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.5-1 – Tabela verdade da implicação dupla.

A implicação dupla em relação as suas propriedades é:

1. Comutativa $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$	$\boldsymbol{q \leftrightarrow p}$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.5-2 – Propriedade comutativa da implicação dupla.

2. Associativa: $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{(q \leftrightarrow r)}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)}$	$\boldsymbol{(p \leftrightarrow q)}$	$\boldsymbol{(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r}$
$\boldsymbol{T}$	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{T}$	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.5-3 – Propriedade associativa da implicação dupla.

Assim como a implicação, podemos encontrar fórmulas equivalentes a implicação dupla usando a conjunção e a disjunção, de tal forma que:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$$

4.6 Síntese de propriedades e equivalências.

Além das tabelas verdades, podemos utilizar as fórmulas de equivalência e as propriedades das operações que estudamos até o momento para encontrar o valor da função verdade de qualquer fórmula bem formada. Para facilitar Tabela 4.6.1 apresenta um resumo de todas as relações que vimos.

1.	$\neg\neg \boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{P}$	**11.**	$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \equiv (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$
2.	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	**12.**	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$
3.	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	**13.**	$p \vee p \equiv p$
4.	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	**14.**	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$
5.	$r \wedge (p \wedge q) \equiv (r \wedge p) \wedge q$	**15.**	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
6.	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$	**16.**	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$
7.	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	**17.**	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r)$
8.	$p \wedge p \equiv p$	**18.**	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$
9.	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	**19.**	$(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$
10.	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	**20.**	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

Tabela 4.6-1 - Resumo das propriedades e equivalências entre fórmulas proposicionais.

5 FÓRMULAS E A LINGUAGEM DA LÓGICA

A linguagem natural não parece ser uma boa ferramenta para a tomada de decisão a história está repleta de exemplos do uso impróprio da linguagem. Ao que parece a verdade se esconde atrás da linguagem o que parece implicar na necessidade de uma linguagem que não possa esconder a verdade. Ao contrário, uma linguagem que explicite a verdade. Aristóteles, Leibnitz, Boole, Wittgenstein, Russell e muitos outros que não citei neste livro, trabalharam, ao longo de 2300 anos para criar a linguagem da lógica. Ao que fosse simples, claro e objetivo. O resultado é o que chamamos de Fórmulas Bem Formadas, FBF em português e, WFF em inglês. Apenas as Fórmulas Bem Formadas são válidas no cálculo proposicional. Resta-nos apenas definir o que são Fórmulas Bem Formadas.

Toda linguagem começa com um alfabeto. Só para lembrar usamos, e usaremos por todo este livro o alfabeto $\Sigma_{CP} = \{p;\ q; r; s; t; T; F; \wedge; \vee; \neg; \rightarrow; \leftrightarrow; (;)\}$, que definimos anteriormente onde CP é a abreviação de cálculo proposicional. Dito isso:

As Fórmulas Bem Formadas são aquelas, e só aquelas, que são escritas de forma correta, usando apenas os símbolos definidos no Σ_{CP}.

Fórmulas Bem Formadas utilizam apenas as cinco operações básicas, apenas os símbolos do alfabeto Σ_{CP} e podem ser usadas para determinar a verdade de qualquer problema lógico no cálculo proposicional. O Exemplo 3.8 apresenta quatro Fórmulas Bem Formadas considerando que $P, Q, R\ e\ S$ representam Fórmulas Bem Formadas. Como pode ser visto no Exemplo 5.1.

Exemplo 5.1: Fórmulas Bem Formadas

a) $(\neg P)$
b) $(P \wedge Q)$
c) $(\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow (R \leftrightarrow S)))$
d) $((P \vee Q) \wedge ((\neg R) \leftrightarrow S))$

Usando toda a formalidade matemática para definir as Fórmulas Bem Formadas começaremos com analisando a aridade α dos operadores. Em matemática a aridade é um termo que expressa o número de operadores de uma determinada função ou operação. Para isso vamos definir o conjunto:

$$\mathbb{K} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

Finito, que contém todas as operações válidas no cálculo proposicional. Neste caso a aridade de cada operação será definida pela função:

$$\alpha = \mathbb{K} \to \mathbb{N}$$

Ou seja

$$\alpha(\neg) = 1;$$
$$\alpha(\wedge) = \alpha(\vee) = \alpha(\to) = \alpha(\leftrightarrow) = 2$$

Ainda precisamos considerar o conjunto $\mathbb{A}$ de todas as proposições atômicas possíveis de tal que:

$$\mathbb{A} = \{P, Q, R, S, \dots\}$$

De tal forma que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ sejam conjuntos disjuntos:

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{K} = \emptyset$$

De onde é possível extrapolar algumas regras:

1. uma proposição atômica P pertencente a $\mathbb{A}$ é uma fórmula bem formada;
2. se P é bem formada então $\neg P$ é uma fórmula bem formada;
3. se P e Q são bem formadas, então $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \to Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são bem formadas;
4. Se P é uma fórmula bem formada então (P) é uma fórmula bem formada.

O uso dos parênteses é necessário porque as fórmulas lógicas devem evitar qualquer tipo de ambiguidade. $(p \wedge q) \vee r$ tem um valor verdade $V()$ diferente de $p \wedge (q \vee r)$ e os parênteses ajudam a explicitar isso. É preciso tomar muito cuidado com o uso dos parênteses. Quando corretamente utilizados eles ajudam a encontrar a verdade de uma proposição composta, quando mal utilizados eles induzem o erro. Vamos representar por P e fórmula composta $(p \wedge q)$ e por R a fórmula atômica r. Sendo assim:

$$(p \wedge q) \vee r$$

Pode ser escrita:

$$P \vee R$$

E podemos notar que em $(p \wedge q) \vee r$ a operação principal é a disjunção $\vee$. Na outra fórmula, se representamos p por P e $(q \vee r)$ por Q teremos:

$$P \wedge Q$$

Neste caso a operação principal é ∧ a conjunção. Nos dois casos, e para falar a verdade, em qualquer expressão composta, podemos representar as Fórmulas Bem Formadas por um grafo, uma árvore cuja raiz é a operação principal. Como pode ser visto a Figura 5.1.

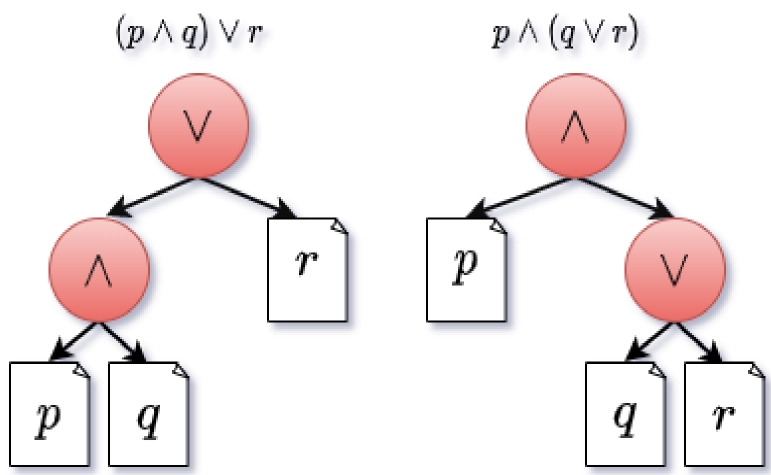


Figura 5.1 - Exemplos de árvores sintáticas criadas a partir de Fórmulas Bem Formadas.

Além dos parágrafos mudarem completamente o valor da função verdade da fórmula também determinam a ordem de resolução. Determinam como devemos montar o raciocínio que levará ao encontro da verdade. Uma vez que o grafo esteja montado podemos encontrar a verdade indo de baixo para cima, das folhas para a raiz encontrando a verdade de todas as fórmulas.

Para fazer a evolução manual das fórmulas em direção a verdade devemos obedecer a uma ordem de precedências: $\leftrightarrow, \rightarrow, \ \wedge\ e \vee, \ \neg$. Ou seja, a implicação dupla ($\leftrightarrow$), deve ser resolvida antes da implicação ($\rightarrow$), que por sua vez deve ser resolvida antes da conjunção ($\wedge$) ou da disjunção ($\vee$) e por fim, resolvemos as negações ($\neg$).

A ordem de precedência $\neg, \ \wedge, \ \vee, \leftrightarrow \rightarrow$ é uma convenção da linguagem que adotamos no cálculo proposicional.

Isso quer dizer que expressões sem nenhum parêntese como:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow r \vee s$$

Terão como raiz a implicação dupla. Se a leitora não estiver vendo a fórmula, podemos usar os parênteses para deixar claro e eliminar qualquer dúvida, como pode ser visto na Figura 5.2.

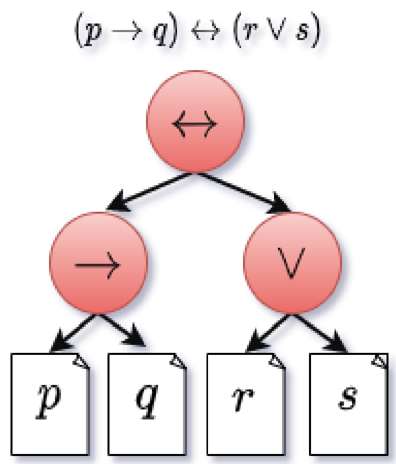


Figura 5-1 - Exemplo de fórmula interpretada segundo as procedências dos operadores.

A leitora deve compreender que quando determinei que seria uma implicação dupla estava levando em consideração apenas a fórmula, sem considerar sua origem. Se considerarmos as origens das proposições atômicas, podemos ter, com estes mesmos símbolos, fórmulas com outro sentido e outra verdade que deverão ser escritas com parênteses colocados em outros lugares.

Considere, por exemplo que, de fato, trata-se de uma disjunção entre a proposição s e o resultado da implicação dupla $p \to q \leftrightarrow r$. Neste caso, teríamos a fórmula e a árvore sintática apresentadas na Figura 5.3.

Assim a leitora já deve ter concluído que, caso não existam parênteses na fórmula, vamos organizá-la de acordo com a ordem de precedência $\leftrightarrow, \to, \wedge$ e $\vee$, $\neg$. Havendo parênteses, a estrutura da árvore sintática será dada de forma aninhada, do parêntese mais interno para o mais externo.

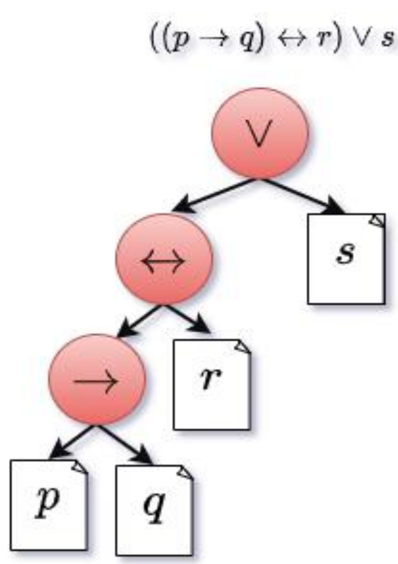


Figura 5-2 - O efeito dos parênteses na interpretação das fórmulas.

5.0 Exercícios

Considere as fórmulas a seguir e esquematize suas árvores sintáticas.

a) $p \lor q \land p \rightarrow r \lor q$;
b) $p \lor q \leftrightarrow r \rightarrow q$;
c) $p \lor q \lor r \lor s \rightarrow \neg p$;
d) $\neg p \land \neg\, q \rightarrow s$;
e) $s \rightarrow t \land q$.

5.1 Análise de proposições compostas

Ao longo do livro usamos o conceito de equivalência sem nenhuma formalidade, relaxadamente, sem nenhum compromisso. Pobre autor, pobre leitora. Em lógica, a formalidade é indispensável. Não só na construção das sentenças e preposições, mas também no processo de análise. E para começar a entender os processos de análise lógica, podemos partir da definição de equivalência lógica:

> *Dizemos que a fórmula P e equivalente a fórmula Q se, e somente se, cada valor lógico verdadeiro, $V(P) \equiv T$, que satisfaz P também satisfaz Q e cada valor lógico verdadeiro, $V(Q) \equiv T$, que satisfaz Q também satisfaz P*

A equivalência, como acabamos de definir, daremos o nome de equivalências tautológicas, ou equivalências lógicas. E, deste ponto em diante, já que definimos formalmente a equivalência tautológica, passaremos a utilizar o símbolo $\Leftrightarrow$ ou o símbolo $\vDash$ para indicar esta equivalência.

Com a noção de equivalência, as fórmulas e as propriedades vistas anteriormente, podemos analisar qualquer fórmula bem formada em busca da sua verdade para todas, e em cada uma, das interpretações possíveis. E, uma vez que esta verdade seja encontrada, para todas as interpretações possíveis de uma determinada fórmula, podemos encontrar outras fórmulas que sejam tautologicamente equivalentes.

> *É possível provar que todos os operadores binários podem ser definidos por fórmulas usando apenas os operadores $\neg$, $\land$, $\lor$ e $\rightarrow$.*

A Tabela 5.2.1 apresenta a construção da conjunção e da disjunção utilizando os outros operadores

p	q	$p \wedge q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$		p	q	$p \vee q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$		T	T	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{F}$		T	F	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$		F	T	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$		F	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 5.1-1 - Demonstração de equivalência entre disjunção e conjunção

A Tabela 5.2-1 mostra que $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q))$ e que $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q))$ o que permite a substituição das fórmulas por suas fórmulas equivalentes sem nenhum efeito sobre a verdade destas fórmulas sobre qualquer uma das suas interpretações. A Tabela 5.2-2 apresenta um resumo de algumas equivalências tautológicas notáveis.

Propriedade		
Comutatividade	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Distributividade	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identidade	$p \wedge T \Leftrightarrow p$	$p \vee F \Leftrightarrow p$
Negação	$\neg T \Leftrightarrow F$	$\neg F \Leftrightarrow T$
Negação	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$p \vee \neg p \Leftrightarrow T$
Dupla Negação	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	
Idempotente	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Tabela 5.1-2– Equivalências notáveis envolvendo conjunção, disjunção e negação

A partir da análise das equivalências tautológicas entre fórmulas diferentes podemos encontrar novas formas de representar as fórmulas lógicas. Isto é muito importante na criação de circuitos digitais. Veremos, por exemplo, que qualquer fórmula lógica pode ser representada utilizando apenas a negação da conjunção, ou a negação da disjunção. Estas negações são tão importantes que possuem identificadores próprios.

5.2 Representações equivalentes – formas normais

A ser escrito

5.3 Redução a Nand e Nor e simplificação de fórmulas

A ser escrito. Rever este título.

6 DEDUÇÃO E REGRAS DE INFERÊNCIA

"But a moment is a long time, and thought is a painful process."
(A.E.Houseman)

Chamaremos de Regra de Inferência a uma estrutura lógica que será utilizada para provar a validade de um argumento. Talvez os conceitos mais importantes que a leitora irá encontrar em todo o cálculo proposicional sejam as técnicas para a determinação da validade um argumento.

A determinação da validade de um argumento deve ser um conceito familiar a leitora. Desde a mais tenra idade, quando foi apresentada a matemática que a leitora está sujeita ao processo de validação de argumentos. Toda a geometria euclidiana, por exemplo, que a leitora aprendeu, se baseia na dedução de fórmulas a partir de outras fórmulas. Um método pouco formal de expressar a verdade por meio de sentenças que, a essa altura do livro, já deve estar provocando sorrisos na leitora que já deve ter relacionado estes processos, que chamaremos de dedutivos, as análises sentenciais que fizemos ao logo do livro até este ponto, e que não estão longe dos processos definidos há mais de 2000 anos na Grécia Antiga.

A Dedução é o processo de encontrar a verdade da conclusão de um argumento. A Inferência á a forma de dedução da verdade de um argumento que utiliza suas premissas para provar a conclusão.

Podemos encontrar a verdade de um argumento por dedução baseada em inferência e implicação. No momento, nos interessa a inferência, o método dedutivo baseado apenas nas regras do cálculo proposicional.

Um argumento é uma coleção de proposições onde uma é chamada de conclusão e todas as outras são chamadas de premissas.

Como disse anteriormente, um argumento é válido só, e somente só, suas premissas são válidas e a conclusão também. Se colocarmos isso em uma forma mais enfática poderemos dizer que os argumentos são válidos se for impossível que a conclusão seja falsa dado que as premissas são verdadeiras.

Argumento é uma coleção de premissas seguida de uma conclusão. Se as premissas são verdadeiras então a conclusão é verdadeira.

Vimos, ao longo do livro, que é possível determinar a função verdade $V()$, de uma determinada fórmula utilizando as Tabelas Verdade como ferramenta de análise para comprovar a validade de uma determinada premissa. As Tabelas Verdade reduzem a lógica a um processo mecânico, tedioso e repetitivo. Não resta nenhuma dúvida que apesar disto, as Tabelas Verdade são úteis, pelo menos até um certo ponto. Imagine o trabalho necessário para resolver uma tabela verdade para uma proposição representada por uma fórmula com oito variáveis e verá o que estou tentado dizer.

Enquanto estudávamos os operadores lógicos e as Fórmulas Bem Formadas, observamos as regras da implicação que, apenas por conveniência, reproduzo a seguir, na Tabela 6-1:

p	q	$p \to q$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{T}$

Tabela 5.3-1 - Tabela Verdade da Implicação

A leitora há de lembrar que ao estudarmos a implicação nos referimos as proposições da forma *se...então*. Que, não por coincidência representa a forma como devemos considerar os argumentos: *Se as premissas são verdadeiras, então a conclusão é verdadeira*. Neste ponto a leitora deve estar considerando que os argumentos, de alguma forma, são assemelhados as estruturas de implicação.

Esta analogia pode, e deve ser analisada com um pouco mais de cuidado. Observe a Tabela 6-1. A única interpretação em que a implicação é falsa é quando a consequência é falsa. Fui muito longe? Vamos ver a Tabela 6-1 com a análise de argumentos em mente. Se fizermos isso nosso p se torna a premissa, nosso q a consequência e, neste único caso, a conclusão $p \to q$ é falsa.

Também anteriormente, nos referimos a operação implicação como sendo a operação condicional. E usando a estrutura *se..então*. Poderíamos ler se q é falso então $p \to q$ é falso.

Este é um paralelo importante que podemos fazer entre a implicação e a validade dos argumentos. Mas, precisamos ter cuidado neste ponto. Muito cuidado.

Todo argumento pode ser expresso na forma de uma operação condicional, mas a operação condicional não é um argumento.

Este paralelo entre a operação de implicação, ou condicional, é importante, uma ferramenta indispensável para o entendimento da validade dos argumentos, mas não é um argumento em si. Assim, podemos voltar ao primeiro parágrafo desta seção: *um argumento é uma coleção de premissas seguidas de uma conclusão.*

Podemos representar o argumento na forma de implicação se transformarmos o antecedente, nosso p em uma conjunção do conjunto de premissas que estão expressas no argumento. E a conclusão do nosso argumento, no consequente da implicação, o nosso q. E é aqui que as coisas ficam realmente interessantes.

Como nenhum argumento será válido se suas premissas forem verdadeiras e a conclusão falsa, ou seja, não existem argumentos válidos com antecedente p verdadeiro e conclusão q falsa, podemos ver que a implicação que represente um argumento tem que ser, obrigatoriamente, uma tautologia. Então, podemos definir a validade de um argumento e aprimorar nossa definição.

Um argumento é uma coleção de premissas seguida de uma conclusão que será válido se, e somente se, a implicação que o represente, seja tautológica. Um argumento será válido em todas as interpretações onde tanto as premissas quanto a conclusão sejam verdadeiras.

E podemos usar a relação entre a implicação e os argumentos para verificar a validade de qualquer argumento. Talvez, esta seja a mais importante ferramenta de todo o processo de análise de argumentos.

Usando a implicação, um argumento será válido se a implicação proposicional que o representa for uma tautologia.

Imagino que a leitora precise de um exemplo sentencial para tornar as coisas mais claras e criar a cognição necessária a este entendimento. Neste caso considere a sentença. "*Se Marisa for a praia, encontrará Joana. Marisa foi a praia consequentemente encontrou Joana*" representada no Exemplo 6.1:

Exemplo 6.1: análise de argumentos

$p \rightarrow q$: Se Marisa for a praia, encontrará Joana.

p: Marisa foi a praia.

---

q: Encontrou Joana

Considerando que, temos duas premissas e que, caso tenhamos mais de uma premissa em um argumento devemos representá-las por uma conjunção, podemos colocar o argumento apresentado no Exemplo 6.1 com a fórmula:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

E, neste caso, teremos uma representação adequada a análise matemática da validade do argumento. Observe, contudo, que em se tratando de argumentos a representação será mais útil se usarmos a seguinte notação:

$$\frac{(p \rightarrow q);\ p}{q}$$

Que pode ser lido como *"dados p e $p \rightarrow q$ podemos inferir q"*. Esta é a forma mais importante de todo o processo de análise de argumentos, tão importante que não existe consenso entre os estudiosos da lógica se existem regras de inferência, ou apenas uma regra de inferência. A esta forma damos um nome específico *Modus Ponens*, uma abreviação da expressão em latim *Modus ponendo ponens* que pode ser traduzida para o português como *"o modo que afirma afirmando"*. Cuja origem remonta aos tempos de Aristóteles.

Este processo de dedução é fundamental para a criação da teoria matemática. A matemática dá pouca, ou nenhuma importância a fórmulas, bem formadas ou não, livres de contexto e, por outro lado, só existe graças ao poder da dedução lógica. Se voltarmos a Geometria Euclidiana, por exemplo, veremos que Euclides declarou 5 postulados, que neste livro tem o mesmo sentido de axioma, e deduziu a estrutura de toda geometria plana a partir das consequências lógicas da aplicação destes axiomas.

A leitora não deve se confundir com as palavras, axioma e postulado. Ao ler sobre Euclides, verá com mais frequência a palavra postulado. Para nosso intensão, as duas palavras são sinônimas. Rigidamente, postulado é algo que não precisa de comprovação, e axioma uma verdade absoluta. Há uma diferença entre os dois, para efeito de raciocínio lógico, tomada de decisão e consequência lógica, esta diferença é irrelevante.

Caso a leitora tenha esquecido, regras de inferência são a forma como chamaremos os processos matemáticos que usaremos para definir a validade de argumentos. Regras que irão determinar como uma premissa segue a outra e como este fluxo de conhecimento desagua em uma conclusão independente do conteúdo dos argumentos. Lembre-se, a forma, não o conteúdo, determina o processo lógico. Isso tudo, é claro, sobre um formalismo matemático que definiremos sobre a linguagem da lógica que estamos utilizando neste livro.

6.1 Definindo argumento, tese e teoria.

As palavras premissa, proposições e cláusula, que são usadas frequentemente no estudo da lógica, não são adequadas a formalização necessária aos processos de dedução. Usamos premissas e proposições ao longo de todo o livro e, provavelmente ainda vamos usar, mas vamos precisar definir axioma, para pode continuar a estudar inferência com o formalismo necessário.

Axioma é uma verdade incontestável. Uma premissa que não pode ser dividida e não pode ser esclarecida além da sua própria declaração.

Cabe aqui uma pequena ressalta, enquanto axiomas são verdades incontestáveis, postulados, são verdades aceitas, postulado é algo que não precisa de comprovação. A diferença é sutil e caberá a uma discussão filosófica. Aqui, como falei antes, os dois terão o mesmo sentido.

Verdades incontestáveis não existem no mundo real, muito menos no mundo sentencial. A necessidade de colocar um ponto, um limite na definição das premissas existe para que seja possível fazer a análise dos argumentos em um sistema fechado em si mesmo. A falta de um limite, um axioma pode levar a discussão da validade de cada premissa de forma recursiva indefinidamente. Para evitar isso, antes de começar qualquer processo de dedução precisamos definir os axiomas, as verdades que não podem ser contestadas e são inequivocamente aceitas no sistema criado para a validação do argumento. Assim, um argumento passa a ser uma coleção de axiomas que leva a uma conclusão que chamaremos de tese.

Um argumento é uma coleção de axiomas a partir dos quais é possível inferir uma tese.

Se cada axioma for representado pela letra p e nosso argumento for $\mathfrak{A}$ teremos:

$$\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}, p_n\}$$

Onde:

$$p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}} \vdash p_n$$

Que pode ser lido como, *"dados* $p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}$ *podemos deduzir* p_n*"* Ou, *"podemos inferir* e_n *a partir de* $p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}$*"*. Onde $p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}$, são os axiomas e e_n a tese, ou conclusão.

Este argumento será válido se, e somente se:

$$p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}} \Rightarrow p_n$$

Que se lê e_n é a consequência lógica de $p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}$. Como, graças a definição de argumento, a conclusão será verdadeira se todos os axiomas forem verdadeiros temos:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{\{\dots\}} \Rightarrow p_n$$

E esta definição é, obrigatoriamente uma tautologia. O que nos permite voltar a formalidade da matemática. Considere $\mathfrak{L}$ como sendo um conjunto de fórmulas que sejam fechadas em relação a uma determinada consequência $\mathfrak{C}$ dizemos que se $\mathfrak{L} \vDash \mathfrak{C}$ então $\mathfrak{C} \in \mathfrak{L}$. Chamamos de *teoria* ao conjunto de Fórmulas Bem Formadas fechadas em relação a uma consequência lógica $\mathfrak{C}$. E para entender um pouco mais este conceito precisamos definir fechamento.

Dizemos que um determinado conjunto é fechado em uma determinada operação se a aplicação desta operação a todos os membros do conjunto ainda resulte em um membro deste conjunto. Para ficar claro, tomemos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ este conjunto é fechado em relação à adição. Isto significa que posso aplicar a operação de adição a quaisquer dois membros deste conjunto e o resultado desta operação ainda será um número inteiro, elemento de $\mathbb{I}$.

Para desespero dos primeiros estudiosos da matemática, o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ não é fechado em relação a divisão. A aplicação da operação da divisão a elementos de $\mathbb{Z}$ pode resultar em um elemento de $\mathbb{I}$ ou em um elemento de $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais. Para piorar, alguns destes elementos, resultantes da aplicação da divisão sobre os elementos de $\mathbb{Z}$ fazem parte de um conjunto específico de números reais o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ que foram chamados assim, e mantidos ocultos por séculos, porque os estudiosos não conseguiam encontrar a consequência lógica que explicasse sua existência.

Ao conjunto de fórmulas de $\mathfrak{L}$ *tal que* $\mathfrak{L} \vDash \mathfrak{C}$ *e* $\mathfrak{C} \in \mathfrak{L}$ *damos o nome de teoria axiomática de* $\mathfrak{C}$ *e chamamos cada uma destas fórmulas de axioma de* $\mathfrak{L}$.

E eis aí o mistério da relação entre a lógica e a matemática.

As teorias são construídas a partir de um conjunto de axiomas e da dedução das suas consequências lógicas. É possível entender por que os conceitos de consequência lógica superam os conceitos de validade lógica. E porque Russell, e outros matemáticos do começo do Século XX cederam a tentação de provar toda a matemática a partir dos axiomas da Teoria dos Conjuntos. Se os axiomas da teoria dos conjuntos estivessem corretos, deveria haver um sistema dedutivo que puder ser estendido por toda a matemática. Infelizmente estes axiomas não estão corretos, e existem diversos paradoxos insolúveis. A leitora, se for mais ambiciosa que eu, deve saber que este é um problema que ainda está a procura de uma solução.

Não citei ***Euclides*** duas vezes de forma leviana. O primeiro exemplo de estudos de dedução está no *Organon*[6] de Aristóteles, mas é no trabalho de Euclides que encontramos a primeira aplicação real do processo de dedução a criação de uma teórica. Euclides parte de axiomas, que definem o ponto e a reta e constrói, com consequências lógicas a base de toda a ciência da geometria. O próximo passo na criação dos sistemas dedutivos foi dado por ***Gottlob Frege*** (1848–1925) em seu livro *Begriffsschrift*[7] (1879), cuja estrutura hoje está arcaica mas que iniciou o **cálculo predicativo** que veremos ainda neste livro.

No início do Século XX, ***David Hilbert*** rescreveu Os Elementos de Euclides sobre uma base matemática rígida e precisa. E ***Giuseppe Peano*** desenvolveu um sistema axiomático para a aritmética. Estes dois trabalhos talvez tenham servido de inspiração para Bertrand Russel e Alfred North Whitehead em seu livro *Principia Mathematica*. Mas, com certeza influenciaram David Hilbert and ***Wilhelm Ackermann*** (1896–1962) em seu livro *Principles of Mathematical Logic* (1928) o qual teve impacto direto nos trabalhos de ***Kurt Gödel*** (1906–1978), ***Alan Turing***, ***Stephen Cole Kleene*** e ***Alonzo Church*** na primeira metade do Século XX que fundamentaram, matematicamente, toda a computação como conhecemos hoje.

Figura 6-1 - David Hilbert, autor desconhecido (1970)

6.2 Formalização de teoria e prova

Neste livro vamos definir uma teoria $\mathfrak{T}$ que será a base do nosso sistema de dedução se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

[6] *Organon*, em tradução livre significa instrumento, órgão.

[7] Esta é uma palavra em alemão difícil de traduzir, o mais próximo seria linguagem para conceitos. Alguns autores brasileiros traduzem como ideagrama, representando uma linguagem para escrever ideias.

1. existe um alfabeto $\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Rightarrow, \vdash, \vDash, (,)\}$ fechado sob o fechamento de Kleene[8]. De tal forma que a combinação destes símbolos determine um conjunto $\mathcal{L}$ de fórmulas;
2. existe um subconjunto de $\mathcal{L}$, chamado de $\mathfrak{B}$, cujas fórmulas atendem as condições de serem classificadas como Fórmulas Bem Formadas, tal que $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \dots, \mathfrak{B}_n\}$; ;
3. existe um conjunto de Fórmulas Bem Formadas de $\mathcal{L}$ que serão classificados como os axiomas $e_1, e_2, e_3, e_{\{\dots\}}, e_n$ de $\mathcal{S}$ e, neste caso, $\mathcal{S}$ será chamada da Teoria Axiomática.
4. para cada conjunto de axiomas $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_{\{\dots\}}, e_n\}$ existirá um, e somente um, axioma e_n chamado de conclusão e $e_{\{n-1\}}$ axiomas chamados de hipóteses. De tal forma que a aridade de $\mathcal{A}$ será determinada por $n-1$.
5. existe um conjunto finito de relações $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \dots, \mathcal{R}_n\}$ entre as Fórmulas Bem Formadas $\mathfrak{B}$ que chamaremos de Regras de Inferência. De tal forma que, para cada $\mathcal{R}_i$ existe um subconjunto finito de $\mathfrak{B}$.

Nesta teoria definiremos uma prova em $\mathfrak{T}$ como sendo uma sequência finita de Fórmulas Bem Formadas $\mathfrak{B}$ de tal forma, que para cada conjunto de axiomas $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_{\{\dots\}}, e_n\}$ existe uma representação possível de e_i em $\mathfrak{B}$ e uma consequência lógica direta e_n que também pode ser representada inequivocamente por um item de $\mathfrak{B}$.

Em uma forma mais simples, chegamos à definição de prova, a partir da definição de cinco pressupostos matemáticos que definem uma teoria, nos quais definimos um alfabeto e com ele poderemos escrever Fórmulas Bem Formadas. Nesta teoria, representaremos argumentos como conjuntos de axiomas e axiomas por meio de Fórmulas Bem Formadas. De tal forma que a cada argumento válido existirá um conjunto de axiomas a partir dos quais podemos deduzir uma consequência lógica que também será representada por uma fórmula bem formada que, por sua vez, será escrita segundo os símbolos do alfabeto.

Na matemática, e nas ciências naturais, cada proposição de uma determinada teoria deve ser deduzida a partir de uma consequência lógica, ou matematicamente provada, o que,

[8] Não vou detalhar o fechamento de Kleene neste momento. Tudo que é necessário agora é saber que se trata de uma operação sobre conjuntos de símbolos que permite escrever *strings*, neste caso fórmulas com qualquer combinação dos símbolos do alfabeto, inclusive nenhuma combinação.

neste caso, também se origina na dedução de uma consequência lógica da teoria.

Cada, e qualquer teoria matemática está fundamentada sobre um conjunto de proposições interrelacionadas em o que chamamos de sistema axiomático. Estes axiomas nos permitem encontrar lemas, ou teoremas, pequenas conclusões lógicas em um processo dedutivo que podem ser utilizadas para compor o arcabouço de uma prova, pela substituição de provas conhecidas no processo dedutivo.

Lemas, ou teoremas, são as deduções, já comprovadas que usaremos para construir uma prova.

Não há uma distinção formal entre lema e teorema tanto o lema como o teorema são declarações, proposições que podem ser provadas como verdadeiras. Muitos textos consideram como lemas apenas as menores unidades de raciocínio que podem ser usadas durante o processo de dedução. Provamos um lema apenas porque queremos provar alguma outra coisa. Se for assim, um conjunto de lemas dá origem a um teorema e um conjunto de teoremas prova uma teoria, ou seja, a teoria é a conclusão lógica de um conjunto de hipóteses provadas por lemas e teoremas.

A leitora deve ter lembrado de outro termo muito comum a prova matemática, o corolário. Neste caso, chamaremos de corolário a uma declaração que pode ser facilmente provada com o uso de algum lema, ou teorema.

Há ainda uma ressalva necessária: nem toda proposição verdadeira é um teorema. Tanto no caso do lema, quanto no caso do teorema, só usaremos estes termos para as proposições que podem ser provadas durante, ou para, a prova de uma determinada teoria. Então, não existem teoremas solitários no universo. Todos estão em uma comunidade formada por todos os teoremas que provam uma teoria.

E já que exploramos praticamente todos os termos que usamos em uma prova, vamos fechar com a conjectura. Chamamos de conjectura a uma proposição que acreditamos ser verdadeira, mas para a qual, nenhuma prova foi encontrada.

Uma prova matemática é uma ferramenta lógica composta de um conjunto de proposições, axiomas, lemas e teoremas que permitem a dedução de uma consequência lógica. A prova implica na definição de conceitos semânticos no cálculo proposicional, o que nos abre uma porta para um mundo completamente novo. Um mundo de sentido e significado diferente das operações sintáticas de equivalência que fizemos até o momento.

Se considerarmos apenas as regras do cálculo proposicional, podemos dizer que dedução é um método usado para provar que um determinado teorema pode ser colocado na forma $P \rightarrow Q$.

Onde P pode representar qualquer conjunto de conjunções de Fórmulas Bem Formadas, que chamaremos de hipóteses e Q, um conjunto de Fórmulas Bem Formadas. O que nos leva perceber uma relação importante: uma prova é um argumento. E todo argumento é uma prova.

6.2.1 Construção da prova

Todas as provas seguem a mesma estrutura de construção. E, se a leitora conseguir seguir este processo de construção será capaz de provar qualquer coisa. Vamos, para simplificar, dividir o processo de construção de uma prova em dois passos:

1. Começamos com a declaração do problema o qual irá conter um conjunto de hipóteses $p, q, r, s, \ldots$ e a conclusão que esperamos obter Q.
2. Mostramos que $p \land q \land r \land s \ldots \rightarrow Q$, garantindo que Q será verdade se todas as hipóteses, ou premissas, forem verdadeiras.

A leitora, consciente que é, deve estar com um sorriso no rosto enquanto pensa o quão fácil isso parece. É claro que existem alguns percalços no caminho.

Não é exatamente fácil colocar todo o problema na forma de premissas e nem é trivial manipular estas premissas e suas relações até encontrar uma forma que possa se expressa como inferência. E, uma vez que a fórmula da inferência tenha sido encontrada, novamente não será trivial provar a verdade da conjunção de todas as hipóteses. Não tenha dúvida que o processo de construção da prova irá envolver as fórmulas de equivalência que vimos anteriormente, o processo de inferência, algum processo de dedução e talvez um sistema axiomático. Coisas que a leitora já viu, ou verá logo em seguida, a começar pelo processo de dedução natural.

6.3 Dedução Natural

A maior parte dos textos de lógica abordam os processos de inferência chamados de Dedução Natural, Sistemas Axiomáticos, *Tableaux* Semântico e

Cálculos de Sequentes. Vamos abordar todos estes tipos. Começando pelo sistema de Dedução Natural.

Chamamos de Sistema de Dedução Natural ao sistema composto por regras de inferência que estão próximas da forma natural que usamos para deduzir a verdade. Em sistemas naturais, cada prova tem origem em uma consequência lógica deduzida a partir de um conjunto de hipóteses, representadas por Fórmulas Bem Formadas. Este sistema foi desenvolvido de forma independente por ***Gerhard Gentzen*** and ***Stanisław Jaśkowski*** no anos 1930 em busca de um sistema de dedução que fosse mais simples que os sistemas axiomáticos existentes. Gentzen o chamou de *Natürliche Kalkül*, ou em tradução livre: Cálculo Natural.

O Cálculo Natural, ou sistema de dedução natural, a leitora escolhe como prefere, se baseia na existência de argumentos já provados e na aplicação destes argumentos em um encadeamento que permite chegar a conclusão na forma de uma consequência lógica. Que a leitora deve imaginar como sendo uma árvore de consequências lógicas. Assim, se temos P e Q como duas hipóteses cuja verdade seja absoluta e já provada, acho que já chamamos isso de axiomas, podemos concluir que $P \land Q$ é verdade. E expressar esta dedução na forma:

$$\frac{P \quad Q}{P \land Q}$$

A leitora deve lembrar que P e Q são as variáveis que usamos para representar qualquer Fórmula Bem Formada na lógica então, elas poderiam ser substituídas por qualquer argumento, cuja consequência lógica é bem conhecida. E a expressão do processo dedutivo ficaria mais clara. Suponha a substituição a seguir:

$$\frac{\dfrac{P \; Q}{P \land Q} \quad \dfrac{P \; R}{P \land R}}{P \land Q \land P \land R}$$

Observe, por favor, propositalmente mantive os argumentos o mais simples possível e que me furtei de colocar os “;” que usamos até agora para separar as hipóteses.

Neste formato, a parte de cima será chamada de contexto, o conjunto de hipóteses que permite a conclusão da consequência lógica, que está representada na parte inferior. Veremos esta representação e este modo de dedução, muito cuidadosamente, ainda durante a análise dos processos de inferência e dedução, mas principalmente quando estivermos estudando cálculo de sequentes. Antes, porém, como já vimos as regras de equivalência, precisamos conhecer os argumentos notáveis, lemas, ou teoremas, tautológicos, que usaremos para encontrar nossa conclusão. A estes argumentos notáveis, daremos o nome de Regras de inferência.

6.4 Regras de inferência e formalismo

Anteriormente, no início deste capítulo, vimos o *Modus Ponens* agora definiremos este argumento como nossa primeira regra de inferência. Frege, no seu trabalho *Begriffsschrift* declara, para quem quiser ler que o *Modus Ponens* é a única regra de inferência que existe, e o pobre autor que lhe escreve concorda com o mestre Frege.

Há ainda um peso extra que não vou dividir com a leitora. O peso da matemática. E a necessidade de fazer com que tudo seja hermético e reduzido. Meu professor de lógica, no milênio passado, em sua sabedoria, me ensinou que quanto menor o número de regras de inferência melhor o sistema usado para a dedução. Eu aprendi. Ainda assim, não vou me render à tentação de parecer erudito e vamos estudar dez modos de dedução, regras de inferência, notáveis. Que são adequadas o método de inferência chamado de Dedução Natural. Começando com o *Modus Ponens*.

6.4.1 *Modus Ponens*

Argumentos *Modus Ponens*, o primeiro dos argumentos condicionais que veremos, podem ser explicitados como: se P é verdadeiro e $(P \rightarrow Q)$ é verdade então podemos inferir que Q é verdade. Sentencialmente podemos expressar o *Modus Ponens* da seguinte forma: *se uma sentença condicional e sua hipótese são verdadeiras então a conclusão também será* verdadeira. Estas formas são interessantes, mas não são únicas. Podemos expressar formalmente este argumento nas duas formas apresentadas na Tabela 6.2-1 e no Exemplo 6.4-1 que, espero, jogue um pouco de luz no entendimento deste argumento.

	Nome	Argumento	Tautologia
1	*Modus Ponens*	$\frac{(P \rightarrow Q); P}{P}$	$((P \rightarrow Q) \land P) \Rightarrow Q$

Tabela 6.4-1 - Argumento sobre a regra de *Modus Ponens*.

Exemplo 6.2: *Modus Ponens* – argumento válido

$p \rightarrow q$: Se Paula tiver a senha, acessará o sistema.

p: Paula tem a senha.

---

q: Paula acessa o sistema

A análise de argumentos requer interpretação e atenção. Veja o Exemplo

Exemplo 6.3: ***Modus Ponens*** **– argumento inválido.**

$p \rightarrow q$: Se $5 > 3$ então 2+2=4.

q: 2+2=4.

---

p: $5 > 3$.

O Exemplo 6.2 mostra um argumento inválido mesmo que a conclusão seja verdadeira. Este argumento não segue a regra de inferência *Modus Ponens* apesar da semelhança aparente.

$p \rightarrow q$: Se $5 > 3$ então 2+2=4.

q: 2+2=4.

---

p: $5 > 3$.

Algumas técnicas permitem determinar se um determinado argumento é válido. Vamos aproveitar o *Modus Ponens* e a Tabela Verdade 6-3 para observar algumas destas técnicas.

	P	Q	$(P \rightarrow Q)$
1.	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F
3.	F	T	T
4.	F	F	T

Tabela 6.4-2 - Tabela verdade das fórmulas de um argumento *Modus Ponens* - Implicação.

Observe que na Tabela 6-3 existe uma, e somente uma, interpretação onde os argumentos P e $(P \rightarrow Q)$, são verdadeiros e a conclusão Q também é verdadeira, a interpretação 1.

Outra forma de comprovação pode ser obtida da conjunção das hipóteses. Como pode ser visto na Tabela 6-3.

	P	Q	$(P \rightarrow Q) \wedge P$
1.	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F
3.	F	T	F
4.	F	F	F

Tabela 6.4-3 - Tabela Verdade *Modus Ponens* – Conjunção

Novamente, existe apenas uma interpretação, e somente uma interpretação onde P e $(P \rightarrow Q)$, são verdadeiros e a conclusão Q também é, a interpretação 1. Por fim, podemos construir a tautologia que desta regra de inferência como pode ser visto na Tabela 6-5.

	P	Q	$(P \to Q) \wedge P$	$((P \to Q) \wedge P) \to Q$
1.	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F	$\boldsymbol{T}$
3.	F	T	F	$\boldsymbol{T}$
4.	F	F	F	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-4 - Tabela Verdade *Modus Ponens* - Tautologia.

Neste caso, a melhor representação para o argumento na forma de tautologia é dada com uma pequena alteração nos símbolos utilizados, apenas para representar a tautologia, de tal forma que teremos:

$$((P \to Q) \wedge P) \Rightarrow Q$$

6.3.1 Exercícios

Usando o *Modus Ponens* encontre a conclusão dos seguintes argumentos:

a) $a = \mathrm{b} \wedge b = c, (a = b \wedge b = c) \to a = c$
b) $(x, y \in \mathbb{R} \to x \cdot y \in \mathbb{R}), (x, y \in \mathbb{R})$ R:
c) Se eu sou culpado, devo ser punido. Sou culpado. Logo?
d) Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$ então $(\sqrt{2})^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. Logo?

Como P e Q as variáveis representadas por letras latinas maiúsculas, são usadas, neste livro para representar qualquer Fórmulas Bem Formadas, podemos fazer $P \equiv \neg Q$ e $Q \equiv \neg P$ e assim, podemos criar um lema usando o *Modus Ponens* expresso por:

$$\frac{(\neg Q \to \neg P); \neg Q}{\neg P}$$

Neste caso, encontramos um lema na forma de uma regra de inferência que pode ser simplificada sintaticamente se lembrarmos das equivalências da implicação apresentadas na seção 4.4 (Propriedades da Implicação):

$$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv (\neg q \to \neg p)$$

Usando estas regras de equivalência podemos reescrever o lema que encontramos em uma forma mais interessante:

$$\frac{(P \rightarrow Q); \neg Q}{\neg P}$$

E encontrar a forma da regra de inferência conhecida como *Modus Tollens.*

6.4.2 Modus Tollens

O *Modus Ponens* é construtivo avaliamos os axiomas em relação ao valor verdadeiro. No *Modus Ponens* conhecemos a verdade de P e da implicação de P em Q com estas duas verdades podemos provar a verdade Q. O *Modus Tollens*[9] é destrutivo, avaliamos os axiomas em relação a seu valor falso. No *Modus Tollens,* não temos a verdade de p, ainda temos a verdade da implicação de P em Q com e podemos provara verdade de $\neg Q$ com estas duas verdades, podemos concluir a verdade de $\neg P$.

Argumentos *Modus Tollens* podem ser explicitados como: se Q é falso, representado por $\neg Q$ e $(P \rightarrow Q)$ é verdadeiro então podemos inferir que P é falso e será representado por $\neg Q$. Podemos expressar formalmente este argumento nas duas formas apresentadas na linha 2 da Tabela 6.4-5-2 e no Exemplo 6.4-5-2.

	Nome	Argumento	Tautologia
1	*Modus Ponens*	$\frac{(P \rightarrow Q);\ P}{P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q$
2	*Modus Tollens*	$\frac{(P \rightarrow Q);\ \neg Q}{\neg P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$

Tabela 6.4-5-2 - Argumento sobre a regra de *Modus Ponens*.

Exemplo 6.4: *Modus Tollens*

$p \rightarrow q$: Se Paula tiver a senha, acessará o sistema.
$\neg q$: Paula não tem a senha.
$\neg p$: Paula não acessa o sistema

A primeira forma de validar o *Modus Tollens* é a verificação da tabela verdade da regra, como pode ser visto na Tabela 6.4-6.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \rightarrow Q)$

[9] Em tradução livre: modo de negação.

1.	T	T	F	F	T
2.	T	F	F	T	F
3.	F	T	T	F	T
4.	F	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-6 - Tabela verdade do *Modus Tollens*

Observe que na Tabela 6-3-6 existe uma, e somente uma, interpretação onde os argumentos $\neg Q$ e $(P \rightarrow Q)$, são verdadeiros e a conclusão $\neg P$ também é verdadeira, a interpretação 4. Onde os valores de P e Q não são relevantes para a comprovação do argumento. Outra forma de comprovação pode ser obtida da conjunção das hipóteses. Como pode ser visto na Tabela 6.4-7.

	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$
1.	T	T	F	F	F
2.	T	F	F	T	F
3.	F	T	T	F	F
4.	F	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-7 - Tabela Verdade *Modus Tollens*

Novamente, existe apenas uma interpretação, e somente uma interpretação onde $\neg Q$ e $(P \rightarrow Q)$, são verdadeiros e a conclusão $\neg P$ também é, a interpretação 4. Por fim, podemos construir a tautologia que desta regra de inferência como pode ser visto na Tabela 6.4-8.

	P	Q	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$
1.	T	T	F	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F	$\boldsymbol{T}$
3.	F	T	F	$\boldsymbol{T}$
4.	F	F	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-8 - Tautologia equivalente ao *Modus Tollens*

Repetindo a alteração de símbolos que fizemos na tautologia do *Modus Ponens*, teremos a seguinte tautologia para o *Modus Tollens*:

$$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

6.3.2 Exercícios

Usando o *Modus Tollens* encontre a conclusão dos seguintes argumentos:

a) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s),\ \neg\neg(r \wedge s);$

b) $a > 1 \rightarrow a > b,\ a \leq b;$

c) Se o Asus é um caro, então ele tem rodas. Asus não tem rodas. Então?

d) Se não estiver sol eu vou estudar matemática. Eu não vou estudar matemática. Logo?

6.4.3 Silogismo Hipotético

Somos forçados a voltar a Escola Estoica. Pelo que sabemos foram os Estoicos que incluíram a palavra hipotético (*ὑποθετικός*), na lógica para se referir as proposições compostas, disjunção, conjunção e implicação. Para ser honesto, eu deveria ter falado da Escola Estoica ainda no *Modus Ponens* já que, talvez devido a ***Chrysippus,*** a primeira regra de inferência da Escola Estoica era: *se o primeiro, então o segundo. Mas, se o primeiro. Consequentemente o segundo*. Quando lemos isso em voz alta soa um pouco estranho, mas se substituirmos primeiro por P e segundo por Q e lembramos que a sentença está no modo afirmativo, temos a expressão sentencial do *Modus Ponens*. Os Estoicos estudaram as implicações da lógica considerando a implicação e derivaram versões importantes do *Modus Ponens, Tollens* e do Silogismo Hipotético.

Silogismos Hipotéticos são argumentos onde as duas premissas, ou hipóteses, são condicionais, ou implicações e, da mesma forma, a conclusão também é uma condicional.

Os argumentos na forma de Silogismos Hipotéticos estão diretamente relacionados aos *Modus Ponens* e *Tollens* de tal forma que alguns livros consideram estes últimos como casos especiais do Silogismo Hipotético.

Neste argumento, o Silogismo Hipotético, é importante notar que o consequente de uma hipótese é o antecedente da outra. Assim queremos provar a implicação lógica entre o antecedente da primeira hipótese com o consequente da segunda. Talvez um exemplo sentencial clareie os conceitos. Veja, por favor, o Exemplo 6.2.

Exemplo 6.5: Silogismo Hipotético

$p \rightarrow q$: Se você estudar lógica então irá entender a lógica.

$q \rightarrow r$: Se você entender lógica então irá passar nesta disciplina.

$p \rightarrow r$: Se você estudar lógica então irá passar nesta disciplina.

Na Tabela 6.4-9 a leitora poderá ver a representação formal do Silogismo Hipotético e da sua tautologia.

	Nome	Argumento	Tautologia
1	*Modus Ponens*	$\frac{(P \rightarrow Q);\ P}{P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q$
2	*Modus Tollens*	$\frac{(P \rightarrow Q);\ \neg Q}{\neg P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$
3	Silogismo Hipotético	$\frac{(P \rightarrow Q); (Q \rightarrow R)}{(P \rightarrow Q)}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow\ R\,)\big) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$

Tabela 6.4-9 - Silogismo Hipotético e sua forma tautológica

Podemos provar o Silogismo Hipotético por meio da Tabela Verdade 6.4-10

	p	q	r	$(p\ \rightarrow\ q)$	$(q\ \rightarrow\ r)$	$\big((p\ \rightarrow\ q) \wedge (q\ \rightarrow\ r)\big)$	$(p \rightarrow r)$	$\big((p\ \rightarrow\ q) \wedge (q\ \rightarrow\ r)\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$
1.	T	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
2.	T	T	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$
3.	T	F	T	F	T	F	T	$\boldsymbol{T}$
4.	T	F	F	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$
5.	F	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
6.	F	T	F	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$
7.	F	F	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
8.	F	F	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-10 - Prova do Silogismo Hipotético

E na sua forma tautológica teremos o Silogismo Hipotético representado por:

$$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow\ R\,)\big) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$$

6.4.4 Silogismo Disjuntivo

Classicamente este argumento era chamado de "*modus tollendo ponnes*" que, em tradução livre do latim significa o modo que afirma pela negação e é o último dos argumentos condicionais que veremos neste livro. O Silogismo Disjuntivo, como a leitora já deve esperar, entre os argumentos estudados na Escola Estoica e trata-se de uma das regras de inferência mais utilizadas.

Assim como o Silogismo Hipotético, o Silogismo Disjuntivo está diretamente relacionado aos argumentos *Modus Ponens* e *Tollens*. Em forma sentencial o Silogismo Disjuntivo pode ser expresso pelo Exemplo

Exemplo 6.6: silogismo disjuntivo

$p \vee q$: cada jogador derrubado é uma falta ou não será punido pelo Juiz.

$\neg p$: foi derrubado e não é falta.	
q: não será punido pelo juiz	

Formalmente ele está expresso na Tabela 6.4-11 nas suas duas formas possíveis.

	Nome	Argumento	Tautologia
1	*Modus Ponens*	$\frac{(P \to Q);\ P}{P}$	$\big((P \to Q) \land P\big) \Rightarrow Q$
2	*Modus Tollens*	$\frac{(P \to Q);\ \neg Q}{\neg P}$	$\big((P \to Q) \land \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$
3	Silogismo Hipotético	$\frac{(P \to Q); (Q \to R)}{(P \to Q)}$	$\big((P \to Q) \land (Q \to\ R\,)\big) \Rightarrow (P \to Q)$
4	Silogismo Disjuntivo	$\frac{P \lor Q; \neg P}{Q}$ $\frac{P \lor Q; \neg Q}{P}$	$((P \lor Q) \land \neg P) \Rightarrow Q$ $((P \lor Q) \land \neg Q) \Rightarrow P$

Tabela 6.4-11 - Argumentos Notáveis incluindo o Silogismo Disjuntivo

A disjunção não produz informações suficientes para garantir sua verdade. Contudo informa que se uma das hipóteses é falsa a outra obrigatoriamente tem que ser verdadeira. O Silogismo Disjuntivo complementa este conceito e pode ser entendido com a sentença por:

> *se a disjunção é verdadeira e uma das hipóteses não é verdadeira, então a outra hipótese é verdadeira.*

Este também é o motivo que suporta a validade tautológica das duas apresentadas na Tabela 6.4-11. Caberá a leitora, em um momento de inspiração, fazer a Tabela Verdade da forma que eu ignorei.

6.4.5 Introdução bicondicional

O argumento conhecido como Introdução Bicondicional permite a inferência na forma de operação bicondicional quando as hipóteses são condicionais. Ou seja, em um processo de decisão onde as duas premissas estão na condicional, implicação, podemos concluir a verdade na forma de uma expressão bicondicional. Este argumento pode ser visto em forma sentencial no Exemplo 6.6.

Exemplo 6.7: introdução bicondicional

$p \rightarrow q$: se eu for ao jogo com você então você pagará a minha entrada.

$p \rightarrow q$: se você pagar a minha entrada então eu vou ao jogo com você.

$p \leftrightarrow q$: Eu vou ao jogo com você só, e somente só, você pagar a minha entrada.

A formalização do argumento de Implicação Bicondicional pode ser vista na Tabela 6.4-12, juntamente com a sua forma tautológica.

	Nome	Argumento	Tautologia
1	*Modus Ponens*	$\frac{(P \rightarrow Q);\ P}{P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q$
2	*Modus Tollens*	$\frac{(P \rightarrow Q);\ \neg Q}{\neg P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$
3	Silogismo Hipotético	$\frac{(P \rightarrow Q); (Q \rightarrow R)}{(P \rightarrow Q)}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow\ R\ )\big) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$
4	Silogismo Disjuntivo	$\frac{P \vee Q; \neg P}{Q}$ $\frac{P \vee Q; \neg Q}{P}$	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ $((P \vee Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow P$
5	Implicação Bicondicional	$\frac{(P \rightarrow Q); (Q \rightarrow P)}{(P \leftrightarrow Q)}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow\ P\ )\big) \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

Tabela 6.4-12 - Argumentos destacando a Implicação Bicondicional

A Tabela verdade que mostra a tautologia que comprova o argumento Introdução Bicondicional pode ser visto na Tabela

	P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$(Q \rightarrow P)$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)\big)$	$(P \leftrightarrow Q)$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)\big) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
1.	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$
3.	F	T	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$
4.	F	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-13 - Tabela verdade mostrando a tautologia da Introdução Bicondicional.

6.4.6 Eliminação Bicondicional

Como a operação bicondicional é logicamente equivalente a conjunção de duas condicionais, duas implicações materiais, se a leitora tiver estabelecido a verdade de $P \leftrightarrow Q$ ou de $Q \leftrightarrow P$, a verdade de P, então podemos deduzir que Q ou P respectivamente. Ou seja, se a primeira hipótese for uma bicondicional entre duas Fórmulas Bem Formadas quaisquer e seja possível garantir a verdade de uma destas fórmulas, a outra fórmula pode ser inferida. Fazendo com que a bicondicional seja eliminada do processo de dedução. E isso não é tudo, graças as propriedades de equivalência entre a operação bicondicional e a implicação material, é possível eliminar a hipótese bicondicional substituindo-a por uma implicação material assim, temos quatro possíveis eliminações diferentes neste argumento. A Tabela 6.4-14 mostra estas eliminações nas formas de argumento e tautologia.

	Nome	Argumento	Tautologia
1	*Modus Ponens*	$\dfrac{(P \rightarrow Q);\ P}{P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q$
2	*Modus Tollens*	$\dfrac{(P \rightarrow Q);\ \neg Q}{\neg P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$
3	Silogismo Hipotético	$\dfrac{(P \rightarrow Q); (Q \rightarrow R)}{(P \rightarrow Q)}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow\ R\,)\big) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$
4	Silogismo Disjuntivo	$\dfrac{P \vee Q; \neg P}{Q}$ $\dfrac{P \vee Q; \neg Q}{P}$	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ $((P \vee Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow P$
5	Implicação Bicondicional	$\dfrac{(P \rightarrow Q); (Q \rightarrow P)}{(P \leftrightarrow Q)}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow\ P\,)\big) \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
6	Eliminação Bicondicional	$\dfrac{P \leftrightarrow Q; P}{Q}$ $\dfrac{P \leftrightarrow Q; Q}{P}$ $\dfrac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q}$ $\dfrac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$	$((P \leftrightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$ $((P \leftrightarrow Q) \wedge Q) \Rightarrow P$ $(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$ $(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow P)$

Tabela 6.4-14 - Tabela de regras de inferência destacando a Eliminação Bicondicional.

A Tabela 6.4-15 apresenta duas provas tautológicas de dois casos da Eliminação Bicondicional.

	P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big)$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big) \rightarrow Q$	$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
1.	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
3.	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
4.	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-15 - Duas provas da Eliminação Bicondicional

6.4.7 Adição

Se a hipótese é verdadeira, então qualquer disjunção contendo esta hipótese é verdadeira. O nome adição é antigo e remonta a época em que a disjunção era chamada de adição lógica e, neste caso a regra de inferência indica que você pode somar logicamente qualquer proposição verdadeira a qualquer Fórmulas Bem Formadas sem alterar a verdade desta fórmula. Este argumento também é conhecido por Introdução Disjuntiva já que ele permite a inclusão de uma disjunção no processo de dedução.

6.4.8 Simplificação

Se a conjunção de duas hipóteses é verdadeira então as duas hipóteses são verdadeiras. Não há outra possibilidade para que uma conclusão conjuntiva seja verdadeira se não for graças ao fato que suas duas hipóteses são verdadeiras.

6.4.9 Conjunção

Se as duas hipóteses são verdadeiras, então uma conclusão conjuntiva também será verdadeira. Esta regra de inferência também deriva diretamente das propriedades do operador conjunção. Esta regra de inferência também é chamada de eliminação conjuntiva.

6.4.10 Eliminação Bicondicional Negativa

As razões são exatamente as mesmas da Eliminação Bicondicional com uma diferença: uma das hipóteses é a negação de uma das proposições da hipótese condicional. Então na Eliminação Bicondicional Negativa temos uma condicional $P \rightarrow Q$ e uma hipótese que é a negação de P ou Q. Neste caso poderemos concluir por $\neg Q$ ou $\neg P$ respectivamente.

A Tabela 6.4-16 mostra as formas e tautologias para as Regras de Inferência: adição, simplificação, conjunção e Eliminação Bicondicional Negativa.

	Nome	Argumento	Tautologia
1	*Modus Ponens*	$\frac{(P \rightarrow Q);\ P}{P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q$
2	*Modus Tollens*	$\frac{(P \rightarrow Q);\ \neg Q}{\neg P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$
3	Silogismo Hipotético	$\frac{(P \rightarrow Q); (Q \rightarrow R)}{(P \rightarrow Q)}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$
4	Silogismo Disjuntivo	$\frac{P \vee Q; \neg P}{Q}$ $\frac{P \vee Q; \neg Q}{P}$	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ $((P \vee Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow P$
5	Implicação Bicondicional	$\frac{(P \rightarrow Q); (Q \rightarrow P)}{(P \leftrightarrow Q)}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)\big) \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

6	Eliminação Bicondicional	$\frac{P \leftrightarrow Q; P}{Q}$ $\frac{P \leftrightarrow Q; Q}{P}$ $\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q}$ $\frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$	$((P \leftrightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$ $((P \leftrightarrow Q) \wedge Q) \Rightarrow P$ $(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$ $(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow P)$
7	Adição	$\frac{P}{P \vee Q}$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
8	Simplificação	$\frac{P \wedge Q}{P}$ $\frac{P \wedge Q}{Q}$	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$ $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$
9	Conjunção	$\frac{P; Q}{P \wedge \; Q}$	$\big((P) \wedge \; (Q)\big) \Rightarrow \; (P \wedge Q)$
10	Eliminação Bicondicional Negativa	$\frac{(P \leftrightarrow Q); \neg P}{\neg Q}$ $\frac{(P \leftrightarrow Q); \neg Q}{\neg P}$	$\big((P \leftrightarrow Q) \wedge \neg P\big) \Rightarrow \neg Q$ $\big((P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$

Tabela 6.4-16 - Tabela completa de Regras de Inferência.

A Tabela 6.4-16 conclui a apresentação de todas as Regras de Inferência que usaremos no método de Dedução Natural.

Existe um exemplo clássico do uso da Adição e da simplificação para a prova de argumentos que nunca sai de moda e está apresentado no Exemplo 6.8:

Exemplo 6.7: adição: Prove que se $\mathbf{0 < x < 10}$ então $\mathbf{x \geq 0}$:

$$p \wedge q: 0 < x < 10 \equiv (x > 0) \wedge (x < 10)$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow p : \text{implica que } x > 0 \text{ por simplificação}$$

$$p \Rightarrow (p \vee r): \text{implica que } x > 0 \text{ ou } x = 0 \text{ usando a regra da adição}$$

$$\text{Como } x > 0 \text{ ou } x = 0 \text{ é o mesmo que } x \geq 0 \text{ QED}$$

Este QED é a abreviação de *Quod Erat Demonstrandum*, uma expressão em latim que, em tradução livre significa *como se queria demonstrar* e é utilizada para marcar o fim de uma prova. Em português, como falado no Brasil, os professores mais antigos utilizavam a abreviatura CQD de *como queria demonstrar*. Este pobre autor seguirá seus professores e neste livro usará CQD para marcar o final de todas as demonstrações.

7 REFERÊNCIAS

ARUN-KUMAR, S. **Science, Introduction to Logic for Computer**. London UK: Prentice Hall., 2002.

BEN-ARI, M. **Mathematical Logic For Computer Science**. 3º. ed. London, UK: Springer-Verlag, 2012.

BENNETT, D. J. **Logic Made Ease How to Know when you Language Deceives You**. New York, NY USA: W. W. Norton Company, 2004.

CONRADIE, W.; GORANKO, V. **L OGIC AND D ISCRETE M ATHEMATICS A CONCISE INTRODUCTION**. Chichester, WS. UK: John Wiley and Sons Ltd, 2015.

EUCLIDES. **Os Elementos:** tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo, SP. Brasil: Fundação Editora da Unesp, 2009.

FRANCKE, C. B. Christoph Bernhard Francke - Bildnis des Philosophen Leibniz (ca. 1695).jpg. **Wikimedia Commons, the free media repository**, 2020. Disponivel em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Christoph_Bernhard_Francke_-_Bildnis_des_Philosophen_Leibniz_(ca._1695).jpg&oldid=428672169>. Acesso em: 22 ago. 2020.

KNUTH, D. E. Big Omicron and Big Omega and Big Theta. **SIGACT News**, p. 18-24, 1976.

LEIBNITZ, G.-G. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences. **l'Académie royale des sciences**, 1703. Disponivel em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/ads-00104781/document>. Acesso em: 9 ago. 2020.

LEVIN, O. **Discrete Mathmatics, an open itroduction**. 3º. ed. Greely, CO. USA: Oscar Levin, 2019.

LI, W. **Mathematical Logic:** Fundations to Information Science. Boston, MA. USA: Birkhäuser Verlag AG , 2010.

MAGRITTE, R. "La Trahison des Images" ("The Treachery of Images") (1928-9). **Wikipedia**, 2011. Disponivel em: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:MagrittePipe.jpg>. Acesso em: 20 ago. 2020.

RUSSELL, B. Principia Mathematica. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2019. Disponivel em: <https://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

SALMON, W. C. SPACE, TIME, AND MOTION A Philosophical Introduction. **University of Arizona**, 2009. Disponivel em: <https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/SpaceTimeMotion/STM.html>. Acesso em: 08 ago. 2020.

TOMASTIK, E. C.; EPSTEIN, J. L. **Applied Finite Mathematics**. Belmont, CA. USA: Cengage Learning, 2008.

WITTGENSTEIN, L. **Some Remarks on Logical Form**. Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary. [S.l.]: Blackwell Publishing. 1929. p. 162-171.

8 RESPOSTAS EXERCÍCIOS

2.1: a) não é proposição; b) não é proposição; c) proposição; d) não é proposição; e) proposição; f) proposição; g) não é proposição.

Rascunho

p	q	r	Verdade	FNC
$\boldsymbol{T}$	T	T	T	
$\boldsymbol{T}$	T	F	F	$(\neg p \vee \neg q \vee r)$
$\boldsymbol{T}$	F	T	T	
$\boldsymbol{T}$	F	F	T	
$\boldsymbol{F}$	T	T	T	
$\boldsymbol{F}$	T	F	F	$(p \vee \neg q \vee r)$
$\boldsymbol{F}$	F	T	F	$(p \vee q \vee \neg r)$
$\boldsymbol{F}$	F	F	T	

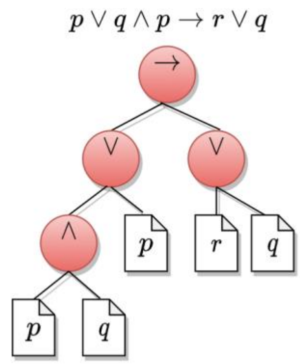
$$\big((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)\big) \Leftrightarrow ((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r))$$

p	q	r	Verdade	FND
$\boldsymbol{T}$	T	T	T	$(p \wedge q \wedge r)$
$\boldsymbol{T}$	T	F	F	
$\boldsymbol{T}$	F	T	T	$(p \wedge \neg q \wedge r)$
$\boldsymbol{T}$	F	F	T	$(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
$\boldsymbol{F}$	T	T	T	$(\neg p \wedge q \wedge r)$
$\boldsymbol{F}$	T	F	F	
$\boldsymbol{F}$	F	T	F	
$\boldsymbol{F}$	F	F	T	$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

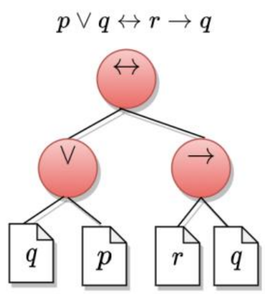
5.0 Exercícios

Considere as fórmulas a seguir e esquematize suas árvores sintáticas.

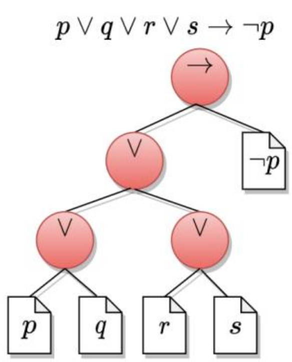
a) $p \vee q \wedge p \rightarrow r \vee q$;



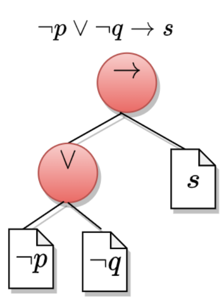
b) $p \vee q \leftrightarrow r \rightarrow q$;



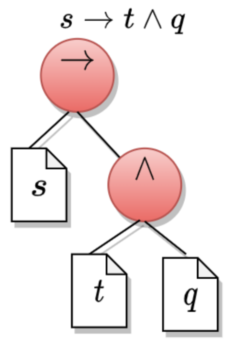
c) $p \vee q \vee r \vee s \rightarrow \neg p$;



d) $\neg p \wedge \neg\, q \rightarrow s$;



e) $s \rightarrow t \wedge q$.



6.3.1 Exercício

a) Usando o *Modus Ponens* encontre a conclusão dos seguintes argumentos:

b) $a = \mathrm{b} \wedge b = c, (a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c$ R: $\vdash a = c$

c) $(x, y \in \mathbb{R} \rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}), (x, y \in \mathbb{R})$ R: $\vdash x \cdot y \in \mathbb{R}$

d) Se eu sou culpado, devo ser punido. Sou culpado. Logo? R: se $p \equiv$ "sou culpado" e $q \equiv$ "devo ser punido" teremos: $(p \rightarrow q) \wedge p \vdash q$ então a conclusão lógica é que "devo ser punido".

e) Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$ então $(\sqrt{2})^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. Logo? R: fazendo $p = \sqrt{2} > \frac{3}{2}$ e $q = (\sqrt{2})^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$ temos que $\vdash (\sqrt{2})^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$ o que está completamente errado já que não podemos usar o *Modus Ponens*, ou qualquer outra regra de inferência se uma das hipóteses estiver errada. No caso a hipótese $p = \sqrt{2} > \frac{3}{2}$ é falsa já que $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

6.3.2 Exercícios

Usando o *Modus Tollens* encontre a conclusão dos seguintes argumentos:

e) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s),\ \neg\neg(r \wedge s) \vdash \neg(p \leftrightarrow q)$

f) $a > 1 \rightarrow a > b,\ a \leq b \vdash a \leq 1$

g) Se o Asus é um caro, então ele tem rodas. Asus não tem rodas. Então? R: se fizermos $p \equiv$ "Asus é um caro" e $q \equiv$ "Asus têm rodas", podemos usar o *modus Tollens* e concluir $\neg p \equiv$ "Asus não tem rodas".

h) Se não estiver sol eu vou estudar matemática. Eu não vou estudar matemática. Logo? R: se fizermos $p \equiv$ “se não estiver sol” e $q \equiv$ “vou estudar matemática. Teremos $\neg p \equiv$ “está sol”.