Tabelas Verdade

INTRODUÇÃO

"All truths are easy to understand once they are discovered; the point is to discover them." Galileu Galilei.

As tabelas verdade são representações gráficas criadas para permitir a visualização e consequente análise de todas as proposições em uma determinada fórmula lógica. A criação das tabelas verdade é creditada a ***Ludwig Wittgenstein*** (1889 – 1951) que, na página 34 do seu livro "*Some Remarks on Logical Form*", escreveu *"... e podemos representar o produto p e q da seguinte forma..."* e colocou a imagem que pode ser vista na Figura 1.

Figura 1 - Tabela verdade de uma conjunção proposta por Ludwig Wittgenstein em 1921

p	q	
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Fonte: (WITTGENSTEIN, 1929**)**

Nesta representação de uma conjunção, Wittgenstein, criou um dos aparelhos cognitivos mais importantes para o entendimento das relações entre proposições atômicas. Estas relações criam proposições compostas, ou moleculares, como vimos antes. A leitora há de lembrar que vimos a negação ($\neg$), a conjunção ($\wedge$), a disjunção ($\vee$), a operação condicional, ou implicação ($\Rightarrow$) e a bicondicional, ou implicação dupla ($\Leftrightarrow$). Vimos estas operações de forma despretensiosa. Agora, precisamos nos aprofundar um pouco na linguagem formal da lógica matemática. Para tanto, teremos que voltar um tanto, mais ou menos até o alfabeto.

Transformando sentenças em fórmulas

As sentenças são claras e sua definição depende do idioma utilizado. Você deve ter aprendido o alfabeto, a sintaxe e a semântica do português, como falado no Brasil, nos ciclos básicos de educação. Aqui, vamos pegar este conhecimento para escrever sentenças declarativas que possam ser proposições. Proposição é uma sentença declarativa que só podem ser falsas ou verdadeiras. Sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas não podem ser proposições porque é impossível determinar a verdade destas sentenças, não é possível determinar se são verdadeiras ou falsas. *Hoje está chovendo muito!* Não é uma proposição enquanto, *Hoje está chovendo muito.* É uma proposição. Então podemos dizer, só para lembrar, que:

> *Proposição é todo conjunto de palavras que exprimem um pensamento de sentido completo que pode ser verdadeiro ou falso.*

As proposições seguem alguns princípios criados no século 3 A.C e são atribuídos a ***Chrysippus***, professor da Escola Estoica. A leitora há de lembrar, conversamos sobre esta escola anteriormente neste mesmo livro. Em uma forma puramente literal e sentencial podemos enunciar estes princípios como:

> **Princípio de identidade:** uma proposição verdadeira é verdadeira e uma proposição falsa é falsa.
>
> **Princípio da não contradição:** nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa.
>
> **Princípio do terceiro excluído:** uma proposição será verdadeira ou falsa. Não há uma alternativa.

As proposições podem ser atômicas, ou simples, e compostas, ou moleculares. Proposições simples, são aquelas contidas em si mesmo: *todo homem é mortal*; *Beatriz é alta*; *o Papa é argentino*. Para criar as proposições compostas, usamos conectivos, para relacionar uma proposição com a outra. Como pode ser visto no Exemplo 1.

Exemplo 1

1. *Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta.
2. *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês*
3. **Ou** *Marcela é curitibana,* **ou** *gaúcha.*
4. **Se** *os gatos são mamíferos,* **então** *eles mamam na infância.*
5. *Joana será aprovada* ***se, e somente se****, tirar mais que 8.*

No Exemplo 1 estão destacados os conectivos (e; ou; não; então..se; e se, e somente se). Estes conectivos serão transformados em operadores lógicos e estão transformando proposições atômicas em proposições compostas. As proposições apresentadas no Exemplo 1 estão na forma de sentenças e, salvo engano, estão de acordo com as normas da língua portuguesa como falada e escrita no Brasil.

Para transformar as sentenças em fórmulas lógicas precisaremos de um conjunto de símbolos que chamaremos de alfabeto e representaremos por Σ_{CP}. Estamos começando nosso estudo da lógica pelo **cálculo proposicional** (CP), para tanto, usaremos o alfabeto $\Sigma_{CP} = \{p;\ q; r; s; t; V; F; \wedge; \vee; \neg; \rightarrow; \leftrightarrow; (;); =; ,; :\}$.

Com os 17 símbolos do alfabeto Σ_{CP} a amável leitora deve ser capaz de transformar qualquer proposição composta em fórmula lógica. Os símbolos V e F serão usados, respectivamente, para indicar a verdade e a falsidade de uma proposição. A leitora irá me permitir expandir este alfabeto sempre que eu precisar de mais variáveis proposicionais além de p, q, r, s e t que definimos como elementos do conjunto Σ_{CP}. Para a realização dos cálculos proposicionais, estes símbolos serão utilizados para substituir as sentenças proposicionais por variáveis proposicionais, na forma exposta no Exemplo 2.

Exemplo 2

1. $\boldsymbol{p}$: *Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta.

2. $\boldsymbol{q}$: *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês*
3. $\boldsymbol{r}$: **Ou** *Marcela é curitibana,* **ou** *gaúcha.*
4. $\boldsymbol{s}$: **Se** *os gatos são mamíferos,* **então** *eles mamam na infância.*
5. $\boldsymbol{t}$: *Joana será aprovada* ***se, e somente se****, tirar mais que 8.*

Ao longo de todo este trabalho vamos usar a palavra proposição substituindo a expressão variáveis proposicionais.

Se usarmos os símbolos de Σ, e apenas estes símbolos, para criar uma fórmula lógica, diremos que esta fórmula está bem formatada. Isto é importante porque **apenas as fórmulas lógicas bem formatadas têm validade na lógica matemática**. Isto é importante porque você não pode inferir a verdade de uma fórmula se ela não estiver de acordo com as regras léxicas, sintáticas e semânticas da linguagem.

Neste ponto da prosa, precisamos destacar que a linguagem da lógica proposicional não é regular e permite ambiguidades. Os símbolos $()$, parênteses, são usados para evitar possíveis ambiguidades isolando proposições compostas. **Não podemos encontrar a verdade de proposições ambíguas.** Já sabemos usar as variáveis proposicionais e os parênteses, nosso próximo passo é entender os operadores $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow e \ \leftrightarrow$, não necessariamente nesta ordem.

Negação $\neg$

Usamos o operador de negação para transformar uma proposição verdadeira em falsa e vice-versa. Como pode ser visto no Exemplo 3.

Exemplo 3

1. $\boldsymbol{p}$: Beatriz é alta.
2. $\neg\boldsymbol{p}$: Beatriz não é alta.
3. $\neg\neg\boldsymbol{p}$: Beatriz é alta.
4. $\boldsymbol{q}$: O papa não é francês.
5. $\neg\boldsymbol{q}$: O papa é francês

Sentenças negativas podem ter diversas formas em português, como falado no Brasil, como pode ser visto no Exemplo 4:

Exemplo 4

1. $\boldsymbol{p}$: Lógica não é fácil.
2. $\boldsymbol{q}$: Não é verdade que lógica é difícil.
3. $\boldsymbol{r}$: É falso que Beatriz é alta.

A Tabela Verdade da operação de negação $\neg$ pode ser vista na Tabela 1.

Cálculo Proposicional	
$\boldsymbol{p}$	$\neg p$
$\boldsymbol{V}$	F
$\boldsymbol{V}$	V

Álgebra Booleana	
P	$\bar{P}$
1	0
0	1

Tabela 1 - Tabela verdade da negação em notação do cálculo proposicional e da Álgebra Booleana.

Existe uma relação muito próxima entre a lógica matemática e a teoria dos conjuntos. Na teoria dos conjuntos a negação é representada de forma indireta pelo símbolo $\notin$ de tal forma que a sentença $a\ pertence\ ao\ conjunto\ L$ deve ser representado por $a \in L$, a negação desta proposição será dada por $a \notin L$ e deve lida como $a\ não\ pertence\ ao\ conjunto\ L$. O diagrama de Venn para esta operação pode ser visto na Figura 2.

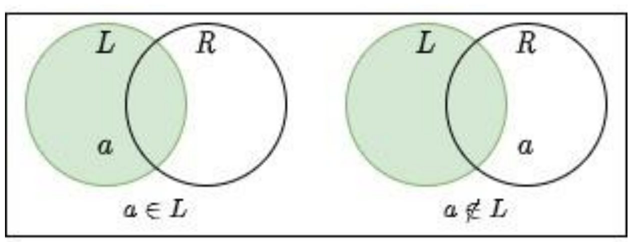

Figura 2 - Diagrama de Venn da negação representada na teoria dos conjuntos. Fonte: o autor (2020)

Uma consequência direta do cálculo proposicional é criação de circuitos eletrônicos para a aplicação de operações lógicas. Representamos a negação pelo símbolo de uma proposição em letra maiúscula com uma barra horizontal, $\bar{P}$, que se lê: negação de P ou P barrado. A implementação eletrônica da operação de negação é realizada pelo circuito inversor, ou *inverter* em inglês, que pode ser visto na representação gráfica da porta lógica inversora na Figura 3.

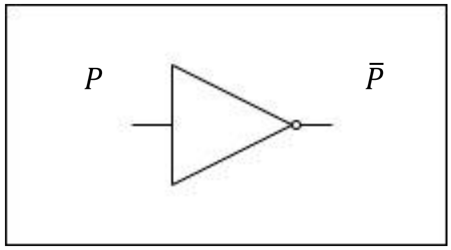

Figura 3 - Símbolo do inversor em circuitos lógicos. Fonte: o autor (2020)

As propriedades da negação serão vistas com detalhe assim que passarmos por todos os operadores do cálculo proposicional.

Conjunção ∧

A conjunção representada pelo símbolo ∧, já foi conhecida como produto lógico, mas atualmente fazemos uma analogia direta com o conectivo E, AND em inglês. A conjunção é uma operação binária, todas as conjunções terão dois, e somente dois, operandos.

Todas as sentenças onde existe o conectivo E, ou alguma outra sequência sintática com o mesmo significado, representa uma proposição conjuntiva, ou simplesmente uma conjunção. No Exemplo 5 podemos ver algumas conjunções.

Exemplo 5

1. $\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda, o quadrado não.
2. $\boldsymbol{q}$: O Papa não é pop e Zico não é paulista.
3. $\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta **e** $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida.

É preciso ter muito cuidado com a linguagem natural, seja ela qual for, na hora de interpretar seu sentido para inferir as fórmulas lógicas equivalentes. No

Exemplo 6 podemos dividir cada uma das proposições em outras duas e representá-las por meio da operação conjunção.

Exemplo 6

1. $\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda **e** $\boldsymbol{q}$: o quadrado não. $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$
2. $\boldsymbol{r}$: O Papa não é pop **e** $\boldsymbol{s}$: Zico não é paulista. $\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{s}$
3. $\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta **e** $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida. $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{u}$

A tabela verdade da conjunção pode ser vista na Tabela 2.

Cálculo Proposicional		
$\boldsymbol{p}$	q	$p \wedge p$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$P \cdot Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela 2 - Tabela verdade da operação conjunção em cálculo proposicional e em Álgebra Booleana.

Observe a diferença entre as práticas adotadas nas duas formas matemáticas desta mesma tabela verdade. Enquanto em cálculo proposicional começamos a tabela com os valores verdadeiros, em Álgebra Booleana, começamos a tabela com os valores falsos. Nos dois casos, a operação conjunção resultará em um resultado verdadeiro, se, e somente se, as duas proposições operandos forem verdadeiras.

Uma herança dos tempos passados quando a conjunção era chamada de produto lógico, pode ser vista na representação desta operação na Álgebra Booleana, ainda hoje, usamos o símbolo · para representar a conjunção, para lembrar a leitora, este é o símbolo utilizado para representar o produto escalar. O Exemplo 7 apresenta casos de conjunção.

Exemplo 7

Resultado

1. $\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda **e** $\boldsymbol{q}$: o quadrado não. $\boldsymbol{p \wedge q}$ $\boldsymbol{V}$
2. $\boldsymbol{r}$: O Papa não é pop **e** $\boldsymbol{s}$: Zico não é paulista. $\boldsymbol{r \wedge s}$ $\boldsymbol{F}$
3. $\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta **e** $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida. $\boldsymbol{t \wedge u}$?

No Exemplo 7.1, a verdade é clara e indiscutível, no Exemplo 4.2, podemos discutir se o Papa é pop, ou não. Entretanto, com certeza, Zico não é paulista. Por fim, no Exemplo 7.3, não temos como definir o resultado da conjunção simplesmente porque não conhecemos a Tatiana.

A conjunção também tem representação na teoria dos conjuntos e pode ser representada pela interseção entre dois conjuntos $P \cap Q$ e pode ser vista no Diagrama de Venn apresentado na Figura 4.

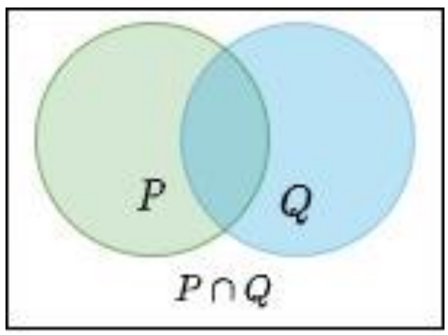

Figura 4 - Diagrama de Venn da conjunção. Fonte: o autor (2020).

Na eletrônica o circuito que implementa a conjunção é a porta lógica AND que pode ser vista na Figura 5.

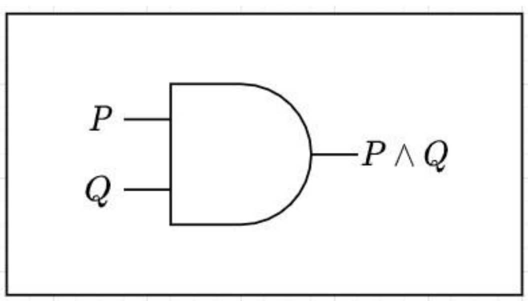

Figura 5 - Porta And, implementação da operação conjunção. Fonte: o autor (2020)

Formalmente analisamos as conjunções buscando a função verdade de cada um dos operandos. Como pode ser visto nos Exemplos 8, 9 e 10.

Exemplo 8

Resultado

1. Pelé praticava Futebol e Ayrton Sena automobilismo.

    $\boldsymbol{p}$: Pelé praticava Futebol — $\boldsymbol{V(p)}$ — $\boldsymbol{V}$

    $\boldsymbol{q}$: Ayrton Sena praticava automobilismo. — $\boldsymbol{V(q)}$ — $\boldsymbol{V}$

2. $\boldsymbol{V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V(p \wedge q) = V}$ — $\boldsymbol{V(p \wedge q)}$ — $\boldsymbol{V}$

Pelé praticava Futebol e Ayrton Sena automobilismo, é uma proposição verdadeira

A última linha do Exemplo 8 (8.2) pode ser lida como: a verdade da conjunção entre p e q é igual a verdade de p em conjunção com a verdade de q, como as duas proposições são verdadeiras faremos a conjunção entre duas verdades de tal forma que a conjunção entre p e q é verdadeira. Ufa!!! O que um autor não faz para usar poucos símbolos. Na verdade, esta expressão, para ser perfeitamente redigida de acordo com as regras a lógica matemática, precisaríamos incluir mais três ou quatro símbolos no nosso alfabeto Σ_{CP}. Estou optando por só fazer isso quando for estritamente necessário.

Exemplo 9

Resultado

1. Brasília é a capital do Brasil e da Argentina.

    $\boldsymbol{p}$: Brasília é a capital do Brasil. — $\boldsymbol{V(p)}$ — $\boldsymbol{V}$

    $\boldsymbol{q}$: Brasília é a capital da Argentina. — $\boldsymbol{V(q)}$ — $\boldsymbol{F}$

2. $\boldsymbol{V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge F = V(p \wedge q) = F}$ — $\boldsymbol{V(p \wedge q)}$ — $\boldsymbol{F}$

Brasília é a capital do Brasil e da Argentina, é uma preposição falsa.

Exemplo 10

Resultado

1. Peru fica na Europa e é um país.

    $\boldsymbol{p}$: Peru fica na Europa. — $\boldsymbol{V(p)}$ — $\boldsymbol{V}$

    $\boldsymbol{q}$: Peru é um país. — $\boldsymbol{V(q)}$ — $\boldsymbol{V}$

2. $\boldsymbol{V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge V = V(p \wedge q) = F}$ — $\boldsymbol{V(p \wedge q)}$ — $\boldsymbol{F}$

Peru fica na Europa e é um país, é uma proposição falsa.

Assim como a negação, a conjunção tem algumas propriedades bem interessantes que deixaremos para discutir adiante.

Disjunção ∨

A disjunção, operação proposicional que representa o conectivo Ou, *OR* em inglês, é representada pelo símbolo ∨ do alfabeto Σ_{CP} que definimos anteriormente, foi inicialmente chamada de adição lógica. A disjunção é uma operação binária, utiliza dois e apenas dois operandos e será verdadeira se um dos operandos for verdadeiro.

Em linguagem natural, como o português falado no Brasil, a conjunção é representada pela palavra ou, e seus equivalentes semânticos. A leitora deve tomar cuidado aqui. Eu usei a expressão palavra ou porque gramaticalmente tanto o E, quanto o OU, em português, estão na classe gramatical conjunção. As expressões, isto é, e ou seja, são sinônimos de ou. E viva a língua portuguesa! O Exemplo 11 apresenta casos de disjunção.

Exemplo 11

			Resultado
1.	$\boldsymbol{p}$: Einstein era alemão **ou** $\boldsymbol{q}$: Einstein foi físico.	$\boldsymbol{p \land q}$	$\boldsymbol{V}$
2.	$\boldsymbol{r}$: O Chile é um país, **isto é,** $\boldsymbol{s}$: não é uma cidade.	$\boldsymbol{r \land s}$	$\boldsymbol{F}$

A tabela verdade da disjunção pode ser vista na Tabela 3.

Cálculo Proposicional		
$\boldsymbol{p}$	q	$p \land p$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$P + Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	1

Tabela 3 - Tabela verdade da operação disjunção em cálculo proposicional e em Álgebra Booleana.

Novamente podemos observar discrepâncias entre a notação do cálculo proposicional e da Álgebra Booleana. Tanto a ordem de distribuição dos estados possíveis quanto o uso do símbolo $+$. O uso do símbolo $+$ persistiu até os primeiros anos do século XX quando esta operação era chamada de adição lógica. A relação entre a disjunção e a teoria dos conjuntos pode ser vista na Figura 6.

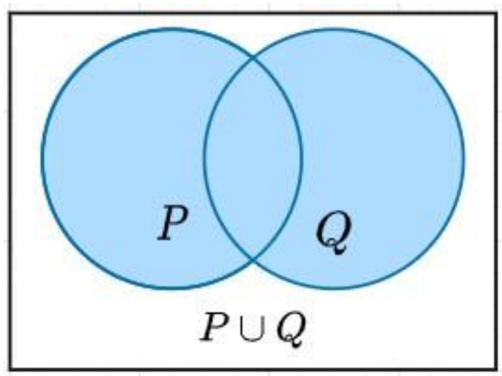

Figura 6 - Diagrama de Venn da disjunção na teoria dos conjuntos

A disjunção é representada nos circuitos eletrônicos pela porta OU, OR em inglês que pode ser vista na Figura 7.

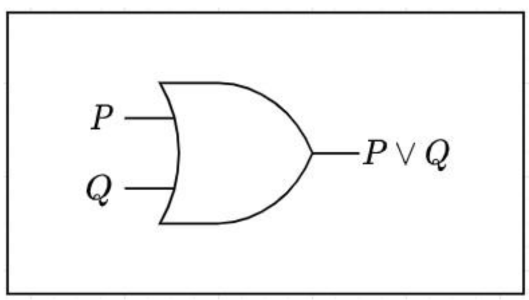

Figura 7 - Porta OR representação da disjunção em circuitos eletrônicos.

A descoberta da verdade de uma disjunção pode ser encontrada com a análise de cada uma das proposições que compõem o conjunto de operandos. Seguindo o mesmo padrão de pensamento que usamos para a conjunção, e disjunção. Entretanto, lembre-se no caso da implicação um operando é a hipótese e o outro a conclusão. O uso da implicação pode ser visto no Exemplo 12.

Exemplo 12

Resultado

1. Homens são mortais ou faz sol a noite.

$\boldsymbol{p}$: Homens são mortais.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{q}$: Faz sol a noite.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$

2. $\boldsymbol{V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = \ V(p \vee q) = V}$ $\quad$ $\boldsymbol{V(p \vee q)}$ $\quad$ $\boldsymbol{V}$

Homens são mortais ou faz sol a noite, é uma preposição verdadeira.

Condicional, ou implicação →

Chamaremos de condicional qualquer sentença que contenha o conectivo *se..então*, e a representaremos por ⇒. As proposições na forma condicional, ou de implicação, representadas por $p \Rightarrow q$, onde p é chamada de hipótese e q é chamada de conclusão, serão falsas se, e somente se, q for falso. Ou seja, a condicional será falsa se a hipótese implicar em uma falsidade.

A implicação é a declaração mais comum na matemática e também se destaca entre aquelas que são mais mal entendidas. Para não fugir dos gregos, vamos voltar a ***Pitágoras***. Se a amável leitora tomar o cuidado de pedir para qualquer aluno do ciclo médio de ensino para declarar o Teorema de Pitágoras ouvirá: $x^2 + y^2 = z^2$. O que soa correto, mas está completamente errado. Esta declaração é falsa. Caso contrário ela teria que ser verdadeira para qualquer valor de x, y e z. Uma forma mais correta seria:

> *Se x e y são os lados de um triângulo retângulo com hipotenusa z, então $x^2 + y^2 = z^2$ (LEVIN, 2019).*

Parece pouco importante, mas é justamente a correção da declaração que permite inferir sua verdade ou falsidade. A leitora poderia lembrar que lá nos anos 1600, ***Leibnitz*** foi estudar lógica na esperança que a comprovação da verdade se transformasse em uma ferramenta para a solução de conflitos, sem a necessidade de gritos, armas e mortes. Então, sim, esta diferença é muito importante.

A tabela verdade da operação condicional pode ser vista na Tabela 4.

Cálculo Proposicional		
$\boldsymbol{p}$	q	$p \rightarrow q$

Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$P \rightarrow Q$

V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Figura 8 - Tabela verdade do operador condicional - implicação - em cálculo proposicional.

A forma mais simples de entender a implicação é considerar um contrato, ou uma promessa. A lógica interessa que esta promessa seja verdadeira, ou falsa para que possa ser considerada uma implicação. Considere, por exemplo, que você disse ao seu filho:

Se tirar 10 na prova, lhe darei R$1.000,00.

Onde $p =$ tirar 10 na prova e $q =$ lhe darei R$1.000,00. A proposição será verdadeira se você cumprir a promessa. Caso contrário será falsa.

Primeiro Suponha que seu filho tirou 10 na prova, então $p = V$ e você mantenho a promessa, logo $q = V$. A proposição é verdadeira.

Considere agora que seu filho tirou 10 na prova, então $p = V$ e você não cumpro a promessa, logo $q = F$. A proposição é falsa.

Suponha que seu filho tirou 8 na prova, e, ainda assim, você lhe dá os R$ 1000,00, $p = F$ e $q = V$, mesmo que a hipótese seja falsa, neste caso, a conclusão é verdadeira e a promessa foi mantida. A proposição é verdadeira.

Por fim, suponha que seu filho tirou 7 e você não paga os R$1.000,00, neste caso, $p = F$ e $q = F$ a proposição ainda é verdadeira porque a promessa não foi quebrada. Você não precisa pagar o valor combinado.

Na teoria dos conjuntos a implicação pode ser representada pelo Diagrama de Venn apresentado na Figura 9.

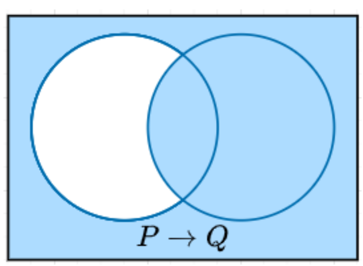

Figura 9 - Implicação representada no diagrama de Venn

Na eletrônica não temos uma porta lógica exclusiva para representar a implicação, mas podemos fazer uma combinação de portas para implementar a mesma lógica este circuito pode ser visto na Figura 10.

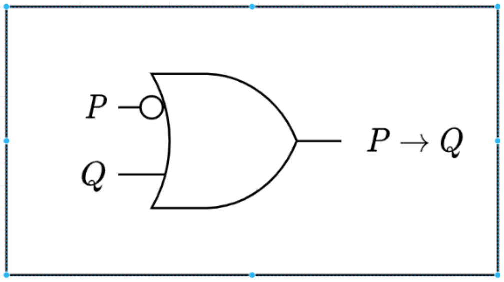

Figura 10 - Combinação de portas lógicas, inversor e ou, para criar a implicação em circuitos eletrônicos.

Muito, muito importante. Não estamos falando de consequência. Estamos falando de conclusão. O operador condicional é apenas um conectivo lógico e alguns argumentos podem não fazer sentido e ainda assim serem logicamente correto.

Exemplo 13

		Resultado
$\boldsymbol{p}$: Alagoas está na região sul.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{q}$: Minas gerais está na região norte.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$
1. $\boldsymbol{V(p \to q) = V(p) \to V(q) = V \to F = V(p \to q) = V}$	$\boldsymbol{V(p \to q)}$	$\boldsymbol{V}$

Alagoas está na região sul então Minas Gerais está na região norte.

Bicondicional ou implicação dupla ↔

Chamamos de bicondicional, ou implicação dupla, a toda sentença que utilize o conectivo se, e somente se. A implicação dupla é representada por ↔. Uma proposição composta bicondicional será verdadeira se os dois operadores forem verdadeiros e se os dois operadores forem falsos. A forma simplificada de memorizar a ação da operação de implicação dupla se explicita na frase: os dois ou nenhum. Ou os dois operandos são verdadeiros ou nenhum é verdadeiro. Nos dois casos a proposição composta representada pela implicação dupla será verdadeira.

A tabela verdade da operação bicondicional pode ser vista na Tabela 5.

Cálculo Proposicional		
$\boldsymbol{p}$	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 11 - Tabela verdade do operador bicondicional em cálculo proposicional e Álgebra Booleana.

A representação da implicação dupla com teoria dos conjuntos pode ser vista no diagrama de Venn apresentado na Figura 11.

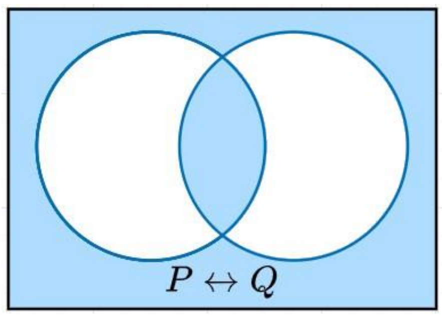

Figura 12 - Diagrama de Venn representando o operador bicondicional

No caso da eletrônica a implicação dupla é representada pela porta XNOR que pode ser vista na Figura 12.

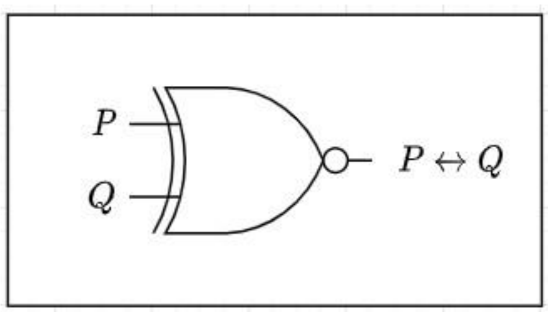

Figura 13 - Porta XNOR que representa a implicação dupla em circuitos eletrônicos.

REFERÊNCIAS

BEN-ARI, M. **Mathematical Logic For Computer Science**. 3º. ed. London, UK: Springer-Verlag, 2012.

BENNETT, D. J. **Logic Made Ease How to Know when you Language Deceives You**. New York, NY USA: W. W. Norton Company, 2004.

LEIBNITZ, G.-G. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences. **l'Académie royale des sciences**, 1703. Disponivel em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/ads-00104781/document>. Acesso em: 9 ago. 2020.

LEVIN, O. **Discrete Mathmatics, an open itroduction**. 3º. ed. Greely, CO. USA: Oscar Levin, 2019.

PRINCIPIA Mathematica. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2019. Disponivel em: <https://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

SALMON, W. C. SPACE, TIME, AND MOTION A Philosophical Introduction. **University of Arizona**, 2009. Disponivel em: <https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/SpaceTimeMotion/STM.html>. Acesso em: 08 ago. 2020.

WITTGENSTEIN, L. **Some Remarks on Logical Form**. Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary. [S.l.]: Blackwell Publishing. 1929. p. 162-171.