Lógica, Introdução e Cálculo Proposicional
Frank Coelho de Alcantara

1 INTRODUÇÃO

"Logic is the technique by which we add conviction to truth."
Jean de la Bruyere

A lógica é a ciência da *avaliação sistemática de argumentos* em busca do convencimento. A Lógica busca o convencimento, a certeza, na forma dos argumentos e não conteúdo destes argumentos. Busca a verdade pela análise de um argumento em relação a outro, de forma racional, formal e estruturada.

Existem duas formas de se estudar lógica: formal e filosófica. A lógica formal está tão enraizada na sociedade ocidental que ser considerado ilógico é uma espécie de ofensa. Maximize a ofensa se for da minha geração que cresceu assistindo as deduções do ***Sr.Spock***. A lógica está em praticamente tudo que fazemos.

Usamos a lógica para justificar conceitos, definir teorias e reforçar observações sobre o mundo e o que fazemos nele. Usamos a lógica para concluir e para convencer outras pessoas das nossas conclusões. Como se diz popularmente ***quanto mais frágil o argumento mais alta a voz***. Ou seja, a falta da lógica marca o começo da conturbação.

Neste livro, vamos nos dedicar a lógica formal, matemática, para uso na resolução de problemas computacionais e como suporte ao estudo da inteligência artificial. Vamos estudar lógica proposicional, ou **cálculo proposicional**, e lógica predicativa, ou **cálculo predicativo**. A leitora há que entender, e perdoar, neste livro usarei os termos **cálculo proposicional** e **cálculo predicativo**. Não é nenhuma fixação com a matemática trata-se apenas para manter este estudo dentro da ciência da computação e para deixar claro desde já, que estudaremos **provas matemáticas**. A lógica matemática e computacional, não está só interessada no convencimento, este convencimento deve ser uma **prova irrefutável da verdade**.

A lógica, diferentemente do português, inglês ou mandarim, é uma linguagem artificialmente criada sobre uma estrutura matemática para permitir a análise de argumentos, garantir que esta análise seja compreendida por qualquer um que conheça a linguagem, e encontrar a verdade, ou não.

O objetivo da lógica é encontrar a verdade, mais que isso, encontrar a prova da verdade. Este é o ponto principal de todo este esforço 2500 anos de construção do pensamento. Queremos definir que um determinado argumento é verdadeiro, ou falso; dando a mesma importância a qualquer um dos resultados desde que o resultado seja verdadeiro, ainda que o argumento seja falso. Ficou complicado? A amável leitora pode definir a lógica como sendo a ciência da avaliação de argumentos. Nesta ciência temos dois resultados possíveis para cada argumento, eles podem ser verdadeiros ou falsos. A lógica quer encontrar esta convicção, esta certeza, a verdade absoluta sobre um argumento, seja ele verdadeiro ou falso.

Os argumentos, no que concerne à lógica, são sentenças que suportam um raciocínio específico e permitem uma conclusão de forma indutiva ou dedutiva. A forma do argumento é importante, a lógica se preocupa com a forma. Uma das formas lógicas mais antigas, o silogismo é composto de duas sentenças, chamadas de **premissas, ou proposições,** e uma sentença que representa a conclusão.

A avaliação dos argumentos é a função principal da lógica e esta avaliação é feita a luz do raciocínio. Suponha que você suporte o seguinte argumento: ***todos os filósofos são inteligente****s* e que em uma festa seu amigo Paulo lhe apresente a Amanda com a sentença: ***Amanda é filósofa***. A conclusão lógica e irrefutável é que ***Amanda é inteligente***. Este foi nosso primeiro exemplo de raciocínio lógico. Duas **proposições**, ou premissas, se preferirem levam invariavelmente a uma **conclusão**. Podemos contestar as proposições apresentadas em busca da sua veracidade, ou não. Por exemplo, podemos discutir se é verdade que todos os filósofos são inteligentes. Mas, neste caso, teríamos que ter **argumentos** para avaliar a verdade de *todos os filósofos são inteligentes*, ou ainda verificar se é verdade que *Amanda é filósofa*. Contudo, se consideramos que as duas **proposições** são válidas, somos forçados, pela lógica, a inferir que ***Amanda é inteligente*** e, além de nosso primeiro exemplo de **cálculo proposicional** acabamos de ver o nosso primeiro exemplo de **inferência**. Antes de nos aprofundarmos nestes conceitos, um pouco de história.

1.1 Um pouco de História

O estudo da lógica começa com Aristóteles (384 A.C. –322 A.C.). Aristóteles era filho do médico do rei da Macedônia e órfão ainda jovem, Aristóteles foi criado em um ambiente rico e aprendeu poesia e retórica e teve o privilégio de frequentar a Academia de Platão. Estão nos tratados de Aristóteles os primeiros registros da lógica. Ainda na Grécia antiga e lógica floresceu na Escola de Megara onde se estudavam quebra-cabeças lógicos e acabaram por definir o conceito de **paradoxo**, encontrando alguns destes fenômenos do pensamento muito interessantes para a evolução da ciência e que veremos quando for o caso. Além das escolas de Atenas e Megara, Escola Stoica, também da cidade Atenas, teve grande influência no estudo da lógica.

Da Escola Estoica, vamos destacar ***Diodorus Cronus***, um dos seus professores. Cronus desenvolveu o raciocínio lógico baseado em três sentenças onde a terceira indica a conclusão. O mesmo raciocínio que vimos no exemplo da Amanda e que caracteriza de forma cristalina a estrutura lógica chamada de silogismo.

Não temos muita certeza sobre a relação entre Cronus e Aristóteles cremos que Cronus tenha influenciado Aristóteles, talvez como um contemporâneo mais velho ou como um concorrente.

Apesar de muitos autores atribuírem a Aristóteles a criação dos silogismos não está realmente claro, se foi um, o outro, ou uma consequência do trabalho de ambos. A Aristóteles cabe, sem dúvida, o mérito de perceber que a forma da argumentação tem mais impacto na percepção da verdade que o conteúdo dos argumentos. E o uso de letras para representar proposições.

Silogismos são estruturas de raciocínio formadas por duas sentenças, chamadas de premissas, ou proposições, e uma conclusão. O silogismo é a forma de ordenar as premissas de forma a conduzir o raciocínio até a conclusão lógica. Se as premissas forem verdadeiras, a conclusão será inevitável.

Vimos um silogismo, de forma completamente informal, quando falamos que *Amanda é inteligente*. Devemos nos preocupar com a forma, dessa forma, o silogismo deve ser escrito de forma a explicitar as sentenças que são premissas e a conclusão, como pode ser visto no Exemplo 1.

Exemplo 1: Todos os filósofos são inteligentes
Amanda é filósofa

Portanto, Amanda é inteligente

Exemplo 2: Todos os homens são mortais
Sócrates é um homem

Portanto, Sócrates é mortal

É possível perceber que estes exemplos compartilham uma estrutura comum, que pode ser usada para qualquer conjunto de argumentos.

Todos x são y
z é x

Portanto, z é y

Esta estrutura não garante a correção do raciocínio nem das proposições, por exemplo:

Exemplo 3 Todos os corvos são pretos.
Todos os corvos são pássaros.

Portanto, todos os pássaros são pretos.

O exemplo 3 está perfeitamente formado, mas a conclusão está errada. Este é falso.

Depois de Aristóteles, Cronus e seus contemporâneos; a lógica dormiu por quase dois mil anos. O renascimento da lógica ocorre graças a um homem em busca da paz Gottfried-Willhelm Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), viveu na Alemanha durante o iluminismos é um dos mais produtivos matemáticos da história. Atingiu o ápice da sua produção científica desenvolvendo o cálculo integral e diferencial de forma independente. Para nós, interessam seu trabalhos com aritmética binária pulicada em *Explication de l'Arithmétique Binaire* e a definição de algumas das operações que podemos realizar com proposições. Leibniz acreditava ser capaz de criar uma linguagem para representar a lógica e o raciocínio. De forma que a verdade pudesse ser encontrada a partir da análise lógica da relação entre proposições reduzidas a um sistema simbólico e, neste caminho propôs algumas das operações que usamos até hoje. Leibniz sonhava com a solução dos problemas mundiais por meio do raciocínio lógico. Infelizmente seu trabalho teve pouca visibilidade até George Boole entrar nessa história.

George Boole, em 1854 ***The Laws of Thought*** apresentando o que conhecemos hoje como **Álgebra Booleana**. Agora, neste ponto da história temos o conceito de proposição, operações matemáticas que podem ser feitas com estas proposições e uma álgebra de adequada a um sistema de numeração adequado a operar entre os conceitos de verdadeiro e falso. A base da tecnologia computacional que usamos hoje estava definida no anos de 1854. O próximo passo importante neste caminho é o Paradoxo de Russel. Mas antes, o que é um paradoxo?

1.2 Paradoxos

Paradoxo é uma sentença que não tem a verdade bem definida, se a sentença for verdadeira, o argumento é falso. Se a sentença for falsa, o argumento é verdadeiro. Um dos mais antigos e famosos, o ***paradoxo do mentiroso***, pode ser ligado às escolas gregas de filosofia, é simples e pode ser demonstrado com uma sentença: **esta declaração é falsa**. E deixo que a leitora responda, a sentença em destaque neste parágrafo é verdadeira ou falsa?

Para responder esta pergunta, classificando esta proposição, existem algumas considerações que devemos fazer. Vamos, antes de qualquer coisa chamar a declaração: **esta declaração é falsa** de p.

Se p é verdadeira, então “**esta declaração é falsa”** é verdadeira. Portanto, p deve ser falsa. A hipótese de que p é verdadeira leva à conclusão de que p é falsa, ou seja, existe uma contradição. Mas, a coisa fica ainda mais interessante se p é falsa, então “**esta declaração é falsa**” é falsa. Portanto, p deve ser verdadeira.

A hipótese de que p é falsa leva à conclusão de que p é verdadeira, ou seja, outra contradição. Esta é uma boa hora para levantar-se, tomar uma água e lembrar que o estudo da lógica é fundamental para o progresso da raça humana.

Do ponto de vista da filosofia, esta frase, provavelmente cunhada no Século VI A.C. quase trezentos anos antes de Aristóteles e Cronus, por um Cretense mitológico chamado de ***Epinemides***, se quer é considerada um paradoxo. Este paradoxo vem dando nós nas mentes mais brilhantes da história desde então, com tal significância que Paulo, utiliza uma variação deste paradoxo em uma das Epístolas a Titos (cap. 1 v:12 e 13):

12. *Um deles, seu próprio profeta, disse: Os cretenses são sempre mentirosos, bestas ruins, ventres preguiçosos.*
13. *Este testemunho é verdadeiro. Portanto, repreende-os severamente, para que sejam sãos na fé.*

Há uma carga gigantesca de ironia, da parte de Paulo, nestes dois versos, mas vou deixar a análise teológica e filosófica destes dois versos para hora, lugar, texto e escritor certo. O paradoxo do mentiroso não é o único paradoxo importante, apenas o mais simples e já que este é um livro de lógica matemática, e vamos dar nós em nossas próprias mentes, precisamos falar dos Paradoxos de Zeno. Ou pelo menos de um deles que está relacionado com Leibniz.

Zeno, Zenon, ou Zenão em português, conhecido como ***Zeno de Eleia*** também se preocupou com paradoxos antes dos tempos de Aristóteles. Seus paradoxos influenciam a física e a matemática até os dias de hoje. Um deles, o paradoxo do deslocamento, é utilizado para explicar cálculo diferencial é frequentemente utilizado para explicar o cálculo diferencial e integral. Infelizmente não restou nada dos escritos de Zeno e tudo que temos sobre ele está nos trabalhos de Aristóteles, milagrosamente preservados pelos estudiosos árabes e persas. A leitora deve estar curiosa sobre este paradoxo que achei tão importante a ponto de mencionar aqui, então responda a seguinte questão:

Considere a lâmpada do seu escritório, esta lâmpada está ligada a um interruptor e você pode desligar, ou ligar a lâmpada, infinitas vezes,

> *em um espaço finito de tempo que contaremos. A lâmpada começa ligada, um minuto depois você a desliga, passam-se 30 segundos e você a liga novamente, mais quinze segundos se vão e você a desliga e, a cada passagem da metade do tempo gasto na última interação, você muda o estado da lâmpada. Depois de dois minutos, a lâmpada estará apagada ou acesa?*

A resposta correta é que não temos como verificar o estado da lâmpada porque como o você irá mudar o estado de aceso para apagado infinitamente e a cada mudança o tempo fica menor não temos como saber o número de transições que ocorrerão. Dizemos que o número de transições de estado tende ao infinito. A versão inicial deste paradoxo estava relacionada com flechas, pintores e alvos. Coisas comuns na época de Zeno e raras na nossa.

Estes foram dois exemplos de paradoxos que perturbam a humanidade há milhares de anos. São importantes para a lógica e para a matemática, mas não se comparam os paradoxos e avanços que encaramos a partir do final dos anos 1800 para a computação, computabilidade e complexidade. Entre estes o Paradoxo de Russel se destaca.

Bertrand Russel (1872 – 1970) pretensiosamente tentou reescrever toda a matemática a partir dos conceitos de conjuntos e fracassou ao encontrar um dos mais famosos paradoxos da história da matemática.

Esta pretensão não era exclusiva de Russell, outros matemáticos antes dele, e alguns depois, perseguiram este objetivo. Entre estes destacam-se ***Kurt Gödel*** e ***Alonzo Church*** cujos trabalhos, em lógica e nas teorias da computabilidade e complexidade têm impacto direto na criação do mundo em que vivemos e serão, estudadas neste livro.

Russell estudou filosofia, matemática e lógica. Em 1901, estudando a Teoria dos Conjuntos de ***Georg Cantor***, encontrou um paradoxo na definição de conjuntos. O mesmo paradoxo já havia sido estudado, mas não publicado por ***Ernst Zermelo*** em 1899 e pelo próprio Georg Cantor em 1890. Contudo, a história atribui este paradoxo a Russell graças a sua publicação. A tentativa de Russell e Alfred North Whitehead, registrada no livro ***Principia Mathematica*** contribui definitivamente para o formalismo da lógica como parte da matemática. A simbologia de linguagem da lógica que adotamos neste livro tem origem no ***Principia Mathematica*** mas foi atualizada ao longo das décadas. Se a curiosa leitora estiver interessada, a Universidade de Stanford mantém uma sinopse de todo ***Principia Mathematica***.

1.3 O Paradoxo de Russell

Bertrand Russel (1872 – 1970) tentou reescrever toda a matemática a partir da Teoria dos Conjuntos, conforme fora postulada por Georg Cantor, e fracassou ao encontrar um dos mais famosos paradoxos da história da matemática. Esta pretensão, provar toda a matemática a partir da Teoria dos Conjuntos não era exclusiva de Russell, outros matemáticos antes dele, e alguns depois, perseguiram este objetivo. Entre estes últimos destacam-se ***Kurt Gödel*** e ***Alonzo Church*** cujos trabalhos, em lógica e nas teorias da computabilidade e complexidade têm impacto direto na criação do mundo em que vivemos e serão, estudados neste livro, assim que se tornarem relevantes na nossa trajetória.

Russell, além de ser escritor, estudou filosofia, matemática e lógica. Em 1901, estudando a Teoria dos Conjuntos de ***Georg Cantor***, encontou um paradoxo na definição de conjuntos. O mesmo paradoxo já havia sido estudado, mas não publicado por ***Ernst Zermelo*** em 1899 e pelo próprio Georg Cantor em 1890. Contudo, a história atribui este paradoxo a Russell graças a sua publicação. A tentativa de Russell e Alfred North Whitehead, registrada no livro **Principia Mathematica** contribuiu definitivamente para o formalismo da lógica incluindo-a definitivamente na matemática. A simbologia de linguagem da lógica que adotamos neste livro tem origem no **Principia Mathematica.** Veremos, é claro, a versão mais atualizada possível desta simbologia. O paradoxo de Russel pode ser definido da seguinte forma:

> *Considere A como o conjunto formado por todos os conjuntos que não contém a si mesmos. De tal forma que: $A = \{S|S \notin S\}$. Seria A um elemento de si mesmo? Seria o conjunto A um elemento do conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmos?*

Vamos pensar um pouco sobre isso. Se A é um elemento A isso significa que ele é um elemento de si mesmo. Logo, pela própria definição de A ele não poderia conter a si mesmo, já que A é o conjunto de conjuntos que não contém a si mesmos. Como esta opção é impossível, devemos concluir que A não é um elemento de si mesmo. Mas, se ele não contém a si mesmo. Ele precisa, necessariamente, ser um elemento do conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmo. E pronto, lá se foi a teoria dos conjuntos por água abaixo, levando consigo uma parte importante do cérebro deste pobre autor.

Outra consequência do trabalho de Russell, a formalização da linguagem de representação de proposições, operações entre proposições, anteriormente estudadas por Leibnitz, estruturou a parte da matemática que chamamos de cálculo proposicional.

2 CÁLCULO PROPOSICIONAL

No **Cálculo Proposicional** vamos usar as proposições como operandos em expressões lógicas.

A proposição, é uma declaração, na forma de sentença, que é verdadeira $\boldsymbol{ou}$ falsa. Nunca as duas conclusões ao mesmo tempo e nunca sem um destas conclusões.

Anteriormente, nos referimos as proposições como premissas, estes termos podem ser usados de forma livre para significar a mesma coisa, pelo menos neste livro. Ou seja, a proposição é uma declaração cuja verdade só pode ser demonstrada entre um de dois estados diferentes. Ou a proposição é verdadeira, ou é falsa. Uma proposição jamais será verdadeira E falsa e, da mesma forma uma proposição não poderá ser nem verdadeira e nem falsa. Este é o sentido do conector $\boldsymbol{ou}$ este conector, significa que só pode existir um dos dois estados possíveis.

O **Cálculo Proposicional** é a parte da lógica matemática que estuda a existência das proposições, a criação de proposições simples (ou atômicas), a criação de proposições complexas (ou compostas). E as formas que podemos criar proposições compostas, ou complexas, combinando estas proposições por meio de cinco operadores.

2.1 Exemplos de Proposição

Exemplo 4

1. Lima é a Capital da China
2. Paris é a Capital da França
3. 1 + 1 = 2
4. Todos os gatos são animais

Todas as declarações do Exemplo 4 são proposições. Todas estas sentenças, ou são verdadeiras (2 e 4), ou falsas (1, 3) e não resta dúvida sobre a verdade de cada uma destas declarações. Aqui, no domínio da linguística e do racional, a prova matemática é dispensável. A verdade de três destas proposições é inerente ao conjunto interno de conhecimento da própria leitora. Conjunto este formado pelos milhares de proposições que você foi aceitando como verdadeira ao longo da vida. Uma delas, podemos provar matematicamente, ainda que o esforço seja mínimo comparado ao esforço que seria necessário para provar as outras três, a proposição “1+1=2” foi matematicamente provada em um pouco mais de 360 páginas, por Russell no ***Principia Mathematica***.

Até este ponto temos usado sentenças escritas em uma linguagem natural, o português, nossas proposições. A linguagem natural, apesar de útil pode ser ambígua e complexa, levando a conclusões erradas ou incompletas. O Exemplo 5 apresenta um caso de ambiguidade.

Exemplo 3 Sexo ruim é melhor que nada.
Nada e melhor que sexo bom.

Portanto, sexo ruim é melhor que sexo bom.

Ambiguidade e complexidade são características indesejadas à qualquer prova matemática e desta forma deve ser evitada. Aristóteles, Leibinz e Russell perceberam isso e, ao longo dos séculos desenvolveram uma notação matemática para representar proposições e suas interações.

As proposições que usamos nos exemplos anteriores são ditas atômicas, ou simples, elas estão contidas em si mesmo e sua verdade depende apenas da sua aceitação como verdadeiras ou falsas. Podemos representar as proposições atômicas, como fizemos antes de forma informal, por letras minúsculas. As letras p, q, r, s, t são as letras que usaremos com mais frequência neste livro. Também usaremos as letras maiúsculas T para representar verdadeiro e F para representar falso como símbolos para indicar a verdade de uma determinada proposição. Assim, podemos usar as mesmas proposições do Exemplo 4 para construir o Exemplo 5:

Exemplo 5

1. p = Escreva este texto ainda hoje.
2. q = Paris é a Capital da França. | $q = T$
3. $r = 1 + 1 = 2$ | $r = F$
4. s = Todos os gatos são animais. | $s = T$

Toda proposição é uma sentença, mas, nem toda sentença é uma proposição, como podemos ver no Exemplo 6:

Exemplo 6

1. Escreva este texto ainda hoje.
2. $x + 4 = 6$
3. $r = 1 + 1 = 2$ | $r = F$
4. s = Todos os gatos são animais. | $s = T$

A sentença 1 não é uma proposição por que não é uma declaração e a sentença 2 não uma proposição porque não temos como garantir se ela é verdadeira ou falsa. Observe que, neste caso, quando atribuirmos um valor a x, poderemos definir se a sentença 2 é verdadeira ou falsa e teremos uma proposição. As regras da sintaxe definem a estrutura de cada proposição enquanto a semântica é responsável pela interpretação e esta define a atribuição dos valores verdadeiro T ou F a cada proposição. Para cada forma, definida pela sintaxe de cada idioma, uma regra semântica define a condição de cada proposição.

A prova, que tanto buscamos, é uma construção sintática que permite a dedução de uma fórmula a partir de um conjunto de outras fórmulas, que chamaremos de ***axiomas*** por meio do uso das ***regras de inferência*** (BEN-ARI, 2012). As proposições atômicas podem ser combinadas por meio de operações, com nomes derivados da linguagem natural, tais como E, OU, $implica$ e $negação$. O mais simples é a negação.

2.2 Operador unário - Negação

Temos um e apenas um operador unário em cálculo proposicional, o operador de negação, em inglês *not*, representando por ¬ ou, em alguns livros, ∼. Operadores unários são aqueles que usam apenas um operando. Se uma proposição é verdadeira a aplicação deste operador a transforma em falsa e vice-versa. Por causa desta inversão, este operador também pode ser chamado de inversor, inverter em inglês.

Podemos usar o operador de negação quantas vezes for necessário, sempre a frente de proposição que estamos operando, por exemplo, a negação da proposição q é representada por $\neg\, q$ ou $\sim q$ que se lê como ***não q***. Podemos aplicar o operador ¬ quantas vezes for necessário, a qualquer proposição de tal forma que se $q = T$ logo $\neg q = F$ e se $r = F$ logo $\neg\neg r = F$.

2.3 Operadores binários

Operadores binários são aqueles que são aplicados a dois operadores e determinam a relação entre eles. Temos quatro operadores binários no cálculo proposicional.

- A conjunção ou operador $E\ (and)$ representado por ∧ tal que a conjunção entre p e q e representada por $p \wedge q$.
- A disjunção ou operador $Ou\ (or)$ representado por ∨ tal que a disjunção entre p e q e representada por $p \vee q$.
- A condicional, ou implicação, representada pelo operador ⇒ tal que: $p \Rightarrow q$.
- A Bicondicional representada pelo operador ⇔ tal que: $p \Leftrightarrow q$.

No próximo capítulo vamos tratar destes operadores.

3 OBRAS CITADAS

BEN-ARI, M. **Mathematical Logic For Computer Science**. 3º. ed. London, UK: Springer-Verlag, 2012.

BENNETT, D. J. **Logic Made Ease How to Know when you Language Deceives You**. New York, NY USA: W. W. Norton Company, 2004.

LEIBNITZ, G.-G. Mémoires de mathématique et de physique de l’Académie royale des sciences. **l’Académie royale des sciences**, 1703. Disponivel em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/ads-00104781/document>. Acesso em: 9 ago. 2020.

PRINCIPIA Mathematica. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2019. Disponivel em: <https://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

SALMON, W. C. SPACE, TIME, AND MOTION A Philosophical Introduction. **University of Arizona**, 2009. Disponivel em: <https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/SpaceTimeMotion/STM.html>. Acesso em: 08 ago. 2020.