CAPÍTULO 1
LÓGICA PROPSICIONAL

1 INTRODUÇÃO

"A lógica é a técnica que usamos para adicionar convicção a verdade."
Jean de la Bruyere

A lógica é a ciência da *avaliação sistemática de argumentos* em busca do convencimento. Usando lógica buscamos o convencimento, a certeza da verdade sua imposição pela estrutura dos argumentos. Não se trata de matemática, nem de filosofia. A lógica é maior que cada uma delas e, talvez, maior que as duas. Nasceu da vontade de aprender, de entender o mundo, da necessidade de separar o pensamento do raciocínio. A lógica é o fio que conecta toda ciência, toda tecnologia e todo o desenvolvimento do pensamento humano em busca do conhecimento do mundo que nos cerca.

A lógica está tão enraizada na sociedade ocidental que ser considerado ilógico é uma espécie de ofensa. A leitora deve maximizar o efeito desta ofensa se o ofendido for da minha geração. A geração que cresceu assistindo o ***Sr. Spock*** falando de lógica como se fora a disciplina mais importante do universo. Havia uma poesia oculta no personagem interpretado por Leonard Nimoy, algo sutil. A beleza da lógica e da matemática resolvendo os problemas cotidianos de uma expedição espacial. Justificando comportamentos, encontrando motivos, descobrindo a razão.

Há 2500 anos, usamos os conceitos da lógica para justificar opiniões, definir teorias e reforçar observações sobre o mundo e sobre aquilo que fazemos com ele. Usamos a lógica para concluir, com nosso foro íntimo, e para convencer outras pessoas das nossas conclusões. A lógica, seus conceitos e argumentos permeiam as relações humanas desde antes dos tempos de Aristóteles e, desde então, se diz: *quanto mais frágil o argumento mais alta a voz*. É a perda da lógica, a morte do raciocínio que marca, ao longo da história, o começo da discussão, da guerra e da dor.

Neste livro, vamos nos dedicar a lógica formal, matemática, voltada ao uso na resolução de problemas computacionais. E vou tentar me afastar da filosofia. Veremos a lógica como sendo a disciplina que suporta a matemática, a razão, o desenvolvimento de software, a inteligência artificial e o estudo de linguagens formais e regulares. Definiremos argumentos, premissas, teses, conclusões, antecedentes, consequentes e outros tantos conceitos que permitirão a leitora encontrar a verdade. Olharemos a lógica com olhos inocentes, ingênuos e puros, veremos o quando, o como e o porquê de cada passo dado no caminho do raciocínio dividindo todo este conhecimento em lógica proposicional, ou **cálculo proposicional**, lógica predicativa, ou **cálculo predicativo** e o **cálculo de sequentes**.

A leitora há que entender, e perdoar, neste livro usarei os termos **cálculo proposicional** e **cálculo predicativo**. Não se trata de nenhuma fixação com a matemática recorro a estes termos apenas na vã esperança de cumprir a promessa de manter este estudo dentro da ciência da computação e longe da filosofia. Para deixar claro desde já, estudaremos **provas matemáticas**.

A lógica matemática e computacional, não está só interessada no convencimento, este convencimento precisa, inequivocamente se estruturado sobre uma **prova irrefutável da verdade**.

Quando digo que vamos estudar a validade de um argumento, me refiro a verdade absoluta e incontestável sedimentada sobre uma camada estável de matemática. A verdade que não vemos todos os dias nas nossas vidas, a verdade que existe apenas na criação de novas técnicas e ciências, a verdade que está além da cor, do sexo, da idade, da religião e da política. A verdade que não se importa com a leitora nem com o autor. É esta verdade que permitiu a criação do computador e da ciência da computação.

A lógica, diferentemente do português, inglês ou mandarim, é uma linguagem artificialmente criada para permitir a análise de argumentos, garantir que esta análise seja compreendida por qualquer um que conheça esta linguagem. A verdade, a conclusão que obtemos sobre argumentos só pode assumir dois estados: ou o argumento é verdadeiro, ou é falso. O interesse da lógica termina quando encontramos a verdade. Deste ponto em diante, cabe à matemática, às ciências ou à tecnologia, decidir o que será feito com a verdade recém descoberta.

Este é o estudo do raciocínio. De uma forma de estruturar o pensamento para que ele se torne algo além de si mesmo. Todos pensamos, pensamos como falamos. Ao pensar simplesmente falamos em nossa mente. A lógica determina uma forma de organizar estes pensamentos em algo superior, o raciocínio. Estudar lógica é aprender a pensar, nos ensina a organizar os pensamentos em sentenças, e estas sentenças em argumentos. Uma vez que o argumento esteja construído, serão as técnicas da lógica que usaremos para encontrar a verdade.

A amável leitora pode definir a lógica como sendo a ciência da avaliação de argumentos. Nesta ciência temos dois resultados possíveis para cada argumento, eles podem ser verdadeiros ou falsos. A lógica quer encontrar este resultado com convicção. Esta convicção, esta certeza, a verdade absoluta sobre um argumento, seja ele verdadeiro ou falso é o que aprenderemos como encontrar, ao longo deste livro.

1.1 Argumentos

Os argumentos, no que concerne à lógica, são sentenças que suportam um raciocínio específico e permitem uma conclusão de forma indutiva ou dedutiva.

Um argumento será verdadeiro só, e somente só, suas premissas e sua conclusão forem verdadeiras.

A forma do argumento é importante, a lógica se preocupa com a forma. Uma das formas lógicas mais antigas, o silogismo é composto de duas sentenças, chamadas de **premissas, ou proposições,** e uma sentença chamada de **conclusão**.

Como disse anteriormente, a avaliação dos argumentos é a função principal da lógica e esta avaliação é feita a luz do raciocínio. Veremos isso de forma matemática ao longo deste capítulo, mas enquanto fundamentamos o conhecimento necessário, suponha que você suporte o seguinte argumento: ***todos os filósofos são inteligente****s* e que em algum ponto da sua vida social um amigo, lhe apresente a Amanda com a sentença: ***Amanda é filósofa***. A conclusão lógica e irrefutável é que ***Amanda é inteligente***.

Este foi nosso primeiro exemplo de raciocínio lógico. Duas **proposições**, ou premissas, se preferirem, levam a uma **conclusão**. Podemos contestar as proposições apresentadas em busca da sua verdade particular. Por exemplo, podemos discutir se é verdade que todos os filósofos são inteligentes ou podemos discutir se Amanda realmente é filósofa. Neste caso, teríamos que ter **argumentos** para avaliar a verdade de *todos os filósofos são inteligentes*, ou ainda verificar se é verdade que *Amanda é filósofa*. Contudo, se soubermos que as duas **proposições** são válidas, somos forçados, pela lógica, a inferir que ***Amanda é inteligente*.** Além de nosso primeiro exemplo de **silogismo** acabamos de ver o nosso primeiro exemplo de **inferência**. Estes são conceitos que transpassam nossa geração, talvez seja necessário voltar uns 2500 anos para entender como chegamos até aqui.

1.2 Muitos gregos, poucos fatos

Marcaremos o começo do estudo da lógica nos trabalhos de **Aristóteles** (384 A.C. 322 A.C.) ainda que os poucos escritos de sua própria autoria que chegaram até nós indiquem que o próprio Aristóteles tenha aprendido os conceitos básicos da lógica com os seus professores. Mas, como temos que marcar um ponto inicial, vamos marcar este ponto aqui: nos trabalhos de Aristóteles.

A palavra lógica tem origem na palavra grega *λογική*[1] que, originalmente significava: aquilo que foi dito. Com o tempo a palavra logo assumiu o sentido de razão, motivo, e foi intrinsicamente relacionado com aquilo que pode ser provado como certo. Este pobre autor gosta de pensar que esta modificação no

[1] Lógica escrito em grego arcaico.

sentido da palavra entre na conta do esforço realizado no estudo da racionalidade das sentenças. Ao estudo da verdade, da conclusão.

Aristóteles era filho do médico do rei da Macedônia e ficou órfão ainda jovem. Não perdeu seu status na corte sendo criado em abundância e conforto. Aprendeu poesia e retórica e teve o privilégio de estudar com **Platão** em Atenas. Na época, uma das mais prestigiosas escolas. Estudar com Platão, além de dar conhecimento e oportunidade dava status.

Estão nos tratados de Aristóteles os primeiros registros escritos do estudo da lógica e algumas das ideias que pavimentaram o caminho da ciência. Deixe-me ser um pouco mais claro, existem cópias em árabe, grego antigo e latim, de documentos mais antigos que registravam como sendo de Aristóteles as ideias que fundamentaram o desenvolvimento da ciência. E senão tudo, a maioria absoluta de tudo que temos, e atribuímos a Aristóteles, foi preservado pela civilização islâmica. Ainda assim, com cópias, das cópias, das cópias, é possível observar que Aristóteles não estudava lógica sozinho.

Nos tempos de Aristóteles, a lógica florescia na Escola de Megara onde se estudavam quebra-cabeças lógicos e **paradoxos**, encontrando, discutindo e registrando a existência de alguns destes fenômenos do pensamento. Contradições curiosas que nos levam a perceber os limites da nossa capacidade de raciocínio, os paradoxos são indispensáveis para a evolução da ciência e, todos os dias temos novas discussões sobre alguns destes paradoxos. Os professores de Megara parecem ter estudado a lógica por meio do erro. Destacando problemas em que a lógica perde sentido.

Além das escolas de Atenas e Megara, a Escola Estoica, também da cidade Atenas, fundada por ***Zeno de Citium*** quase 100 anos antes de Aristóteles, ainda nos tempos em que ***Sócrates*** era o grande professor de Atenas, teve importante influência no desenvolvimento do pensamento lógico. Da Escola Estoica, vamos destacar o professor ***Diodorus Cronus***.

Conhecemos os trabalhos de Cronus porque estão nos tratados de Aristóteles as indicações de que foi Cronus quem considerou o raciocínio lógico baseado em três sentenças com a terceira indicando a conclusão do raciocínio. Esta é a mesma estrutura de decisão que vimos no exemplo da Amanda e que cristaliza aquilo que Aristóteles chamou de silogismo.

A palavra silogismo também é de origem grega e significa conclusão, ou inferência. Vamos comentando e criando nosso vocabulário. Assim, aos poucos, eu e a leitora, falaremos a mesma língua.

Não temos muita certeza sobre a relação entre Cronus e Aristóteles cremos que Cronus tenha influenciado Aristóteles, talvez como um contemporâneo mais velho ou como um concorrente. O pouco que restou escrito desta época, conservado pelos mouros, não permite nenhuma conclusão definitiva. Parece que foi Aristóteles que primeiro percebeu a importância da forma na definição da verdade e, seus estudos e conclusões sobre os silogismos constituem, ainda hoje, o melhor estudo sobre o tema e, sobreviveram aos últimos 2300 anos sem perder a integridade, ou a validade, sofrendo, aqui, ou ali, poucas modificações. Algo extraordinário.

A maioria dos livros de lógica atribuem a Aristóteles a criação dos silogismos, contudo isto não está realmente claro, não há como verificar se foi Aristóteles, Cronus, o algum outro professor da época. Talvez tenha sido uma consequência do trabalho, em cooperação ou concorrência, de duas, ou três gerações de estudiosos gregos. Entretanto, fugindo tanto quanto possível da pretensão podemos atribuir a Aristóteles o mérito de perceber que a forma da argumentação tem mais impacto na percepção da verdade que o conteúdo dos argumentos. Não bastasse isso, também devemos a Aristóteles o registro da forma que damos aos silogismos e o uso de letras para representar as proposições que os compõem. Não é pouca coisa, é mais que suficiente para dizermos que a lógica como conhecemos hoje, começou na Escola de Atenas, nos escritos de Aristóteles. Mas, isto é a lógica. Ramos da filosofia que deu origem, mil e quinhentos anos mais tarde, a uma das mais importantes áreas da matemática.

O cálculo proposicional, não foi criado pelos gregos, pelo menos não com este nome. Ainda assim, podemos traçar sua origem até a Escola Estoica, a Cronus ou, mais precisamente, a ***Chrysippus*****,** outro professor. Também se a precisão matemática a que estamos acostumados e nos baseando apenas nas cópias que resistiram ao tempo, parece que Chrysippus foi o responsável pelo estudo de dois argumentos fundamentais para a prova matemática os argumentos conhecidos como *Modus Ponens* e *Tollens*, além, é claro, do Silogismo Hipotético e da inclusão da análise condicional no processo de raciocínio lógico. Ele até podia não saber disso, mas estudando dialética e a lógica das nossas afirmações Chrysippus estava criando a estrutura matemática que permitiria a criação dos computadores. Veremos isso mais tarde, ainda neste livro, por enquanto, para entender a lógica, precisamos entender o raciocínio e para isso podemos começar com silogismos.

1.3 Silogismos

"... um silogismo completo, a premissa antes da consequência, a consequência antes da conclusão ..."
Machado de Assis, Dom Casmurro.

Silogismos são estruturas de raciocínio formadas por duas sentenças, chamadas de premissas, ou proposições, e uma conclusão. Lembre-se silogismo no sentido original tem o sentido de indicar uma conclusão.

Quando Aristóteles usou a palavra *συλλογισμός*, silogismo, para nomear uma forma de raciocínio, estava realmente definindo uma fórmula para a conclusão da verdade.

O silogismo, como definido por Aristóteles, é a forma que precisamos usar para ordenar premissas para conduzir o raciocínio na direção da conclusão. A conclusão obtida é chamada de lógica e poderia, sem nenhum pudor, ser chamada de verdade. Isto por quê, sejam as premissas verdadeiras, ou falsas, a conclusão mostrará a verdade.

Vimos um silogismo, de forma completamente informal, quando falamos que *Amanda é inteligente*. Aristóteles nos ensinou que para encontrar a verdade, devemos nos preocupar com a forma. A forma permite a descoberta da verdade e independe do conteúdo.

Para atender os processos definidos por Aristóteles, o silogismo deve ser escrito e organizado de modo a explicitar as sentenças separando as premissas da conclusão, como pode ser visto nos Exemplo 1.1 e 1.2.

Exemplo 1.1: exemplo de silogismo.

Todos os filósofos são inteligentes
Amanda é filósofa

Portanto, Amanda é inteligente

Exemplo 1.2: exemplo de silogismo.

Todos os homens são mortais
Sócrates é um homem
Portanto, Sócrates é mortal

É possível perceber que estes exemplos compartilham uma estrutura comum, que pode ser usada para qualquer conjunto de argumentos.

Todos x são y
z é x

Portanto, z é y

Machado de Assis, que citei anteriormente sabia disso e usava esta estrutura em seus livros. Na época, o silogismo era composto de duas proposições, a premissa e a consequência e terminava em uma conclusão. Leia Dom Casmurro, por exemplo, com os olhos da lógica e verá Machado de Assis criando premissas, mostrando consequências e levando a leitora as conclusões que deseja para contar a história de Bento e Capitu.

Mesmo que seja importante, a estrutura do silogismo não garante a correção do raciocínio nem das proposições, veja, o Exemplo 1.3.

Exemplo 1.3: exemplo de falácia.

Todos os corvos são pretos.

Os corvos são pássaros.

Portanto, todos os pássaros são pretos.

O Exemplo 3 está perfeitamente formado, mas a conclusão não é correta. O argumento é válido perante a lógica contudo, sabemos que a conclusão está errada. Se isso acontece o silogismo precisa estar errado. De fato, este caso indica uma falácia, uma palavra com origem no latim significando truque, no sentido de ser enganado.

Uma falácia é um engano no silogismo. As duas premissas no Exemplo 3 são verdadeiras, mas combinadas não provam que a conclusão é verdadeira. Existem apenas 64 tipos de silogismos possíveis que não veremos neste livro, a não ser que seja necessário para provar algumas das ideias que ainda não tive.

Depois de Aristóteles, Cronus, Chrysippus e seus contemporâneos; a lógica viajou entre os romanos, e árabes, se perdeu no Incêndio de Alexandria, ficou quase mil anos sendo valorizada apenas pela Civilização do Islã e voltou a Europa apenas nos anos 1200, quase sempre entre estudiosos de teologia. Vou, por enquanto, pular toda a filosofia desenvolvida neste período, dar um pulo de 1200 anos e tomar a liberdade de marcar o nascimento da lógica matemática graças os esforços de um homem em busca da paz Gottfried-Willhelm Leibniz.

1.4 A busca pela paz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), viveu na Alemanha, no crepúsculo do iluminismo e foi um dos mais produtivos matemáticos da história. Atingiu o ápice da sua produção científica desenvolvendo o cálculo integral e diferencial de na mesma época que **Isaac Newton** de forma independente.

Figura 1.4-1 - Retrato de Leibniz, pintado em Christoph Bernhard Francke (FRANCKE, 2020)

Para o esforço que estamos fazendo para entender a lógica, interessam seus trabalhos com aritmética binária publicados em ***Explication de l'Arithmétique Binaire*** [2] e uma análise detalhada das operações matemáticas que podemos fazer com as proposições. Há aqui, um ponto que merece atenção: operações matemáticas com sentenças? Afinal, uma proposição é uma sentença.

Leibniz acreditava ser capaz de criar uma linguagem universal para representar a lógica e o raciocínio. De forma que a verdade pudesse ser encontrada a partir da análise matemática da relação entre proposições reduzidas a um sistema simbólico e, neste caminho estruturou algumas das operações que usamos até hoje.

Leibniz sonhava com a solução dos problemas mundiais por meio de uma linguagem universal que estruturasse o raciocínio lógico e levasse a descoberta da verdade. Sem que a verdade precisasse ser imposta pela fumaça dos canhões ou pela chibata do carrasco. Seu trabalho inspirou ***George Boole*** (1815–1864), no Século XIX e ***Gottolob Frege*** (1848-1925) no Século XX. O primeiro criou a álgebra lógica, que mais tarde chamamos de Álgebra de Boole, o segundo criou o cálculo de predicados, tema de outro capítulo deste mesmo livro e ferramenta indispensável para toda a disciplina da inteligência artificial.

1.5 Álgebra Booleana

George Boole, em 1854 ***The Laws of Thought*** apresentando o que conhecemos hoje como **Álgebra Booleana**. Neste ponto da história, Boole dispunha dos conceitos de proposição, de operações lógicas para estas proposições, e uma aritmética de números binários. Faltava uma álgebra que permitisse completar esta estrutura matemática.

[2] Em tradução livre: Explicações da Aritmética Binária (LEIBNITZ, 1703).

Coube a Boole, filho de um comerciante de classe média a honra de completar o sonho de Leibnitz. Curiosamente o interesse de Boole pela lógica surge de disputa entre seu amigo ***Augustus De Morgan*** e Willian Hamilton.

Estávamos em um momento de efervescência cultural, econômica e científica. Muitos estudiosos haviam reconhecido que sistemas algébricos não tinham relação com números e que estes conceitos poderiam ser expandidos para englobar outros objetos, e outras áreas de pesquisa. A álgebra não precisava ficar restrita ao universo dos números seus conceitos poderiam ser aplicados a conjuntos de maças, a geometria, a navegação e a tudo mais que alguém pudesse imaginar desde que fossem mantidas suas regras. Eu ia dizer axiomas, postulados e teoremas, mas vou deixar isso para o Apêndice 1[3].

Boole publicou um pequeno trabalho, ***The Mathematical Analysis of Logic***[4], que foi imediatamente reconhecido como sendo o precursor de toda uma nova área da matemática.

Boole, conseguira criar as leis da álgebra simbólica para a lógica, de forma matemática, elegante e simples. Tão simples que álgebra desenvolvida por Boole, seria, quase um século depois, utilizada em circuitos eletrônicos.

Este movimento, da lógica pura para a Eletrônica Digital ocorre graças ao trabalho de ***Claude Shannon***. Na sua tese de mestrado: ***Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*** (1940), Shannon utiliza a Álgebra de Boole para simplificar circuitos eletrônicos de controle. O trabalho de Shannon criou a ferramenta que usaríamos para criar o computador eletrônico digital.

O próximo passo importante neste caminho é o Paradoxo de Russel. Mas antes, o que é um paradoxo?

1.6 Paradoxos

Paradoxo é uma sentença que não tem a verdade bem definida, se a sentença for verdadeira, o argumento é falso. Se a sentença for falsa, o argumento é verdadeiro.

> *Um silogismo cuja conclusão não pode ser determinado como verdadeiro, ou falso, é um paradoxo.*

Um dos paradoxos mais antigos e famosos, o ***paradoxo do mentiroso***, pode ser ligado às escolas gregas de filosofia, é simples e pode ser demonstrado

[3] Sempre quis escrever um livro com apêndices. Acho isto tão chique!

[4] Em tradução livre: A Análise Matemática da Lógica. Disponível em: *http://www.gutenberg.org/files/36884/36884-pdf.pdf*. Muito interessante ver que em 1874, os escritores também citavam outros autores, textualmente, no idioma original do citado. No caso do Boole, ele cita Aristóteles, em Grego.

com uma sentença: **eu sempre minto**. E deixo que a leitora responda, a sentença em destaque neste parágrafo é verdadeira ou falsa?

Para responder esta pergunta, classificando esta proposição, existem algumas considerações que devemos fazer. Vamos, antes de qualquer coisa chamar a sentença **eu sempre minto** de p. Lembre-se quem começou esta tradição de representar proposições por letras foi Aristóteles, então não estou fazendo nada que o grande professor não teria feito.

Se a proposição p é verdadeira, então "**eu sempre minto"** é verdadeira. Portanto, p deve ser falsa implicando que nem sempre eu minto. A hipótese de que p é verdadeira leva à conclusão de que p é falsa, ou seja, existe uma contradição.

A coisa fica ainda mais interessante se a proposição p for falsa, então "**eu sempre minto**" é falsa. Portanto, p deve ser verdadeira. Logo, estou mentindo, o que quer dizer que nem sempre minto. A hipótese de que p é falsa leva à conclusão de que p é verdadeira, ou seja, outra contradição.

Esta é uma boa hora para se levantar, tomar uma água e lembrar que o estudo da lógica é fundamental para o progresso da humanidade. Esfriar a cabeça, considerar que estamos lidando com paradoxos desde que Sócrates caminhava sobre as praias da Grécia e ficar furioso com um paradoxo é, praticamente, pré-requisito para ser humano.

Do ponto de vista da filosofia, esta frase, provavelmente cunhada no Século VI A.C. quase trezentos anos antes de Aristóteles e Cronus, por um Cretense mitológico chamado de ***Epinemides***, sequer é considerada um paradoxo. Isso é lá com a filosofia e ao contrário da Amanda, nossa heroína, não sou filósofo.

O paradoxo do mentiroso vem dando nós nas mentes mais brilhantes da história desde que foi escrito, ou dito, por alguém cheio de maldade. E, ao longo da história, aparece como se fosse um vírus debochando de nossa capacidade de raciocínio, nos lugares mais inesperados.

Paulo de Tarso, São Paulo para os católicos, utiliza uma variação deste paradoxo em uma das Epístolas a Tito (cap. 1 v:12 e 13):

12. Um deles, seu próprio profeta, disse: Os cretenses são sempre mentirosos, bestas ruins, ventres preguiçosos.
13. Este testemunho é verdadeiro. Portanto, repreende-os severamente, para que sejam sãos na fé.

Há uma carga gigantesca de ironia, da parte de Paulo, nestes dois versos, que está aborrecendo filósofos e teólogos há quase 2000 anos. Contudo, vou deixar a análise teológica e filosófica destes dois versos para hora, lugar, texto e escritor certos.

Figura 1.6-1 - Este não é um cachimbo, De René Margritte. Uma pintura de 1929, ou um paradoxo? (MAGRITTE, 2011)

O paradoxo do mentiroso não é o único paradoxo importante, apenas o mais simples e já que este é um livro de lógica matemática, e vamos dar nós em nossas próprias mentes não podíamos deixar de compartilhar com a leitora o ódio gutural que sinto por Epinemides.

Já que estamos dando nós em cérebros, precisamos falar dos Paradoxos de Zeno. Ou pelo menos de um deles que está relacionado com Leibniz.

Zeno, Zenon, ou Zenão em português, conhecido como ***Zeno de Eleia*** também se preocupou com paradoxos antes dos tempos de Aristóteles. Seus paradoxos influenciam a física e a matemática. E aborrecem estudiosos dos dois campos até os dias de hoje. Um deles, o paradoxo do deslocamento, é frequentemente utilizado para explicar o cálculo diferencial e integral. Infelizmente não restou nada dos escritos de Zeno e tudo que temos sobre ele está nos trabalhos de Aristóteles, milagrosamente preservados pelos estudiosos árabes e persas. A leitora deve estar curiosa sobre este paradoxo que achei tão importante a ponto de mencionar aqui, então responda a seguinte questão:

Considere a lâmpada do seu escritório, esta lâmpada está ligada a um interruptor e você pode desligar, ou ligar a lâmpada, infinitas vezes, em um espaço finito de tempo que mediremos. A lâmpada começa ligada, um minuto depois você a desliga, passam-se 30 segundos e você a liga novamente, mais quinze segundos se vão e você a desliga e, a cada passagem da metade do tempo gasto na última interação, você muda o estado da lâmpada. Depois de dois minutos, a lâmpada estará apagada ou acesa?

Pare agora. Nem que seja por alguns minutos e tente responder esta questão. Não tem pressa. Eu espero.

Voltou? Sinto dizer, não existe uma resposta correta, e não, não vou dizer onde estaciono meu carro.

No paradoxo do deslocamento, o infinito colocado no enunciado leva esta questão ao domínio dos paradoxos. Não temos como verificar o estado da lâmpada porque como o você irá mudar o estado de aceso para apagado infinitamente e a cada mudança o tempo entre as mudanças fica menor não temos como saber o número de transições que ocorrerão nos dois minutos determinados. Dizemos que o número de transições de estado tende ao infinito. Uma frase que usamos com frequência quando encontramos ligeiramente próximo de um paradoxo na matemática. E que sustenta a noção de derivação e, consequentemente, de integração.

Uma das primeiras versões deste Paradoxo de Zeno, a mais antiga que chegou até nosso tempo, está relacionada com flechas, pintores e alvos. Coisas comuns na época de Zeno e raras na nossa. Usei a metáfora da lâmpada que vi, em algum lugar, há alguns anos, por achar que seria mais adequada a nossos tempos de energia elétrica e computação quântica.

> *Só para que não restem dúvidas, paradoxos não são proposições. Por definição um paradoxo é uma sentença que não pode ser provada verdadeira ou falsa. A proposição, por definição é uma sentença provada falsa ou verdadeira.*

Estes foram dois exemplos de paradoxos importantes para a lógica e para a matemática, mas não se comparam os paradoxos e avanços que encaramos a partir do final dos anos 1800 para a computação, computabilidade e complexidade. Entre estes o Paradoxo de Russel se destaca.

1.7 O Paradoxo de Russell

Bertrand Russel (1872 – 1970) tentou reescrever toda a matemática a partir da Teoria dos Conjuntos, conforme fora postulada por ***Georg Cantor***, e fracassou ao encontrar um dos mais famosos paradoxos da história da matemática.

A pretensão de provar toda a matemática a partir da Teoria dos Conjuntos não era exclusiva de Russell. Outros matemáticos antes dele, e alguns depois, perseguiram este objetivo. Entre estes últimos destacam-se ***Kurt Gödel*** e ***Alonzo Church*** cujos trabalhos, em lógica e nas teorias da computabilidade e complexidade têm impacto direto na criação do mundo em que vivemos e serão, estudados neste livro, assim que se tornarem relevantes na nossa trajetória.

Russell, além de ser escritor, estudou filosofia, matemática e lógica. Em 1901, estudando a Teoria dos Conjuntos de ***Georg Cantor***, encontrou um paradoxo na definição de conjuntos. O mesmo paradoxo já havia sido estudado, mas não publicado por ***Ernst Zermelo*** em 1899 e pelo próprio Georg Cantor em 1890. A história atribui este paradoxo a Russell graças a sua publicação.

A tentativa de Russell e Alfred North Whitehead, de provar toda a matemática partindo da teoria dos conjuntos, registrada no livro ***Principia Mathematica*** contribuiu definitivamente para o formalismo da lógica incluindo-a definitivamente, irrestritamente e indiscutivelmente, na matemática.

A simbologia de linguagem da lógica que adotamos neste livro tem origem no *Principia Mathematica*. Veremos, é claro, a versão mais atualizada possível desta simbologia. De forma que a leitora não seja forçada a algo que seja inútil ou ultrapassado. Mas, falávamos do Paradoxo de Russel e este pode ser definido da seguinte forma:

*Considere A como o conjunto formado por todos os conjuntos que **não** contém a si mesmos. De tal forma que:*

$$A = \{S|S \notin S\}.$$

Incrível, não? Uma simples frase e ficamos imersos em dúvidas: Seria A um elemento de si mesmo? Seria o conjunto A um elemento do conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmos?

Vamos pensar um pouco sobre este paradoxo. Se A é um elemento de A isso significa que ele é um elemento de si mesmo. Logo, pela própria definição de A ele não poderia conter a si mesmo, já que A é o conjunto de conjuntos que não contém a si mesmos. Como esta opção é impossível, devemos concluir que A não é um elemento de si mesmo. Mas, se ele não contém a si mesmo. Ele precisa, necessariamente, ser um elemento do conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmo. E pronto, lá se foi a teoria dos conjuntos por água abaixo, levando consigo uma parte importante do cérebro deste pobre autor. O Paradoxo de Russell acendeu um farol indicando um problema em uma das mais importantes teoria da matemática e abriu uma brecha para a criação de novas teorias matemáticas, inspirou ***Kurt Gödel*** (1906-1978) cujo trabalho criou a Ciência da Computação Teórica e a ***Alonzo Church*** (1903-1995).

Alonzo Church seguiu a picada aberta por Russell e acabou criando uma área da matemática, o Cálculo Lambda, que suporta uma parte importante do Cálculo de Sequentes, que veremos no Capítulo 3, e deu origem as linguagens de programação funcional revolucionando a forma como avaliamos os tipos de dados usados em constantes, variáveis e funções em computação.

Outra consequência do trabalho de Russell: a formalização da linguagem de representação de proposições e das operações entre proposições, anteriormente estudadas por Leibnitz, e Boole, tem impacto neste livro e em todo o estudo da lógica. Russell ajudou a estruturar a parte da matemática que chamamos de **cálculo proposicional**.

1.0 Exercícios

Responda as seguintes questões. Se for preciso pesquise, isso irá completar seu entendimento do que que é lógica e qual a sua origem.

a) Na área da lógica quais avanços podemos atribuir a Aristóteles?

b) O que é um paradoxo?

c) Qual foi a participação de George Boole no avanço da lógica?

d) No que diz respeito a matemática e a lógica, o que Leibnitz conseguiu enquanto buscava a paz mundial?

e) Descreva por que o Paradoxo de Russel é um Paradoxo?

f) Qual a estrutura de um silogismo?

g) Qual a diferença entre paradoxo e proposição?

h) A pintura de René Margritte apresentada na Figura 1.6.1 é um paradoxo? Justifique.

i) Qual a diferença entre silogismo e falácia?

j) O que é um argumento?

2 CÁLCULO PROPOSICIONAL

No **Cálculo Proposicional** vamos usar as proposições como operandos em expressões lógicas. O Cálculo Proposicional é uma linguagem formal para a expressão de sentenças lógicas com dois elementos construtores, a proposição e os operadores e dois conjuntos de avalição, as regras de substituição e as regras de inferência.

A proposição, é uma declaração, na forma de sentença, que é verdadeira $\boldsymbol{ou}$ falsa. Nunca as duas conclusões ao mesmo tempo e nunca sem um destas conclusões. Os operadores são, na linguagem natural, as palavras e conectivos, que usamos para criar proposições complexas. E na linguagem formal as letras que usamos para representar as proposições e os símbolos que usamos para representar os conectivos. São cinco símbolos que usamos para representar os conectivos e no Cálculo Proposicional chamaremos estes símbolos de operadores. O conjunto de símbolos e letras que usaremos para representar as proposições chamaremos de fórmula.

A proposição é uma declaração, na forma de sentença fechada, cuja verdade só pode ser demonstrada em um de dois estados diferentes. Ou a proposição é verdadeira, ou é falsa. Além disso, chamaremos as proposições de atômicas sempre que uma proposição não puder ser dividida em outras proposições.

> *Chama-se de conectivo a palavra que usamos para criar proposições, proposições compostas, a partir de composições atômicas.*

Uma proposição jamais será verdadeira $\boldsymbol{e}$ falsa e, da mesma forma uma proposição não poderá ser nem verdadeira $e\,nem$ falsa. Se olharmos a definição de proposição vemos uma aplicação do conectivo $\boldsymbol{ou}$. Este conectivo, quando usado em português significa que só pode existir um de dois estados possíveis. Uma proposição é uma sentença fechada.

> *Sentenças fechadas são aquelas que podemos definir como verdadeiras ou falsas. O caso contrário, as sentenças abertas são aquelas onde não podemos determinar sua verdade ou falsidade.*

O **Cálculo Proposicional** é a parte da lógica matemática que estuda a existência das proposições; sua verdade ou falsidade; a criação de proposições simples (ou atômicas) e a criação de proposições complexas (ou compostas). E, principalmente as fórmulas o que podemos aprender da combinação destas proposições com seus operadores.

2.1 Proposições

Vamos começar estudando as proposições, sua verdade e estrutura, na forma sentencial, a forma como falamos e escrevemos em linguagem natural. Começando com o Exemplo 2.1.

Exemplo 2.1: proposições

1. Lima é a Capital da China
2. Paris é a Capital da França
3. $1 + 1 = 2$
4. Todos os gatos são animais

Todas as declarações do Exemplo 4 são proposições. Todas estas sentenças, ou são verdadeiras (2 e 4), ou falsas (1, 3) e não resta dúvida sobre a verdade de cada uma destas declarações. Aqui, no domínio da linguística e do racional, a prova matemática é dispensável.

A verdade de três das proposições apresentadas no Exemplo 4 é inerente ao conjunto interno de conhecimento da própria leitora. Conjunto este formado pelos milhares de proposições que a leitora, eu, e toda a humanidade, foi aceitando como verdadeira ao longo da vida. Uma delas, podemos provar matematicamente, ainda que o esforço seja enorme, será mínimo se comparado ao esforço necessário para provar as outras três. A proposição "1+1=2" foi matematicamente provada em um pouco mais de 360 páginas, por Russell no *Principia Mathematica*.

Até este ponto temos usado sentenças escritas em uma linguagem natural, o português como falado no Brasil. As linguagens naturais são complexas e permitem a ocorrência de ambiguidades, levando a conclusões erradas ou incompletas. Como pode ser visto no Exemplo 2.2.

Exemplo 2.2: caso de ambiguidade.

Sexo ruim é melhor que nada.
Nada e melhor que sexo bom.

Portanto, sexo ruim é melhor que sexo bom.

O exemplo 2.2 é uma falácia provocada pela ambiguidade. Tanto a ambiguidade quanto a complexidade são características indesejadas e, não raramente, levam a falácias e impedem a validação de uma prova matemática. Aristóteles, Leibniz, Russell e Boole, perceberam isso e, ao longo dos séculos, aprimoraram uma notação matemática para representar proposições, suas operações justamente para garantir a inexistência de ambiguidades e diminuir a complexidade.

As proposições que usamos nos exemplos anteriores são ditas atômicas, ou simples, estão contidas em si mesmo e sua verdade depende apenas da sua aceitação como verdadeiras ou falsas.

A verdade, ou falsidade da proposição pode ser discutida, mas para cada discussão, em algum ponto, precisaremos partir de um conhecimento de verdade, ou falsidade, de alguma proposição básica e, criar toda a estrutura de prova.

Representaremos as proposições atômicas, como fizemos antes de forma informal, por letras minúsculas. As letras p, q, r, s, t são as letras que usaremos com mais frequência. Também usaremos as letras maiúsculas T para representar verdadeiro e F para representar falso como símbolos para indicar a verdade de uma determinada proposição. O formalismo matemático me obriga a usar os símbolos ⊤, *verum*, e ⊥, *falsum* do latim verdadeiro e falso, mas vou considerar estes símbolos arcaicos e evitar seu uso.

Ainda vou usar outra licença poética. Usarei o símbolo ≡, equivalente, para substituir a expressão: *tem valor de*. Desta forma, se a leitora vir $s \equiv F$ deverá ler: *s tem valor falso*. Desta forma, podemos usar as mesmas proposições do Exemplo 4 para construir o Exemplo 2.3:

Exemplo 2.3: identificação algébrica de proposições.

1. p = Escreva este texto ainda hoje. $(\text{não é } uma\ proposição)$
2. q = Paris é a Capital da França. $(q \equiv T)$
3. $r = 1 + 1 = 2\ (r \equiv F)$
4. s = Todos os gatos são animais. $(s \equiv T)$

Toda proposição é uma sentença, mas, nem toda sentença é uma proposição, como podemos ver no Exemplo 2.4:

Exemplo 2.4: sentenças e proposições.

1. Escreva este texto ainda hoje. $(\text{não é } uma\ proposição)$
2. $x + 4 = 6\ (\text{não é } uma\ proposição)$

3. $r = 1 + 1 = 2\ (r \equiv F)$
4. $s =$ Todos os gatos são animais. $(s \equiv T)$

A sentença do Exemplo 2.4-1 não é uma proposição porque não é uma declaração e a sentença do Exemplo 2.4-2 não é uma proposição porque não temos como garantir se ela é verdadeira ou falsa. Observe que, no Exemplo 2.4-2, assim que for atribuído um valor a x, poderemos definir se a sentença é verdadeira ou falsa e teremos uma proposição.

As regras da sintaxe do Cálculo Proposicional definem a estrutura de cada proposição enquanto a semântica é responsável pela interpretação. A semântica define a atribuição do valor verdadeiro T ou falso F para cada proposição.

2.1 Exercícios

Classifique as sentenças a seguir como proposição, ou não.

a) Olhe que lindo pôr do sol!

b) Você joga futebol?

c) Três mais dois igual a cinco.

d) $X^2 + 3 = 20$

Solução: neste formato esta equação **não é uma proposição**.

Não temos como fazer qualquer afirmação sobre o valor de x, mas a leitora deve ter em mente que a matemática é incrível e sempre podemos trabalhar equações e transformá-las em proposição.

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{20 - 3}}$$

E, neste caso, $\boldsymbol{x = -\sqrt{17}\ ou\ x = \sqrt{17}}$. Em outros casos, podemos usar a teoria dos conjuntos. Em todos eles, precisamos observar e equação e lê-la cuidadosamente.

e) Carlos é careca.

f) Francisco não é o Papa.

g) Ele foi campeão mundial com o Brasil em 1970.

h) O mar é azul ou verde.

i) O quadrado de cinco é oito.

j) Qual a distância da próxima cidade?

A prova da verdade, que tanto buscamos, é uma construção sintática que permite a dedução de uma fórmula a partir de um conjunto de outras fórmulas, que chamaremos de ***premissas*,** conhecimento dado *a priori*, por meio do uso das ***regras de inferência***. As proposições atômicas podem ser combinadas por meio de operações, com nomes derivados da linguagem natural, tais como $E, OU, implica$ e $negação$. A operação mais simples é uma operação unária representada pela negação.

2.2 Operador unário - Negação

Temos um e apenas um operador unário em cálculo proposicional, o operador de negação, em inglês *not*, representando por $\neg$ ou, em alguns livros, $\sim$.

> *Operadores unários são aqueles cuja operação usa um e, somente um, operando.*

Se uma proposição é verdadeira a aplicação deste operador a transforma em falsa e vice-versa. Por causa desta inversão, este operador também pode ser chamado de inversor ou *inverter* em inglês.

Se usarmos sentenças de uma linguagem natural como o Português falado no Brasil o operador de negação poderá ser representado, entre outras possibilidades por:

a) não;
b) não é o caso;
c) não é verdade que;

Exemplo 2.4: exemplo de negação.

$$p \equiv \textit{Maria foi a praia.}\ \neg p \equiv \textit{Maria não foi a praia}$$
$$q \equiv \textit{Sócrates era professor.}\ \neg q \equiv \textit{Não é verdade que Sócrates era professor}$$
$$erro \quad r \equiv \textit{O carro de Jane é azul.}\ \neg r \equiv \textit{O carro de Jane é verde.}$$
$$t \equiv O\ padre\ venceu.\ \neg t \equiv \textit{Não é o caso que o padre tenha vencido}$$

A leitora deve ter uma atenção toda especial a construções como a marcada com $erro$ no Exemplo 2.4. As duas frases são contraditórias e não uma negação. A ocorrência de proposições desta forma invalida o argumento e a proposição.

Podemos usar o operador de negação quantas vezes for necessário, sempre a frente de proposição que estamos operando, por exemplo, a negação da proposição q é representada por $\neg\, q$ ou $\sim q$ que se lê como ***não q***. Como disse, podemos aplicar o operador $\neg$ quantas vezes for necessário, a qualquer proposição de tal forma que se $q \equiv\ T$ logo $\neg q \equiv\ F$ e se $r \equiv\ F$ logo $\neg\neg r \equiv\ F$. No último caso $\neg\neg r$ temos uma negação dupla.

A negação é simples e direta, mas tem suas particularidades, principalmente se aplicada a proposições compostas, as proposições que são formadas pela operação de duas proposições, ou pelo conjunto destas operações. Estas proposições compostas nascem do uso dos operadores binários.

2.3 Operadores binários

Operadores binários são aqueles que são aplicados a dois operandos e determinam a relação entre eles. Temos quatro operadores binários no cálculo proposicional, todos derivados de conectivos que usamos na linguagem natural quando desejamos expressar a relação entre duas senteças.

1. A conjunção ou operador $E\ (and)$ representado por $\wedge$ tal que a conjunção entre p e q e representada por $p\ \wedge\ q$.
2. A disjunção ou operador $Ou\ (or)$ representado por $\vee$ tal que a disjunção entre p e q e representada por $p\ \vee\ q$.
3. A condicional, ou implicação, representada pelo operador $\rightarrow$ e representa a estrutura gramatical *se...então*. Tal que: $p \rightarrow q$.
4. A Bicondicional representada pelo operador $\leftrightarrow$ tal que: $p \leftrightarrow q$. O operador bicondicional representa estruturas sentenciais que contenham expressões do tipo: *se, e somente se*.

Vamos estudar todos estes operadores detalhadamente logo a seguir. Por enquanto vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 2.5: operadores binários forma sentencial.

$p \vee q \equiv$ *Maria ou Paula foi a praia.*

$q \wedge r \equiv$ *Sócrates era professor e filósofo.*

$s \rightarrow t \equiv$ *Se carro de Jane é azul então ele não é preto.*

$u \leftrightarrow v \equiv$ Faremos churrasco se, e somente se não chover.

2.2 Exercícios

Represente na forma proposicional as seguintes sentenças, sem se preocupar com a validade, ou não, da proposição.

a) Ana joga futebol, Marisa joga xadrez.

b) Silvia e Marcela são advogadas.

c) Se jogar futebol ficará cansado.

d) O carro de Luiza não é verde.

e) $(0 < x < 12)$.

Solução: $p \equiv (0 < x)$, $q \equiv (x < 12) \therefore p \wedge q$

Neste caso, podemos transformar em proposição usando a teoria dos conjuntos e representar na forma acima ou, se preferir:

$$(x \mid x \in (0 < x)) \wedge (x \mid x \in \; x < 12)$$

f) Simone compra pão se, somente se, o pão estiver barato.

g) Se estudar passará na prova.

h) Se não estudar não passará na prova.

i) Amélia vai ao parque ou a praia.

j) Não é verdade que o céu é laranja.

3 OPERAÇÕES E OPERADORES

"Todas as verdades são de entendimento simples e fácil, uma vez que elas foram descobertas. O problema está em descobri-las."
Galileu Galilei.

As sentenças, ainda que possam conter ideias contraditórias e ambíguas, são claras e a definição da sua estrutura depende da linguagem utilizada. Você deve ter aprendido o alfabeto, a sintaxe e a semântica do Português como falado no Brasil, nos ciclos básicos de educação e com sua família. E tem uma noção de como representar uma ideia em palavras sem se preocupar com objetos diretos e predicados. Aqui, vamos pegar este conhecimento para escrever sentenças declarativas que possam ser classificadas como proposições. E apenas as sentenças declarativas.

Proposição é uma sentença declarativa que só pode ser falsa ***ou*** verdadeira. Sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas não podem ser proposições já que é impossível determinar a verdade destas sentenças. *Hoje está chovendo muito!* Não é uma proposição enquanto, *hoje está chovendo muito. é* uma proposição. Então podemos dizer, só para lembrar, que:

> *Proposição é todo conjunto de palavras que exprimem um pensamento de sentido completo e este sentido pode ser verdadeiro ou falso. E apenas verdadeiro ou falso.*

As proposições seguem alguns princípios criados no século 3 A.C e são atribuídos a ***Chrysippus***, professor da Escola Estoica. Em uma forma puramente sentencial podemos enunciar estes princípios como:

1. **Princípio de identidade:** uma proposição verdadeira é verdadeira e uma proposição falsa é falsa.

2. **Princípio da não contradição:** nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa.

3. **Princípio do terceiro excluído:** uma proposição será verdadeira ou falsa. Não há alternativa.

As proposições podem ser atômicas ou moleculares, também chamadas de simples e compostas. Proposições simples, são aquelas contidas em si mesmo: *todo homem é mortal*; *Beatriz é alta*; *o Papa é argentino*. Todas estas declarações são proposições. Ainda que a leitora não conheça a Beatriz, a maior discordância estaria em determinar se a proposição é verdadeira ou falsa. Mas, não existe outra possibilidade, ou a Beatriz é alta ou baixa. As outras dependem do seu cabedal de conhecimento interno. Para criar proposições compostas, usamos conectivos. Os conectivos relacionam uma proposição com outra. Como pode ser visto no Exemplo 3.1.

Exemplo 3.1: proposições compostas, representadas por sentenças

1. *Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta.
2. *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês*
3. **Ou** *Marcela é curitibana,* **ou** *gaúcha.*
4. **Se** *os gatos são mamíferos,* **então** *eles mamam na infância.*
5. *Joana será aprovada* ***se, e somente se***, *tirar mais que 8.*

No Exemplo 3.1 estão destacados os conectivos (*e; ou; não; então..se; e se, e somente se*). Estes conectivos, que serão transformados em operadores lógicos, são os elementos responsáveis pela transformação de proposições atômicas em proposições compostas. As proposições apresentadas no Exemplo 3.1 estão na forma de sentenças e, salvo engano, estão de acordo com as normas da língua portuguesa como falada e escrita no Brasil.

Para transformar as sentenças em fórmulas lógicas criaremos uma linguagem exclusiva para este propósito. Para tanto, precisaremos de um conjunto de símbolos que chamaremos de alfabeto e representaremos por Σ_{CP}. Estamos começando nosso estudo da lógica pelo **Cálculo Proposicional**, então lemos Σ_{CP} como: *o alfabeto sigma do cálculo proposicional.*

O alfabeto é um conjunto de símbolos e dessa forma teremos:

$$\Sigma_{CP} = \{\{p;\ q; r; s; t; \dots\};\ T; F; \wedge; \vee; \neg; \rightarrow; \leftrightarrow; (;)\}.$$

Nosso alfabeto Σ_{CP} é um conjunto de elementos onde o primeiro elemento é um conjunto de letras latinas minúsculas começando em p vamos usar isso como padrão, letras latinas minúsculas começando em p sempre que estivemos representando proposições de forma individual. Se quisermos representar uma fórmula, ou um conjunto de proposições usaremos letras latinas maiúsculas. As letras latinas maiúsculas T e F são exclusivas para representar a verdade T e F para representar a falsidade de uma proposição ou do resultado da operação entre elas.

Durante a realização dos cálculos proposicionais, estes símbolos serão utilizados para substituir as sentenças proposicionais por variáveis proposicionais, na forma exposta no Exemplo 3.2.

Exemplo 3.2: uso de variáveis para representar sentenças proposicionais

1. $\boldsymbol{p}$: *Todo homem é mortal.*
2. $\boldsymbol{Q}$: *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês.* $(r \wedge \neg s)$
3. $\boldsymbol{T}$: **Ou** *Marcela é curitibana,* **ou** *gaúcha.* $(p \vee q)$
4. $\boldsymbol{S}$: **Se** *os gatos são mamíferos,* **então** *eles mamam na infância.*$(t \rightarrow q)$
5. $\boldsymbol{P}$: *Joana será aprovada **se, e somente se**, tirar mais que 8.* $(s \leftrightarrow q)$

No Exemplo 3.3 vemos estas mesmas proposições já representadas na forma matemática. Observe que em todos os casos separamos as proposições, representamos por variáveis e aplicamos os operadores. Quando a proposição era atômica ela foi representada por uma letra minúscula, quando era composta foi representada por uma letra maiúscula. A leitora há de perdoar a este pobre escritor que, propositalmente, não tomou nenhum cuidado quanto ao uso das letras em cada caso. O Exemplo 3.3 tenta organizar um pouco este conceito para a leitora

Exemplo 3.3: uso de variáveis para representar sentenças proposicionais

1. *Todo homem é mortal* **ou** Beatriz é alta. — $\boldsymbol{S}$

   $\boldsymbol{p}$: todo homem é mortal; $\boldsymbol{q}$: Beatriz é alta — $\boldsymbol{p \vee q}$

2. *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês* — $\boldsymbol{R}$

   $\boldsymbol{p}$: Paris é a capital da Argentina; $\boldsymbol{q}$: o Papa é francês — $\boldsymbol{p \wedge \neg q}$

3. Ou Marcela é curitibana, ou gaúcha. — $\boldsymbol{P}$

   $\boldsymbol{p}$: Marcela é curitibana; $\boldsymbol{q}$: Marcela é gaúcha. — $\boldsymbol{p \vee q}$

4. Se os gatos são mamíferos, então eles mamam na infância. — $\boldsymbol{Q}$

   $\boldsymbol{p}$: gatos são mamíferos; $\boldsymbol{q}$: gatos mamam na infância. — $\boldsymbol{p \rightarrow q}$

5. Joana será aprovada se, e somente se, tirar mais que 8. — $\boldsymbol{T}$

   $\boldsymbol{p}$: joana está aprovada; $\boldsymbol{q}$: Joana tirou nota maior que 8. — $\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$

Ao longo de todo este livro vamos usar a palavra proposição substituindo a expressão variáveis proposicionais.

Se usarmos os símbolos de Σ_{CP}, e apenas estes símbolos, para criar uma fórmula lógica, diremos que esta fórmula está bem formada. Isto é importante porque **apenas as fórmulas lógicas bem formadas têm validade na lógica matemática**. Você não pode inferir a verdade de uma fórmula se ela não estiver de acordo com as regras léxicas, sintáticas e semânticas da linguagem. No caso, nossa linguagem é o cálculo proposicional. As Fórmulas Bem Formadas são importantes e durante o livro vou repetir este conceito diversas vezes. Sem nenhum pudor.

Neste ponto da prosa, precisamos destacar que a linguagem da lógica proposicional não é regular e permite ambiguidades. O que é um problema em qualquer linguagem. A ambiguidade atrapalha a compreensão.

Os símbolos $()$, que chamamos de parênteses, são usados para evitar possíveis ambiguidades isolando proposições compostas e garantindo o significado que queremos apresentar.

Não podemos encontrar a verdade de proposições ambíguas.

A leitora já sabe escrever proposições compostas em cálculo proposicional, agora pode praticar um pouco.

3.1 Exercícios

Crie representações lógicas para as seguintes sentenças e não se preocupe com a validade, ou não da proposição.

a) Lima não está na Itália e Paris está na França.
b) Sandra é morena logo é bonita.
c) Vou de ônibus ou a pé.
d) Aviões voam só e somente se tiverem asas.
e) Nádia não é romena.
f) Janaína comprou um carro e um apartamento.
g) **Solução:** $\boldsymbol{p} \equiv$ Janaína comprou um carro, $\boldsymbol{q} \equiv$ Janaína comprou um apartamento $\therefore \boldsymbol{p} \land \boldsymbol{q}$
h) Quem compra carro e apartamento tem dinheiro.
i) Sandra comprou um carro e não uma moto.
j) $(2 \leq x)$
k) Pâmela irá a Roma se, e somente se, comprar a passagem.

Já sabemos usar as variáveis proposicionais e os parênteses, nosso próximo passo é entender os operadores $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow e \leftrightarrow$, não necessariamente nesta ordem e verificar como podemos usar estes operadores para descobrir a verdade de uma proposição compostas. Mas, antes disso uma palavrinha sobre Tabelas verdade.

3.1 Tabelas verdade

As tabelas verdade são representações gráficas criadas para permitir a visualização e a consequente análise de todos os estados possíveis de todas as proposições em uma determinada fórmula lógica.

A criação das tabelas verdade é creditada a ***Ludwig Wittgenstein*** (1889 – 1951) que, na página 34 do seu livro "***Some Remarks on Logical Form***"[5], escreveu, em tradução livre: *"... e podemos representar o produto p e q da seguinte forma..."*. Em seguida, Wittgenstein, colocou a imagem que pode ser vista na Figura 3.2.

p	q	
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Figura 3.1-1 - Tabela verdade de Wittgenstein para uma conjunção (WITTGENSTEIN, 1929).

Nesta representação de uma operação lógica ***e*** conjunção, ao relacionar todos os estados possíveis relativos as proposições envolvidas em uma conjunção, Wittgenstein, criou um dos aparelhos cognitivos mais importantes para o entendimento das fórmulas proposicionais.

A álgebra que Boole desenvolveu, tão elegante e simples, se torna, com o uso das Tabelas Verdade uma ferramenta quase mecânica e muito eficiente para a descoberta da verdade em proposições lógicas. Como disse antes, tão simples e eficiente que acaba por se tornar a base de toda a Eletrônica Digital e computação que movimenta este começo de Século XXI.

[5] Em tradução livre: algumas observações sobre a forma da lógica.

A cada linha da tabela verdade, onde avaliamos o resultado da operação de acordo com os valores dos operandos, damos o nome de interpretação.

No caso da tabela apresentada na Figura 3.1, Wittgenstein, listou as quatro interpretações possíveis da operação de conjunção.

A leitora há de lembrar que vimos a negação ($\neg$), a operação e, doravante chamada de conjunção e representada por ($\wedge$), a operação ou, doravante chamada de disjunção e representada por ($\vee$), a operação $se..então$ doravante chamada de condicional, ou implicação ($\rightarrow$) e a operação $se, e\ somente\ se$ doravante chamada de bicondicional, ou implicação dupla e representada por ($\leftrightarrow$).

Vimos as operações lógicas de forma despretensiosa, quase inocente. Agora, podemos nos aprofundar na linguagem formal da lógica matemática. Para tanto, teremos que voltar e ver cada uma destas operações, e suas Tabelas Verdade. Antes, contudo, vamos lembrar que estas operações transformam proposições atômicas em proposições compostas de tal forma que:

O valor lógico de uma proposição composta depende unicamente dos valores lógicos as proposições atômicas que a formam e das operações que as conectam.

3.2 Negação ($\neg$)

Usamos o operador de negação para transformar uma proposição verdadeira em falsa e vice-versa. Fazemos isso cotidianamente. Estamos sempre negando alguma ideia. Aqui, cabe uma ressalva: a negação pode negar a própria negação. Isto quer dizer que mesmo sendo um operador unário, nada impede que este operador possa ser aplicado várias vezes ao mesmo operando. Como pode ser visto no Exemplo 3.4.

Exemplo 3.4: negação em forma sentencial e proposicional.

1. $\boldsymbol{p}$: Beatriz é alta.
2. $\neg\boldsymbol{p}$: Beatriz não é alta.
3. $\neg\neg\boldsymbol{p}$: Beatriz é alta.
4. $\boldsymbol{q}$: O papa não é francês.
5. $\neg\boldsymbol{q}$: O papa é francês

É preciso ter muito cuidado ao observar as sentenças negativas já que elas podem ter diversas formas sintáticas equivalentes no português, como falado no Brasil, o que pode ser visto no Exemplo 3.5:

Exemplo 3.5: diversas formas sentenciais para a negação.

1. $\boldsymbol{p}$: Lógica não é fácil.
2. $\boldsymbol{q}$: Não é verdade que lógica é difícil.
3. $\boldsymbol{r}$: É falso que Beatriz é alta.

Wittgenstein criou as Tabelas Verdade e eu lhe disse que esta era uma importante ferramenta cognitiva para a análise de fórmulas proposicionais então (olha uma implicação aqui!) vamos começar a usar as Tabelas Verdade pela mais simples de todas: a Tabela Verdade da Negação, que pode ser vista na Tabela 3.2-1.

Cálculo Proposicional	
$\boldsymbol{p}$	$\neg p$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$

Eletrônica Digital	
A	$\bar{A}$
1	**0**
0	**1**

Tabela 3.2-1 - Tabela Verdade da negação em notação do cálculo proposicional e da Álgebra Booleana.

Observe que a Tabela 3.2-1, eu representei a tabela verdade de duas formas, Cálculo Proposicional e Eletrônica Digital de formas ligeiramente diferentes.

O Cálculo Proposicional foi fundamental para a criação de circuitos digitais. O trabalho de Shannon de 1940 define como podemos usar lógica em circuitos de controle e cria a Eletrônica Digital. Existem, contudo, algumas diferenças.

O alfabeto usado na Eletrônica Digital é um pouco diferente do alfabeto usado no cálculo proposicional. Por exemplo, representamos uma proposição como verdadeira com o símbolo F na Eletrônica Digital representamos por 0, no cálculo proposicional usamos $\neg$ na frente da proposição para representar a negação, na Eletrônica Digital usamos a variável lógica barrada $\bar{A}$. Por fim, em Cálculo Proposicional temos o hábito de listar as interpretações começando de todas verdadeiras, na Eletrônica Digital, começamos de todas as falsas. Os conceitos são os mesmos. E a leitora precisará se acostumar com isso. As outras diferenças iremos vendo à medida que formos conhecendo os operadores.

Lógica é matemática. Então precisa ser provada, precisa ser relacionada com teorias já provadas aceitas pela comunidade científica e a leitora pode ler um pouco sobre provas matemáticas no Apêndice 1. A necessidade da prova faz com que tenhamos que relacionar a lógica com outra teoria da matemática.

Escolheremos a Teoria Ingênua de Cantor. Que, como vimos antes, possui alguns paradoxos, mas será perfeita para construir o arcabouço de

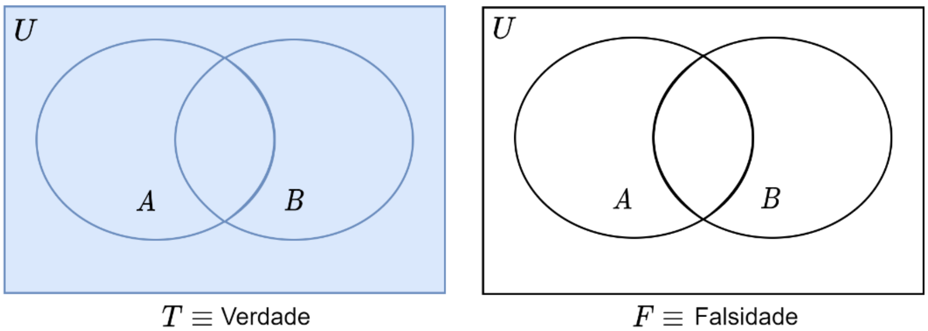


Figura 3.2-1 - Diagrama de Venn, relação entre verdades e conjuntos

conhecimento que precisamos para entender as operações do Cálculo Proposicional. Podemos começar relacionando conceitos de verdadeiro e falso com os conceitos de conjuntos. Assim o conjunto Universo representado por U indica a verdade e o conjunto vazio representado por $\emptyset$ a falsidade. A Figura 3.2-1, mostra estes conceitos na forma de Diagramas de Venn.

Na teoria dos conjuntos a negação é representada de forma indireta pelo símbolo $\notin$, que podemos ler como $não\ pertence$. De tal forma que a sentença $L\ pertence\ ao\ conjunto\ A$ será representada pela expressão $L \in A$ e a negação desta proposição será dada por $L \notin A$ e deve lida como $L\ não\ pertence\ ao\ conjunto\ A$. O diagrama de Venn para esta operação pode ser visto na Figura 3.2-2.

Observe cuidadosamente, por favor, que a sentença $L\ pertence\ ao\ conjunto\ A$ é uma proposição e, desta forma, $L \in A$ também o é. Aqui, vemos pela primeira vez, uma proposição expressa usando a linguagem da matemática.

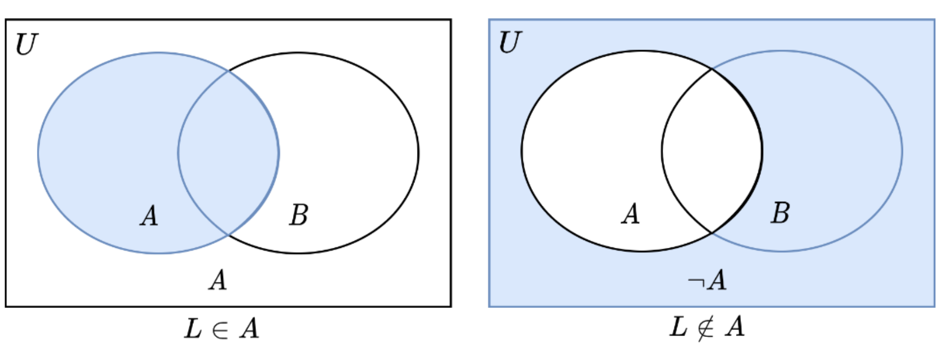


Figura 3.2-2 - Operação de negação representada na teoria dos conjuntos.

Observe também que, sempre que lidarmos com conjuntos, vamos evitar utilizar os símbolos que reservamos para a linguagem do Cálculo Proposicional, o alfabeto Σ_{CP}.

A aplicação do cálculo proposicional na Eletrônica Digital, primeiro com relés e válvulas e finalmente com transistores, levou a criação de circuitos eletrônicos para a aplicação de operações lógicas em grande escala culminando nos microprocessadores que movimentam toda a economia mundial. Estes circuitos possuem uma representação gráfica especial para as operações lógicas e são conhecidos como portas lógicas.

Na Álgebra Booleana, aplicada a Eletrônica Digital, representamos a negação pelo símbolo de uma proposição em letra maiúscula com uma barra horizontal, $\bar{A}$, que se lê: negação de A ou A barrado. Neste caso, a proposição será um sinal eletrônico e, assim como no caso dos conjuntos, vou evitar os símbolos reservados para o Cálculo Proposicional. Em Eletrônica Digital, os sinais de entrada podem ser verdadeiros, representados por 1 ou falsos, representados por 0. A implementação Eletrônica Digital da operação de negação é realizada pelo circuito inversor, ou *inverter* em inglês, que pode ser visto na representação gráfica da porta lógica inversora na Figura 3.3.3.

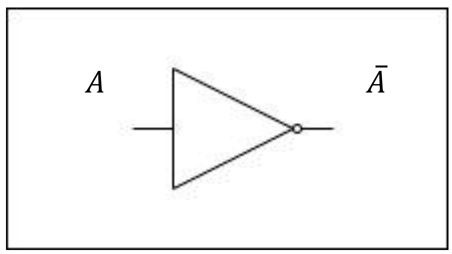


Figura 3.2-3 - Símbolo do inversor em circuitos lógicos.

Voltaremos a negação para estudar suas propriedades, assim que tivermos passado por todas as cinco operações do cálculo proposicional. Uma já foi, faltam quatro.

3.3 Conjunção ($\wedge$)

A conjunção representada pelo símbolo $\wedge$, inicialmente chamada de produto lógico e representada pelo símbolo $\odot$, ainda usamos esta representação, ou simplesmente um ponto $\cdot$, em Eletrônica Digital.

A conjunção representa no Cálculo Proposicional a existência do conectivo E, *AND* em inglês, ligando duas proposições atômicas e criando uma proposição composta. A verdade, ou falsidade, desta proposição composta, a conjunção, dependerá da verdade ou falsidade dos seus operandos.

A leitora precisa lembrar que a conjunção é uma operação binária. Todas as conjunções terão dois, e somente dois, operados.

A conjunção ligará sempre duas proposições.

Todas as sentenças onde existe o conectivo E, e todas as sentenças com sintaxe diferente, mas mesma semântica, representam uma proposição conjuntiva, ou simplesmente uma conjunção. Isto é verdade em todas as linguagens naturais apesar de que os conectivos utilizados em cada linguagem serão diferentes entre si.

É preciso ter muito cuidado com a linguagem natural na hora de interpretar o sentido de uma sentença. Entender o sentido é indispensável para a conversão desta sentença em fórmulas lógicas.

A Conjunção lógica representa a classe gramatical das *conjunções coordenativas aditivas* ou das *locuções conjuntivas*. E podem ser aplicadas com sentido afirmativo ou negativo. As principais *conjunções coordenativas aditivas* são: ***e; nem; também; bem como; como também; não só... mas também; não só... como também; não só... mas ainda; não somente… mas também; não somente… como também; não somente… mas ainda***. As conjunções *coordenativas aditivas* e as *locuções conjuntivas* podem ser usadas para indicar afirmação ou negação. No Exemplo 3.6 podemos ver algumas conjunções.

Exemplo 3.6: conjunções em linguagem natural

1. A esfera é redonda, o quadrado não.
2. O Papa não é pop e Zico não é paulista.
3. Tatiana é alta e Tatiana é rápida.
4. Sandra não foi a praia nem avisou que não foi.
5. Não só visitei o Cristo Redentor, como também o Pão de Açúcar.
6. Gosto muito de torresmo, bem como gosto de cerveja.
7. Silvia não só chegou atrasada na praia como também não levou farofa.
8. Sandra não se atrasou nem deixou de ir a festa.
9. Marcela não somente esqueceu as fritas, mas ainda levou salada.
10. Visitei Copacabana, mas não o Cristo Redentor.

No Exemplo 3.7 vemos como poderíamos dividir cada uma das proposições em outras duas e fiz questão de indicar duas formas sempre que encontrei alguma ambiguidade. representá-las por meio da operação conjunção.

Exemplo 3.7: identificação das proposições conjuntivas em linguagem natural

1. $\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda, $\boldsymbol{q}$: o quadrado não. $\boldsymbol{p \wedge q}$
2. $\boldsymbol{p}$: O Papa não é pop e $\boldsymbol{q}$: Zico é paulista. $\boldsymbol{p \wedge q}$
3. $\boldsymbol{p}$: Tatiana é alta e $\boldsymbol{p}$: Tatiana é rápida. $\boldsymbol{p \wedge q}$
4. $\boldsymbol{p}$: Sandra não foi a praia nem $\boldsymbol{q}$: avisou que não foi. $\boldsymbol{p \wedge q}$
5. $\boldsymbol{p}$: Não só visitei o Cristo Redentor, como também $\boldsymbol{q}$: o Pão de Açúcar. $\boldsymbol{p \wedge q}$
6. $\boldsymbol{p}$: Gosto muito de torresmo, bem como $\boldsymbol{q}$:gosto de cerveja. $\boldsymbol{p \wedge q}$
7. $\boldsymbol{p}$:Silvia não só chegou atrasada como também $\boldsymbol{q}$: não levou farofa. $\boldsymbol{p \wedge q}$
8. $\boldsymbol{p}$: Sandra não se atrasou nem $\boldsymbol{q}$: deixou de ir à festa. $\boldsymbol{p \wedge q}$
9. $\boldsymbol{p}$: Marcela não somente esqueceu as fritas, mas ainda $\boldsymbol{q}$: levou salada. $\boldsymbol{p \wedge q}$
10. $\boldsymbol{p}$: Visitei Copacabana, mas $\boldsymbol{q}$: não o Cristo Redentor. $\boldsymbol{p \wedge q}$

A Tabela Verdade da conjunção pode ser vista na Tabela 3.3-1.

Cálculo Proposicional			Eletrônica Digital		
p	q	$p \wedge p$	A	B	$A \cdot B$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$	0	0	**0**
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$	0	1	**0**
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$	1	0	**0**
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	1	1	**1**

Tabela 3.3-1 - Tabela Verdade da conjunção em Cálculo Proposicional e em Álgebra Booleana.

Observe a diferença nas sintaxes adotadas nas duas formas matemáticas da Tabela Verdade. Enquanto em Cálculo Proposicional começamos a tabela com os valores verdadeiros, na eletrônica digital começamos a tabela com os valores falsos. Nos dois casos, a operação conjunção resultará em um resultado verdadeiro (T), ou (1), se, e somente se, as duas proposições operandos forem verdadeiras.

Uma conjunção é verdadeira se, e somente se, as suas duas proposições são verdadeiras.

Só para que a leitora refresque sua memória, este símbolo, o ponto $\cdot$ é usado para representar o produto escalar na álgebra vetorial. Talvez esta seja a origem do termo produto lógico. O Exemplo 3.8 retoma os casos de conjunção que vimos anteriormente já determinando sua verdade considerando o que aprendemos com a Tabela Verdade da Conjunção.

Exemplo 3.8: avaliação sentenças exemplos de conjunção em cálculo proposicional

Resultado

1.	$\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda **e** $\boldsymbol{q}$: o quadrado não.	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{T}$
2.	$\boldsymbol{p}$: O Papa não é pop **e** $\boldsymbol{q}$: Zico é paulista.	$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{F}$
3.	$\boldsymbol{p}$: Tatiana é alta **e** $\boldsymbol{q}$: Tatiana é rápida.	$\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{u}$	?

No Exemplo 3.8.1, a verdade é clara e indiscutível, no Exemplo 3.8.2, podemos discutir se o Papa é pop, ou não. Entretanto, com certeza, Zico não é paulista e basta uma proposição falsa para definir a verdade da conjunção. Por fim, no Exemplo 3.8.3, não temos como definir o resultado da conjunção simplesmente porque faltam as informações necessárias para definir se uma, ou as duas, proposições são verdadeiras.

No Exemplo 3.8.3 tanto a sentença quanto a proposição estão corretamente formatadas. Ainda assim, não podemos avaliar a verdade da conjunção se não tivermos certeza da verdade das proposições.

Não podemos operar com proposições que não foram definidas como verdadeiras, ou falsas.

Poderíamos, sem dúvida, escrever a tabela verdade da operação do Exemplo 3.8.3, mas este resultado seria inócuo.

A conjunção também pode ser representada com a teoria dos conjuntos neste caso representamos a conjunção como sendo a interseção entre os conjuntos A e B e representamos esta interseção por $A \cap B$. Uma vez que o uso dos conjuntos esteja definido podemos avaliar todas a operações relativas as quatro interpretações possíveis.

Precisamos lembrar que uma interpretação é a avaliação dos valores possíveis das proposições que são os operandos da conjunção. Neste caso poderemos ter $L \in A$ que representaremos por A; $L \notin A$ que representaremos por $\neg A$; $L \in B$ que representaremos por B e $L \notin B$ que representaremos por $\neg B$. Todas estas interpretações podem ser vistas na Figura 3.3-1.

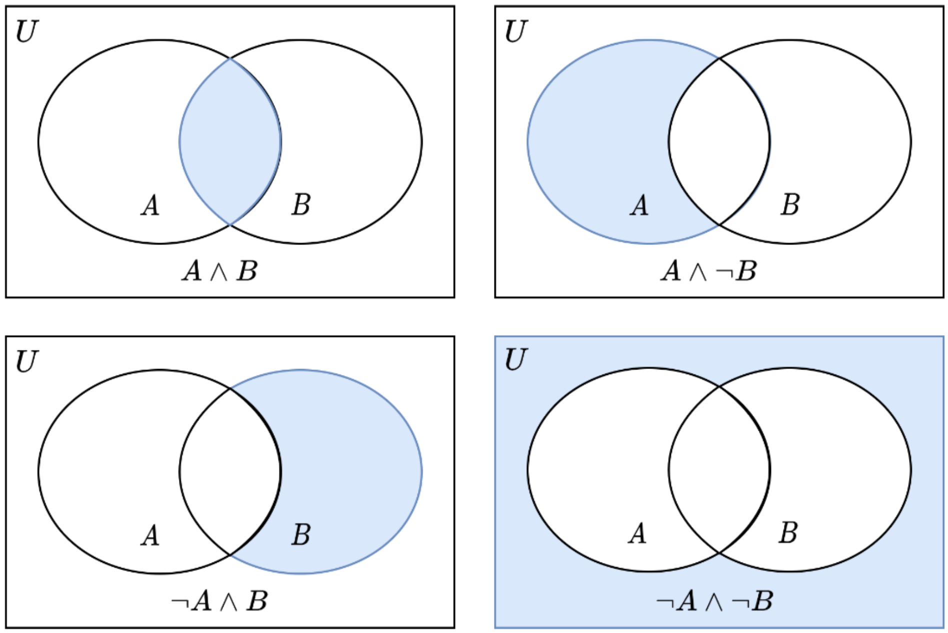


Figura 3.3-1 - Representação da conjunção usando a teoria dos conjuntos.

Na Eletrônica Digital a porta AND é o circuito que foi especialmente criado para representar a conjunção ou, no caso, o produto lógico. Em Eletrônica Digital usamos o termo produto lógico porque este termo, quando aplicado aos valores 1 e 0 usados para representar a verdade e a falsidade de uma operação, torna a determinação do resultado mais simples. Podemos ver o símbolo que representa a porta And na Figura 3.3-2.

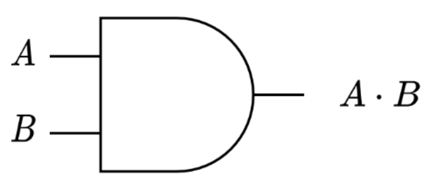


Figura 3.3-2 - Porta And, implementação da operação conjunção.

Formalmente analisamos as conjunções buscando a função verdade $V()$ de cada um dos operandos. Quando recebemos uma sentença, raramente precisaremos montar a Tabela verdade para a encontrar a verdade da proposição composta representada pela sentença.

Uma sentença é, geralmente, a representação de uma interpretação de uma determinada Tabela Verdade.

Como pode ser visto nos Exemplos 3.9, 3.10, onde uso o símbolo matemático ≡ lido, $equivalente\ a$, apenas para indicar a relação entre a aplicação das funções verdade em cada passo na busca da verdade da conjunção.

Exemplo 3.9: busca da verdade para a conjunção em sentenças

		Resultado	
1.	Pelé praticava Futebol e Ayrton Sena automobilismo.		
2.	$\boldsymbol{p}$: Pelé praticava Futebol	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
3.	$\boldsymbol{q}$: Ayrton Sena praticava automobilismo.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$
4.	$\boldsymbol{V(p \land q) \equiv V(p) \land V(q) \equiv T \land T \equiv\ V(p \land q) \equiv T}$	$\boldsymbol{V(p \land q)}$	$\boldsymbol{T}$

Pelé praticava Futebol e Ayrton Sena automobilismo, é uma proposição verdadeira

A última linha do Exemplo 3.9 (3.9.4) pode ser lida como: a verdade da conjunção entre p e q é igual a verdade de p em conjunção com a verdade de q, como as duas proposições são verdadeiras ao fazermos a conjunção encontraremos este resultado como verdadeiro.

Exemplo 3.10: busca da verdade em conjunções, outros exemplos.

		Resultado	
1.	Brasília é a capital do Brasil e da Argentina.		
2.	$\boldsymbol{p}$: Brasília é a capital do Brasil.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
3.	$\boldsymbol{q}$: Brasília é a capital da Argentina.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$
4.	$\boldsymbol{V(p \land q) \therefore V(p) \land V(q) \therefore T \land F \therefore\ V(p \land q) \therefore F}$	$\boldsymbol{V(p \land q)}$	$\boldsymbol{F}$

Brasília é a capital do Brasil e da Argentina, é uma proposição falsa.

		Resultado	
1.	Peru fica na Europa e é um país.		
2.	$\boldsymbol{p}$: Peru fica na Europa.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{F}$
3.	$\boldsymbol{q}$: Peru é um país.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$
4.	$\boldsymbol{V(p \land q) = V(p) \land V(q) = F \land T =\ V(p \land q) = F}$	$\boldsymbol{V(p \land q)}$	$\boldsymbol{F}$

Peru fica na Europa e é um país, é uma proposição falsa.

Ainda há um cuidado importante no uso das operações lógicas quando as utilizamos para representar proposições com base matemática. Observe o Exemplo 3.11.

Exemplo 3.11: cuidados com as operações lógicas e a matemática

1. A e B são números naturais.
2. A proposição 1 poderia ser representada por: $(A \wedge B) \in \mathbb{N}$

   A proposição 2 está errada a conjunção só opera com proposições lógicas. A não é uma proposição e nem B. Então, teríamos que fazer:

3. $(A \in \mathbb{N}) \wedge (B \in \mathbb{N})$

Recorremos a Teoria dos Conjuntos para expressar as proposições matematicamente e só então, expressamos a conjunção. Cuidados semelhantes a este precisarão ser tomados na Eletrônica Digital, onde as proposições são sinais elétricos.

Assim como a negação, a conjunção tem algumas propriedades bem interessantes que deixaremos para discutir adiante. Depois que passarmos por todas as cinco operações do cálculo proposicional. Duas já foram, faltam três.

3.2 Exercícios

Represente as seguintes sentenças na forma de conjunção sempre que possível.

a) O Amazonas é o maior estado do Brasil e Manaus é sua capital.

b) x e y são números reais.

c) Três elevado ao quadrado é maior que oito e menor que 10.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv (3^2 > 8)$, $\boldsymbol{q} \equiv (3^2 < 10) \therefore \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

d) Londres e Paris estão na Europa.

e) Londres está na Europa e Brasília não está.

f) O dia está quente e a pizza não será entregue.

g) Chopp e cerveja são derivados da cevada.

h) Um mais um e dois mais dois.

i) O presidente é verde e careca.

j) Marte roda para a esquerda e Netuno não.

3.4 Disjunção (∨)

A disjunção, operação proposicional que representa o conectivo ou, *OR* em inglês, é representada pelo símbolo ∨ que incluímos no alfabeto Σ_{CP}. A disjunção foi inicialmente chamada de adição lógica e representada pelo símbolo $\bigoplus$, ou simplesmente $+$ este é o símbolo que usamos ainda hoje na Eletrônica Digital.

> *A disjunção é uma operação binária, utiliza dois e apenas dois operandos e será verdadeira se qualquer um dos operandos for verdadeiro.*

Em linguagem natural, como o português falado no Brasil, a conjunção é representada pelo conectivo *ou*, e seus equivalentes semânticos. A leitora deve tomar cuidado aqui. Eu usei a expressão *conectivo ou* porque gramaticalmente tanto o E, quanto o OU estão na classe gramatical conjunção e se eu chamar de conjunção o que é uma disjunção vamos ter outro nó no cérebro.

Gramaticalmente a disjunção irá representar as *conjunções coordenativas alternativas*. Cujo uso mais comum é o conectivo ***ou***. Contudo, podemos representar *conjunções coordenativas alternativas* por: ou; ou...ou; ora...ora; quer...quer; seja...seja; nem…nem; já…já; talvez…talvez. O Exemplo 3.12 mostra alguns casos de uso para estas *conjunções coordenativas alternativas*.

Exemplo 3.12: exemplos de disjunção

1.	$\boldsymbol{p}$: Einstein era alemão ou $\boldsymbol{q}$: Einstein foi físico.	$\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}$
2.	$\boldsymbol{p}$: O Chile é um país, isto é, $\boldsymbol{p}$: é uma cidade.	$\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}$
3.	$\boldsymbol{p}$: Ora os EUA são republicanos, $\boldsymbol{q}$:ora democráticos.	$\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}$
4.	$\boldsymbol{p}$: Nem gosto de jiló, $\boldsymbol{q}$: nem gosto de pepino.	$\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}$
5.	$\boldsymbol{p}$: Talvez saia com Jane, $\boldsymbol{q}$: Talvez saia com Paula.	$\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}$

Alguém já disse que o Português não é para amadores.

Caberá a leitora a tarefa de além de conseguir classificar a sentença, determinar se ela é uma proposição, ou não. Aliás, só para colocar na ordem certa. A leitora primeiro precisa decidir se uma sentença determinada é uma proposição, ou não, para então analisar a proposição para descobrir se ela é atômica ou composta para, finalmente, escrever a fórmula equivalente.

A disjunção, assim como qualquer uma das operações lógica que estamos estudando, pode ser representada por uma Tabela Verdade. Neste caso, a Tabela verdade da disjunção pode ser vista na Tabela 3.4-1.

Cálculo Proposicional				Eletrônica Digital		
p	q	$p \wedge p$		P	Q	$P + Q$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$		0	0	**0**
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{T}$		0	1	**1**
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{T}$		1	0	**2**
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$		1	1	**1**

Tabela 3.4-1 - Tabela Verdade da operação disjunção em cálculo proposicional e em Eletrônica Digital.

Nas Tabela 3.4-1 podemos observar novamente as discrepâncias que existem entre a notação do Cálculo Proposicional e da Eletrônica Digital tanto na ordem de distribuição dos estados possíveis quanto no uso do símbolo $+$.

A disjunção também pode ser representada pela teoria dos conjuntos. Para isso, precisaremos repetir as considerações que fizemos anteriormente então: se consideramos que: $L \in A$ que representaremos por apenas por A; $L \notin A$ que representaremos por $\neg A$; $L \in B$ que representaremos por B e $L \notin B$ que representaremos por $\neg B$ podermos fazer a representação da negação usando a Teoria Ingênua dos Conjuntos como pode ser visto na Figura 3.4-1.

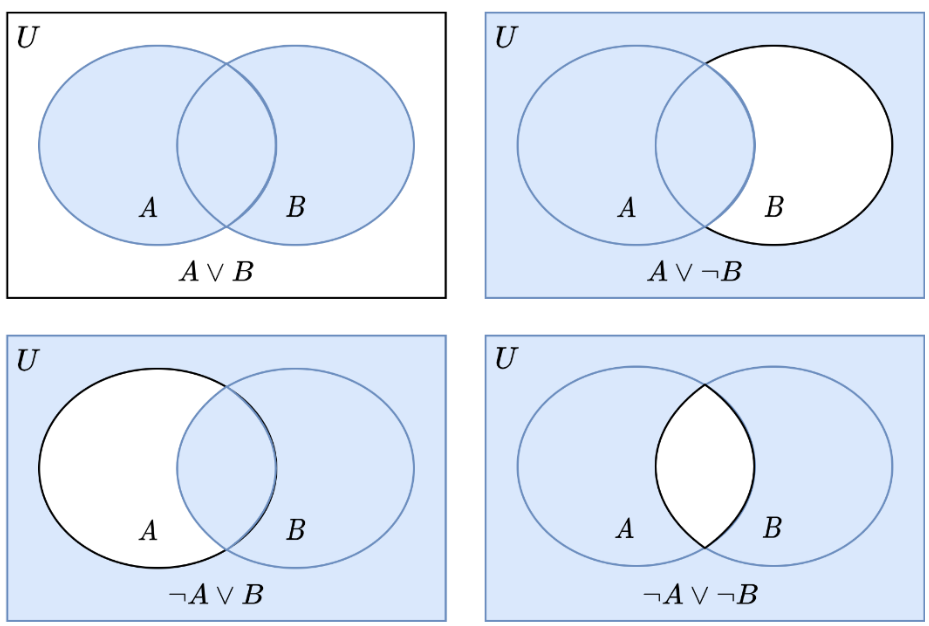


Figura 3.4-1 - Diagrama de Venn da disjunção na teoria dos conjuntos

A disjunção é representada nos circuitos eletrônicos pela porta OU, OR

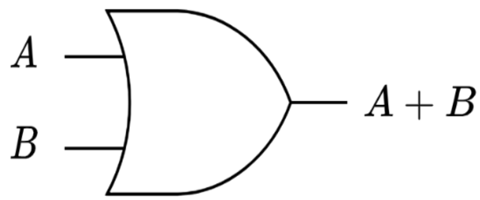


Figura 3.4-2 - Porta OR representação da disjunção em circuitos eletrônicos.

em inglês, que pode ser vista na Figura 3.4.2.

A descoberta da verdade, por meio da função verdade $V()$ de uma disjunção pode ser encontrada com a análise de cada uma das proposições que compõem o conjunto de operandos. Seguindo o mesmo padrão de pensamento que usamos na conjunção para a disjunção. Um exemplo de avalição da disjunção pode ser visto no Exemplo 3.13.

Exemplo 3.13: avaliação de disjunção

		Resultado	
1.	Homens são mortais ou faz sol a noite.		
2.	$\boldsymbol{p}$: Homens são mortais.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
3.	$\boldsymbol{q}$: Faz sol a noite.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$
4.	$\boldsymbol{V(p \vee q) \therefore V(p) \vee V(q) \therefore T \vee F \therefore\ V(p \vee q) \therefore V}$	$\boldsymbol{V(p \vee q)}$	$\boldsymbol{T}$

Homens são mortais ou faz sol à noite, é uma proposição verdadeira.

A conclusão do Exemplo 3.13 está correta do ponto de vista do Cálculo Proposicional, mas não faz sentido. Então se estivéssemos analisando esta proposição como um argumento, este seria uma falácia.

O mesmo que se passou com a negação e a conjunção, se dá com a disjunção. Vamos analisar as propriedades da disjunção assim que passarmos por todas as cinco operações do cálculo proposicional. Faltam duas.

3.3 Exercícios

Represente as seguintes sentenças na forma de disjunção, ou conjunção, sempre que possível.

a) O Amazonas é o maior estado do Brasil, Manaus é sua capital ou O Maranhão é o maior estado do Brasil, São luís é sua capital.

b) Z é o conjunto dos elementos de A ou B.

c) Ora caso, ora compro bicicleta.

d) Bucareste e Paris estão na Europa ou nos EUA.

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Bucareste está na Europa, $\boldsymbol{q} \equiv$ Paris está na Europa;

$\boldsymbol{r} \equiv$ Bucareste está nos EUA, **s**$\equiv$ Paris está nos EUA; $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{s})$

e) Ou vou a Roma ou a Atenas.

f) Mariza foi a praia e ao shopping.

g) Paula comprou um carro vermelho e outro azul.

h) Um mais um ou dois mais dois.

i) O Jaleco de Jane talvez seja vermelho, talvez seja branco.

j) Nem vou comprar pão nem macarrão.

3.5 Condicional, ou implicação $(\rightarrow)$

Chamaremos de condicional, de implicação, ou ainda, de implicação material, a qualquer sentença em linguagem natural que contenha o conectivo ***se..então***, e a representaremos por →. As proposições na forma condicional, ou de implicação, ou ainda, de implicação material para evitar qualquer confusão com a inferência que veremos no futuro. As proposições condicionais, serão representadas por uma seta apontando para a direita, $p \rightarrow q$, onde a proposição p será chamada de hipótese e a proposição q é chamada de conclusão.

Uma condicional será falsa se, e somente se, q for falso. Ou seja, a condicional será falsa se a hipótese p implicar em uma falsidade.

A implicação é a declaração mais comum na prova matemática e se destaca entre aquelas que são mais mal entendidas. Para não fugir dos gregos, vamos voltar a ***Pitágoras*** que viveu nos tempos de **Sócrates**, professor de Platão, que por sua vez foi professor de **Aristóteles** e, parece que estou recitando uma descendência ***Klingon***.

Se a amável leitora tomar o cuidado de pedir para qualquer aluno do ciclo médio de ensino para escrever o Teorema de Pitágoras verá, quase certamente, algo como $x^2 + y^2 = z^2$. O que parece correto, mas está errado. Esta proposição é falsa. Esta proposição é falsa, por exemplo para qualquer $x = y = z$. Uma forma correta de enunciar este teorema seria o famoso:

A hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Sendo assim, para declarar $x^2 + y^2 = z^2$ teríamos que fazer a relação entre x, y e z com os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. De fato, poderíamos encontrar outras fórmulas de declarar este teorema, mas como estamos preocupados com a lógica, poderíamos usar:

Se *x e y são os catetos de um triângulo retângulo com hipotenusa z,* ***então*** $x^2 + y^2 = z^2$.

Este é o poder da lógica: colocar as coisas de forma clara para evitar qualquer ambiguidade. Parece pouco importante, mas é justamente a correção da declaração que permite inferir sua verdade ou falsidade. A leitora poderia lembrar que lá no final dos anos 1600, ***Leibnitz*** foi estudar lógica na esperança que a comprovação da verdade se transformasse em uma ferramenta para a solução de conflitos, sem a necessidade de gritos, armas, olhos arrancados ou mortes.

A Tabela Verdade da operação condicional pode ser vista na Tabela 3.5-1.

Cálculo Proposicional		
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{T}$

Eletrônica Digital		
A	B	$A \rightarrow B$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Tabela 3.5-1 - Tabela Verdade do operador condicional - implicação - em cálculo proposicional.

A forma mais simples de entender a implicação é considerar que ela representa um contrato, ou uma promessa. À lógica interessa que esta promessa seja verdadeira, ou falsa, e isto é tudo que precisamos para determinar se uma determinada proposição é uma implicação, ou não. Considere, por exemplo, que você disse ao seu filho:

Se tirar 10 na prova, lhe darei R$1.000,00.

Tendo feito tal sandice, a leitora terá que lidar com algumas situações interessantes: representaremos esta promessa por duas proposições: p: tirar 10 na prova e q: lhe darei R$1.000,00. A proposição será verdadeira se você cumprir a promessa. Caso contrário será falsa.

Primeiro Suponha que seu filho tirou 10 na prova, então $p = V$ *e você mantenho a promessa, logo* $q = V$*. A proposição é verdadeira.*

Considere agora que seu filho tirou 10 na prova, então $p = V$ *e você não cumpro a promessa, logo* $q = F$*. A proposição é falsa.*

Suponha que seu filho tirou 8 na prova, e, ainda assim, você lhe dá os R$ 1000,00, $p = F$ *e* $q = V$*, mesmo que a hipótese seja falsa, neste caso, a conclusão é verdadeira e a promessa foi mantida. A proposição é verdadeira.*

Por fim, suponha que seu filho tirou 7 e você não paga os R$1.000,00, neste caso, $p = F$ *e* $q = F$ *a proposição ainda é verdadeira porque a promessa não foi quebrada. Você não precisa pagar o valor combinado.*

Observe que a única situação em que a implicação é falsa ocorre quando a leitora não cumprir a promessa. Assim funciona a implicação.

Na teoria dos conjuntos a implicação pode ser representada pelo Diagrama de Venn apresentado na Figura 3.5.1.

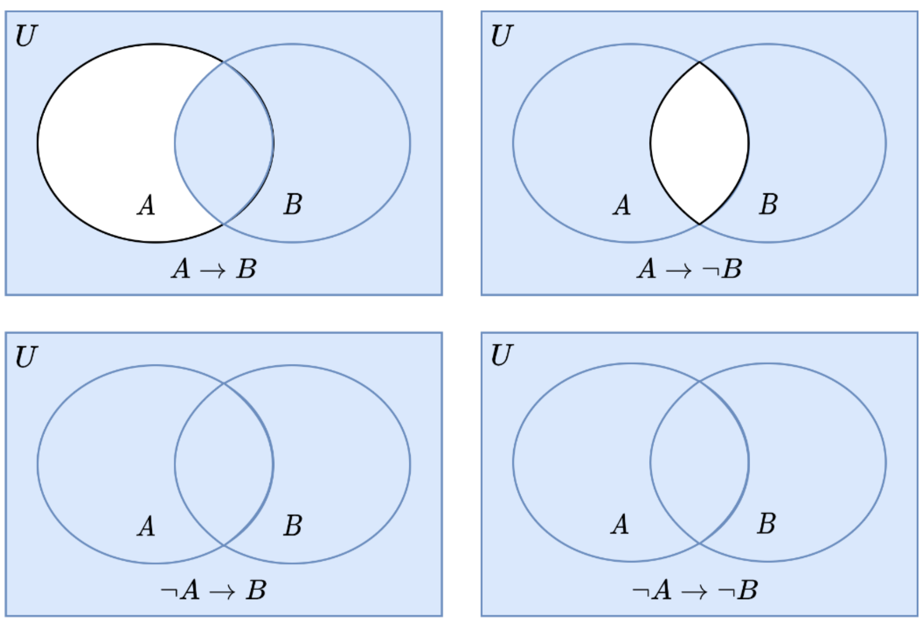


Figura 3.5-1 - Representação da Implicação usando a teoria dos conjuntos

Na Eletrônica Digital não temos uma porta lógica exclusiva para representar a implicação, mas podemos fazer uma combinação de portas para implementar a mesma lógica apresentada na Tabela Verdade 3.4. A representação gráfica deste circuito pode ser vista na Figura 3.6.2.

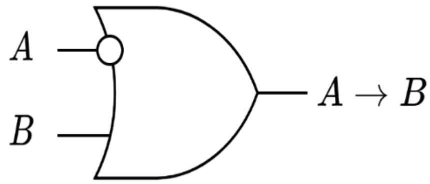


Figura 3.5-2 - Combinação de portas lógicas, inversor e ou, criando implicação em circuitos eletrônicos.

Apesar de existir uma implementação deste circuito na forma de porta lógica, em alguns circuitos integrados, seu uso não é muito comum. De fato, na minha experiência, nunca usei esta configuração propositalmente. Isso quer dizer que na construção de circuitos digitais, esta construção aparece como consequência de um processo de simplificação. Não tenho dúvida que usei esta estrutura várias vezes. Mas, em nenhuma destas vezes estava procurando representar uma implicação. Apenas acabei chegando a este circuito depois de simplificar os circuitos originais.

No trabalho original de Claude Shannon, *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits* não há referência a implicação. Shannon acompanha Boole, que também não definiu a implicação em *Laws of Thought*. Existe algo parecido, a inclusão, que deixaremos de lado no Cálculo Proposicional. Também não existem formas normais, que veremos mais tarde, relacionadas a simplificação de fórmulas lógicas apenas com a implicação. Por outro lado, a operação condicional, que podemos chamar de implicação material é fundamental para o controle de fluxo em todas as linguagens de programação que são imperativas, e/ou orientadas a objetos por meio da cláusula ***if...then...else***. Isto está para mudar.

Estamos muito próximos de conseguir criar circuitos eletrônicos que funcionarão exatamente como os neurônios. Para isso estamos usando memristores. Para simplificar, estes dispositivos podem ser entendidos como resistores que lembram sua última resistência e que permitem que esta resistência seja alterada de acordo com algumas relações entre corrente e tensão. Neste caso, a implicação desponta com possibilidade de criação de neurônios artificiais capazes de realizar esta operação lógica.

Em 2010, foi apresentado, na revista Nature, um trabalho mostrando um dispositivo baseado em memristores capaz de executar a implicação (BORGHETTI, SNIDER, *et al.*, 2010). No trabalho foi apresentada uma porta lógica com dois transistores e um circuitos de memristores capaz de se comportar com a mesma tabela verdade do

O operador condicional é apenas um conectivo lógico e alguns argumentos podem não fazer sentido e ainda assim serem logicamente corretos. O exemplo 3.14 mostra o uso da função verdade para a busca da verdade na implicação

Exemplo 3.14: busca da verdade em implicação

			Resultado	
	$\boldsymbol{p}$: Alagoas está na região sul.		$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: Minas gerais está na região norte.		$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$
1.	$\boldsymbol{V(p \to q) \therefore V(p) \to V(q) \therefore T \to T \therefore\ V(p \to q) \therefore T}$		$\boldsymbol{V(p \to q)}$	$\boldsymbol{T}$

Alagoas está na região sul então Minas Gerais está na região norte.

A implicação pode ter diversas formas sintáticas na língua portuguesa, como falada e escrita no Brasil como pode ser visto nas sentenças apresentadas no Exemplo 3.15.

Exemplo 3.15: sentenças com condicionais em português.

1.	$\boldsymbol{p}$: Se chover, $\boldsymbol{q}$: fico molhado.	$\boldsymbol{p \to q}$
2.	$\boldsymbol{p}$: Quando chove, $\boldsymbol{p}$: fico molhado.	$\boldsymbol{p \to q}$
3.	$\boldsymbol{p}$: Chover implica em, $\boldsymbol{q}$: ficar molhado.	$\boldsymbol{p \to q}$
4.	$\boldsymbol{p}$: Toda vez que chove, $\boldsymbol{q}$: fico molhado.	$\boldsymbol{p \to q}$
5.	$\boldsymbol{p}$: Chover é condição para, $\boldsymbol{q}$: ficar molhado.	$\boldsymbol{p \to q}$

Que soem os tambores! Agora só falta uma operação do cálculo proposicional.

3.4 Exercícios

Represente as seguintes sentenças na forma de disjunção, ou conjunção, sempre que possível.

a) Se o Amazonas é o maior estado do Brasil e Manaus é sua capital então Manaus é a maior cidade do Amazonas.

   Solução: $\boldsymbol{p}$ $\equiv$ O Amazonas é o maior estado do Brasil; $\boldsymbol{q}$ $\equiv$ Manaus é a capital do Amazonas; $\boldsymbol{r}$ $\equiv$ Manaus é a maior cidade do Amazonas. $\therefore (p \wedge q) \to r$.

b) Se Sílvia e Cíntia forem a praia, ou Paula ou Simone irá com elas.

c) Se compro bicicleta não caso.

d) Vou a Europa se Paris e Londres estiverem livres.

e) Quando Marcela, ou Mariza, estiverem prontas, eu ligo.

f) Não vou à praia se Marcela e Joana forem.

g) Se um mais um igual a dois, então dois menos um igual a um.

h) O carro voltará a funcionar se trocarmos a bateria e a lâmpada do farol.

i) Patrícia vai à praia e Silvia não vai.

3.6 Bicondicional ou implicação dupla ($\leftrightarrow$)

Chamamos de bicondicional, ou implicação dupla, a toda sentença que utilize o conectivo ***se, e somente se***. A implicação dupla será representada por $\leftrightarrow$. Uma proposição composta bicondicional será verdadeira se os dois operadores forem verdadeiros ou se os dois operadores forem falsos.

A forma simplificada de memorizar o resultado da aplicação da operação de implicação dupla sobre duas proposições pode ser resumida na expressão: **os dois ou nenhum dos dois**. Ou os dois operandos são verdadeiros ou nenhum dos dois é verdadeiro. Nos dois casos a proposição composta representada pela implicação dupla, ou bicondicional, será verdadeira.

A Tabela Verdade da operação bicondicional pode ser vista na Tabela 3.6-1.

Cálculo Proposicional		
p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	$\boldsymbol{F}$
F	F	$\boldsymbol{T}$

Eletrônica Digital		
A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Tabela 3.6-1 - Tabela Verdade do operador bicondicional em cálculo proposicional e Álgebra Booleana.

Assim como todos os operadores que vimos até o momento, o operador bicondicional pode ser expresso por uma grande quantidade de fases em português e, em qualquer outra linguagem natural. Assim, a leitora terá que ter um cuidado especial ao interpretar as frases além do conectivo ***se, e somente se*** e suas equivalências. Como pode ser visto no Exemplo 3.13.

Exemplo 3.13: busca da verdade em implicação sentencial.

		Resultado
$\boldsymbol{p}$: Há fogo.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{q}$: há fumança.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$

1. $\boldsymbol{V(p \leftrightarrow q) \therefore V(p) \leftrightarrow V(q) \therefore T \leftrightarrow T \therefore V(p \leftrightarrow q) \therefore T}$ $\boldsymbol{V(p \rightarrow q)}$ $\boldsymbol{T}$

O haver fogo é condição suficiente e necessária para que haja fumaça.

		Resultado
$\boldsymbol{p}$: Se Paula Fica Alegre então Silvana Sorri.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{q}$: Se Silvana sorri então Paula fica alegre.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$

1. $\boldsymbol{V(p \leftrightarrow q) \therefore V(p) \leftrightarrow V(q) \therefore T \leftrightarrow T \therefore V(p \leftrightarrow q) \therefore T}$ $\boldsymbol{V(p \rightarrow q)}$ $\boldsymbol{T}$

Se Paula fica alegre então Silvana Sorri e, Se Silvana sorri então Paula fica alegre.

A operação bicondicional ocorrerá sempre que p for uma condição suficiente para q e q for uma condição necessária para p.

A representação da implicação dupla com teoria dos conjuntos pode ser vista no diagrama de Venn apresentado na Figura 3.6.1.

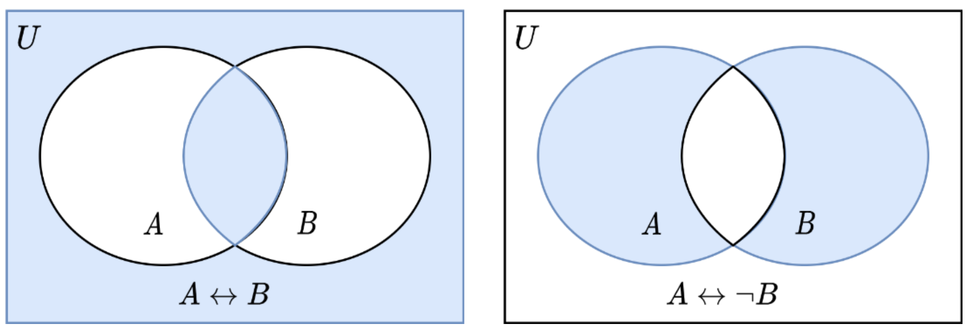


Figura 3.6-1 - Representação do operador bicondicional em teoria dos conjuntos

Apesar de também não estar representada nos trabalhos de Shannon e Boole, e ao contrário da implicação, a implicação dupla, ou bicondicional apresenta um nível elevado de popularidade nos circuitos da eletrônica digital. O operador bicondicional é representado pela porta XNOR, ou a negação da porta ou exclusiva, que veremos em breve, pode ser vista na Figura 3.6.2.

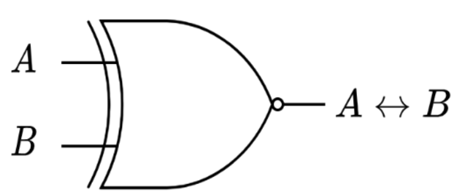


Figura 3.6-2 - Porta XNOR que representa a implicação dupla em circuitos eletrônicos.

3.5 Exercícios

Considerando as sentenças a seguir, marque aquelas que são proposições atômicas, ou simples, e compostas. Nos dois casos, represente estas sentenças de forma da lógica proposicional sempre que for possível.

a) Eu estudo informática;

b) Se a > 0 então a é um inteiro positivo.

c) Flamengo é o melhor time do mundo, o Fluminense não.

d) Está frio, mas a casa não está gelada.

e) João trabalha ou estuda.

f) Que dia lindo!

g) Amanhã chove?

h) Se as nuvens não são pretas, não chove.

i) O ar-condicionado ser consertado é suficiente para ser ligado.

j) Python é uma linguagem de programação.

k) Viva o C++!

l) Se o cão não está latindo, o cão está na casa.

m) O gato não subiu na árvore.

n) Não é o caso que o Brasil seja pequeno, assim como não é o caso que o Peru seja grande.

o) Sandra não mente se a pergunta for de matemática.

p) Se o aluno estudar então ele não irá ficar reprovado.

q) Flamengo é campeão e Vasco é segundo colocado.

r) Se Ana não é estudiosa e Juliana é, então Juliana vai passar e Ana não.

   Solução: proposição | $\boldsymbol{p}$ ≡ Ana estudiosa; $\boldsymbol{q}$ ≡ Juliana estudiosa; $\boldsymbol{r}$ ≡ Juliana passa; $\boldsymbol{s}$ ≡ Ana passa. $\therefore (\neg p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$.

s) Amanda trabalha ou estuda.

t) Se está quente o gato dorme o dia inteiro.

4 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES LÓGICAS

À medida que fui definindo os operadores ia deixando a leitora curiosa, falando sobre as propriedades interessantes que cada um deles possuí.

Só para lembrar, começamos definindo um alfabeto para o Cálculo Proposicional:

$$\Sigma_{CP} = \{\{p;\ q; r; s; t; \dots\};\ T; F; \wedge; \vee; \neg; \rightarrow; \leftrightarrow; (;)\}$$

Depois, convertemos várias sentenças em proposições e, sem nenhum compromisso, fui acrescentando um parêntese aqui, outro acolá, de forma que a representação da proposição fosse tomando a forma de uma fórmula. Este foi o começo do estudo da sintaxe da linguagem do Cálculo Proposicional. Agora vamos misturar estes operadores em proposições e estudar as equivalências e propriedades destas operações. Vamos definir fórmula:

1. As proposições representadas por letra minúsculas são fórmulas também chamadas de fórmulas atômicas.
2. Se p é uma fórmula, $(\neg p)$ também é uma fórmula.
3. Se p e q são fórmulas, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(P \rightarrow Q)$ e $(p \leftrightarrow q)$ também são fórmulas.
4. Não há nenhuma outra fórmula.

Para estudar estas as propriedades precisamos também precisaremos definir que a equivalência entre duas fórmulas. Esta equivalência será representada pelo símbolo $\equiv$. Observe $\equiv$ não faz parte do nosso alfabeto e que a equivalência não é igualdade. Ainda que o sentido seja muito próximo, neste caso, queremos dizer que duas fórmulas são equivalentes se possuem a mesma verdade.

Sempre que eu quiser representar qualquer proposição, ou mesmo uma fórmula, usaremos letas maiúsculas $\{P, Q, R, S, T, \dots\}$.

Dizemos que $P \equiv Q$ se a verdade de P e Q forem as mesmas. De tal forma que:

$$(se\ V(P) \equiv V(Q) \equiv T \therefore P \equiv Q) \vee (se\ V(P) \equiv V(Q) \equiv F \therefore P \equiv Q)$$

De forma intuitiva dizemos que duas proposições são equivalentes se elas dizem a mesma coisa.

Agora podemos ver as propriedades de cada uma das operações lógicas e depois, voltamos as fórmulas.

Como a única ferramenta de análise que vimos até o momento são as tabelas verdades, vamos continuar usando esta ferramenta para provar todas as propriedades. Mesmo sabendo que esta é uma abordagem de bruta força, mecânica e cansativa, peço a leitora que tente, reproduzir todas estas tabelas. Esta é uma habilidade que lhe será útil.

Antes de analisarmos os operadores lógicos precisamos ver quatro regras de equivalência:

1. **a equivalência é reflexiva $\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{P}$:** com isso declaramos que qualquer fórmula P é equivalente a si mesma e, portanto, pode ser usada como substituição de si mesmo;
2. **a equivalência é comutativa $(\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{Q}) \equiv (\boldsymbol{Q} \equiv \boldsymbol{P})$:** este é um conceito natural, significa que se as duas formas são equivalentes entre si elas podem ser intercambiadas em qualquer ordem;
3. **a equivalência é transitiva $(\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \equiv \boldsymbol{R}) \rightarrow (\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{R})$:** considerando as regras anteriores se P é equivalente a Q e Q é equivalente a R então P é equivalente a R.
4. **a equivalência das negações $(\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \equiv \neg \boldsymbol{Q})$:** duas fórmulas serão equivalentes só, e somente só, suas negações forem equivalentes.

4.1 Propriedades da Negação $(\neg)$

A negação de p é definida de tal forma que se$V(p) \equiv T$ então a $V(\neg p) \equiv F$ e, da mesma forma se $V(p) \equiv F$ então a $v(\neg p) \equiv T$. A negação pode ser representada pela Tabela Verdade 4.1-1.

$\boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p}$
T	$\boldsymbol{F}$
F	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.1-1: tabela verdade da negação

Podemos provar que a negação possui as seguintes propriedades:

1. **Dupla negação:** A negação de uma negação é a verdade original. De tal forma que $\neg\neg P \equiv P$. Que pode ser representado na Tabela Verdade 4.1-2.

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
T	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$
F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.1-2 - Dupla negação.

2. **Distributividade:** a negação é distributiva tanto em relação a conjunção ($\wedge$) quanto em relação a disjunção ($\vee$), de tal forma:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Observe, por favor, que existe uma troca de operadores quando aplicamos a propriedade distributiva da negação. A propriedade distributiva da negação pode ser provada por meio das Tabelas Verdade 4.1.3 e 4.1.4:

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.1-3 - distributividade da negação sobre a disjunção

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.1-4 - distributividade da negação sobre a conjunção.

A distributividade da negação sobre a conjunção e disjunção é conhecida como **As Leis de De Morgan**, em homenagem a ***Augustus De Morgan***. Ainda que Aristóteles tenha feito considerações sobre esta propriedade nos seus tratados estas considerações foram muito superficiais e não sustentaram o desenvolvimento da propriedade. De Morgan, contemporâneo e amigo de Boole foi um dos primeiros a comentar de forma científica e fundamentada os trabalhos de Boole e foi o primeiro a publicar a prova lógica desta verdade usando a Álgebra de Boole.

Provamos a propriedade distributiva da negação usando a força bruta, analisando todos os casos possíveis com a Tabela Verdade. Esta é uma forma prática, contudo cansativa de realizar uma prova. Alternativamente, podemos recorrer a teoria dos conjuntos. Mas antes vamos lembrar que eu defini U, o conjunto Universo como sendo equivalente a $\top$, a verdade T e o conjunto vazio $\emptyset$ equivalente a $\perp$, a falsidade F isto é o mesmo que dizer o complemento de U é vazio $\emptyset$. Isso é importante porque vamos usar a noção de complemento para mostrar uma das Leis de De Morgan na Figura 4.1-1.

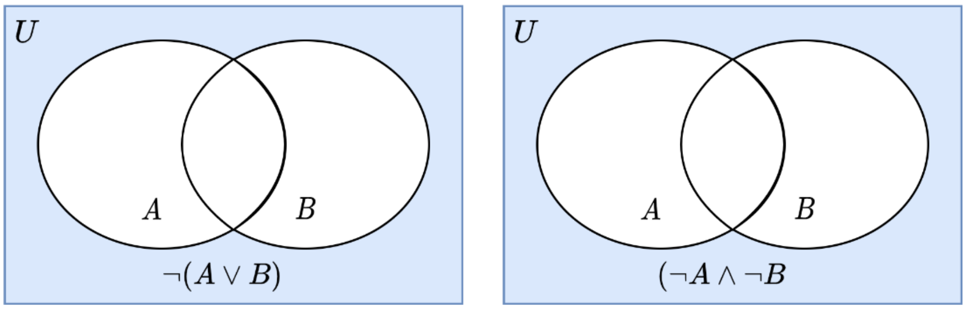


Figura 4.1-1 - Demonstração de uma das Leis de De Morgan

Na Figura 4.1-1 vemos o conjunto formato por todos os elementos que não são parte da união entre A e B que lemos como sendo a negação da disjunção entre A e B e ao lado é possível ver os elementos que são a interseção dos elementos que não estão em A e dos elementos que não estão em B que lemos como sendo a conjunção entre o que não é A com o que não é B.

Usando as Leis de De Morgam, podemos substituir uma conjunção por uma disjunção, desde que possamos usar uma negação. Talvez seja a equivalência mais usada entre todas.

4.2 Propriedades da conjunção ($\wedge$)

A conjunção entre p e q representada por $p \wedge q$, que se lê $p\ e\ q$, é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \wedge q) \equiv T$, se e somente se $p \equiv T$ e $q \equiv T$. Ou em outras palavras a conjunção só é verdadeira se p e q forem verdadeiros. A conjunção apresenta as seguintes propriedades:

1. **Comutativa:** $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$;

p	q	$(p \wedge q)$	$(q \wedge p)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

Tabela 4.2-1- a conjunção é comutativa

2. **Associativa:** $r \wedge (p \wedge q) \equiv (r \wedge p) \wedge q$;

p	q	r	$(p \wedge q)$	$r \wedge (q \wedge p)$	$(r \wedge p)$	$(r \wedge p) \wedge q$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.2-2 - propriedade associativa da conjunção

3. **Distributiva:**

a) Conjunção sobre a conjunção: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$

p	q	r	$(q \wedge r)$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.2-3 - distribuição da conjunção sobre a conjunção

b) Conjunção sobre a disjunção: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.2-4 - distribuição da conjunção sobre a disjunção

4. **Idempotência:** $p \wedge p \equiv p$

p	p	$(p \wedge q)$
T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	$\boldsymbol{F}$

4.3 Propriedades da disjunção $(\vee)$

A disjunção entre p e q representada por $p \vee q$, que se lê p *ou* q é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \vee q) \equiv T$, se e somente se

$p \equiv T$ *ou* $q \equiv T$. Ou em outras palavras a disjunção é verdadeira se p ou q forem verdadeiros. A disjunção apresenta as seguintes propriedades:

1. **Comutativa:** $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

p	q	$(p \vee q)$	$(q \vee p)$
T	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
T	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
F	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-1 - a disjunção é comutativa.

2. **Associativa:** $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee r$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-2 - propriedade associativa da disjunção.

5. **Distributiva:**

a) Disjunção sobre a conjunção: $p \vee (q \wedge r) \equiv \ (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$(q \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-3 - distribuição da disjunção sobre a conjunção

b) Disjunção sobre a disjunção: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee r)$	$(p \vee q) \vee (p \vee r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-4 - distribuição da conjunção sobre a disjunção

6. **Idempotência:** $p \vee p \equiv p$

p	p	$(p \vee q)$
T	T	$\boldsymbol{T}$

T	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-5 - Idempotência da disjunção.

4.4 Propriedades da implicação $(\rightarrow)$

A implicação, ou operação condicional de p em q representada por $p \rightarrow q$, que pode ser lida como "se p *então* q, é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \rightarrow q) \equiv F$, se e somente se $q \equiv F$. Ou em outras palavras a implicação de p em q é falsa se o consequente q for falsa, independentemente do valor do antecedente p. A Tabela Verdade da implicação pode ser vista em Tabela 4.4.1

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.4-1 - tabela verdade da implicação (condicional)

Com relação as propriedades podemos destacar que a implicação é:

1. **Comutativa em relação ao antecedente:** $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.4-2 - propriedade comutativa da implicação no antecedente.

2. **Distributiva:** $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
$\underline{T}$	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
$\underline{T}$	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
$\underline{T}$	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
$\underline{T}$	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
$\underline{F}$	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
$\underline{F}$	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
$\underline{F}$	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
$\underline{F}$	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.4-3 - propriedade distributiva da implicação

3. **Contrapositiva:** $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
T	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
F	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.4-4 - propriedade distributiva da implicação

4. **Transitividade:** $((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$

p	q	r	$(p \to q)$	$(q \to r)$	$(p \to q) \to (q \to r)$	$(p \to q) \to (q \to r) \to (p \to r)$	$(p \to r)$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F
F	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T

Tabela 4.4-5 - Transitividade de Implicação

5. **Diversas:** $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv (\neg q \to \neg p)$

Neste caso, não são propriedade, mas equivalências notáveis que podemos usar relacionando a implicação com conjunções e disjunções. A prova, usando a Tabela verdade, destas equivalências pode ser vista na Tabela 4.4

p	q	$p \to q$	$\neg p$	q	$(\neg p \vee q)$	p	$\neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q \to \neg p)$
T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$
T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.4-6 - relações de equivalência notáveis entre a implicação, disjunção e conjunção.

4.5 Propriedades da implicação dupla, ou bi condicionalidade $\leftrightarrow$

Definimos a implicação dupla de p em q, $(p \leftrightarrow q)$, como sendo a operação lógica que será verdadeira se e somente se, $p \equiv q \equiv T \vee p \equiv q \equiv F$. Ou, a implicação dupla só será verdadeira se p e q forem verdadeiros ou se p e q forem falsos. A tabela verdade da implicação dupla pode ser vista na Tabela 4.5.1

p	q	$p \leftrightarrow q$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.5-1 - Tabela verdade da implicação dupla.

A implicação dupla em relação as suas propriedades é:

1. **Comutativa**: $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
T	T	***T***	***T***
T	F	***F***	***F***
F	T	***F***	***F***
F	F	***T***	***T***

Tabela 4.5-2 - Propriedade comutativa da implicação dupla.

2. **Associativa:** $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

p	q	r	$(q \leftrightarrow r)$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
T	T	T	T	***T***	T	***T***
T	T	F	F	***F***	T	***F***
T	T	T	T	***T***	T	***T***
T	F	F	T	***T***	F	***T***
F	T	T	T	***F***	F	***F***
F	T	F	F	***T***	F	***T***
F	F	T	F	***T***	T	***T***
F	F	F	T	***F***	T	***F***

Tabela 4.5-3 – Propriedade associativa da implicação dupla.

Assim como ocorreu quando estudamos a implicação, podemos encontrar fórmulas equivalentes notáveis relacionando a operação bicondicional com a conjunção e a disjunção:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q))$$

4.6 Síntese de propriedades e equivalências.

1.	$\neg\neg P \equiv P$	**11.**	$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
2.	$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$	**12.**	$p \land (q \lor r) \equiv (p \lor q) \lor (p \lor r)$
3.	$\neg(p \land q) = \neg p \lor \neg q$	**13.**	$p \lor p \equiv p$
4.	$(p \land q) \equiv (q \land p)$	**14.**	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$
5.	$r \land (p \land q) \equiv (r \land p) \land q$	**15.**	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
6.	$p \land (q \land r) \equiv (p \land q) \land (p \land r)$	**16.**	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$
7.	$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$	**17.**	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r)$
8.	$p \land p \equiv p$	**18.**	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \lor q) \equiv \neg(p \land \neg q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$
9.	$(p \lor q) \equiv (q \lor p)$	**19.**	$(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$
10.	$p \lor (q \lor r) \equiv (p \lor q) \lor r$	**20.**	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

Tabela 4.6-1 - Resumo das propriedades e equivalências entre fórmulas proposicionais.

5 FÓRMULAS E A LINGUAGEM DA LÓGICA

A linguagem natural não parece ser uma boa ferramenta para a tomada de decisão a história está repleta de exemplos do uso impróprio da linguagem que acabaram em guerras. Ao que parece a verdade se esconde atrás da linguagem implicando na necessidade de uma linguagem que não possa embaçar ou ocultar a verdade.

Aristóteles, Leibnitz, Boole, Wittgenstein, Russell e muitos outros que não citei neste livro, trabalharam, ao longo de 2300 anos criando a linguagem da lógica. Ao que fosse simples, claro e objetivo. O resultado é o que chamamos de Fórmulas Bem Formadas. Apenas as Fórmulas Bem Formadas são as únicas fórmulas válidas no Cálculo Proposicional e são estas fórmulas que usaremos para provar a verdade de uma proposição composta, reduzindo esta proposição a sua equivalência usando as fórmulas e propriedades de equivalência que vimos no Capítulo 4.

Toda linguagem começa com um alfabeto. Só para lembrar usamos, e usaremos por todo este livro o alfabeto:

$$\Sigma_{CP} = \{p;\ q; r; s; t; T; F; \wedge; \vee; \neg; \rightarrow; \leftrightarrow; (;)\}$$

Dito isso, precisamos definir a sintaxe que usaremos no Cálculo Proposicional:

As Fórmulas Bem Formadas são aquelas, e só aquelas, que são escritas de forma correta, usando apenas os símbolos definidos no Σ_{CP}.

A sintaxe diz respeito a forma como escreveremos as proposições. A Semântica diz respeito a o significado destas fórmulas. Já vimos uma forma de determinar a semântica de uma fórmula: as Tabelas Verdade. Mas, podemos encontrar este valor semântico, este significado, usando as regras de equivalência que vimos para cada operador, desde que o processo de equivalência obedeça às regras das Fórmulas Bem Formadas.

O Exemplo 5.1 apresenta quatro Fórmulas Bem Formadas considerando que $P, Q, R\ e\ S$ representam Fórmulas Bem Formadas.

Exemplo 5.1: Fórmulas Bem Formadas

a) $(\neg P)$
b) $(P \wedge Q)$
c) $(\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow (R \leftrightarrow S)))$

d) $((P \lor Q) \land ((\neg R) \leftrightarrow S))$

Usando toda a formalidade matemática para definir as Fórmulas Bem Formadas começaremos analisando a aridade α dos operadores lógicos do Cálculo Proposicional. Em matemática a aridade é um termo que expressa o número de operadores de uma determinada função ou operação. Para isso vamos definir o conjunto $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K} = \{\neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

Desta forma, $\mathbb{K}$ é um conjunto finito, que contém todas as operações válidas no Cálculo Proposicional. Sendo assim, a aridade de cada operação será definida pela função:

$$\alpha = \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{N}$$

Ou seja, para cada operação em $\mathbb{K}$ existe uma aridade no domínio dos números naturais $\mathbb{N}$ de tal forma que:

$$\alpha(\neg) = 1;$$
$$\alpha(\land) = \alpha(\lor) = \alpha(\rightarrow) = \alpha(\leftrightarrow) = 2$$

Ainda precisamos considerar o conjunto $\mathbb{A}$ de todas as proposições atômicas possíveis de tal que:

$$\mathbb{A} = \{P, Q, R, S, \dots\}$$

De tal forma que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ sejam conjuntos disjuntos:

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{K} = \emptyset$$

Ou seja, os símbolos que usaremos para as fórmulas não fazem parte do conjunto de símbolos que usamos para as operações. Agora, podemos rever, com um pouco mais de detalhe, as regras que definimos para a criação de fórmulas no Cálculo Proposicional anteriormente:

1. uma proposição atômica P pertencente a $\mathbb{A}$ é uma Fórmula Bem Formada;
2. se P é bem formada então $\neg P$ é uma Fórmula Bem Formada;
3. se P e Q são bem formadas, então $P \land Q$, $P \lor Q$, $P \rightarrow Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são bem formadas;
4. Se P é uma Fórmula Bem Formada então (P) é uma Fórmula Bem Formada.

O uso dos parênteses é necessário porque as fórmulas lógicas devem evitar qualquer tipo de ambiguidade. $(p \land q) \lor r$ tem um valor verdade $V()$ diferente de $p \land (q \lor r)$ e os parênteses ajudam a explicitar isso. É preciso tomar muito cuidado com o uso dos parênteses. Quando corretamente utilizados eles ajudam a encontrar a verdade de uma proposição composta, quando mal utilizados eles induzem o erro. Vamos representar por P e fórmula composta $(p \land q)$ e por R a fórmula atômica r. Sendo assim:

$$(p \land q) \lor r$$

Pode ser escrita:

$$P \lor R$$

E podemos notar que em $(p \land q) \lor r$ a operação principal é a disjunção $\lor$. Na outra fórmula, se representamos p por P e $(q \lor r)$ por Q teremos:

$$P \land Q$$

Neste caso a operação principal é $\land$ a conjunção. Nos dois casos, e para falar a verdade, em qualquer expressão composta, podemos representar as Fórmulas Bem Formadas por um grafo, uma árvore cuja raiz é a operação principal. Como pode ser visto a Figura 5.1.

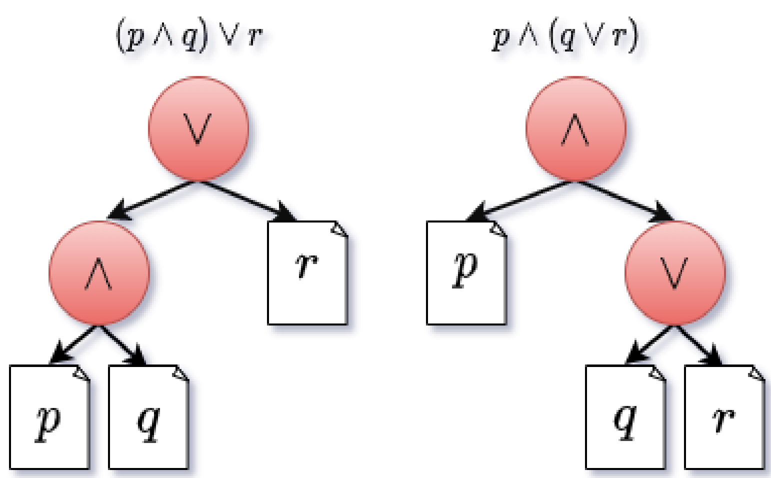


Figura 5.1 - Exemplos de árvores sintáticas criadas a partir de Fórmulas Bem Formadas.

Além dos parágrafos mudarem completamente o valor da função verdade da fórmula também determinam a ordem de resolução. Determinam como devemos montar o raciocínio que levará ao encontro da verdade. Uma vez que o grafo esteja montado podemos encontrar a verdade indo de baixo para cima, das folhas para a raiz encontrando a verdade de todas as fórmulas.

A ordem de precedência $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ é uma convenção da linguagem que adotamos no cálculo proposicional.

Isso quer dizer que expressões sem nenhum parêntese como:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow r \vee s$$

Terão como raiz a implicação dupla. Para entender isso, varremos a expressão da esquerda para a direita, separando as operações de acordo com sua ordem de precedência. Se a leitora não estiver vendo a fórmula, podemos usar os parênteses para deixar claro e eliminar qualquer dúvida, como pode ser visto na Figura 5.2.

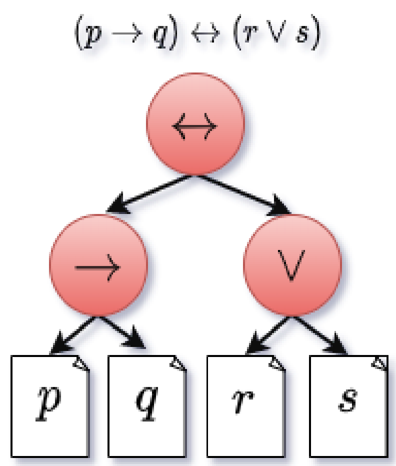


Figura 4.6-1 - Exemplo de fórmula interpretada segundo as procedências dos operadores.

A leitora deve compreender que quando determinei que seria uma implicação dupla estava levando em consideração apenas a fórmula, sem considerar sua origem. Se considerarmos as origens das proposições atômicas, podemos ter, com estes mesmos símbolos, fórmulas com outro sentido e outra verdade que deverão ser escritas com parênteses colocados em outros lugares.

Considere, por exemplo que, de fato, trata-se de uma disjunção entre a proposição s e o resultado da implicação dupla $p \rightarrow q \leftrightarrow r$. Neste caso, teríamos a fórmula e a árvore sintática apresentadas na Figura 5.3.

Assim a leitora já deve ter concluído que, caso não existam parênteses na fórmula, vamos organizá-la de acordo com a ordem de precedência $\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge \, e \vee$, $\neg$. Havendo parênteses, a estrutura da árvore sintática será dada de forma aninhada, do parêntese mais interno para o mais externo.

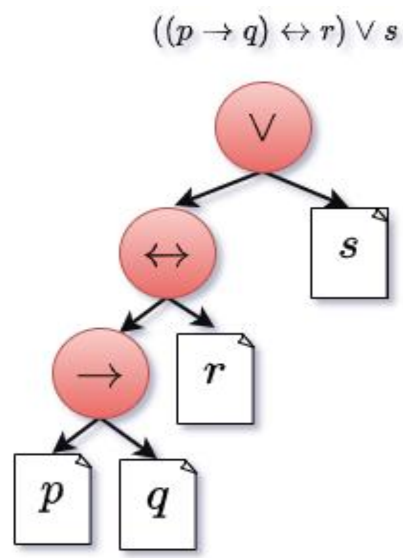


Figura 4.6-2 - O efeito dos parênteses na interpretação das fórmulas.

5.0 Exercícios

Considere as fórmulas a seguir e esquematize suas árvores sintáticas.

a) $p \vee q \wedge p \rightarrow r \vee q$;
b) $p \vee q \leftrightarrow r \rightarrow q$;
c) $p \vee q \vee r \vee s \rightarrow \neg p$;
d) $\neg p \wedge \neg\, q \rightarrow s$;
e) $s \rightarrow t \wedge q$.

5.1 Análise de proposições compostas

Ao longo do livro usamos o conceito de equivalência sem nenhuma formalidade, relaxadamente, sem nenhum compromisso. Pobre autor, pobre leitora. Em lógica, a formalidade é indispensável. Não só na construção das sentenças e preposições, mas também no processo de análise. E para começar a entender os processos de análise lógica, podemos partir da definição de equivalência lógica:

Dizemos que a fórmula P e equivalente a fórmula Q se, e somente se, cada valor lógico verdadeiro, $V(P) \equiv T$, que satisfaz P também satisfaz Q e cada valor lógico verdadeiro, $V(Q) \equiv T$, que satisfaz Q também satisfaz P

A equivalência, como acabamos de definir, daremos o nome de equivalências tautológicas, ou equivalências lógicas. E, deste ponto em diante, já que definimos formalmente a equivalência tautológica, passaremos a utilizar o símbolo ⇔ ou o símbolo ⊨ para indicar esta equivalência.

Com a noção de equivalência, as fórmulas e as propriedades vistas anteriormente, podemos analisar qualquer Fórmula Bem Formada em busca da sua verdade para todas, e em cada uma, das interpretações possíveis. E, uma vez que esta verdade seja encontrada, para todas as interpretações possíveis de uma determinada fórmula, podemos encontrar outras fórmulas que sejam tautologicamente equivalentes.

É possível provar que todos os operadores binários podem ser definidos por fórmulas usando apenas os operadores $\neg$, $\wedge$, $\vee$ $e \rightarrow$.

A Tabela 5.2.1 apresenta a construção da conjunção e da disjunção utilizando os outros operadores

p	q	$p \wedge q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$		p	q	$p \vee q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$		T	T	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{F}$		T	F	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$		F	T	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$		F	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 5.1-1 - Demonstração de equivalência entre disjunção e conjunção

A Tabela 5.2-1 mostra que $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q))$ e que $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q))$ o que permite a substituição das fórmulas por suas fórmulas equivalentes sem nenhum efeito sobre a verdade destas fórmulas sobre qualquer uma das suas interpretações. A Tabela 5.2-2 apresenta um resumo de algumas equivalências tautológicas notáveis.

Propriedade		
Comutatividade	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Distributividade	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Identidade	$p \wedge T \Leftrightarrow p$	$p \vee F \Leftrightarrow p$
Negação	$\neg T \Leftrightarrow F$	$\neg F \Leftrightarrow T$
Negação	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$p \vee \neg p \Leftrightarrow T$
Dupla Negação	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	$\neg\neg q \Leftrightarrow q$
Idempotente	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Tabela 5.1-2– Equivalências notáveis envolvendo conjunção, disjunção e negação

A partir da análise das equivalências tautológicas entre fórmulas diferentes podemos encontrar novas formas de representar as fórmulas lógicas. Isto é muito importante na criação de circuitos digitais. Veremos, por exemplo, que qualquer fórmula lógica pode ser representada utilizando apenas a negação da conjunção, ou a negação da disjunção. Estas negações são tão importantes que possuem identificadores próprios.

5.2 Representações equivalentes – formas normais

A ser escrito

5.3 Redução a Nand e Nor e simplificação de fórmulas

A ser escrito. Rever este título.

5.4 Equivalência Sintática

Exemplo 5.2: Prove a equivalência: $\neg(\neg \boldsymbol{p} \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})) \equiv (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$

$\neg(\neg p \vee (\neg p \wedge q))$	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q)$	Usando De Morgan
$\neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q)$	Usando De Morgan
$\neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q)$	Removendo a negação dupla
$\neg p \wedge (p \vee \neg q)$	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q)$	Distributiva
$(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q)$	Como $(\neg p \vee p) \equiv F$
$(\neg p \wedge \neg q)$	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q)$	

6 DEDUÇÃO E REGRAS DE INFERÊNCIA

"But a moment is a long time, and thought is a painful process."
(A.E.Houseman)

Chamaremos de Regra de Inferência a uma estrutura lógica que será utilizada para provar a validade de um argumento. Talvez os conceitos mais importantes que a leitora irá encontrar em todo o cálculo proposicional sejam as técnicas para a determinação da validade um argumento.

A determinação da validade de um argumento deve ser um conceito familiar a leitora. Desde a mais tenra idade, quando foi apresentada a matemática que a leitora está sujeita ao processo de validação de argumentos. Toda a geometria euclidiana, por exemplo, que a leitora aprendeu, se baseia na dedução de fórmulas a partir de outras fórmulas. Um método pouco formal de expressar a verdade por meio de sentenças que, a essa altura do livro, já deve estar provocando sorrisos na leitora que já deve ter relacionado estes processos, que chamaremos de dedutivos, as análises sentenciais que fizemos ao logo do livro até este ponto, e que não estão longe dos processos definidos há mais de 2000 anos na Grécia Antiga.

A Dedução é o processo de encontrar a verdade da conclusão de um argumento. A Inferência á a forma de dedução da verdade de um argumento que utiliza suas premissas para provar a conclusão.

Podemos encontrar a verdade de um argumento por dedução baseada em inferência e implicação. No momento, nos interessa a inferência, o método dedutivo baseado apenas nas regras do cálculo proposicional.

Um argumento é uma coleção de proposições onde uma é chamada de conclusão e todas as outras são chamadas de premissas.

Como disse anteriormente, um argumento é válido só, e somente só, suas premissas são válidas e a conclusão também. Se colocarmos isso em uma forma mais enfática poderemos dizer que os argumentos são válidos se for impossível que a conclusão seja falsa dado que as premissas são verdadeiras.

Argumento é uma coleção de premissas seguida de uma conclusão. Se as premissas são verdadeiras então a conclusão é verdadeira.

Vimos, ao longo do livro, que é possível determinar a função verdade $V()$, de uma determinada fórmula utilizando as Tabelas Verdade como ferramenta de análise para comprovar a validade de uma determinada premissa. As Tabelas Verdade reduzem a lógica a um processo mecânico, tedioso e repetitivo. Não resta nenhuma dúvida que apesar disto, as Tabelas Verdade são úteis, pelo menos até um certo ponto. Imagine o trabalho necessário para resolver uma tabela verdade para uma proposição representada por uma fórmula com oito variáveis e verá o que estou tentado dizer.

6.1 Entre a implicação e o argumento

Enquanto estudávamos os operadores lógicos e as Fórmulas Bem Formadas, observamos as regras da implicação que, apenas por conveniência, reproduzo a seguir, na Tabela 6.1-1:

p	q	$p \rightarrow q$
$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.1-1 - Tabela verdade da operação de implicação

A leitora há de lembrar que ao estudarmos a implicação nos referimos as proposições da forma *se...então*. Que, não por coincidência representa a forma como devemos considerar os argumentos: ***Se*** *as premissas são verdadeiras,* ***então*** *a conclusão é verdadeira*.

A leitora deve estar considerando que os argumentos, de alguma forma, são assemelhados as estruturas de implicação. E não está errada.

A analogia entre a implicação e o argumento existe, mas pode, e deve, ser analisada com um pouco mais de cuidado. Observe novamente a Tabela 6.1-1, a única interpretação em que a implicação é falsa é quando a consequência é falsa. Fui muito longe?

Vamos prestar atenção na Tabela 6.1-1 com a análise de argumentos em mente. Para tanto, nosso p se torna a premissa, nosso q a consequência e, na interpretação 2 e apenas na interpretação 2, a conclusão $p \rightarrow q$ é falsa. Usando a estrutura *se..então*. Poderíamos ler se q é falso então $p \rightarrow q$ é falso. Contudo, muito mais importante é observar que na Interpretação 1, quando p e q são verdadeiros, a implicação $(p \rightarrow q)$ também é esta interpretação ajuda nossa analogia e parece indicar que uma implicação é um argumento. É neste ponto que precisamos tomar cuidado. Observe agora que a conclusão $(p \rightarrow q)$ é verdadeira nas interpretações 3 e 4 quando ou as duas premissas são falsas, ou apenas p é falso. E isso contradiz a definição de argumento. Logo, podemos concluir que:

Todo argumento pode ser expresso na forma de uma operação condicional, mas a operação condicional não é um argumento.

Este paralelo entre a operação de implicação, ou condicional, é importante, uma ferramenta indispensável para o entendimento da validade dos argumentos. Assim, precisamos ir além da implicação para entender o que é um argumento.

Podemos representar o argumento na forma de implicação se transformarmos o antecedente, nosso p em uma conjunção do conjunto de premissas que estão expressas no argumento. E a conclusão do nosso argumento, no consequente da implicação, o nosso q. E é aqui que as coisas ficam realmente interessantes. Vamos representar nosso conjunto de premissas por P e nossa conclusão por Q. E expandir um pouco esta discussão de forma a representar o antecedente como sendo uma coleção de premissas então teremos:

$$P_1, P_2, \dots P_3 \rightarrow Q$$

Como nenhum argumento será válido se suas premissas forem verdadeiras e a conclusão falsa, não existem argumentos válidos com antecedente P verdadeiro e conclusão Q falsa. E se todo o antecedente P for verdadeiro e a conclusão Q falsa, o argumento será inválido. Dessa forma é possível afirmar que a implicação que representar um argumento deverá ser, obrigatoriamente, uma tautologia. Então, podemos definir a validade de um argumento e aprimorar nossa definição.

Um argumento é uma coleção de premissas seguida de uma conclusão. O argumento será válido se, e somente se, a implicação que o represente, seja tautológica.

E podemos usar a relação entre a implicação, os argumentos e a tautologia para verificar a validade de qualquer argumento e, talvez, esta seja a ferramenta mais importante de todo o processo de análise de inferência e dedução.

Usando a implicação, um argumento será válido se a implicação proposicional que o representa for uma tautologia.

Imagino que a leitora precise de um exemplo sentencial para tornar as coisas mais claras e criar a cognição necessária a este entendimento. Neste caso considere a sentença. "*Se Marisa for a praia, encontrará Joana. Marisa foi a praia consequentemente encontrou Joana*" representada no Exemplo 6.1:

Exemplo 6.1: análise de argumentos de forma sentencial usando a implicação.

$p \rightarrow q$: Se Marisa for a praia, encontrará Joana. (primeira premissa)

p: Marisa foi a praia. (segunda premissa)

---

q: Encontrou Joana (conclusão)

Considerando que, temos duas premissas e precisamos garantir que o conjunto de premissas seja verdadeiro. Uma forma interessante de resolver este problema, já que todas devem ser verdadeiras, é uma conjunção. Sendo assim, podemos colocar o argumento do Exemplo 6.1 na seguinte forma:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

E, neste caso, teremos uma representação adequada a análise matemática da validade do argumento. Observe, contudo, que em se tratando de argumentos a representação será mais útil se usarmos uma das seguintes notações:

$$\frac{(p \rightarrow q);\ p}{q}$$

$$\big((p \rightarrow q) \wedge p\big) \vdash q$$

Que pode ser lido como: *"dados p e $p \rightarrow q$ podemos inferir q"*. Esta é a forma mais importante de todo o processo de análise de argumentos, tão importante que não existe consenso entre os estudiosos da lógica se existem regras de inferência, ou apenas uma regra de inferência.

A este argumento um nome específico: *Modus Ponens*. Trata-se de uma abreviação da expressão em latim *Modus ponendo ponens* que pode ser traduzida para o português como *"o modo que afirma afirmando"*. Cuja origem remonta aos tempos de Aristóteles e, principalmente à Escola Estoica.

O processo de dedução é fundamental para a criação da teoria matemática. Se voltarmos a Geometria Euclidiana, por exemplo, veremos que, no seu tempo Euclides declarou 5 postulados e deduziu a estrutura de toda geometria plana a partir das consequências lógicas da aplicação destes postulados. De fato, a matemática está tão integrada a lógica que o próprio Euclides usou apenas os 4 primeiros postulados para provar as 28 primeiras proposições de Os Elementos (*Στοιχεῖα*[6]) porque o quinto[7] postulado ainda está para ser provado.

A leitora não deve se confundir com as palavras, axioma e postulado. A palavra postulado indica uma premissa consequência da análise dos axiomas. Um axioma é uma verdade absoluta. E com ela, podemos verificar a validade de postulados que, se provados verdadeiros, serão chamados de teoremas. A matemática tem uma linguagem própria, a lógica também. Precisamos desta linguagem para que todos, e qualquer um, possam entender e concordar com uma prova específica. Lendo sobre Euclides, a leitora encontrará axiomas, postulados e teorias que definem a geometria.

A Prova Matemática, escrita assim mesmo, com letras maiúsculas é o alicerce de toda a ciência. Talvez a leitora esteja interessada na relação entre a lógica e a prova matemática. Se este for o caso, leia o Apêndice 1.

6.2 Dedução Natural

A maior parte dos textos de lógica abordam os processos de inferência chamados de Dedução Natural, Sistemas Axiomáticos, *Tableaux* Semântico e Cálculos de Sequentes. Vamos abordar todos estes tipos. Começando pelo sistema de Dedução Natural.

Chamamos de Sistema de Dedução Natural ao sistema composto por regras de inferência que estão próximas da forma natural que usamos para deduzir a verdade. Em sistemas naturais, cada prova tem origem em uma consequência lógica deduzida a partir de um conjunto de hipóteses, representadas por Fórmulas Bem Formadas. Este sistema foi desenvolvido de forma independente por ***Gerhard Gentzen*** and ***Stanisław Jaśkowski*** no anos 1930 em busca de um sistema de dedução que fosse mais simples que os sistemas axiomáticos existentes. Gentzen o chamou de *Natürliche Kalkül*, ou em tradução livre: Cálculo Natural.

O Cálculo Natural, ou sistema de dedução natural, a leitora escolhe como prefere, se baseia na existência de argumentos já provados e na aplicação destes argumentos em um encadeamento que permite chegar a conclusão na forma de uma consequência lógica. Que a leitora deve imaginar como sendo uma árvore de consequências lógicas. Assim, se temos P e Q como duas hipóteses cuja verdade seja absoluta e já provada, acho que já chamamos isso de axiomas, podemos concluir que $P \land Q$ é verdade. E expressar esta dedução na forma:

$$\frac{P \quad Q}{P \land Q}$$

[6] Em tradução livre: elemento, no sentido de menor parte de um todo, usado em química. Em alguns textos, esta mesma palavra é usada com o sentido de dado.

[7] Discussão disponível no Apêndice 1: Os Cinco Postulados.

A leitora deve lembrar que P e Q são as variáveis que usamos para representar qualquer Fórmula Bem Formada na lógica então, elas poderiam ser substituídas por qualquer argumento, cuja consequência lógica é bem conhecida. E a expressão do processo dedutivo ficaria mais clara. Suponha a substituição a seguir:

$$\frac{\dfrac{P \quad Q}{P \wedge Q} \qquad \dfrac{P \quad R}{P \wedge R}}{P \wedge Q \wedge P \wedge R}$$

Observe, por favor, propositalmente mantive os argumentos o mais simples possível e que me furtei de colocar os “;” que usamos até agora para separar as hipóteses. Não existe operação na lógica que seja representada por uma Fórmula Bem Formada colocada ao lado de outra. Então, desde que fique claro esta separação, não existe uma necessidade real de incluir o ponto-e-vírgula.

Neste formato, a parte de cima será chamada de contexto, ou teoria, e representará o conjunto de hipóteses que permitirão a dedução da conclusão, ou, se preferir, a percepção da consequência lógica, que está representada na parte inferior da fórmula.

Veremos esta representação e este modo de dedução, muito cuidadosamente, ainda durante a análise dos processos de inferência e dedução, mas principalmente quando estivermos estudando cálculo de sequentes. Por enquanto, enquanto estamos estudando o Cálculo Natural, vamos usar um formalismo um pouco diferente. Vamos representar argumentos da seguinte forma:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

Onde $P_1, P_2, \dots, P_n$ representa a teoria, ou contexto e Q representa a consequência lógica. E faremos o processo de dedução usando uma estrutura chamada de árvore de dedução.

O processo de dedução natural exige que você seja capaz de, começando com as premissas, neste caso premissa, e aplicando sobre ela as Regras de Dedução, apresente todos os passos que permitam concluir que a conclusão é verdadeira.

Pode ser que seja necessário avaliar hipóteses e validar, ou não estas hipóteses durante o processo de dedução. Neste caso, cada hipótese terá a sua própria árvore e todas as regras usadas na comprovação da hipótese só podem ser usadas durante a dedução da hipótese. Esta estrutura pode ser vista no Exemplo 6.2.

Exemplo 6.2: árvore de dedução, prove o argumento: $\boldsymbol{Q \rightarrow R \vdash (P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)}$

1.	$Q \rightarrow R$	Premissa

	a)	$P \vee Q$		Hipótese
		i) P	Hipótese	
		ii) $P \vee R$		
	b)	i) Q	Hipótese	
		ii) R		
		iii) $P \vee R$		
		$P \vee R$		
2.	$Q \vee P \rightarrow P \vee R$			

Neste caso, temos uma premissa $Q \rightarrow R$ e a conclusão $(P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$.

No Exemplo 6.2, propositalmente, omiti todas as regras utilizadas em cada linha. Neste momento, estamos preocupados com a forma do processo de dedução por meio da criação da árvore de derivação. Observe que numerei cada nível de dedução de forma diferente. Então, no primeiro nível, estão as premissas. Também estarão neste nível as deduções que podem ser feitas diretamente a partir das premissas. Existem também algumas hipóteses.

Hipóteses são premissas cuja verdade ainda não foi provada.

Para cada hipótese, abrimos um novo nível de derivação , por exemplo, na linha 1.a, estamos avaliando a hipótese $P \vee Q$, esta análise tem o intuito de provar que esta hipótese é verdadeira. E para isso, abri um novo nível de prova. Que numerei com números romanos, nesta estrutura, para a leitora entender, na linha 1.a.i, estamos avaliando a hipótese P.

Esta notação apresentada no exemplo 6.2 é uma variação da Notação de Fitch, assim chamada em homenagem a ***Frederic Fitch*** (1908-1987) que desenvolveu este tipo de diagrama para facilitar o aprendizado do cálculo proposicional e para separar a Dedução Natural do Cálculo de Sequentes.

Todos os processos de dedução que veremos durante o estudo da Dedução Natural, usarão esta notação. Antes, porém, como já vimos as regras de equivalência, precisamos conhecer os argumentos notáveis, que podem ser chamados também de teoremas, tautológicos, que usaremos para encontrar nossa conclusão usando a Dedução Natural. A estes argumentos notáveis, daremos o nome de Regras de inferência.

6.3 Regras de inferência, formalismo e dedução natural

Anteriormente, no início deste capítulo, vimos o *Modus Ponens* agora definiremos este argumento como nossa primeira regra de inferência. Frege, no seu trabalho *Begriffsschrift* declara, para quem quiser ler que o *Modus Ponens* é a única regra de inferência que existe, e a única que precisamos. O pobre autor que lhe escreve concorda com o mestre Frege.

Há ainda um peso extra que não vou dividir com a leitora. O peso da matemática. E a necessidade de fazer com que tudo seja hermético, reduzido e provado. Meu professor de lógica, no milênio passado, em sua sabedoria, me ensinou que quanto menor o número de regras de inferência melhor o sistema usado para a dedução. Eu aprendi, pode ter certeza disso. Lembro como se fosse ontem o esforço que era necessário para provar qualquer argumento usando apenas o *Modus Ponens*. Ainda assim, mesmo concordado com meu professor e com o mestre Frege, não vou me render à tentação de parecer erudito e ficar limitado a um sistema axiomático então vamos estudar todos as regras de dedução que compõem o Sistema de Dedução Natural conforme definido por Gentzen.

No trabalho *Untersuchungen über das logische Schließen*[8] (1935) Gentzen propõe um conjunto de regras de inferência, ou dedução, a partir do uso dos operadores lógicos $\rightarrow, \neg, \lor\ e\ \land$ de forma que para cada operador existisse uma regra para inclusão e outra para eliminação. Assim, seguindo estas regras, seria possível provar qualquer argumento com a inclusão, ou eliminação de operações para comprovar a valores intermediários do processo de dedução. Vamos observar estas regras, em uma ordem especificamente escolhida para ir incluindo as regras de inferência à medida que a leitora fica mais confortável com o processo de dedução. Começando com a Regra de Hipótese.

6.3.1 A Regra da Hipótese (H)

Você pode introduzir qualquer hipótese, em qualquer estágio da análise de um argumento. Para que o argumento seja provado válido, todas as hipóteses introduzidas precisam ser provadas válidas. Uma hipótese provada válida passa a ser uma premissa e como tal deve ser tratada.

Neste livro, todas deduções serão escritas em árvores de derivação e todas as árvores de derivação começarão com a listagem das hipóteses que o próprio argumento nos indica com sendo válidas e marcaremos todas estas hipóteses com a palavra premissa. Como pode ser visto no Exemplo 6.3.

Exemplo 6.3: apresentação das premissas e hipóteses em uma árvore de derivação.

1.	$Q \lor P$				Premissa
	a)	$P \lor Q$		Hipótese	
		i)	P	Hipótese	
		ii)	$P \lor R$		
	b)	i)	Q	Hipótese	

[8] Em tradução livre: Estudos sobre inferência lógica.

	ii)	R	
	iii)	$P \lor R$	
	$P \lor R$		
2.	$Q \lor P \to P \lor R$		

Não se preocupe, parece complicado, mas não é. A leitora está com esta sensação apenas porque ainda estamos criando as cognições necessárias ao domínio do processo de dedução natural. Se necessário uma hipótese pode ser repetida e, para essa explicitação temos a Regra da Reiteração.

6.3.2 Reiteração ou Repetição (R)

Quando Gentzen definiu este sistema de dedução ele incluiu um conjunto de regras, na forma de argumentos começando que poderiam ser utilizados no processo de dedução, e percebeu a necessidade de explicitar um nível de reutilização de argumentos e chamou esta explicitação de reiteração, ou repetição.

Se você já definiu a verdade de um argumento, ele pode ser deduzido de si mesmo. Ou seja, você pode repetir, qualquer fórmula que já tenha sido deduzida como verdadeira. Há, contudo uma restrição importante: não podemos reiterar uma proposição contida na análise de uma hipótese, para o nível anterior ou repetir a reiteração no mesmo nível.

Exemplo 6.4: uso de permitido da reiteração

1.	$Q \to R$			Premissa
2.	P			Premissa
3.	Q			Premissa
4.	a)	$Q \to R$	Hipótese	
	b)	R	(MP) 1, 3	
	c)	Q	(R) 3	

Neste exemplo a premissa Q foi reiterada em 4.c durante a derivação da hipótese $Q \to R$ de forma válida. Observe, por favor, que esta prova não está completa, estou apenas indicando o uso correto da reiteração.

Exemplo 6.5: uso proibido da reiteração

1.	$Q \to R$			Premissa
2.	P			Premissa
3.	Q			Premissa
4.	a)	$Q \to R$	Hipótese	
	b)	R	(MP) 1, 3	
	c)	R	(R) 3	

Neste exemplo a linha 4.c indica uma reiteração de R que foi deduzido na própria hipótese. O uso deste artifício torna inválida toda a derivação.

Observe também que o uso da Reiteração é raro e, geralmente, ocorre apenas em processos de dedução longo, onde, por algum motivo, precisamos repetir uma verdade para manter o fluxo de raciocínio.

O processo de Dedução Natural consiste na obtenção da conclusão por meio da introdução, ou eliminação de argumentos que podem ser deduzidos das premissas com a utilização das regras de inferência. Vamos começar com a Eliminação da Implicação, também chamada de Eliminação do Condicional ou *Modus Ponens.*

6.3.3 *Modus Ponens*, ou Eliminação da Implicação (MP)

Argumentos *Modus Ponens*, o primeiro dos argumentos condicionais que veremos, podem ser explicitados como: se P é verdadeiro e $(P \rightarrow Q)$ é verdade então podemos inferir que Q é verdade. Sentencialmente podemos expressar o *Modus Ponens* da seguinte forma: *se uma sentença condicional e sua premissa são verdadeiras então a conclusão também será* verdadeira. Estas formas são interessantes, mas não são únicas. Podemos expressar formalmente este argumento nas duas formas apresentadas na Tabela 6.2-1 e no Exemplo 6.4-1 que, espero, jogue um pouco de luz no entendimento deste argumento.

	Nome	Argumento	Tautologia
1	*Modus Ponens*	$\frac{(P \rightarrow Q); P}{P}$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$

Tabela 6.3-1 - Argumento sobre a regra de *Modus Ponens*.

Na Tabela 6.4-1, tomei estou fazendo uso de uma licença poética. Representei a tautologia na forma $((P \rightarrow Q) \wedge Q \Rightarrow Q$ quando deveria ter representado por $((P \rightarrow Q) \wedge Q \rightarrow Q$ esta liberdade foi para indicar que esta tautologia dará origem a um argumento que, por sua vez, será representado por $((P \rightarrow Q) \wedge Q \vdash Q$ e que poderá ser provado usando as Regras da Dedução Natural. Ou seja, na forma de argumento podemos representar o *Modus Ponens* por:

$$((P \rightarrow Q) \wedge Q \vdash Q$$

Ou por:

$$\frac{(P \rightarrow Q); P}{P}$$

E, é claro, podemos usar o *Modus Ponens* na avaliação de sentenças. Da mesma forma que fizemos anteriormente, como pode ser visto no Exemplo 6.2.

Exemplo 6.6: ***Modus Ponens*** **– argumento válido**

$p \to q$: Se Paula tiver a senha, acessará o sistema.
p: Paula tem a senha.

---

q: Paula acessa o sistema

Algumas técnicas permitem determinar se um determinado argumento é válido.

Argumentos válidos são aqueles em que todas as premissas são verdadeiras e a conclusão também é.

Vamos aproveitar o *Modus Ponens* e a Tabela Verdade 6-3 para observar algumas destas técnicas.

	P	Q	$(P \to Q)$
1.	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F
3.	F	T	T
4.	F	F	T

Tabela 6.3-2 - Tabela verdade das fórmulas de um argumento *Modus Ponens* - Implicação.

Observe que na Tabela 6-3 existe uma, e somente uma, interpretação onde os argumentos P e $(P \to Q)$, são verdadeiros e a conclusão Q também é verdadeira, a interpretação 1.

Outra forma de comprovação pode ser obtida da conjunção das premissas. Como pode ser visto na Tabela 6-3.

	P	Q	$(P \to Q) \land P$
1.	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F
3.	F	T	F
4.	F	F	F

Tabela 6.3-3 - Tabela Verdade *Modus Ponens* – Conjunção

Novamente, existe apenas uma interpretação, e somente uma interpretação onde P e $(P \to Q)$, são verdadeiros e a conclusão Q também é, a interpretação 1. Por fim, podemos construir a tautologia que desta regra de inferência como pode ser visto na Tabela 6-5.

	P	Q	$(P \to Q) \land P$	$((P \to Q) \land P) \to Q$

1.	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F	$\boldsymbol{T}$
3.	F	T	F	$\boldsymbol{T}$
4.	F	F	F	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.3-4 - Tabela Verdade *Modus Ponens* - Tautologia.

Neste caso, a melhor representação para o argumento na forma de tautologia é dada com uma pequena alteração nos símbolos utilizados, apenas para representar a tautologia, de tal forma que teremos:

$$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q$$

6.3.1 Exercícios

Usando o *Modus Ponens* encontre a conclusão, ou consequência, dos argumentos cujas premissas estão apresentadas a seguir:

a) $a = \mathrm{b} \wedge b = c, (a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c \vdash ?$

b) $(x, y \in \mathbb{R} \rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}), (x, y \in \mathbb{R}) \vdash ?$

c) Se eu sou culpado, devo ser punido. Sou culpado. Logo?

d) Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$ então $\left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. Logo?

Estes exercícios são aplicações diretas dos conceitos envolvendo argumentos do *Modus Ponens*, as respostas se encontram no final do livro. O único que merece uma atenção especial é o exercício marcado com a letra (d). O qual resolvo a seguir na forma de exemplo:

Exemplo 6.7: resolução do exercício 6.3-1 letra d, aplicação do *Modus Ponens*

d) Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$ então $\left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. Logo?

Solução: fazendo $P \equiv \sqrt{2} > \frac{3}{2}$ e $Q \equiv \left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$ temos, usando o *Modus Ponens* $Q \equiv \left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$ o que está errado já que não podemos usar o *Modus Ponens*, ou qualquer outra regra de inferência se uma das premissas for falsa. No caso a premissa $P \equiv \sqrt{2} > \frac{3}{2}$ é falsa já que $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Este exemplo é importante porque lembra a necessidade de que as duas premissas sejam verdadeiras para que seja possível realizar qualquer processo de dedução. Podemos agora usar o *Modus Ponens* para praticar nosso processo de dedução. Ao processo de dedução daremos no nome de derivação e usaremos (MP) para indicar que a derivação foi realizada usando o *Modus Ponens*.

Exemplo 6.8: prove os seguintes argumentos:

a) $p \rightarrow q; q \rightarrow r, p \vdash r$

Começamos listando as premissas:

1.	$p \rightarrow q$	Premissa
2.	$q \rightarrow r$	Premissa
3	p	Premissa

Como todas as premissas estão no domínio da lógica simbólica, consideramos todas verdadeiras. Agora, temos que provar r, partindo destas premissas. Podemos começar provando q.

1.	$p \rightarrow q$	Premissa
2.	$q \rightarrow r$	Premissa
3.	p	Premissa
4.	q	Se $P \equiv p$ e $Q \equiv q$, então $\vdash q$ (MP)

Como temos $q \rightarrow r$, e acabamos de provar q podemos tentar provar r usando o *Modus Ponens* novamente.

1.	$p \rightarrow q$	Premissa
2.	$q \rightarrow r$	Premissa
3.	p	Premissa
4.	q	Se $P \equiv p$ e $Q \equiv q$, então $\vdash q$ (MP)
5.	r	Se $P \equiv q$ e $Q \equiv r$, então $\vdash r$ (MP)

Neste processo de dedução natural, não foi preciso usar nenhuma hipótese. Por isso temos apenas um nível de dedução nesta árvore.

Cabe agora, à amável leitora, o ônus da prática e, para tanto segue uma lista com alguns exercícios para a prática da derivação com as regras que já conhecemos.

6.3.2 Exercícios

Usando o *Modus Ponens* encontre a derivação (processo de dedução), para os seguintes argumentos:

a) $p \rightarrow \neg q; \neg q \rightarrow r, p \vdash r;$

b) $p \rightarrow \neg q; \neg q \rightarrow r; r \rightarrow \neg s; p \vdash \neg s;$

c) $p \rightarrow (q \wedge r); (q \wedge r) \rightarrow t; p \vdash t;$

d) $(2 > 1) \rightarrow (3 > 1); (3 > 1) \rightarrow (3 > 0); (2 > 1) \vdash (3 > 0)$

Como P e Q as variáveis representadas por letras latinas maiúsculas, são usadas, neste livro para representar qualquer Fórmulas Bem Formadas, podemos fazer $P \equiv \neg Q$ e $Q \equiv \neg P$ e assim, podemos criar um teorema usando o *Modus Ponens* expresso por:

$$\frac{(\neg Q \rightarrow \neg P); \neg Q}{\neg P}$$

Neste caso, encontramos um teorema na forma de uma regra de inferência que pode ser sintaticamente manipulada, se lembrarmos das equivalências da implicação apresentadas na seção 4.4 (Propriedades da Implicação) explicitamente:

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Usando estas regras de equivalência podemos reescrever o teorema que encontramos em uma forma diferente, mas igualmente interessante:

$$\frac{(P \rightarrow Q); \neg Q}{\neg P}$$

A leitora observou que eu fui buscar uma das propriedades dos operadores lógicos? Fique à vontade para fazer o mesmo, lembre-se que estamos usando as letras maiúsculas para representar qualquer fórmula lógica válida e bem formada. O argumento que encontramos é a forma da regra de inferência conhecida como *Modus Tollens.*

6.3.4 Modus Tollens, ou Eliminação da Implicação (MT)

O *Modus Ponens* é construtivo, avaliamos os axiomas em relação ao valor verdadeiro. No *Modus Ponens* conhecemos a verdade de P e da implicação de P em Q com estas duas verdades podemos provar a verdade Q. O *Modus Tollens*[9] é destrutivo, avaliamos os axiomas em relação a seu valor falso. No *Modus Tollens,* não temos a verdade de P, ainda temos a verdade da implicação de P em Q, $(P \rightarrow Q)$, e podemos provar verdade de $\neg Q$ com estas duas verdades, $(P \rightarrow Q)$ e $\neg Q$, poderemos concluir a verdade de $\neg P$.

Argumentos *Modus Tollens* podem ser explicitados Sentencialmente na forma: se Q é falso, representado por $\neg Q$ e $(P \rightarrow Q)$ é verdadeiro então podemos inferir que P é falso e será representado por $\neg P$.

A Tabela 6.4-5-2 e no Exemplo 6.4-5-2 apresenta as expressões formais dos *Modus Ponens e Tollens*.

[9] Em tradução livre: modo de negação.

Nome	Argumento	Tautologia
Modus Ponens	$\dfrac{(P \rightarrow Q);\ P}{P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge P\big) \Rightarrow Q$
Modus Tollens	$\dfrac{(P \rightarrow Q);\ \neg Q}{\neg P}$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$

Tabela 6.3-5-2 - Argumento sobre a regra de *Modus Ponens*.

Exemplo 6.9: *Modus Tollens* na forma sentencial

$p \rightarrow q$: Se Paula tiver a senha, acessará o sistema.

$\neg q$: Paula não tem a senha.

$\neg p$: Paula não acessa o sistema

A primeira forma de validar o *Modus Tollens* é a verificação da tabela verdade da regra, como pode ser visto na Tabela 6.4-6.

	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \rightarrow Q)$
1.	T	T	F	F	T
2.	T	F	F	T	F
3.	F	T	T	F	T
4.	F	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.3-6 - Tabela verdade do *Modus Tollens*

Observe que na Tabela 6-3-6 existe uma, e somente uma, interpretação onde os argumentos $\neg Q$ e $(P \rightarrow Q)$, são verdadeiros e a conclusão $\neg P$ também é verdadeira, a interpretação 4. Onde os valores de P e Q não são relevantes para a comprovação do argumento. Outra forma de comprovação pode ser obtida da conjunção das premissas. Como pode ser visto na Tabela 6.4-7.

	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$
1.	T	T	F	F	F
2.	T	F	F	T	F
3.	F	T	T	F	F
4.	F	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.3-7 - Tabela Verdade *Modus Tollens*

Novamente, existe apenas uma interpretação, e somente uma interpretação onde $\neg Q$ e $(P \rightarrow Q)$, são verdadeiros e a conclusão $\neg P$ também é, a interpretação 4. Por fim, podemos construir a tautologia que desta regra de inferência como pode ser visto na Tabela 6.4-8.

P	Q	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \rightarrow \neg P$

1.	T	T	F	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F	$\boldsymbol{T}$
3.	F	T	F	$\boldsymbol{T}$
4.	F	F	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.3-8 - Tautologia equivalente ao *Modus Tollens*

Repetindo a alteração de símbolos que fizemos na tautologia do *Modus Ponens*, teremos a seguinte tautologia para o *Modus Tollens*:

$$\big((P \rightarrow Q) \land \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$$

Novamente precisamos praticar, seguem mais alguns exercícios com esta finalidade.

6.3.3 Exercícios

Usando o *Modus Tollens* encontre a conclusão, ou consequência, dos argumentos cujas premissas estão apresentadas a seguir:

a) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \land s),\ \neg\neg(r \land s) \vdash ?$
b) $a > 1 \rightarrow a > b,\ a \leq b \vdash ?$
c) Se o Asus é um caro, então ele tem rodas. Asus não tem rodas. Então?
d) Se não estiver sol eu vou estudar matemática. Eu não vou estudar matemática. Logo?

Não deve restar dúvidas que podemos usar o *Modus Tollens* que representaremos por (MT), no processo de derivação para a dedução natural de um argumento. Ainda assim, talvez seja interessante praticar um pouco e, é importante lembrar que já temos quatro regras de inferência, a Hipótese, a Reiteração e os *Modus Ponens* e *Modus Tollens*.

6.3.4 Exercícios

Usando o *Modus Tollens* encontre a derivação (processo de dedução), para os seguintes argumentos:

a) $p \rightarrow q; \neg p \rightarrow r; \neg q \vdash r;$
b) $p \rightarrow q; q \rightarrow \neg\neg r; s \rightarrow \neg r; p \vdash \neg s;$
c) $r \rightarrow s \lor t, \neg(s \lor t), \neg r \rightarrow p, \neg p \vdash \neg\neg r;$
d) $p \rightarrow q; \neg p \rightarrow r; \neg q \vdash r$

6.3.5 Eliminação Da Negação Dupla (END)

A regra da eliminação da Negação Dupla é derivada das regras sintáticas, as propriedades das operações lógicas de tal forma que:

$$\neg\neg P \vdash P$$

Ou,

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

Em qualquer ponto da derivação de um argumento, quando encontramos uma negação dupla podemos eliminar esta negação.

6.3.6 Introdução da Negação Dupla (IND)

Assim como podemos eliminar a Negação Dupla, se for necessário para a comprovação do argumento, também podemos Introduzir a Negação Dupla. Sendo assim:

$$P \vdash \neg\neg P$$

Ou,

$$\frac{P}{\neg\neg P}$$

Em qualquer ponto do processo de derivação podemos substituir uma fórmula qualquer por sua negação dupla se isso for explicar o processo de derivação e comprovar a validade do argumento.

Exemplo 6.10: derive o seguinte argumento: $\boldsymbol{p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p}$

1.	$p \rightarrow \neg q$		Premissa
2.	q		Premissa
3.	$\neg\neg q$	Se $P \equiv q$ então $P \equiv \neg\neg q$	(IND) 2
4.	$\neg p$	Se $P \equiv p$, $Q \equiv \neg q$ e $\neg Q \equiv \neg\neg q$	(MT) 1, 3

O exemplo 6.8 mostra o uso da Inclusão da Negação Dupla e o uso do *Modus Tollens* para encontrar a conclusão do nosso argumento em duas derivações. A Tabela 6.5-9 apresenta as formas da negação dupla.

Nome	Argumento	Tautologia
Negação Dupla	$\frac{\neg\neg P}{P}$ $\frac{P}{\neg\neg P}$	$\neg\neg P \Rightarrow P$ $P \Rightarrow \neg\neg P$

Tabela 6.3-9 - Introdução e Eliminação da Negação Dupla

6.3.7 Simplificação, Ou Eliminação Da Conjunção (EC)

Se a conjunção é verdadeira então as duas premissas que a formam são independentemente verdadeiras. Esta dedução é indiscutível e pode ser traçada as propriedades do operador conjunção.

> *Não há outra possibilidade para que uma conclusão conjuntiva seja verdadeira que não seja graças ao fato que suas duas premissas são verdadeiras.*

Em qualquer ponto da derivação de um argumento, sempre que encontrarmos uma conjunção podemos eliminar esta conjunção escolhendo qualquer um dos dois operados que a formam como pode ser visto na Tabela

Nome	Argumento	Tautologia
Simplificação ou Eliminação da Conjunção	$\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$ $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$

Tabela 6.3-10 – Regras para a Eliminação da Conjunção.

Podemos aproveitar este momento, e as regras que já vimos para uma pequena incursão no mundo da matemática para verificar um exemplo clássico, mas que como todo bom clássico, nunca sai de moda.

Exemplo 6.11: eliminação da conjunção: Prove que *se* $0 < x < 1$ *então* $x \geq 0$:

Vamos primeiro observar que a expressão $0 < x < 1$ é na verdade uma simplificação de uma conjunção entre $0 < x$ e $x < 1$ e pode ser escrita $(0 < x) \wedge (x < 1)$ e queremos provar que isto implica em $x \geq 0$. Para tanto, podemos utilizar a forma de argumento:

$$(0 < x) \wedge (x < 1) \vdash (x \geq 0)$$

Infelizmente, temos que analisar ainda um pouco mais. Observe também que $(x \geq 0)$ é a simplificação de uma disjunção: $(x > 0) \vee (x = 0)$ então, nosso argumento fica:

$$(0 < x) \wedge (x < 1) \vdash (x > 0) \vee (x = 0)$$

Por fim, a leitora precisa observar que $(0 < x) = (x > 0)$ e, finalmente podemos provar se o argumento é verdadeiro ou não.

Se fizermos $P \equiv (0 < x)$, $Q \equiv (x < 1)$ e $R \equiv (x = O)$ teremos:

$$P \wedge Q \vdash P \vee R$$

Que pode ser provado pela derivação:

1.	$P \wedge Q$	Premissa
2.	P	(EC) 1
3.	$P \vee R$	(ID) 2
4.		*QED*

Este QED é a abreviação de *Quod Erat Demonstrandum*, uma expressão em latim que, em tradução livre significa *como se queria demonstrar* e é utilizada para marcar o fim de uma prova. Em português, como falado no Brasil, os professores mais antigos utilizavam a abreviatura CQD de *como queria demonstrar*. Este pobre autor seguirá seus professores e neste livro usará CQD para marcar o final de todas as demonstrações.

6.3.8 Introdução da Conjunção (IC)

Se as duas premissas foram provadas verdadeiras, então uma conclusão conjuntiva também será verdadeira. Esta regra de inferência também deriva diretamente das propriedades do operador conjunção. Ou seja, se, durante o processo de derivação existirem duas premissas verdadeiras, podemos introduzir no processo uma conjunção.

A Tabela 6.5-11, apresenta as formas da Introdução da Conjunção.

Nome	Argumento	Tautologia
Introdução da Conjunção	$\dfrac{P;Q}{P \wedge Q}$	$((P) \wedge (Q)) \Rightarrow (P \wedge Q)$

Tabela 6.3-11 - Introdução da Conjunção

Exemplo 6.12: determine a validade do seguinte argumento: $\boldsymbol{p \wedge q; r \vdash q \wedge r}$

1.	$p \wedge r$	Premissa
2.	r	Premissa
3.	q	(EC) 1
4.	$q \wedge r$	(IC) 2, 3
		CQD

Podemos usar a Introdução da Conjunção porque provamos o q como verdadeiro e o r, foi provado implicitamente por ser uma das premissas apresentadas no argumento.

6.3.9 Adição Ou Introdução Da Disjunção (ID)

Se uma premissa é verdadeira, então qualquer disjunção contendo esta premissa é verdadeira. O nome adição é antigo e remonta a época em que a disjunção era chamada de adição lógica e, neste caso a regra de inferência indica que você pode somar logicamente qualquer proposição verdadeira a qualquer Fórmula Bem Formada sem alterar a verdade desta fórmula e consequente manter íntegro o processo de derivação do argumento. A Adição também é conhecida por Introdução Disjuntiva já que permite a inclusão de uma disjunção no processo de dedução.

Se, no processo de derivação de um argumento qualquer encontramos uma proposição verdadeira, podemos introduzir uma disjunção com qualquer outra proposição, tenha ela sido provada verdadeira ou não.

Nome	Argumento	Tautologia
Adição Lógica ou Introdução Disjuntiva	$\frac{P}{(P \vee Q)}$ $\frac{Q}{(P \vee Q)}$	$(P) \Rightarrow (P \vee Q)$ $(Q) \Rightarrow (P \vee Q)$

6.3.10 Eliminação da Disjunção (ED)

Para aplicação desta regra precisamos ter cuidado redobrado porque não há como determinar qual das premissas envolvidas na conjunção é verdadeira. Ou seja, uma vez que $(p \vee q)$ tenha sido provado verdadeiro, não temos como afirmar $p \vdash \top$ e nem $q \vdash \top$. A única solução é testar as duas hipóteses. Este é um dos motivos que alguns livros se referem ao método de verificar este argumento como prova por casos.

Na Eliminação da Disjunção faremos duas provas independentes, uma para cada um dos operandos da conjunção, e tentaremos chegar a um a verdade comum.

Se encontramos $P \vee Q$, vamos avaliar P em busca de S e Q também em busca de S. Se, nos dois casos provarmos S como verdadeiro, então poderemos colocar S na próxima linha da nossa dedução.

Não é raro termos alguma dificuldade de entender a forma deste argumento. Sentencialmente poderíamos representar a Eliminação da disjunção da seguinte forma.

$\boldsymbol{p \rightarrow r}$: Se estiver sol então vou à praia.

$\boldsymbol{q \to r}$: Se estiver chovendo então vou à praia.

$(\boldsymbol{p \to q})$: Ou está chovendo ou está sol

$\boldsymbol{r}$: Vou à praia.

Esta forma sentencial permite a construção de uma forma tautológica para a Eliminação da Conjunção:

$$\Big(\big((p \to r) \land (q \to r)\big) \land (p \lor q)\Big) \to r$$

Contudo, esta forma não é a mais comum durante a prova de um argumento. De fato, é raro conseguir comprovar uma estrutura complexa com esta. Então recorremos a prova de hipóteses, uma para cada caso possível e como disse antes se as duas hipóteses chegarem a mesma verdade então poderemos eliminar a disjunção substituindo-a pela verdade encontrada. A Tabela 6.5-12

Nome	Argumento	Tautologia
Eliminação da Disjunção	$\dfrac{\begin{array}{rcc} & P & Q \\ (P \lor Q): & \vdots & \vdots \\ & R & R \end{array}}{R}$	$\Big(\big((p \to r) \land (q \to r)\big) \land (p \lor q)\Big) \Rightarrow r$

Tabela 6.3-12 - Representação da Eliminação da Disjunção.

Vamos ver um exemplo do uso da técnica da prova por casos no Exemplo 6.13.

Exemplo 6.13: prove o seguinte argumento: $\boldsymbol{p \lor q \vdash q \lor p}$

1.	$p \lor q$	Premissa
a)	p	Hipótese
	$q \lor p$	(ID)
b)	q	Hipótese
	$q \lor p$	(ID)
2.	$q \lor p$	(ID)
		CDQ

A leitora há de me perdoar, sei que já falei sobre isso. Contudo, observe como estão representadas as hipóteses (a) e (b), são duas deduções independentes dentro do processo de dedução. Observe também que como consegui chegar a mesma verdade para as duas hipóteses pude colocar esta verdade na linha 2, próxima linha, do processo de dedução do argumento dado.

Existe, neste caso de avaliação de hipóteses, uma regra importante, você pode trazer qualquer verdade para dentro da dedução da hipótese, mas não pode levar nenhuma dedução intermediária para fora da dedução da hipótese. Vamos ver outro exemplo:

Exemplo 6.14: prove o seguinte argumento: $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{s}) \vdash (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{s})$

1.	$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$				Premissa
	a)	i)	$(p \wedge q)$	Hipótese	
		ii)	q	(EC) i	
		iii)	$q \vee s$	(ID) ii	
	b)	i)	$(r \wedge s)$	Hipótese	
		ii)	s	(EC) i	
		iii)	$q \vee s$	(ID) ii	
2.	$q \vee s$				
					CQD

6.3.11 Introdução da Implicação (II)

Começamos a analisar as regras de inferência com as regras referentes a introdução da implicação e vamos terminar com a regra de introdução da implicação. Deixei esta regra para o final porque também não temos uma regra sintática para a introdução da implicação em um processo dedutivo. Só para lembrar a implicação tem a forma $(P \rightarrow Q)$ e para introduzir esta verdade em uma dedução temos que usar hipóteses. Então, supomos que existe uma verdade P e tentamos derivar até encontrar Q se isso acontecer então teremos $(P \rightarrow Q)$.

A introdução da implicação pode ser colocada na forma de argumento $P \vdash Q \vdash (P \rightarrow Q)$ que será lido se P prova Q então provamos $(P \rightarrow Q)$. Ou se preferir podemos dizer que em um dado processo de decisão, se conseguimos provar que Q é um teorema de P então, neste processo de decisão $(P \rightarrow Q)$ também é um teorema.

Nome	Argumento	Tautologia
Eliminação da Disjunção	$\dfrac{\begin{array}{c} P \\ \vdots \\ Q \end{array}}{(P \rightarrow Q)}$	$((p \rightarrow q_1) \wedge (p \rightarrow q_2) \ldots \wedge\ (p \rightarrow q_n)) \Rightarrow (p \rightarrow q)$

Tabela 6.3-13 - Introdução da Implicação

A forma tautológica indica a necessidade da conjunção de todas os lemas que foram criados transitoriamente até a comprovação da implicação $(P \rightarrow Q)$. Vamos observar os Exemplos 6.15 e 6.16.

Exemplo 6.15: prove o seguinte argumento: $\boldsymbol{p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p}$

1.	$p \rightarrow q$		Premissa
2. a)	$\neg q$	Hipótese	
b)	$\neg p$	(MT) 1, a se $P \equiv \neg p$ e $Q \equiv \neg q$	
3.	$\neg q \rightarrow \neg p$		
			CDQ

Exemplo 6.16: prove o seguinte argumento: $\boldsymbol{\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q}$

1.	$\neg q \rightarrow \neg p$		Premissa
2. a)	p	Hipótese	
b)	$\neg\neg p$	(IND) 1.a	
c)	$\neg\neg q$	(MT) 1, b se $P \equiv \neg q$, $Q \equiv \neg p$ e $\neg Q \equiv \neg\neg p$	
3.	$\neg\neg q \rightarrow \neg\neg p$		
			CDQ

Existe outra razão para eu ter deixado a introdução da implicação para o final: a introdução da implicação é conhecida como Teorema da Dedução. Todo processo da dedução natural se baseia na prova de que alguma verdade implica em uma conclusão também verdadeira. Observe que todas as provas que obtivemos foram conquistadas sem a necessidade do uso de nenhum axioma. Eu fiz apenas a menção de que as premissas seriam os axiomas do argumento a ser provado para indicar o ponto de partida da dedução.

Uma das características mais importantes do Cálculo Proposicional é que ele não tem nenhum axioma.

6.4 Extensão das Regras do Sistema de Dedução Natural

6.4.1 Introdução bicondicional

O argumento conhecido como Introdução Bicondicional permite a inferência na forma de operação bicondicional quando as premissas são condicionais. Ou seja, em um processo de decisão onde as duas premissas estão na condicional, implicação, podemos concluir a verdade na forma de uma expressão bicondicional. Este argumento pode ser visto em forma sentencial no Exemplo 6.6.

Exemplo 6.15: introdução bicondicional

$p \rightarrow q$: se eu for ao jogo com você então você pagará a minha entrada.

$p \to q$: se você pagar a minha entrada então eu vou ao jogo com você.
$p \leftrightarrow q$: Eu vou ao jogo com você só, e somente só, você pagar a minha entrada.

A formalização do argumento de Implicação Bicondicional pode ser vista na Tabela 6.4-12, juntamente com a sua forma tautológica.

Nome	Argumento	Tautologia
Introdução Bicondicional	$\frac{(P \to Q); (Q \to P)}{(P \leftrightarrow Q)}$	$\big((P \to Q) \wedge (Q \to P)\big) \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

Tabela 6.4-1 - Argumentos destacando a Implicação Bicondicional

A Tabela verdade que mostra a tautologia que comprova o argumento Introdução Bicondicional pode ser visto na Tabela

	P	Q	$(P \to Q)$	$(Q \to P)$	$\big((P \to Q) \wedge (Q \to P)\big)$	$(P \leftrightarrow Q)$	$\big((P \to Q) \wedge (Q \to P)\big) \to (P \leftrightarrow Q)$
1.	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$
3.	F	T	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$
4.	F	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-2 - Tabela verdade mostrando a tautologia da Introdução Bicondicional.

6.4.2 Eliminação Bicondicional

Como a operação bicondicional é logicamente equivalente a conjunção de duas condicionais, duas implicações materiais, se a leitora tiver estabelecido a verdade de $P \leftrightarrow Q$ ou de $Q \leftrightarrow P$, a verdade de P, então podemos deduzir que Q ou P respectivamente. Ou seja, se a primeira premissa for uma bicondicional entre duas Fórmulas Bem Formadas quaisquer e seja possível garantir a verdade de uma destas fórmulas, a outra fórmula pode ser inferida. Fazendo com que a bicondicional seja eliminada do processo de dedução. E isso não é tudo, graças as propriedades de equivalência entre a operação bicondicional e a implicação material, é possível eliminar a premissa bicondicional substituindo-a por uma implicação material assim, temos quatro possíveis eliminações diferentes neste argumento. A Tabela 6.4-14 mostra estas eliminações nas formas de argumento e tautologia.

Nome	Argumento	Tautologia

Eliminação Bicondicional	$\dfrac{P \leftrightarrow Q; P}{Q}$ $\dfrac{P \leftrightarrow Q; Q}{P}$	$((P \leftrightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$ $((P \leftrightarrow Q) \wedge Q) \Rightarrow P$
	$\dfrac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q}$ $\dfrac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$	$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$ $(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow P)$

Tabela 6.4-3 - Tabela de regras de inferência destacando a Eliminação Bicondicional.

A Tabela 6.4-15 apresenta duas provas tautológicas de dois casos da Eliminação Bicondicional.

	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{(P \rightarrow Q)}$	$\boldsymbol{((P \rightarrow Q) \wedge P)}$	$\boldsymbol{((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q}$	$\boldsymbol{(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)}$
1.	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
2.	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
3.	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
4.	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-4 - Duas provas da Eliminação Bicondicional

6.4.3 Eliminação Bicondicional Negativa

As razões são exatamente as mesmas da Eliminação Bicondicional com uma diferença: uma das premissas é a negação de uma das proposições da premissa condicional. Então na Eliminação Bicondicional Negativa temos uma condicional $P \rightarrow Q$ e uma premissa que é a negação de P ou Q. Neste caso poderemos concluir por $\neg Q$ ou $\neg P$ respectivamente.

A Tabela 6.4-16 mostra as formas e tautologias para as Regras de Inferência: adição, simplificação, conjunção e Eliminação Bicondicional Negativa.

Nome	Argumento	Tautologia
Eliminação Bicondicional Negativa	$\dfrac{(P \leftrightarrow Q); \neg P}{\neg Q}$ $\dfrac{(P \leftrightarrow Q); \neg Q}{\neg P}$	$((P \leftrightarrow Q) \wedge \neg P) \Rightarrow \neg Q$ $((P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$

Tabela 6.4-5 - Tabela completa de Regras de Inferência.

6.4.4 Silogismo Hipotético

Somos forçados a voltar a Escola Estoica. Pelo que sabemos foram os Estoicos que incluíram a palavra hipotético ($\acute{\upsilon}\pi o\vartheta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$), na lógica para se referir as proposições compostas, disjunção, conjunção e implicação. Para ser honesto, eu deveria ter falado da Escola Estoica ainda no *Modus Ponens* já que, talvez devido a ***Chrysippus***, a primeira regra de inferência da Escola Estoica era: *se o primeiro, então o segundo. Mas, se o primeiro. Consequentemente o* *segundo*. Quando lemos isso em voz alta soa um pouco estranho, mas se substituirmos primeiro por P e segundo por Q e lembramos que a sentença está no modo afirmativo, temos a expressão sentencial do *Modus Ponens*. Os Estoicos estudaram as implicações da lógica considerando a implicação e derivaram versões importantes do *Modus Ponens, Tollens* e do Silogismo Hipotético.

> *Silogismos Hipotéticos são argumentos onde as duas premissas, são condicionais, ou implicações e a conclusão também é uma condicional.*

Os argumentos na forma de Silogismos Hipotéticos estão diretamente relacionados aos *Modus Ponens* e *Tollens* de tal forma que alguns livros consideram estes últimos como casos especiais do Silogismo Hipotético.

Neste argumento, o Silogismo Hipotético, é importante notar que o consequente de uma premissa é o antecedente da outra. Assim queremos provar a implicação lógica entre o antecedente da primeira premissa com o consequente da segunda. Talvez um exemplo sentencial clareie os conceitos. Veja, por favor, o Exemplo 6.2.

Exemplo 6.13: Silogismo Hipotético

$p \rightarrow q$: Se você estudar lógica então irá entender a lógica.

$q \rightarrow r$: Se você entender lógica então irá passar nesta disciplina.

$p \rightarrow r$: Se você estudar lógica então irá passar nesta disciplina.

Na Tabela 6.4-9 a leitora poderá ver a representação formal do Silogismo Hipotético e da sua tautologia.

Nome	Argumento	Tautologia
Silogismo Hipotético	$\dfrac{(P \rightarrow Q);(Q \rightarrow R)}{(P \rightarrow Q)}$	$\big((P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$

Tabela 6.4-6 - Silogismo Hipotético e sua forma tautológica

A prova do Silogismo Hipotético pode ser vista na Tabela Verdade 6.4-10

	p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$\big((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)\big)$	$(p \rightarrow r)$	$\big((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$
1.	T	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
2.	T	T	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$

3.	T	F	T	F	T	F	T	$\boldsymbol{T}$
4.	T	F	F	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$
5.	F	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
6.	F	T	F	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$
7.	F	F	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
8.	F	F	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 6.4-7 - Prova do Silogismo Hipotético

E na sua forma tautológica teremos o Silogismo Hipotético representado por:

$$\big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \Rightarrow (P \to Q)$$

6.4.5 Silogismo Disjuntivo (SD)

Classicamente este argumento era chamado de "*modus tollendo ponnes*" que, em tradução livre do latim significa o modo que afirma pela negação e é o último dos argumentos condicionais que veremos neste livro. O Silogismo Disjuntivo, como a leitora já deve esperar, entre os argumentos estudados na Escola Estoica e trata-se de uma das regras de inferência mais utilizadas.

Assim como o Silogismo Hipotético, o Silogismo Disjuntivo está diretamente relacionado aos argumentos *Modus Ponens* e *Tollens*. Em forma sentencial o Silogismo Disjuntivo pode ser expresso pelo Exemplo

Exemplo 6.14: silogismo disjuntivo

$p \vee q$: cada jogador derrubado é uma falta ou não será punido pelo Juiz.

$\neg p$: foi derrubado e não é falta.

---

q: não será punido pelo juiz

Formalmente ele está expresso na Tabela 6.4-11 nas suas duas formas possíveis.

Nome	Argumento	Tautologia
Silogismo Disjuntivo	$\dfrac{P \vee Q;\neg P}{Q}$ $\dfrac{P \vee Q;\neg Q}{P}$	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ $((P \vee Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow P$

Tabela 6.4-8 - Argumentos Notáveis incluindo o Silogismo Disjuntivo

A disjunção não produz informações suficientes para garantir sua verdade. Contudo informa que se uma das premissas é falsa a outra obrigatoriamente tem que ser verdadeira. O Silogismo Disjuntivo complementa este conceito e pode ser entendido com a sentença por:

se a disjunção é verdadeira e uma das premissas não é verdadeira, então a outra premissa é verdadeira.

Este também é o motivo que suporta a validade tautológica das duas apresentadas na Tabela 6.4-11. Caberá a leitora, em um momento de inspiração, fazer a Tabela Verdade da forma que eu ignorei.

6.5 Exercícios de Fixação Sistema De Dedução Natural

Exercício 6.5.1

Considerando as regras de inferência que vimos prove os seguintes argumentos:

a) $p \rightarrow q; r \vee s; t \vdash (p \rightarrow q) \wedge (r \vee s)$
b) $p \rightarrow (q \wedge s); p \vdash q; s$
c) $p \wedge q; (p \vee r) \rightarrow \neg s\, ; s \vee t \vdash t$
d) $(p \wedge q) \wedge r; (s \wedge t) \vdash (q \wedge s)$
e) $p; \neg\neg(q \wedge s) \vdash (\neg\neg p \wedge \neg\neg s)$
f) $p; \neg\neg(p \wedge s) \vdash \neg\neg p \wedge s$
g) $p; (p \rightarrow q); p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$
h) $p \rightarrow (q \rightarrow r); p; \neg r \vdash \neg q$

7 REFERÊNCIAS

ARUN-KUMAR, S. **Science, Introduction to Logic for Computer**. London UK: Prentice Hall., 2002.

BEN-ARI, M. **Mathematical Logic For Computer Science**. 3º. ed. London, UK: Springer-Verlag, 2012.

BENNETT, D. J. **Logic Made Ease How to Know when you Language Deceives You**. New York, NY USA: W. W. Norton Company, 2004.

CONRADIE, W.; GORANKO, V. **L OGIC AND D ISCRETE M ATHEMATICS A CONCISE INTRODUCTION**. Chichester, WS. UK: John Wiley and Sons Ltd, 2015.

EUCLIDES. **Os Elementos:** tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo, SP. Brasil: Fundação Editora da Unesp, 2009.

FRANCKE, C. B. Christoph Bernhard Francke - Bildnis des Philosophen Leibniz (ca. 1695).jpg. **Wikimedia Commons, the free media repository**, 2020. Disponivel em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Christoph_Bernhard_Francke_-_Bildnis_des_Philosophen_Leibniz_(ca._1695).jpg&oldid=428672169>. Acesso em: 22 ago. 2020.

KNUTH, D. E. Big Omicron and Big Omega and Big Theta. **SIGACT News**, p. 18-24, 1976.

LEIBNITZ, G.-G. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences. **l'Académie royale des sciences**, 1703. Disponivel em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/ads-00104781/document>. Acesso em: 9 ago. 2020.

LEVIN, O. **Discrete Mathmatics, an open itroduction**. 3º. ed. Greely, CO. USA: Oscar Levin, 2019.

LI, W. **Mathematical Logic:** Fundations to Information Science. Boston, MA. USA: Birkhäuser Verlag AG , 2010.

MAGRITTE, R. "La Trahison des Images" ("The Treachery of Images") (1928-9). **Wikipedia**, 2011. Disponivel em: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:MagrittePipe.jpg>. Acesso em: 20 ago. 2020.

RUSSELL, B. Principia Mathematica. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2019. Disponivel em: <https://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

SALMON, W. C. SPACE, TIME, AND MOTION A Philosophical Introduction. **University of Arizona**, 2009. Disponivel em: <https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/SpaceTimeMotion/STM.html>. Acesso em: 08 ago. 2020.

TOMASTIK, E. C.; EPSTEIN, J. L. **Applied Finite Mathematics**. Belmont, CA. USA: Cengage Learning, 2008.

WITTGENSTEIN, L. **Some Remarks on Logical Form**. Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary. [S.l.]: Blackwell Publishing. 1929. p. 162-171.

8 APÊNDICE 1: PROVA MATEMÁTICA

A Prova Matemática sustenta todas as ciências físicas e naturais. Sempre, inevitavelmente, em algum ponto, somos forçados a provar, de forma matemática a veracidade dos nossos resultados. Raramente isso está relacionado a resolução de equações complexas e arcanas. Na maior parte das vezes trata-se da aplicação de um sistema de dedução lógica aplicado sobre uma linguagem específica.

8.1 Definindo argumento, tese e teoria.

As palavras premissa, proposições e cláusula, que são usadas frequentemente no estudo da lógica, não são adequadas a formalização necessária aos processos de dedução. Usamos as palavras premissa, e proposição e hipótese. Entretanto, para continuar sobre uma base rígida, precisamos definir axioma.

Axioma é uma verdade incontestável. Uma premissa que não pode ser dividida e não pode ser esclarecida além da sua própria declaração.

Verdades incontestáveis não existem no mundo real, muito menos no mundo sentencial. Você pode discutir a validade de uma premissa *ad nauseam*[10], mas para que possamos chegar a uma conclusão, é necessário definir um ponto. Um limite na discussão da validade das premissas para que, a partir deste ponto, seja possível fazer a análise dos argumentos. Para criar este ponto definimos o quê é, ou deixa de ser um axioma. E aceitamos este axioma como parte de um sistema de análise fechado em si mesmo. Consequentemente, antes de começar qualquer processo de dedução precisamos definir os axiomas válidos naquele sistema, as verdades que não podem ser contestadas e são inequivocamente aceitas no sistema criado para a validação do argumento. A definição deste sistema pode ser por acordo, por observação, por aceitação ou por prova.

Matematicamente, os axiomas não são definidos, são provados. Foi esta pequena diferença que fez com que *Russell* tentasse provar toda a matemática a partir da teoria dos conjuntos. E foi este pequeno detalhe que fez com que Euclides evitasse o uso do quinto postulado o tanto quanto pode.

[10] Em tradução livre: até enjoar. *Nauseam* é a palavra latina para enjoo marítimo.

Assim, um argumento passa a ser uma coleção de axiomas que leva a uma conclusão que chamaremos de tese.

Um argumento é uma coleção de axiomas a partir dos quais é possível inferir uma tese.

Se cada axioma for representado pela letra p e nosso argumento for $\mathfrak{A}$ teremos:

$$\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}, p_n\}$$

Onde:

$$p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}} \vdash p_n$$

Que pode ser lido como, *"dados $p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}$ podemos deduzir p_n"* Ou, *"podemos inferir e_n a partir de $p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}$"*. Onde $p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}$, são os axiomas e e_n a tese, ou conclusão.

Este argumento será válido se, e somente se:

$$p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}} \Rightarrow p_n$$

Que se lê e_n é a consequência lógica de $p_1, p_2, p_3, p_{\{\dots\}}$. Como, graças a definição de argumento, a conclusão será verdadeira se todos os axiomas forem verdadeiros temos:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_{\{\dots\}} \Rightarrow p_n$$

E esta definição é, obrigatoriamente uma tautologia. O que nos permite voltar a formalidade da matemática. Considere $\mathfrak{L}$ como sendo um conjunto de fórmulas que sejam fechadas em relação a uma determinada consequência $\mathfrak{C}$ dizemos que se $\mathfrak{L} \vDash \mathfrak{C}$ então $\mathfrak{C} \in \mathfrak{L}$. Chamamos de *teoria* ao conjunto de Fórmulas Bem Formadas fechadas em relação a uma consequência lógica $\mathfrak{C}$. E para entender um pouco mais este conceito precisamos definir fechamento.

Dizemos que um determinado conjunto é fechado em uma determinada operação se a aplicação desta operação a todos os membros do conjunto ainda resulte em um membro deste conjunto. Para ficar claro, tomemos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ este conjunto é fechado em relação à adição. Isto significa que posso aplicar a operação de adição a quaisquer dois membros deste conjunto e o resultado desta operação ainda será um número inteiro, elemento de $\mathbb{I}$.

Para desespero dos primeiros estudiosos da matemática, o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ não é fechado em relação a divisão. A aplicação da operação da divisão a elementos de $\mathbb{Z}$ pode resultar em um elemento de $\mathbb{I}$ ou em um elemento de $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais. Para piorar, alguns destes elementos, resultantes da aplicação da divisão sobre os elementos de $\mathbb{Z}$ fazem parte de um conjunto específico de números reais o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ que foram chamados assim, e mantidos ocultos por séculos, porque os estudiosos não conseguiam encontrar a consequência lógica que explicasse sua existência.

Ao conjunto de fórmulas de $\mathfrak{L}$ tal que $\mathfrak{L} \vDash \mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C} \in \mathfrak{L}$ damos o nome de teoria axiomática de $\mathfrak{C}$ e chamamos cada uma destas fórmulas de axioma de $\mathfrak{L}$.

E eis aí o mistério da relação entre a lógica e a matemática.

As teorias são construídas a partir de um conjunto de axiomas e da dedução das suas consequências lógicas. É possível entender por que os conceitos de consequência lógica superam os conceitos de validade lógica. E porque Russell, e outros matemáticos do começo do Século XX cederam a tentação de provar toda a matemática a partir dos axiomas da Teoria dos Conjuntos. Se os axiomas da teoria dos conjuntos estivessem corretos, deveria haver um sistema dedutivo que puder ser estendido por toda a matemática. Infelizmente estes axiomas não estão corretos, e existem diversos paradoxos insolúveis. A leitora, se for mais ambiciosa que eu, deve saber que este é um problema que ainda está a procura de uma solução.


Figura 8.1-1 - David Hilbert, autor desconhecido (1970)

Não citei ***Euclides*** duas vezes de forma leviana. O primeiro exemplo de estudos de dedução está no *Organon* [11] de Aristóteles, mas é no trabalho de Euclides que encontramos a primeira aplicação real do processo de dedução a criação de uma teórica. Euclides parte de axiomas, que definem o ponto e a reta e constrói, com consequências lógicas a base de toda a ciência da geometria. O próximo passo na criação dos sistemas dedutivos foi dado por ***Gottlob Frege*** (1848–1925) em seu livro *Begriffsschrift*[12] (1879), cuja estrutura hoje está arcaica mas que iniciou o **cálculo predicativo** que veremos ainda neste livro e começou uma forma completamente nova de lógica, a lógica simbólica.

No início do Século XX, ***David Hilbert*** rescreveu Os Elementos de Euclides sobre uma base matemática rígida e precisa. E ***Giuseppe Peano*** desenvolveu um sistema axiomático para a aritmética. Estes dois trabalhos talvez tenham servido de inspiração para Bertrand Russel e Alfred North Whitehead em seu livro *Principia Mathematica*.

[11] *Organon*, em tradução livre significa instrumento, órgão.

[12] Esta é uma palavra em alemão difícil de traduzir, o mais próximo seria linguagem para conceitos. Alguns autores brasileiros traduzem como ideagrama, representando uma linguagem para escrever ideias.

Mas, com certeza influenciaram David Hilbert and ***Wilhelm Ackermann*** (1896–1962) em seu livro *Principles of Mathematical Logic* (1928) o qual teve impacto direto nos trabalhos de ***Kurt Gödel*** (1906–1978), ***Alan Turing***, ***Stephen Cole Kleene*** e ***Alonzo Church*** na primeira metade do Século XX que fundamentaram, matematicamente, toda a computação como conhecemos hoje.

8.2 Formalização de teoria e prova

Neste livro vamos definir uma teoria $\mathfrak{T}$ que será a base do nosso sistema de dedução se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

1. existe um alfabeto $\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Rightarrow, \vdash, \vDash, (,)\}$ fechado sob o fechamento de Kleene[13]. De tal forma que a combinação destes símbolos determine um conjunto $\mathcal{L}$ de fórmulas;
2. existe um subconjunto de $\mathcal{L}$, chamado de $\mathfrak{B}$, cujas fórmulas atendem as condições de serem classificadas como Fórmulas Bem Formadas, tal que $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \dots, \mathfrak{B}_n\}$; ;
3. existe um conjunto de Fórmulas Bem Formadas de $\mathcal{L}$ que serão classificados como os axiomas $e_1, e_2, e_3, e_{\{\dots\}}, e_n$ de $\mathcal{S}$ e, neste caso, $\mathcal{S}$ será chamada da Teoria Axiomática.
4. para cada conjunto de axiomas $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_{\{\dots\}}, e_n\}$ existirá um, e somente um, axioma e_n chamado de conclusão e $e_{\{n-1\}}$ axiomas chamados de hipóteses. De tal forma que a aridade de $\mathcal{A}$ será determinada por $n-1$.
5. existe um conjunto finito de relações $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \dots, \mathcal{R}_n\}$ entre as Fórmulas Bem Formadas $\mathfrak{B}$ que chamaremos de Regras de Inferência. De tal forma que, para cada $\mathcal{R}_i$ existe um subconjunto finito de $\mathfrak{B}$.

Nesta teoria definiremos uma prova em $\mathfrak{T}$ como sendo uma sequência finita de Fórmulas Bem Formadas $\mathfrak{B}$ de tal forma, que para cada conjunto de axiomas $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_{\{\dots\}}, e_n\}$ existe uma representação possível de e_i em $\mathfrak{B}$ e uma consequência lógica direta e_n que também pode ser representada inequivocamente por um item de $\mathfrak{B}$.

Em uma forma mais simples, chegamos à definição de prova, a partir da definição de cinco pressupostos matemáticos que definem uma teoria, nos quais definimos um alfabeto e com ele poderemos escrever Fórmulas Bem

[13] Não vou detalhar o fechamento de Kleene neste momento. Tudo que é necessário agora é saber que se trata de uma operação sobre conjuntos de símbolos que permite escrever *strings*, neste caso fórmulas com qualquer combinação dos símbolos do alfabeto, inclusive nenhuma combinação.

Formadas. Nesta teoria, representaremos argumentos como conjuntos de axiomas e axiomas por meio de Fórmulas Bem Formadas. De tal forma que a cada argumento válido existirá um conjunto de axiomas a partir dos quais podemos deduzir uma consequência lógica que também será representada por uma Fórmula Bem Formada que, por sua vez, será escrita segundo os símbolos do alfabeto.

Na matemática, e nas ciências naturais, cada proposição de uma determinada teoria deve ser deduzida a partir de uma consequência lógica, ou matematicamente provada, o que, neste caso, também se origina na dedução de uma consequência lógica da teoria.

Cada, e qualquer teoria matemática está fundamentada sobre um conjunto de proposições interrelacionadas em o que chamamos de sistema axiomático. Estes axiomas nos permitem encontrar lemas, ou teoremas, pequenas conclusões lógicas em um processo dedutivo que podem ser utilizadas para compor o arcabouço de uma prova, pela substituição de provas conhecidas no processo dedutivo.

Lemas, ou teoremas, são as deduções, já comprovadas que usaremos para construir uma prova.

Não há uma distinção formal entre lema e teorema tanto o lema como o teorema são declarações, proposições que podem ser provadas como verdadeiras. Muitos textos consideram como lemas apenas as menores unidades de raciocínio que podem ser usadas durante o processo de dedução. Provamos um lema apenas porque queremos provar alguma outra coisa. Se for assim, um conjunto de lemas dá origem a um teorema e um conjunto de teoremas prova uma teoria, ou seja, a teoria é a conclusão lógica de um conjunto de hipóteses provadas por lemas e teoremas.

A leitora deve ter lembrado de outro termo muito comum a prova matemática, o corolário. Neste caso, chamaremos de corolário a uma declaração que pode ser facilmente provada com o uso de algum lema, ou teorema.

Há ainda uma ressalva necessária: nem toda proposição verdadeira é um teorema. Tanto no caso do lema, quanto no caso do teorema, só usaremos estes termos para as proposições que podem ser provadas durante, ou para, a prova de uma determinada teoria. Então, não existem teoremas solitários no universo. Todos estão em uma comunidade formada por todos os teoremas que provam uma teoria.

E já que exploramos praticamente todos os termos que usamos em uma prova, vamos fechar com a conjectura. Chamamos de conjectura a uma proposição que acreditamos ser verdadeira, mas para a qual, nenhuma prova foi encontrada.

Uma prova matemática é uma ferramenta lógica composta de um conjunto de proposições, axiomas, lemas e teoremas que permitem a dedução de uma consequência lógica. A prova implica na definição de conceitos semânticos no cálculo proposicional, o que nos abre uma porta para um mundo completamente novo. Um mundo de sentido e significado diferente das operações sintáticas de equivalência que fizemos até o momento.

Se considerarmos apenas as regras do cálculo proposicional, podemos dizer que dedução é um método usado para provar que um determinado teorema pode ser colocado na forma $P \rightarrow Q$.

Onde P pode representar qualquer conjunto de conjunções de Fórmulas Bem Formadas, que chamaremos de hipóteses e Q, um conjunto de Fórmulas Bem Formadas. O que nos leva perceber uma relação importante: uma prova é um argumento. E todo argumento é uma prova.

8.3 Construção da prova

Todas as provas seguem a mesma estrutura de construção. E, se a leitora conseguir seguir este processo de construção será capaz de provar qualquer coisa. Vamos, para simplificar, dividir o processo de construção de uma prova em dois passos:

1. Começamos com a declaração do problema o qual irá conter um conjunto de hipóteses $p, q, r, s, \ldots$ e a conclusão que esperamos obter Q.
2. Mostramos que $p \wedge q \wedge r \wedge s \ldots \rightarrow Q$, garantindo que Q será verdade se todas as hipóteses, ou premissas, forem verdadeiras.

A leitora, consciente que é, deve estar com um sorriso no rosto enquanto pensa o quão fácil isso parece. É claro que existem alguns percalços no caminho.

Não é exatamente fácil colocar todo o problema na forma de premissas e nem é trivial manipular estas premissas e suas relações até encontrar uma forma que possa se expressa como inferência. E, uma vez que a fórmula da inferência tenha sido encontrada, novamente não será trivial provar a verdade da conjunção de todas as hipóteses. Não tenha dúvida que o processo de construção da prova irá envolver as fórmulas de equivalência que vimos anteriormente, o processo de inferência, algum processo de dedução e talvez um sistema axiomático.

Caso a leitora tenha esquecido, vamos voltar as regras de inferência, a forma como chamaremos os processos matemáticos que usaremos para definir a validade de argumentos. Estas são as regras que irão determinar como uma premissa segue a outra e como este fluxo de conhecimento desagua em uma conclusão independente do conteúdo dos argumentos. Coisas que a leitora já viu, ou verá logo em seguida, a começar pelo processo de dedução natural.

9 APÊNDICE 2: OS CINCO POSTULADOS

A versão completa, mais antiga dos Elementos de Euclides é uma cópia realizada pelo escriba Stephanus, para Arethas, Bispo da Capadócia no ano de 888 D.C. Esta cópia, ainda que muito antiga segundo nosso referencial, está tão distante de Euclides quanto de nosso tempo. Ao que parece esta cópia de Stephanus tenha sido feita de outra, ainda mais antiga com origem na cópia realizada por Theon de Alexandria no Século IV da nossa era. Theon é reconhecido como sendo o pai de de Hipatia, uma das mais importantes pensadoras da história e uma das primeiras vítimas notáveis do fanatismo religioso. Contudo, esta versão de Stephanus não é única, existem outras versões completas mais novas, com comentários diversos, além dos comentários de Theon e alguns fragmentos, não comentados, datados do ano 225 A.C. estes, talvez sejam cópias, ou estudos realizados ainda no tempo de vida do próprio Euclides. Propositalmente, já que este não é um livro de história destaquei a cópia de Stephanus e deixei em segundo plano as cópias usadas na Europa no fim da Idade Média e no começo do Renascentismo, fundamentais para o desenvolvimento da matemática, apenas por serem ligeiramente mais novas que a cópia de Stephanus. Estas cópias, populares na Europa, foram feitas e preservadas pelos mouros, nos Séculos IX e X e podem ser ligadas a cópia de Theon de Alexandria. Deixando um pouco de lado a história, os cinco postulados são:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, como todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

   Que podem ser melhor entendidos assim:

   1. É possível traçar uma reta que passe por quaisquer dois pontos.
   2. Uma reta pode ser prolongada indefinidamente sobre uma reta.
   3. Dado um segmento de reta, é possível traçar um circulo cujo raio é o comprimento deste segmento e o centro uma das origens.
   4. Todos os ângulos retos são iguais.

O Quinto diz respeito a retas paralelas e ainda não foi provado. No século XIX ***Carl Friedrich Gauss*** (1777-1855), observou que, usando a Geometria Euclidiana, não seria possível provar como verdadeiro, ou falso este postulado e que talvez, fosse possível criar um novo sistema axiomático para isso. E sobre esta suposição foram criadas as Geometrias Não Euclidianas.

Com os quatro primeiros postulados Euclides provou 28 proposições, a primeira delas diz respeito ao triângulo equilátero.

Proposição: Existe um triângulo com todos os lados iguais a um dado segmento de reta.

Passo 1: Pelo Postulado 3, traçar um círculo com centro em uma extremidade do segmento de reta e raio igual a este segmento.

Passo 2: Ainda com o Postulado 3, podemos traçar um outro círculo com centro na outra extremidade e mesmo raio.

Passo 3: Tome um dos pontos de interseção dos dois círculos como o terceiro vértice do triângulo procurado.

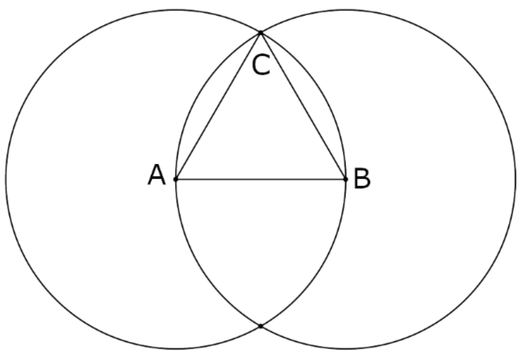


Figura 8.3-1 - Primeiro postulado de Euclides

A prova desta proposição pode ser vista na Figura 8-1.

Contudo, este desenho e os passos descritos acima por si não provam que as linhas AC, AB e BC tem o mesmo comprimento ou são iguais. É preciso raciocínio lógico e observar que AC e AB são os raios do mesmo círculo e que BA e BC são os raios de outro círculo e como estes raios são iguais então todos os lados do triângulo são iguais. Esta minha última frase não pode ser considerada verdade. Não há nada no trabalho de Euclides que eu tenha apresentado até agora que permita esta conclusão. Isto ocorre porque propositalmente deixei de fora os axiomas que Euclides define antes de definir seus postulados. Euclides chama estes axiomas de Noções Comuns, e são elas:

1. As coisas iguais a mesma coisa também são iguais entre si.
2. E caso seja adicionadas coisa iguais as coisas iguais, os todos serão iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, os restantes são iguais.
4. E, caos os iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.
5. E, os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as coisas que se ajustam uma a outra são iguais entre si.
7. E o todo é maior que as partes.

8. E duas regas não contém uma área.

Agora, sabendo destes postulados a leitora verá que a prova da primeira proposição de Euclides está completa. Assim funciona a matemática e a leitora, se quiser, pode se divertir com os outros 27 primeiros postulados de Euclides. Todos são provados da mesma forma elegante e precisa. E, por favor, lembre-se que isto foi realizado há mais de 2300 anos.

O Quinto postulado é um problema que vou deixar para explorar em outro livro, talvez em outra vida.

10 RESPOSTAS EXERCÍCIOS

1.0 Exercícios

Responda as seguintes questões. Se for preciso pesquise, isso irá completar seu entendimento do que que é lógica e qual a sua origem.

a) Na área da lógica quais avanços podemos atribuir a Aristóteles?

   Solução: não temos documentos que comprovem, nada assinado ou atribuído ao próprio Aristóteles, temos cópias, das cópias, de textos da Biblioteca de Alexandria. Ainda assim, quando comparamos os textos mais antigos podemos atribuir a Aristóteles a forma que adotamos para o argumento, silogismo, e o uso de letras para representar as proposições.

b) O que é um paradoxo?

   Solução: paradoxos são proposições que não podem ser provadas como verdadeiras ou falsas, já que uma das conclusões implica obrigatoriamente na outra conclusão.

c) Qual foi a participação de George Boole no avanço da lógica?

   Solução: Leibnitz definira um conjunto de operações aritméticas para as operações lógicas. Coube a Boole a criação de uma álgebra para estas operações.

d) No que diz respeito a matemática e a lógica, o que Leibnitz conseguiu enquanto buscava a paz mundial?

   Solução: Leibnitz criou um conjunto de operações aritméticas para a lógica e definiu a sintaxe destas operações.

e) Descreva por que o Paradoxo de Russel é um Paradoxo?

   Solução: se A é o conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmo, A não pode ser um conjunto deste conjunto. Então A não é o conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmo. E vice versa.

f) Qual a estrutura de um silogismo?

   Solução: proposição, proposição, conclusão. Também podemos chamar de proposição maior, proposição menor e conclusão. Ou, como eu prefiro e aprendi: premissa, consequência e conclusão.

g) Qual a diferença entre paradoxo e proposição?

Solução: paradoxo é uma sentença que não conseguimos provar como verdadeira ou falsa. Proposição é uma sentença que deve ser verdadeira ou falsa.

h) A pintura de René Margritte apresentada na Figura 1.6.1 é um paradoxo? Justifique.

Solução: vamos ficar no limite do tolerável. Margritte pintou um cachimbo e escreveu que aquilo não era um cachimbo. Literalmente: isto não é um cachimbo. Se o Isto está se referindo ao que está pintado, então é um paradoxo. E esta parece ter sido a intenção do pintor. Gente de espírito de porco diz que o isto do quadro se refere ao quadro em si. Se for assim, o quadro não será um paradoxo e não terá nenhuma graça.

i) Qual a diferença entre silogismo e falácia?

Solução: falácia é um silogismo cuja conclusão está logicamente correta, mas, não faz sentido. A conclusão e verdadeira, mas esta verdade está errada. Isto ocorre quando as premissas estão erradas ou o silogismo está montado de forma errada.

j) O que é um argumento?

Solução: um argumento é um conjunto de sentenças que leva a uma conclusão. Um argumento será verdadeiro só, e somente só, suas premissas e conclusão forem verdadeiros.

2.1 Exercícios

Classifique as sentenças a seguir como proposição, ou não.

a) Olhe que lindo pôr do sol! $(\boldsymbol{N}\text{ã}\boldsymbol{o}\text{ é }\boldsymbol{proposi}\text{çã}\boldsymbol{o})$

b) Você joga futebol? $(\boldsymbol{N}\text{ã}\boldsymbol{o}\text{ é }\boldsymbol{proposi}\text{çã}\boldsymbol{o})$

c) Três mais dois igual a cinco. $(\text{É }\boldsymbol{proposi}\text{çã}\boldsymbol{o})$

d) $X^2 + 3 = 20$ $(\boldsymbol{N}\text{ã}\boldsymbol{o}\text{ é }\boldsymbol{proposi}\text{çã}\boldsymbol{o})$

e) Carlos é careca. $(\text{É }\boldsymbol{proposi}\text{çã}\boldsymbol{o})$

f) Francisco não é o Papa. $(\text{É }\boldsymbol{proposi}\text{çã}\boldsymbol{o})$

g) Ele foi campeão mundial com o Brasil em 1970. ($\boldsymbol{N}$ã$\boldsymbol{o}$ é $\boldsymbol{proposi}$çã$\boldsymbol{o}$)

h) O mar é azul ou verde. (É $\boldsymbol{proposi}$çã$\boldsymbol{o}$)

i) O quadrado de cinco é oito. (É $\boldsymbol{proposi}$çã$\boldsymbol{o}$)

j) Qual a distância da próxima cidade? ($\boldsymbol{N}$ã$\boldsymbol{o}$ é $\boldsymbol{proposi}$çã$\boldsymbol{o}$)

2.2 Exercícios

Represente na forma proposicional as seguintes sentenças, sem se preocupar com a validade, ou não, da proposição.

a) Ana joga futebol, Marisa joga xadrez.

Solução: $p \equiv$ Ana Joga futebol, $q \equiv$ Marisa joga xadrez $\therefore p \wedge q$

b) Silvia e Marcela são advogadas.

Solução: $p \equiv$ Sílvia é advogada, $q \equiv$ Marcela é advogada $\therefore p \wedge q$

c) Se jogar futebol ficará cansado.

Solução: $p \equiv$ Jogar futebol, $q \equiv$ ficar cansado $\therefore p \rightarrow q$

d) O carro de Luiza não é verde.

Solução: $p \equiv$ O carro de Luiza é verde. $\therefore \neg p$

e) $(0 < x < 12)$.

Solução: $p \equiv (0 < x)$, $q \equiv (x < 12) \therefore p \wedge q$

Neste caso, podemos transformar em proposição usando a teoria dos conjuntos e representar na forma acima ou, se preferir:

$$(x \mid x \in (0 < x)) \wedge (x \mid x \in \ x < 12)$$

f) Simone compra pão se, somente se, o pão estiver barato.

Solução: $p \equiv$ compra pão, $q \equiv$ pão barato $\therefore p \leftrightarrow q$

g) Se estudar passará na prova.

Solução: $p \equiv$ estudar, $q \equiv$ passar na prova $\therefore p \rightarrow q$

h) Se não estudar não passará na prova.

Solução: $p \equiv$ estudar, $q \equiv$ passar na prova $\therefore \neg p \rightarrow \neg q$ ou

Solução 2: $p \equiv$ não estudar, $q \equiv$ não passar na prova $\therefore p \rightarrow q$

i) Amélia vai ao parque ou a praia.

Solução: $p \equiv$ Amélia vai ao Parque, $q \equiv$ Amélia vai à praia $\therefore p \vee q$

j) Não é verdade que o céu é laranja.

Solução: $p \equiv$ O céu é laranja. $\therefore \neg p$

3.1 Exercícios

Crie representações lógicas para as seguintes sentenças e não se preocupe com a validade, ou não da proposição.

a) Lima não está na Itália e Paris está na França.

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Lima está na Itália, $\boldsymbol{q} \equiv$ Paris está na França $\therefore \neg\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

b) Sandra é morena logo é bonita.

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Sandra é morena**,** $\boldsymbol{q} \equiv$ Sandra é bonita $\therefore \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$

c) Vou de ônibus ou a pé.

Solução: $p \equiv$ Vou de ônibus, $\boldsymbol{q} \equiv$ Vou a pé $\therefore \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

d) Aviões voam só e somente se tiverem asas.

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Aviões voam, $\boldsymbol{q} \equiv$ Aviões tem asas $\therefore \boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$

e) Nádia não é romena.

Solução: $p \equiv$ Nádia é romena, $\therefore \neg\boldsymbol{p}$

f) Janaína comprou um carro e um apartamento.

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Janaína comprou um carro, $\boldsymbol{q} \equiv$ Janaína comprou um apartamento $\therefore \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

g) Quem compra carro e apartamento tem dinheiro.

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Compra carro, $\boldsymbol{q} \equiv$ compra apartamento, $\boldsymbol{r} \equiv$ tem dinheiro $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{r}$

h) Sandra comprou um carro e não uma moto.

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Sandra comprou um carro, $\boldsymbol{q} \equiv$ Sandra comprou uma moto $\therefore \boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q}$

i) $(2 \leq x)$

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv (2 = x)$, $\boldsymbol{q} \equiv (2 < x) \therefore \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

Neste caso, podemos transformar a proposição usando a teoria dos conjuntos e representar na forma acima ou, se preferir:

$$(x \mid x \in (2 < x) \vee x = 2)$$

j) Pâmela irá a Roma se, e somente se, comprar a passagem.

Solução: $p \equiv$ Pâmela irá a Roma**,** $\boldsymbol{q} \equiv$ Pâmela Comprou Passagem $\therefore$ $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$

3.2 Exercícios

Represente as seguintes sentenças na forma de conjunção sempre que possível.

a) O Amazonas é o maior estado do Brasil e Manaus é sua capital.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ O Amazonas é o maior estado do Brasil, $\boldsymbol{q} \equiv$ Manaus é a capital do Amazonas. $\therefore \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

b) x e y são números reais.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R})$, $\boldsymbol{q} \equiv (\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}) \therefore \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

c) Três elevado ao quadrado é maior que oito e menor que 10.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv (3^2 > 8)$, $\boldsymbol{q} \equiv (3^2 < 10) \therefore \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

d) Londres e Paris estão na Europa.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Londres está na Europa, $\boldsymbol{q} \equiv$ Paris está na Europa $\therefore$ $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

e) Londres está na Europa e Brasília não está.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Londres está na Europa, $\boldsymbol{q} \equiv$ Brasília está na Europa $\therefore$ $\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}$

f) O dia está quente e a pizza não será entregue.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ O dia está quente, $\boldsymbol{q} \equiv$ A pizza será entregue $\therefore \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}$

g) Chopp e cerveja são derivados da cevada.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ O chopp é derivado da cevada, $\boldsymbol{q} \equiv$ A cerveja é um derivado da cevada $\therefore \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

h) Um mais um e dois mais dois.

   Solução: não é possível transformar em conjunção porque nem um mais um nem dois mais dois são proposições.

i) O presidente é verde e careca.

   Solução: $p \equiv$ O presidente é verde, $\boldsymbol{q} \equiv$ O presidente é careca $\therefore \boldsymbol{p} \wedge$ $\boldsymbol{q}$

j) Marte roda para a esquerda e Netuno não.

   Solução: $\boldsymbol{p} \equiv$ Marte roda para a esquerda, $\boldsymbol{q} \equiv$ Netuno roda para a esquerda $\therefore \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}$

3.3 Exercícios

Represente as seguintes sentenças na forma de disjunção, ou conjunção, sempre que possível.

a) O Amazonas é o maior estado do Brasil, Manaus é sua capital ou O Maranhão é o maior estado do Brasil, São luís é sua capital.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ O Amazonas é o maior estado do Brasil, $\boldsymbol{q}$ ≡ Manaus é a capital do Amazonas; $\boldsymbol{r}$ ≡ O Maranhão é o maior estado do Brasil, $\boldsymbol{s}$ ≡ São Luis é a capital do Maranhão; $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{s})$

b) Z é o conjunto dos elementos de A ou B.

Solução: $\boldsymbol{p} \equiv (Z \in A)$, $\boldsymbol{q} \equiv (Z \in B)$ $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

c) Ora caso, ora compro bicicleta.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ caso, $\boldsymbol{q}$ ≡ compro bicicleta $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

d) Bucareste e Paris estão na Europa ou nos EUA.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Bucareste está na Europa, $\boldsymbol{q}$ ≡ Paris está na Europa;

$\boldsymbol{r}$ ≡ Bucareste está nos EUA, **s**≡ Paris está nos EUA; $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{s})$

e) Ou vou a Roma ou a Atenas.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ vou a Roma, $\boldsymbol{q}$ ≡ vou a Atenas $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

f) Mariza foi a praia e ao shopping.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Mariza foi a praia, $\boldsymbol{q}$ ≡ Mariza foi ao shopping $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

g) Paula comprou um carro vermelho e outro azul.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Paula comprou um carro vermelho, $\boldsymbol{q}$ ≡ Paula comprou um carro azul $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

h) Um mais um ou dois mais dois.

Solução: não é uma proposição.

i) O Jaleco de Jane talvez seja vermelho, talvez seja branco.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ O jaleco de Jane é vermelho, $\boldsymbol{q}$ ≡ O jaleco de Jane é branco $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

j) Nem vou comprar pão nem macarrão.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Não vou comprar pão, $\boldsymbol{q}$ ≡ Não vou comprar macarrão $\therefore (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

3.4 Exercícios

Represente as seguintes sentenças na forma de disjunção, ou conjunção, sempre que possível.

a) Se o Amazonas é o maior estado do Brasil e Manaus é sua capital então Manaus é a maior cidade do Amazonas.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ O Amazonas é o maior estado do Brasil; $\boldsymbol{q}$ ≡ Manaus é a capital do Amazonas; $\boldsymbol{r}$ ≡ Manaus é a maior cidade do Amazonas. $\therefore (p \wedge q) \rightarrow r$.

b) Se Sílvia e Cíntia forem a praia, ou Paula ou Simone irá com elas.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Sílvia vai à praia; $\boldsymbol{q}$ ≡ Cíntia vai à praia; $\boldsymbol{r}$ ≡ Paula vai com elas; $\boldsymbol{s}$ ≡ Simone vai com elas. $\therefore (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$.

c) Se compro bicicleta não caso.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ compro bicicleta; $\boldsymbol{q}$ ≡ caso. $\therefore p \rightarrow \neg q$.

d) Vou a Europa se Paris e Londres estiverem livres.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Paris está livre; $\boldsymbol{q}$ ≡ Londres está livre; $\boldsymbol{r}$ ≡ vou a Europa. $\therefore (p \wedge q) \rightarrow r$.

e) Quando Marcela, ou Mariza, estiverem prontas, eu ligo.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Marcela pronta; $\boldsymbol{q}$ ≡ Mariza pronta; $\boldsymbol{r}$ ≡ eu ligo. $\therefore (p \wedge q) \rightarrow r$.

f) Não vou à praia se Marcela e Joana forem.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Marcela vai à praia; $\boldsymbol{q}$ ≡ Joana vai à praia; $\boldsymbol{r}$ ≡ eu vou à praia. $\therefore (p \wedge q) \rightarrow \neg r$.

g) Se um mais um igual a dois, então dois menos um igual a um.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ um mais um igual a dois; $\boldsymbol{q}$ ≡ dois menos um igual a um. $\therefore p \rightarrow q$.

h) O carro voltará a funcionar se trocarmos a bateria e a lâmpada do farol.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ trocou a bateria; $\boldsymbol{q}$ ≡ trocou a lâmpada do farol; $\boldsymbol{r}$ ≡ carro voltou a funcionar. $\therefore (p \wedge q) \rightarrow r$.

i) Patrícia vai à praia e Silvia não vai.

Solução: $\boldsymbol{p}$ ≡ Patrícia vai à praia; $\boldsymbol{q}$ ≡ Sílvia vai à praia. $\therefore (p \wedge \neg q)$.

3.5 Exercícios

Considerando as sentenças a seguir, marque aquelas que são proposições atômicas, ou simples, e compostas. Nos dois casos, represente estas sentenças de forma da lógica proposicional sempre que for possível.

a) Eu estudo informática;

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ Eu estudo informática $\therefore p$.

b) Se a > 0 então a é um inteiro positivo.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv (\mathrm{a} > 0)$; $\boldsymbol{q} \equiv (a \in \mathbb{Z}^{+})$. $\therefore p \to q$.

c) Flamengo é o melhor time do mundo, o Fluminense não.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ Flamengo é o melhor time do mundo; $\boldsymbol{q} \equiv$ Fluminense é o melhor time do mundo. $\therefore (p \wedge \neg q)$.

d) Está frio, mas a casa não está gelada.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ Está frio; $\boldsymbol{q} \equiv$ a casa está gelada. $\therefore (p \wedge \neg q)$.

e) João trabalha ou estuda.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ João trabalha; $\boldsymbol{q} \equiv$ João estuda. $\therefore (p \vee q)$.

f) Que dia lindo!

Solução: não é proposição.

g) Amanhã chove?

Solução: não é proposição.

h) Se as nuvens não são pretas, não chove.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ nuvens pretas; $\boldsymbol{q} \equiv$ chove. $\therefore (\neg p \to \neg q)$.

i) O ar-condicionado ser consertado é suficiente para ser ligado.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ ar-condicionado consertado; $\boldsymbol{q} \equiv$ ar-condicionando ligado. $\therefore (p \to q)$.

j) Python é uma linguagem de programação.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ Python é uma linguagem de programação. $\therefore p$.

k) Viva o C++!

Solução: não é proposição.

l) Se o cão não está latindo, o cão está na casa.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ cão latindo; $\boldsymbol{q} \equiv$ cão em casa. $\therefore (\neg p \rightarrow q)$.

m) O gato não subiu na árvore.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ O gato não subiu na árvore. $\therefore p$.

n) Não é o caso que o Brasil seja pequeno, assim como não é o caso que o Peru seja grande.

o) **Solução: proposição** | $\boldsymbol{p} \equiv$ O Brasil é pequeno; $\boldsymbol{q} \equiv$ o Peru é grande. $\therefore (\neg p \wedge \neg q)$.

p) Sandra não mente se a pergunta for de matemática.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ pergunta de matemática; $\boldsymbol{q} \equiv$ Sandra não mente. $\therefore (p \rightarrow q)$.

q) Se o aluno estudar então ele não irá ficar reprovado.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ aluno estudar; $\boldsymbol{q} \equiv$ aluno reprovado. $\therefore (p \rightarrow \neg q)$.

r) Flamengo é campeão e Vasco é segundo colocado.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ Flamengo campeão; $\boldsymbol{q} \equiv$ Vasco segundo colocado. $\therefore (p \rightarrow q)$.

s) Se Ana não é estudiosa e Juliana é, então Juliana vai passar e Ana não.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ Ana estudiosa; $\boldsymbol{q} \equiv$ Juliana estudiosa; $\boldsymbol{r} \equiv$ Juliana passa; $\boldsymbol{s} \equiv$ Ana passa. $\therefore (\neg p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$.

t) Amanda trabalha ou estuda.

u) **Solução: proposição** | $\boldsymbol{p} \equiv$ Amanda trabalha; $\boldsymbol{q} \equiv$ Amanda estuda. $\therefore (p \vee q)$.

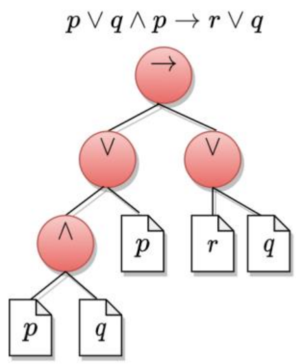
v) Se está quente o gato dorme o dia inteiro.

Solução: proposição | $\boldsymbol{p} \equiv$ Está quente; $\boldsymbol{q} \equiv$ o gato dorme o dia inteiro. $\therefore (p \rightarrow q)$.

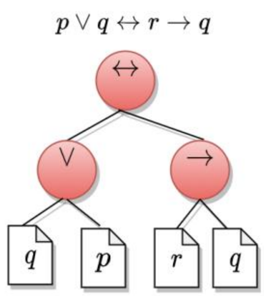
5.0 Exercícios

Considere as fórmulas a seguir e esquematize suas árvores sintáticas.

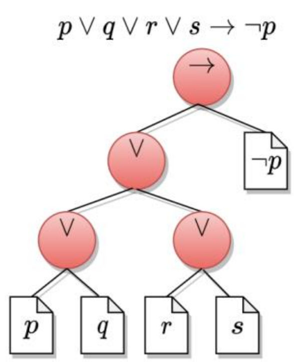
a) $p \vee q \wedge p \rightarrow r \vee q$;



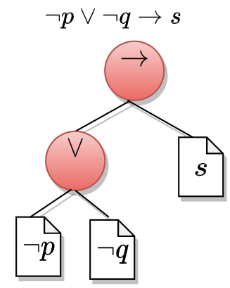
b) $p \vee q \leftrightarrow r \rightarrow q$;



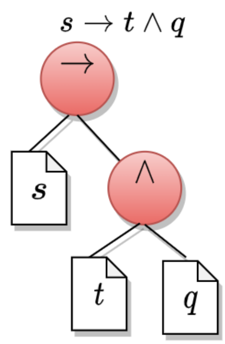
c) $p \vee q \vee r \vee s \rightarrow \neg p$;



d) $\neg p \wedge \neg\, q \rightarrow s$;



e) $s \to t \wedge q$.



6.3.1 Exercício

Usando o *Modus Ponens* encontre a conclusão, ou consequência, dos argumentos cujas premissas estão apresentadas a seguir:

e) $a\ = \mathrm{b} \wedge\ b = c, (a = b \wedge b = c) \to\ a = c \vdash ?$

Solução: se fizermos $P \equiv (a\ = \mathrm{b} \wedge\ b = c)$, e $Q \equiv (a = c)$, teremos uma das premissas $\big((a = b \wedge b = c) \to (a = c)\big), \equiv (P \to Q)$ e outra como $P \equiv (a\ = \mathrm{b} \wedge\ b = c)$ logo usando o *Modus Ponens* podemos afirmar $Q \equiv\ (a = c)$ ou seja nosso argumento fica $a\ = \mathrm{b} \wedge\ b = c, (a = b \wedge b = c) \to\ a = c \vdash \mathrm{a} = \mathrm{c}$. Como o sinal de igual não faz parte do nosso alfabeto os parênteses são irrelevantes.

f) $(\, x, y \in \mathbb{R} \to x \cdot y \in \mathbb{R}\,), (\, x, y \in\ \mathbb{R}\,) \vdash ?$

Solução: novamente, podemos usar o *Modus Ponens* direto se fizermos $P \equiv x, y \in \mathbb{R}$ e $Q \equiv\ x \cdot y \in \mathbb{R}$ e teremos $(\, x, y \in \mathbb{R} \to x \cdot y \in \mathbb{R}\,) \equiv (P \to Q)$ logo podemos afirmar $Q \equiv x \cdot y \in \mathbb{R}$ e nosso argumento fica sendo: $(\, x, y \in \mathbb{R} \to x \cdot y \in \mathbb{R}\,), (\, x, y \in\ \mathbb{R}\,)\ \vdash x \cdot y \in \mathbb{R}$ e representa o fechamento do conjunto dos números reais em relação a multiplicação.

g) Se eu sou culpado, devo ser punido. Sou culpado. Logo?

Solução: se $P \equiv$ "sou culpado" e $Q \equiv$ "devo ser punido" ´podemos usar o *Modus Ponens*: $(P \rightarrow Q) \wedge P \vdash Q$ então a conclusão lógica é $Q \equiv$ "devo ser punido".

h) Se $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$ então $\left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Sabemos que $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$. Logo?

Solução: fazendo $P \equiv \sqrt{2} > \frac{3}{2}$ e $Q \equiv \left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$ temos, usando o *Modus Ponens* $Q \equiv \left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$ o que está errado já que não podemos usar o *Modus Ponens*, ou qualquer outra regra de inferência se uma das premissas for falsa. No caso a premissa $P \equiv \sqrt{2} > \frac{3}{2}$ é falsa já que $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

6.3.2 Exercícios

Usando o *Modus Tollens* encontre a conclusão dos seguintes argumentos:

a) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s),\ \neg\neg(r \wedge s) \vdash ?$

Solução: teremos que fazer $P \equiv (p \leftrightarrow q)$ e $Q \equiv \neg(r \wedge s)$, feito isso teremos $(P \rightarrow Q) \equiv (p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s)$ e $\neg Q \equiv \neg\neg(r \wedge s)$, como hipóteses o que significa que podemos aplicar o *Modus Tollens* e deduzir $\neg P \equiv \neg(p \leftrightarrow q)$ logo nosso argumento é expresso por $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s),\ \neg\neg(r \wedge s) \vdash \neg(p \leftrightarrow q)$

b) $a > 1 \rightarrow a > b,\ a \leq b \vdash ?$

Solução: devemos fazer $P \equiv a > 1$ e $Q \equiv a > b$ se fizermos isso, $a \leq b$ representa $\neg Q$ e podemos usar o *Modus Tolles* para encontrar $a \leq 1$ que representa $\neg P$, logo nosso argumento fica sendo: $a > 1 \rightarrow a > b,\ a \leq b \vdash \mathrm{a} \leq 1$.

c) Se Asus é um caro, então ele tem rodas. Asus não tem rodas. Então?

Solução: se fizermos $P \equiv$ "Asus é um caro" e $Q \equiv$ "Asus têm rodas", podemos usar o *modus Tollens* e concluir $\neg P \equiv$ "Asus não tem rodas" já que "Se Asus é uma carro então ele tem rodas" é equivalente a $(P \rightarrow Q)$ e "Asus não tem rodas" é equivalente a $\neg Q$.

d) Se não estiver sol eu vou estudar matemática. Eu não vou estudar matemática. Logo?

Solução: se fizermos $P \equiv$ “se não estiver sol” e $Q \equiv$ “vou estudar matemática. Teremos $\neg p \equiv$ “está sol” já que “Se não estiver sol vou estudar matemática é equivalente a $(P \rightarrow Q)$ e “eu não vou estudar matemática é equivalente a $\neg Q$.

6.3.2 Exercícios

Usando o *Modus Ponens* encontre a derivação (processo de dedução), para os seguintes argumentos:

a) $p \rightarrow \neg q; \neg q \rightarrow r, p \vdash r;$

1.	$p \rightarrow \neg q$	Premissa	
2.	$\neg q \rightarrow r$	Premissa	
3.	p	Premissa	
4.	$\neg q$	Se $P \equiv p$ e $Q \equiv \neg q$, então $\vdash \neg q$	(MP) 1, 3
5.	r	Se $P \equiv \neg q$ e $Q \equiv r$, então $\vdash r$	(MP) 2, 4

b) $p \rightarrow \neg q; \neg q \rightarrow r; r \rightarrow \neg s; p \vdash \neg s;$

1.	$p \rightarrow \neg q$	Premissa	
2.	$\neg q \rightarrow r$	Premissa	
3.	$r \rightarrow \neg s$	Premissa	
4.	p	Premissa	
5.	$\neg q$	Se $P \equiv p$ e $Q \equiv \neg q$, então $\vdash \neg q$	(MP) 1,4
6.	r	Se $P \equiv \neg q$ e $Q \equiv r$, então $\vdash r$	(MP) 2, 5
7.	$\neg s$	Se $P \equiv r$ e $Q \equiv \neg s$, então $\vdash \neg s$	(MP) 3, 6

c) $p \rightarrow (q \wedge r); (q \wedge r) \rightarrow t; p \vdash t;$

1.	$p \rightarrow (q \wedge r)$	Premissa	
2.	$(q \wedge r) \rightarrow t$	Premissa	
3.	p	Premissa	
4.	$(q \wedge r)$	Se $P \equiv p$ e $Q \equiv (q \wedge r)$, então $\vdash (q \wedge r)$	(MP) 1, 3
5.	t	Se $P \equiv (q \wedge r)$ e $Q \equiv t$, então $\vdash t$	(MP) 2, 4

d) $(2 > 1) \rightarrow (3 > 1); (3 > 1) \rightarrow (3 > 0); (2 > 1) \vdash (3 > 0)$

1.	$(2 > 1) \rightarrow (3 > 1)$	Premissa	
2.	$(3 > 1) \rightarrow (3 > 0)$	Premissa	
3.	$(2 > 1)$	Premissa	
4.	$(3 > 1)$	Se $P \equiv (2 > 1)$ e $Q \equiv (3 > 1)$, então $\vdash (3 > 1)$	(MP) 1, 3
5.	$(3 > 0)$	Se $P \equiv (3 > 1)$ e $Q \equiv (3 > 0)$, então $\vdash (3 > 0)$	(MP) 2, 4

6.3.4 Exercícios

Usando o *Modus Tollens* encontre a derivação (processo de dedução), para os seguintes argumentos:

e) $p \rightarrow q; \neg p \rightarrow r; \neg q \vdash r;$

1.	$p \rightarrow q$	Premissa

2.	$\neg p \to r$	Premissa	
3.	$\neg q$	Premissa	
4.	$\neg p$	Se $P \equiv p$ e $Q \equiv q$, então $\vdash \neg p$	(MT) 1, 3
5.	r	Se $P \equiv \neg p$ e $Q \equiv r$, então $\vdash r$	(MP) 2, 4

f) $p \to q; q \to \neg\neg r; s \to \neg r; p \vdash \neg s;$

1.	$p \to q$	Premissa	
2.	$q \to \neg\neg r$	Premissa	
3.	$s \to \neg r$	Premissa	
4.	p	Premissa	
5.	q	Se $P \equiv p$ e $Q \equiv q$, então $\vdash q$	(MP) 1, 4
6.	$\neg\neg r$	Se $P \equiv q$ e $Q \equiv \neg\neg r$, então $\vdash \neg\neg r$	(MP) 2, 5
7.	$\neg s$	Se $P \equiv s$ e $Q \equiv \neg r$, então $\vdash \neg s$	(MT) 3, 6

g) $r \to s \vee t, \neg(s \vee t), \neg r \to p, \neg p \vdash \neg\neg r;$

1.	$r \to s \vee t$	Premissa	
2.	$\neg(s \vee t)$	Premissa	
3.	$\neg r \to p$	Premissa	
4.	$\neg p$	Premissa	
5.	$\neg r$	Se $P \equiv r$ e $Q \equiv (s \vee t)$, então $\vdash \neg r$	(MT) 1, 2
6.	$\neg\neg r$	Se $P \equiv \neg r$ e $Q \equiv p$, então $\vdash \neg\neg r$	(MT) 3, 4

h) $p \to q; \neg p \to r; \neg q \vdash r$

1.	$p \to q$	Premissa	
2.	$\neg p \to r$	Premissa	
3.	$\neg q$	Premissa	
4.	$\neg p$	Se $P \equiv p$ e $Q \equiv q$, então $\vdash \neg p$	(MT) 1, 3
5.	r	Se $P \equiv \neg p$ e $Q \equiv r$, então $\vdash r$	(MP) 2, 4

Exercício 6.5.1

Considerando as regras de inferência que vimos prove os seguintes argumentos:

i) $p \to q; r \vee s; t \vdash (p \to q) \wedge (r \vee s)$

1.	$p \to q$	Premissa
2.	$r \vee s$	Premissa
3.	t	
4.	$(p \to q) \wedge (r \vee s)$	(IC) 1, 2
		CQD

j) $p \to (q \wedge s); p \vdash q; s$

1.	$p \to (q \wedge s)$	Premissa
2.	p	Premissa
3.	$(q \wedge s)$	(MP) 1, 2
4.	q	(EC) 3
	s	(EC) 3

CQD

k) $p \wedge q; (p \vee r) \rightarrow \neg s\, ; s \vee t \vdash t$

1.	$p \wedge q$	Premissa
2.	$(p \vee r) \rightarrow \neg s$	Premissa
3.	$s \vee t$	(MP) 1, 2
4.	p	(EC) 1
5.	$p \vee r$	(ID) 4
6.	$\neg s$	(MP) 2, 5
	t	(SD) 3, 6
		CQD

l) $(p \wedge q) \wedge r; (s \wedge t) \vdash (q \wedge s)$

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	Premissa
2.	$(s \wedge t)$	Premissa
3.	$(p \wedge q)$	(EC) 1
4.	q	(EC) 3
5.	s	(EC) 2
6.	$(q \wedge s)$	(IC) 4, 5
		CQD

m) $p; \neg\neg(q \wedge s) \vdash (\neg\neg p \wedge \neg\neg s)$

1.	p	Premissa
2.	$\neg\neg(q \wedge s)$	Premissa
3.	$\neg\neg p$	(IND) 1
4.	$(q \wedge s)$	(END) 2
5.	s	(EC) 4
6.	$\neg\neg s$	(IND) 5
7.	$(\neg\neg p \wedge \neg\neg s)$	(IC) 3, 6
		CQD

n) $p; \neg\neg(p \wedge s) \vdash \neg\neg p \wedge s$

1.	p	Premissa
2.	$\neg\neg(p \wedge s)$	Premissa
3.	$\neg\neg p$	(IND) 1
4.	$(p \wedge s)$	(END) 2
5.	s	(EC) 4
6.	$(\neg\neg p \wedge s)$	(IC) 3, 5
		CQD

o) $p; (p \rightarrow q); p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$

1.	$p \rightarrow q$	Premissa
2.	p	Premissa
3.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premissa
4.	q	(MP) 1, 2
5.	$(q \rightarrow r)$	(MP) 2, 3
6.	r	(MP) 4, 5

CQD

p) $p \to (q \to r); p; \neg r \vdash \neg q$

1.	$p \to (q \to r)$	Premissa
2.	p	Premissa
3.	$\neg r$	Premissa
4.	$(q \to r)$	(MP) 1, 2
5.	$(q \to r)$	(MP) 2, 3
6.	$\neg q$	(MT) 3, 4
		CQD