CAPÍTULO 1

LÓGICA PROPOSICIONAL

1 INTRODUÇÃO

“Logic is the technique by which we add conviction to truth.”
Jean de la Bruyere

A lógica é a ciência da *avaliação sistemática de argumentos* em busca do convencimento. A lógica busca o convencimento, a certeza que existe na forma dos argumentos e não conteúdo destes argumentos. Busca a verdade pela análise de um argumento em relação a outro, de forma racional, formal e estruturada.

A lógica está tão enraizada na sociedade ocidental que ser considerado ilógico é uma espécie de ofensa. A leitora deve maximizar o efeito desta ofensa se o ofendido for da minha geração. A geração que cresceu assistindo o ***Sr.Spock*** falando da lógica como se fora a disciplina mais importante do universo. Mesmo que não seja a disciplina mais importante do universo, a lógica está em praticamente tudo que fazemos todos os dias, sem que sequer percebamos.

Usamos os conceitos da lógica para justificar opiniões, definir teorias e reforçar observações sobre o mundo e sobre aquilo que fazemos com ele. Usamos a lógica para concluir, com nosso foro íntimo, e para convencer outras pessoas das nossas conclusões. A lógica, seus conceitos e argumentos permeiam as relações humanas desde antes dos tempos de Aristóteles e, desde então, se diz popularmente ***quanto mais frágil o argumento mais alta a voz***. A falta da lógica marca, e marcou ao longo da história, o começo de períodos conturbados.

Neste livro, vamos nos dedicar a lógica formal, matemática, voltada ao uso na resolução de problemas computacionais. Disciplina que suporta todo o desenvolvimento de software, técnicas de inteligência artificial e o estudo de linguagens formais e regulares, as linguagens que usamos para criar linguagens de programação.

Vamos estudar lógica proposicional, ou **cálculo proposicional**, lógica predicativa, ou **cálculo predicativo** e o **cálculo de sequentes**. A leitora há que entender, e perdoar, neste livro usarei os termos **cálculo proposicional** e **cálculo**

predicativo. Não se trata de nenhuma fixação com a matemática recorro a estes termos apenas na vã esperança de manter este estudo dentro da ciência da computação e longe da filosofia. E, para deixar claro desde já, que estudaremos **provas matemáticas**. A lógica matemática e computacional, não está só interessada no convencimento, este convencimento precisa, inequivocamente de uma **prova irrefutável da verdade**.

A lógica, diferentemente do português, inglês ou mandarim, é uma linguagem artificialmente criada sobre uma estrutura matemática para permitir a análise de argumentos, garantir que esta análise seja compreendida por qualquer um que conheça a linguagem, e encontrar a verdade. A verdade, a conclusão que obtemos sobre argumentos só pode assumir dois estados. Ou o argumento é verdadeiro, ou falso. Em qualquer um dos casos, quando chegamos a conclusão de forma lógica e inequívoca esta conclusão será a verdade.

O objetivo da lógica é encontrar a verdade. Não, é muito mais que isso, o objetivo da lógica é encontrar a prova da verdade. E este é o ponto principal de todo este esforço 2500 anos de construção do pensamento. Que começou uma, ou duas gerações antes de Aristóteles e continua até os Século XXI. Nenhuma disciplina antiga é tão atual quanto a lógica.

Quando estudamos lógica queremos definir se um determinado argumento é verdadeiro, ou falso; dando a mesma importância a qualquer um dos resultados. Desde que o resultado verdade, ainda que o argumento seja falso. Ficou complicado?

A amável leitora pode definir a lógica como sendo a ciência da avaliação de argumentos. Nesta ciência temos dois resultados possíveis para cada argumento, eles podem ser verdadeiros ou falsos. A lógica quer encontrar este resultado com convicção. Esta convicção, esta certeza, a verdade absoluta sobre um argumento, seja ele verdadeiro ou falso é o que aprenderemos como encontrar, juntos, ao longo de todo este livro.

1.1 Argumentos

Os argumentos, no que concerne à lógica, são sentenças que suportam um raciocínio específico e permitem uma conclusão de forma indutiva ou dedutiva. A forma do argumento é importante, a lógica se preocupa com a forma. Uma das formas lógicas mais antigas, o silogismo é composto de duas sentenças, chamadas de **premissas, ou proposições,** e uma sentença chamada de **conclusão**.

Como disse anteriormente, a avaliação dos argumentos é a função principal da lógica e esta avaliação é feita a luz do raciocínio. Suponha que você suporte o seguinte argumento: ***todos os filósofos são inteligente****s* e que em algum ponto da sua vida social um amigo, lhe apresente a Amanda com a sentença: ***Amanda é filósofa***. A conclusão lógica e irrefutável é que ***Amanda é inteligente***.

Este foi nosso primeiro exemplo de raciocínio lógico. Duas **proposições**, ou premissas, se preferirem, levam a uma **conclusão**. Podemos contestar as proposições apresentadas em busca da sua verdade particular. Por exemplo, podemos discutir se é verdade que todos os filósofos são inteligentes ou podemos discutir se Amanda realmente é filósofa. Neste caso, teríamos que ter **argumentos** para avaliar a verdade de *todos os filósofos são inteligentes*, ou ainda verificar se é verdade que *Amanda é filósofa*. Contudo, se soubermos que as duas **proposições** são válidas, somos forçados, pela lógica, a inferir que ***Amanda é inteligente*.** Além de nosso primeiro exemplo de **silogismo** acabamos de ver o nosso primeiro exemplo de **inferência**. Estes são conceitos que transpassam nossa geração, talvez seja necessário voltar uns 2500 anos para entender como chegamos até aqui.

1.2 Muitos gregos, poucos fatos

Marcamos o começo do estudo da lógica com Aristóteles (384 A.C. –322 A.C.) ainda que os poucos escritos de sua própria autoria que chegaram até nós indiquem que o próprio Aristóteles estudou com professores que já ensinavam lógica. A palavra lógica tem origem na palavra grega *λογική*[1] que, originalmente significava: aquilo que foi dito. Com o tempo a palavra logo assumiu o sentido de razão. Este pobre autor gostaria de pensar que esta modificação no sentido da palavra esteja totalmente relacionada ao estudo da racionalidade das sentenças, por meio da lógica.

Aristóteles era filho do médico do rei da Macedônia e ficou órfão ainda jovem. Não perdeu seu status na corte e foi criado em abundância e conforto. Aprendeu poesia e retórica e teve o privilégio de estudar ***Platão*** em Atenas, em uma das mais prestigiosas escolas da época. Estão nos tratados de Aristóteles os primeiros registros escritos do estudo da lógica e algumas das ideias que pavimentaram o caminho da ciência. Contudo, ele não estudava lógica sozinho.

Na Grécia Antiga a lógica floresceu na Escola de Megara onde se estudavam quebra-cabeças lógicos e **paradoxos**, encontrando, discutindo e registrando a existência de alguns destes fenômenos do pensamento. Todos muito importantes para a evolução da ciência. Além das escolas de Atenas e Megara, a Escola Stoica, também da cidade Atenas, fundada por ***Zeno de Citium*** quase 100 anos antes de Aristóteles, ainda nos tempos em que ***Sócrates*** era o grande professor de Atenas, teve importante influência no desenvolvimento do pensamento lógico.

Da Escola Estoica, vamos destacar o professor ***Diodorus Cronus***. Estão nos tratados de Aristóteles a indicação de que foi Cronus quem considerou o raciocínio lógico baseado em três sentenças onde a terceira indica a conclusão. O mesmo raciocínio que vimos no exemplo da Amanda e que cristaliza aquilo que Aristóteles chamou de silogismo. A palavra silogismo também é de origem grega e significa conclusão, ou inferência.

Não temos muita certeza sobre a relação entre Cronus e Aristóteles cremos que Cronus tenha influenciado Aristóteles, talvez como um contemporâneo mais velho ou como um concorrente. O pouco que restou escrito desta época, conservado pelos mouros, não permite nenhuma conclusão definitiva. Parece que

[1] Lógica escrito em grego arcaico.

foi Aristóteles que primeiro percebeu a importância da forma na definição da verdade.

A maioria dos livros de lógica atribuem a Aristóteles a criação dos silogismos, contudo isto não está realmente claro, não há como verificar se foi Aristóteles, Cronus, o algum outro professor da época. Talvez tenha sido uma consequência do trabalho, em cooperação ou concorrência, de duas, ou três gerações de estudiosos gregos. A Aristóteles podemos atribuir o mérito de perceber que a forma da argumentação tem mais impacto na percepção da verdade que o conteúdo dos argumentos, a forma final que usamos para os silogismos e o uso de letras para representar proposições. Não é pouca coisa, é mais que suficiente para dizermos que a lógica como conhecemos hoje, começou na Escola de Atenas, nos escritos de Aristóteles.

1.3 Silogismos

> *"... um silogismo completo, a premissa antes da consequência, a consequência antes da conclusão ..."*
>
> *Machado de Assis, Dom Casmurro.*

Silogismos são estruturas de raciocínio formadas por duas sentenças, chamadas de premissas, ou proposições, e uma conclusão. Lembre-se silogismo significa conclusão. Quando Aristóteles usou este nome para este processo estava realmente definindo uma fórmula para a conclusão da verdade. O silogismo, como definido por Aristóteles, é a forma de ordenar as premissas de para conduzir o raciocínio à conclusão lógica. Sejam as premissas verdadeiras, ou falsas, a conclusão mostrará a verdade.

Vimos um silogismo, de forma completamente informal, quando falamos que *Amanda é inteligente*. Devemos nos preocupar com a forma. O silogismo deve ser escrito e organizado de modo a explicitar as sentenças separando as premissas da conclusão, como pode ser visto nos Exemplo 1.1 e 1.2.

Exemplo 1.1: exemplo de silogismo.

Todos os filósofos são inteligentes Amanda é filósofa
Portanto, Amanda é inteligente

Exemplo 1.2: exemplo de silogismo.

Todos os homens são mortais Sócrates é um homem
Portanto, Sócrates é mortal

É possível perceber que estes exemplos compartilham uma estrutura comum, que pode ser usada para qualquer conjunto de argumentos.

Todos x são y z é x
Portanto, z é y

Esta estrutura não garante a correção do raciocínio nem das proposições, veja, o Exemplo 1.3.

Exemplo 1.3: exemplo de falácia.

Todos os corvos são pretos. Os corvos são pássaros.
Portanto, todos os pássaros são pretos.

O Exemplo 3 está perfeitamente formado, mas a conclusão não é correta, mas o silogismo está perfeito e o argumento é válido perante a lógica contudo, sabemos que a conclusão está errada. Se isso acontece o silogismo deve estar errado. De fato, nestes casos encontramos uma falácia, uma palavra com origem no latim significando truque, no sentido de ser enganado. Uma falácia é um engano no silogismo. As duas premissas no Exemplo 3 são verdadeiras, mas combinadas não provam que a conclusão é verdadeira. Existem apenas 64 tipos de silogismos possíveis e, se for o caso, voltaremos a isso no futuro. Talvez em um Apêndice. Lembre-se a leitora lê, poucas horas depois que escrevi.

Depois de Aristóteles, Cronus e seus contemporâneos; a lógica viajou entre os romanos, e árabes, voltando a Europa apenas nos anos 1200, quase sempre entre estudiosos de teologia. Vou tomar a liberdade de marcar o nascimento da lógica matemática graças os esforços de um homem em busca da paz Gottfried-Willhelm Leibniz.

1.4 A busca pela paz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), viveu na Alemanha durante no final do iluminismo e foi um dos mais produtivos matemáticos da história. Atingiu o ápice da sua produção científica desenvolvendo o cálculo integral e diferencial de na mesma época que **Isaac Newton** de forma independente. Para o nosso esforço em entender a lógica, interessam seus trabalhos com aritmética binária publicados em *Explication de l'Arithmétique Binaire*[2] e uma análise detalhada das operações matemáticas que podemos fazer com proposições . Leibniz acreditava ser capaz de criar uma linguagem universal para representar a lógica e o raciocínio. De forma que a verdade pudesse ser encontrada a partir da análise lógica da relação entre proposições reduzidas a um sistema simbólico e, neste caminho estruturou algumas das operações que usamos até hoje.

Figura 1.1 - Retrato de Leibniz, pintado em Christoph Bernhard Francke (FRANCKE,

[2] Em tradução livre: Explicações da Aritmética Binária, disponível online em: *https://hal.archives-ouvertes.fr/ads-00104781/document#:~:text=Explication%20de%20l%E2%80%99arithm%C3%A9tique%20binaire%2C%20qui%20se%20sert%20des,le%20sens%20des%20anciennes%20figures%20chinoises%20de%20Fohy.*

Leibniz sonhava com a solução dos problemas mundiais por meio de uma linguagem universal que estruturasse o raciocínio lógico e levasse a descoberta da verdade. Seu trabalho inspirou George Boole, no Século XIX e ***Gottolob Frege*** no Século XX que criou o cálculo de predicados, tema do nosso capitulo 2.

1.5 Álgebra Booleana

George Boole, em 1854 ***The Laws of Thought*** apresentando o que conhecemos hoje como **Álgebra Booleana**. Neste ponto da história, Boole dispunha dos conceitos de proposição, de operações matemáticas para estas proposições, e uma aritmética de números binários. Faltava uma álgebra que permitisse completar a estrutura matemática da lógica. Coube a Boole, filho de um comerciante de classe média a honra de completar o sonho de Leibnitz. Curiosamente o interesse de Boole pela lógica surge da disputa entre ***Augustus De Morgan*** e Willian Hamilton. Este era um momento de efervescência matemática. Muitos estudiosos haviam reconhecido que sistemas algébricos não tinham relação com números e que estes conceitos poderiam ser expandidos para englobar outros objetos, e outras áreas de pesquisa. Boole publicou um pequeno trabalho, The *Mathematical Analysis of Logic* [3], um trabalho imediatamente reconhecido como sendo o precursor de toda uma nova área da matemática. Boole, conseguira criar as leis da álgebra simbólica para a lógica, de forma matemática, elegante e simples. Tão simples que álgebra desenvolvida por Boole, as leis de operação matemática com proposição, puderam ser implementadas em circuitos eletrônicos e quase um século após The *Mathematical Analysis of Logic,* vimos o surgimento do computador eletrônico. O próximo passo importante neste caminho é o Paradoxo de Russel. Mas antes, o que é um paradoxo?

[3] Em tradução livre: A Análise Matemática da Lógica. Disponível em: *http://www.gutenberg.org/files/36884/36884-pdf.pdf*. Muito interessante ver que em 1874, os escritores também citavam outros autores, textualmente, no idioma original do citado. No caso do Boole, ele cita Aristóteles, em Grego.

1.6 Paradoxos

Paradoxo é uma sentença que não tem a verdade bem definida, se a sentença for verdadeira, o argumento é falso. Se a sentença for falsa, o argumento é verdadeiro. Um dos mais antigos e famosos, o ***paradoxo do mentiroso***, pode ser ligado às escolas gregas de filosofia, é simples e pode ser demonstrado com uma sentença: **eu sempre minto**. E deixo que a leitora responda, a sentença em destaque neste parágrafo é verdadeira ou falsa?

Para responder esta pergunta, classificando esta proposição, existem algumas considerações que devemos fazer. Vamos, antes de qualquer coisa chamar a sentença **eu sempre minto** de p.

Se p é verdadeira, então "**eu sempre minto"** é verdadeira. Portanto, p deve ser falsa. A hipótese de que p é verdadeira leva à conclusão de que p é falsa, ou seja, existe uma contradição. Mas, a coisa fica ainda mais interessante se p é falsa, então "**eu sempre minto**" é falsa. Portanto, p deve ser verdadeira. A hipótese de que p é falsa leva à conclusão de que p é verdadeira, ou seja, outra contradição. Visto isso é preciso dizer que **eu minto às vezes** não é uma proposição.

Esta é uma boa hora para levantar-se, tomar uma água e lembrar que o estudo da lógica é fundamental para o progresso da humanidade. Esfriar a cabeça e lembrar que estamos lidando com paradoxos desde que Sócrates caminhava sobre as praias da Grécia e ficar aborrecido com eles é, praticamente, um pré-requisito para ser humano.

Do ponto de vista da filosofia, esta frase, provavelmente cunhada no Século VI A.C. quase trezentos anos antes de Aristóteles e Cronus, por um Cretense mitológico chamado de ***Epinemides***, sequer é considerada um paradoxo.

O paradoxo do mentiroso vem dando nós nas mentes mais brilhantes da história desde então. E aparece como se fosse um vírus, nos lugares mais inesperados. Paulo de Tarso, São Paulo para os católicos, utiliza uma variação deste paradoxo em uma das Epístolas a Tito (cap. 1 v:12 e 13):

12. *Um deles, seu próprio profeta, disse: Os cretenses são sempre mentirosos, bestas ruins, ventres preguiçosos.*
13. *Este testemunho é verdadeiro. Portanto, repreende-os severamente, para que sejam sãos na fé.*

Há uma carga gigantesca de ironia, da parte de Paulo, nestes dois versos, que está aborrecendo filósofos e teólogos há quase 2000 anos. Contudo, vou deixar a análise teológica e filosófica destes dois versos para hora, lugar, texto e escritor certos.

Figura 1.2 - Este não é um cachimbo, De René Margritte. Uma pintura de 1929, ou um paradoxo? (MAGRITTE, 2011)

O paradoxo do mentiroso não é o único paradoxo importante, apenas o mais simples e já que este é um livro de lógica matemática, e vamos dar nós em nossas próprias mentes. O paradoxo do mentiroso aparece na lógica, na matemática, na teologia, e na arte, tal é o impacto que ele provoca em o conhece e estuda.

Já que estamos dando nós em cérebros, precisamos falar dos Paradoxos de Zeno. Ou pelo menos de um deles que está relacionado com Leibniz.

Zeno, Zenon, ou Zenão em português, conhecido como ***Zeno de Eleia*** também se preocupou com paradoxos antes dos tempos de Aristóteles. Seus paradoxos influenciam a física e a matemática. E aborrecem estudiosos até os dias de hoje. Um deles, o paradoxo do deslocamento, é frequentemente utilizado para explicar o cálculo diferencial e integral. Infelizmente não restou nada dos escritos de Zeno e tudo que temos sobre ele está nos trabalhos de Aristóteles, milagrosamente preservados pelos estudiosos árabes e persas. A leitora deve estar curiosa sobre este paradoxo que achei tão importante a ponto de mencionar aqui, então responda a seguinte questão:

> *Considere a lâmpada do seu escritório, esta lâmpada está ligada a um interruptor e você pode desligar, ou ligar a lâmpada, infinitas vezes, em um espaço finito de tempo que mediremos. A lâmpada começa ligada, um minuto depois você a desliga, passam-se 30 segundos e você a liga novamente, mais quinze segundos se vão e você a desliga e, a cada passagem da metade do tempo gasto na última interação, você muda o estado da lâmpada. Depois de dois minutos, a lâmpada estará apagada ou acesa?*

Pare agora. Nem que seja por alguns minutos e tente responder esta questão. Não tem pressa. Eu espero.

Voltou? Não existe uma resposta correta, o infinito, colocado no enunciado leva esta questão ao domínio dos paradoxos. Não temos como verificar o estado da lâmpada porque como o você irá mudar o estado de aceso para apagado infinitamente e a cada mudança o tempo fica menor não temos como saber o número de transições que ocorrerão. Dizemos que o número de transições de estado tende ao infinito. Uma frase que usamos com frequência quando encontramos ligeiramente próximo de um paradoxo na matemática.

Uma das primeiras versões deste Paradoxo de Zeno, a mais antiga que chegou até nosso tempo, está relacionada com flechas, pintores e alvos. Coisas comuns na época de Zeno e raras na nossa. Usei a metáfora da lâmpada que vi há alguns anos por achar que seria mais adequada a nossos tempos de energia elétrica e computação quântica.

> *Só para que não restem dúvidas, paradoxos não são proposições. Por definição um paradoxo é uma sentença que não pode ser provada verdadeira ou falsa.*

Estes foram dois exemplos de paradoxos importantes para a lógica e para a matemática, mas não se comparam os paradoxos e avanços que encaramos a partir do final dos anos 1800 para a computação, computabilidade e complexidade. Entre estes o Paradoxo de Russel se destaca.

1.7 O Paradoxo de Russell

Bertrand Russel (1872 – 1970) tentou reescrever toda a matemática a partir da Teoria dos Conjuntos, conforme fora postulada por Georg Cantor, e fracassou ao encontrar um dos mais famosos paradoxos da história da matemática. Esta pretensão, provar toda a matemática a partir da Teoria dos Conjuntos não era exclusiva de Russell, outros matemáticos antes dele, e alguns depois, perseguiram este objetivo. Entre estes últimos destacam-se ***Kurt Gödel*** e ***Alonzo Church*** cujos trabalhos, em lógica e nas teorias da computabilidade e complexidade têm impacto direto na criação do mundo em que vivemos e serão, estudados neste livro, assim que se tornarem relevantes na nossa trajetória.

Russell, além de ser escritor, estudou filosofia, matemática e lógica. Em 1901, estudando a Teoria dos Conjuntos de ***Georg Cantor***, encontou um paradoxo na definição de conjuntos. O mesmo paradoxo já havia sido estudado, mas não publicado por ***Ernst Zermelo*** em 1899 e pelo próprio Georg Cantor em 1890. Contudo, a história atribui este paradoxo a Russell graças a sua publicação. A tentativa de Russell e Alfred North Whitehead, registrada no livro *Principia Mathematica* contribuiu definitivamente para o formalismo da lógica incluindo-a definitivamente na matemática. A simbologia de linguagem da lógica que adotamos neste livro tem origem no *Principia Mathematica*. Veremos, é claro, a versão mais atualizada possível desta simbologia. O paradoxo de Russel pode ser definido da seguinte forma:

> *Considere A como o conjunto formado por todos os conjuntos que não contém a si mesmos. De tal forma que: $A = \{S | S \notin S\}$. Seria A um elemento de si mesmo? Seria o conjunto A um elemento do conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmos?*

Vamos pensar um pouco sobre isso. Se A é um elemento A isso significa que ele é um elemento de si mesmo. Logo, pela própria definição de A ele não poderia conter a si mesmo, já que A é o conjunto de conjuntos que não contém a si mesmos. Como esta opção é impossível, devemos concluir que A não é um elemento de si mesmo. Mas, se ele não contém a si mesmo. Ele precisa, necessariamente, ser um elemento do conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmo. E pronto, lá se foi a teoria dos conjuntos por água abaixo, levando consigo uma parte importante do cérebro deste pobre autor.

Uma consequência importante do trabalho de Russell foi despertar a curiosidade matemática para a formalização da Matemática. ***Alonzo Church*** segui este caminho e acabou criando uma área da matemática, o Cálculo Lambda, que suporta uma parte importante do Cálculo de Sequentes, que veremos no Capítulo 3, deu origem as linguagens de programação funcional e revolucionou a forma como avaliamos os tipos de variáveis em computação.

Outra consequência do trabalho de Russell, a formalização da linguagem de representação de proposições e operações entre proposições. Anteriormente estudadas por Leibnitz, e Boole. Russell ajudou a estruturar a parte da matemática que chamamos de **cálculo proposicional**.

2 CÁLCULO PROPOSICIONAL

No **Cálculo Proposicional** vamos usar as proposições como operandos em expressões lógicas. Esta é uma linguagem formal com dois elementos construtores: a proposição e os operadores. A proposição, é uma declaração, na forma de sentença, que é verdadeira $\boldsymbol{ou}$ falsa. Nunca as duas conclusões ao mesmo tempo e nunca sem um destas conclusões. Os operadores são, na linguagem natural, as palavras, conectivos, que usamos para criar proposições complexas. São cinco operadores básicos que definirão as fórmulas que usaremos neste cálculo.

> *Chama-se de conectivo a palavra que usamos para criar novas proposições, proposições compostas, a partir de composições atômicas.*

A proposição é uma declaração, na forma de sentença fechada, cuja verdade só pode ser demonstrada em um de dois estados diferentes. Ou a proposição é verdadeira, ou é falsa. Uma proposição jamais será verdadeira E falsa e, da mesma forma uma proposição não poderá ser nem verdadeira $e\ nem$ falsa. Se olharmos a definição de proposição vemos a definição do conectivo $\boldsymbol{ou}$ este conector, significa que só pode existir um dos dois estados possíveis.

> *Sentenças fechadas são aquelas que podemos definir como verdadeiras ou falsas. O caso contrário, as sentenças abertas são aquelas onde não podemos determinar sua verdade ou falsidade. Proposições são sentenças abertas.*

O **Cálculo Proposicional** é a parte da lógica matemática que estuda a existência das proposições; sua verdade ou falsidade; a criação de proposições simples (ou atômicas) e a criação de proposições complexas (ou compostas). E, principalmente as fórmulas que criaremos para criar proposições compostas, ou complexas, combinando todas estas proposições por meio de cinco operadores.

2.1 Proposições

Vamos começar estudando as proposições, sua verdade e estrutura, na forma sentencial, a forma como falamos e escrevemos em linguagem natural. Começando com o Exemplo 2.1.

Exemplo 2.1: proposições

1. Lima é a Capital da China
2. Paris é a Capital da França
3. $1 + 1 = 2$
4. Todos os gatos são animais

Todas as declarações do Exemplo 4 são proposições. Todas estas sentenças, ou são verdadeiras (2 e 4), ou falsas (1, 3) e não resta dúvida sobre a verdade de cada uma destas declarações. Aqui, no domínio da linguística e do racional, a prova matemática é dispensável.

A verdade de três das proposições apresentadas no Exemplo 4 é inerente ao conjunto interno de conhecimento da própria leitora. Conjunto este formado pelos milhares de proposições que você foi aceitando como verdadeira ao longo da vida. Uma delas, podemos provar matematicamente, ainda que o esforço seja mínimo se comparado ao esforço que seria necessário para provar as outras três, a proposição “1+1=2” foi matematicamente provada em um pouco mais de 360 páginas, por Russell no *Principia Mathematica*.

Até este ponto temos usado sentenças escritas em uma linguagem natural, o português. A linguagem natural, apesar de útil pode ser ambígua e complexa, levando a conclusões erradas ou incompletas. O Exemplo 2.2 apresenta um caso de ambiguidade.

Exemplo 2.2: caso de ambiguidade.

Sexo ruim é melhor que nada.
Nada e melhor que sexo bom.

Portanto, sexo ruim é melhor que sexo bom.

Ambiguidade e complexidade são características indesejadas a qualquer momento, não raro elas levam a falácias e impedem a validação de uma prova matemática. Aristóteles, Leibniz, Russell e Boole, perceberam isso e, ao longo dos séculos, desenvolveram uma notação matemática para representar proposições e as operações que podemos fazer com elas justamente para garantir a inexistência de ambiguidades.

As proposições que usamos nos exemplos anteriores são ditas atômicas, ou simples, elas estão contidas em si mesmo e sua verdade depende apenas da sua aceitação como verdadeiras ou falsas. A verdade, ou falsidade da proposição pode ser discutida, mas para cada discussão, em algum ponto, precisaremos partir de um conhecimento de verdade, ou falsidade, de alguma proposição básica e, criar toda a estrutura de prova. Neste livro, sempre que restarem dúvidas, ou estabelecerei a verdade, ou falsidade, ou indicarei o caminho para a sua prova.

Representaremos as proposições atômicas, como fizemos antes de forma informal, por letras minúsculas. As letras p, q, r, s, t são as letras que usaremos com mais frequência. Também usaremos as letras maiúsculas T para representar verdadeiro e F para representar falso como símbolos para indicar a verdade de uma determinada proposição. Assim, podemos usar as mesmas proposições do Exemplo 4 para construir o Exemplo 2.3:

Exemplo 2.3: identificação algébrica de preposições.

1. $p\ =$ Escreva este texto ainda hoje.
2. $q\ =$ Paris é a Capital da França. $|\ q\ =\ T$
3. $r\ = 1\ +\ 1\ =\ 2\ |\ r\ =\ F$
4. $s\ =$ Todos os gatos são animais. $|\ s\ =\ T$

Toda proposição é uma sentença, mas, nem toda sentença é uma proposição, como podemos ver no Exemplo 2.4:

Exemplo 2.4: sentenças e proposições.

1. Escreva este texto ainda hoje.
2. $x + 4 = 6$
3. $r = 1 + 1 = 2 \mid r = F$
4. $s =$ Todos os gatos são animais. $\mid s = T$

A sentença do Exemplo 2.4.1 não é uma proposição porque não é uma declaração e a sentença do Exemplo 2.4.2 não é uma proposição porque não temos como garantir se ela é verdadeira ou falsa. Observe que, no Exemplo 2.4.2, assim que for atribuído um valor a x, poderemos definir se a sentença é verdadeira ou falsa e teremos uma proposição.

As regras da sintaxe definem a estrutura de cada proposição enquanto a semântica é responsável pela interpretação. A semântica define a atribuição do valor verdadeiro T ou falso F para cada proposição. Para cada forma, definida pela sintaxe de cada idioma, uma regra semântica define a verdade de cada proposição.

Exercícios

2.1 - Classifique as sentenças a seguir como preposição, ou não.

a) Olhe que lindo pôr do sol!
b) Você joga futebol?
c) Três mais dois igual a cinco.
d) $X\text{^}2 + 3 = 20$
e) Carlos é careca.
f) Francisco não é o Papa.
g) Ele foi campeão mundial com o Brasil em 1970.

A prova, que tanto buscamos, é uma construção sintática que permite a dedução de uma fórmula a partir de um conjunto de outras fórmulas, que chamaremos de ***axiomas*** por meio do uso das ***regras de inferência*** BEN-ARI, 2012. As proposições atômicas podem ser combinadas por meio de operações, com nomes derivados da linguagem natural, tais como E, OU, $implica$ e $negação$. O mais simples é a negação.

2.2 Operador unário - Negação

Temos um e apenas um operador unário em cálculo proposicional, o operador de negação, em inglês *not*, representando por $\neg$ ou, em alguns livros, $\sim$. Operadores unários são aqueles que usam apenas um operando. Se uma proposição é verdadeira a aplicação deste operador a transforma em falsa e vice-versa. Por causa desta inversão, este operador também pode ser chamado de inversor, inverter em inglês.

Podemos usar o operador de negação quantas vezes for necessário, sempre a frente de proposição que estamos operando, por exemplo, a negação da proposição q é representada por $\neg q$ ou $\sim q$ que se lê como ***não q***. Podemos aplicar o operador $\neg$ quantas vezes for necessário, a qualquer proposição de tal forma que se $q = T$ logo $\neg q = F$ e se $r = F$ logo $\neg\neg r = F$.

2.3 Operadores binários

Operadores binários são aqueles que são aplicados a dois operadores e determinam a relação entre eles. Temos quatro operadores binários no cálculo proposicional.

- A conjunção ou operador E (and) representado por $\wedge$ tal que a conjunção entre p e q e representada por $p \wedge q$.
- A disjunção ou operador Ou (or) representado por $\vee$ tal que a disjunção entre p e q e representada por $p \vee q$.
- A condicional, ou implicação, representada pelo operador $\Rightarrow$ tal que: $p \Rightarrow q$.
- A Bicondicional representada pelo operador $\Leftrightarrow$ tal que: $p \Leftrightarrow q$.

3 OPERAÇÕES

"Todas as verdades são de entendimento simples e fácil, uma vez que elas foram descobertas. O problema está em descobri-las."
Galileu Galilei.

As sentenças são claras e sua definição depende do idioma utilizado. Você deve ter aprendido o alfabeto, a sintaxe e a semântica do português, como falado no Brasil, nos ciclos básicos de educação e com sua família. Aqui, vamos pegar este conhecimento para escrever sentenças declarativas que possam ser classificadas como proposições.

Proposição é uma sentença declarativa que só pode ser falsa ou verdadeira. Sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas não podem ser proposições já que é impossível determinar a verdade destas sentenças. *Hoje está chovendo muito!* Não é uma proposição enquanto, *hoje está chovendo muito é* uma proposição. Então podemos dizer, só para lembrar, que:

> *Proposição é todo conjunto de palavras que exprimem um pensamento de sentido completo que pode ser verdadeiro ou falso.*

As proposições seguem alguns princípios criados no século 3 A.C e são atribuídos a ***Chrysippus***, professor da Escola Estoica. A leitora há de lembrar, conversamos sobre esta escola anteriormente neste mesmo livro. Em uma forma puramente literal e sentencial podemos enunciar estes princípios como:

> **Princípio de identidade:** uma proposição verdadeira é verdadeira e uma proposição falsa é falsa.
>
> **Princípio da não contradição:** nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa.
>
> **Princípio do terceiro excluído:** uma proposição será verdadeira ou falsa. Não há outra alternativa.

As proposições podem ser atômicas, ou simples, e compostas, ou moleculares. Proposições simples, são aquelas contidas em si mesmo: *todo* *homem é mortal*; *Beatriz é alta*; *o Papa é argentino*. Todas estas declarações são proposições. Ainda que a leitora não conheça a Beatriz, a maior discordância estaria em determinar se a proposição é verdadeira ou falsa. Mas, não existe outra possibilidade, ou a Beatriz é alta ou baixa. As outras dependem do seu conhecimento interno. Para criar proposições compostas, usamos conectivos, para relacionar uma proposição com a outra. Como pode ser visto no Exemplo 3.1.

Exemplo 3.1: proposições compostas, representadas por sentenças

1. *Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta.
2. *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês*
3. **Ou** *Marcela é curitibana,* **ou** *gaúcha.*
4. **Se** *os gatos são mamíferos,* **então** *eles mamam na infância.*
5. *Joana será aprovada* ***se, e somente se***, *tirar mais que 8.*

No Exemplo 2.5 estão destacados os conectivos (*e; ou; não; então..se; e se, e somente se*). Estes conectivos, que serão transformados em operadores lógicos, estão transformando proposições atômicas em proposições compostas. As proposições apresentadas no Exemplo 3.1 estão na forma de sentenças e, salvo engano, estão de acordo com as normas da língua portuguesa como falada e escrita no Brasil.

Para transformar as sentenças em fórmulas lógicas precisaremos de um conjunto de símbolos que chamaremos de alfabeto e representaremos por Σ_{CP}. Estamos começando nosso estudo da lógica pelo **cálculo proposicional** (CP), para tanto, usaremos o alfabeto $\Sigma_{CP} = \{p;\ q; r; s; t; T; F; \land; \lor; \neg; \rightarrow; \leftrightarrow; (;)\}$.

Com os 14 símbolos do alfabeto Σ_{CP} a amável leitora deve ser capaz de transformar qualquer proposição composta em fórmula lógica. Os símbolos T e F serão usados, respectivamente, para indicar a verdade e a falsidade de uma proposição seja ela composta ou simples. A leitora irá me permitir expandir este alfabeto sempre que eu precisar de mais variáveis proposicionais além de p, q, r, s e t que definimos como elementos do conjunto Σ_{CP}. Para a realização dos cálculos proposicionais, estes símbolos serão utilizados para substituir as sentenças proposicionais por variáveis proposicionais, na forma exposta no Exemplo 3.2.

Exemplo 3.2: uso de variáveis para representar sentenças proposicionais

1. $\boldsymbol{p}$: *Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta.
2. $\boldsymbol{q}$: *Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês*
3. $\boldsymbol{r}$: **Ou** *Marcela é curitibana,* **ou** *gaúcha.*
4. $\boldsymbol{s}$: **Se** *os gatos são mamíferos,* **então** *eles mamam na infância.*
5. $\boldsymbol{t}$: *Joana será aprovada* ***se, e somente se****, tirar mais que 8.*

No Exemplo 3.3 vemos estas mesmas proposições já representadas na forma matemática. Observe que em todos os casos separamos as proposições, representamos por variáveis e aplicamos os operadores.

Exemplo 3.3: uso de variáveis para representar sentenças proposicionais

1.	*Todo homem é mortal* **e** Beatriz é alta. $\boldsymbol{p}$: todo homem é mortal; $\boldsymbol{q}$: Beatriz é alta	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$
2.	*Paris é a capital da Argentina* **e** *o Papa* **não** *é francês* $\boldsymbol{p}$: Paris é a capital da Argentina; $\boldsymbol{q}$: o Papa é francês	$\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q}$
3.	Ou Marcela é curitibana, ou gaúcha. $\boldsymbol{p}$: Marcela é curitibana; $\boldsymbol{q}$: Marcela é gaúcha.	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$
4.	Se os gatos são mamíferos, então eles mamam na infância. $\boldsymbol{p}$: gatos são mamíferos; $\boldsymbol{q}$: gatos mamam na infância.	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$
5.	Joana será aprovada se, e somente se, tirar mais que 8. $\boldsymbol{p}$: joana está aprovada; $\boldsymbol{q}$: Joana tirou nota maior que 8.	$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$

Ao longo de todo este trabalho vamos usar a palavra proposição substituindo a expressão variáveis proposicionais.

Se usarmos os símbolos de Σ, e apenas estes símbolos, para criar uma fórmula lógica, diremos que esta fórmula está bem formatada. Isto é importante porque **apenas as fórmulas lógicas bem formatadas têm validade na lógica**

matemática. Você não pode inferir a verdade de uma fórmula se ela não estiver de acordo com as regras léxicas, sintáticas e semânticas da linguagem. No caso, nossa linguagem é o cálculo proposicional.

Neste ponto da prosa, precisamos destacar que a linguagem da lógica proposicional não é regular e permite ambiguidades. Os símbolos $()$, parênteses, são usados para evitar possíveis ambiguidades isolando proposições compostas. **Não podemos encontrar a verdade de proposições ambíguas.** A leitora já sabe escrever proposições compostas em cálculo proposicional, agora pode praticar um pouco.

Exercícios

3.1 - Crie representações lógicas para as seguintes sentenças caso isso seja possível.

a) Lima não está na Itália e Paris está na França.
b) Sandra é morena logo é bonita.
c) Vou de ônibus ou a pé.
d) Aviões voam só e somente se tiverem asas.
e) Nádia não é romena.
f) Janaína comprou um carro e um apartamento.
g) Quem compra carro e apartamento tem dinheiro.

Já sabemos usar as variáveis proposicionais e os parênteses, nosso próximo passo é entender os operadores $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow e \leftrightarrow$, não necessariamente nesta ordem. Mas, antes disso uma palavrinha sobre Tabelas verdade.

3.2 Tabelas verdade

As tabelas verdade são representações gráficas criadas para permitir a visualização e consequente análise de todas as proposições em uma determinada fórmula lógica. A criação das tabelas verdade é creditada a ***Ludwig Wittgenstein*** (1889 – 1951) que, na página 34 do seu livro "*Some Remarks on Logical Form"*[4], escreveu *"... e podemos representar o produto p e q da seguinte forma..."* e colocou a imagem que pode ser vista na Figura 3.2.

p	q	
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Figura 3.1 - Tabela verdade de Wittgenstein para uma conjunção (WITTGENSTEIN, 1929).

Nesta representação de uma conjunção, ao relacionar todos os estados possíveis relativos as proposições envolvidas em uma conjunção, Wittgenstein, criou um dos aparelhos cognitivos mais importantes para o entendimento das fórmulas proposicionais. A álgebra que Boole desenvolveu, tão elegante e simples, se torna uma ferramenta eficiente de análise lógica. Como disse antes, tão simples e eficiente que acaba por se tornar a base de toda a eletrônica digital e computação que movimenta este começo de Século XXI.

> *A cada linha da tabela verdade, onde avaliamos o resultado da operação de acordo com os valores das proposições operandos, damos o nome de interpretação.*

No caso da tabela apresentada na Figura 3.1, Wittgenstein, listou as quatro interpretações possíveis da operação de conjunção.

[4] Em tradução livre: algumas observações sobre a forma da lógica.

A leitora há de lembrar que vimos a negação ($\neg$), a conjunção ($\wedge$), a disjunção ($\vee$), a operação condicional, ou implicação ($\Rightarrow$) e a bicondicional, ou implicação dupla ($\Leftrightarrow$). Vimos estas operações de forma despretensiosa. Agora, podemos nos aprofundar na linguagem formal da lógica matemática. Para tanto, teremos que voltar e ver cada uma destas operações, sua relação com a teoria dos conjuntos e com a eletrônica e as suas Tabelas Verdade. Antes, contudo, vamos juntos observar que estas operações transformam proposições atômicas em proposições compostas de tal forma que:

O valor lógico de uma proposição composta depende unicamente dos valores lógicos as proposições atômicas que a formam.

3.3 Negação $\neg$

Usamos o operador de negação para transformar uma proposição verdadeira em falsa e vice-versa. Fazemos isso cotidianamente. Aqui, cabe uma ressalva: a negação pode negar a própria negação. Isto quer dizer que mesmo sendo um operador unário, nada impede que este operador possa ser aplicado n vezes ao mesmo operando. Como pode ser visto no Exemplo 3.4.

Exemplo 3.4: negação em forma sentencial e proposicional.

1. $\boldsymbol{p}$: Beatriz é alta.
2. $\neg\boldsymbol{p}$: Beatriz não é alta.
3. $\neg\neg\boldsymbol{p}$: Beatriz é alta.
4. $\boldsymbol{q}$: O papa não é francês.
5. $\neg\boldsymbol{q}$: O papa é francês

É preciso ter muito cuidado ao observar as sentenças negativas já que elas podem ter diversas formas sintáticas equivalentes no português, como falado no Brasil, o que pode ser visto no Exemplo 3.5:

Exemplo 3.5: diversas formas sentenciais para a negação.

1. $\boldsymbol{p}$: Lógica não é fácil.
2. $\boldsymbol{q}$: Não é verdade que lógica é difícil.
3. $\boldsymbol{r}$: É falso que Beatriz é alta.

Wittgenstein criou as Tabelas Verdade e eu lhe disse que esta era uma importante ferramenta cognitiva para a análise de fórmulas proposicionais então (olha uma implicação aqui!) vamos começar a usar as Tabelas Verdade pela mais simples de todas: a Tabela Verdade da Negação, que pode ser vista na Tabela 3.1.

Cálculo Proposicional	
$\boldsymbol{p}$	$\neg p$
$\boldsymbol{T}$	F
$\boldsymbol{F}$	T

Álgebra Booleana	
P	$\bar{P}$
1	0
0	1

Figura 3.1 - Tabela Verdade da negação em notação do cálculo proposicional e da Álgebra Booleana.

Existe uma relação muito próxima entre a lógica matemática e a teoria dos conjuntos. Na teoria dos conjuntos a negação é representada de forma indireta pelo símbolo $\notin$ de tal forma que a sentença $a\ pertence\ ao\ conjunto\ L$ é representada por $a \in L$, a negação desta proposição será dada por $a \notin L$ e deve lida como $a\ não\ pertence\ ao\ conjunto\ L$. O diagrama de Venn para esta operação pode ser visto na Figura 3.3.

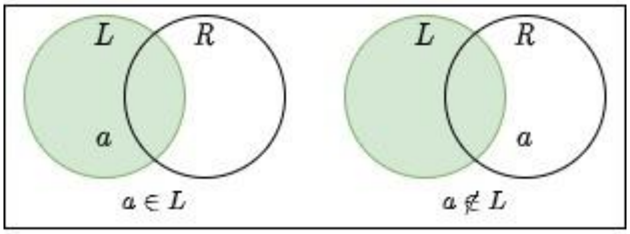

Figura 3.2 - Diagrama de Venn da negação representada na teoria dos conjuntos. Fonte: o autor (2020)

A aplicação do cálculo proposicional na eletrônica, primeiro com relés e válvulas e finalmente com transistores, levou a criação de circuitos eletrônicos para a aplicação de operações lógicas em grande escala culminando nos microprocessadores que movimentam toda a economia mundial. Estes circuitos possuem uma representação gráfica especial para as operações lógicas se são conhecidos como portas lógicas.

Em Álgebra Booleana, aplicada a eletrônica, representamos a negação pelo símbolo de uma proposição em letra maiúscula com uma barra horizontal, $\bar{P}$, que

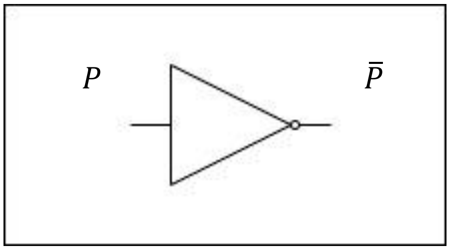

Figura 3.3 - Símbolo do inversor em circuitos lógicos. Fonte: o autor (2020)

se lê: negação de P ou P barrado. A implementação eletrônica da operação de negação é realizada pelo circuito inversor, ou *inverter* em inglês, que pode ser visto na representação gráfica da porta lógica inversora na Figura 3.4.

Voltaremos a negação, assim que revisarmos as cinco operações do cálculo proposicional. Uma já foi, faltam quatro.

3.4 Conjunção ∧

A conjunção representada pelo símbolo ∧, inicialmente era chamada de produto lógico. A conjunção representa logicamente a existência do conectivo E, AND em inglês, ligando duas proposições atômicas e criando uma proposição complexa. A leitora precisa lembrar que a conjunção é uma operação binária. Todas as conjunções terão dois, e somente dois, operados. A conjunção ligará sempre duas proposições.

Todas as sentenças onde existe o conectivo E, e todas as sentenças com sintaxe diferente, mas mesma semântica, representam uma proposição conjuntiva, ou simplesmente uma conjunção. No Exemplo 3.4 podemos ver algumas conjunções.

Exemplo 3.4: conjunções com conjunção não explicita pelo conectivo E

1. $\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda, o quadrado não.
2. $\boldsymbol{q}$: O Papa não é pop e Zico não é paulista.
3. $\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta e $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida.

É preciso ter muito cuidado com a linguagem natural na hora de interpretar seu sentido para inferir as fórmulas lógicas equivalentes. No Exemplo 3.5 podemos dividir cada uma das proposições em outras duas e representá-las por meio da operação conjunção.

Exemplo 3.5: aplicação da conjunção

1. $\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda e $\boldsymbol{q}$: o quadrado não. $\boldsymbol{p \land q}$
2. $\boldsymbol{r}$: O Papa não é pop e $\boldsymbol{s}$: Zico não é paulista. $\boldsymbol{r \land s}$
3. $\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta e $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida. $\boldsymbol{t \land u}$

A Tabela Verdade da conjunção pode ser vista na Tabela 3.2.

Cálculo Proposicional		
$\boldsymbol{p}$	q	$p \land p$
$\boldsymbol{T}$	T	T
$\boldsymbol{T}$	F	F
$\boldsymbol{F}$	T	F
$\boldsymbol{F}$	F	F

Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$P \cdot Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela 3.2 - Tabela Verdade da operação conjunção em cálculo proposicional e em Álgebra Booleana.

Observe a diferença entre as práticas adotadas nas duas formas matemáticas da Tabela Verdade desta mesma operação lógica. Enquanto em cálculo proposicional começamos a tabela com os valores verdadeiros, em Álgebra Booleana, começamos a tabela com os valores falsos. Nos dois casos, a operação conjunção resultará em um resultado verdadeiro (T), se, e somente se, as duas proposições operandos forem verdadeiras.

Uma herança dos tempos passados quando a conjunção era chamada de produto lógico, pode ser vista na representação desta operação na Álgebra Booleana, ainda hoje, usamos o símbolo · para representar a conjunção, para lembrar a leitora, este é o símbolo utilizado para representar o produto escalar. O Exemplo 3.6 apresenta casos de conjunção.

Exemplo 3.6: sentenças exemplos de conjunção em cálculo proposicional

		Resultado
1. $\boldsymbol{p}$: A esfera é redonda **e** $\boldsymbol{q}$: o quadrado não.	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{T}$
2. $\boldsymbol{r}$: O Papa não é pop **e** $\boldsymbol{s}$: Zico não é paulista.	$\boldsymbol{r \wedge s}$	$\boldsymbol{F}$
3. $\boldsymbol{t}$: Tatiana é alta **e** $\boldsymbol{u}$: Tatiana é rápida.	$\boldsymbol{t \wedge u}$	?

No Exemplo 3.6.1, a verdade é clara e indiscutível, no Exemplo 3.6.2, podemos discutir se o Papa é pop, ou não. Entretanto, com certeza, Zico não é paulista e basta uma proposição falsa para definir a verdade da conjunção. Por fim, no Exemplo 3.6.3, não temos como definir o resultado da conjunção simplesmente porque faltam as informações necessárias para definir se uma, ou as duas, proposições são verdadeiras. Ainda que, tanto a sentença quanto a proposição estejam corretamente formatadas, não temos como avaliar a verdade da conjunção.

A conjunção também tem representação na teoria dos conjuntos e pode ser representada pela interseção entre dois conjuntos $P \cap Q$ e pode ser vista no Diagrama de Venn apresentado na Figura 4.

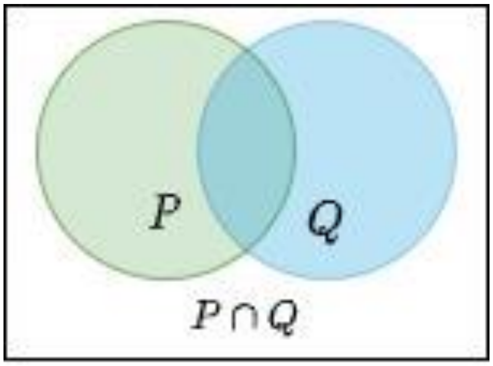

Figura 3.4 - Diagrama de Venn da conjunção. Fonte: o autor (2020).

Na eletrônica o circuito que implementa a conjunção é a porta lógica AND que pode ser vista na Figura 3.6.

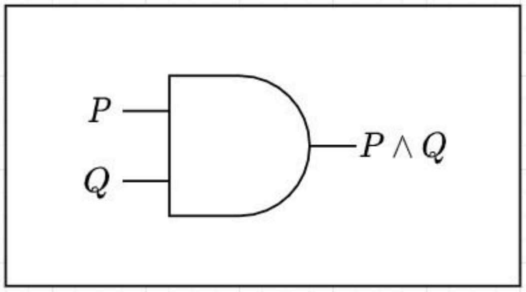

Figura 3.5 - Porta And, implementação da operação conjunção. Fonte: o autor (2020)

Formalmente analisamos as conjunções buscando a função verdade $V()$ de cada um dos operandos. Como pode ser visto nos Exemplos 3.7, 3.8 e 3.9, onde uso o símbolo matemático ∴ apenas para indicar a relação entre a aplicação das funções verdade em cada passo na busca da verdade da conjunção.

Exemplo 3.7: exemplo de busca da verdade para a conjunção

			Resultado
1.	Pelé praticava Futebol e Ayrton Sena automobilismo.		
	$\boldsymbol{p}$: Pelé praticava Futebol	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: Ayrton Sena praticava automobilismo.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$
2.	$\boldsymbol{V(p \land q) \therefore V(p) \land V(q) \therefore T \land T \therefore\ V(p \land q) \therefore T}$	$\boldsymbol{V(p \land q)}$	$\boldsymbol{T}$

Pelé praticava Futebol e Ayrton Sena automobilismo, é uma proposição verdadeira

A última linha do Exemplo 3.7 (3.7.2) pode ser lida como: a verdade da conjunção entre p e q é igual a verdade de p em conjunção com a verdade de q, como as duas proposições são verdadeiras faremos a conjunção entre duas verdades de tal forma que a conjunção entre p e q é verdadeira.

Exemplo 3.8: exemplo de busca da verdade para a conjunção

Resultado

1. Brasília é a capital do Brasil e da Argentina.

p: Brasília é a capital do Brasil. $V(p)$ T

q: Brasília é a capital da Argentina. $V(q)$ F

2. $V(p \wedge q) \therefore V(p) \wedge V(q) \therefore T \wedge F \therefore\; V(p \wedge q) \therefore F$ $V(p \wedge q)$ F

Brasília é a capital do Brasil e da Argentina, é uma preposição falsa.

Exemplo 3.9: exemplo de busca da verdade para a conjunção

Resultado

1. Peru fica na Europa e é um país.

p: Peru fica na Europa. $V(p)$ T

q: Peru é um país. $V(q)$ T

2. $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge T = \; V(p \wedge q) = F$ $V(p \wedge q)$ F

Peru fica na Europa e é um país, é uma proposição falsa.

Assim como a negação, a conjunção tem algumas propriedades bem interessantes que deixaremos para discutir adiante. Depois que passarmos por todas as cinco operações do cálculo proposicional. Faltam duas.

3.5 Disjunção $\vee$

A disjunção, operação proposicional que representa o conectivo Ou, *OR* em inglês, é representada pelo símbolo $\vee$ do alfabeto Σ_{CP} que definimos anteriormente, foi inicialmente chamada de adição lógica. A disjunção é uma operação binária, utiliza dois e apenas dois operandos e será verdadeira se qualquer um dos operandos for verdadeiro.

Em linguagem natural, como o português falado no Brasil, a conjunção é representada pela palavra ou e seus equivalentes semânticos. A leitora deve tomar cuidado aqui. Eu usei a expressão *palavra ou* porque gramaticalmente tanto o E, quanto o OU, em português, estão na classe gramatical conjunção. Também é preciso lembrar que, no português, falado e escrito no Brasil, as expressões, *isto é,* e *ou seja*, são sinônimos de ou. E viva a língua portuguesa! O Exemplo 3.10 apresenta casos de disjunção.

Exemplo 3.10: exemplos de disjunção

			Resultado
1.	$\boldsymbol{p}$: Einstein era alemão ou $\boldsymbol{q}$: Einstein foi físico.	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{T}$
2.	$\boldsymbol{r}$: O Chile é um país, isto é, $\boldsymbol{s}$: não é uma cidade.	$\boldsymbol{r \wedge s}$	$\boldsymbol{F}$

A Tabela Verdade da disjunção pode ser vista na Tabela 3.

Cálculo Proposicional			Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \wedge p}$	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P + Q}$
$\boldsymbol{V}$	V	V	0	0	0
$\boldsymbol{V}$	F	V	0	1	1
$\boldsymbol{F}$	V	V	1	0	2
$\boldsymbol{F}$	F	F	1	1	1

Tabela 3.3 - Tabela Verdade da operação disjunção em cálculo proposicional e em Álgebra Booleana.

Novamente podemos observar as discrepâncias que existem entre a notação do cálculo proposicional e da Álgebra Booleana. Tanto a ordem de distribuição dos estados possíveis quanto o uso do símbolo $+$. O uso do símbolo $+$ persistiu até os primeiros anos do século XX, mesmo no cálculo proposicional, quando esta operação era chamada de adição lógica. A relação entre a disjunção e a teoria dos conjuntos pode ser vista na Figura 3.7.

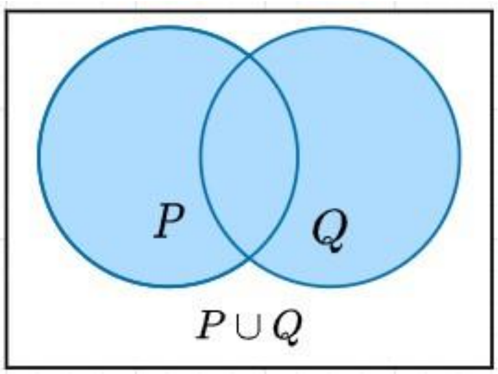

Figura 3.6 - Diagrama de Venn da disjunção na teoria dos conjuntos

A disjunção é representada nos circuitos eletrônicos pela porta OU, OR em inglês que pode ser vista na Figura 3.8.

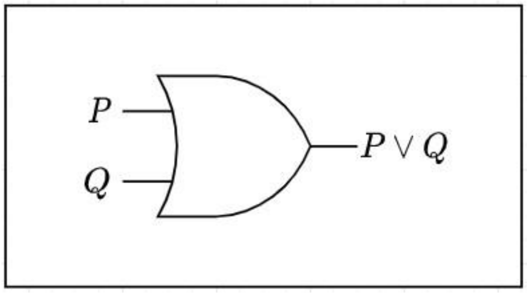

Figura 3.7 - Porta OR representação da disjunção em circuitos eletrônicos.

A descoberta da verdade, por meio da função verdade $V()$ de uma disjunção pode ser encontrada com a análise de cada uma das proposições que compõem o conjunto de operandos. Seguindo o mesmo padrão de pensamento que usamos para a conjunção, e disjunção. Entretanto, lembre-se no caso da implicação um operando é a hipótese e o outro a conclusão. O uso da implicação pode ser visto no Exemplo 3,10.

Exemplo 3.11 disjunção

		Resultado	
1.	Homens são mortais ou faz sol a noite.		
	$\boldsymbol{p}$: Homens são mortais.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: Faz sol a noite.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{F}$
2.	$\boldsymbol{V(p \vee q) \therefore V(p) \vee V(q) \therefore T \vee F \therefore\ V(p \vee q) \therefore V}$	$\boldsymbol{V(p \vee q)}$	$\boldsymbol{T}$

Homens são mortais ou faz sol a noite, é uma preposição verdadeira.

O mesmo que se passou com a negação e a conjunção, se dá com a disjunção. Vamos analisar as propriedades da disjunção assim que passarmos por todas as cinco operações do cálculo proposicional. Faltam duas.

3.6 Condicional, ou implicação $\rightarrow$

Chamaremos de condicional qualquer sentença que contenha o conectivo *se..então*, e a representaremos por →. As proposições na forma condicional, ou de implicação, representadas por $p \rightarrow q$, onde p é chamada de hipótese e q é chamada de conclusão, serão falsas se, e somente se, q for falso. Ou seja, a condicional será falsa se a hipótese implicar em uma falsidade.

A implicação é a declaração mais comum na matemática e se destaca entre aquelas que são mais mal entendidas. Para não fugir dos gregos, vamos voltar a ***Pitágoras*** que viveu nos tempos de Sócrates, professor de Platão, que por sua vez foi professor de Aristóteles e, parece que estou recitando uma descendência ***Klingon***.

Se a amável leitora tomar o cuidado de pedir para qualquer aluno do ciclo médio de ensino que declare o Teorema de Pitágoras ouvirá, quase certamente, que $x^2 + y^2 = z^2$. O que soa correto, parece correto, mas está errado. Esta declaração é falsa. Caso contrário ela teria que ser verdadeira para qualquer valor de x, y e z. Esta equação é falsa, por exemplo para qualquer $x = y = z$. Uma forma correta de enunciar este teorema seria o famoso:

A hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

De fato, poderíamos encontrar outras fórmulas de declarar este teorema, mas como estamos preocupados com a forma e com a lógica, vou tentar:

> *Se x e y são os lados de um triângulo retângulo com hipotenusa z, então $x^2 + y^2 = z^2$ (LEVIN, 2019).*

Parece pouco importante, mas é justamente a correção da declaração que permite inferir sua verdade ou falsidade. A leitora poderia lembrar que lá no final dos anos 1600, ***Leibnitz*** foi estudar lógica na esperança que a comprovação da verdade se transformasse em uma ferramenta para a solução de conflitos, sem a necessidade de gritos, armas e mortes.

A forma correta de descrever um teorema simples como o de Pitágoras é importante. Principalmente porque, neste caso, a forma correta demonstra a importância da implicação.

A Tabela Verdade da operação condicional pode ser vista na Tabela 3;4.

Cálculo Proposicional		
$\boldsymbol{p}$	q	$p \to q$
$\boldsymbol{T}$	T	T
$\boldsymbol{T}$	F	F
$\boldsymbol{F}$	T	T
$\boldsymbol{F}$	F	T

Álgebra Booleana		
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabela 3.4 - Tabela Verdade do operador condicional - implicação - em cálculo proposicional.

A forma mais simples de entender a implicação é considerar que ela representa um contrato, ou uma promessa. À lógica interessa que esta promessa seja verdadeira, ou falsa, para que possa ser considerada uma implicação. Considere, por exemplo, que você disse ao seu filho:

Se tirar 10 na prova, lhe darei R$1.000,00.

Tendo feito tal sandice, a leitora terá que lidar com algumas hipóteses. Considere, quer representaremos esta promessa por duas proposições: p: tirar 10 na prova e q: lhe darei R$1.000,00. A proposição será verdadeira se você cumprir a promessa. Caso contrário será falsa.

Primeiro Suponha que seu filho tirou 10 na prova, então $p = V$ e você mantenho a promessa, logo $q = V$. A proposição é verdadeira.

Considere agora que seu filho tirou 10 na prova, então $p = V$ e você não cumpro a promessa, logo $q = F$. A proposição é falsa.

Suponha que seu filho tirou 8 na prova, e, ainda assim, você lhe dá os R$ 1000,00, $p = F$ e $q = V$, mesmo que a hipótese seja falsa, neste caso, a conclusão é verdadeira e a promessa foi mantida. A proposição é verdadeira.

Por fim, suponha que seu filho tirou 7 e você não paga os R$1.000,00, neste caso, $p = F$ e $q = F$ a proposição ainda é verdadeira porque a promessa não foi quebrada. Você não precisa pagar o valor combinado.

Na teoria dos conjuntos a implicação pode ser representada pelo Diagrama de Venn apresentado na Figura 3.10.

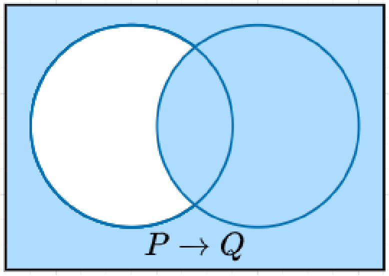

Figura 3.8 - Implicação representada no diagrama de Venn

Na eletrônica não temos uma porta lógica exclusiva para representar a implicação, mas podemos fazer uma combinação de portas para implementar a mesma lógica apresentada na Tabela Verdade 3.4. A representação gráfica deste circuito pode ser vista na Figura 3.11.

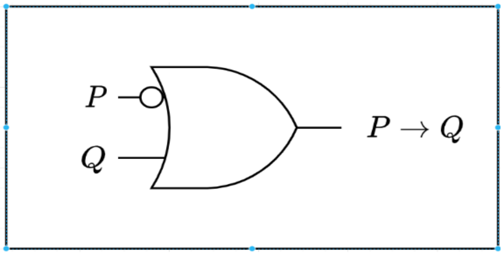

Figura 3.9 - Combinação de portas lógicas, inversor e ou, criando implicação em circuitos eletrônicos.

Muito, muito importante. A leitora não deve esquecer que não estamos falando de consequência. Estamos falando de conclusão. O operador condicional é apenas um conectivo lógico e alguns argumentos podem não fazer sentido e ainda assim serem logicamente corretos. O exemplo 3.10 mostra o uso da função verdade para a busca da verdade na implicação

Exemplo 3.10: busca da verdade em implicação

	Resultado	
$\boldsymbol{p}$: Alagoas está na região sul.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$

q: Minas gerais está na região norte. $V(q)$ F

1. $V(p \rightarrow q) \therefore V(p) \rightarrow V(q) \therefore T \rightarrow T \therefore V(p \rightarrow q) \therefore T$ $V(p \rightarrow q)$ T

Alagoas está na região sul então Minas Gerais está na região norte.

A implicação pode ter diversas formas sintáticas na língua portuguesa, como falada e escrita no Brasil como pode ser visto nas seguintes sentenças:

a) Se chove, fico molhado;
b) Quando chove, fico molhado;
c) Chover implica ficar molhado;
d) Toda vez que chove, fico molhado;
e) Chover é condição suficiente para fico molhado;
f) Ficar molhado é condição necessária para chover;
g) Chover é uma condição para ficar molhado.

A implicação tem valor inestimável nos paradigmas de programação procedural, estruturado e orientado a objetos é esta estrutura lógica que define o comportamento do artefato de código para a tomada de decisão no fluxo de comandos chamado de “*if..them..else*”. Não é sem motivo que esta estrutura seja chamada de condicional.

Que soem os tambores! Agora só falta uma operação do cálculo proposicional.

3.7 Bicondicional ou implicação dupla ↔

Chamamos de bicondicional, ou implicação dupla, a toda sentença que utilize o conectivo se, e somente se. A implicação dupla é representada por ↔. Uma proposição composta bicondicional será verdadeira se os dois operadores forem verdadeiros e se os dois operadores forem falsos. Representa as sentenças que usam, ou podem ser resumidas ao uso do conectivo *se e somente se*.

A forma simplificada de memorizar a ação da operação de implicação dupla se explicita na frase: **os dois ou nenhum**. Ou os dois operandos são verdadeiros ou nenhum é verdadeiro. Nos dois casos a proposição composta representada pela implicação dupla será verdadeira.

A Tabela Verdade da operação bicondicional pode ser vista na Tabela 5.

Cálculo Proposicional			Álgebra Booleana		
p	q	$p \leftrightarrow q$	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
$\boldsymbol{T}$	T	T	0	0	1
$\boldsymbol{T}$	F	F	0	1	0
$\boldsymbol{F}$	T	F	1	0	0
$\boldsymbol{F}$	F	T	1	1	1

Tabela 3.5 - Tabela Verdade do operador bicondicional em cálculo proposicional e Álgebra Booleana.

A implicação dupla não foge a regra. Existem várias estruturas sintáticas que representam esta construção lógica. Como pode ser visto no Exemplo 3.11

Exemplo 3.10: busca da verdade em implicação

		Resultado	
	$\boldsymbol{p}$: Há fogo.	$\boldsymbol{V(p)}$	$\boldsymbol{T}$
	$\boldsymbol{q}$: há fumança.	$\boldsymbol{V(q)}$	$\boldsymbol{T}$
1.	$\boldsymbol{V(p \leftrightarrow q) \therefore V(p) \leftrightarrow V(q) \therefore T \leftrightarrow T \therefore\ V(p \leftrightarrow q) \therefore T}$	$\boldsymbol{V(p \rightarrow q)}$	$\boldsymbol{T}$

O haver fogo é condição suficiente e necessária para que haja fumaça.

Esta relação acontece sempre que p é uma condição suficiente para q e, q é uma condição necessária para p.

A representação da implicação dupla com teoria dos conjuntos pode ser vista no diagrama de Venn apresentado na Figura 3.13.

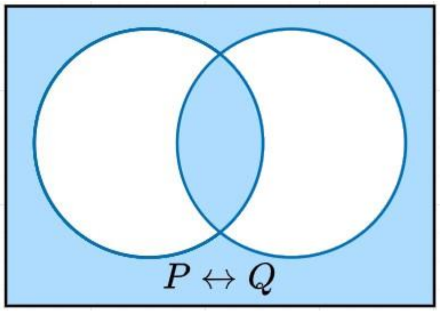

Figura 3.10 - Diagrama de Venn representando o operador bicondicional

No caso da eletrônica a implicação dupla é representada pela porta XNOR que pode ser vista na Figura 3.14.

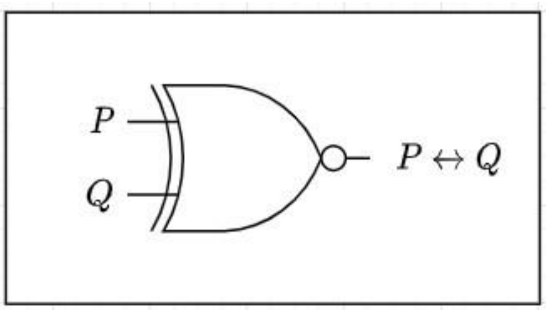

Figura 3.11 - Porta XNOR que representa a implicação dupla em circuitos eletrônicos.

Exercícios

3.7 - Considerando as sentenças a seguir, marque aquelas que são proposições atômicas, ou simples, e compostas. Nos dois casos, represente estas sentenças de forma matemática.

a) Eu estudo informática;
b) Se a > 0 então a é um inteiro positivo.
c) Flamengo é o melhor time do mundo.
d) Está frio, mas casa não está gelada.
e) João trabalha ou estuda.
f) O ar condicionado ser consertado é suficiente para ser ligado.
g) Python é uma linguagem de programação.
h) Se o cão está latindo, o cão está na casa.
i) O gato não subiu na árvore.
j) Não é o caso que o Brasil seja pequeno.

k) Sandra não mente se a pergunta for de matemática.

l) Se o aluno estudar então ele não irá ficar reprovado.

m) Flamengo é campeão e Vasco é segundo colocado.

n) Ana não é estudiosa.

o) Amanda trabalha ou estuda.

4 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES LÓGICAS

Para estudar as propriedades dos operadores precisamos definir a equivalência entre duas fórmulas que será representada pelo símbolo $\equiv$. Observe que vamos usar este símbolo apenas para a definir as propriedades das operações e que ele não faz parte do alfabeto das fórmulas bem formatadas. Pelo menos, não por enquanto.

Dizemos que $P \equiv Q$ se a verdade de P e Q forem as mesmas. De tal forma que:

$$(se\ V(P) = V(Q) = T \therefore P \equiv Q) \vee (se\ V(P) = V(Q) = F \therefore P \equiv Q)$$

Agora podemos ver as propriedades de cada uma das operações lógicas.

4.1 Propriedades da Negação $\neg$

A negação de p é definida de tal forma que se $v(p) \equiv T$ então a $v(\neg p) \equiv F$ e, da mesma forma se $v(p) \equiv F$ então a $v(\neg p) \equiv T$. A negação pode ser representada pela Tabela Verdade 4.1-1.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\neg p}$
$\boldsymbol{T}$	F
$\boldsymbol{F}$	T

Tabela 4.1-1: tabela verdade da negação

Podemos provar que a negação possui as seguintes propriedades:

1. Dupla negação: A negação de uma negação é a verdade original. De tal forma que $\neg\neg P \equiv P$. Que pode ser representado na Tabela Verdade 4.1-2.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\neg p}$	$\boldsymbol{\neg\neg p}$
$\boldsymbol{T}$	F	T
$\boldsymbol{F}$	T	F

Tabela 4.1-2 - Dupla negação.

2. Distributividade: a negação é distributiva em relação a conjunção $(\wedge)$ e a disjunção $(\vee)$. De tal forma:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

E:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

O que pode ser provado com as Tabelas Verdades 4.1.3 e 4.1.4:

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.1-3 - distributividade da negação sobre a disjunção

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.1-4 - distributividade da negação sobre a conjunção.

Esta distributividade da negação sobre a conjunção e disjunção é conhecida como Teorema de De Morgan, em homenagem a ***Augustus De Morgan***. Ainda que Aristóteles tenha feito considerações sobre esta propriedade nos seus tratados. Estas relações foram nomeadas em homenagem a De Morgan já que ele foi o primeiro a publicar a prova lógica desta verdade usando a Álgebra de Boole.

4.2 Propriedades da conjunção $(\wedge)$

A conjunção entre p e q representada por $p \wedge q$ é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \wedge q) \equiv T$, se e somente se $p \equiv q \equiv T$. Ou em outras palavras a conjunção só é verdadeira se p e q forem verdadeiros. A conjunção é:

1. Comutativa: $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$;

p	q	$(p \wedge q)$	$(q \wedge p)$
T	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

T	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
F	T	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
F	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.2-1- a conjunção é comutativa

2. Associativa: $r \wedge (p \wedge q) \equiv (r \wedge p) \wedge q$;

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	**r**	$\boldsymbol{(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{r \wedge (q \wedge p)}$	$\boldsymbol{(r \wedge p)}$	$\boldsymbol{(r \wedge p) \wedge q}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.2-2 - propriedade associativa da conjunção

3. Distributiva:

a) Conjunção sobre a conjunção: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	**r**	$\boldsymbol{(q \wedge r)}$	$\boldsymbol{p \wedge (q \wedge r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{(p \wedge r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.2-3 - distribuição da conjunção sobre a conjunção

b) Conjunção sobre a disjunção: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	**r**	$\boldsymbol{(q \vee r)}$	$\boldsymbol{p \wedge (q \vee r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{(p \wedge r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.2-4 - distribuição da conjunção sobre a disjunção

c) Idempotência: $p \wedge p \equiv p$

4.3 Propriedades da disjunção $\vee$

A disjunção entre p e q representada por $p \vee q$ é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \vee q) \equiv T$, se e somente se $p \vee q \equiv T$. Ou em outras palavras a disjunção é verdadeira se p ou q forem verdadeiros. A disjunção é:

1. Comutativa: $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

p	q	$(p \vee q)$	$(q \vee p)$
T	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
T	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
F	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-1 - a disjunção é comutativa.

2. Associativa: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee r$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-2 - propriedade associativa da disjução.

4. Distributiva:

d) Disjunção sobre a conjunção: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$(q \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$

F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-3 - distribuição da disjunção sobre a conjunção

e) Disjunção sobre a disjunção: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\mathbf{r}$	$(\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$	$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$	$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.3-4 - distribuição da conjunção sobre a disjunção

f) Idempotência: $p \vee p \equiv p$

4.4 Propriedades da implicação →

A implicação de p em q representada por $p \to q$ é a operação lógica cuja função verdade terá valor $V(p \to q\ ) \equiv F$, se e somente se $q \equiv F$. Ou em outras palavras a implicação de p em q é falsa se a consequência q for falsa. Cuja Tabela Verdade pode ser vista em Tabela 4.4.1

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \to q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Tabela 4.4-1 – tabela verdade da implicação (condicional)

Com relação as propriedades podemos destacar que a implicação é:

1. Comutativa em relação ao antecedente: $p \to (q \to r) \equiv q \to (p \to r)$

p	q	r	$(q \to r)$	$p \to (q \to r)$	$(p \to r)$	$q \to (p \to r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.4-2 – propriedade comutativa da implicação no antecedente.

2. Distributiva: $p \to (q \to r) \equiv (p \to q) \to (p \to r)$

p	q	r	$(q \to r)$	$p \to (q \to r)$	$(p \to q)$	$(p \to r)$	$(p \to q) \to (p \to r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	$\boldsymbol{F}$
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.4-3 – propriedade distributiva da implicação

3. Contrapositiva: $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
T	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
F	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

Tabela 4.4-4 – propriedade distributiva da implicação

A implicação também é transitiva: $(p \to q) \to (q \to r) \equiv (p \to r)$; reflexiva: $p \to p$. Veremos estas propriedades com mais cuidado no futuro.

Podemos encontrar o equivalente a implicação usando tanto a conjunção quanto a disjunção: $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$ como pode ser visto na Tabela 4.4.5.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	q	$(\neg p \vee q)$	p	$\neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$

T	*T*	***T***	*F*	*T*	***T***	***T***	*F*	***T***
T	*F*	***F***	*F*	*F*	***F***	***T***	*T*	***F***
F	*T*	***T***	*T*	*T*	***T***	***F***	*F*	***T***
F	*F*	***T***	*T*	*F*	***T***	***F***	*T*	***T***

Tabela 4.4-4 – equivalência da implicação e fórmulas conjuntiva e disjuntiva.

4.5 Propriedades da implicação dupla, ou bi condicionalidade ↔

Definimos a implicação dupla de p em q, $(p \leftrightarrow q)$ como sendo a operação lógica que será verdadeira se e somente se, $p \equiv q \equiv T \vee p \equiv q \equiv F$. Ou, a implicação dupla só será verdadeira se p e q forem verdadeiros ou se p e q forem falsos. A tabela verdade da implicação dupla pode ser vista na Tabela 4.5.1

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	*T*	***T***
T	*F*	***F***
F	*T*	***F***
F	*F*	***T***

Tabela 4.5-1 – Tabela verdade da implicação dupla.

A implicação dupla em relação as suas propriedades é:

1. Comutativa $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
T	*T*	***T***	***T***
T	*F*	***F***	***F***
F	*T*	***F***	***F***
F	*F*	***T***	***T***

Tabela 4.5-2 – Propriedade comutativa da implicação dupla.

2. Associativa: $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

p	q	r	$(q \leftrightarrow r)$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
T	*T*	*T*	*T*	***T***	*T*	***T***
T	*T*	*F*	*F*	***F***	*T*	***F***
T	*T*	*T*	*T*	***T***	*T*	***T***
T	*F*	*F*	*T*	***T***	*F*	***T***

F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$

Tabela 4.5-3 – Propriedade associativa da implicação dupla.

Assim como a implicação, podemos encontrar fórmulas equivalentes a implicação dupla usando a conjunção e a disjunção: $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$

4.6 Síntese de propriedades e equivalências.

Além das tabelas verdades, podemos utilizar as fórmulas de equivalência e as propriedades das operações que estudamos até o momento para encontrar o valor da função verdade de qualquer fórmula bem formatada. Para facilitar Tabela 4.6.1 apresenta um resumo de todas as relações que vimos.

1.	$\neg\neg \boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{P}$	**11.**	$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \equiv (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r})$
2.	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	**12.**	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$
3.	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	**13.**	$p \vee p \equiv p$
4.	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	**14.**	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$
5.	$r \wedge (p \wedge q) \equiv (r \wedge p) \wedge q$	**15.**	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
6.	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$	**16.**	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$
7.	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	**17.**	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r)$
8.	$p \wedge p \equiv p$	**18.**	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$
9.	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	**19.**	$(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$
10.	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	**20.**	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

Tabela 4.6-3 – Resumo das propriedades e equivalências entre fórmulas proposicionais.

5 FÓRMULAS E A LINGUAGEM DA LÓGICA

A linguagem natural não parece ser uma boa ferramenta para a tomada de decisão a história está repleta de exemplos do uso impróprio da linguagem. Ao que parece a verdade se esconde atrás da linguagem o que parece implicar na necessidade de uma linguagem que não possa esconder a verdade. Ao contrário, uma linguagem que explicite a verdade. Aristóteles, Leibnitz, Boole, Wittgenstein, Russell e muitos outros que não citei neste livro, trabalharam, ao longo de 2300 anos para criar a linguagem da lógica. Ao que fosse simples, claro e objetivo. O resultado é o que chamamos de Fórmulas Bem Formatadas, FBF em português e, WFF em inglês. Apenas as fórmulas bem formatadas são válidas no cálculo proposicional. Resta-nos apenas definir o que são fórmulas bem formatadas.

Toda linguagem começa com um alfabeto. Só para lembrar usamos, e usaremos por todo este livro o alfabeto $\Sigma_{CP} = \{p;\ q; r; s; t; T; F; \wedge; \vee; \neg; \rightarrow; \leftrightarrow; (;)\}$, que definimos anteriormente onde CP é a abreviação de cálculo proposicional. Dito isso:

> *As fórmulas bem formatadas são aquelas, e só aquelas, que são escritas de forma correta, usando apenas os símbolos definidos no Σ_{CP}.*

Fórmulas bem formatadas utilizam apenas as cinco operações básicas, apenas os símbolos do alfabeto Σ_{CP} e podem ser usadas para determinar a verdade de qualquer problema lógico no cálculo proposicional. O Exemplo 3.8 apresenta quatro fórmulas bem formatadas considerando que $P, Q, R\ e\ S$ representam fórmulas bem formatadas.

5.1 Exemplo 3.8: fórmulas bem formatadas

a) $(\neg P)$
b) $(P \wedge Q)$
c) $(\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow (R \leftrightarrow S)))$
d) $((P \vee Q) \wedge ((\neg R) \leftrightarrow S))$

Usando toda a formalidade matemática para definir as fórmulas bem formatadas começaremos com analisando a aridade α dos operadores. Em matemática a aridade é um termo que expressa o número de operadores de uma determinada função ou operação. Para isso vamos definir o conjunto:

$$\mathbb{K} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

Finito, que contém todas as operações válidas no cálculo proposicional. Neste caso a aridade de cada operação será definida pela função:

$$\alpha = \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{N}$$

Ou seja

$$\alpha(\neg) = 1;$$

$$\alpha(\wedge) = \alpha(\vee) = \alpha(\rightarrow) = \alpha(\leftrightarrow) = 2$$

Ainda precisamos considerar o conjunto $\mathbb{A}$ de todas as proposições atômicas possíveis de tal que:

$$\mathbb{A} = \{P, Q, R, S, \dots\}$$

De tal forma que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ sejam conjuntos disjuntos:

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{K} = \emptyset$$

De onde é possível extrapolar algumas regras:

1. uma proposição atômica P pertencente a $\mathbb{A}$ é uma fórmula bem formatada;
2. se P é bem formatada então $\neg P$ é uma fórmula bem formatada;
3. se P e Q são bem formatadas, então $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são bem formatadas.
4. Se P é uma fórmula bem formatada então (P) é uma fórmula bem formatada.

O uso dos parênteses é necessário porque as fórmulas lógicas devem evitar qualquer tipo de ambiguidade. $(p \wedge q) \vee r$ tem um valor verdade $V()$ diferente de $p \wedge (q \vee r)$ e os parênteses ajudam a explicitar isso. É preciso tomar muito cuidado com o uso dos parênteses. Quando corretamente utilizados eles ajudam a encontrar a verdade de uma proposição composta, quando mal utilizados eles induzem o erro. Vamos representar por P e fórmula composta $(p \wedge q)$ e por R a fórmula atômica r. Sendo assim:

$$(p \wedge q) \vee r$$

Pode ser escrita:

$$P \vee R$$

E podemos notar que em $(p \wedge q) \vee r$ a operação principal é $\vee$ a disjunção. Na outra fórmula, se representamos p por P e $(q \vee r)$ por Q teremos:

$$P \wedge Q$$

Neste caso a operação principal é $\wedge$ a conjunção. Nos dois casos, e para falar a verdade, em qualquer expressão composta, podemos representar as fórmulas bem formatadas por um grafo, uma árvore cuja raiz é a operação principal. Como pode ser visto a Figura 3.12.

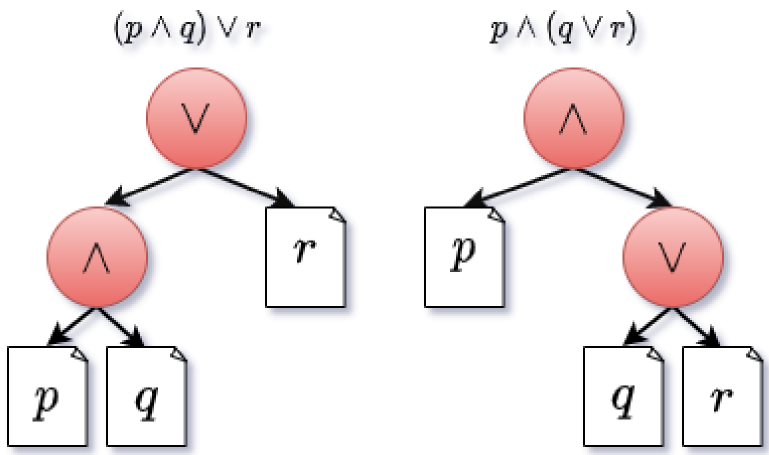

Figura 5.1 - Exemplos de árvores sintáticas criadas a partir de fórmulas bem formatadas.

Além dos parágrafos mudarem completamente o valor da função verdade da fórmula também determinam a ordem de resolução. Determinam como devemos montar o raciocínio que levará ao encontro da verdade. Uma vez que o grafo esteja montado podemos encontrar a verdade indo de baixo para cima, das folhas para a raiz encontrando a verdade de todas as fórmulas.

Para fazer a evolução manual das fórmulas em direção a verdade devemos obedecer a uma ordem de precedências: $\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge\, e \vee, \neg$. Ou seja, a implicação dupla ($\leftrightarrow$), deve ser resolvida antes da implicação ($\rightarrow$), que por sua vez deve ser resolvida antes da conjunção (∧) ou da disjunção (∨) e por fim, resolvemos as negações (¬).

> *A ordem de precedência ↔, →, ∧ e ∨, ¬ é uma convenção da linguagem que adotamos no cálculo proposicional.*

Isso quer dizer que expressões sem nenhum parêntese como:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow r \vee s$$

Terão como raiz a implicação dupla. Se a leitora não estiver vendo a fórmula, podemos usar os parênteses para deixar claro e eliminar qualquer dúvida, como pode ser visto na Figura 3.13.

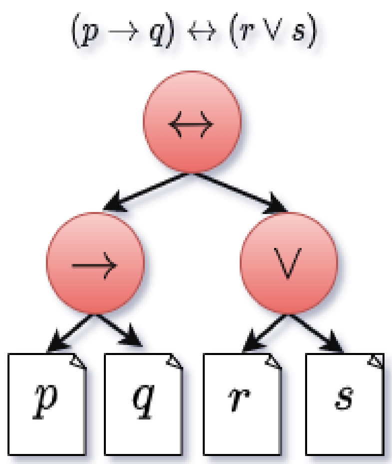

Figura 5.2 - Exemplo de fórmula interpretada segundo as procedências dos operadores.

A leitora deve compreender que quando determinei que seria uma implicação dupla estava levando em consideração apenas a fórmula, sem considerar sua origem. Se considerarmos as origens das proposições atômicas, podemos ter, com estes mesmos símbolos, fórmulas com outro sentido e outra verdade.

Considere, por exemplo que, de fato, trata-se de uma disjunção entre a proposição s e o resultado da implicação dupla $p \rightarrow q \leftrightarrow r$. Neste caso, teríamos a fórmula e a árvore sintática apresentadas na Figura 3.14.

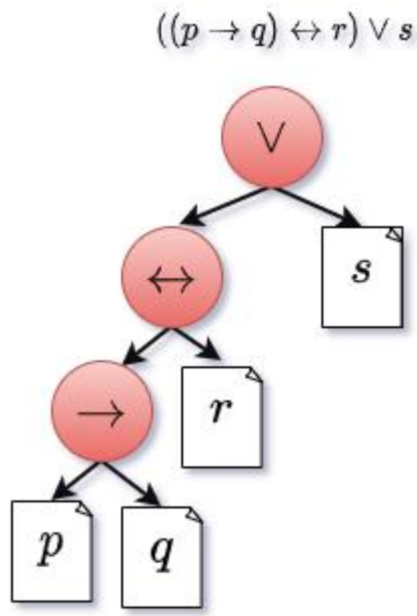

Figura 5.3 - O efeito dos parênteses na interpretação das fórmulas.

Assim a leitora já deve ter concluído que, caso não existam parênteses na fórmula, vamos interpretá-la de acordo com a ordem de precedência $\leftrightarrow, \to, \wedge \, e \vee$, $\neg$. Havendo parênteses, a procedência será dada de forma aninhada, do parêntese mais interno para o mais externo.

Exercício
Considere as fórmulas a seguir e esquematize suas árvores sintáticas.

a) $p \vee q \wedge p \to r \vee q$;
b) $p \vee q \leftrightarrow r \to q$;
c) $p \vee q \vee r \vee s \to \neg p$;
d) $\neg p \wedge \neg\, q \to s$;
e) $s \to t \wedge q$.

5.2 Análise de proposições compostas

Ao longo do livro usamos o conceito de equivalência de forma quase preguiçosa, sem nenhum compromisso com a formalidade. Em lógica, a formalidade é indispensável. Não só na construção das sentenças e preposições, mas também no processo de análise. Assim, podemos começar definindo equivalência:

> *Dizemos que a fórmula P e equivalente a fórmula Q se, e somente se, cada valor lógico verdadeiro, $V(P) \equiv T$, que satisfaz P também satisfaz Q e cada valor lógico verdadeiro, $V(Q) \equiv T$, que satisfaz Q também satisfaz P*

A estas equivalências daremos o nome de equivalências tautológicas, ou equivalências lógicas. E, deste ponto em diante, já que definimos formalmente a equivalência tautológica, passaremos a utilizar o símbolo $\Leftrightarrow$ para indicar esta equivalência.

Com a noção de equivalência, as fórmulas e propriedades vistas anteriormente, podemos analisar qualquer fórmula bem formatada em busca da sua verdade em cada interpretação possível. E, uma vez que esta verdade seja encontrada, para todas as interpretações possíveis da fórmula, podemos encontrar outras fórmulas que sejam tautologicamente equivalentes.

De fato, é possível provar que todos os operadores binários podem ser definidos por fórmulas usando apenas $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$. A Tabela 5.2.1 apresenta a construção da conjunção e da disjunção utilizando os outros operadores.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	p	q	$p \vee q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	T	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$

Tabela 5.2-1– Demonstração de equivalência entre disjunção e conjunção

A Tabela 5.2-1 mostra que $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q))$ e que $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q))$ o que permite a substituição das fórmulas por suas fórmulas equivalentes sem nenhum efeito sobre a verdade destas fórmulas sobre qualquer uma das suas interpretações. A Figura 5.2-2 apresenta um resumo de algumas equivalências tautológicas notáveis.

Propriedade		
Comutatividade	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Distributividade	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identidade	$p \wedge T \Leftrightarrow p$	$p \vee F \Leftrightarrow p$
Negação	$\neg T \Leftrightarrow F$	$\neg F \Leftrightarrow T$
Negação	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	$p \vee \neg p \Leftrightarrow T$
Dupla Negação	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	
Idempotente	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Tabela 5.2-2– Equivalências notáveis envolvendo conjunção, disjunção e negação

A partir da análise das equivalências tautológicas entre fórmulas diferentes podemos encontrar novas formas de representar as fórmulas lógicas. Isto é muito importante na criação de circuitos digitais. Veremos, por exemplo, que qualquer fórmula lógica pode ser representada utilizando apenas a negação da conjunção, ou a negação da disjunção. Estas negações são tão importantes que possuem identificadores próprios.

5.3 Representações equivalentes – formas normais

6 REFERÊNCIAS

ARUN-KUMAR, S. **Science, Introduction to Logic for Computer**. London UK: Prentice Hall., 2002.

BEN-ARI, M. **Mathematical Logic For Computer Science**. 3º. ed. London, UK: Springer-Verlag, 2012.

BENNETT, D. J. **Logic Made Ease How to Know when you Language Deceives You**. New York, NY USA: W. W. Norton Company, 2004.

FRANCKE, **C. B. Christoph Bernhard Francke - Bildnis des Philosophen Leibniz (ca. 1695).jpg**. Wikimedia Commons, the free media repository, 2020. Disponivel em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Christoph_Bernhard_Francke_-_Bildnis_des_Philosophen_Leibniz_(ca._1695).jpg&oldid=428672169>. Acesso em: 22 ago. 2020.

KNUTH, D. E. Big Omicron and Big Omega and Big Theta. **SIGACT News**, p. 18-24, 1976.

LEIBNITZ, **G.-G. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences**. l'Académie royale des sciences, 1703. Disponivel em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/ads-00104781/document>. Acesso em: 9 ago. 2020.

LEVIN, O. **Discrete Mathmatics, an open itroduction**. 3º. ed. Greely, CO. USA: Oscar Levin, 2019.

MAGRITTE, R. **"La Trahison des Images" ("The Treachery of Images") (1928-9)**. **Wikipedia**, 2011. Disponivel em: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:MagrittePipe.jpg>. Acesso em: 20 ago. 2020.

RUSSELL, B. Principia Mathematica. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2019. Disponivel em: <https://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

SALMON, W. C. **SPACE, TIME, AND MOTION A Philosophical Introduction**. University of Arizona, 2009. Disponivel em: <https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/SpaceTimeMotion/STM.html>. Acesso em: 08 ago. 2020.

TOMASTIK, E. C.; EPSTEIN, J. L. **Applied Finite Mathematics**. Belmont, CA. USA: Cengage Learning, 2008.

WITTGENSTEIN, L. **Some Remarks on Logical Form**. Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary. [S.l.]: Blackwell Publishing. 1929. p. 162-171.

7 RESPOSTAS EXERCÍCIOS

2.1: a) não é proposição; b) não é proposição; c) proposição; d) não é proposição; e) proposição; f) proposição; g) não é proposição.