Matematisk Formelsamling med opgaver og løsninger

af Frank Bille

Sidst opdateret 30. januar 2014

Matematisk Formelsamling med opgaver og løsninger
af Frank Bille

Denne bog er skrevet i LaTeX og graferne er lavet i MetaPost.
Kildekoden kan findes på
http://www.github.com/frankbille/formelsamling

Indhold

Forord

Denne bog kom til verdenen ud af en frustration med eksisterende formelsamlinger, som er alt for kortfattede i deres forsøg på at være et hurtigt opslagsværk. Problemet er at rigtig mange mennesker, specielt under uddannelse, ikke har fået brugen af formlerne ind på rygradden endnu. Derfor kigger de på formlen og kan måske huske at de har set den før, men kan ikke huske hvordan den skal bruges. Dette gør sig gældende uanset om man står ude i marken og skal bruge en formel til en virkelig opgave, eller om man sidder til eksamen og skal løse et opgavesæt. En matematisk grundbog er heller ikke til megen hjælp, da man oftest ikke har den med. De fleste jeg har læst har desuden ikke været specielt gode til hurtige opslag.

Jeg har prøvet at løse dette problem, ved at udvide den klassiske formelsamling med nogle konkrete eksempler på brug af de forskellige formler. Dette er stillet op som adskilte opgaver og løsninger, hvor jeg har forsøgt at beskrive nogle af de hyppigeste opgaver som man møder relaterende til forskellige formler. Kapitel 1 er en traditionel formelsamling, med illustrationer og meget kort beskrivelse. I kapitel 2 (side 33) har jeg forsøgt at beskrive nogle af de hyppigeste opgaver som man møder relaterende til forskellige formler. Kapitel 3 (side 39) indeholder løsninger til opgaverne i kapitel 2, med henvisning til hvilke formler der benyttes.

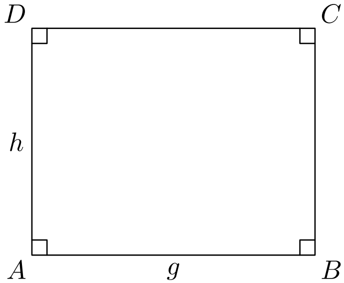
Frank Bille, d. 30. januar 2014

Kapitel 1

Formler og regneregler

1.1 Areal og omkreds

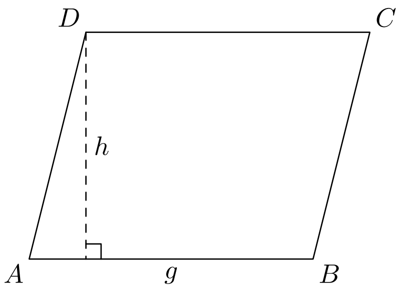
1.1.1 Rektangel



Højde h
Grundlinje g
Areal A

(1.1) $A = h \cdot g$

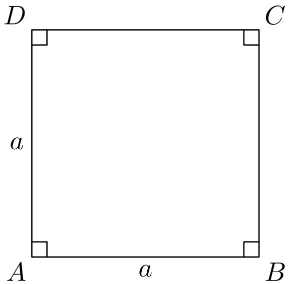
1.1.2 Parallelogram



Højde h
Grundlinje g
Areal A

(1.2) $A = h \cdot g$

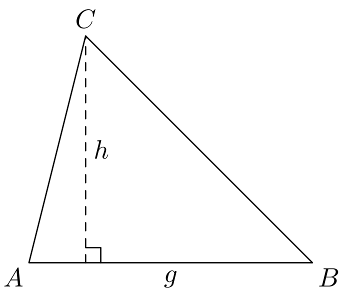
1.1.3 Kvadrat



Sidelængde a
Areal A

(1.3) $A = a \cdot a = a^2$

1.1.4 Trekant

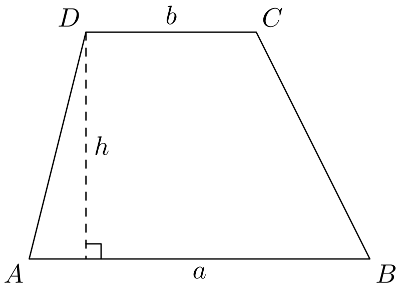


Højde h
Grundlinje g
Areal A
Omkreds O

(1.4) $A = \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot g$

(1.5) $O = |AB| + |BC| + |CA|$

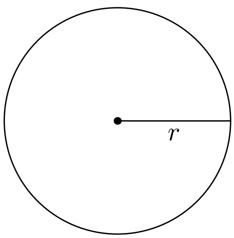
1.1.5 Trapez



Højde h
Parallelle sider a og b
Areal A

(1.6) $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$

1.1.6 Cirkel



Radius r
Areal A
Omkreds O

(1.7) $A = \pi \cdot r^2$

(1.8) $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

1.2 Brøker

(1.9) $\frac{a}{a} = 1$

(1.10) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$

(1.11) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$

(1.12) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$

(1.13) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

(1.14) $\frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$

(1.15) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

1.3 Ligninger

Generelt for ligninger gælder det at de operationer man foretager på den ene side af lighedstegnet også skal udføres på den anden side af lighedstegnet.

Isolere x ved at trække a fra på begge sider af lighedstegnet

(1.16) $x + a = b \Leftrightarrow x + a - a = b - a \Leftrightarrow x = b - a$

Isolere x ved at ligge a til på begge sider af lighedstegnet

(1.17) $x - a = b \Leftrightarrow x - a + a = b + a \Leftrightarrow x = b + a$

Isolere x ved at dividere med a på begge sider af lighedstegnet

(1.18) $a \cdot x = b \Leftrightarrow \dfrac{a \cdot x}{a} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a} \cdot x = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x = \dfrac{b}{a}$

Isolere x ved at gange med a på begge sider af lighedstegnet

(1.19) $\dfrac{x}{a} = b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} \cdot a = b \cdot a \Leftrightarrow x \cdot \dfrac{a}{a} = b \cdot a \Leftrightarrow x = b \cdot a$

Isolere x ved at tage kvadratrodden på begge sider af lighedstegnet

(1.20) $x^2 = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{b} \Leftrightarrow x = \sqrt{b}$

1.4 Procentregning

$$(1.21)\quad \begin{aligned} \% &= \frac{1}{100} \\ a\% &= a \cdot \frac{1}{100} = \frac{a}{100} \end{aligned}$$

Beregne procent a af b

$$(1.22)\quad a\% \text{ af } b = \frac{a}{100} \cdot b = \frac{a \cdot b}{100} = a \cdot \frac{b}{100}$$

Finde a's forhold til b udtrykt som procent

$$(1.23)\quad \frac{a}{b} \cdot 100\%$$

Kapitalfremskrivning
Startkapital K_0
Rentefod r
Kapital K efter n terminer

$$(1.24)\quad K = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Gennemsnitlig procentvis ændring r

$$(1.25)\quad 1 + r = \sqrt[n]{(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot ... \cdot (1 + r_n)}$$

1.5 Potensregneregler

(1.26) $a^r = 1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_r$

(1.27) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(1.28) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

(1.29) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

(1.30) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

(1.31) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

(1.32) $a^0 = 1$

(1.33) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

(1.34) $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$

(1.35) $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

1.6 Proportionalitet

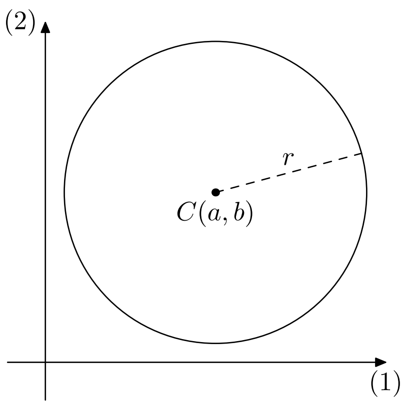
Proportionale størrelse x og y

$$\begin{aligned} y &= k \cdot x \\ \frac{y}{x} &= k \end{aligned} \tag{1.36}$$

Omvendt proportionale størrelser x og y

$$\begin{aligned} y &= c \cdot \frac{1}{x} \\ x \cdot y &= c \end{aligned} \tag{1.37}$$

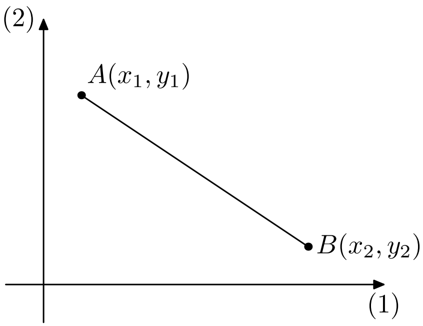
1.7 Cirkel



Ligning for cirkel med centrum i $C(a,b)$ og radius r

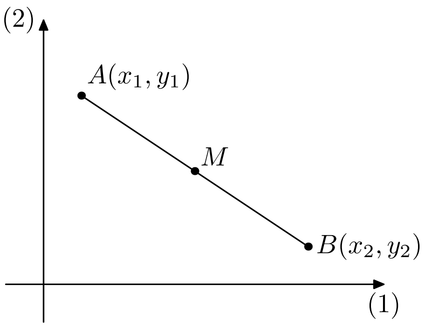
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1.38}$$

1.8 Koordinatsystem i planen



Afstanden $|AB|$ mellem to punkter $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$

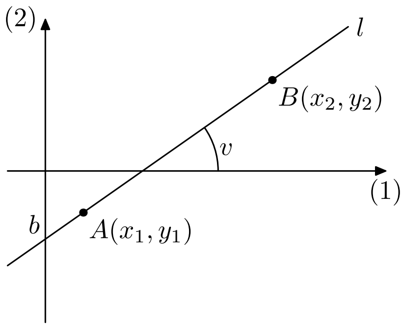
(1.39) $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Midtpunkt M af linjestykke AB

(1.40) $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

1.9 Linje



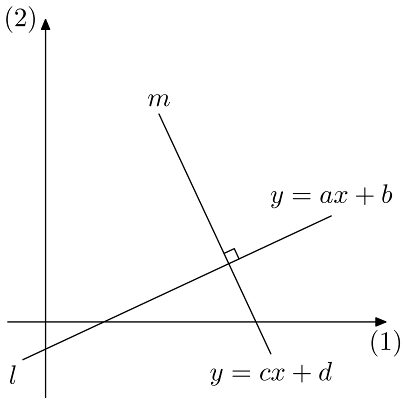
Ligninger for linjen l

(1.41) $$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y - y_1 &= a(x - x_1) \end{aligned}$$

Hældningskoefficent (stigningstal) a for linjen l

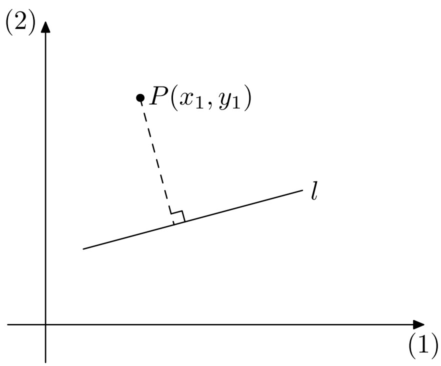
(1.42) $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(1.43) $a = \tan v$



Ortogonale linjer l og m

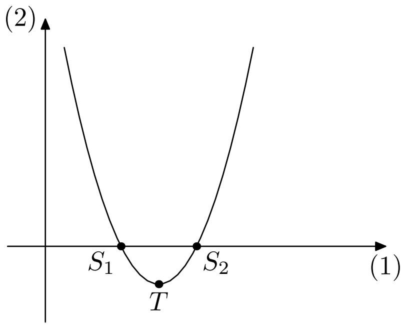
(1.44) $l \perp m \Leftrightarrow a \cdot c = -1$



Afstand dist(P,l) fra punktet $P(x_1,y_1)$ til linjen l med ligningen $y = ax+b$

(1.45) $\mathrm{dist}(P,l) = \dfrac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}}$

1.10 Parabel



Ligning for parabel med symmetriakse parallel med andenaksen

(1.46) $y = ax^2 + bx + c$

Toppunkt T

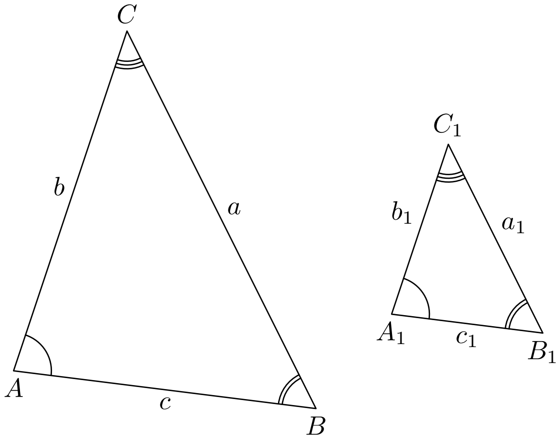
(1.47) $T\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-d}{4a}\right)$, hvor $d = b^2 - 4ac$

Skæringspunkter S_1 og S_2 med førsteaksen

(1.48) $S_1\left(\dfrac{-b-\sqrt{d}}{2a}, 0\right)$, $S_2\left(\dfrac{-b+\sqrt{d}}{2a}, 0\right)$

1.11 Trekant

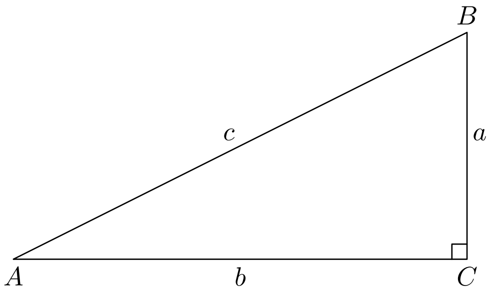
1.11.1 Ensvinklede trekanter



(1.49) $$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$$

(1.50) $$\begin{aligned} a_1 &= k \cdot a \\ b_1 &= k \cdot b \\ c_1 &= k \cdot c \end{aligned}$$

1.11.2 Retvinklet trekant



Pythagoras' læresætning, hvor a og b er katetere og c er hypotenusen.

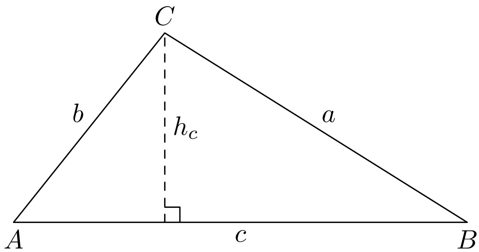
(1.51) $a^2 + b^2 = c^2$

(1.52) $\sin A = \dfrac{a}{c}$

(1.53) $\cos A = \dfrac{b}{c}$

(1.54) $\tan A = \dfrac{a}{b}$

1.11.3 Vilkårlig trekant



Cosinusrelation

(1.55) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Sinusrelation

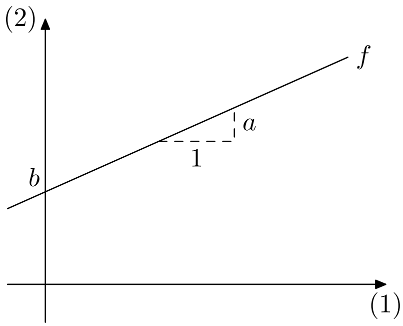
(1.56) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Trekantens areal T
Højden på $c = h_c$

(1.57)
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}h_c a \\ &= \frac{1}{2}ab\sin C \end{aligned}$$

1.12 Polynomier

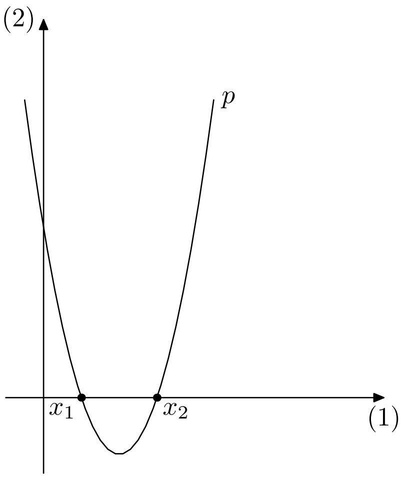
1.12.1 Førstegradspolynomium



Førstegradspolynomium, lineær funktion f

(1.58) $f(x) = ax + b$

1.12.2 Andengradspolynomium



Andengradspolynomium p med rødder x_1 og x_2

$$(1.59)\quad \begin{aligned} p(x) &= ax^2+bx+c \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

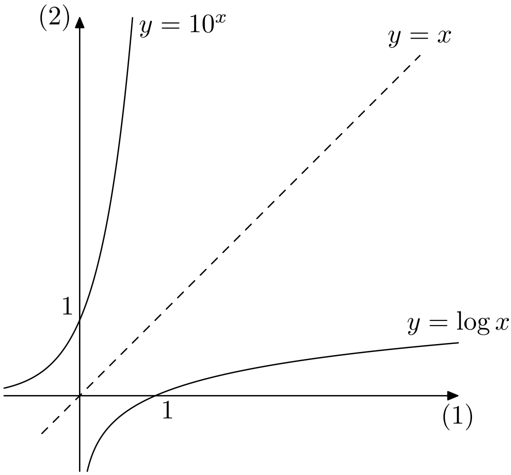
Rødder i andengradspolynomium p

$$(1.60)\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a},\quad \text{hvor}\quad d=b^2-4ac$$

Polynomium p af grad n

$$(1.61)\quad p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

1.13 Logaritmefunktioner



Grafer for $y = \log x$ og $y = 10^x$

(1.62) $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$

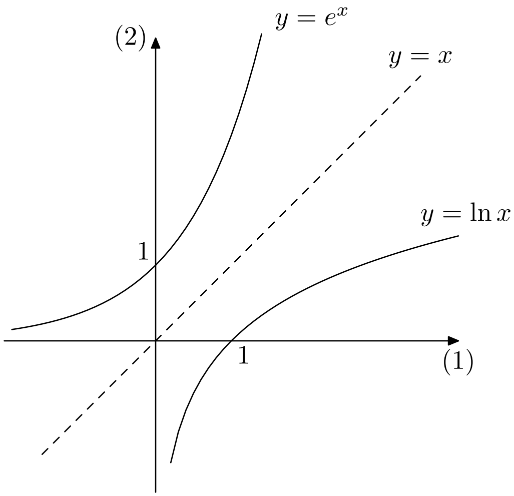
Logaritmefunktionen log med grundtal 10

(1.63) $\log 10 = 1$

(1.64) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

(1.65) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

(1.66) $\log(a^r) = r \cdot \log a$



Grafer for $y = \ln x$ og $y = e^x$

(1.67) $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

Den naturlige logaritmefunktion ln med grundtal e

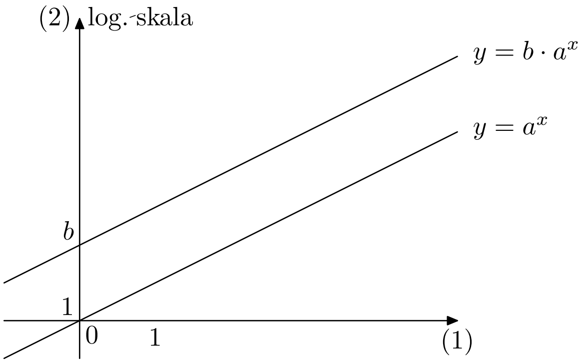
(1.68) $\ln e = 1$

(1.69) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

(1.70) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

(1.71) $\ln(a^r) = r \cdot \ln a$

1.14 Eksponentialfunktioner



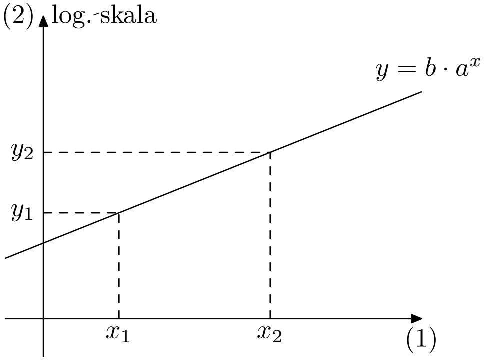
Grafer for $y = a^x$ og $y = b \cdot a^x$ i enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Eksponentialfunktion

(1.72) $f(x) = a^x$

Funktion, der er proportional med en eksponentialfunktion

(1.73) $f(x) = b \cdot a^x$

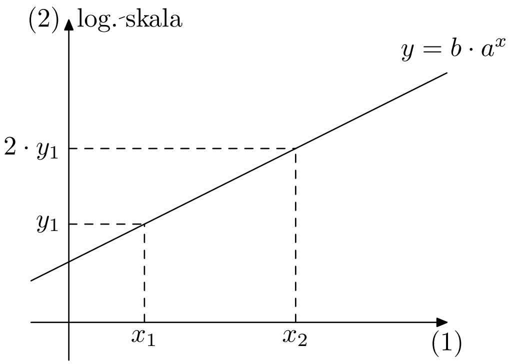


Bestemmelse af fremskivningsfaktor a

(1.74) $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\dfrac{y_2}{y_1}}$

En eksponentielt voksende funktion f med fremskrivningsfaktor a, hvor $a > 1$, dvs. med vækstrate r, hvor $r > 0$

(1.75) $$\begin{aligned} f(x) &= b \cdot a^x \\ &= b \cdot (1+r)^x \\ &= b \cdot e^{kx}, \quad \text{hvor} \quad k = \ln a \end{aligned}$$



Fordoblingskonstant T_2

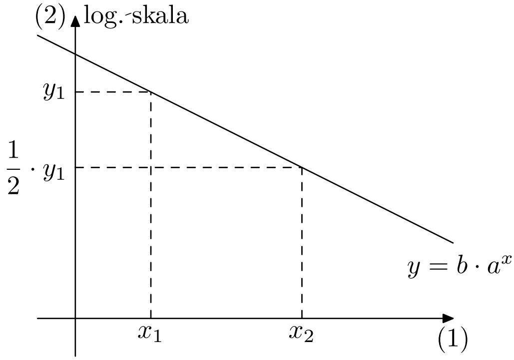
(1.76) $T_2 = x_2 - x_1$

(1.77) $T_2 = \dfrac{\log 2}{\log a} = \dfrac{\ln 2}{\ln a} = \dfrac{\ln 2}{k}$

(1.78) $b \cdot a^x = b \cdot e^{kx} = b \cdot 2^{\frac{x}{T_2}}$

En eksponentielt aftagende funktion f med fremskrivningsfaktor a, hvor $0 < a < 1$, dvs. med vækstrate $-r$, hvor $r > 0$

(1.79)
$$\begin{aligned} f(x) &= b \cdot a^x \\ &= b \cdot (1-r)^x \\ &= b \cdot e^{-kx}, \quad \text{hvor} \quad k = -\ln a \end{aligned}$$



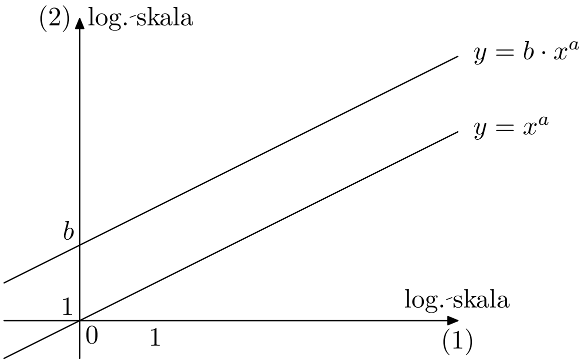
Halveringskonstant $T_{\frac{1}{2}}$

(1.80) $T_{\frac{1}{2}} = x_2 - x_1$

(1.81) $T_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log a} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln a} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-k}$

(1.82) $b \cdot a^x = b \cdot e^{-kx} = b \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T_{\frac{1}{2}}}}$

1.15 Potensfunktioner



Grafer for $y = x^a$ og $y = b \cdot x^a$ i dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

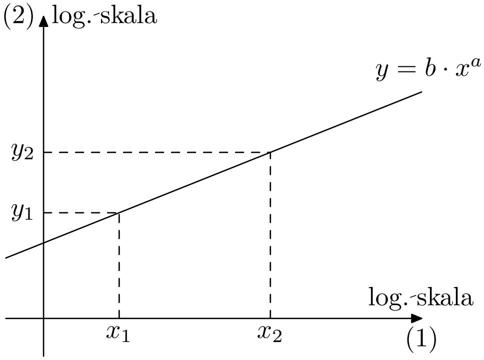
Potensfunktion

(1.83) $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$

(1.84) $y = x^a \Leftrightarrow x = \sqrt[a]{y}$

Funktion, der er proportional med en potensfunktion

(1.85) $f(x) = b \cdot x^a$



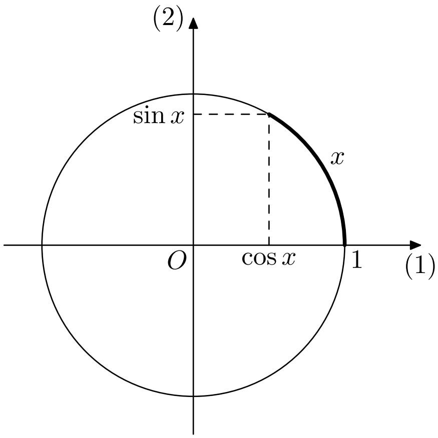
Bestemmelse af eksponenten a

(1.86) $a = \dfrac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \dfrac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$

Funktionen f defineres som $f(x) = b \cdot x^a$. $f(x)$ fremskrives med faktor q^a, når x fremskrives med faktor q

(1.87) $f(q \cdot x) = q^a \cdot f(x)$

1.16 Trigonometriske funktioner



Aflæsning af $\cos x$ og $\sin x$

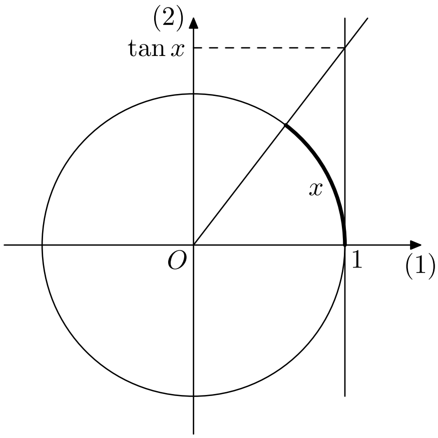
(1.88) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

(1.89) $$\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos x \\ \sin(x+2\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

(1.90) $$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

(1.91) $$\begin{aligned} \cos(\pi-x) &= -\cos x \\ \sin(\pi-x) &= \sin x \end{aligned}$$

(1.92) $$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x \end{aligned}$$



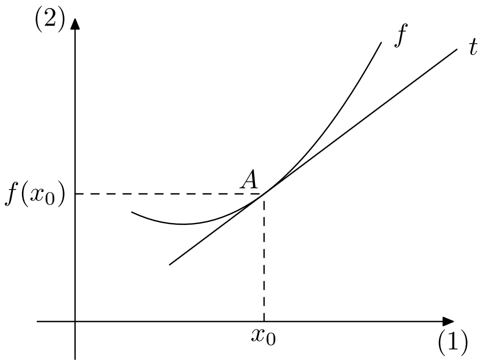
Aflæsning af $\tan x$

(1.93) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

(1.94) $\tan(-x) = -\tan x$

(1.95) $\tan(x + \pi) = \tan x$

1.17 Differentialregning



Ligning for tangent t i punktet $A(x_0, f(x_0))$

(1.96) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Approximerede førstegradspolynomium p for f i tallet x_0

(1.97) $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Regneregler for differentiation

(1.98) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

(1.99) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(1.100) $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$

(1.101) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

(1.102) $(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

1.18 Regneregler for integration

I dette afsnit betegner F en stamfunktion til f

Ubestemt integral

(1.103) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$

(1.104) $\displaystyle\int \left(f(x) \pm g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

(1.105) $\displaystyle\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$

(1.106) $\displaystyle\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$

(1.107) $\displaystyle\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{hvor} \quad t = g(x)$

Bestemt integral

(1.108) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

(1.109) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(1.110) $\displaystyle\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.111}$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.112}$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.113}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{hvor} \quad t = g(x) \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \end{aligned} \tag{1.114}$$

Kapitel 2

Opgaver

Opgaverne kan løses ved hjælpe af formlerne i denne formelsamling. Du kan finde løsningerne i kapitel 3 på side 39.
De fleste opgaver er lavet så der ikke behøves lommeregner.

2.1 Areal og omkreds

1. Beregn arealet af et *rektangel* når højden er 4cm og grundlinjen er 7cm.
2. Beregn arealet af en trekant med højden 2cm og grundlinjen 7cm.
3. En cirkel har en diameter på 8cm. Hvor stor er omkredsen på denne cirkel?

2.2 Brøker

Reducér følgende brøker

1. $4 \cdot \frac{5}{4}$
2. $\frac{7}{2} - \frac{8}{6}$
3. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}$

2.3 Ligninger

Isoler a i følgende ligninger

1. $a - 3 = 7$
2. $2a + 10 = -16$
3. $a + 2a - 3 = 5a - 5$

2.4 Procentregning

1. En person tjener 28000kr om måneden, men skal betale 39% i skat. Hvor meget får vedkommende udbetalt hver måned efter at skatten er trukket fra?

2. 110m hækkeløb er en diciplin ved de Olympiske Lege. Løberne løber en distance på 110 meter hvor der er en række forhindringer som de skal hoppe over. Afstanden fra startlinjen til den første hæk er 13,72m. Hvor mange procent har løberne gennemført når de når til den første hæk?

2.5 Potensregneregler

Reducér følgende potenser

1. $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
2. $3^3 \cdot 3^4$
3. 2^0
4. $\sqrt{3} \cdot 3^2$
5. $\dfrac{7^{11}}{7^8}$
6. $\dfrac{9^{64}}{9^{97}} \cdot 9^{33}$
7. $\sqrt{5}^2$
8. $\sqrt{5^2}$

2.6 Cirkel

1. Opstil ligningen for cirklen med centrum i punktet $A(-3{,}6)$ og radius 4.

2.7 Linje

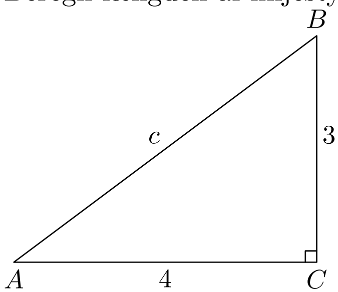
1. Den rette linje l går i gennem to punkter $A(1{,}3)$ og $B(2{,}5)$. Find ligningen for linjen l

2.8 Parabel

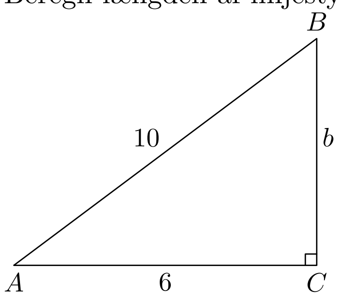
1. Find rødderne og toppunktet i andengradsligningen $y = 2x^2 - 5x + 2$

2.9 Trekant

1. Beregn længden af linjestykket c.



2. Beregn længden af linjestykket b.



2.10 Differentialregning

1. Funktionen f er defineret som $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$. Bestem forskriften for tangenten t i punktet $A(2, -2)$.

Kapitel 3

Løsninger

Alle løsningerne er så detaljerede som muligt og vil for det meste indeholde referencer til de formler der er benyttet.

3.1 Areal og omkreds

1. Benytter (1.1)

$$h = 4\text{cm}$$
$$g = 7\text{cm}$$
$$A = h \cdot g = 4\text{cm} \cdot 7\text{cm} = \underline{\underline{28\text{cm}^2}}$$

2. Benytter (1.4)

$$h = 2\text{cm}$$
$$g = 7\text{cm}$$
$$A = \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot g = \tfrac{1}{2} \cdot 2\text{cm} \cdot 7\text{cm} = \underline{\underline{7\text{cm}^2}}$$

3. Diameteren d på en cirkel er 2 gange radius. Det vil sige at radius er

$$r = \frac{d}{2} = \frac{8\text{cm}}{2} = \underline{4\text{cm}}$$

Ved at benytte (1.8), kan vi så beregne omkredsen.

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 4\text{cm} \simeq \underline{\underline{25{,}13\text{cm}}}$$

3.2 Brøker

1. Benytter: (1.10)

$$4 \cdot \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 5}{4} = \frac{4}{4} \cdot 5 = \underline{\underline{5}}$$

2. Benytter: (1.12), (1.13) og (1.14)

$$\frac{7}{2} - \frac{8}{6} = \frac{7 \cdot 6 - 8 \cdot 2}{2 \cdot 6} = \frac{42 - 16}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{13}{6} \cdot \frac{2}{2} = \underline{\underline{\frac{13}{6}}}$$

3. Benytter: (1.13), (1.14) og (1.15)

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 9} = \frac{12}{36} = \frac{1 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

3.3 Ligninger

1. Benytter: (1.17)

$$a - 3 = 7 \Leftrightarrow a - 3 + 3 = 7 + 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 10}}$$

2. Benytter: (1.16) og (1.18)

$$\begin{aligned} 2a + 10 = -16 &\Leftrightarrow 2a + 10 - 10 = -16 - 10 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot a = -26 \\ &\Leftrightarrow \frac{2 \cdot a}{2} = \frac{-26}{2} \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{a = -13}} \end{aligned}$$

3. Benytter: (1.17), (1.16) og (1.18)

$$\begin{aligned} a + 2a - 3 = 5a - 5 &\Leftrightarrow 3a - 3 = 5a - 5 \\ &\Leftrightarrow 3a - 3 + 3 = 5a - 5 + 3 \\ &\Leftrightarrow 3a = 5a - 2 \\ &\Leftrightarrow 3a - 5a = 5a - 2 - 5a \\ &\Leftrightarrow -2a = -2 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2 \cdot a}{-2} = \frac{-2}{-2} \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{a = 1}} \end{aligned}$$

3.4 Procentregning

1. Benytter: (1.22)
Da 100% af lønnen er 28000, vil den del af lønnen der bliver udbetalt hver måned være $100\% - 39\% = 61\%$, dvs.:

$$61\% \text{ af } 28000 = 61\% \cdot 28000 = \frac{61}{100} \cdot 28000 = 61 \cdot \frac{28000}{100} = 61 \cdot 280 = \underline{\underline{17080}}$$

2. Benytter: (1.23)

$$\begin{aligned} &a = 13{,}72\text{m} \\ &b = 110\text{m} \\ &\tfrac{a}{b} \cdot 100\% = \tfrac{13{,}72\text{m}}{110\text{m}} \cdot 100\% \simeq 0{,}125 \cdot 100\% = \underline{\underline{12{,}5\%}} \end{aligned}$$

3.5 Potensregneregler

1. Benytter: (1.26)

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{\underline{2^7 = 128}}$$

2. Benytter: (1.27) og (1.26)

$$3^3 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{3^7}}$$

3. Benytter: (1.32)

$$2^0 = 5^0 = 3572954^0 = \underline{\underline{1}}$$

4. Benytter: (1.34) og (1.27)

$$\sqrt{3} \cdot 3^2 = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^2 = 3^{\frac{1}{2}+2} = \underline{\underline{3^{2\frac{1}{2}}}}$$

5. Benytter: (1.28)

$$\frac{7^{11}}{7^8} = 7^{11-8} = \underline{\underline{7^3}} = \underline{\underline{21}}$$

6. Benytter: (1.27) og (1.28)

$$\frac{9^{64}}{9^{97}} \cdot 9^{33} = 9^{64-97} \cdot 9^{33} = 9^{-33+33} = 9^0 = \underline{\underline{1}}$$

7. Benytter: (1.34) og (1.29)

$$\sqrt{5}^2 = 5^{\frac{1}{2}^2} = 5^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 5^1 = \underline{\underline{5}}$$

8. Benytter: (1.35)

$$\sqrt{5^2} = 5^{2^{\frac{1}{2}}} = 5^{2\cdot\frac{1}{2}} = 5^1 = \underline{\underline{5}}$$

3.6 Cirkel

1. Vi benytter (1.38), hvor cirklens centrum $C(a,b)$ er lig med vores centrum $A(-3,6)$. Det vil sige at $a = -3$ og $b = 6$.

$$(x-(-3))^2 + (y-6)^2 = 4^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{(x+3)^2 + (y-6)^2 = 16}}$$

3.7 Linje

1. Ligningen for en linje er ifølge (1.41) $y = ax + b$. For at bestemme ligningen for l skal vi bestemme a og b. For at bestemme a benytter vi (1.42). Til dette kræves der to punkter. Dem har vi fået opgivet i form af $A(1,3)$ og $B(2,5)$. Det vil sige at $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$ og $y_2 = 5$.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = \underline{2}$$

Nu skal vi finde b. Dette gør vi ved at isolere b i ligningen for en ret linje og derefter sætte a og et af punkterne (vi kan jo vælge at benytte A) ind i ligningen.

$$y = ax + b \Leftrightarrow b = y - ax$$
$$b = 3 - 2 \cdot 1 = \underline{1}$$

Vi har nu fundet både a og b og kan nu konstruere ligningen for linjen l:

$$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$$

3.8 Parabel

1. $a = 2$, $b = -5$ og $c = 2$
For at finde rødder benytter vi (1.48). Vi skal først udregne diskriminanten.

$$d = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = \underline{9}$$

Dernæst kan vi beregne de to rødder.

$$\begin{aligned}
&x_1 = \tfrac{-b-\sqrt{d}}{2a} = \tfrac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \tfrac{5-3}{4} = \tfrac{1}{2} \\
&x_2 = \tfrac{-b+\sqrt{d}}{2a} = \tfrac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \tfrac{5+3}{4} = 2 \\
&\underline{\underline{x_1 = \tfrac{1}{2}, \quad x_2 = 2}}
\end{aligned}$$

Nu skal vi beregne toppunktet for parablen. Til dette benytter vi (1.47)

$$\begin{aligned}
&T = (x_0, y_0) = \left(\tfrac{-b}{2a}, \tfrac{-d}{4a}\right) \\
&x_0 = \tfrac{-b}{2a} = \tfrac{-(-5)}{2\cdot 2} = \underline{\tfrac{5}{4}} \\
&y_0 = \tfrac{-d}{4a} = \tfrac{-9}{4\cdot 2} = \underline{-\tfrac{9}{8}} \\
&T = \underline{\underline{\left(\tfrac{5}{4}, -\tfrac{9}{8}\right)}}
\end{aligned}$$

3.9 Trekant

1. Benytter (1.51). Vi har fået oplyst de to katetere $a = 3$ og $b = 4$

$$\begin{aligned}
&c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \\
&c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}
\end{aligned}$$

2. Benytter (1.51). Vi har fået oplyst kateteren $a = 6$ og hypotenusen $c = 10$

$$\begin{aligned}
&c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \\
&b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = \underline{\underline{8}}
\end{aligned}$$

3.10 Differentialregning

1. Benytter: (1.96)
Først skal vi differentiere f

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$$
$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{2-1} - 1 \cdot 3x^{1-1} = \underline{x - 3}$$

Dernæst benytter vi tangent ligningen (1.96) til at finde forskriften for tangenten. I vores tilfælde er $x_0 = 2$, da opgaven siger at tangenten skal være i punktet $A(2, -2)$

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &= f(2) + f'(2) \cdot (x - 2) \\ &= (\tfrac{1}{2} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2) + (2 - 3) \cdot (x - 2) \\ &= (-2) + (-1) \cdot (x - 2) \\ &= -2 - 1x + 2 = -1x = -x \\ y &= -x \end{aligned}$$

Ligningen for tangenten t til funktionen f i punktet $A(2, -2)$ er $\underline{\underline{y = -x}}$