Krümmung von Graphen

Ein Thema für Leistungskurse
in drei ungleichen Schritten

von
Rolf Neveling
Wuppertal

Eigentlich ein Kuriosum: Kurvendiskussionen sind seit grauer Vorzeit - ob mit Sinn oder Verzweiflung der Beteiligten - zentrales Thema des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe. Dabei sind dann u. a. Wendepunkte, Links- und Rechtskrümmungen wesentliche Begriffe, jedoch die Krümmung eines Graphen im engeren Sinne, etwa ob er stark oder schwach gekrümmt ist, das wird nicht weiter untersucht. Für Krümmungen ein Maß zu haben, ist aber offenkundig wichtig, denkt z. B. man nur an den Straßenbau.

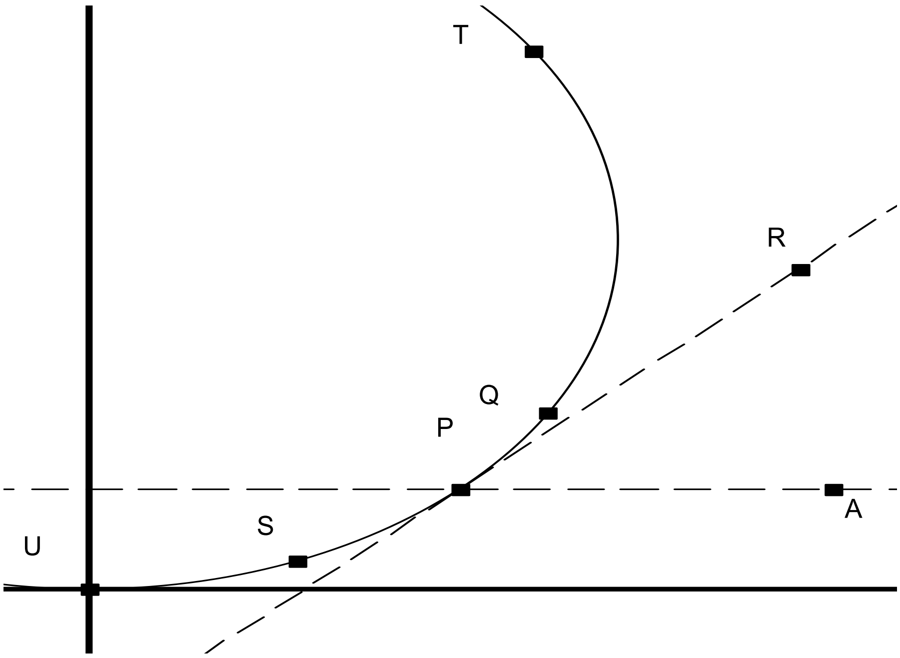
Im Folgenden möchte ich ein Unterrichtskonzept vorstellen, das von Geraden und Kreisen ausgeht, um dann für Leistungskurse die Krümmungsformel herzuleiten. Da das Ergebnis technisch etwas unhandlich ist, erfordert es geradezu, mit Computer-Algebra-Systemen wie Derive oder dem TI92 verarbeitet zu werden. Um zu zeigen, dass sich mit der Krümmungsformel reizvolle unterschiedliche Fragenstellungen behandeln lassen, füge ich einige Aufgaben an.

Der erste Schritt, der einfache

Offenkundig ist es sinnvoll, Geraden das Krümmungsmaß k=0 zuzuschreiben. Um nun auch für Kreise ein Maß zu definieren, gehen wir von zwei Überlegungen aus: Zum einen haben Kreise in jedem ihrer Punkte die gleiche Krümmung. Zum anderen gilt: Je größer der Radius, desto kleiner ist die Krümmung eines Kreises. Wir wählen also als Arbeitshypothese für die Krümmung k eines Kreises mit dem Radius r das Maß $k = \frac{1}{r}$ und stellen fest, dass mit wachsendem r die Krümmung eines Kreises sich der einer Geraden angleicht. Unsere beiden Setzungen sind also miteinander kompatibel.

Der zweite Schritt, der zentrale

Um die Krümmung nicht konstant gekrümmter Graphen zu definieren, lassen wir uns von Figur 1 leiten. Die Krümmung des Graphen ändert sich auf dem Weg von S über Q nach T, und hat dann offensichtlich zwischen Q und T irgendwo ihr Maximum. Wir stellen uns nun vor, dass wir den Graphen mit konstanter Geschwindigkeit entlang fahren und in jedem Punkt P die Richtung der Tangente, gemessen als Winkel $\alpha = \angle\left(APR\right)$, beobachten; die Gerade durch P verlaufe dabei parallel zur x-Achse. Dann ist klar, dass sich bei stärkerer Krümmung der Winkel α stärker ändert als in Bereichen, in denen der Graph weniger gekrümmt ist. Und da liegt der wesentliche Gedanke: Krümmung kann man verstehen als Änderung des Winkels bezogen auf den gefahrenen Weg auf dem Graphen. Der gefahrene Weg wird dann durch das Bogenintegral berechnet.



Genauer heißt das: Die mittlere Krümmung zwischen P und Q berechnet man gemäß

$$\frac{\alpha(s_0+h)-\alpha(s_0)}{h}$$

mit s_0 als Bogenlänge, etwa gemessen von U bis P, h als Bogenlänge von P bis Q, sowie $\alpha(s_0+h)$ als Winkel in Q und $\alpha(s_0)$ als Winkel in P. Nun ergibt sich für die momentane Krümmung natürlich sofort

$$\alpha'(s)=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(s_0+h)-\alpha(s_0)}{h},$$

d. h. dass Krümmungen Geschwindigkeiten entsprechen.

Vor der Herleitung der Standard-Krümmungsformel für hinreichend schöne Funktionen f unter Verwendung des Bogenintegrals eine Bemerkung zur Schreibweise: Im Zusammenhang mit der Substitutionsregel für Integrale habe ich die schöne, alte Differentialschreibweise eingeführt und dann immer von der Werkstattfassung dieser Regel gesprochen. Das finde ich sinnvoll. Die Krümmungsformel habe dann natürlich auch so hergeleitet. Wer es schulbuchvertrauter mag, der möge in den ersten Anhang sehen.

$\alpha(x)=\arctan f'(x)$, also folgt für die Krümmung im Punkt $P(x;f(x))$

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=\frac{da}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{1}{1+\left(f'(x)\right)^2}\cdot f''(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}=$$

$$\frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

mit $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ als Ableitung des Bogenintegrals. Die Rechnung habe ich an der Tafel vorgeführt und dann nur noch mit dem Ergebnis gearbeitet.

Der dritte, der Verträglichkeitsschritt

Wir definieren also für 2-mal differenzierbare Funktionen f als Krümmung $k(x)$ an der Stelle $x \in D_f$

(1) $k(x) = \dfrac{f''(x)}{\left(1+\left(f(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Dann haben wir zu untersuchen, ob diese Definition mit unserer Geraden- und Kreis-Krümmungsdefinition verträglich ist. Für Geraden ist das klar, für Kreise rechnen wir nach:

Mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ liefert (1) mit Derive $k(x) = ... = \dfrac{sign\left(x^2 - r^2\right)}{|r|} = \dfrac{-1}{r}$. Die Krümmungsformel erinnert uns also daran, dass wir natürlich zwischen Links- und Rechtskrümmungen unterscheiden müssen, siehe den Derive-Anhang.

Anmerkungen:

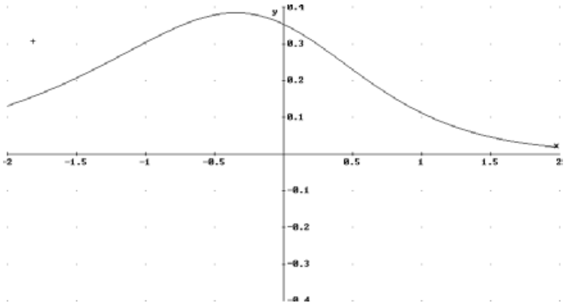
1. Im Unterricht bin ich in meinem LK der JS 13 nach den obigen drei Schritten vorgegangen. Den sog. Krümmungsruck beim Übergang von einer Geraden- zu einer Kreisbewegung habe ich als einen Aspekt des Einstiegs in das Thema mit ein paar Schienen einer Modelleisenbahn demonstriert. Man sieht den Ruck besonders gut, wenn man auf die Lokomotive, die das Gleis durchfährt, noch ein Stückchen Stab klebt, das die Rolle der Tangente übernimmt.

2. Um Erfahrungen mit der Formel zu bekommen, wurden im Unterricht zunächst einfache Beispiele, etwa Parabeln mit geraden und ungeraden Exponenten auf Stellen maximaler Krümmung untersucht, dies alles mit Papier und Bleistift.
Bei komplizierteren Graphen hat der Kurs dann auch mit Derive gearbeitet, z. B. um maximale Krümmungen zu berechnen. Dass dabei die heiligen Verfahren der Kurvendiskussion schnell an technische Grenzen stoßen und man auf die Anschauung zurück verwiesen ist, so schien mir, war für den Kurs eine wichtige Erfahrung. Die letzte der angefügten Aufgabe habe ich im Abitur gestellt.

3. Der hier skizzierte Weg scheint mir der einfachere zu sein. Es gibt einen anderen, der mit Krümmungskreisen arbeitet.

Beispiele für Aufgaben

Aufgabe Die Krümmung der Exponentialfunktion



a) Berechnen Sie die Krümmung k(x) für die Funktion f mit
$f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$.

b) Das nebenstehende Bild zeigt k(x). Berechnen Sie die Stelle maximaler Krümmung.

Aufgabe Anschlussstücke

Zwei Teilstücke eines Straßenverlaufs sind gegeben durch die Graphen der Funktionen g und h mit

$$g(x) = x^2 + 3 \; mit \; x \leq 0 \quad und \quad h(x) = -0,5x + 1,5 \; mit \; x \geq 2 \; .$$

a) Zeichnen Sie die Situation.
Es soll der Term f(x) eines Verbindungsstücks auf dem Intervall $[0;2]$ berechnet werden, so dass in den Endpunkten die Graphen stetig anschließen und zudem in den Ableitungswerten der *ersten* Ableitung übereinstimmen.
Stellen Sie das erforderliche Gleichungssystem für eine ganzrationale Funktion dritten Grades auf und berechnen Sie f(x).

b) Begründen Sie mit der Krümmungsformel, dass die in Aufgabenteil a) errechnete Verbindung nicht überzeugt.

c) Stellen Sie das Gleichungssystem für eine neue Verbindung w(x) auf, das den Nachteil von a) ausgleicht. Lösung nicht berechnen.
Welche Krümmungswerte müssen in den Anschlusspunkten auftreten?

Aufgabe Versuch der Konstruktion eines Anschlussstücks

Wir betrachten einen Straßenverlauf, der durch einen oberen linken Viertelkreis k mit $x^2 + y^2 = 25$, also r=5, mit $y \geq 0$ und $x \leq 0$ beschrieben wird. Er soll in P(0|5) stetig und ohne Krümmungsruck mit dem Graphen einer Exponentialfunktion f vom Typ

$$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}, \quad x \geq 0$$

fortgesetzt werden.

a) Fertigen Sie eine Skizze an.

b) Untersuchen Sie dann, ob eine Anpassung möglich ist.
Tipp: Passen Sie für f und f' an und betrachten Sie dann k(x) für f .

Aufgabe Wir durchfahren eine Gaußsche Glockenkurve

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R.$.

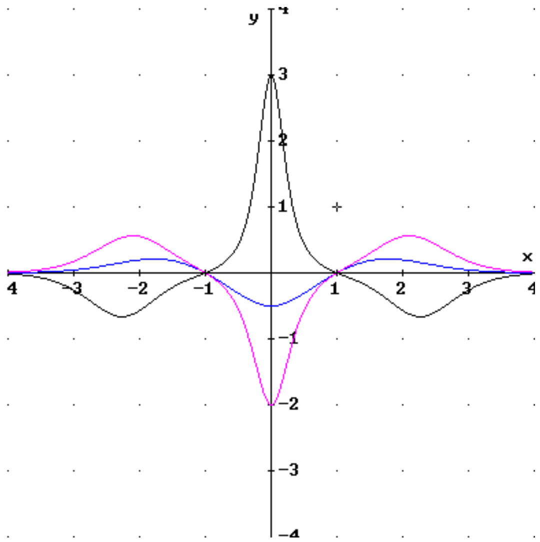
a) Berechnen Sie die Krümmungsfunktion k von f und skizzieren Sie den Graphen von f und den zugehörigen Krümmungsgraphen mit Hilfe einer kleinen Wertetabelle in ein Koordinatensystem.

b) Wir stellen uns vor, dass wir den Graphen von f durchfahren. Zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit in einem Kurvenpunkt P(x|f(x)) ermitteln wir den Krümmungsradius r=1/k(x) und arbeiten dann mit der empirisch gefundenen Beziehung

$$v = (174 \cdot R)^{0,41}$$

mit v als max. Geschwindigkeit in km/h bezogen auf den Krümmungsradius R, gemessen in m.

Berechnen Sie für x=-2, 0, 2 die max. Kurvengeschwindigkeit, wenn in Teil a) eine Einheit 100 m entspricht. Wie interpretieren Sie den Fall x=1 ?



c) Wir betrachten nun die Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot f(x), \quad x \in R$.
Berechnen Sie den Term $k_a(x)$ der zugehörigen Krümmungsfunktion. Entsprechen die Werte $k_a(0)$ der Anschauung?

d) Die Graphik zeigt die Graphen von $k_{0.5}(x),\ k_2(x)\ \textit{und}\ \ k_{-3}(x)$.
Identifizieren Sie, welcher Graph zu welchem Term gehört. Arbeiten Sie mit verschiedenen Farben. Begründen Sie ihre Entscheidung.

e) Krümmungen sind ihrer Idee nach Geschwindigkeiten. Erläutern Sie diesen Satz an einer Skizze.

Herleitung der Krümmungsformel in Standard-Schreibweise:

Als Bogenintegral-Funktion ist die Funktion g mit

$$s = g(x) = \int_{x_o}^{x} \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$$

streng monoton wachsend und deshalb umkehrbar. Mit $x = g^{-1}(s)$ folgt $\alpha(x) = \alpha\left(g^{-1}(s)\right)$. Dann gilt mit Hilfe der Umkehrregel

$$\alpha'\left(g^{-1}(s)\right) = \frac{1}{1+\left(f'(x)\right)^2} f''(x) \cdot \left(g^{-1}\right)'(s)$$

$$= \frac{f''(x)}{1+\left(f'(x)\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}} = \frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Derive-Anhang

```
 2     2
√(r  - x )

d       2     2
— √(r  - x )
dx


          x
- ────────────
       2     2
    √(r  - x )

d  ⎛         x      ⎞
—  ⎜- ──────────────⎟
```

$$dx \left(\sqrt{(r^2 - x^2)} \right)$$

$$-\frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}}$$

$$k(x) := \frac{-\dfrac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}}}{\left(1 + \left(-\dfrac{x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\mathrm{SIGN}(x^2 - r^2)}{|r|}$$

Literatur:

Richard Courant, Vorlesungen über Differentialrechnung 1, Springer 1971, S. 241ff.;
Hans-Wolfgang Henn, Realitätsnaher Mathematikunterricht mit Derive, Dümmler Verlag 1997, insbesondere S. 90f.

neveling.rg@wtal.de