

15. PROBLEMAS RESUELTOS

EJEMPLO 1.

En una granja agrícola se desea criar conejos y pollos como complemento en su economía, de forma que no se superen en conjunto las 180 horas mensuales destinadas a esta actividad. Su almacén sólo puede albergar un máximo de 1000 kilogramos de pienso. Si se supone que un conejo necesita 20 kilogramos de pienso al mes y un pollo 10 kilogramos al mes, que las horas mensuales de cuidados requeridos por un conejo son 3 y por un pollo son 2 y que los beneficios que reportaría su venta ascienden a 500 y 300 pesetas por cabeza respectivamente, hallar el número de animales que deben criarse para que el beneficio sea máximo.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de conejos.

x_2 = número de pollos.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2) = 500x_1 + 300x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$20x_1 + 10x_2 \leq 1000 \quad (\text{para la disponibilidad del pienso})$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 180 \quad (\text{para la disponibilidad de horas})$$

Finalmente, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = 500x_1 + 300x_2 \\ \text{s.a.:} & 20x_1 + 10x_2 \leq 1000 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

El siguiente paso consistirá en pasar a la forma estándar, esto es, introducimos variables de holgura en las dos restricciones verdaderas, obteniendo, una vez realizadas las simplificaciones oportunas:

$$\begin{array}{ll} \max & 500x_1 + 300x_2 \\ \text{s.a.:} & 2x_1 + x_2 + x_3^H = 100 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4^H = 180 \\ & x_1, x_2, x_3^H, x_4^H \geq 0 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3^H = 100, \quad x_4^H = 180$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
←	x_3^H	100	<div>2</div>	3	1	0
	x_4^H	180	3	2	0	1
			500	300	0	0

↑

Continuamos con las siguientes iteraciones:

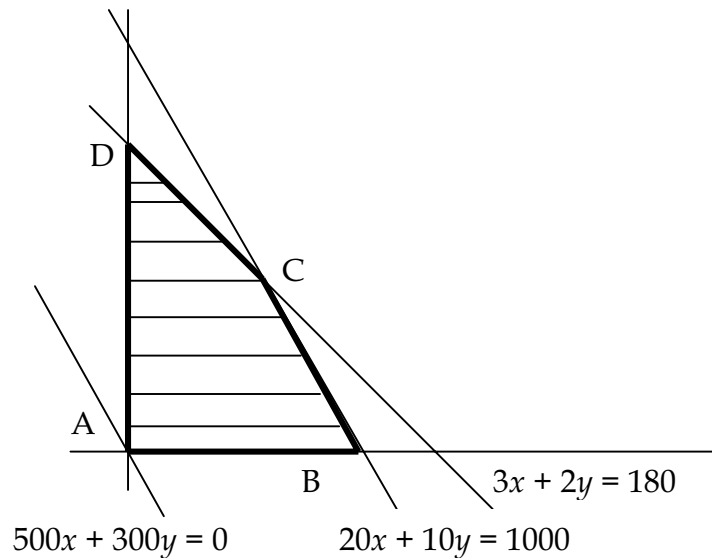
		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
←	x_1	50	1	1/2	1/2	0
	x_4^H	30	0	<div>1/2</div>	-3/2	1
			0	50	-250	0

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H
x_1	20	1	0	2	-1
x_2	60	0	1	-3	2
		0	0	-100	-100

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$x_1^* = 20$ conejos, $x_2^* = 60$ pollos, $Z^* = 28000$ pesetas.

Este problema puede ser resuelto también gráficamente:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo:

$A = (0,0)$, $B = (50,0)$, $C = (20,60)$, $D = (0,90)$

$f(A) = 0$, $f(B) = 25000$, $f(C) = 28000$, $f(D) = 27000$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 20 conejos y 60 pollos, con un beneficio máximo de 28000 pesetas.

EJEMPLO 2.

En una fábrica de dulces navideños se preparan dos surtidos para lanzarlos al mercado. El primero se vende a 450 pesetas y contiene 150 gramos de polvorones, 100 gramos de mantecados y 80 gramos de roscos de vino. El segundo surtido se vende a 560 pesetas y contiene 200 gramos de polvorones, 100 gramos de mantecados y 100 gramos de roscos de vino. Se dispone de un total de 200 kilogramos de polvorones, 130 kilogramos de mantecados y 104 kilogramos de roscos de vino. La empresa de embalajes sólo le puede suministrar 1200 cajas. ¿Cuántos surtidos de cada tipo convendría fabricar para que el beneficio sea máximo?.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de surtidos del tipo 1.

x_2 = número de surtidos del tipo 2.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2) = 450x_1 + 560x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$150x_1 + 200x_2 \leq 200000$	(para la disponibilidad de los polvorones)
$100x_1 + 100x_2 \leq 130000$	(para la disponibilidad de los mantecados)
$80x_1 + 100x_2 \leq 104000$	(para la disponibilidad de los roscos)
$x_1 + x_2 \leq 1200$	(para la disponibilidad de las cajas)

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = 450x_1 + 560x_2 \\ \text{s.a.:} & 150x_1 + 200x_2 \leq 200000 \\ & 100x_1 + 100x_2 \leq 130000 \\ & 80x_1 + 100x_2 \leq 104000 \\ & x_1 + x_2 \leq 1200 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Observamos que la restricción de la disponibilidad de cajas implica la restricción de la disponibilidad de los mantecados, por lo que esta última puede ser eliminada del problema. Teniendo en cuenta esta circunstancia, y simplificando en el resto de las restricciones, obtenemos la forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \max & 450x_1 + 560x_2 \\ \text{s.a.:} & \frac{3}{2}x_1 + 2x_2 + x_3^H = 2000 \\ & \frac{4}{5}x_1 + x_2 + x_4^H = 1040 \\ & x_1 + x_2 + x_5^H = 1200 \\ & x_1, x_2, x_3^H, x_4^H, x_5^H \geq 0 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

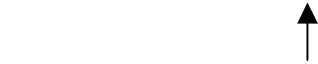
$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3^H = 2000, \quad x_4^H = 1040, \quad x_5^H = 1200$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
←	x_3^H	2000	3/2	2	1	0
	x_4^H	1040	4/5	1	0	1
	x_5^H	1200	1	1	0	0
			450	560	0	0

Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_2	1000	3/4	1	1/2	0	0
x_4^H	40	1/20	0	-1/2	1	0
x_5^H	200	1/4	0	-1/2	0	1
		30	0	-280	0	0



		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_2	400	0	1	8	-15	0
x_1	800	1	0	-10	20	0
x_5^H	0	0	0	2	-5	1
		0	0	20	-600	0

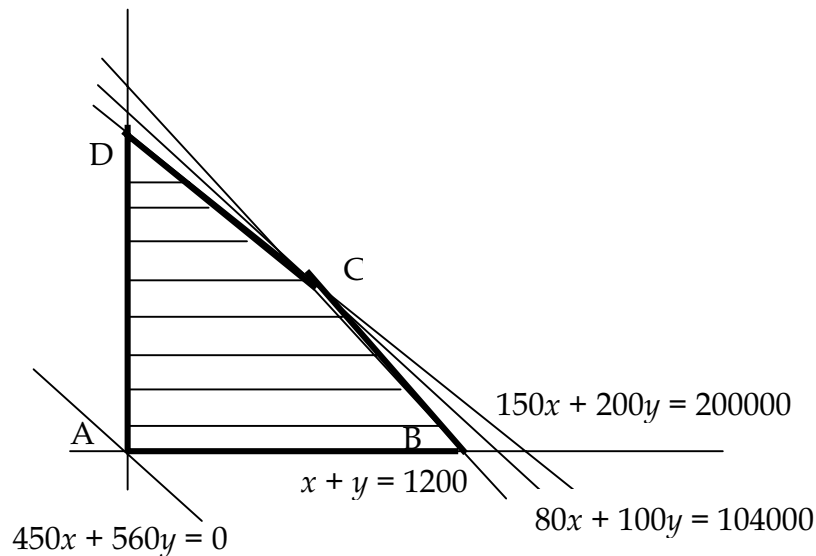


		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_2	400	0	1	0	5	-4
x_1	800	1	0	0	-5	5
x_3^H	0	0	0	1	-5/2	1/2
		0	0	0	-550	-10

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$$x_1^* = 800 \text{ surtidos tipo 1, } x_2^* = 400 \text{ surtidos tipo 2, } Z^* = 584000 \text{ pesetas.}$$

Notamos que al igual que ocurría para el ejemplo 1, este problema puede ser resuelto también gráficamente, donde identificamos las variables por comodidad como x e y (número de surtidos del tipo 1 y del tipo 2 respectivamente). El método de resolución gráfica quedará de la siguiente manera:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo. Notamos que el punto de corte de las tres rectas de las restricciones tomadas dos a dos, es el mismo punto C:

$$A = (0,0), B = (1200,0), C = (800,400), D = (0,1000)$$

$$f(A) = 0, f(B) = 540000, f(C) = 584000, f(D) = 560000$$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 800 surtidos del tipo 1 y 400 del tipo 2, con un beneficio máximo de 584000 pesetas.

EJEMPLO 3.

Cierto fabricante produce sillas y mesas para las que requiere la utilización de dos secciones de producción: la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere 1 hora de trabajo en la sección de montaje y de 2 horas en la de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de 3 horas en la sección de montaje y de 1 hora en la de pintura. La sección de montaje sólo puede estar 9 horas diarias en funcionamiento, mientras que la de pintura sólo 8 horas. El beneficio produciendo mesas es doble que el de sillas. ¿Cuál ha de ser la producción diaria de mesas y sillas para que el beneficio sea máximo?.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de sillas.

x_2 = número de mesas.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$x_1 + 3x_2 \leq 9 \quad (\text{disponibilidad de horas en la sección de montaje})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (\text{disponibilidad de horas en la sección de pintura})$$

Finalmente, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Obtenemos la forma estándar al introducir las correspondientes variables de holgura:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + 3x_2 + x_3^H = 9 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4^H = 8 \\ & x_1, x_2, x_3^H, x_4^H \geq 0 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3^H = 9, \quad x_4^H = 8$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
←	x_3^H	9	1	3	1	0
	x_4^H	8	2	1	0	1
			1	2	0	0

Continuamos con las siguientes iteraciones:

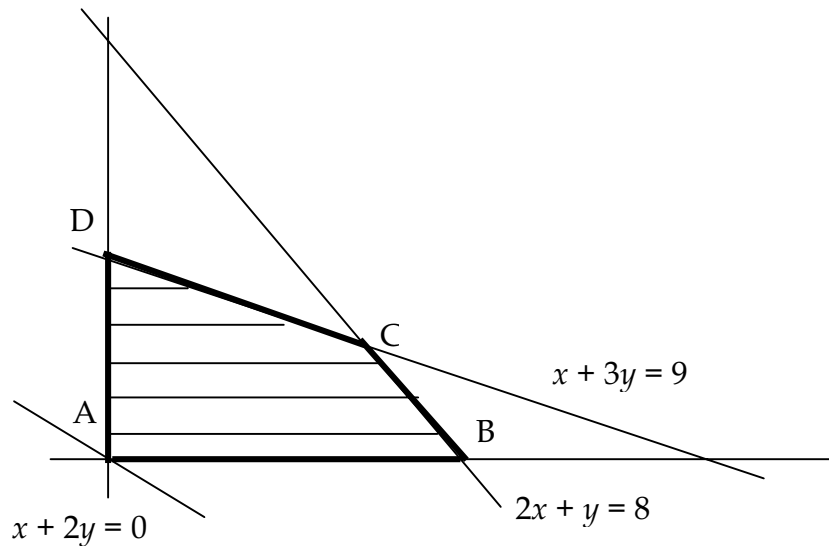
		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
←	x_2	3	1/3	1	1/3	0
	x_4^H	5	5/3	0	-1/3	1
			1/3	0	-2/3	0

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H
x_2	2	0	1	2/5	-1/5
x_1	3	1	0	-1/5	3/5
		0	0	-3/5	-1/5

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$$x_1^* = 3 \text{ sillas}, \quad x_2^* = 2 \text{ mesas}, \quad Z^* = 7 \text{ veces el valor de venta de una silla.}$$

Notamos que de nuevo este problema puede ser resuelto aplicando el método gráfico, donde identificamos las variables por comodidad como x e y (número de sillas y de mesas respectivamente). Así pues, obtenemos:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo:

$$A = (0,0), B = (4,0), C = (3,2), D = (0,3)$$

$$f(A) = 0, f(B) = 4, f(C) = 7, f(D) = 6$$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 3 sillas y 2 mesas, con un beneficio máximo de 7 veces el valor de una silla.

EJEMPLO 4.

En una fábrica se elaboran tres tipos de herramientas A, B y C. En la fábrica trabajan 3 obreros durante 8 horas diarias y un revisor, para comprobar las herramientas una vez construidas, que trabaja 1 hora diaria. Para la construcción de A se emplean 3 horas diarias de mano de obra y precisa de 6 minutos de revisión, para la construcción de B se emplean igualmente 3 horas de mano de obra y 4 minutos para su revisión, y para C es necesaria 1 hora diaria de mano de obra y 3 minutos de revisión. Por problemas de producción en la fábrica no se pueden fabricar más de 12 herramientas diarias y el precio de cada herramienta A, B y C es de 4000, 3000 y 2000 pesetas respectivamente. Hallar cuántas unidades se deben elaborar cada día de cada una de ellas para obtener un beneficio máximo.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de unidades diarias del tipo A.

x_2 = número de unidades diarias del tipo B.

x_3 = número de unidades diarias del tipo C.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4000x_1 + 3000x_2 + 2000x_3$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24 \quad (\text{disponibilidad de tiempo de mano de obra})$$

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 60 \quad (\text{disponibilidad de tiempo de revisión})$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \quad (\text{restricción de número de herramientas})$$

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\left| \begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2, x_3) = 4000x_1 + 3000x_2 + 2000x_3 \\ \text{s.a.:} & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24 \\ & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Obtenemos la forma estándar al introducir las correspondientes variables de holgura:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 4000x_1 + 3000x_2 + 2000x_3 \\
 \text{s.a.:} & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4^H = 24 \\
 & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5^H = 60 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_6^H = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4^H, x_5^H, x_6^H \geq 0
 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4^H = 24, \quad x_5^H = 60, \quad x_6^H = 12$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3	x_4^H	x_5^H	x_6^H
←	x_4^H	24	3	3	1	0	0
	x_5^H	60	6	4	3	0	1
	x_6^H	12	1	1	1	0	0
			4000	3000	2000	0	0

Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3	x_4^H	x_5^H	x_6^H
←	x_1	8	1	1	$1/3$	$1/3$	0
	x_5^H	12	0	-2	1	-2	0
	x_6^H	4	0	0	$2/3$	$-1/3$	1
			0	-1000	$2000/3$	$-4000/3$	0

		x_1	x_2	x_3	x_4^H	x_5^H	x_6^H
	x_1	6	1	1	0	$1/2$	$-1/2$
	x_5^H	6	0	-2	0	$-3/2$	1
	x_3	6	0	0	1	$-1/2$	$3/2$
			0	-1000	0	$-5000/3$	-1000

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$x_1^* = 6$ herramientas A, $x_2^* = 0$ herramientas B, $x_3^* = 6$ herramientas C,
 $Z^* = 36000$ pesetas de beneficio máximo.

EJEMPLO 5.

Un dentista emplea a tres asistentes. En los dos sillones de su consulta se realizan trabajos de endodoncia y estomatología general. Un servicio de endodoncia requiere 0.75 horas de sillón, 1.5 de trabajo de un asistente y 0.25 horas de trabajo del dentista. Un servicio de estomatología general requiere, respectivamente, 0.75 horas, 1 hora y 0.5 horas. Por cada servicio de endodoncia se obtiene un beneficio de 5000 pesetas y por cada servicio de estomatología general 4000 pesetas. Si tanto el dentista como sus asistentes trabajan 8 horas diarias, ¿cómo debe distribuirse el trabajo, entre endodoncias y sesiones de estomatología general, para que el beneficio diario sea máximo?.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = número de endodoncias.

x_2 = número de sesiones de estomatología general.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2) = 5000x_1 + 4000x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$0.75x_1 + 0.75x_2 \leq 16 \quad (\text{disponibilidad de tiempo de sillón})$$

$$1.5x_1 + x_2 \leq 24 \quad (\text{disponibilidad de tiempo de asistentes})$$

$$0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 8 \quad (\text{disponibilidad de tiempo del dentista})$$

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{|l} \max \quad f(x_1, x_2) = 5000x_1 + 4000x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 0.75x_1 + 0.75x_2 \leq 16 \\ \quad \quad 1.5x_1 + x_2 \leq 24 \\ \quad \quad 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 8 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Simplificando la función objetivo entre 1000, obtenemos la forma estándar al introducir las correspondientes variables de holgura:

$$\begin{array}{|l} \max \quad 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.:} \quad 0.75x_1 + 0.75x_2 + x_3^H = 16 \\ \quad \quad 1.5x_1 + x_2 + x_4^H = 24 \\ \quad \quad 0.25x_1 + 0.5x_2 + x_5^H = 8 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3^H, x_4^H, x_5^H \geq 0 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3^H = 16, \quad x_4^H = 24, \quad x_5^H = 8$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_3^H	16	3/4	3/4	1	0	0
x_4^H	24	3/2	1	0	1	0
x_5^H	8	1/4	1/2	0	0	1
		5	4	0	0	0

Continuamos con las siguientes iteraciones:

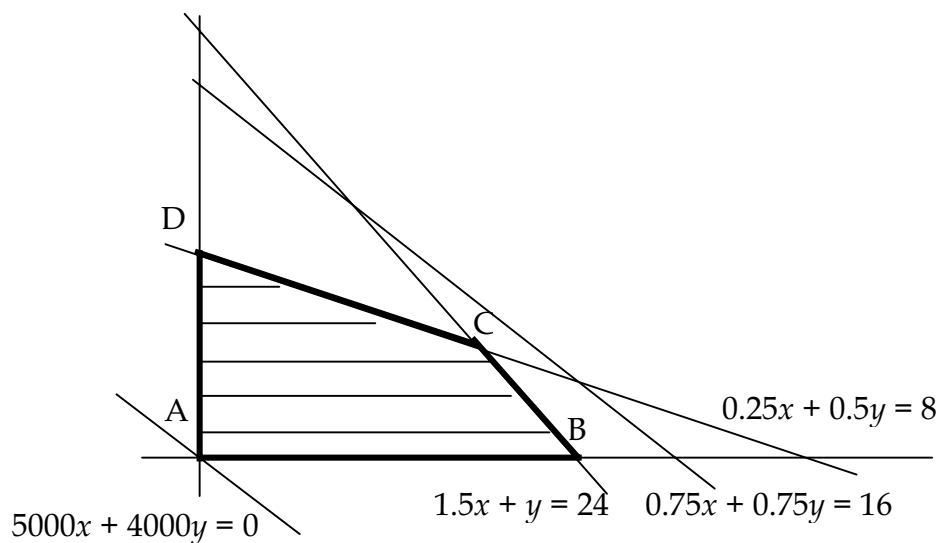
		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_3^H	4	0	$1/4$	1	$-1/2$	0
x_1	16	1	$2/3$	0	$2/3$	0
x_5^H	4	0	$1/3$	0	$-1/6$	1
		0	$2/3$	0	$-10/3$	0

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^H
x_3^H	1	0	0	1	$-3/8$	$-3/4$
x_1	8	1	0	0	1	-2
x_2	12	0	1	0	$-1/2$	3
		0	0	0	-3	-2

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$x_1^* = 8$ endodoncias, $x_2^* = 12$ sesiones de estomatología general,
 $Z^* = 88000$ pesetas de beneficio máximo.

Este problema puede ser resuelto aplicando el método gráfico:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo:

$$A = (0,0), B = (16,0), C = (8,12), D = (0,16)$$

$$f(A) = 0, f(B) = 80000, f(C) = 88000, f(D) = 64000$$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 8 endodoncias y 12 sesiones de estomatología general, con un beneficio máximo de 88000 pesetas.

EJEMPLO 6.

Una compañía de pulpa de papel posee dos regiones forestales, la región I y la región II, y dos molinos, A y B. Las capacidades de suministro mensual de madera de las regiones I y II son 120 y 250 toneladas, respectivamente. El molino A requiere por lo menos 200 toneladas de madera al mes y el B al menos 150 también al mes. Los costes de transporte en unidades monetarias por tonelada de cada región a cada molino son los siguientes: 5 de la región I al molino A, 4 desde la región I al molino B, 5 desde la región II al molino A, y 6 desde la región II al molino B. ¿Qué cantidad de madera debe transportarse desde cada región I y II a cada molino A y B de forma que se minimice el coste total de transporte?. ¿Cuál ese coste mínimo?. ¿Hay algún trayecto que no debe realizarse para conseguir dicho coste mínimo?.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_{1A} = toneladas transportadas de I a A.

x_{1B} = toneladas transportadas de I a B.

x_{2A} = toneladas transportadas de II a A.

x_{2B} = toneladas transportadas de II a B.

La función a minimizar, coste del transporte, será:

$$f(x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}) = 5x_{1A} + 4x_{1B} + 5x_{2A} + 6x_{2B}$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$\begin{array}{ll} x_{1A} + x_{1B} \leq 120 & \text{(oferta de la región I)} \\ x_{2A} + x_{2B} \leq 250 & \text{(oferta de la región II)} \\ x_{1A} + x_{2A} \geq 200 & \text{(demanda del molino A)} \\ x_{1B} + x_{2B} \geq 150 & \text{(demanda del molino B)} \end{array}$$

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B} \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\left| \begin{array}{ll} \min & f(x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}) = 5x_{1A} + 4x_{1B} + 5x_{2A} + 6x_{2B} \\ \text{s.a.:} & x_{1A} + x_{1B} \leq 120 \\ & x_{2A} + x_{2B} \leq 250 \\ & x_{1A} + x_{2A} \geq 200 \\ & x_{1B} + x_{2B} \geq 150 \\ & x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B} \geq 0 \end{array} \right.$$

Cambiando de signo a la función objetivo, e introduciendo variables de holgura y artificiales obtenemos la forma estándar:

$$\left| \begin{array}{ll} \max & -5x_{1A} - 4x_{1B} - 5x_{2A} - 6x_{2B} - Mx_7^A - Mx_8^A \\ \text{s.a.:} & x_{1A} + x_{1B} + x_3^H = 120 \\ & x_{2A} + x_{2B} + x_4^H = 250 \\ & x_{1A} + x_{2A} - x_5^H + x_7^A = 200 \\ & x_{1B} + x_{2B} - x_6^H + x_8^A = 150 \\ & x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}, x_3^H, x_4^H, x_5^H, x_6^H, x_7^A, x_8^A \geq 0 \end{array} \right.$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_{1A} = x_{1B} = x_{2A} = x_{2B} = x_3^H = x_6^H = 0$$

$$x_3^H = 120, \quad x_4^H = 250, \quad x_7^A = 200, \quad x_8^A = 150$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_{1A}	x_{1B}	x_{2A}	x_{2B}	x_3^H	x_4^H	x_5^H	x_6^H	x_7^A	x_8^A	
x_3^H	120	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_4^H	250	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
x_7^A	200	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	-M
x_8^A	150	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	-M
		-5	-4	-5	-6	0	0	0	0	-M	-M	
		M - 5	M - 4	M - 5	M - 6	0	0	-M	-M	0	0	



		x_{1A}	x_{1B}	x_{2A}	x_{2B}	x_3^H	x_4^H	x_5^H	x_6^H	x_7^A	x_8^A	
x_{1B}	120	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	-4
x_4^H	250	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
x_7^A	200	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	-M
x_8^A	30	-1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	1	-M
		-5	-4	-5	-6	0	0	0	0	-M	-M	
		-1	0	M - 5	M - 6	4 - M	0	-M	-M	0	0	



		x_{1A}	x_{1B}	x_{2A}	x_{2B}	x_3^H	x_4^H	x_5^H	x_6^H	x_8^A	
x_{1B}	120	1	1	0	0	1	0	0	0	0	-4
x_4^H	50	-1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
x_{2A}	200	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	-5
x_8^A	30	-1	0	0	1	-1	0	0	-1	1	-M
		-5	-4	-5	-6	0	0	0	0	-M	
		4 - M	0	0	M - 6	4 - M	0	-5	-M	0	



		x_{1A}	x_{1B}	x_{2A}	x_{2B}	x_3^H	x_4^H	x_5^H	x_6^H	
x_{1B}	120	1	1	0	0	1	0	0	0	-4
x_4^H	20	0	0	0	0	1	1	1	1	0
x_{2A}	200	1	0	1	0	0	0	-1	0	-5
x_{2B}	30	-1	0	0	1	-1	0	0	-1	-6
		-5	-4	-5	-6	0	0	0	0	
		-2	0	0	0	-2	0	-5	-6	

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$$x_{1A}^* = 0, x_{1B}^* = 120, x_{2A}^* = 200, x_{2B}^* = 30, Z^* = 1660 \text{ pesetas de coste mínimo.}$$

EJEMPLO 7.

Sobre dos alimentos diferentes tenemos la siguiente información por kilogramo:

Alimento	Calorías	Proteínas (gr)	Precio (ptas)
A	1000	25	60
B	2000	100	210

Hallar el coste mínimo de una dieta formada sólo por este tipo de alimentos y que al menos aporte 3000 calorías y 100 gramos de proteínas.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = kilogramos de alimento A.

x_2 = kilogramos de alimento B.

La función a minimizar, coste de la dieta, será:

$$f(x_1, x_2) = 60x_1 + 210x_2$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$$\begin{aligned} 1000x_1 + 2000x_2 &\geq 3000 && \text{(aportación mínima de calorías)} \\ 25x_1 + 100x_2 &\geq 100 && \text{(aportación mínima de proteínas)} \end{aligned}$$

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\left| \begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) = 60x_1 + 210x_2 \\ \text{s.a.:} & 1000x_1 + 2000x_2 \geq 3000 \\ & 25x_1 + 100x_2 \geq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Cambiando de signo a la función objetivo, simplificando en las restricciones, e introduciendo variables de holgura y artificiales obtenemos la forma estándar:

$$\left| \begin{array}{ll} \max & -60x_1 - 210x_2 - Mx_5^A - Mx_6^A \\ \text{s.a.:} & x_1 + 2x_2 - x_3^H + x_5^A = 3 \\ & x_1 + 4x_2 - x_4^H + x_6^A = 4 \\ & x_1, x_2, x_3^H, x_4^H, x_5^A, x_6^A \geq 0 \end{array} \right.$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = x_3^H = x_4^H = 0, \quad x_5^A = 3, \quad x_6^A = 4$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^A	x_6^A		
←	x_5^A	3	1	2	-1	0	1	0	-M
	x_6^A	4	1	4	0	-1	0	1	-M
			-60	-210	0	0	-M	-M	
			2M - 60	6M - 210	-M	-M	0	0	

Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	x_5^A		
←	x_5^A	1	1/2	0	-1	1/2	1	-M
	x_2	1	1/4	1	0	-1/4	0	-210
			-60	-210	0	0	-M	
			$\frac{M}{2} - \frac{15}{2}$	0	-M	$\frac{M}{2} - \frac{105}{2}$	0	

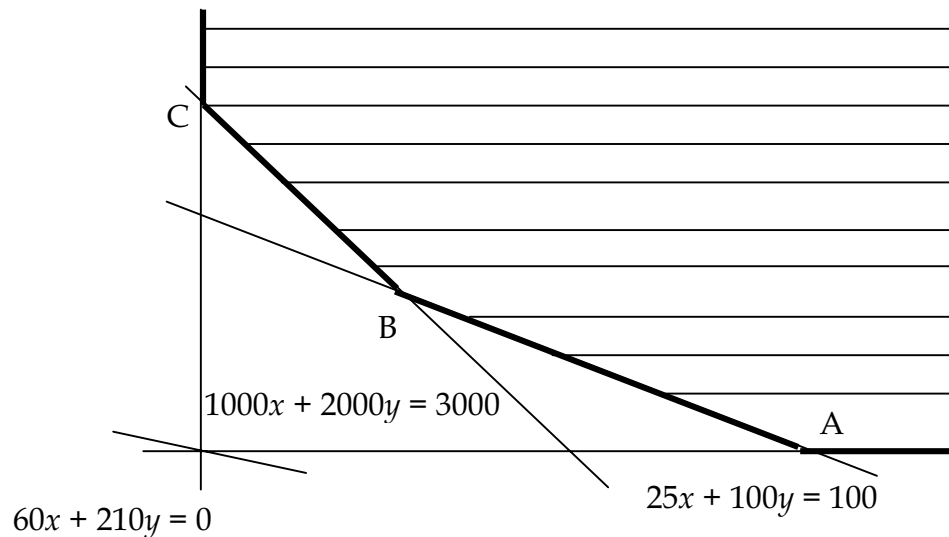
		x_1	x_2	x_3^H	x_4^H	
x_1	2	1	0	-2	1	-60
x_2	1/2	0	1	1/2	-1/2	-210
		-60	-210	0	0	
		0	0	-15	-45	

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$x_1^* = 2$ kilos de alimento A, $x_2^* = 0.5$ kilos de alimento B

$Z^* = 225$ pesetas de coste mínimo

Este problema puede ser resuelto aplicando el método gráfico, sin más que identificar a las variables x e y como las cantidades (kilogramos) de los alimentos A y B respectivamente. Así pues, obtenemos el siguiente dibujo:



Ahora, calculamos los vértices y el valor que toma en ellos la función objetivo:

$$A = (4,0), B = (2,0.5), C = (0,1.5)$$

$$f(A) = 240, f(B) = 225, f(C) = 315$$

Por tanto, obtenemos la misma solución: 2 kilogramos del alimento A y 0.5 del B, con un mínimo de 225 pesetas. Notamos que al movernos por los ejes de coordenadas que limitan la región de factibilidad, la función objetivo crece hacia infinito, por lo que en dichos puntos no puede alcanzarse el mínimo buscado.

EJEMPLO 8.

En una explotación agraria de 100 hectáreas se desean realizar diferentes labores como son: cultivar dos tipos de cereal (trigo y cebada), plantar dos tipos de frutales (perales y manzanos), y reforestar, para lo cual se plantarán pinos y chopos. Los beneficios que se obtienen por cada hectárea cultivada de trigo y cebada son respectivamente 3 y 2.5 unidades monetarias; así mismo, por cada hectárea de perales se obtienen 3.5 u.m. y por cada hectárea de manzanos, 4 u.m. Por otro lado, se obtiene una subvención por la reforestación y se otorgan 5 u.m. por cada

hectárea de pinos y 4.5 u.m. por cada hectárea de chopos. Las normas de la explotación obligan a utilizar al menos el 40% del total de la tierra en el cultivo de los cereales, y como máximo un 35% de la tierra en cualquiera de las otras dos labores, frutales o reforestación. Calcular cómo ha de repartirse la tierra para obtener un máximo beneficio.

Solución:

Definimos las variables originales como:

x_1 = hectáreas cultivadas de trigo.

x_2 = hectáreas cultivadas de cebada.

x_3 = hectáreas plantadas de perales.

x_4 = hectáreas plantadas de manzanos.

x_5 = hectáreas plantadas de pinos.

x_6 = hectáreas plantadas de chopos.

La función a maximizar, beneficio obtenido, será:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 3x_1 + 2.5x_2 + 3.5x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4.5x_6$$

Las restricciones lineales del problema se formulan como:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100$	(máximo de hectáreas)
$x_1 + x_2 \geq 0.40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$	(normas de la explotación)
$x_3 + x_4 \leq 0.35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$	(normas de la explotación)
$x_5 + x_6 \leq 0.35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$	(normas de la explotación)

Finalmente, por su definición, tenemos las restricciones de no negatividad de las variables:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

El planteamiento del problema queda, por tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 3x_1 + 2.5x_2 + 3.5x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4.5x_6 \\
 \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100 \\
 & x_1 + x_2 \geq 0.40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\
 & x_3 + x_4 \leq 0.35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\
 & x_5 + x_6 \leq 0.35(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{array}$$

Simplificando las restricciones, e introduciendo las correspondientes variables de holgura obtenemos la forma estándar:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 3x_1 + 2.5x_2 + 3.5x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4.5x_6 \\
 \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7^H = 100 \\
 & -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_8^H = 0 \\
 & -7x_1 - 7x_2 + 13x_3 + 13x_4 - 7x_5 - 7x_6 + x_9^H = 0 \\
 & -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 + 13x_5 + 13x_6 + x_{10}^H = 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7^H, x_8^H, x_9^H, x_{10}^H \geq 0
 \end{array}$$

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0, \quad x_7^H = 100, \quad x_8^H = x_9^H = x_{10}^H = 0$$

Así, obtenemos la tabla inicial del algoritmo del Simplex:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^H	x_8^H	x_9^H	x_{10}^H
x_7^H	100	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
x_8^H	0	-3	-3	2	2	2	2	0	1	0	0
x_9^H	0	-7	-7	13	13	-7	-7	0	0	1	0
x_{10}^H	0	-7	-7	-7	-7	13	13	0	0	0	1
		3	2.5	3.5	4	5	4.5	0	0	0	0



Continuamos con las siguientes iteraciones:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^H	x_8^H	x_9^H	x_{10}^H
x_7^H	100	5/2	5/2	0	0	0	0	1	-1/2	0	0
x_5	0	-3/2	-3/2	1	1	1	1	0	1/2	0	0
x_9^H	0	-35/2	-35/2	20	20	0	0	0	7/2	1	0
x_{10}^H	0	25/2	25/2	-20	-20	0	0	0	-13/2	0	1
		10.5	10	-1.5	-1	0	-0.5	0	-2.5	0	0



		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^H	x_8^H	x_9^H	x_{10}^H
x_7^H	100	0	0	4	4	0	0	1	4/5	0	-1/5
x_5	0	0	0	-7/5	-7/5	1	1	0	-7/25	0	3/25
x_9^H	0	0	0	-8	-8	0	0	0	-28/5	1	7/5
x_1	0	1	1	-8/5	-8/5	0	0	0	-13/25	0	2/25
		0	-0.5	15.3	15.8	0	-0.5	0	2.96	0	-0.84



		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^H	x_8^H	x_9^H	x_{10}^H
x_4	25	0	0	1	1	0	0	1/4	1/5	0	-1/20
x_5	35	0	0	0	0	1	1	7/20	0	0	1/20
x_9^H	200	0	0	0	0	0	0	2	-4	1	1
x_1	40	1	1	0	0	0	0	2/5	-1/5	0	0
		0	-0.5	-0.5	0	0	-0.5	-3.95	-0.2	0	-0.05

Obtenemos, por tanto, la solución óptima cuyo valor es:

$$x_1^* = 40, x_2^* = x_3^* = 0, x_4^* = 25, x_5^* = 35, x_6^* = 0, Z^* = 395 \text{ u.m. de beneficio.}$$

Esto es, se cultivarán 40 hectáreas de trigo y ninguna de cebada; únicamente se plantarán 25 hectáreas de manzanos (ninguna de perales); además, se reforestarán 35 hectáreas con pinos y ninguna con chopos. Con todo esto, se obtendrá un beneficio de 395 unidades monetarias.