# Baumbasierte Strukturen

# Baumbasierte Struktur / Organisation als Binärbaum

- Haufendateien oder sortierte Dateien → nützlich für statische Dateien
- Dateien organisiert als Binärbaum
  - Effizientes Einfügen und Löschen von Datensätzen
  - Benutzt binäre Suche
- Meist verwendete Indexstrukturen: B-, B+- und B\*-Bäume
- Speicherstruktur für eine Datei organisiert als Binärbaum:
  - Eine Menge von Knoten; Zeiger zu der Wurzel
  - Eine Liste von freien Knoten

## Organisation als Binärbaum

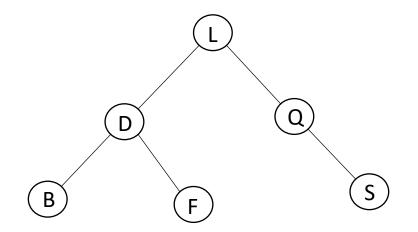
• Ein Eintrag in einem Knoten:



- S<sub>i</sub> Suchschlüssel
- D<sub>i</sub> Datensatz oder Datensatzindetifikator
- V<sub>i-1</sub> Verweis auf Knoten, die kleinere Schlüsselwerte enthalten
- V<sub>i</sub> Verweis auf Knoten, die größere Schlüsselwerte enthalten

## Organisation als Binärbaum

- Wurzel Zeiger zu dem Wurzel
- Frei Zeiger zu dem Listenkopf der freien Knoten
- Binärbaum:



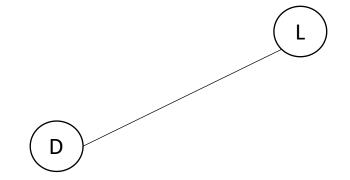
<u></u>	1
Wurzel = 1	2
Frei = 3	3
1101 – 3	4
	5
	6
	7
	8

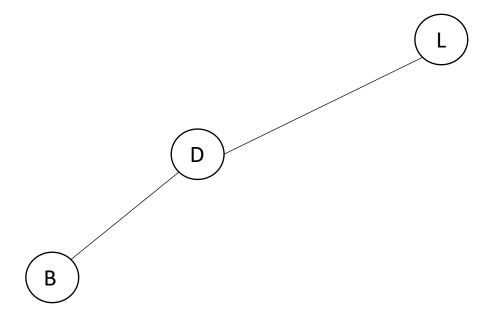
1	L	Daten <sub>L</sub>	2	4
2	D	Daten <sub>D</sub>	8	7
3			-6	NULL
4	Q	Daten <sub>Q</sub>	NULL	5
5	S	Daten <sub>s</sub>	NULL	NULL
6			-9	NULL
7	F	Daten <sub>F</sub>	NULL	NULL
3	В	Daten <sub>B</sub>	NULL	NULL
9			NULL	NULL

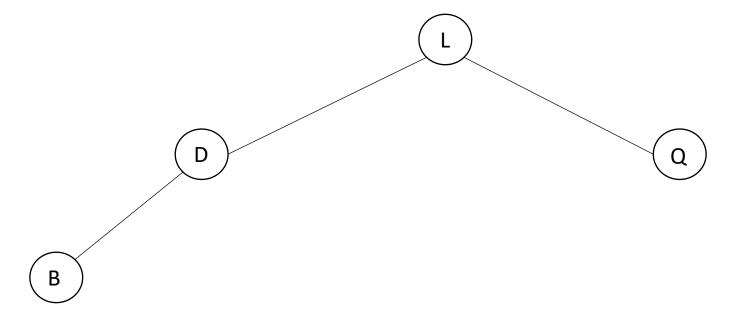
## Einfügen und Löschen von Datensätzen

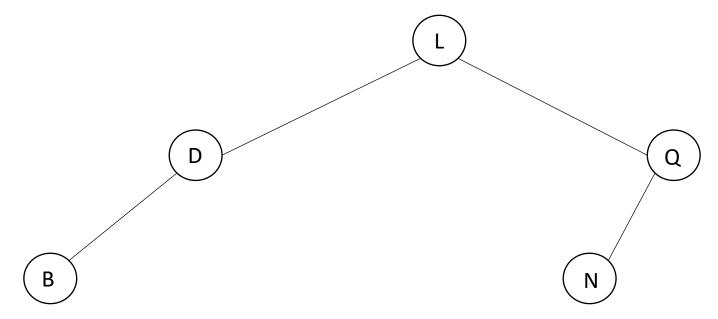
- Einen Datensatz einfügen:
  - Finde die Position wo der neue Datensatz eingefügt werden sollten
  - Speichere den Datensatz in einem freien Knoten
  - Füge die Zeiger für den neuen Knoten ein
- Einen Datensatz löschen
  - Suche den Datensatz
  - 3 Fälle:
    - Keine Kinder → Elterns Zeiger = NULL
    - 1 Kind → verbinde das Kind zu dem Elternteil
    - 2 Kinder → ersetze den Knoten mit dem nächsten Nachbarwert
  - Füge den Knoten, der frei geworden ist, zu der Liste mit freien Knoten ein

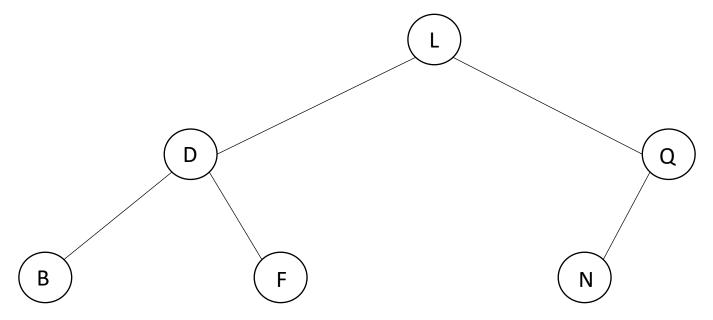


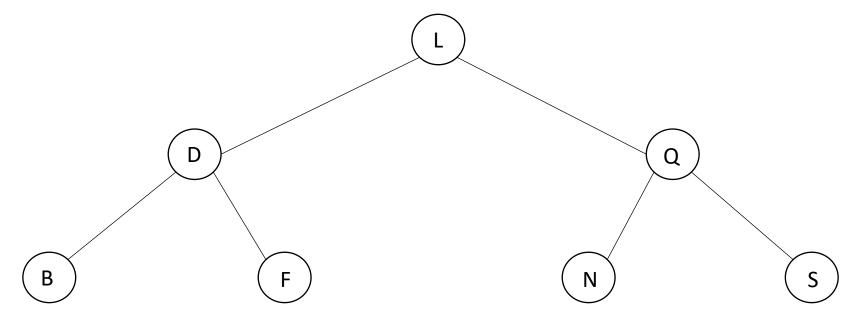


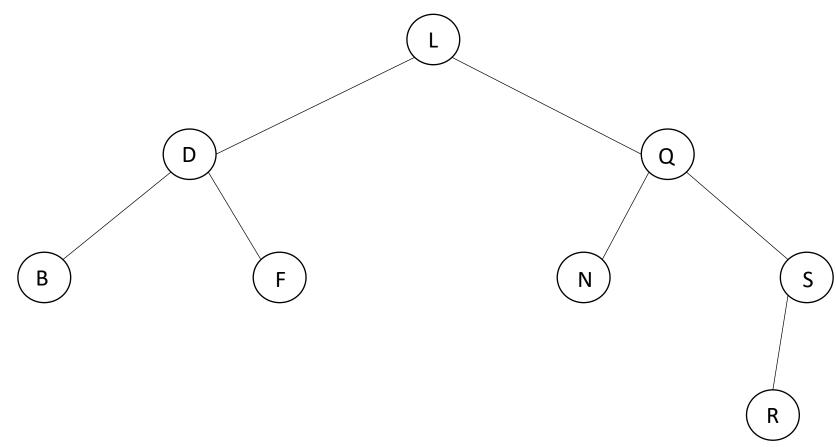


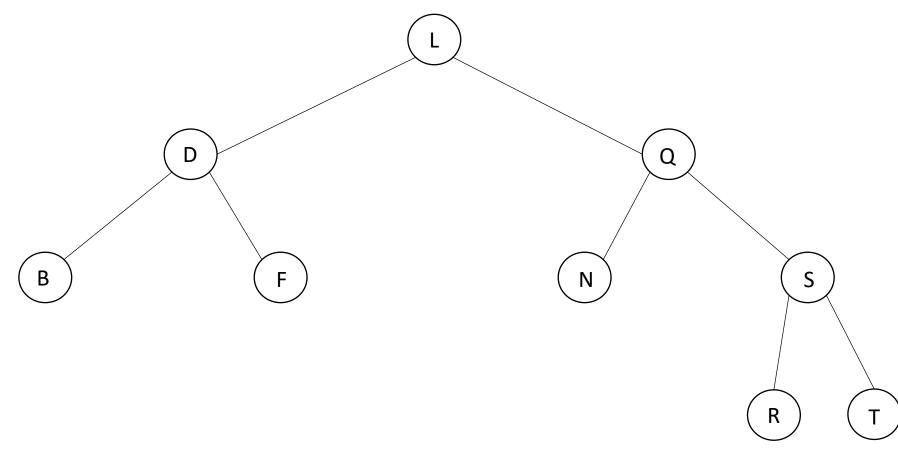


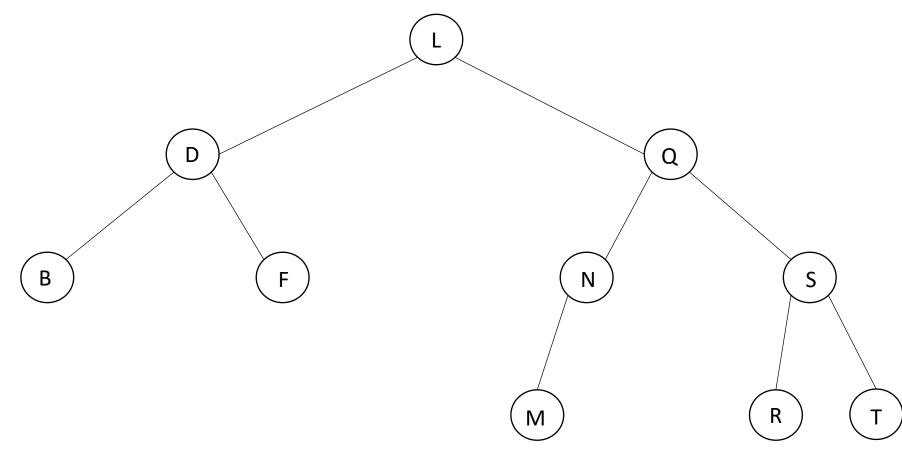


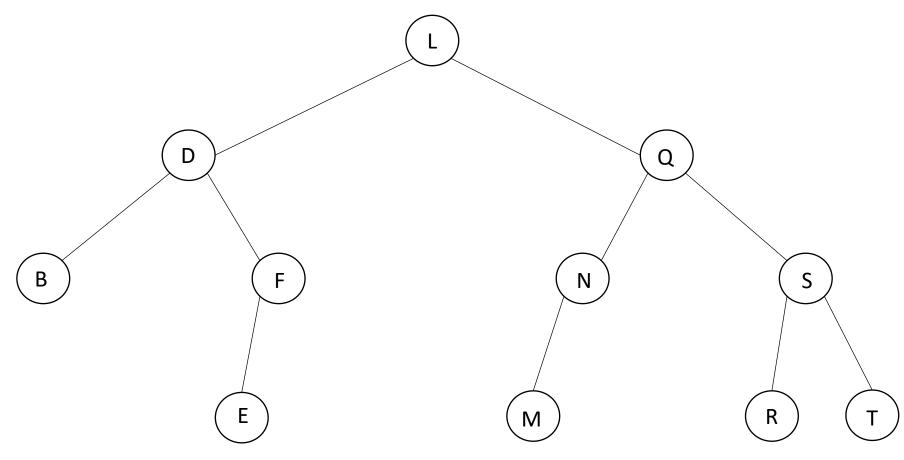


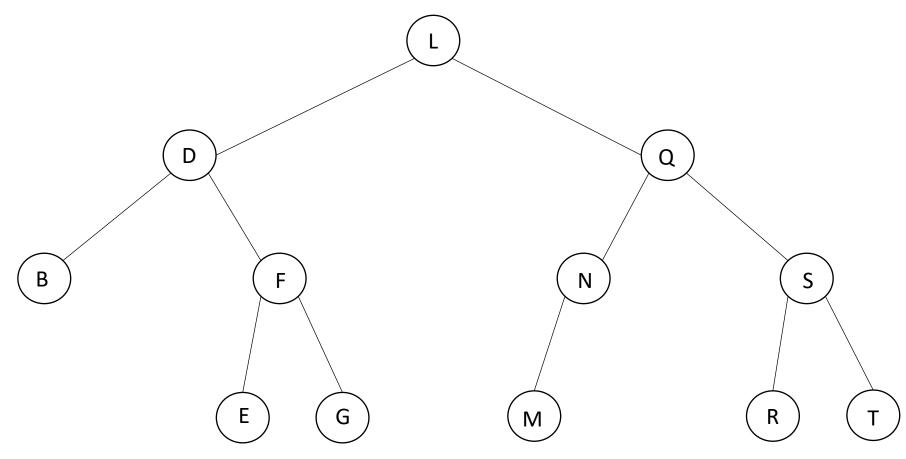


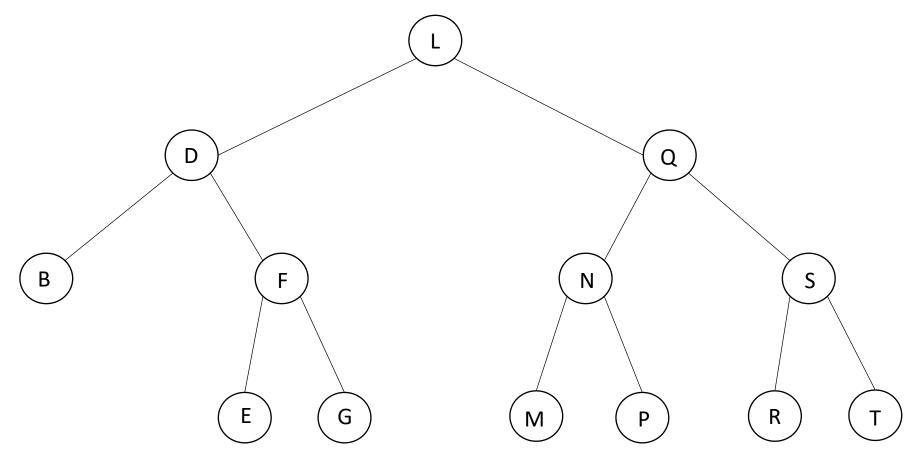


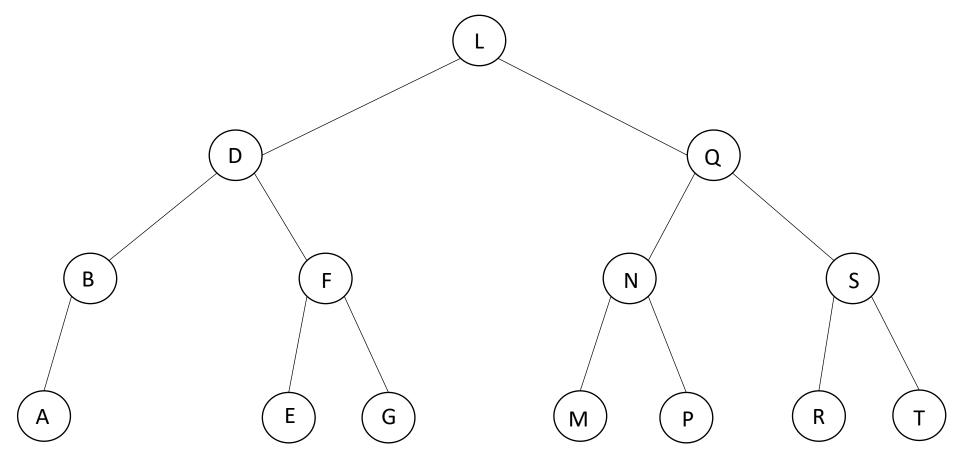


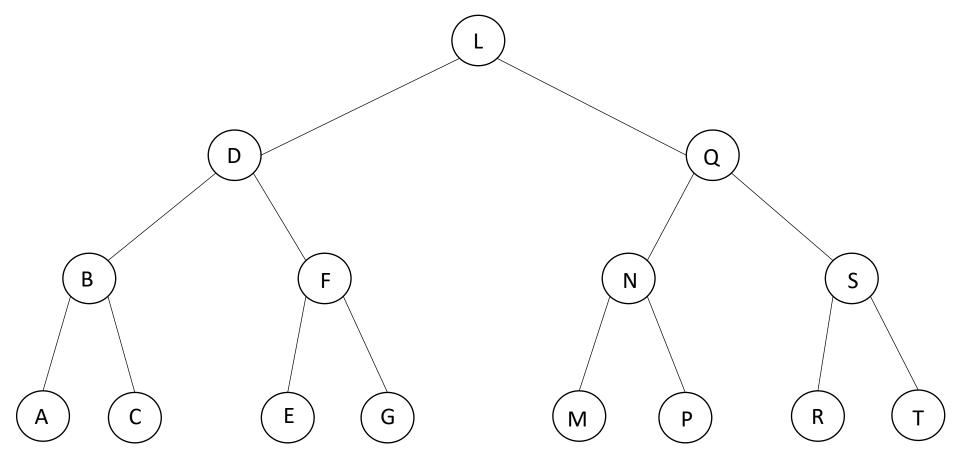




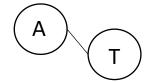


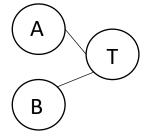


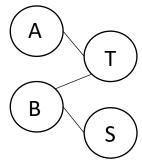


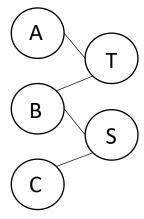


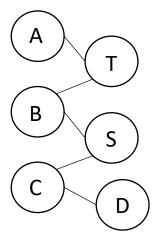


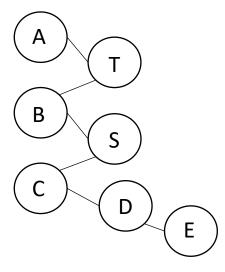


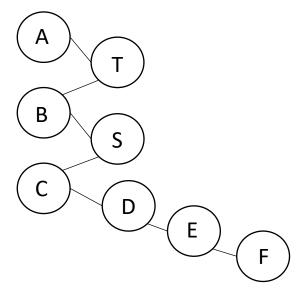


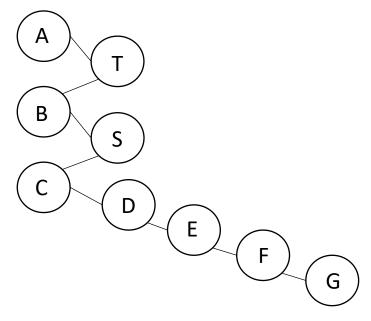


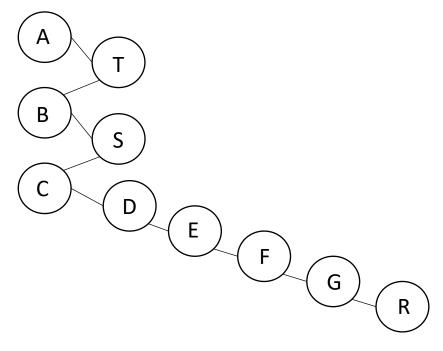


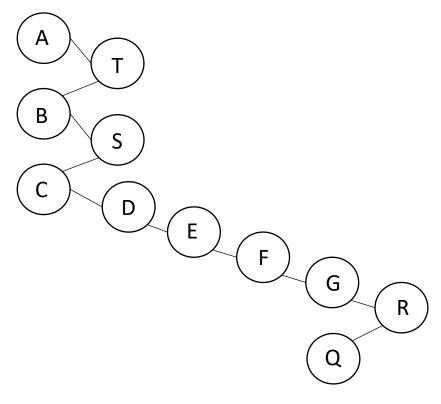


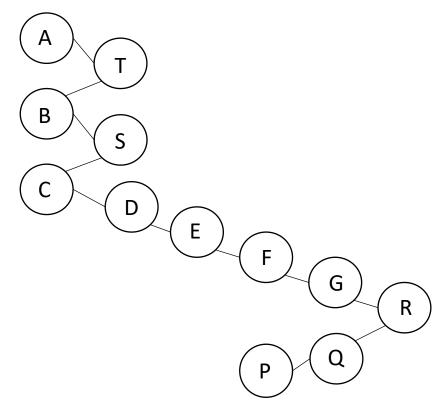


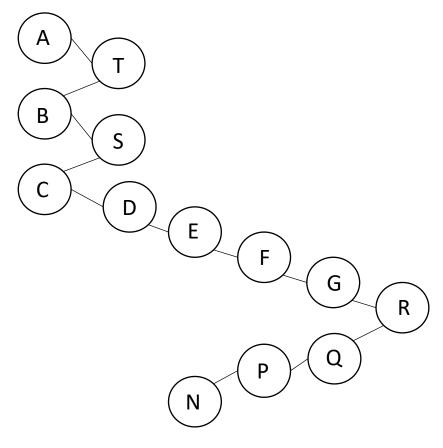


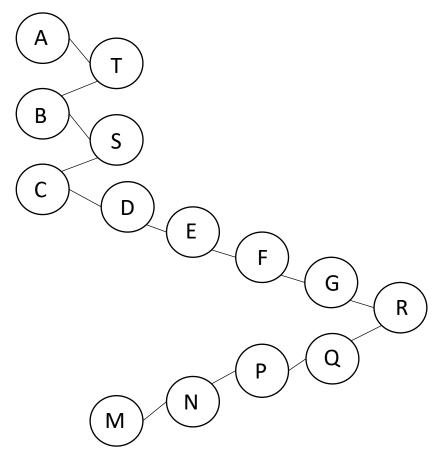






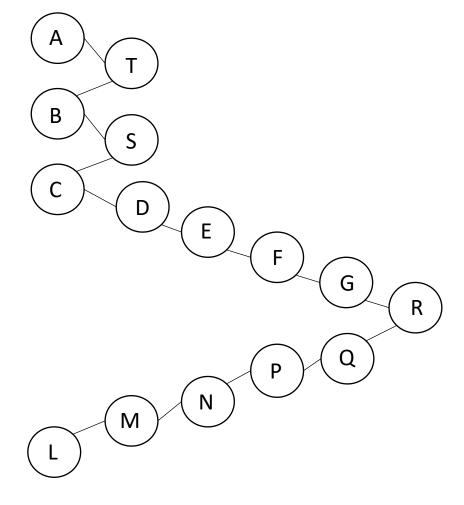






### Einfüge Anomalie in dem Binärbaum

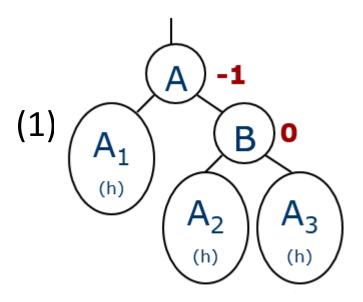
• A, T, B, S, C, D, E, F, G, R, Q, P, N, M, L

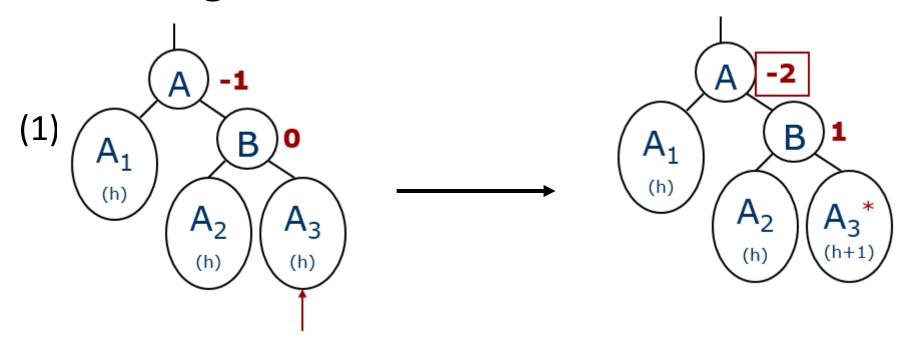


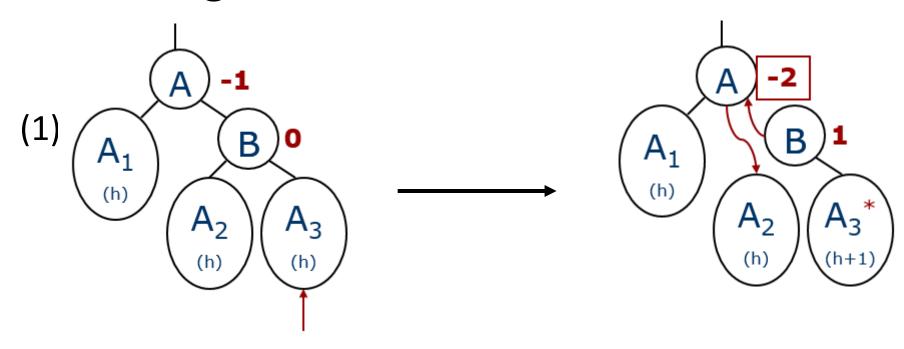
## Optimale vs. Balancierte Binärbäume

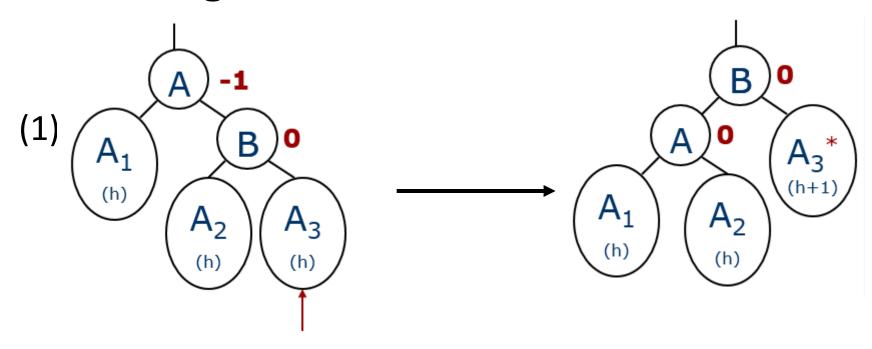
- Optimale Binärbäume:
  - Die Blätter befinden sich auf höchstens Level 2
  - Erhaltung ist aufwendig
- Balancierte Binärbäume:
  - für einen Knoten können die Höhen der zwei Teilbäume mit höchstens 1 voneinander abweichen (Höhe – Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu den Blättern)
  - Wenigere Operationen um den Binärbaum balanciert zu behalten
  - Es gibt 6 Fälle wenn der Baum unbalanciert wird nach einem Einfügen

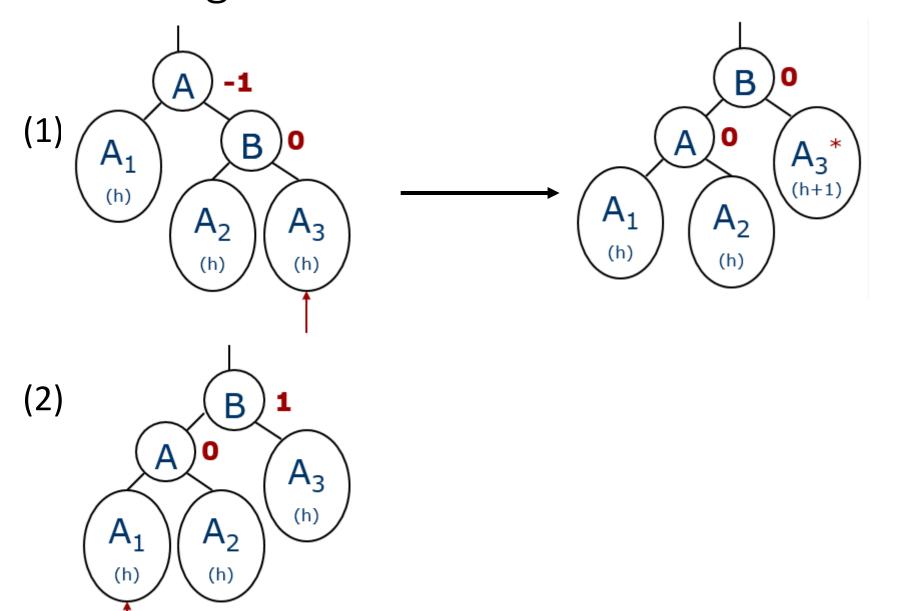
(1)

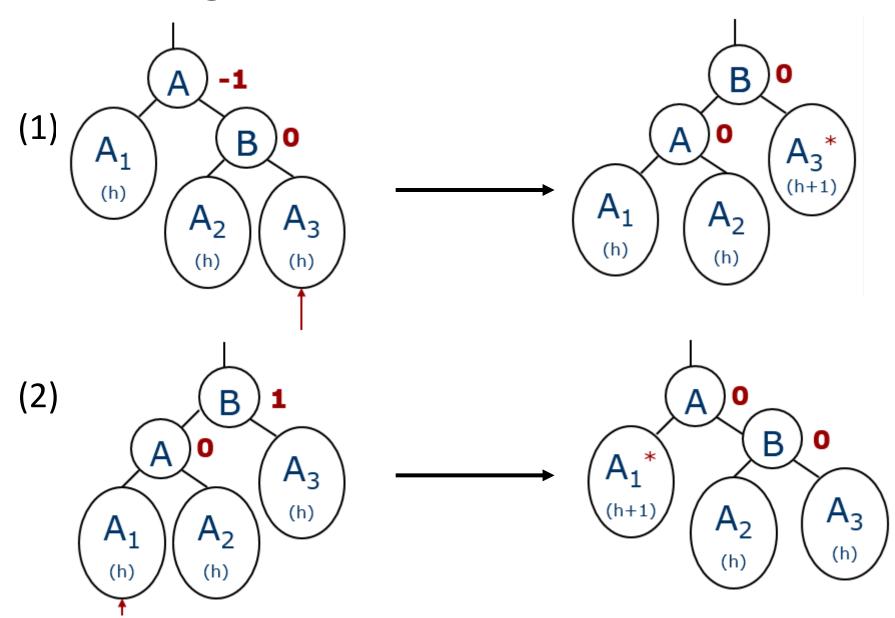




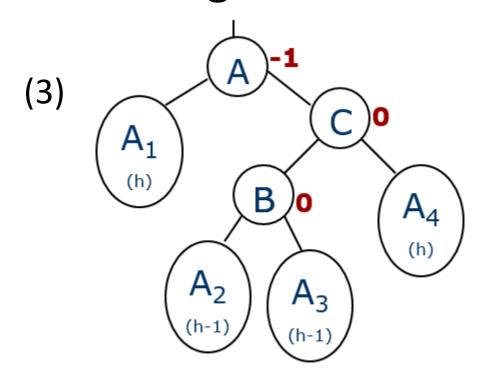


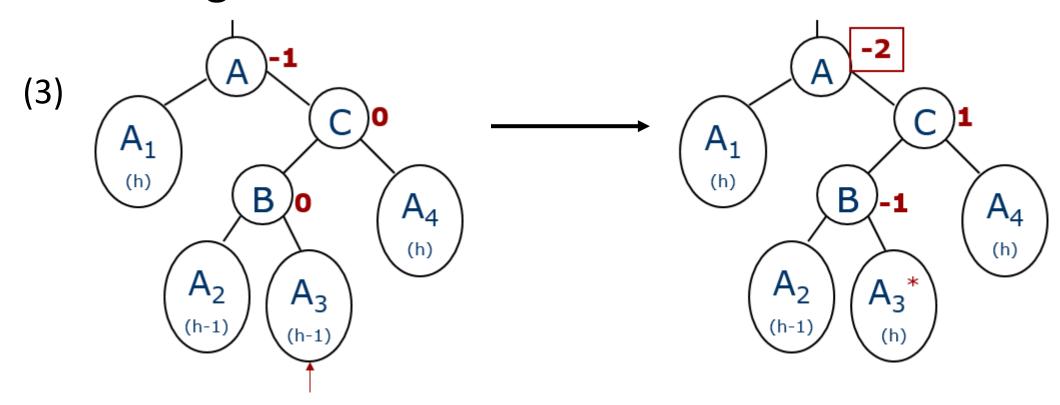


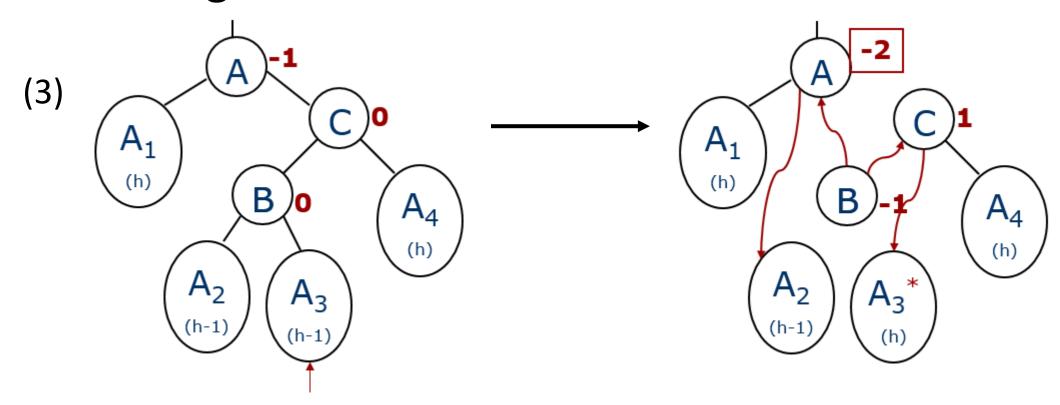


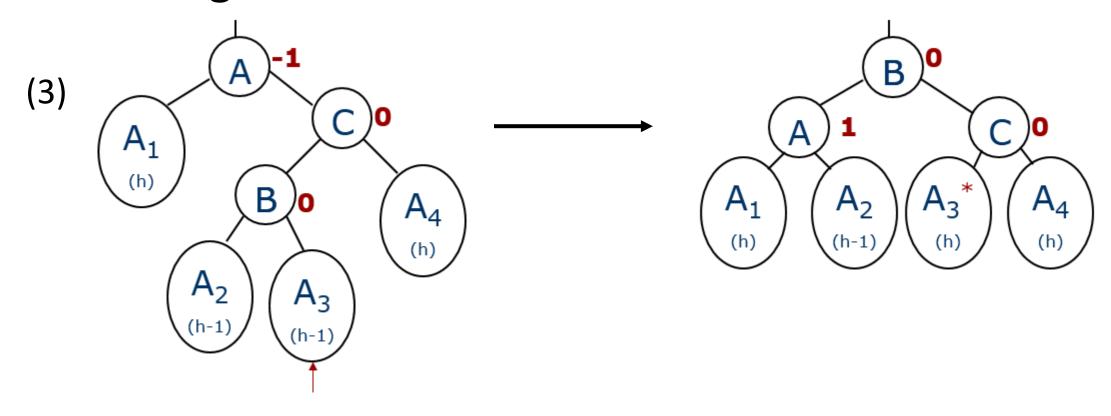


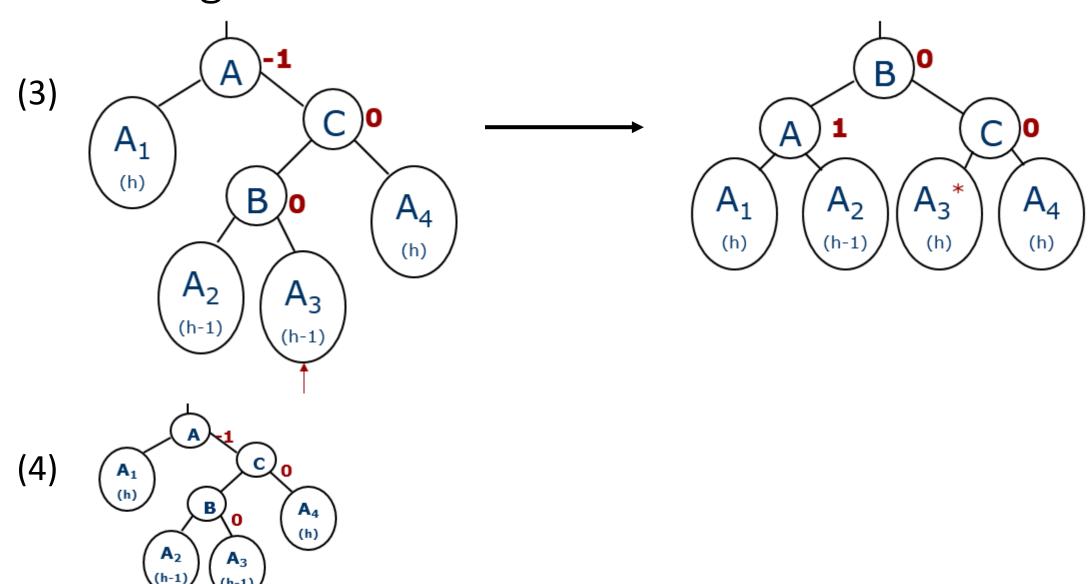
(3)

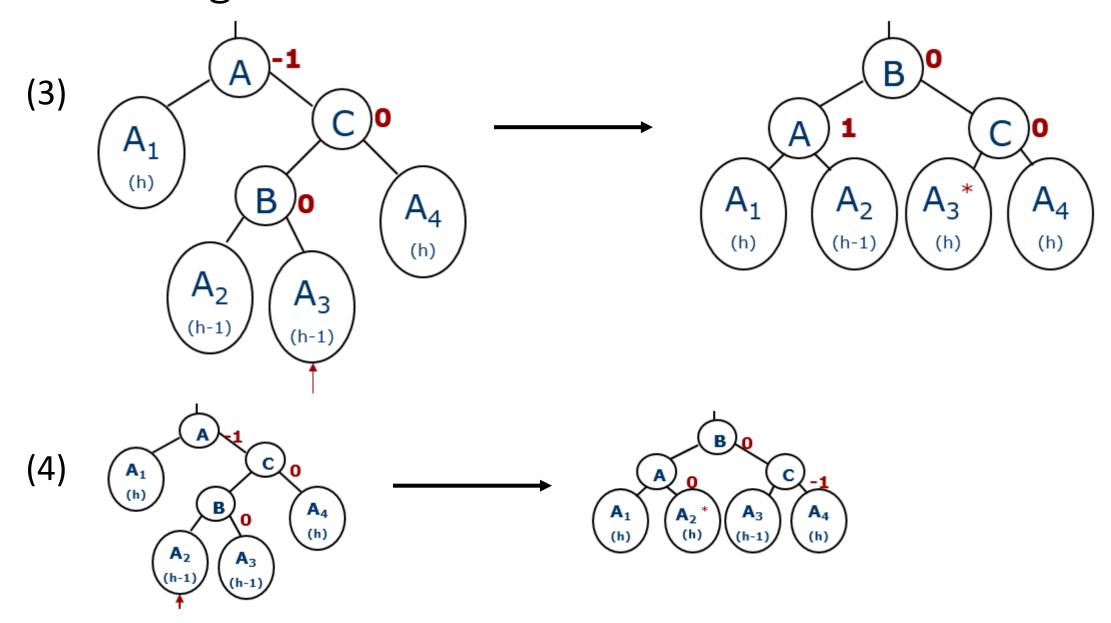






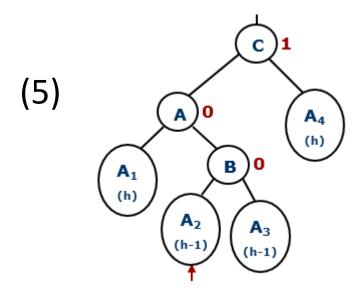




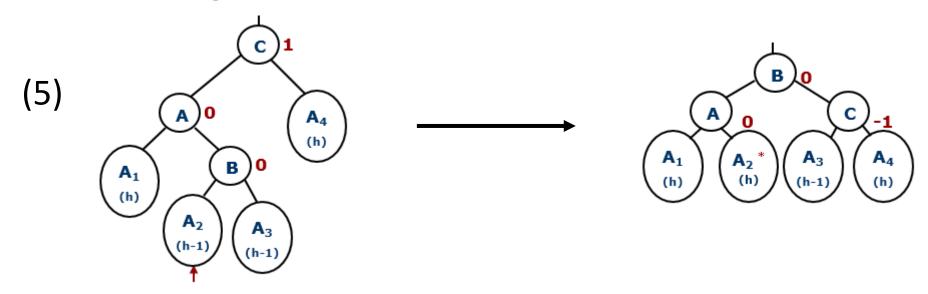


(5)

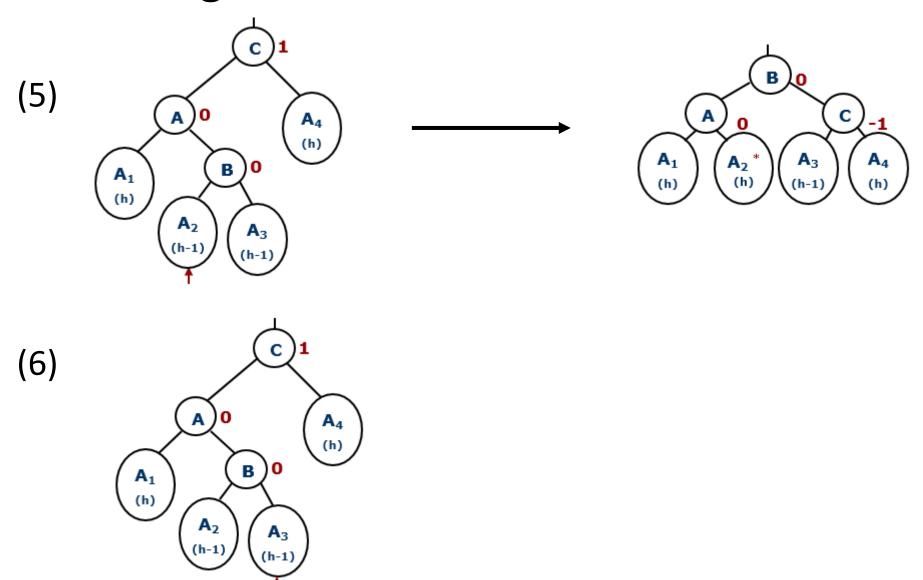
(6)

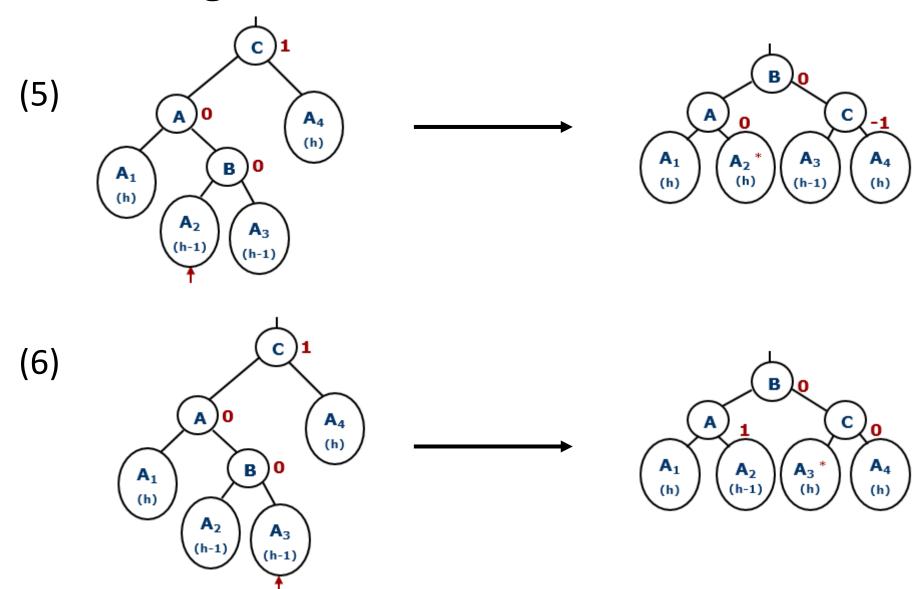


(6)



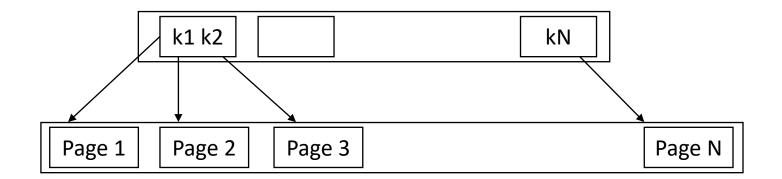
(6)





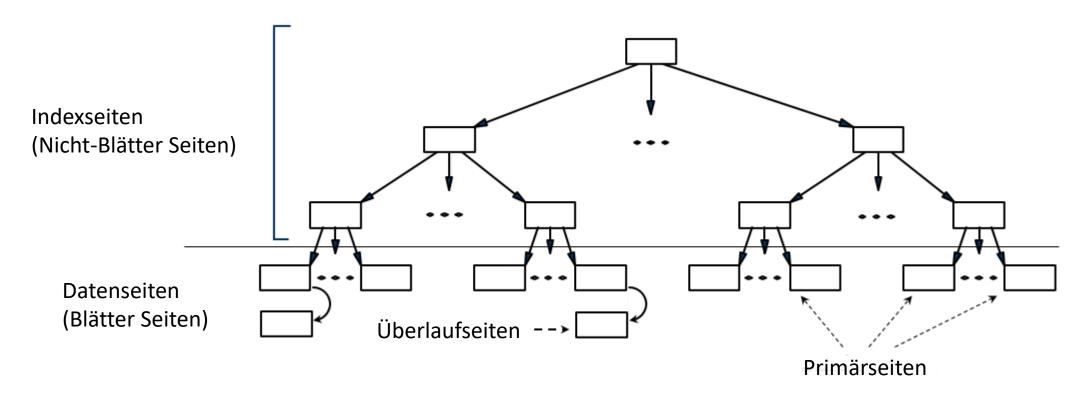
# Bereichsanfragen

- Finde alle Studenten mit Note > 8
  - Wenn die Daten sortiert sind, dann Binärsuche um der erste Student zu finden und dann Scannen, um die anderen zu finden
  - Aber: Binärsuche kann teuer sein
- Einfache Idee:
  - Index erstellen → ISAM (Index-Sequential Access Method)
  - Binärsuche auf dem Index (kleiner als die Datei selber)



# ISAM (Index-Sequential Access Method)

- Eine sehr einfache und manchmal auch sehr effektive Indexstruktur
- Wie beim Nachschlagen in einem Wörterbuch
- Die Indexdatei kann immer noch zu groß sein → wir können die Prozedur wiederholen (Index zu dem Index, usw. )



### **ISAM**

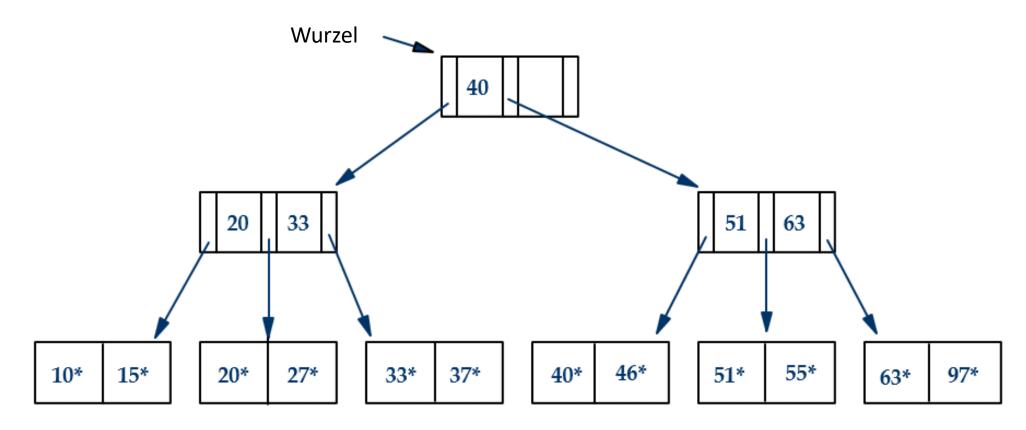
- Sowohl der Index als auch die Datensätze in den Datenseiten werden nach dem Suchschlüssel geordnet abgespeichert
- Der Index befindet sich auf Seiten, die sequentiell hintereinander auf dem Sekundärspeicher abgelegt sind
- Die Erstellung der Dateien:
  - Erst werden die Datenseiten erstellt und sequentiell abgespeichert
  - Dann die Indexseiten
  - Dann wird Speicherplatz für Überlaufseiten reserviert
- Indexeinträge der Form <Suchschlüsselwert, SeitenID>
- Statische Baumstruktur: Einfügen und Löschen von Datensätzen beeinflusst nur die Blätterseiten

### **ISAM**

- Suche eines Schlüssels:
  - beginne bei der Wurzel
  - Vergleiche den Suchschlüssel mit den Suchschlüsseln aus den Indexeinträgen und verfolge die Verweise, um eine Blattseite zu erreichen
  - Von dieser Datenseite an kann man wegen der Sortierung alle weiteren Datenseiten lesen, bis der gewünschte Datensatz gefunden wurde
  - Kosten: log<sub>F</sub>N, wobei F = Anzahl von Indexseiten, N = Anzahl von Datenseiten
- Einfügen: finde die Datenseite, wo der neue Datensatz gehören sollte und, wenn es freier Platz gibt, füge den Datensatz ein
  - Falls es kein freier Platz in der Datenseite gibt → Überlaufseite
- Löschen: finde die Datenseite und lösche den Datensatz
  - Falls eine Überlaufseite frei wird → Speicherplatz freigeben

### ISAM Baum - Beispiel

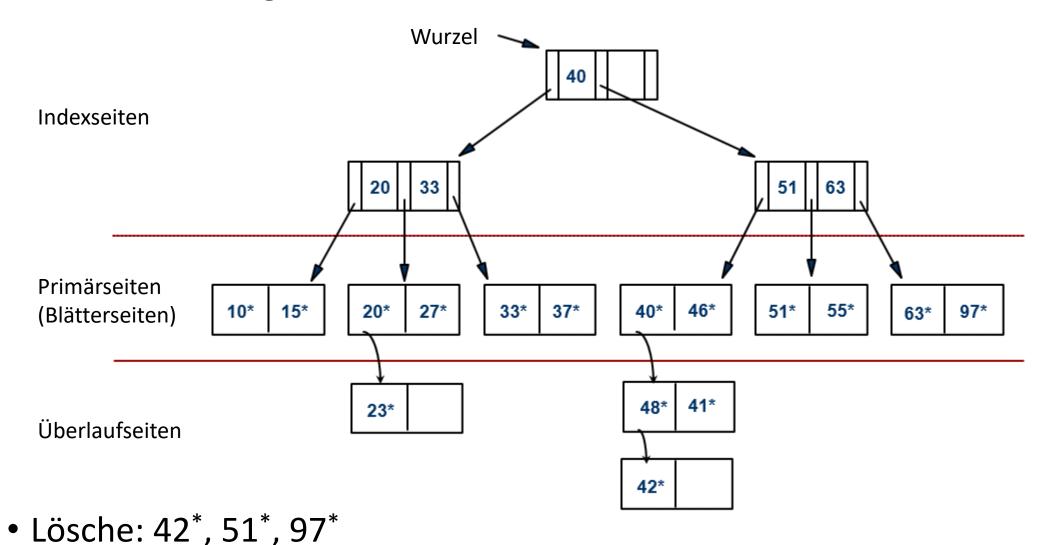
• In jedem Knoten passen zwei Einträge



• Füge folgende Werte ein: 23\*, 48\*, 41\*, 42\*

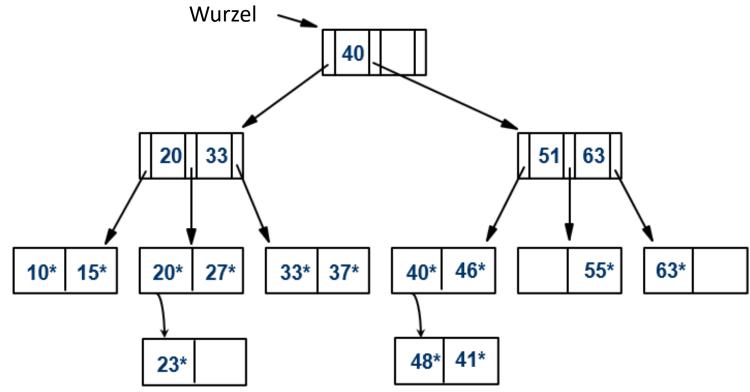
## ISAM Baum - Beispiel

Nach dem Einfügen von 23\*, 48\*, 41\*, 42\*



## ISAM Baum - Beispiel

- Nach dem Löschen von 42\*, 51\*, 97\*
- Bemerkung. Nach dem Löschen von 51\* kommt dieser Wert in den Indexseiten immer noch vor (obwohl er von den Datenseiten gelöscht wurde)

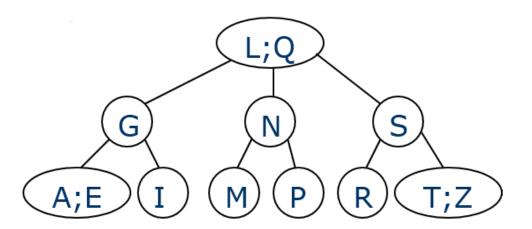


### Vor- und Nachteile von ISAM

- Es kann unbalanciert werden nach vielen Einfügen oder Löschen von Datensätzen → ungleichförmiger Suchzeit
- Datensätze in den Überlaufseiten sind meistens nicht sortiert
- Effizientes Einfügen und Löschen (keine Änderungen in den Knoten des Baumes außer den Blättern, keine Baum Balancierung)
- Effizienter gleichzeitiger Zugriff die Knoten des Baumes werden nicht gesperrt
- Geeignet für Dateien, die nicht viel geändert werden

#### B-Bäume

- Am meisten verwendete Indexstruktur
- "B" kommt von "balanced" oder "broad"
- B-Baum sortierter Baum
- Normale Binärbäume wurden als Suchstruktur für den Hauptspeicher konzipiert und eignen sich nicht für den Sekundärspeicher
- Für den Hintergrundpseicher → Mehrwegbäume, deren Knotengrößen auf die Seitenkapazität abgestimmt werden
- Ein Knoten des Baumes entspricht einer Seite des Sekundärspeichers



## Die Strutur eines Knotens mit m Einträge

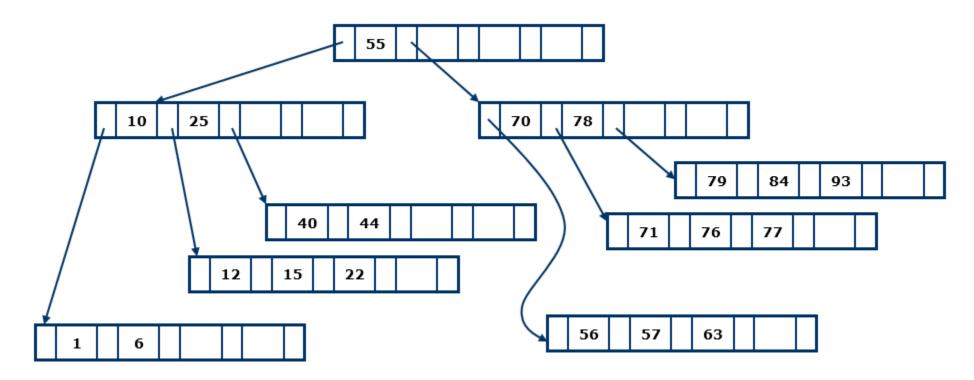
$$oxed{V_0 \mid S_1 \mid V_1 \mid S_2 \mid V_2 \mid \dots \mid V_{m-1} \mid S_m \mid V_m \mid}$$

- S<sub>i</sub> Suchschlüsselwerte
- V<sub>i</sub> Zeiger zu einem Teilbaum
- $S_1 < S_2 < ... < S_m$

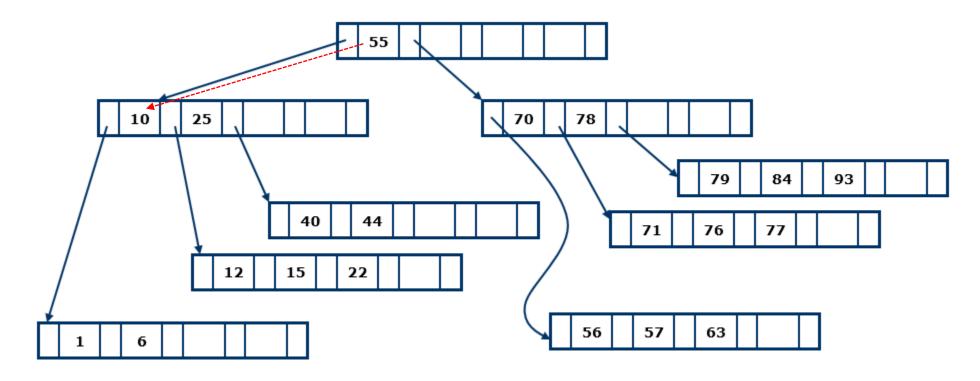
# B-Baum mit Ordnung k - Eigenschaften

- Jeder Weg von der Wurzel zu einem Blatt hat die gleiche Länge
- Jeder Knoten außer der Wurzel hat mindestens k und höchstens 2\*k Einträge
- Die Wurzel hat zwischen einem und 2\*k Einträgen
- Die Einträge werden in allen Knoten sortiert behalten
- Alle Knoten mit n Einträgen, außer den Blättern, haben n+1 Kinder
- Seien  $S_1$ ,  $S_2$ , ...,  $S_n$  die Schlüssel eines Knotens mit n+1 Kindern; die Verweise auf diese Kinder:  $V_0$ ,  $V_1$ , ...,  $V_n$ 
  - V<sub>0</sub> weist auf den Teilbaum mit Schlüssel kleiner als S<sub>1</sub>
  - $V_i$  (I = 1, ..., n-1) weist auf den Teilbaum, dessen Schlüssel zwischen  $S_i$  und  $S_{i+1}$  liegen
  - V<sub>n</sub> weist auf den Teilbaum mit Schlüssel größer als S<sub>n</sub>
- In den Blattknoten sind die Zeiger nicht definiert

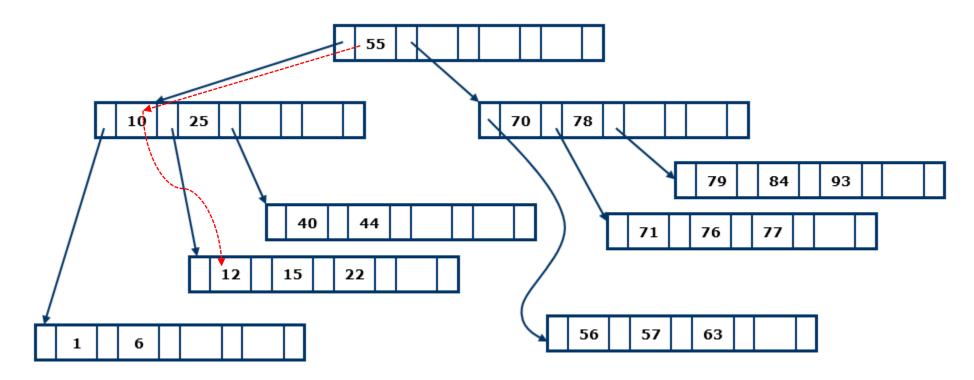
- In jedem Knoten muss man für den Pfad zwischen zwei Zeiger wählen
- Wir suchen "15":



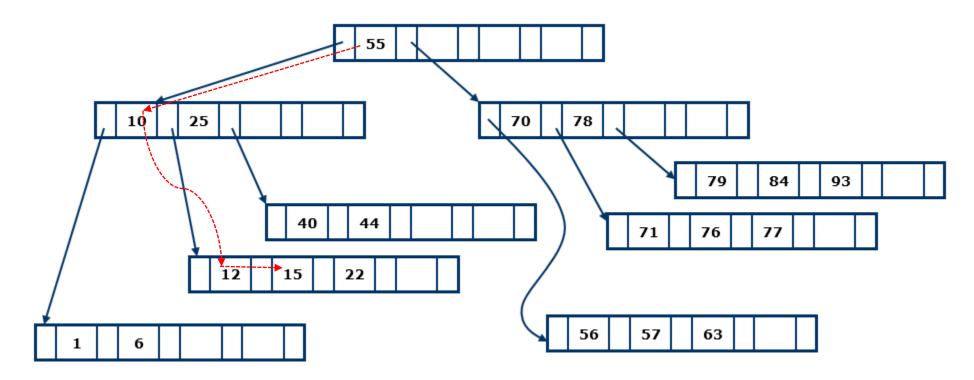
- In jedem Knoten muss man für den Pfad zwischen zwei Zeiger wählen
- Wir suchen "15":



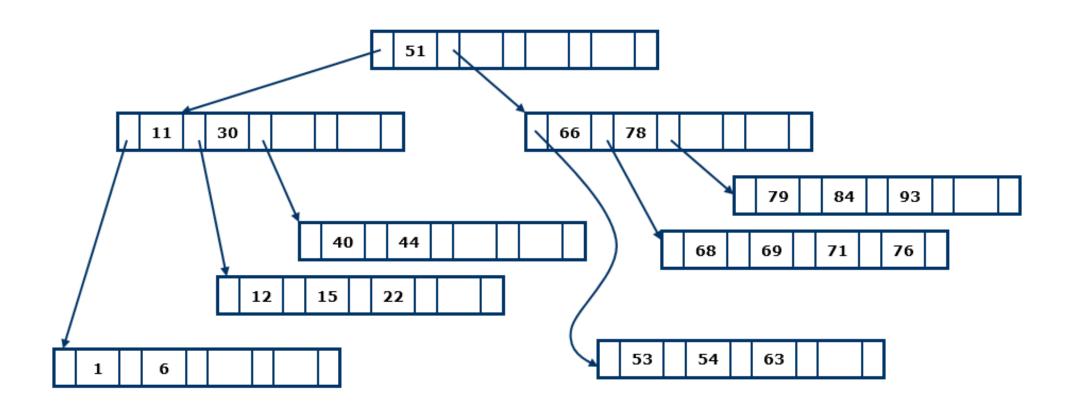
- In jedem Knoten muss man für den Pfad zwischen zwei Zeiger wählen
- Wir suchen "15":

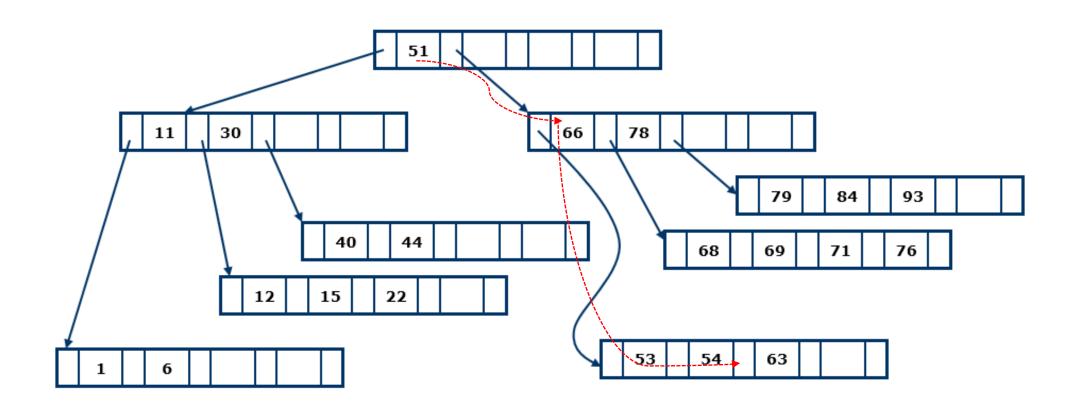


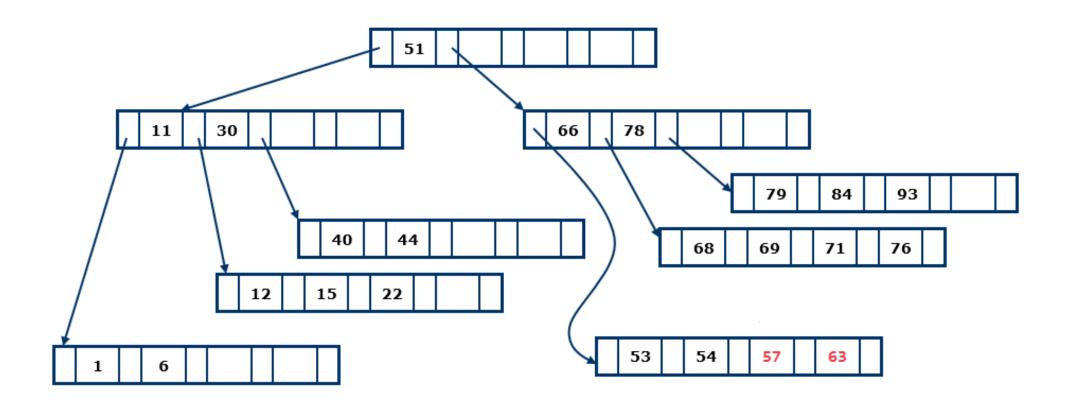
- In jedem Knoten muss man für den Pfad zwischen zwei Zeiger wählen
- Wir suchen "15":

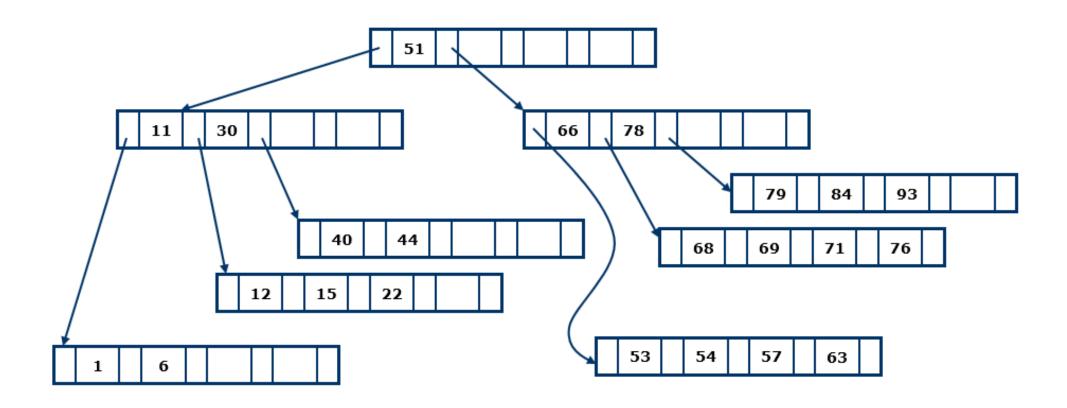


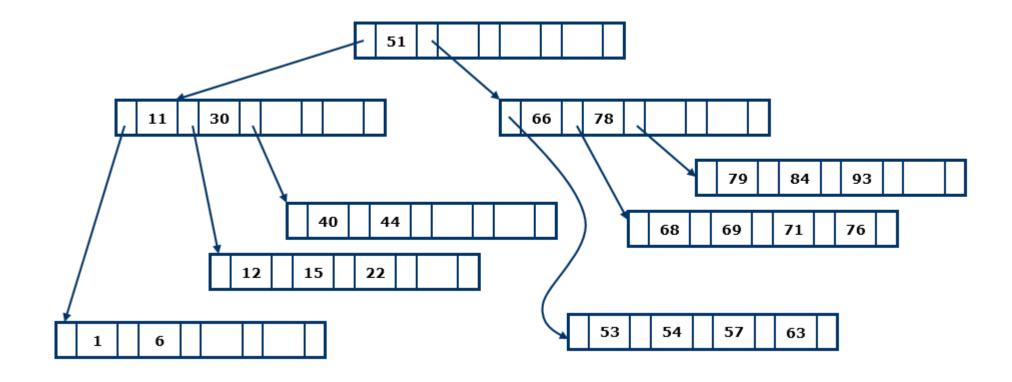
- Algorithmus für den Einfügenvorgang:
  - Führe eine Suche nach dem Schlüssel, um die Einfügestelle zu finden
  - Füge den Schlüssel dort ein
  - Ist der Knoten überfüllt, teile ihn:
    - Erzeuge einen neuen Knoten und belege ihn mit den Einträgen des überfüllten Knotens, deren Schlüssel größer ist als der des mittleren Eintrags
    - Füge den mittleren Eintrag im Vaterknoten des überfüllten Knotens ein
    - Verbinde den Verweis rechts des neuen Eintrags im Vaterknoten mit dem neuen Knoten
  - Ist der Vaterknoten jetzt überfüllt?
    - Handelt es sich um die Wurzel, so lege eine neue Wurzel an
    - Wiederhole Schritt 3 mit dem Vaterknoten

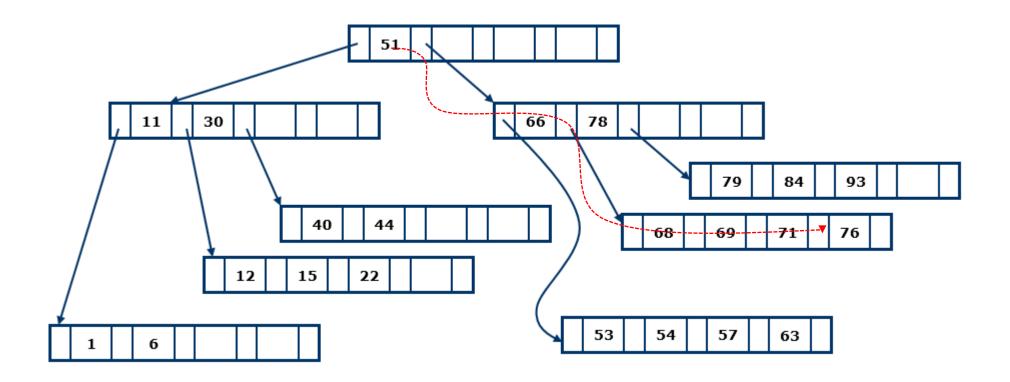


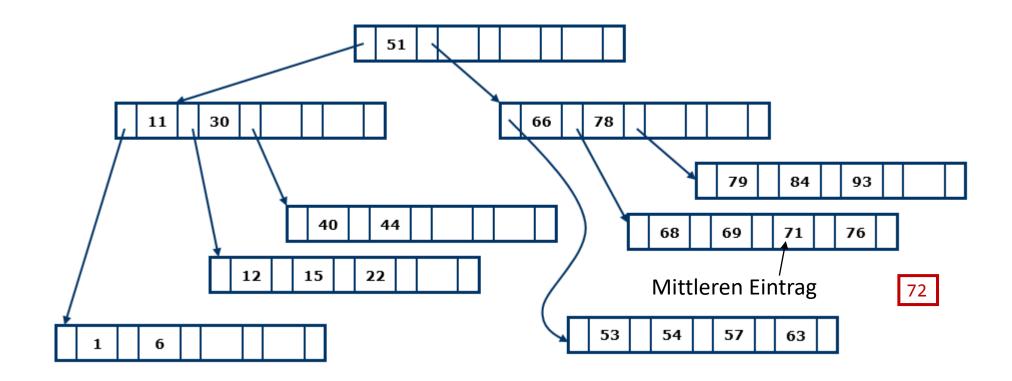


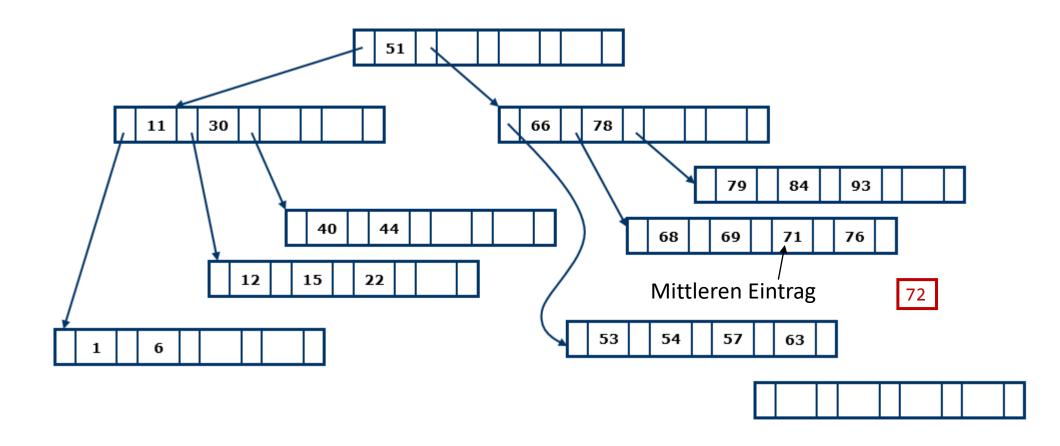


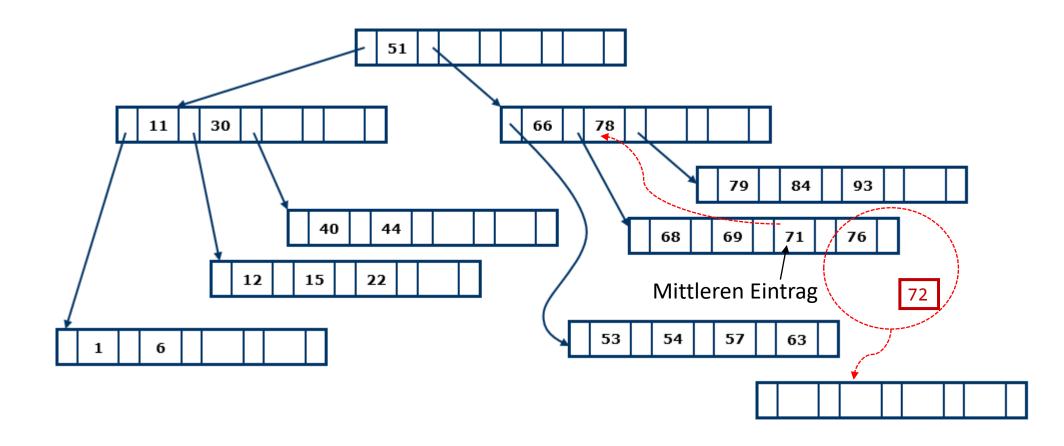


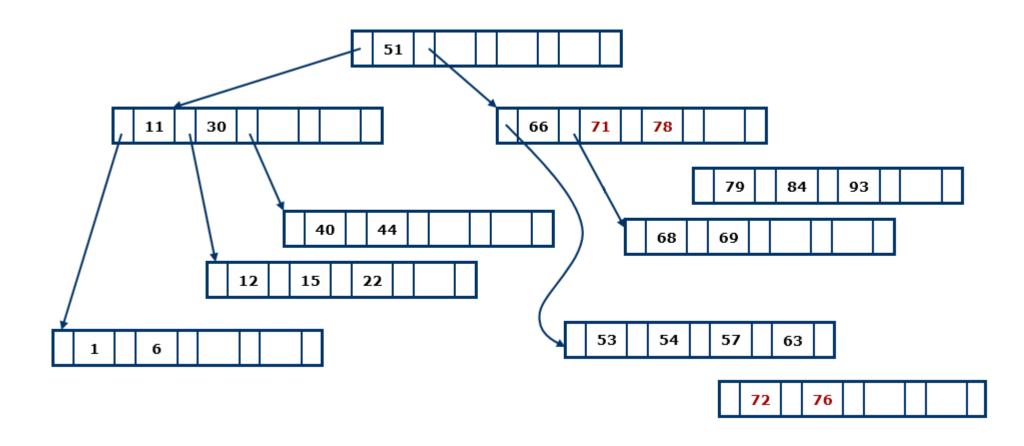


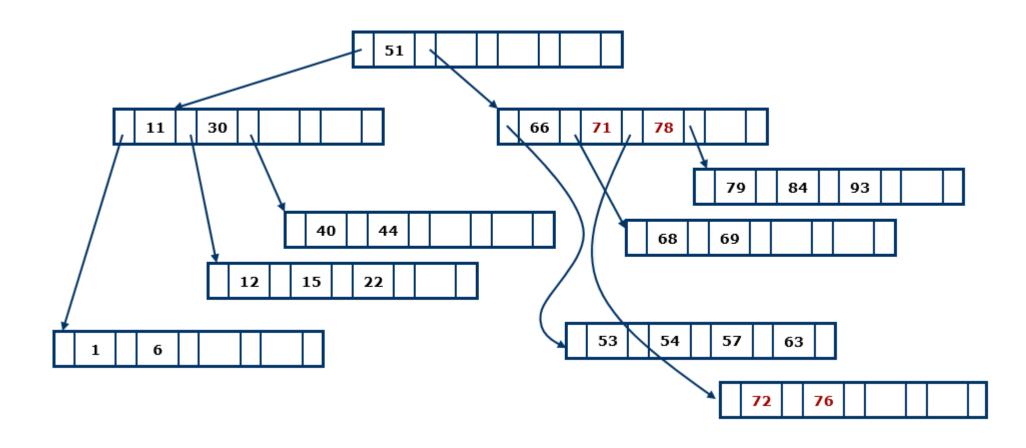










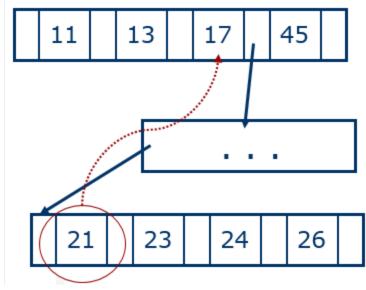


## Löschen in einem B-Baum mit Ordnung k

- Schritte beim Löschen:
  - Finde den Knoten, der den gewünschten Schlüssel enthält
  - Wenn der Knoten kein Blatt ist, dann kann man ein Schlüssel aus einem Kind anstatt dem gelöschten Schlüssel kopieren
  - Falls es einen Unterlauf gibt in dem Knoten p:
    - Balance wenn einer der Nachbar genügend Suchschlüssel hat ( > k ),
      wird seine Suchschlüsselfolge mit der von p ausgeglichen
    - Merge p wird mit dem Nachbarn zu einem einzigen Knoten verschmolzen

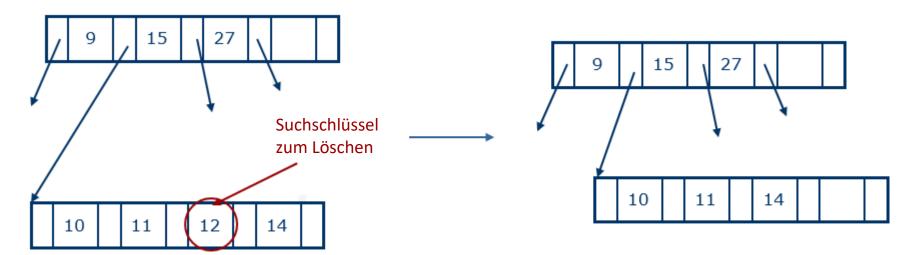
## Algorithmus für Löschen in dem B-Baum mit Ordnung k

- 1. Finde den Schlüssel, der gelöscht werden muss
  - Wenn sich der Schlüssel in einem inneren Knoten (Nichblattknoten) befindet, dann:
    - Ersetze den Schlüssel mit seinem Nachfolger/ größeren Nachbar (der Schlüssel am weitesten links aus dem Blatt am weitesten links aus dem rechten Teilbaum)



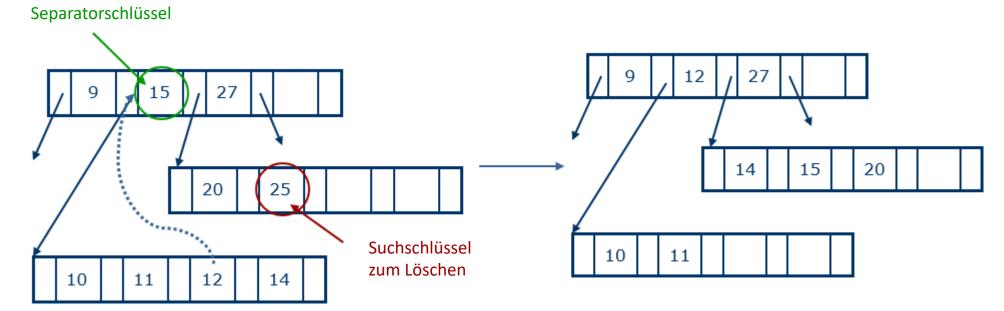
## Algorithmus für Löschen in dem B-Baum mit Ordnung k

- 2. Wiederhole diesen Schritt bis man zu Fall A oder Fall B/C gelangt
  - A. Wenn sich der Suchschlüssel, den wir grade löschen wollen, in der Wurzel befindet **oder** die Anzahl der gebliebenen Schlüssel ≥ k ist:
    - Lösche den gewünschte Suchschlüssel
    - Die Zeiger zu den Suchschlüssel in dem Knoten müssen neu angeordnet werden
    - Algorithmus wird beendet



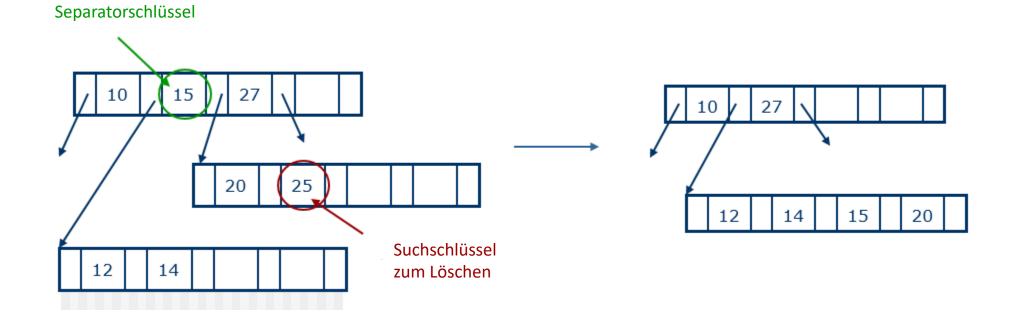
## Algorithmus für Löschen in dem B-Baum mit Ordnung k

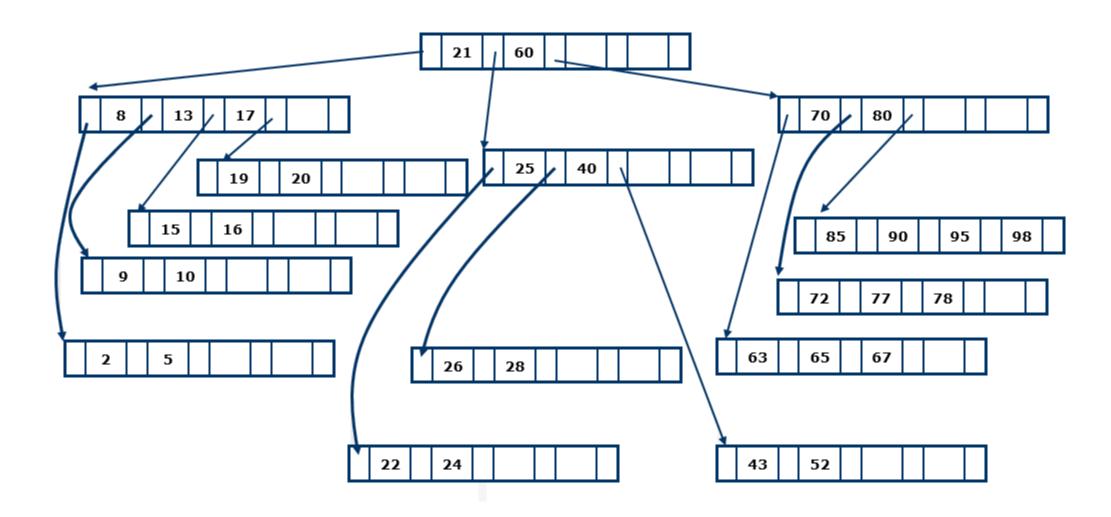
- B. Wenn die Anzahl der gebliebenen Suchschlüsseln < k ist und ein Nachbarknote > k Suchschlüssel enthält → Balance
  - Die Schlüssel der zwei Knoten und der Separatorschlüssel aus dem Elternteil werden gleichmäßig umverteilt
  - Wähle den mittleren Schlüssel um den Separatorschlüssel in dem Elternteil (übergeordnete Knoten) zu ersetzen
  - Algorithmus wird beendet

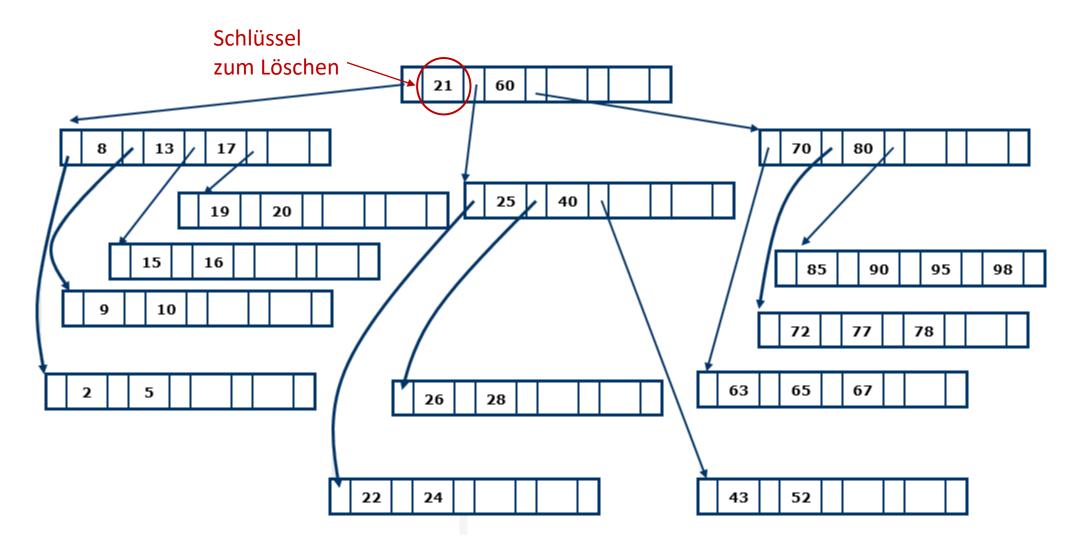


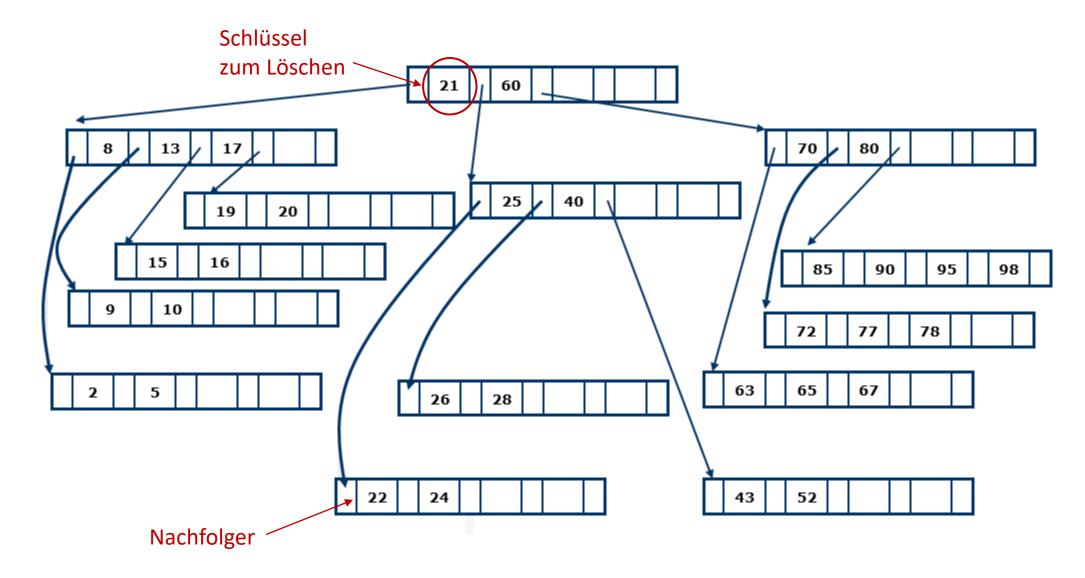
# Algorithmus für Löschen in dem B-Baum mit Ordnung k

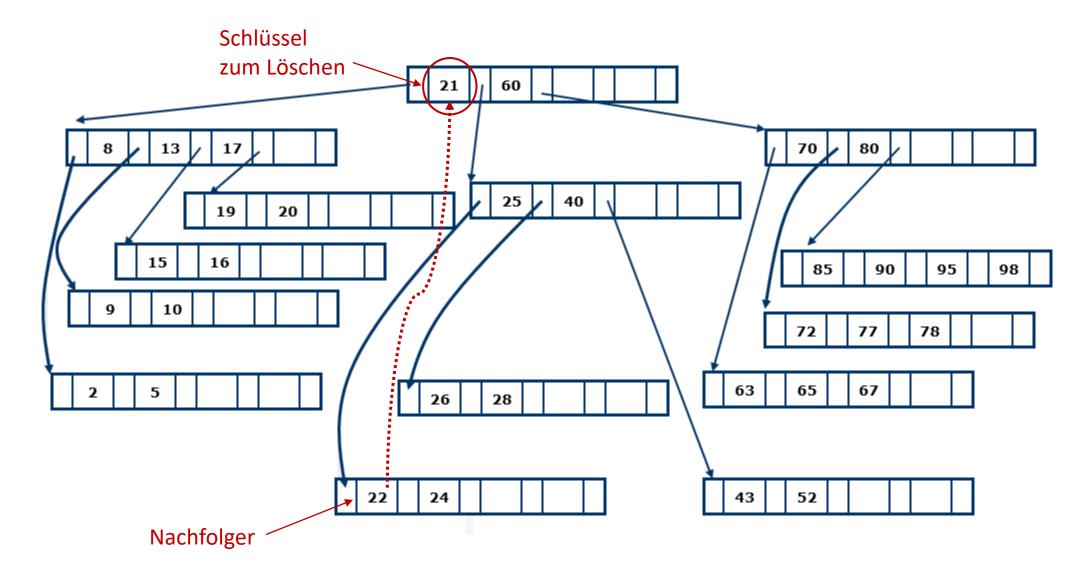
- C. Wenn die Anzahl der gebliebenen Suchschlüsseln zusammen mit der Anzahl der Suchschlüsseln in jeder Nachbarknote < k ist → *Merge* 
  - Verschmelze die zwei Knoten zusammen mit dem Separatorschlüssel
  - Wiederhole Schritt 2. für den übergeordneten Knoten
  - Wenn der übergeordnete Knoten der Wurzel ist und keine Schlüssel mehr enthält, dann wird der aktuelle Knoten zum Wurzel

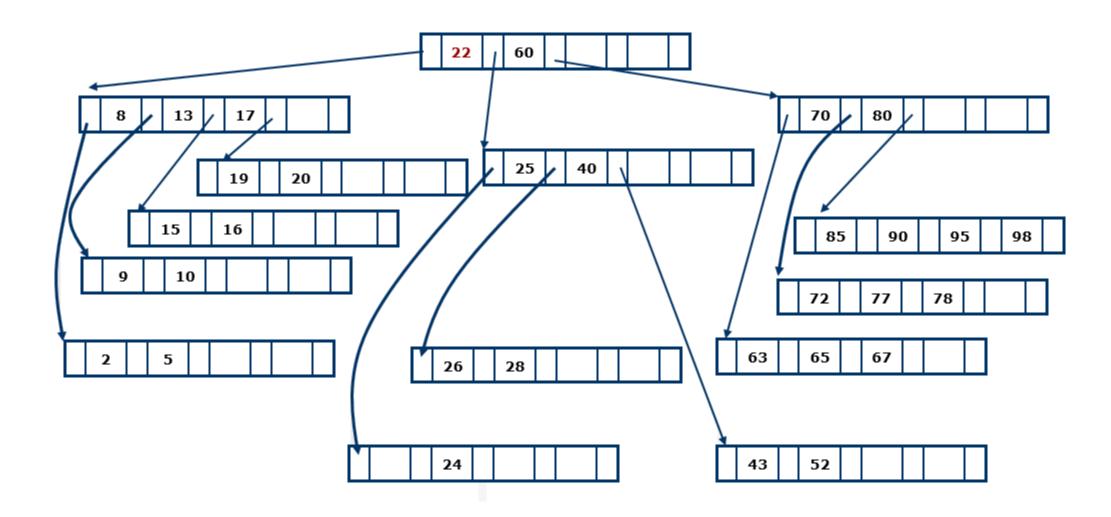


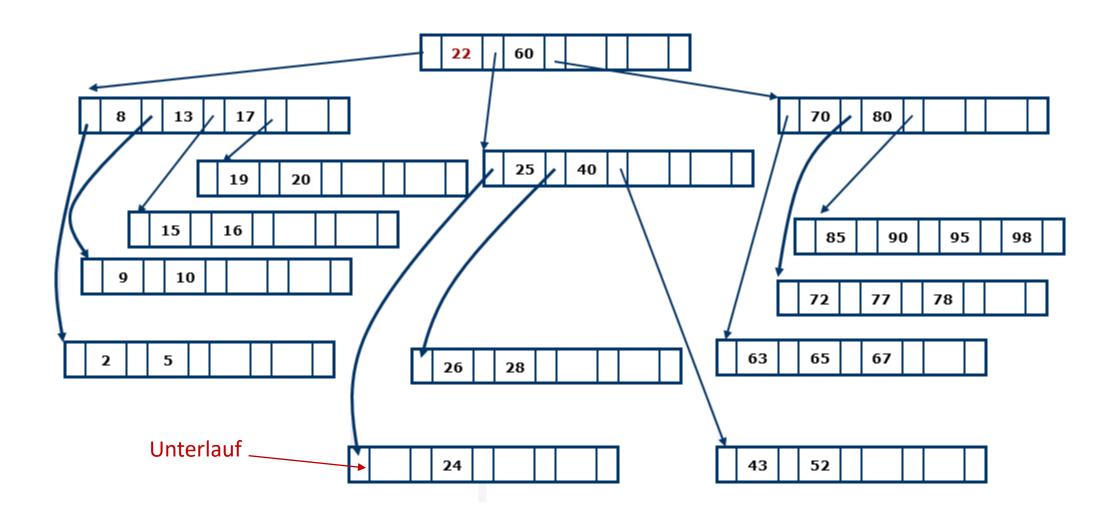


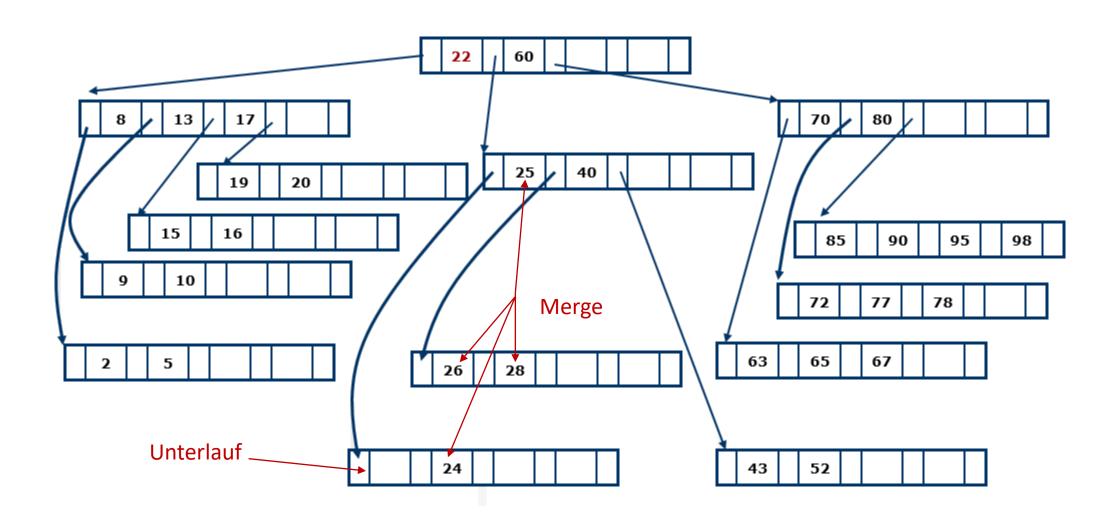


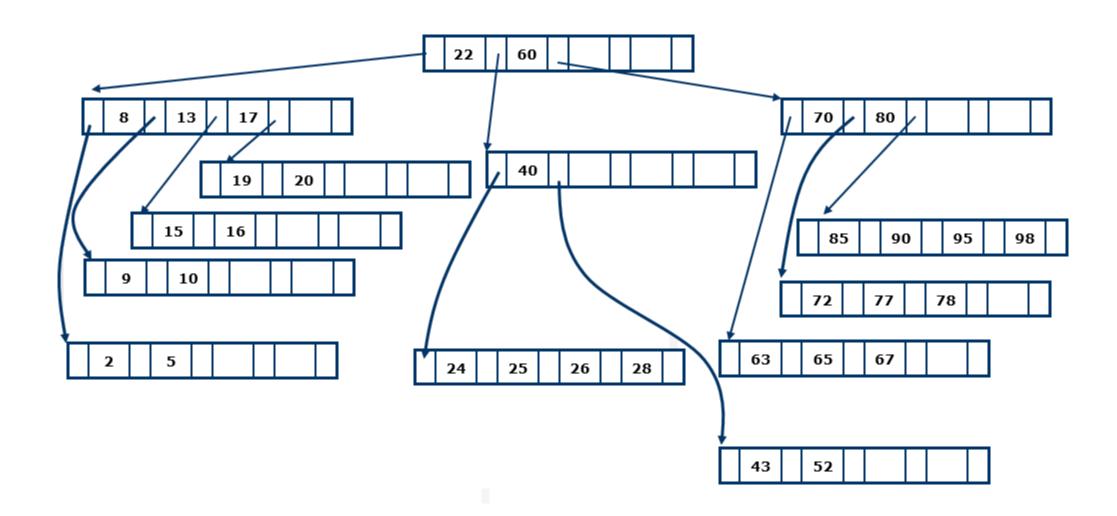


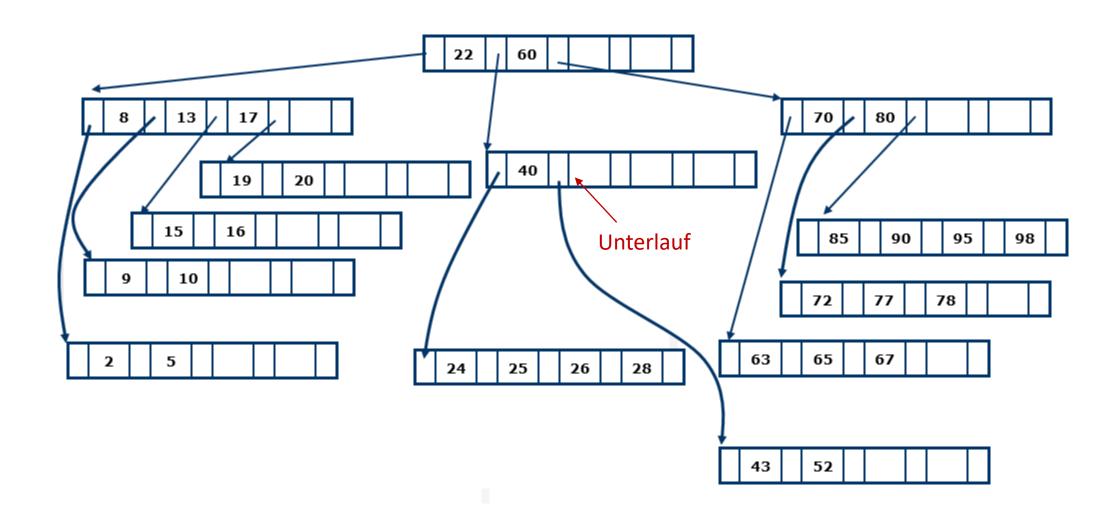


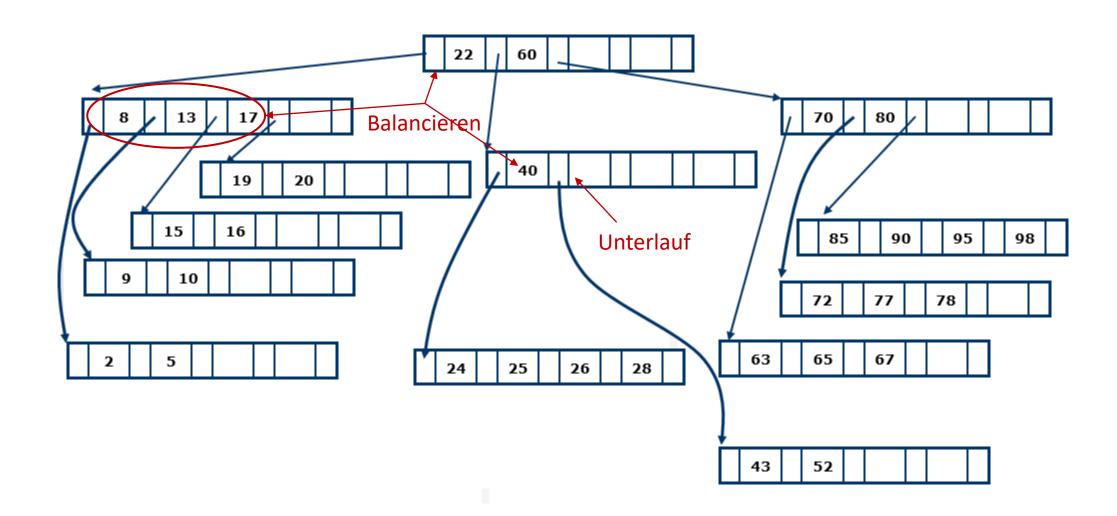


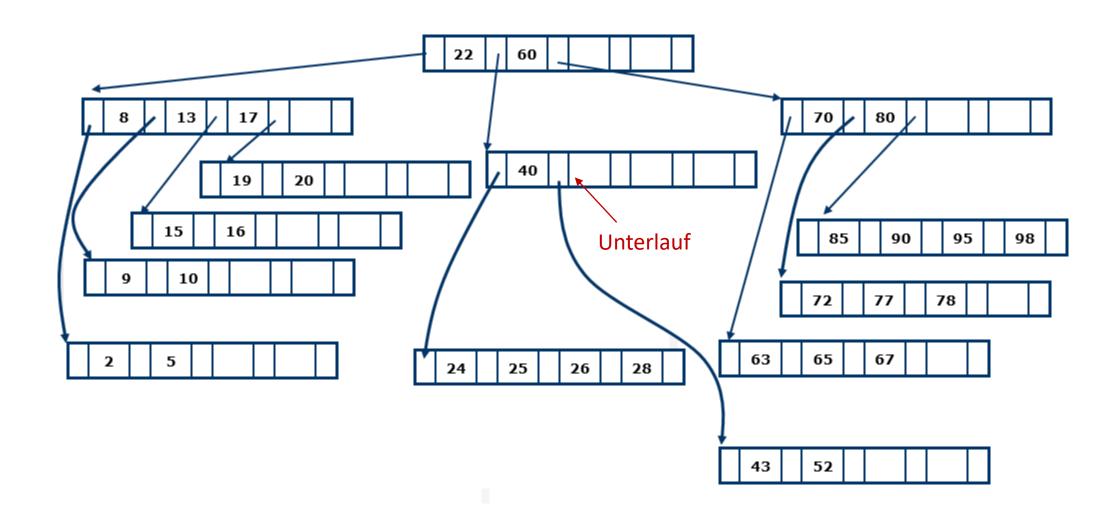


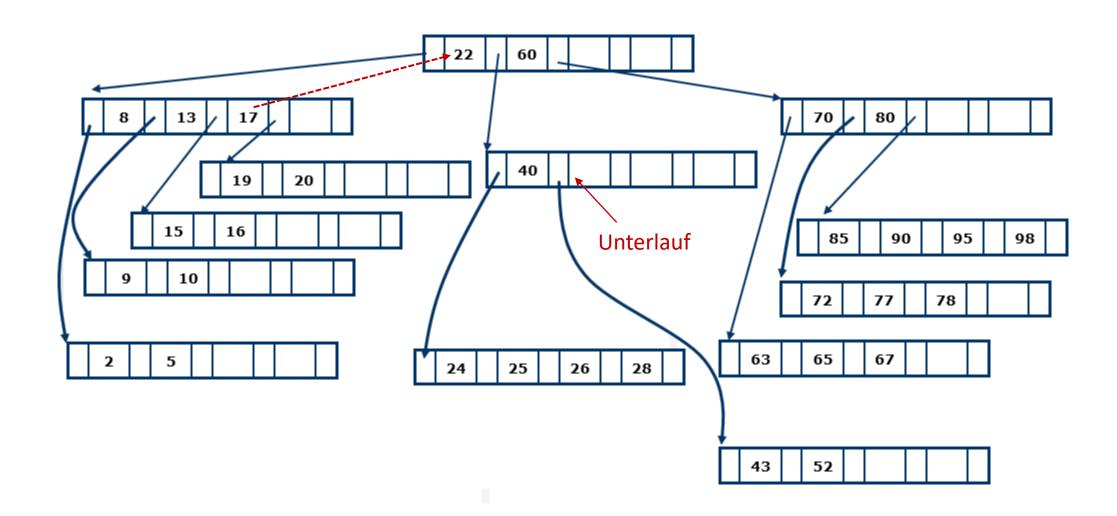


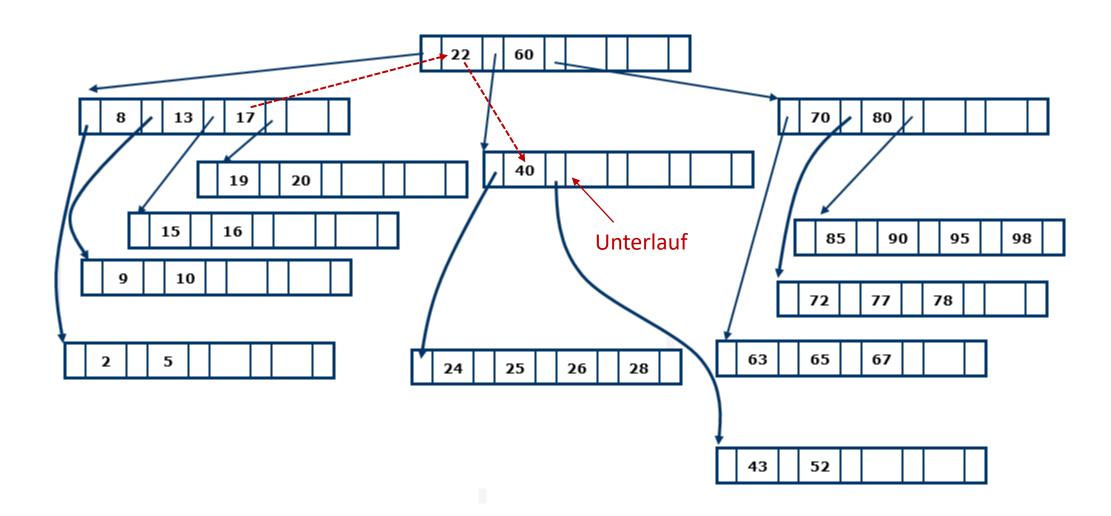


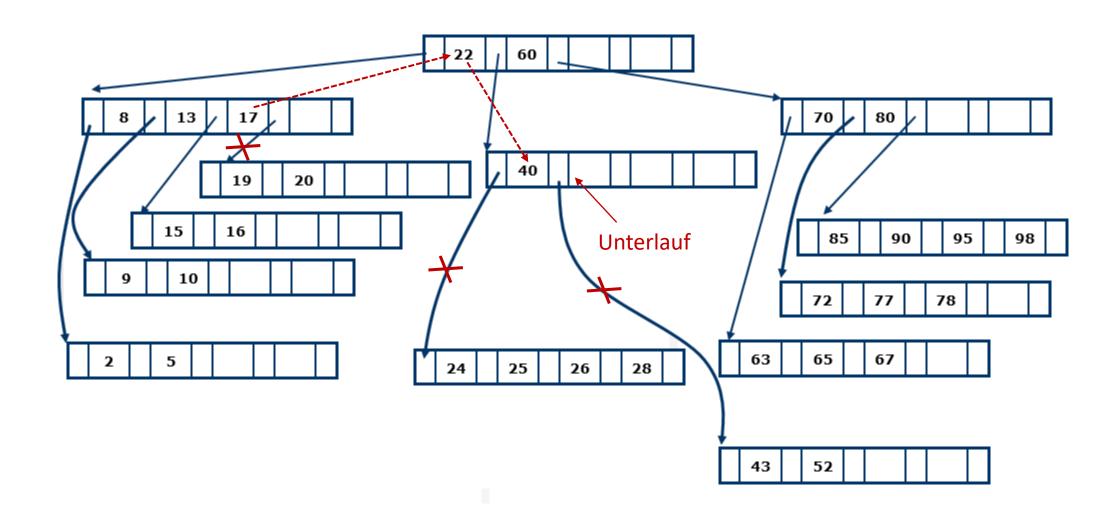


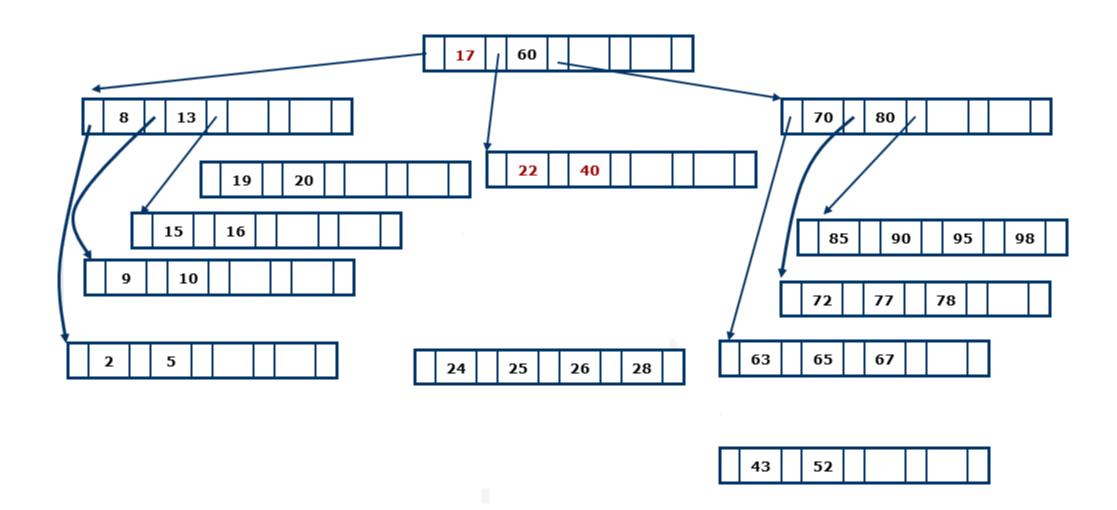


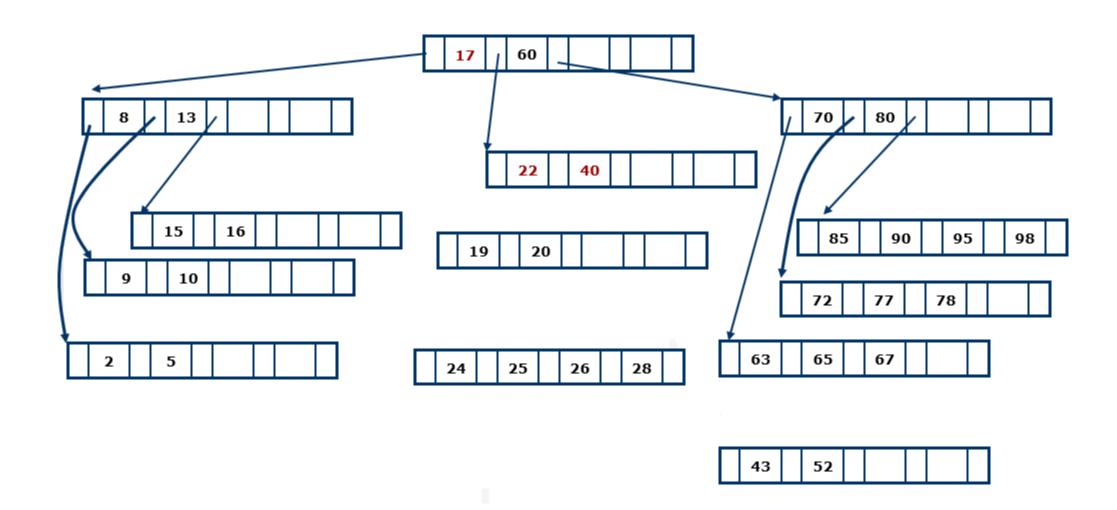


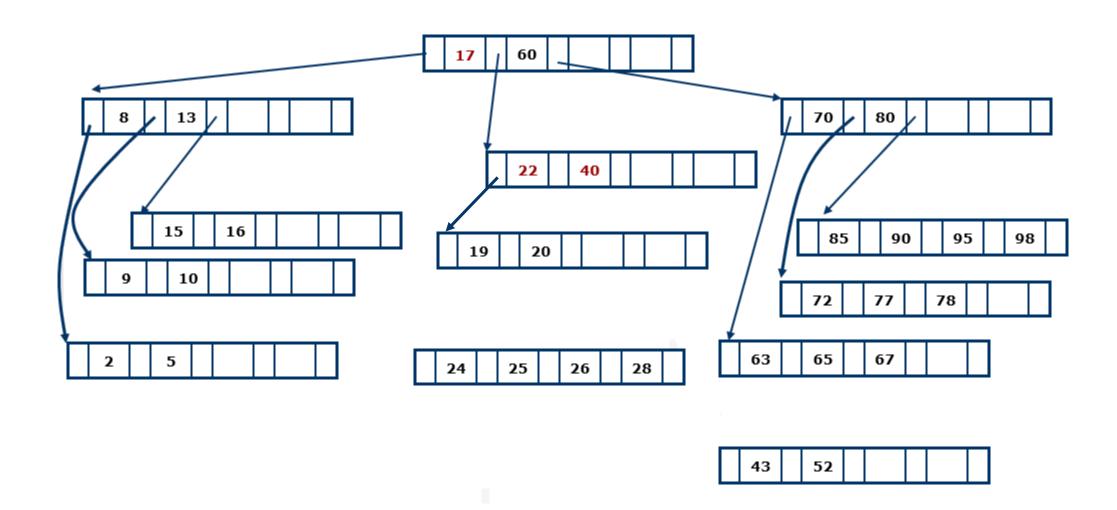


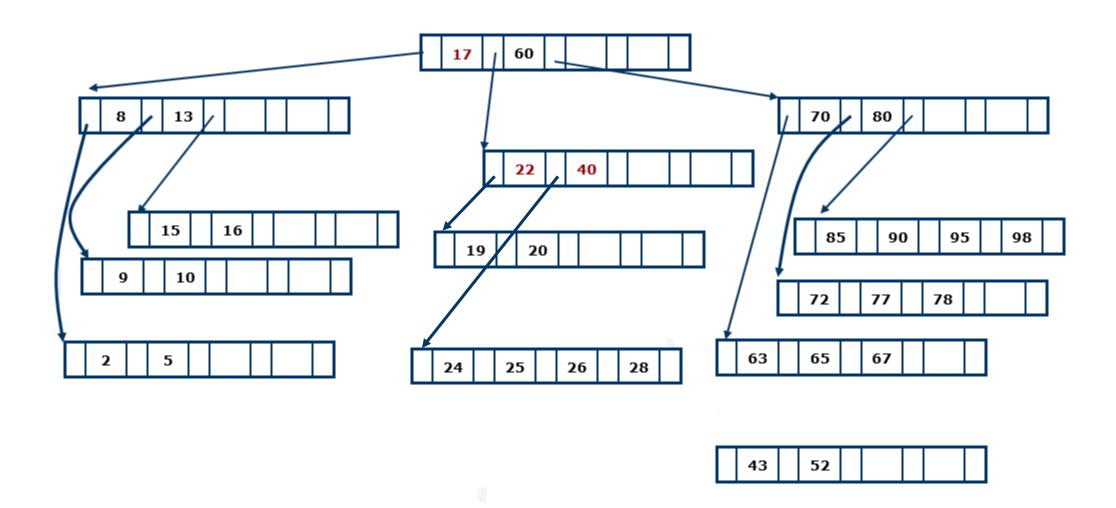


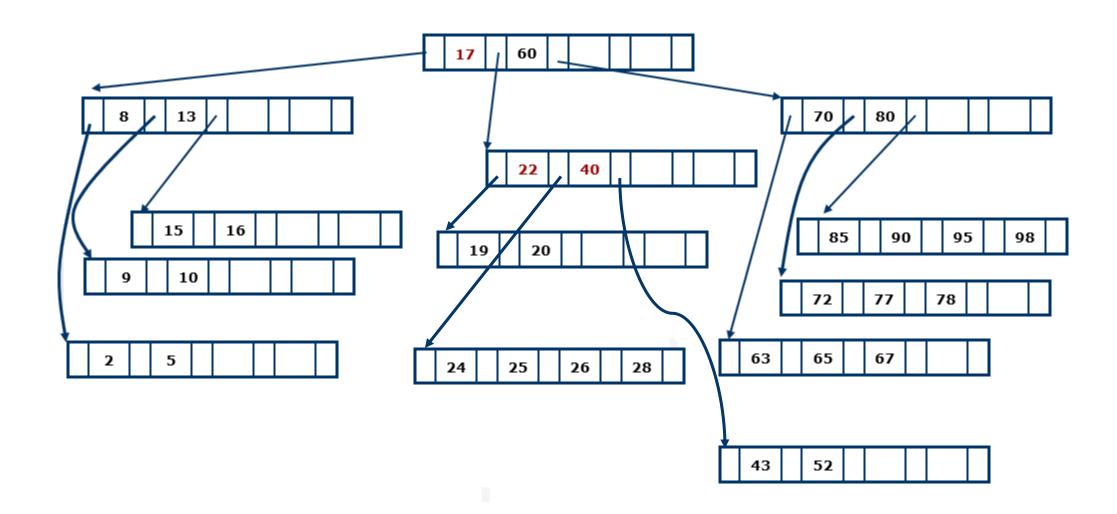






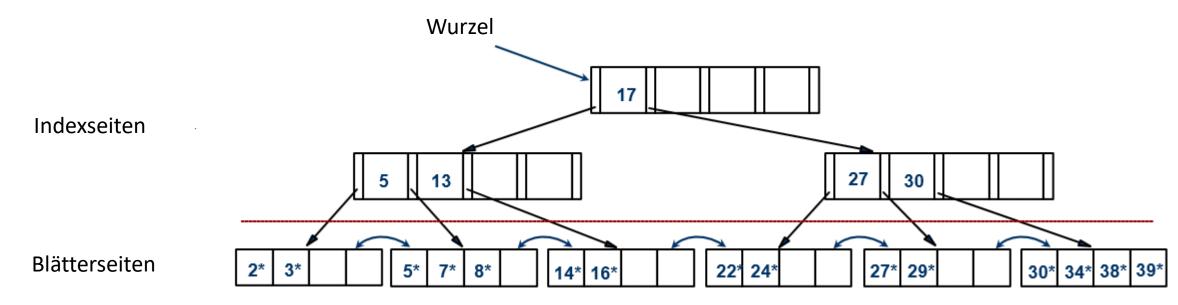






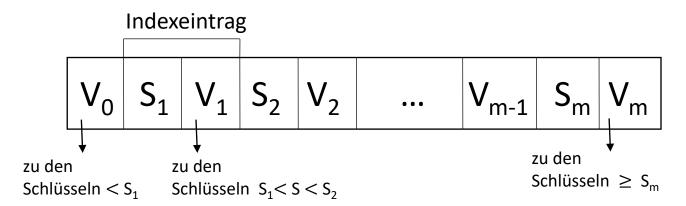
#### B<sup>+</sup>-Bäume

- Eine Modifikation von B-Bäumen:
  - Alle Zeiger zu den Datensätzen befinden sich in den Blättern
  - Die Suchschlüssel der inneren Knoten dienen als Wegweiser oder Separatoren bei der Suche der Datensätzen
- Ein B+-Baum kann wenigere Levels als der entsprechende B-Baum enthalten

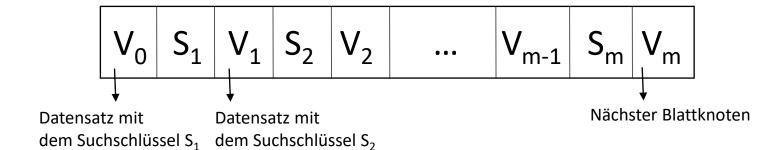


#### Die Struktur der Knoten in einem B<sup>+</sup>-Baum

Innere Knoten:



• Blätterknoten:



#### B+-Bäume in der Praxis

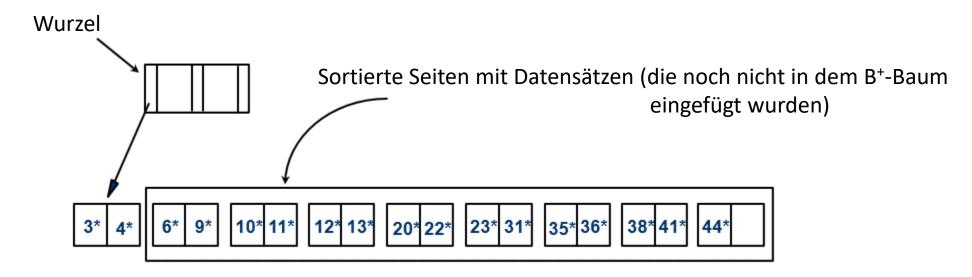
- Typisches Verzweigungsgrad/Ordnung: 100, Typisches Füllgrad: 67%
  - Typisches Ausgangsgrad/Fan-out (Anzahl von Indexeinträge/ Indexseite) = 133
- Typische Größe:
  - Höhe 4: 133<sup>4</sup> = 312,900,700 Datensätze
  - Höhe 3:  $133^3 = 2,352,637$  Datensätze
- Oft können diese in den Top-Levels des Buffer Pools sein:
  - Level 1: 1 Seite = 8 KBytes
  - Level 2: 133 Seiten = 1 MByte
  - Level 3: 17,689 Seiten = 133 MBytes

#### Vor- und Nachteile der B+-Bäume

- Der Index bleibt balanciert → gleichformige Suchzeit
- Selten mehr als 3-5 Levels → man kann den Datensatz in 2-3 I/O
  Operationen finden
- Am meisten benutzt für Indexe in DBMS wegen der Flexibilität (auch am meisten optimierte in DBMS)
- B+-Bäume können für folgende Indexe benutzt werden:
  - geclustert, dünner Index, wenn die Daten sortiert sind
  - nicht-geclustert, dichter Index, wenn die Daten nicht sortiert sind

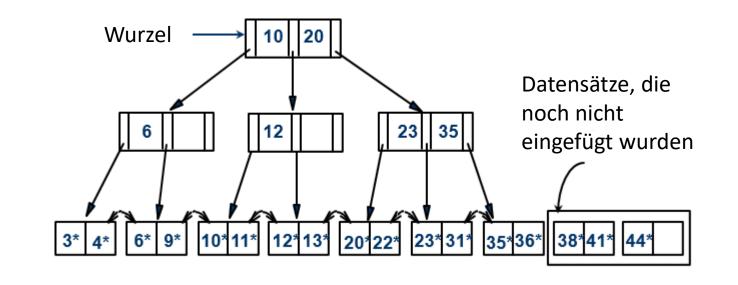
## Bulk Einfügen in einem B+- Baum

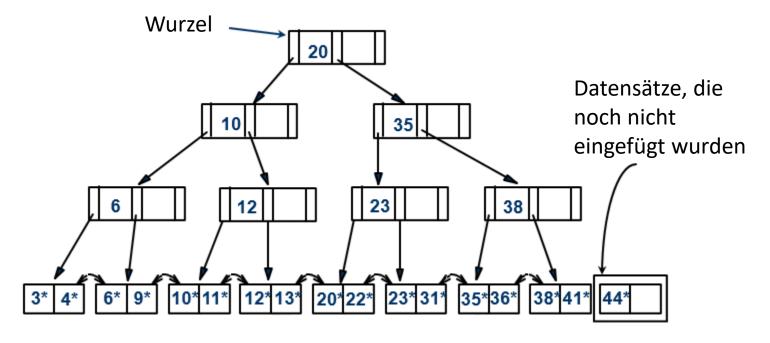
- Wenn wir einen B<sup>+</sup> Baum auf einen Datenfeld für eine große Datenmenge erstellen wollen, dann ist es nicht effizient jeden Datensatz einzeln einzufügen → Bulk Einfügen ist viel effizienter
- Initialisierung:
  - Sortiere alle Datensätze
  - Erstelle eine neue Wurzelseite, die ein Zeiger zu der ersten Blattseite enthält



## Bulk Einfügen

- Indexeinträge die auf Blätterseiten verweisen werden immer in der am weitesten rechts und der Blätterseite übergeordnete Indexseite eingefügt
- Wenn diese voll ist, dann wird sie geteilt
- Die Behandlung des Überlaufs kann sich bis zu der Wurzel fortpflanzen und die Höhe des Baumes um eins erhöhen





# Bulk Einfügen vs. Einzelne Einfügeoperationen

- 1. Möglichkeit: mehrere einzelne Einfügeoperationen (ein einziges Datensatz)
  - Langsam
  - Die Blätter werden nicht sequentiell abgespeichert
- 2. Möglichkeit: Bulk Einfügen
  - Hat Vorteile für Mehrbenutzersynchronisation (wenigere Sperrungen)
  - Wenigere I/O Operationen um den B+- Baum zu erstellen
  - Blätter werden sequentiell abgespeichert
  - Man kann den Füllgrad beeinflussen

### Präfix B+-Bäume

- Die Größe der Separatoreinträge ⇒ bestimmt die Anzahl der Indexeinträge in einer Seite ⇒ bestimmt die Höhe des B+-Baumes
- Um die Höhe des B+-Baumes zu minimieren und den Ausgangsgrad/fan-out zu maximieren müssen möglichst viele Separatoren auf eine Seite passen
- Die Suchschlüssel haben nur die Funktion eines Separators, die eine Suche zu den Blattknoten führt → können meistens komprimiert werden (ein Präfix ist ausreichend)
- Einfügen und Löschen müssen entsprechend geändert werden

## Präfix B+-Bäume - Beispiel

- z.B. Benachbarte Indexeinträge mit den Suchschlüsseln:
  - Dan Yogurt, David Smith, Demy Moore, Davey Jones
- Wir kürzen diese ab: *David Smith* → *Dav., Davey Jones* → *Dave., ...*
- Wie vergleichen wir jetzt David Smith mit Davey Jones?
- Ist jetzt "Dav." < "Dave. "?
- Wenn man eine Schlüsselkompression auswählt, dann muss die Ordnung zwischen den Suchschlüsseln aufbewahrt werden

# Verzweigungsgrad/Ordnung des B+-Baumes in der Praxis

- In der Praxis ersetzt man das Konzept von Verzweigungsgrad/Ordnung mit Füllgrad (wenigstens halb voll)
- Die Indexseiten k\u00f6nnen viel mehrere Eintr\u00e4ge enthalten als die Bl\u00e4tterseiten
- Wenn die Länge der Suchschlüsseln und der Datensätze variable ist, dann können Seiten unterschiedliche Anzahl von Einträgen enthalten
- Auch wenn die Länge nicht variable ist, kann es sein dass zwei Datensätze denselben Suchschlüsselwert haben → mit Alternative (3) wird die Länge der Indexeinträge variable

## Zusammenfassung

- Baum-strukturierte Indexe sind sehr effizient für Bereichsanfragen, aber auch gut für Gleichheitsanfragen
- ISAM (Index-Sequential Access Method) ist eine statische Struktur
  - Nur die Blätterseiten ändern sich, man braucht Überlaufsseiten
  - Überlaufsseiten können die Effizienz erniedrigen, außer wenn sich die Daten nicht oft ändern
- B+-Baum ist eine dynamische Struktur
  - Nach einem Einfügen oder Löschen bleibt der Baum balanciert
  - Großer Ausgangsgrad/fan-out → oft ist die Tiefe nicht mehr als 3 oder 4
  - Fast immer besser als die Datei sortiert zu behalten
  - Typischerweise Füllgrad 67%
  - Meistens besser als ISAM

# Zusammenfassung

- Präfix B+-Baum
  - Schlüsselkompression vergrößert den Ausgangsgrad/fan-out und verkleinert die Höhe
- Bulk-Einfügen kann viel schneller sein als wiederholte einzelne Einfüge-Operationen bei dem Erstellen eines B+-Baumes
- B+-Bäume sind am meisten benutzte Indexe in DBMS wegen der Flexibilität und der hohen Optimierung