# Künstliche Intelligenz
## Markov-Entscheidungsprozesse

Jun.-Prof. Dr.-Ing. Stefan Lüdtke

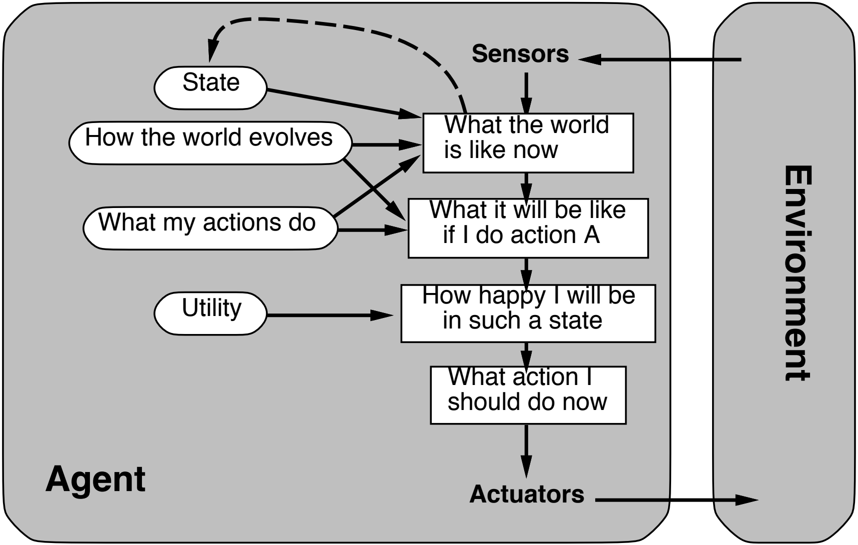
Universität Rostock

Institut für Visual & Analytic Computing

# Motivation

- Bisher: Zielbasierte Agenten ($\rightarrow$ Suche, Planung), Agenten in nicht vollständig beobachtbaren Umgebungen ($\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsrechnung), lernende Agenten ($\rightarrow$ Machine Learning)
- Jetzt: Nutzenbasierte Agenten

# Nutzenbasierte Agenten



# Nutzenbasierte Agenten

## Reward

- Am Anfang der Lehrveranstaltung nur sehr allgemeine Beschreibung von nutzenbasierten Agenten, jetzt mehr Details
- Ein nutzenbasierter Agent hat eine *Reward-Funktion* $R : (S \times A) \to \mathbb{R}$, die beschreibt, wie "gut" es für den Agenten ist, in Zustand $s$ die Aktion $a$ zu wählen
- Reward-Signal ist extern bestimmt: Der Agent kann seine eigene Reward-Funktion nicht umdefinieren
- z.B. für zielbasierte Agenten: Reward $+1$ bei Zielerreichung, 0 sonst.
- oder z.B. für Spiele: $+1$ wenn gewonnen, -1 wenn verloren, 0 sonst (wenn Spiel noch nicht vorbei)

# Nutzenbasierte Agenten

## Dynamik

- Annahme: Nächster Zustand der Welt $s_{t+1}$ hängt nur von aktuellem Zustand der Welt $s_t$ und Aktion des Agenten $a_t$ ab
  - Kann als Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(S_{t+1} \mid S_t, A_t)$ beschrieben werden
- Annahme: Der Agent kennt zu jedem Zeitpunkt den aktuellen Zustand
  - Es gibt auch Methoden um mit nicht-beobachtbarem Zustand umzugehen (Partially Observable Markov Decision Processes), aber die behandeln wir hier nicht (Bei Interesse: Vorlesung AI7 im Master)

# Nutzenbasierte Agenten

- Die *Utility* des Agenten ist die Summe aller Rewards (erstmal, wir sehen gleich, dass wir die Definition etwas anpassen müssen)
- Der Agent versucht, Aktionen so zu wählen, dass der Erwartungswert der Utility maximiert wird
- Nennen eine Funktion $\pi : S \to A$ *Policy*
  - Beschreibt die Aktionsauswahl des Agenten
  - Optimale Policy $\pi^*$: Maximiert erwartete Utility

# Nutzenbasierte Agenten

## Discount Factor

- Oft möchte man eine Verhalten erreichen, bei dem der Agent aktuelle Rewards höher gewichtet als Rewards weit in der Zukunft (Warum ist das sinnvoll?)
- Führen *Discount Factor* $0 < \gamma \leq 1$ ein, und definieren Utility als:

$$U([(s_1, a_1), (s_1, a_1), \ldots]) = R(s_1, a_1) + \gamma R(s_2, a_2) + \gamma^2 R(s_3, a_3) + \ldots \tag{1}$$

- Auch hilfreich für Lösungsalgorithmen, da unendlich große Utility vermieden wird
- Im Folgenden: Alles noch mal formal...

# Markov Decision Processes

An MDP is a 5-tuple $(S, A, P, R, \gamma)$ with:

- set $S$ of states.
- set $A$ of actions.
- $P(S_{t+1} \mid S_t, A_t)$ specifies the dynamics.
- $R(S_t, A_t, S_{t+1})$ specifies the reward at time $t$.
  - $R(s, a, s')$ is the expected reward received when the agent is in state $s$, does action $a$ and ends up in state $s'$.
  - Usually we use $R(s, a) = \sum_{s'} P(s' \mid s, a) R(s, a, s')$.
- $\gamma$ is discount factor.

- I.e., an MDP is a DN with a certain internal structure

T Do we need to know $P(S_0)$ – the initial distribution?

# Policies

- A *stationary policy* is a function:

  $$\pi : S \rightarrow A$$

  Given a state $s$, $\pi(s)$ specifies what action the agent who is following $\pi$ will do.
- An *optimal policy* is one with maximum expected discounted reward.
- For a fully-observable MDP with stationary dynamics and rewards with infinite or indefinite horizon, there is always an optimal stationary policy.

# Example 1: Exercise or not to exercise?

Each week *Sam* has to decide whether to exercise or not:

- 2 States: $S = \{fit, unfit\}$
- 2 Actions: $A = \{exercise, relax\}$
- Dynamics $P(S_{t+1} \mid S_t, A_t)$:

| $S_t$ | $A_t$ | $P(fit \mid State, Action)$ |
|---|---|---|
| fit | exercise | 0.99 |
| fit | relax | 0.7 |
| unfit | exercise | 0.2 |
| unfit | relax | 0.0 |

- Reward $R(S_t, A_t, S_{t+1})$ (here independent of $S_{t+1}$):

| $S_t$ | $A_t$ | $S_{t+1}$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| fit | exercise | * | 8 |
| fit | relax | * | 10 |
| unfit | exercise | * | 0 |
| unfit | relax | * | 5 |

# Example: to exercise or not?

Each week *Sam* has to decide whether to exercise or not:

- States: $\{fit, unfit\}$
- Actions: $\{exercise, relax\}$

T How many stationary policies are there?
Let $s$ be the number of states, and $a$ be the number of actions, then there are $s^a$ possible policies.

T What are they?

| $S$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ | $\pi_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | $e$ | $e$ | $r$ | $r$ |
| $u$ | $e$ | $r$ | $e$ | $r$ |

# Value of a Policy

Given a policy $\pi$:

- $V^\pi(s)$ is the expected discounted reward value of following policy $\pi$ in state $s$.
- $Q^\pi(s, a)$ is the total expected discounted reward value of doing $a$ in state $s$, then following policy $\pi$.
- $V^\pi$ and $Q^\pi$ can be defined mutually recursively:

$$V^\pi(s) = Q^\pi(s, \pi(s))$$
$$Q^\pi(s, a) = \sum_{s'} P(s' \mid a, s) \left(R(s, a, s') + \gamma \cdot V^\pi(s')\right)$$

# Value of the Optimal Policy

Let $\pi^*$ be the optimal policy.

- $V^*(s)$ is the expected discounted reward value of following policy $\pi^*$ in state $s$.
- $Q^*(s,a)$ is the total expected discounted reward value of doing $a$ in state $s$, then following policy $\pi^*$.
- $V^*$ and $Q^*$ can be defined mutually recursively:

$$V^*(s) = \max_a Q^*(s,a)$$
$$Q^*(s,a) = \sum_{s'} P(s' \mid a,s)\big(R(s,a,s') + \gamma \cdot V^*(s')\big)$$
$$\pi^*(s) = argmax_a Q^*(s,a)$$

# Agenda

Markov Decision Processes

Solution Techniques

- Value Iteration
- Asynchronous Value Iteration
- Policy Iteration

Examples

# Agenda

# Value Iteration

- Let $V_k$ and $Q_k$ be $k$-step lookahead value and $Q$ functions.
- Idea: Given an estimate of the $k$-step lookahead value function, determine the $k+1$ step lookahead value function.
- Set $V_0$ arbitrarily.
- Compute $Q_{i+1}$, $V_{i+1}$ from $V_i$.
- This converges exponentially fast (in $k$) to the optimal value function.

  The error reduces proportionally to $\dfrac{\gamma^k}{1-\gamma}$

# Value Iteration

- Set $V^{(0)}$ arbitrarily.
- Compute $V^{(i+1)}$ from $V^{(i)}$:

$$V^{(i+1)}(s) = \sum_{s'} \left( P(s' \mid \pi^{(i)}(s), s) \left( R(s, \pi^{(i)}(s), s') + \gamma V^{(i)}(s') \right) \right)$$

or alternatively, if $R(s, a, s') = R(s, a)$

$$= R(s, \pi^{(i)}(s)) + \gamma \sum_{s'} P(s' \mid \pi^{(i)}(s), s) V^{(i)}(s')$$

with $\pi^{(i)}$ being the optimal policy wrt. $V^{(i)}$

- This iteration converges to the optimal value function $V^*$:

$$\lim_{i \to \infty} V^{(i)} = V^*$$

# Example 1: Exercise or not to exercise?

Each week *Sam* has to decide whether to exercise or not:

- 2 States: $S = \{fit, unfit\}$
- 2 Actions: $A = \{exercise, relax\}$
- Dynamics $P(S_{t+1} \mid S_t, A_t)$:

| $S_t$ | $A_t$ | $P(fit \mid State, Action)$ |
|---|---|---|
| fit | exercise | 0.99 |
| fit | relax | 0.7 |
| unfit | exercise | 0.2 |
| unfit | relax | 0.0 |

- Reward $R(S_t, A_t, S_{t+1})$ (here independent of $S_{t+1}$):

| $S_t$ | $A_t$ | $S_{t+1}$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| fit | exercise | * | 8 |
| fit | relax | * | 10 |
| unfit | exercise | * | 0 |
| unfit | relax | * | 5 |

# Example 1: Exercise or not to exercise? – It depends!

| $S_t$ | $A_t$ | $P(fit \mid S_t, A_t)$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| f | e | 0.99 | 8 |
| f | r | 0.7 | 10 |
| u | e | 0.2 | 0 |
| u | r | 0.0 | 5 |

$$V^{\pi}(s) = Q^{\pi}(s, \pi(s))$$

$$Q^{\pi}(s, a) = \sum_{s'} P(s' \mid a, s) \left( R(s, a, s') + \gamma \cdot V^{\pi}(s') \right)$$

| Iter. | V(fit) | V(unfit) |
|---|---|---|
| 0 | 0.000 | 0.00000 |
| 1 | 10.000 | 5.00000 |
| 2 | 17.650 | 9.50000 |
| 3 | 23.812 | 13.55000 |
| 4 | 29.338 | 17.19500 |
| 5 | 34.295 | 20.47550 |
| ... | ... | ... |
| 9 | 49.515 | 30.62898 |
| 10 | 52.394 | 32.56608 |
| ... | ... | ... |
| 49 | 77.151 | 49.71368 |
| 50 | 77.189 | 49.74231 |

# Example 1: Exercise or not to exercise? – It depends!

| $S_t$ | $A_t$ | $P(fit \mid S_t, A_t)$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| f | e | 0.99 | 8 |
| f | r | 0.7 | 10 |
| u | e | 0.2 | 0 |
| u | r | 0.0 | 5 |

$$Q_i(s,a) = \sum_{s'} P(s' \mid a, s)\left(r(s,a,s') + \gamma \cdot V_i(s')\right)$$

$$\gamma = 0.9$$

$$\pi_i(s) = argmax_a Q_i(s,a)$$

$$V_{i+1}(s) = \max_a Q_i(s,a) = Q_i(s, \pi_i(s))$$

| It. | $V(f)$ | $V(u)$ | $Q(f,e)$ | $Q(f,r)$ | $Q(u,e)$ | $Q(u,r)$ | $\pi(f)$ | $\pi(u)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 0.00 | 8.00 | 10.00 | 0.00 | 5.00 | $r$ | $r$ |
| 1 | 10.00 | 5.00 | 16.95 | 17.65 | 5.40 | 9.50 | $r$ | $r$ |
| 2 | 17.65 | 9.50 | 23.81 | 23.68 | 10.01 | 13.55 | $e$ | $r$ |
| 3 | 23.81 | 13.55 | 29.33 | 28.66 | 14.04 | 17.19 | $e$ | $r$ |
| 4 | 29.33 | 17.19 | 34.29 | 33.12 | 17.66 | 20.47 | $e$ | $r$ |
| 5 | 34.29 | 20.47 | 38.74 | 37.13 | 20.91 | 23.42 | $e$ | $r$ |
| | | | | ... | | | | |
| 9 | 49.51 | 30.62 | 52.39 | 49.46 | 30.96 | 32.56 | $e$ | $r$ |
| 10 | 52.39 | 32.56 | 54.97 | 51.80 | 32.87 | 34.30 | $e$ | $r$ |
| | | | | ... | | | | |
| 49 | 77.15 | 49.71 | 77.18 | 72.02 | 49.68 | 49.74 | $e$ | $r$ |
| 50 | 77.18 | 49.74 | 77.22 | 72.06 | 49.70 | 49.76 | $e$ | $r$ |

# Example 1: Exercise or not to exercise? – It depends!

- But the resulting policy does also depend on the discount factor $\gamma$ for $i = 10$:

| $\gamma$ | $V^i(f)$ | $V^i(u)$ | $Q^i(f,e)$ | $Q^i(f,r)$ | $Q^i(u,e)$ | $Q^i(u,r)$ | $\pi^i(f)$ | $\pi^i(u)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.2 | 12.0 | 6.2 | 10.4 | 12.0 | 1.4 | 6.2 | r | r |
| 0.5 | 17.6 | 9.9 | 16.8 | 17.6 | 5.7 | 9.9 | r | r |
| 0.9 | 52.3 | 32.5 | 54.9 | 51.8 | 32.8 | 34.3 | e | r |
| 0.95 | 64.7 | 40.1 | 69.3 | 64.5 | 42.8 | 43.1 | e | r |
| 0.99 | 77.4 | 48.1 | 84.3 | 77.9 | 53.4 | 52.7 | e | e |

T What does this mean?
Discuss the different results!

# Zusammenfassung

- Ein MDP ist über das Transitionsmodell und die Reward-Funktion spezifiziert
- Die Utility eines MDP-Agenten ist der summierte discounted Reward
- Eine Lösung eines MDP ist eine Policy, die jedem Zustand eine Entscheidung zuweist. Die optimale Policy maximiert die erwartete Utility
- Die Utility eines Zustands ist die erwartete Utility der Zustandssequenz, wenn die optimale Policy von diesem Zustand ausgehend ausgeführt wird
- *Value Iteration* löst ein MDP, indem iterativ die Gleichungen gelöst werden, die die Utility eines Zustands mit der Utility der Nachbarn verbinden