



APPROXIMATION DE SEMIGROUPES DE MARKOV

10 décembre 2022

Malo Sommers, Danilo Fernandes, Franck Talla
(malo.sommers@polytechnique.edu, danilo.marinho-fernandes@polytechnique.edu,
franck.signe-talla@polytechnique.edu)



Table des matières

1	Abstract	2
2	Introduction	2
3	La distance entre deux sémigroupes de Markov	3
3.1	Fonction de test régulière	3
3.2	Fonctions de test mesurables (convergence en variation totale)	5
4	Calcul de Malliavin	7
4.1	But	7
4.2	Premiers théorèmes	8
5	Résultats pour le schéma d'Euler	11
5.1	Exemple de processus respectant le cadre du papier	13
5.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	16
5.3	Processus de Black-Scholes	19
5.4	Approximation à "l'infinie"	21
6	Résultats pour le schéma de Talay	26
6.1	Présentation du schéma en dimension 1	26
6.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	27

1 Abstract

Dans cet article, nous analysons les travaux de Vlad Bally et Clément Rey publiés dans leur papier [1] sur l'approximation de semigroupes de Markov. Nous commençons par motiver le sujet avec l'analyse de l'erreur faible des approximations de processus stochastiques, en citant notamment des travaux précédents sur l'approximation par le schéma d'Euler. On développe ensuite la théorie présentée dans l'article de Bally et Rey à fin de démontrer des bornes d'erreur sous des conditions de régularisation spécifiées. En particulier, on démontre également un développement du premier ordre pour la vitesse de convergence du schéma d'Euler. En plus, on introduit le calcul de Malliavin afin de prouver des propriétés de régularisation. Avec ces résultats, on simule, toujours par le schéma d'Euler, des processus qui respectent les conditions établies afin de vérifier le comportement asymptotique de l'erreur par rapport à la quantité de pas de simulation, bien comme des processus qui sortent du cadre étudié comme une forme d'exploration numérique. À la fin, on fait aussi des simulations avec le schéma de Talay pour montrer que les résultats étudiés sont valables dans des cas bien plus généraux que celui du schéma d'Euler.

2 Introduction

L'article de Bally et Rey [1] étudie la convergence $\mathbb{E}[f(X_t^n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X_t)]$ où $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov en temps continu et $(X_t^n)_{t \geq 0}$ est un schéma d'approximation utilisé pour calculer $\mathbb{E}[f(X_t)]$ par des méthodes de Monte Carlo. Des travaux antérieurs de Bally et Talay [2] ont étudié le cas où $(X_t^n)_{t \geq 0}$ est l'approximation du schéma d'Euler de $(X_t)_{t \geq 0}$, fournissant comme résultat principal une erreur faible de la forme

$$\mathbb{E}[f(X_T(x))] - \mathbb{E}[f(X_T^n(x))] = -\frac{C_f(T, x)}{n} + \frac{Q_n(f, T, x)}{n^2}. \quad (1)$$

Sous l'hypothèse que les coefficients b et σ du schéma d'Euler sont des fonctions régulières, dont les dérivées de tout ordre sont bornées (bien que b et σ ne soient pas supposées être elles-mêmes bornées), f est mesurable et bornée, et une condition supplémentaire sur la position de départ x . Ici, $T \geq 0$ est le temps final. Bien que le présent travail ne fournisse pas de résultats plus forts pour les schémas d'Euler, il donne des bornes d'erreur pour une plus grande famille d'approximations, comme le schéma de Ninomiya-Victoir [3] et le schéma de Talay [4].

Pour introduire les résultats principaux, nous allons tout d'abord considérer la grille de temps $\pi_{T,n} = \{t_k^n = kT/n, k \in \mathbb{N}\}$ et la chaîne de Markov en dimension d

$$X_{t_{k+1}^n}^n = \psi_k \left(X_{t_k^n}^n, \frac{Z_{k+1}}{\sqrt{n}}, \delta_{k+1}^n \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

où $\psi_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction régulière avec $\psi_k(x, 0, 0) = x$, et $Z_k \in \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{N}^*$, est une suite de variables aléatoires centrées et $\sup_{k \in \mathbb{N}^*} \delta_k^n \leq C/n$. On note le semigroupe associé à $(X_t^n)_{t \in \pi_{T,n}}$ par $(Q_t^n)_{t \in \pi_{T,n}}$ et ses probabilités de transition $\nu_{k+1}^n(x, dy) = \mathbb{P}(X_{t_{k+1}^n}^n \in dy \mid X_{t_k^n}^n = x), k \in \mathbb{N}$. On rappelle que $t \in \pi_{T,n}, Q_t^n f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^n) \mid X_0^n = x]$.

On considère également le processus en temps continu $(X_t)_{t \geq 0}$ avec sémigroupe $(P_t)_{t \geq 0}$ et les probabilités de transition $\mu_{k+1}^n(x, dy) = \mathbb{P}(X_{t_{k+1}^n} \in dy \mid X_{t_k^n} = x)$. On peut voir $(X_t^n)_{t \in \pi_{T,n}}$ comme un schéma d'approximation de $(X_t)_{t \geq 0}$.

L'article de Bally et Rey démontre des bornes pour l'erreur faible $\sup_{t \in \pi_{T,n}^{2S,T}} \|P_t f - Q_t^n f\|_\infty$ sous certaines conditions de régularisation, que nous étudions en détail dans la section 3. Ensuite, les auteurs donnent des conditions suffisantes sur la chaîne de Markov définie auparavant $X_{t_{k+1}^n}^n = \psi_k(X_{t_k^n}^n, \frac{Z_{k+1}}{\sqrt{n}}, \delta_{k+1}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ pour avoir ces propriétés de régularisation sur les sémigroupes, dont la démonstration utilise une formule d'intégration par parties issue du calcul de Malliavin, que nous introduisons dans la section 4. Le résultat principal est énoncé par le théorème 1.2 de [1].

3 La distance entre deux sémigroupes de Markov

Dans cette section, nous reprenons des définitions et des preuves de l'article de Bally et Rey [1]. Afin d'énoncer nos principaux résultats, nous introduisons la grille de temps homogène $\pi_{T,n} = \{t_k^n = kT/n, k \in \mathbb{N}\}$ et sa version bornée $\pi_{T,n}^{\tilde{T}} = \{t \in \pi_{T,n}, t \leq \tilde{T}\}$ pour $\tilde{T} \geq 0$. Pour $S \in [0, \tilde{T})$ nous notons $\pi_{T,n}^{S,\tilde{T}} = \{t \in \pi_{T,n}^{\tilde{T}}, t > S\}$.

3.1 FONCTION DE TEST RÉGULIÈRE

Nous considérons une suite de mesures de transition finies $\mu_k^n(x, dy)$, $k \in \mathbb{N}^*$ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , et on note

$$|\mu_k^n| := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) |\mu_k^n(x, dy)|,$$

Nous supposons aussi que la suite de mesures prise satisfait

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} |\mu_k^n| < \infty. \quad (2)$$

Pour associer la suite de mesures à la grille de temps $\pi_{T,n}$ nous posons la définition suivante :

Définition 1. Nous définissons le sémigroupe discret P^n par

$$P_0^n f(x) = f(x), \quad P_{t_{k+1}^n}^n f(x) = P_{t_k^n}^n \mu_{k+1}^n f(x) = P_{t_k^n}^n \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \mu_{k+1}^n(x, dy).$$

De façon plus générale, on définit $(P_{t,s})_{t,s \in \pi_{T,n}; t \leq s}$ par

$$P_{t_k^n, t_k^n}^n f(x) = f(x), \quad \forall k, r \in \mathbb{N}^*, k \leq r, P_{t_k^n, t_{r+1}^n}^n f(x) = P_{t_k^n, t_r^n}^n \mu_{r+1}^n f(x).$$

On remarque que pour tout $t, s, u \in \pi_{T,n}$, $t \leq s \leq u$, nous avons la propriété de sémigroupe $P_{t,u}^n f = P_{t,s}^n P_{s,u}^n f$. Nous allons considérer l'hypothèse suivante : soit $q \in \mathbb{N}$ et $t \leq s \in \pi_{T,n}$. Si $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$ alors $P_{t,s} f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$ et

$$\sup_{t,s \in \pi_{T,n}; t \leq s} \|P_{t,s}^n f\|_{q,\infty} \leq C \|f\|_{q,\infty}. \quad (3)$$

On remarque que (2) implique (3) pour $q = 0$.

Nous considérons ensuite une deuxième suite de mesures de transition finies $\nu_k^n(x, dy)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et nous introduisons le semigroupe Q^n défini de façon similaire à P^n avec μ^n remplacé par ν^n qui satisfait également (2) et (3).

Nous cherchons à estimer la distance entre $P^n f$ et $Q^n f$ en termes de distance entre les mesures de transition $\mu_k^n(x, dy)$ et $\nu_k^n(x, dy)$, nous désignons donc

$$\Delta_k^n = \mu_k^n - \nu_k^n.$$

On peut voir $(P_t^n)_{t \in \pi_{T,n}}$ comme un semigroupe en temps continu, $(P_t)_{t \geq 0}$, défini sur la grille de temps $\pi_{T,n}$, tandis que $(Q_t)_{t \in \pi_{T,n}}$ est son semigroupe discret d'approximation. Supposons que $q \in \mathbb{N}$, $h \geq 0$ fixé. Nous introduisons une hypothèse d'approximation par erreur en temps court : Il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de q) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$E_n(h, q) \quad \|\Delta_k^n f\|_\infty \leq C \|f\|_{q,\infty} / n^{h+1}. \quad (4)$$

Nous pouvons alors donner une borne pour l'erreur entre $P^n f$ et $Q^n f$ sous ces hypothèses dans le cas où $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$, qui découle de la propriété de semigroupe appliquée à P^n et Q^n .

Proposition 1. Soit $q \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que ν^n satisfait (3) pour ce q et que nous avons $E_n(h, q)$ (4). Alors pour tout $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$,

$$\sup_{t \in \pi_{T,n}^T} \|P_t^n f - Q_t^n f\|_\infty \leq C \|f\|_{q,\infty} / n^h. \quad (5)$$

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$. On a

$$\begin{aligned} \|P_{t_m^n}^n f - Q_{t_m^n}^n f\|_\infty &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \|P_{t_k^n}^n P_{t_{k+1}^n, t_k^n}^n Q_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f - P_{t_k^n}^n Q_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n Q_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \|P_{t_k^n}^n \Delta_{k+1}^n Q_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

On utilise que $\sup_{k \in \mathbb{N}^*} |\mu_k^n| < \infty$. (2), $E_n(h, q)$ (4) et on applique (3) pour ν^n , qui donne

$$\|P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n \Delta_{k+1}^n Q_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty \leq C \|\Delta_{k+1}^n Q_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty \leq C \|Q_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_{q,\infty} / n^{h+1} \leq C \|f\|_{q,\infty} / n^{1+h}.$$

On conclut en sommant sur $k = 0, \dots, m-1$.

□

3.2 FONCTIONS DE TEST MESURABLES (CONVERGENCE EN VARIATION TOTALE)

Nous allons ensuite donner des propriétés de régularisation aux semigroupes de façon à obtenir un résultat similaire pour toute fonction f mesurable bornée. Pour cela, nous ajouterons des hypothèses sur le semigroupe adjoint. Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour toute fonction f mesurable bornée et toute fonction $g \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$

$$E_n^*(h, q) \quad |\langle g, \Delta_k^n f \rangle| \leq C \|g\|_{q,1} \|f\|_\infty / n^{1+h}. \quad (7)$$

où $\langle g, f \rangle = \int g(x) f(x) dx$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

On introduit la propriété de regularization suivante : soit $q \in \mathbb{N}$, $S > 0$ et $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Nous supposons qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$R_{q,\eta}(S) \quad \forall t, s \in \pi_{T,n}, \text{ avec } S \leq s - t, \quad \|P_{t,s}^n f\|_{q,\infty} \leq \frac{C}{S\eta(q)} \|f\|_\infty. \quad (8)$$

Nous allons considérer également l'hypothèse de régularization sur l'adjoint. Supposons qu'il existe un semigroupe adjoint $P_{t,s}^{n,*}$, c'est à dire,

$$\langle P_{t,s}^{n,*} g, f \rangle = \langle g, P_{t,s}^n f \rangle$$

pour toute fonction f mesurable bornée et $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $P_{t,s}^{n,*}$ satisfait

$$R_{q,\eta}^*(S) \quad \forall t, s \in \pi_{T,n}, \text{ avec } S \leq s - t, \quad \|P_{t,s}^{n,*} f\|_{q,1} \leq \frac{C}{S\eta(q)} \|f\|_1. \quad (9)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \|\partial_\alpha P_{t,s}^{n,*} f\|_1 &\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} |\langle \partial_\alpha P_{t,s}^{n,*} f, g \rangle| = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} |\langle f, P_{t,s}^n (\partial_\alpha g) \rangle| \\ &\leq \|f\|_1 \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|P_{t,s}^n (\partial_\alpha g)\|_\infty \leq \frac{C}{S\eta(q)} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Où l'inversion entre $P_{t,s}^{n,*}$ et ∂_α se justifie par le théorème de Fubini. On peut donc donner une condition suffisante pour (9) : pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq q$,

$$\forall t, s \in \pi_{T,n}, \text{ avec } S \leq s - t, \quad \|P_{t,s}^n \partial_\alpha f\|_\infty \leq \frac{C}{S\eta(q)} \|f\|_\infty. \quad (10)$$

Nous pouvons donc donner une borne pour l'erreur entre $P^n f$ et $Q^n f$ comme avant :

Proposition 2. Soit $q \in \mathbb{N}$, $h \geq 0$, $S \in [T/n, T/2)$ et $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante fixée. On suppose que $E_n(h, q)$ (3) et $E_n^*(h, q)$ (7) sont vérifiés par P^n et Q^n . On suppose en plus que P^n satisfait $R_{q,\eta}(S)$ (8) et Q^n satisfait $R_{q,\eta}^*(S)$ (9) et que (3) est vérifiée avec $q = 0$ par P^n et Q^n . Alors,

$$\sup_{t \in \pi_{T,n}^{2S,T}} \|P_t^n f - Q_t^n f\|_\infty \leq \frac{C}{S^{\eta(q)}} \|f\|_\infty / n^h. \quad (11)$$

Démonstration. Nous allons faire la démonstration pour le cas $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Par (6), il suffit de montrer que

$$\|Q_{t_k^n}^n \Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty \leq \frac{C}{S^{\eta(q)}} \|f\|_\infty / n^{1+h}.$$

On commence par appliquer (2) pour Q^n , suivi par (4) :

$$\|Q_{t_k^n}^n \Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty \leq C \|\Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty \leq C \|P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_{q,\infty} / n^{1+h} \quad (12)$$

On a soit $t_k^n \geq S$, soit $t_m^n - t_{k+1}^n \geq S$ car $t_m^n > 2S$. Regardons d'abord le cas $S \leq t_m^n - t_{k+1}^n$, où peut appliquer l'hypothèse de régularisation (8) pour P^n , qui donne

$$\|Q_{t_k^n}^n \Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty \leq C S^{-\eta(q)} \|f\|_\infty / n^{1+h}.$$

Dans le cas où $t_k^n \geq S$, définissons les fonctions $\phi_\kappa(x) = \kappa^d \phi(\kappa x)$ avec $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $\phi \geq 0$. $(\phi_\kappa(x))_{\kappa \in \mathbb{N}}$ est une suite de Dirac, d'où elle tend vers une distribution delta quand $\kappa \rightarrow \infty$. On note $\phi_{\kappa, x_0}(x) = \phi_\kappa(x - x_0)$.

Par (3) $Q_{t_k^n}^n \Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f$ est continue, d'où

$$\begin{aligned} |Q_{t_k^n}^n \Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f(x_0)| &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} |\langle \phi_{\kappa, x_0}, Q_{t_k^n}^n \Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f \rangle| \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} |\langle Q_{t_k^n}^{n,*} \phi_{\kappa, x_0}, \Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f \rangle|. \end{aligned}$$

On utilise (7), (9) pour Q^n et ensuite (2) pour P^n , qui donne

$$\begin{aligned} |\langle Q_{t_k^n}^{n,*} \phi_{\kappa, x_0}, \Delta_{k+1}^n P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f \rangle| &\leq C \|Q_{t_k^n}^{n,*} \phi_{\kappa, x_0}\|_{q,1} \|P_{t_{k+1}^n, t_m^n}^n f\|_\infty / n^{1+h} \\ &\leq C S^{-\eta(q)} \|\phi_{\kappa, x_0}\|_1 \|f\|_\infty / n^{1+h} \end{aligned}$$

comme $\|\phi_{\kappa, x_0}\|_1 = \|\phi\|_1$ est bornée, la démonstration est terminée. \square

L'article de Bally et Rey donne une variante encore plus générale de ce résultat :

Proposition 3. Soit $q \in \mathbb{N}$, $h \geq 0$, $S \in [T/n, T/2)$ et $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante fixée. On suppose que $E_n(h, q)$ et $E_n^*(h, q)$ sont vérifiés pour P^n et Q^n . En plus, on suppose qu'il existe des noyaux $(\bar{P}_{t,s}^n)_{t,s \in \pi_{T,n}; t \leq s}$ qui satisfait $R_{q,\eta}(S)$ et $(\bar{Q}_{t,s}^n)_{t,s \in \pi_{T,n}; t \leq s}$ qui satisfait $R_{q,\eta}^*(S)$ et que (3) est vérifié avec $q = 0$ pour P^n et Q^n . On suppose aussi que pour tout $t, s \in \pi_{T,n}$ avec $s - t \geq S$,

$$\|Q_{t,s}^n f - \bar{Q}_{t,s}^n f\|_\infty + \|P_{t,s}^n f - \bar{P}_{t,s}^n f\|_\infty \leq C S^{-\eta(q)} \|f\|_\infty / n^{h+1}. \quad (13)$$

Alors,

$$\sup_{t \in \pi_{T,n}^{2,T}} \|P_t^n f - Q_t^n f\|_\infty \leq C \sup_{k \leq n} (|\mu_k^n| + |\nu_k^n|) S^{-\eta(q)} \|f\|_\infty / n^h.$$

Pour appliquer les résultats précédents sans avoir besoin de vérifier les propriétés de régularisation (8) et (9), nous allons introduire la modification $(\bar{Q}_t^n)_{t \in \pi_{T,n}}$ de $(Q_t^n)_{t \in \pi_{T,n}}$ telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée on a

$$\forall t, s \in \pi_{T,n}, \text{ avec } S \leq s - t, \quad \left\| Q_{t,s}^n f - \bar{Q}_{t,s}^n f \right\|_\infty \leq C S^{-\eta(q)} \|f\|_\infty / n^{h+1}. \quad (14)$$

Nous supposons également une propriété de régularisation forte pour $(\bar{Q}_t^n)_{t \in \pi_{T,n}}$: on fixe $q \in \mathbb{N}, S, \eta > 0$, et on suppose que pour tout multi-indice α, β avec $|\alpha| + |\beta| \leq q$ et $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\bar{R}_{q,\eta}(S) \quad \forall t, s \in \pi_{T,n}, \text{ avec } S \leq s - t, \quad \left\| \partial_\alpha \bar{Q}_{t,s}^n \partial_\beta f \right\|_\infty \leq C S^{-\eta(q)} \|f\|_\infty. \quad (15)$$

Avec cela on peut énoncer l'un des résultats du Théorème 2.6 de [1] :

Théorème 1. Fixons $q \in \mathbb{N}, h, S \in [T/n, T/2)$ et $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Nous supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}, m \geq n$, il existe des modifications $(\bar{Q}_t^m)_{t \in \pi_{T,m}}$ de $(Q_t^m)_{t \in \pi_{T,m}}$ telles qu'on a (14) et (15) pour ces q, h, η et S . On suppose en plus $E_m(h, q)$ et $E_m^*(h, q)$ pour $(P_t^m)_{t \in \pi_{T,m}} = (P_t)_{t \in \pi_{T,m}}$ et $(Q_t^m)_{t \in \pi_{T,m}}$ et que Q^m vérifie (3). Alors, on a

$$\sup_{t \in \pi_{T,n}^{2S,T}} \|P_t f - Q_t^n f\|_\infty \leq C S^{-\eta(q)} \|f\|_\infty / n^h. \quad (16)$$

La démonstration de l'article définit une suite de semigroupes discrets $((Q_t^{n,m})_{t \in \pi_{T,n}})_{m \in \mathbb{N}^*}$ tels que pour tout $t \in \pi_{T,n}$ on a $Q_t^{n,m} f(x) = Q_t^{nm} f(x)$. Ensuite, en utilisant la décomposition (6) et nos hypothèses, on peut montrer que $\forall t \in \pi_{T,n}^{2S,T}, \left\| Q_t^{n,m} f - Q_t^{n,m'} f \right\|_\infty \leq C S^{-\eta(q)} \|f\|_\infty / (n^h m^h)$. La suite $((Q_t^{n,m})_{t \in \pi_{T,n}})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est donc de Cauchy et converge vers $(P_t^n)_{t \in \pi_{T,n}}$ pour $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie (3). Pour retrouver le résultat, il suffit de prendre $m = 1$ et faire m' tendre vers l'infini.

4 Calcul de Malliavin

Dans leur article, [1] utilisent du calcul de Malliavin. Dans cette partie nous allons montrer son utilité de celui-ci puis montrer ses premiers théorèmes pour des $(Z_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ gaussiens.

4.1 BUT

Le calcul de Malliavin est utilisé pour prouver les différentes propriétés de régularisation. En effet si on considère

$$\partial_\alpha Q_t^{n,\Theta} \partial_\beta f(x) = \sum_{|\beta| + |\gamma| \leq q} \mathbb{E}_{\Theta_{t,n}} [\partial_\gamma f(X_t^n(x)) \mathcal{P}_\gamma(X_t^n)],$$

de la propriété de régularisation, alors le calcul de Malliavin nous donne

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_{\Theta_{t,n}} [\partial_\gamma f(X_t^n(x)) \mathcal{P}_\gamma(X_t^n(x))] \right| &= \left| \mathbb{E}_{\Theta_{t,n}} \left[f(X_t^n(x)) H_\gamma^{\Theta_{t,n}}(X_t^n(x), \mathcal{P}_\gamma(X_t^n(x))) \right] \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \mathbb{E}_{\Theta_{t,n}} \left[|H_\gamma^{\Theta_{t,n}}(X_t^n(x), \mathcal{P}_\gamma(X_t^n(x)))| \right] \\ &\leq C \|f\|_\infty \times A_1 \times A_2 \times A_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \vee \mathbb{E}_{\Theta_{t,n}} \left[\left(\left(\det \sigma_{X_t^n(x)} \right)^{-1} \right)^{2q(q+1)} \right]^{1/2} \\ A_2 &= 1 + \mathbf{E} \left[|X_t^n(x)|_{1,q+1}^{8qd(q+2)} \right]^{1/4} + \mathbf{E} \left[|LX_t^n(x)|_{q-1}^{8q} \right]^{1/4} \\ A_3 &= \mathbb{E} \left[|\mathcal{P}_\gamma(X_t^n(x))|_{|\gamma|}^4 \right]^{1/4} \end{aligned}$$

Grâce au calcul de Malliavin, il nous reste donc plus qu'à borner A_1 , A_2 et A_3 pour obtenir les propriétés de régularisation.

4.2 PREMIERS THÉORÈMES

Concrètement on considère la séquence de variables aléatoires $Z_k \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n}) \in \mathbf{R}^N, k \in \{1, \dots, n\}$ et on note $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, n étant fixe. Il existe $z_* = (z_*, k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans \mathbb{R} et $\varepsilon_*, r_* > 0$ tel que pour tout Borélien $A \subset \mathbf{R}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$

$$L_{z_*}(\varepsilon_*, r_*) \quad \mathbb{P}(Z_k \in A) \geq \varepsilon_* \lambda(A \cap B_{r_*}(z_*, k)) \quad (17)$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} . On définit aussi

$$M_p(Z) := 1 \vee \sup_{k \in \{1, \dots, n\}} \mathbf{E} [|Z_k|^p] \quad (18)$$

et $M_p(Z) < \infty$ pour tout $p \geq 1$. Pour $v > 0$, on définit $\varphi_v : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi_v(z) = \mathbf{1}_{|z| \leq v} + \exp \left(1 - \frac{v^2}{v^2 - (|z| - v)^2} \right) \mathbf{1}_{v < |z| < 2v}.$$

On a alors $\varphi_v \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leq \varphi_v \leq 1$ et la propriété suivante : pour tout $p, k \in \mathbf{N}$ il existe une constante $C_{q,p}$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi_v(z) \left| \frac{\partial^q}{\partial z^q} (\ln \varphi_v)(z) \right|^p \leq \frac{C_{q,p}}{v^{pq}}, \quad (19)$$

avec par convention $\ln \varphi_v(z) = 0$ pour $|z| \geq 2v$. Une conséquence immédiate de (17) est pour toute fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$

$$\mathbf{E}[f(Z_k)] \geq \varepsilon_* \int_{\mathbb{R}} \varphi_{r_*/2}(z - z_{*,k}) f(z) dz.$$

Par changement de variable

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_k \right) \right] \geq \varepsilon_* \int_{\mathbb{R}} \sqrt{n} \varphi_{r_*/2} \left(\sqrt{n} \left(z - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) \right) f(z) dz. \quad (20)$$

On note alors

$$m_* = \varepsilon_* \int_{\mathbb{R}} \varphi_{r_*/2}(z) dz = \varepsilon_* \int_{\mathbb{R}} \varphi_{r_*/2}(z - z_{*,k}) dz$$

et

$$\phi_n(z) = \sqrt{n} \varphi_{r_*/2}(\sqrt{n}z)$$

tout en sachant que $\int \phi_n(z) dz = m_* \varepsilon_*^{-1}$.

Par définition

$$\frac{1}{\sqrt{n}} Z_k = U_k \quad U_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Dans la suite on note $U = (U_1, \dots, U_n)$ et on considère l'ensemble de variables aléatoires : $\mathcal{S} = \{F = f(U) : f \text{ mesurable et } u \rightarrow f(u) \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbb{R})\}$.

On note aussi \mathcal{S}^d l'espace des vecteurs de dimension d avec leurs composantes dans \mathcal{S} .

Pour $F = f(U) \in \mathcal{S}$ on définit la dérivée de Malliavin par

$$D_k F = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial F}{\partial U_k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial f}{\partial u_k}(U), \quad k = 1, \dots, n. \quad (21)$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. La Matrice de Covariance de Malliavin pour une fonctionnelle multidimensionnelle $F = (F^1, \dots, F^d)$ est définie par

$$\sigma_F^{i,j} = \langle DF^i, DF^j \rangle = \sum_{k=1}^n D_k F^i \times D_k F^j, \quad i, j = 1, \dots, d \quad (22)$$

Soit $L : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ l'opérateur d'Ornstein Uhlenbeck. On note

$$\Gamma_k = \ln \phi_n \left(U_k - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) \in \mathcal{S}$$

On note que

$$\begin{aligned} D_k \Gamma_k &= \frac{1}{\sqrt{n}} \partial_{u_k} \ln \phi_n \left(U_k - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \partial_{u_k} \ln \phi_n \left(u_k - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) \Big|_{u_k=U_k} \\ &= \partial_{z^i} \ln \varphi_{r_*/2} \left(\sqrt{n} \left(U_k - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) \right) \end{aligned}$$

Finalement, on définit

$$-LF = \sum_{k=1}^n D_k D_k F + \sum_{k=1}^n D_k F \times D_k \Gamma_k.$$

Remarque. On a

$$\begin{aligned} D_m Z_k &= \delta_{m,k} \\ LZ_k &= -\partial_z \ln \varphi_{r_*/2} \left(\sqrt{n} \left(U_k - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) \right) \end{aligned}$$

Où $\delta_{m,k}$ est le symbole de Kroenecker. La formule duale du calcul de Malliavin est alors la suivante : pour tout $F, G \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{E}[FLG] = \mathbb{E}[\langle DF, DG \rangle] = \mathbb{E}[GLF] \quad (23)$$

En effet si $f, g \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\partial_{u_k} f(U_k) \partial_{u_k} g(U_k)] &= \frac{\varepsilon_*}{m_*} \int_{\mathbb{R}} \partial_{u_k} f(u) \partial_{u_k} g(u) \phi_n \left(u - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) du \\ &= -\frac{\varepsilon_\psi}{m_*} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left(\partial_{u_k}^2 g(u) + \partial_{u_k} g(u) \frac{\partial_{u_k} \phi_n \left(u - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right)}{\phi_n \left(u - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right)} \right) \phi_n \left(u - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) du \\ &= -\mathbb{E} \left[f(U_k) \left(\partial_{u_k}^2 g(U_k) + \partial_{u_k} g(U_k) \partial_{u_k} \ln \phi_n \left(U_k - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Il en suit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[D_k F \times D_k G] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\partial_{u_k} f(U) \times \partial_{u_k} g(U)] \\ &= -\mathbf{E} \left[f(U) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \partial_{u_k}^2 g(U) + \frac{1}{\sqrt{n}} \partial_{u_k} g(U) \frac{1}{\sqrt{n}} \partial_{u_k} \ln \phi_n \left(U_k - \frac{z_{*,k}}{\sqrt{n}} \right) \right] \\ &= -\mathbf{E} \left[f(U) \sum_{k=1}^n D_k D_k G + D_k G D_k \Gamma_k \right] \\ &= \mathbf{E}[FLG], \end{aligned}$$

ce qui correspond à (23).

On a la formule suivante :

Pour $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $F \in \mathcal{S}^d$

$$D\phi(F) = \sum_{j=1}^d \partial_j \phi(F) DF^j. \quad (24)$$

De plus on peut prouver avec (24) et la relation duale

$$L\phi(F) = \sum_{j=1}^d \partial_j \phi(F) LF^j + \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j \phi(F) \langle DF^i, DF^j \rangle. \quad (25)$$

En particulier pour $F, G \in \mathcal{S}$,

$$L(FG) = FLG + GLF + 2\langle DF, DG \rangle. \quad (26)$$

Proposition 4. Soit $F \in \mathcal{S}^d$ et $G \in \mathcal{S}$ tels que $\mathbb{E}[(\det \sigma_F)^{-p}] < \infty$ pour tout $p \geq 1$. On note $\gamma_F = \sigma_F^{-1}$. Alors pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $i = 1, \dots, d$

$$\mathbb{E}[\partial_i \phi(F)G] = \mathbf{E}[\phi(F)H_i(F, G)] \quad (27)$$

avec

$$-H(F, G) = G\gamma_F LF + \langle D(G\gamma_F), DF \rangle \quad (28)$$

et

$$H_i(F, G) = -\sum_{j=1}^d G\gamma_F^{i,j} LF^j + \langle D(G\gamma_F^{i,j}), DF^j \rangle.$$

De plus pour $q \in \{1, \dots, d\}$

$$\mathbf{E}[\partial^q \phi(F)G] = \mathbf{E}[\phi(F)H_q(F, G)] \quad (29)$$

avec $H_q(F, G)$ définit par récurrence $H_q(F, G) = H(F, H_{q-1}(F, G))$.

Démonstration. En utilisant $D\phi(F) = \nabla\phi(F)DF$ on a

$$\langle D\phi(F), DF \rangle = \nabla\phi(F)\langle DF, DF \rangle = \nabla\phi(F)\sigma_F.$$

Il en suit que $\nabla\phi(F) = \gamma_F\langle D\phi(F), DF \rangle$. Par (26) et (23),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[G\nabla\phi(F)] &= \mathbf{E}[G\gamma_F\langle D\phi(F), DF \rangle] = \frac{1}{2}\mathbf{E}[G\gamma_F(L(\phi(F)F) - \phi(F)LF - FL\phi(F))] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{E}[\phi(F)(FL(G\gamma_F) - G\gamma_F LF - L(G\gamma_F F))]. \end{aligned}$$

On utilise encore (26) pour obtenir $H(F, G)$ dans (28). □

5 Résultats pour le schéma d'Euler

Dans le cas du schéma d'euler, déjà traité de manière plus générale par [2], la proposition (2) donne une dépendance de la différence souhaitée en $\frac{1}{n^h}$, avec dans ce cas $h = 1$. En passant au logarithme on obtient alors une dépendance du logarithme de la différence en $-\ln(n)$. Dans cette section, avec différents exemples pris dans et hors du cadre de [1] nous allons essayer de retrouver cette dépendance grâce à des simulations numériques et des méthodes de Monte-Carlo.

Démonstration. Tout d'abord, on note A le générateur infinitesimal du processus donné par

$$Af(x) = b(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \quad (30)$$

On rappelle également que

$$\mathbb{E}[f(X_{\frac{1}{n}})|X_0 = x] = P_{\frac{1}{n}}f(x) \quad (31)$$

Sans perte de généralité on considère $T = 1$ ce qui implique $t_{k+1} - t_k = \frac{1}{n}$
On a alors

$$|\mathbb{E}[f(X_{t_{k+1}})|X_{t_k} = x] - \mathbb{E}[f(X_{t_{k+1}}^{(n)})|X_{t_k}^{(n)} = x]| = |\mathbb{E}[f(X_{\frac{1}{n}})|X_0 = x] - \mathbb{E}[f(X_{\frac{1}{n}}^{(n)})|X_0^{(n)} = x]|$$

Or par la formule d'Itô :

$$f(X_{\frac{1}{n}}) - f(X_0) = \int_0^{\frac{1}{n}} Af(X_s) ds + \int_0^{\frac{1}{n}} \sigma(X_s) f'(X_s) dW_s$$

Alors en passant à l'espérance sachant $X_0 = x$

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{n}} f(x) - f(x) &= \int_0^{\frac{1}{n}} P_s Af(x) ds \\ &= \frac{1}{n} AP_0 f(x) + \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^s A^2 P_u f(x) du ds \\ &= \frac{1}{n} Af(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathbb{E}[f(X_{\frac{1}{n}})|X_0 = x] - f(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, par définition du schéma d'Euler :

$$X_{\frac{1}{n}}^{(n)} = X_0 + b(X_0) \frac{1}{n} + \sigma(X_0) \frac{Z_1}{\sqrt{n}} = x + \Delta \quad Z_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Un développement de Taylor donne :

$$f(X_{\frac{1}{n}}^{(n)}) = f(X_0) + \Delta f'(X_0) + \frac{1}{2} \Delta^2 f''(X_0) + O(\Delta^3)$$

On a $O(\Delta^3) = O(\frac{1}{n^2})$

On a alors en passant à l'espérance sachant $X_0 = x$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_{\frac{1}{n}}^{(n)})|X_0^{(n)} = x] - f(x) &= f'(x) \frac{b(x)}{n} + \frac{1}{2n} \sigma^2 f''(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= f(x) + \frac{1}{n} Af(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$|\mathbb{E}[f(X_{t_{k+1}})|X_{t_k} = x] - \mathbb{E}[f(X_{t_{k+1}}^{(n)})|X_{t_k}^{(n)} = x]| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ce qui nous donne le résultat voulu avec une différence en $\frac{1}{n}$ en sommant les différences. □

5.1 EXEMPLE DE PROCESSUS RESPECTANT LE CADRE DU PAPIER

Pour rappel un processus vérifiant l'équation différentielle :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R} \quad (32)$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien dans \mathbb{R} , admet pour schéma d'Euler $(X_{t_k}^{(n)})_{k=0, \dots, n}$ défini par :

$$X_{t_{k+1}}^{(n)} = X_{t_k}^{(n)} + b(t_k, X_{t_k}^{(n)})\frac{T}{n} + \sigma(t_k, X_{t_k}^{(n)})W_{\frac{T}{n}} \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R} \quad (33)$$

Afin de se ramener au cadre de [1] nous recherchons une fonction $f \in C^\infty$ telle que $X_t = f(W_t)$ vérifie une equation différention de la forme (32) avec : b et σ bornées et dont toutes les dérivées d'ordres supérieurs sont bornées et σ ne s'annule pas.

Pour ce faire nous prenons la fonction $f(x) = \operatorname{argsinh}(x)$. Par la formule d'Itô nous avons

$$dX_t = -\frac{1}{2} \frac{W_t}{(1 + W_t^2)^{\frac{3}{2}}} dt + \frac{1}{\sqrt{1 + W_t^2}} dW_t \quad (34)$$

en utilisant le fait que $W_t = \sinh X_t$ nous avons l'équation

$$dX_t = -\frac{1}{2} \frac{\sinh X_t}{(\cosh X_t)^{\frac{3}{2}}} dt + \frac{1}{\cosh X_t} dW_t \quad (35)$$

Par unicité de la décomposition en processus d'Itô on a

$$b(t, x) = -\frac{1}{2} \frac{\sinh x}{(\cosh x)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \sigma(t, x) = \frac{1}{\cosh x} \quad (36)$$

qui sont bornées à dérivées bornées avec σ qui ne s'annule pas.

Résultats :

Dans le cadre de ce processus nous prenons $T = 1$.

- Dans un premier temps en traçant un histogramme de 10^5 estimations de notre processus stochastique par l'équation d'Euler associée, nous avons voulu mettre en évidence l'existence d'une densité.

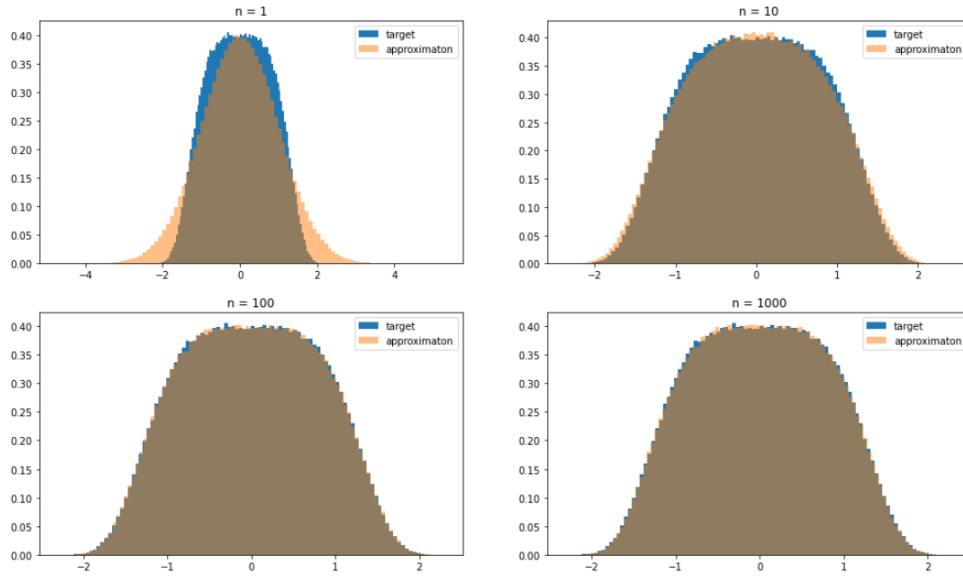


FIGURE 1 – Convergence de la densité du processus approximé par le schéma d'Euler vers celle du processus exact, $n = (1, 10, 100, 1000)$

On voit clairement l'existence d'une densité et une convergence de celle-ci vers la densité du processus exact.

- Nous avons simulé le processus grâce au schéma d'Euler et calculé l'évolution du logarithme de la différence (11) en fonction du logarithme de n pour $n \in \{1, \dots, 20\}$ pour plusieurs g :
 - g bornée et continue : $g(x) = \cos(x)$
 - g bornée non continue : $g(x) = \cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5}$
 - g non bornée non continue (hors du cadre de [1]) : $g(x) = x \times (\cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5})$

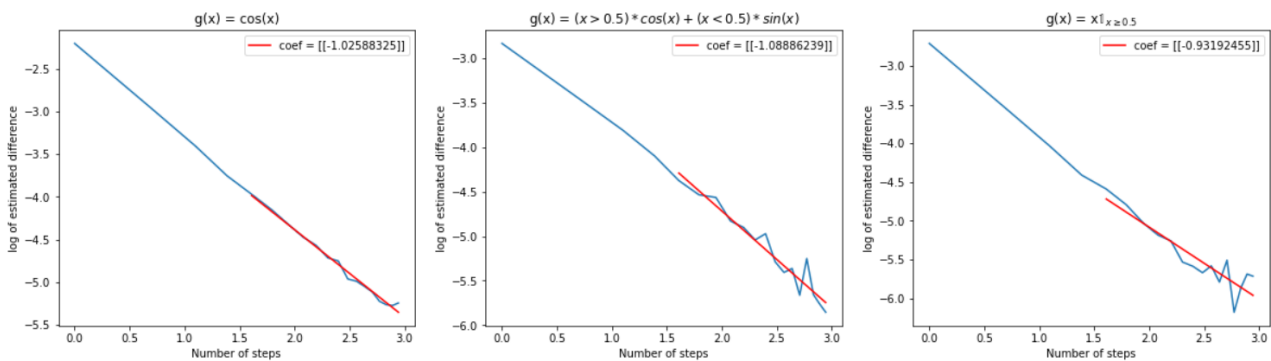


FIGURE 2 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$

Notes :

- Les oscillations obtenues pour les deux graphes de droites sont dû à l'erreur de Monte Carlo. Pour confirmer cette intuition, nous avons augmentés le nombre d'échantillons de simulations jusqu'à 10^7 en observant à chaque fois une réduction d'amplitude.
- Le coefficient de régression linéaire obtenu est proche de 1 (en négatif évidemment), dans les deux premier cas, ce qui confirme la dépendance attendue par [2] bien que celle-ci soit une **dépendance asymptotique**. Par ailleurs, dans le cas g non borné mais à croissance linéaire on retrouve également cette dépendance, ce qui peut suggérer éventuellement une possible extension des résultats.
- Toujours en étudiant la convergence en loi du processus obtenue par le schéma d'Euler vers le processus cible, nous avons étudié la convergence vers 0 de

$$\left\| E\left[\sup_{t_k^n \in \pi_{T,n}^T} X_{t_k^n} \right] - E\left[\sup_{t_k^n \in \pi_{T,n}^T} X_{t_k^n}^n \right] \right\| \quad (37)$$

Nous pensons qu'étant donné que le processus obtenu grâce au schéma d'Euler converge en loi vers le processus cible, le sup du processus du schéma d'Euler et le sup de processus cible devrait avoir la même loi quand n va à l'infini. Nous l'avons vérifié grâce des histogrammes de distributions qui suivent :

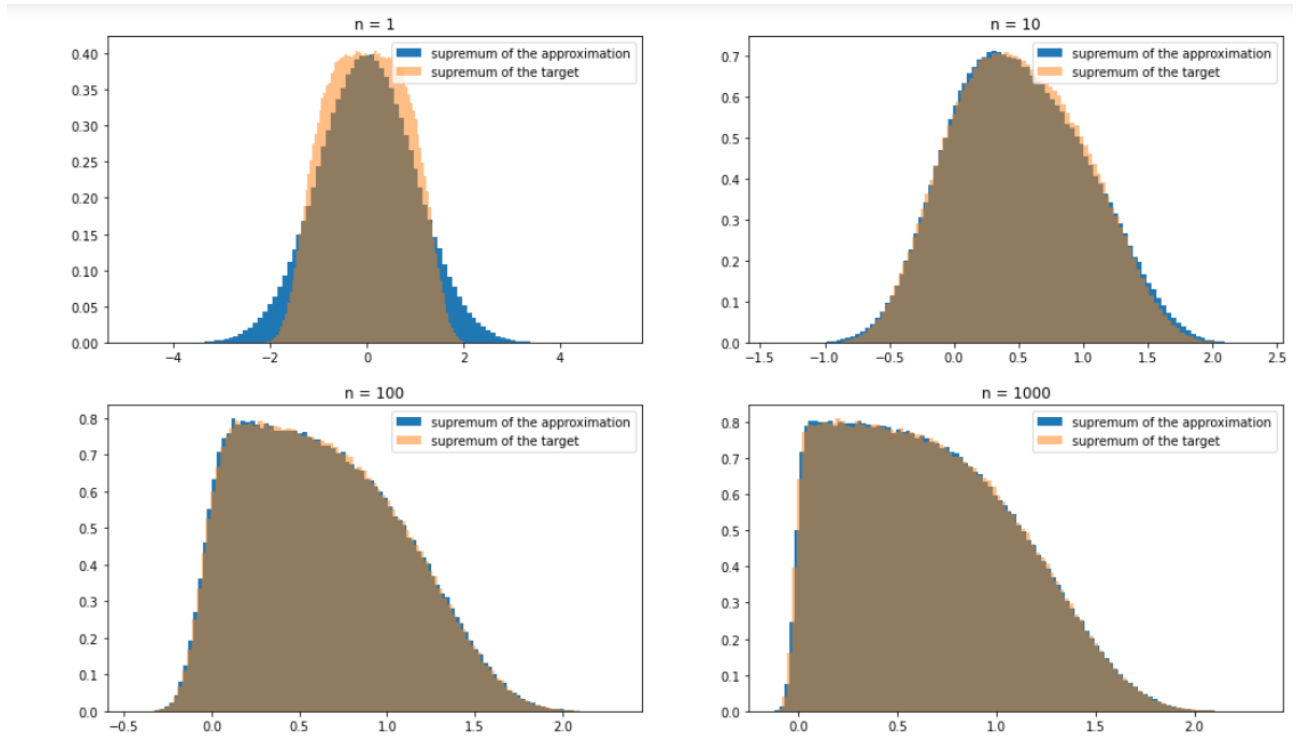


FIGURE 3 – convergence de la densité de $\sup_{t_k^n \in \pi_{T,n}^T} X_{t_k^n}^n$ et de $\sup_{t_k^n \in \pi_{T,n}^T} X_{t_k^n}$ vers la même densité

Nous avons également étudié l'évolution du log de (37) en fonction du log n. on obtient la figure :

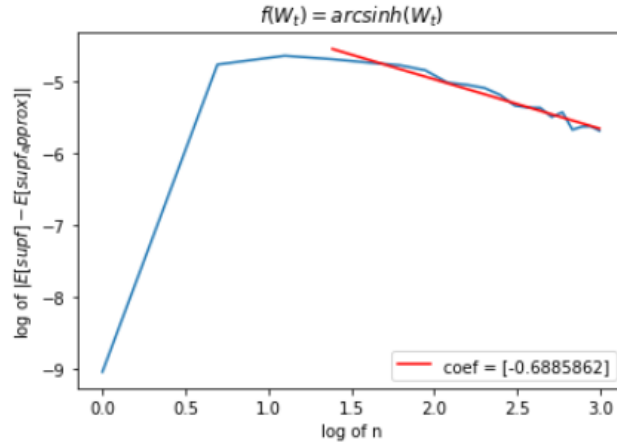


FIGURE 4 – évolution du log de (37) en fonction du log n

5.2 PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus stochastique avec des applications en mathématiques financières et en physique. En effet le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un prototype de processus de relaxation bruité. En mathématiques financières, il peut être utilisé pour modéliser des taux d'intérêt, des taux de change de monnaies ou l'évolutions des prix de manière stochastique.

Définition 2. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (38)$$

où $\theta > 0$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien dans \mathbb{R} .

Son schéma d'Euler $(X_{t_k}^{(n)})_{k=0, \dots, n}$ naturellement associé est alors

$$X_{t_{k+1}}^{(n)} = X_{t_k}^{(n)} - \theta(X_{t_k}^{(n)} - \mu) \frac{T}{n} + \sigma W_{\frac{T}{n}}, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (39)$$

où $t_k = kT/n \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Remarque Dans le cadre des mathématiques financières, μ représente l'équilibre ou la valeur moyenne, σ la volatilité, causée par des "chocs", autour de celle-ci et θ le taux auquel la variable retourne à sa moyenne.

Proposition Pour tout $t \geq s$, le processus X satisfait l'équation stochastique

$$X_t = e^{-\theta(t-s)} X_s + \mu(1 - e^{-\theta(t-s)}) + \sigma e^{-\theta t} \int_s^t e^{\theta u} dW_u.$$

Ce qui implique que $X_t \sim \mathcal{N}(e^{-\theta t} X_0 + \mu(1 - e^{-\theta t}), \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t}))$

Démonstration. On pose $f(t, X_t) = X_t e^{\theta t}$

La formule d'Itô donne :

$$df(t, X_t) = \theta X_t e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX_t$$

Or

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu)dt + \sigma dW_t$$

D'où avec les termes qui se compensent

$$df(t, X_t) = \theta \mu e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dW_t$$

En intégrant entre t et s on obtient

$$X_t e^{\theta t} = e^{\theta s} X_s + \mu(1 - e^{\theta s}) + \sigma \int_s^t e^{\theta u} dW_u.$$

Puis

$$X_t e^{\theta t} = e^{\theta s} X_s + \mu(1 - e^{\theta s}) + \sigma \int_s^t e^{\theta u} dW_u.$$

Enfin

$$X_t = e^{-\theta(t-s)} X_s + \mu(1 - e^{-\theta(t-s)}) + \sigma e^{-\theta t} \int_s^t e^{\theta u} dW_u.$$

Pour la deuxième partie de la proposition, on rappelle que si $g \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ alors le processus $(\int_0^t g(u) dW_u)_{t \in [0, T]}$ est un processus Gaussien avec $\mathbb{E}[\int_0^t g(u) dW_u] = 0$ et $\text{Var}(\int_0^t g(u) dW_u) = \int_0^t g(u)^2 du$.

Le calcul de cette intégrale nous donne alors $X_t \sim \mathcal{N}(e^{-\theta t} X_0 + \mu(1 - e^{-\theta t}), \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t}))$. □

Remarque $b : X_t \mapsto -\theta(X_t - \mu)$ étant linéaire mais non bornée, nous ne sommes pas dans le cadre de [1] mais dans celui de [2]. Nous devons tout de même retrouver la dépendance en $\frac{1}{n}$ souhaitée.

Résultats :

Dans toute la suite nous avons pris les paramètres suivant $(\theta; \mu; \sigma; X_0) = (3; 0.4; 0.1; 0.2)$, sauf indication contraire nous simulons le processus pour $T = 1$ et les estimations de Monte-Carlo sont faites avec $N = 10^6$.

- Dans un premier temps en traçant un histogramme de 10^6 estimations de notre processus stochastique par l'équation d'Euler associée, nous avons voulu mettre en évidence l'existence d'une densité.

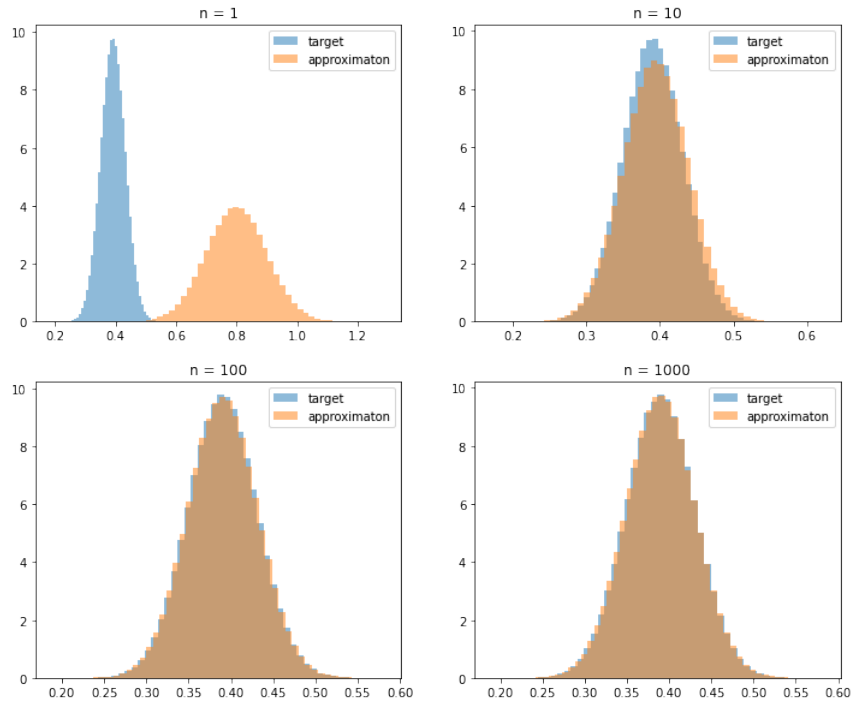


FIGURE 5 – Convergence de la densité du processus approximé par le schéma d’Euler vers celle du processus exact, $n = (1, 10, 100, 1000)$

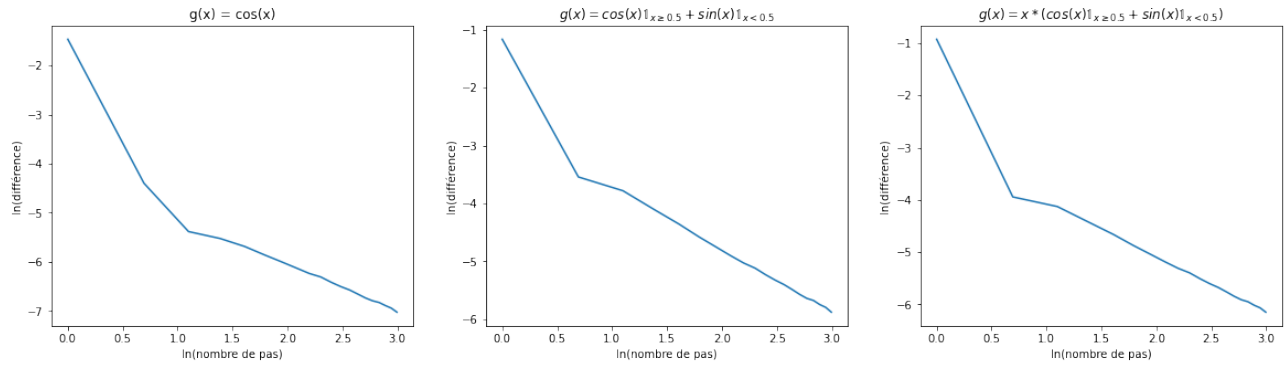
On voit clairement l’existence d’une densité et une convergence de celle-ci vers la densité du processus exact.

- Dans un second temps, nous avons simulé le processus grâce au schéma d’Euler et calculé l’évolution du logarithme de la différence (11) en fonction du logarithme de n pour $n \in \{1, \dots, 20\}$ pour plusieurs g :

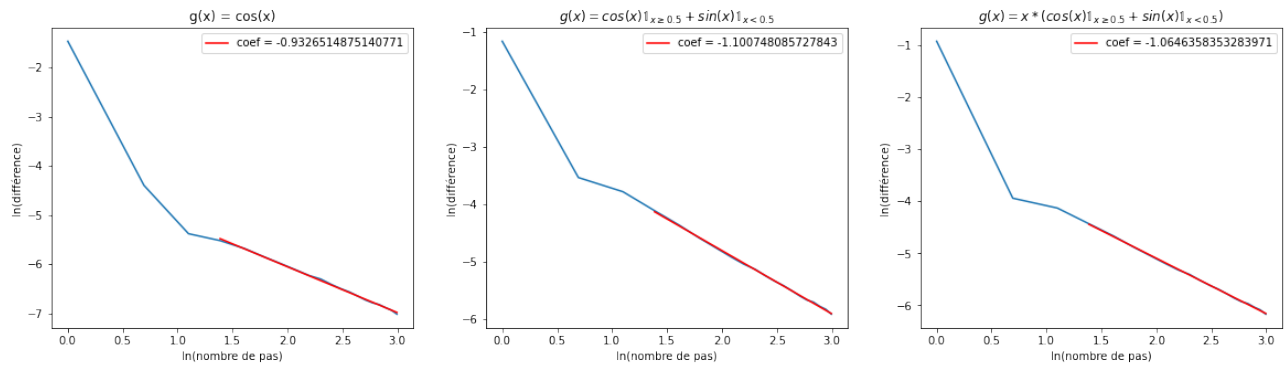
— g bornée et continue : $g(x) = \cos(x)$

— g bornée non continue : $g(x) = \cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5}$

— g non bornée non continue (hors du cadre de $[1]$) : $g(x) = x \times (\cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5})$

FIGURE 6 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$

Pour une meilleure estimation, nous avons fait une régression linéaire sur la dépendance en n au-delà d'un n_0 qui varie selon les figures. Il faut cependant bien noter que l'échelle étant logarithme, la grande majorité des points est concentrée "à droite" des différents graphiques.

FIGURE 7 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$ avec une régression linéaire

On retrouve bien un coefficient de régression linéaire proche de 1 (en négatif évidemment), dans les deux premier cas, ce qui confirme la dépendance attendue par (2) bien que celle-ci soit une **dépendance asymptotique**. Par ailleurs, dans le cas g non bornée mais à croissance linéaire on retrouve également cette dépendance, ce qui peut suggérer une possible extension des résultats. Néanmoins aucun résultat général ne peut en être déduit en sachant de dans le cadre du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, X_t reste autour de sa valeur moyenne μ .

5.3 PROCESSUS DE BLACK-SCHOLES

Le processus de Black-Scholes constitue un modèle mathématique pour les marchés financiers contenant des produits dérivés.

Définition 3. *Le processus de Black-Scholes est solution de l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

où $\sigma > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien dans \mathbb{R} .
Sa formule générale est alors donnée par :

$$X_t = x_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (41)$$

Remarques

- En mettant l'équation de la forme $\frac{dX_t}{X_t} = b dt + \sigma dW_t$, $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, on voit que $b dt$ peut représenter la moyenne du rendement infinitésimal d'un "stock" et $\sigma^2 dt$ sa variance.
- $\tilde{b} : X_t \mapsto bX_t$ et $\tilde{\sigma} : X_t \mapsto \sigma X_t$ étant linéaires mais non bornées, nous ne sommes pas dans le cadre de [1] mais dans celui de [2]. Nous devons tout de même retrouver la dépendance en $\frac{1}{n}$ souhaitée.

Résultats :

Dans toute la suite, nous avons pris les paramètres suivant $(b; \sigma; X_0) = (1; 1; 0.2)$, sauf indication contraire nous simulons le processus pour $T = 1$ et les estimations de Monte-Carlo sont faites avec $N = 10^7$.

- Dans un premier temps, nous avons encore mis en évidence l'existence et la convergence d'une densité.

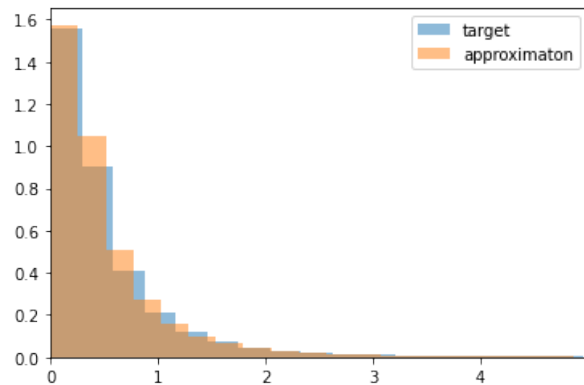
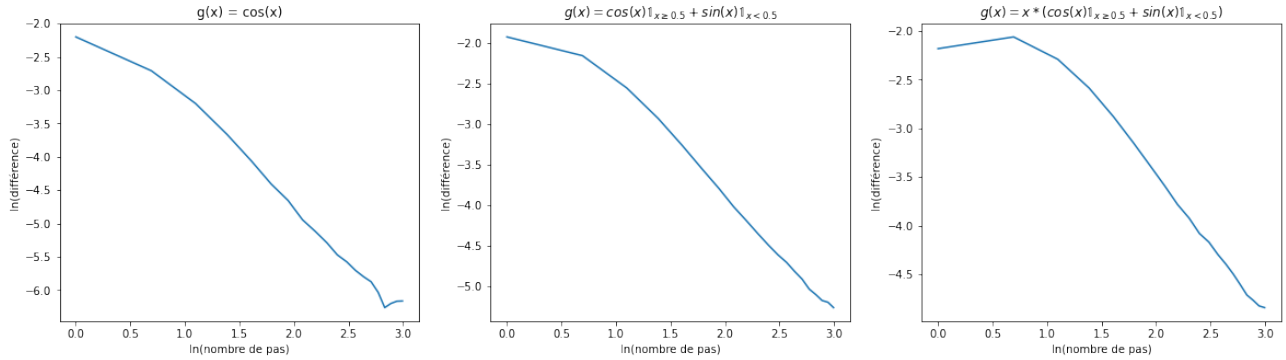
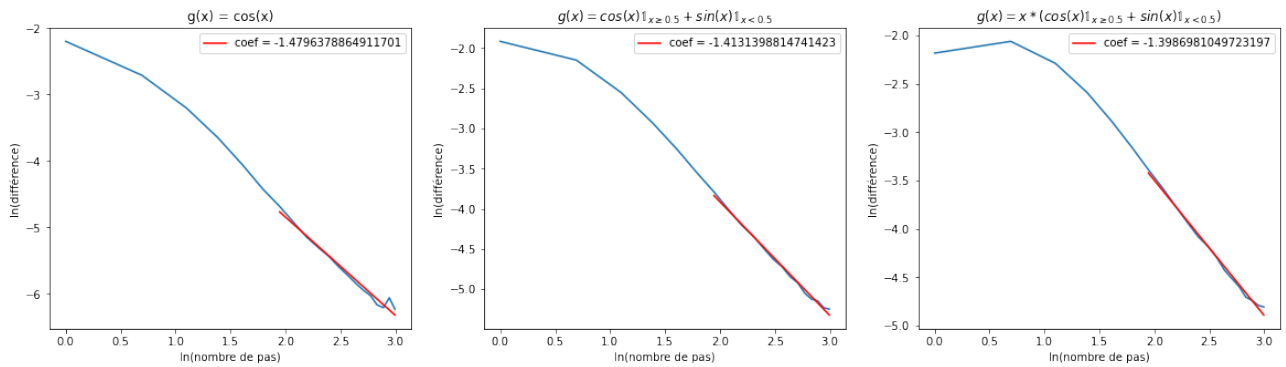


FIGURE 8 – Convergence de la densité du processus approximé par le schéma d'Euler vers celle du processus exact, $n = 1000$

On voit toujours clairement l'existence d'une densité et une proximité de celle-ci avec la densité du processus exact.

- Dans un second temps, nous avons aussi simulé le processus grâce au schéma d'Euler et calculé l'évolution du logarithme de la différence (11) en fonction du logarithme de n pour $n \in \{1, \dots, 20\}$ pour toujours les mêmes g .

FIGURE 9 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$ FIGURE 10 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$ avec une régression linéaire

Cette fois ci on observe un coefficient supérieur à 1, proche de 1,4. Nos résultats étant asymptotiques cela ne semble pas les contredire. En effet, 1,4 est supérieur à 1 et il est probable que la décroissance ralentisse lorsque n tend vers $+\infty$ pour terminer avec un coefficient directeur de 1. Encore une fois le modèle fonctionne pour des b et σ dans le cas de l'équation d'Euler comme il est prévu par (11).

5.4 APPROXIMATION À "L'INFINIE"

Avec notre méthode, pour estimer la différence (2) en fonction de n , il nous faut la formule exacte d'un processus stochastique et son équation d'Euler. Cependant, cela peut parfois être contraignant car nous aimerions pouvoir fixer $b(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ comme nous le souhaitons pour pouvoir observer différents cas. Pour se faire, nous avons essayé une autre solution à titre d'exploration numérique qui n'est soutenue par aucune preuve mathématique.

Nous remplaçons l'estimation exacte du processus par son approximation avec le schéma d'Euler à "l'infini", i.e. pour " n_{infini} " $\gg n$. Sauf mention contraire, dans la suite nous prenons $n_{infini} = 3000$ et $n \in \{1, \dots, 20\}$.

Résultats :

- Dans un premier temps, nous avons mis à l'épreuve notre méthode dans un cas déjà traité pour avoir une première idée de sa pertinence **même si cela ne fait pas office de preuve**. Nous avons donc réemployer le cas d'Ornstein-Uhlenbeck avec les mêmes paramètres que précédemment : $(\theta; \mu; \sigma; X_0) = (3; 0.4; 0.1; 0.2)$, sauf indication contraire, nous simulons le processus pour $T = 1$ et les estimations de Monte-Carlo sont faites avec $N = 10^6$.

Nous avons, tout d'abord, regardé la densité

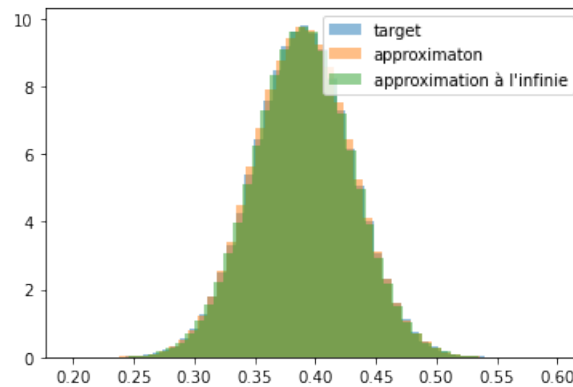


FIGURE 11 – Comparaison des densités obtenues par le schéma exacte, l'approximation du schéma d'Euler et l'approximation pour n_{infini}

Ici peu de surprises, la densité ayant déjà convergé pour $n = 1000$, elle est simplement encore plus proche de la densité exacte.

- Dans un second temps, nous avons calculé la différence entre notre approximation et le processus exact et la différence entre notre approximation et notre approximation "à l'infini". Nous avons également calculé l'erreur moyenne (en %) entre le processus exact et notre approximation à l'infini pour les mêmes g que précédemment,
 - g bornée et continue : $g(x) = \cos(x)$, erreur = $3,7 \times 10^{-3}\%$
 - g bornée non continue : $g(x) = \cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5}$, erreur = $2,0 \times 10^{-2}\%$
 - g non bornée non continue (hors du cadre de [1]) : $g(x) = x \times (\cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5})$, erreur = $5,6 \times 10^{-3}\%$

Nous obtenons les graphiques suivants :

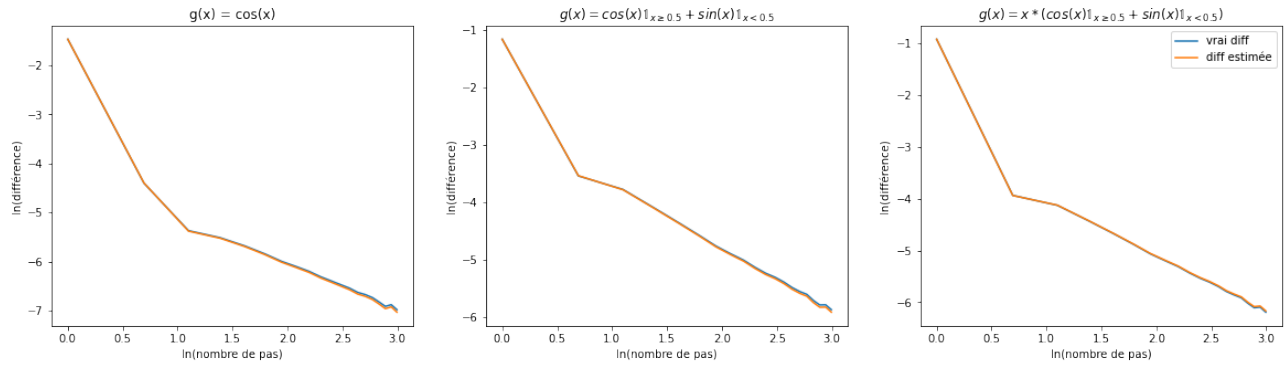


FIGURE 12 – évolution de $\ln(\text{différence exacte})$, en bleu, et $\ln(\text{différence estimée})$, en orange, en fonction de $\ln(n)$

Les erreurs calculées étant très faibles et les courbes étant très proches, il semble pertinent de poursuivre notre exploration numérique sur de nouveaux cas, où cette fois ci nous avons seulement le schéma d'Euler et pas la formule exacte du processus.

- Ensuite, nous avons testé notre méthode sur un cas qui reste dans le cadre de [1]. Nous avons pris $b : X_t \mapsto \cos(X_t)$ et $\sigma : X_t \mapsto 2 + \sin(X_t)$ toutes les deux continues dérivables et bornées avec $\sigma > 0$ et $X_0 = 1$.

Nous obtenons alors les densités suivantes :

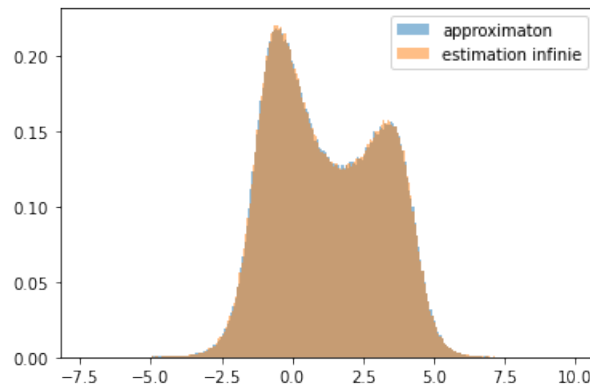


FIGURE 13 – Comparaison des densités obtenues par notre approximation par le schéma d'Euler et l'approximation pour n_{infinie}

Ce qui confirme l'existence d'une densité qui semble converger, il n'est cependant pas surprenant que ces dernières soient proches car elles proviennent toutes les deux du schéma d'Euler qu'on sait converger.

Nous obtenons ensuite les différences suivantes avec $N = 10^7$ et les mêmes g :

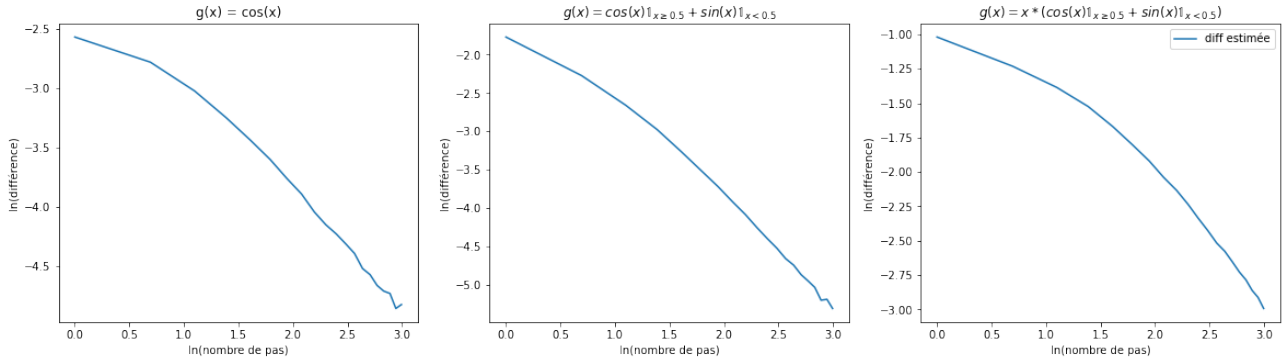


FIGURE 14 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$

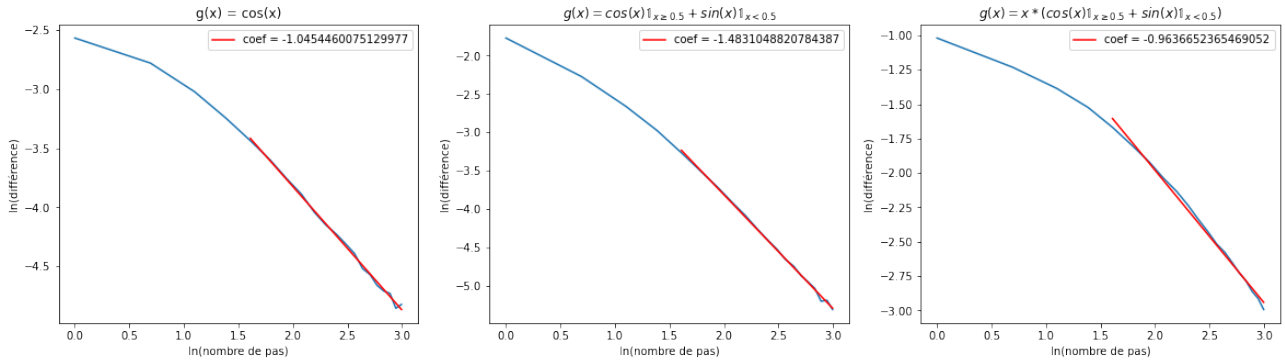


FIGURE 15 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$ avec une régression linéaire

Nous rappelons que l'échelle étant logarithmique, la grande majorité des points est concentrée "à droite" des différents graphiques.

On retrouve bien un coefficient de régression linéaire d'au moins 1 (en négatif évidemment), dans les deux premier cas, ce qui confirme une fois de plus la dépendance attendue par (2) bien que celle-ci soit une **dépendance asymptotique**. Par ailleurs, dans le cas g non bornée mais à croissance linéaire on retrouve également cette dépendance, ce qui peut encore une fois suggérer éventuellement une possible extension des résultats

- Enfin, nous avons testé notre méthode sur un cas qui sort du cadre de [1] mais aussi de celui de [2]. Nous avons choisi $b : X_t \mapsto 1 + \frac{X_t^2}{100} - X_t$ et $\sigma : X_t \mapsto X_t$, avec $X_0 = 1$.

Nous obtenons alors les densités suivantes :

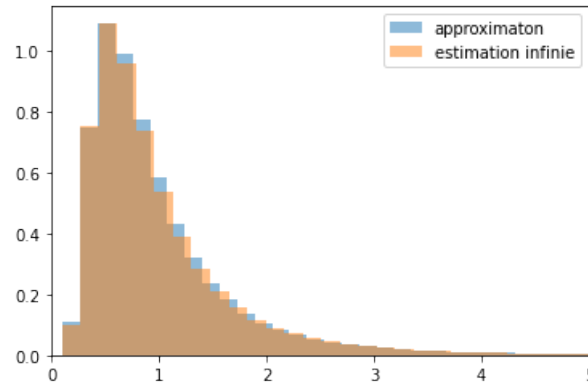


FIGURE 16 – Comparaison des densités obtenues par notre approximation par le schéma d'Euler et l'approximation pour $n_{infinie}$

Et les différences suivantes avec $N = 10^7$ et les mêmes g :

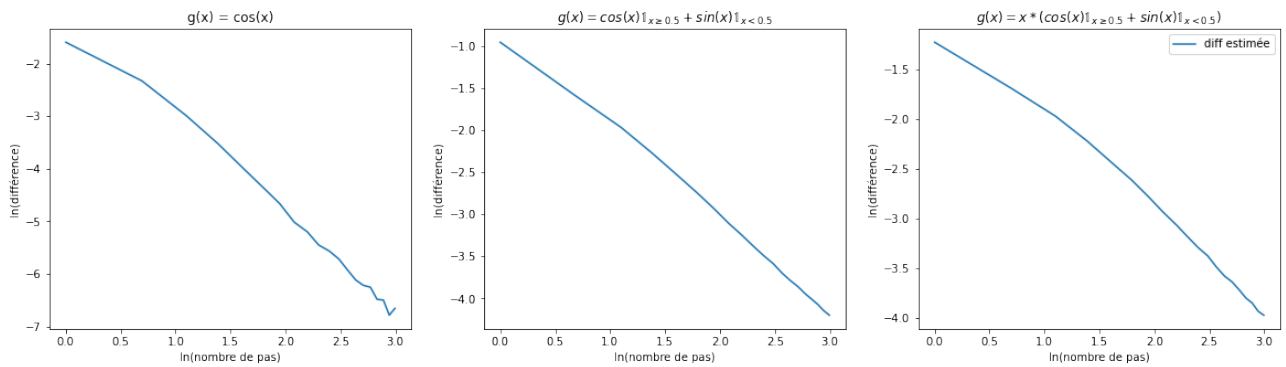


FIGURE 17 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$

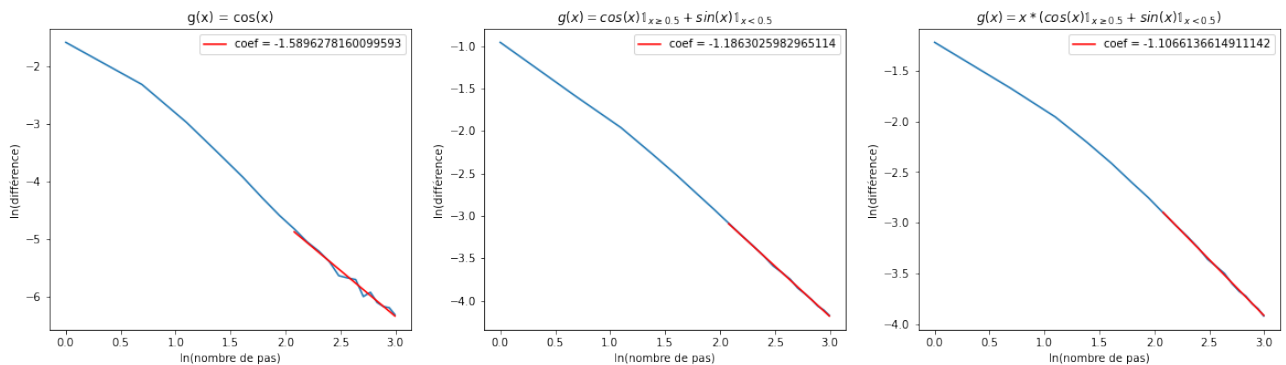


FIGURE 18 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$ avec une régression linéaire

Encore une fois on retrouve les mêmes résultats (coeffs proche de 1), même pour b , σ et g hors du cadre de notre analyse. Le cadre de celle-ci pourrait donc éventuellement être

élargi, **mais nous ne pouvons tirer aucune conclusion** car il s'agit d'une exploration numérique avec le processus exact remplacé par le schéma d'Euler à n élevé.

6 Résultats pour le schéma de Talay

6.1 PRÉSENTATION DU SCHÉMA EN DIMENSION 1

Soit un mouvement Brownien de dimension 1, $(W_t)_{t \geq 0}$, on s'intéresse à la solution, qu'on admet existante et unique, de l'équation stochastique 1-dimensionnelle.

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s,$$

ou $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sont localement bornées. Le générateur infinitesimal du processus est donné par

$$Af(x) = b(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)$$

Son domaine $\mathcal{D}(A)$ contient $\mathcal{D}(A)_0 = \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$ qui est dense dans $\mathcal{C}_0(E)$.

Maintenant, présentons le schéma de Talay [4], que l'on simplifie dans le cadre de notre analyse.

On introduit la variable aléatoire $\mathcal{W}_t = W_t^2 - t$.

Le schéma de Talay est alors donné par

$$\begin{aligned} X_{t_{k+1}}^{(n)} = & X_{t_k}^{(n)} + b(X_{t_k}^{(n)}) \frac{T}{n} + \sigma(X_{t_k}^{(n)}) W_{\frac{T}{n}} + \frac{d\sigma}{dx}(X_{t_k}^{(n)}) \sigma(X_{t_k}^{(n)}) \mathcal{W}_{t_k} \\ & + \bar{\sigma}(X_{t_k}^{(n)}) W_{\frac{T}{n}} \frac{T}{n} + \frac{T^2}{n^2} A b(X_{t_k}^{(n)}), \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (42)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{\partial b}{\partial x} \sigma(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} b(x) + \sigma^2(x) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x) \right). \end{aligned}$$

Propriété Le schéma de Talay est d'ordre 2, i.e converge avec $h = 2^{-11}$.

Démonstration. Admis, voir [5]. □

6.2 PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK

Pour ce processus le schéma de Talay est donnée par :

$$X_{t_{k+1}}^{(n)} = X_{t_k}^{(n)} - \theta(X_{t_k}^{(n)} - \mu) \frac{T}{n} + \sigma W_{\frac{T}{n}} + \theta^2(x - \mu) \frac{T^2}{n^2} - \theta \sigma W_{\frac{T}{n}} \frac{T}{n}, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (43)$$

où $t_k = kT/n \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$

Résultats :

Dans toute la suite nous avons pris les paramètres suivant $(\theta; \mu; \sigma; X_0) = (3; 0.4; 0.1; 0.2)$ (mêmes que précédemment), sauf indication contraire nous simulons le processus pour $T = 1$ et les estimations de Monte-Carlos sont faites avec $N = 10^6$.

- Dans un premier temps, nous avons simulé le processus grâce au schéma de Talay et calculé l'évolution du logarithme de la différence 11 en fonction du logarithme de n pour $n \in \{1, \dots, 20\}$, toujours avec les mêmes g :

- g bornée et continue : $g(x) = \cos(x)$
- g bornée non continue : $g(x) = \cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5}$
- g non bornée non continue (hors du cadre de [1]) : $g(x) = x \times (\cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5})$

Nous obtenons alors les graphiques suivants :

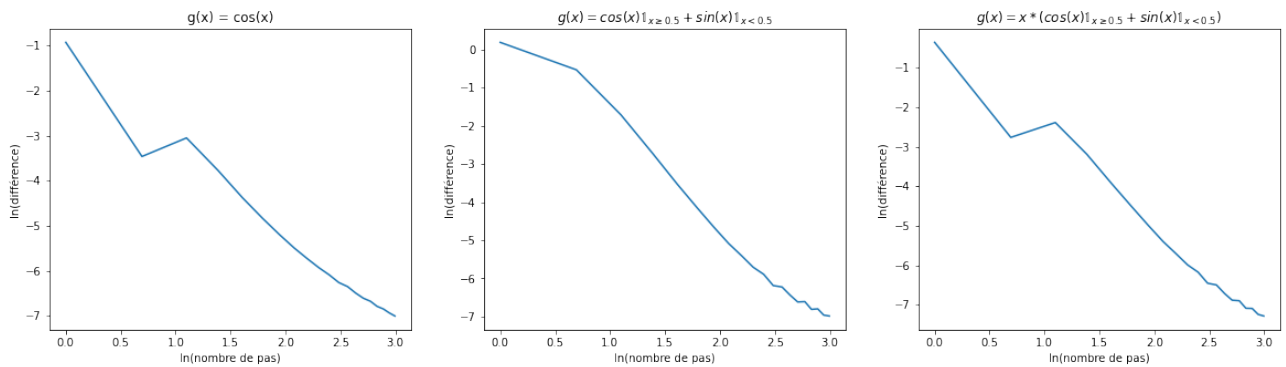


FIGURE 19 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$

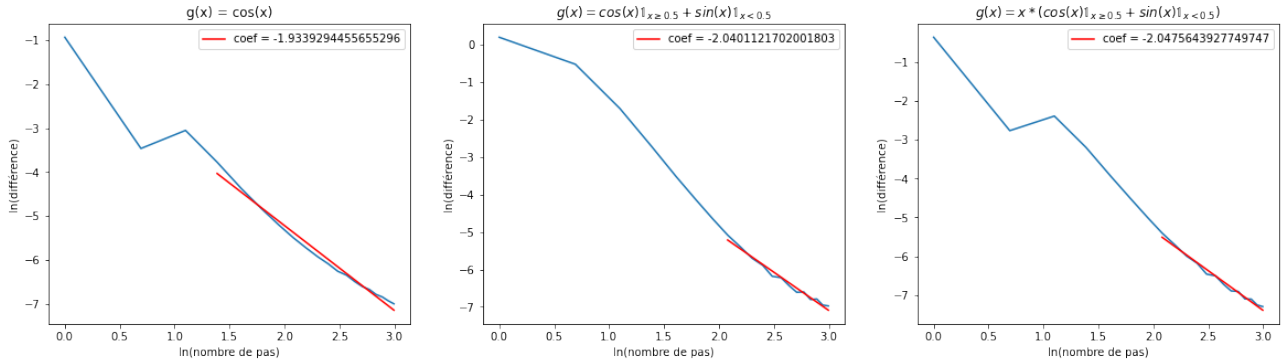


FIGURE 20 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$ avec une régression linéaire

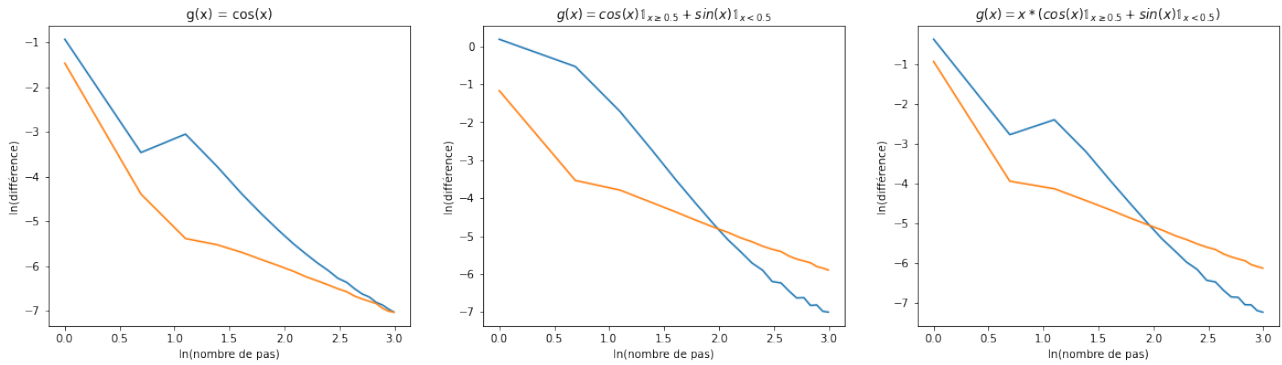


FIGURE 21 – évolution de $\ln(\text{différence})$ en fonction de $\ln(n)$ avec le schéma de Talay (bleu) et le schéma d'Euler (orange)

Nous obtenons, en resultat, un coefficient linéaire h de 2 (négatif évidemment) quelque soit le g considéré. Or ce cas ne rentre ni dans le cadre de [1] car b est non borné, ni dans le cas de [2], car on ne considère plus le schéma d'Euler. On peut donc supposer que le cadre du papier peut être étendu à b à croissance linéaire et on sait, après discussion avec Clément Rey, qu'il s'agit du cas qu'il étudie actuellement ou qu'il a étudié récemment.

Remarque Nous avons essayé d'adapter les résultats à "l'infini" du schéma d'Euler pour pouvoir utiliser ce schéma pour d'autres processus. Cependant, même si nous avons trouvé de bons resultats pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, comme en témoigne le graphique ci-dessous, les resultats pour les deux autres schémas n'étaient pas pertinents. Nous avons donc abandonné cette exploration numérique.

- g bornée et continue : $g(x) = \cos(x)$, erreur = $5,9 \times 10^{-4}\%$
- g bornée non continue : $g(x) = \cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5}$, erreur = $1,4 \times 10^{-2}\%$
- g non bornée non continue (hors du cadre de [1]) : $g(x) = x \times (\cos(x)\mathbb{1}_{x \geq 0.5} + \sin(x)\mathbb{1}_{x < 0.5})$, erreur = $2,9 \times 10^{-3}\%$

Nous remarquons que toutes ces erreurs **sont inférieures au cas du schéma d'Euler**. Nous obtenons les graphiques suivants :

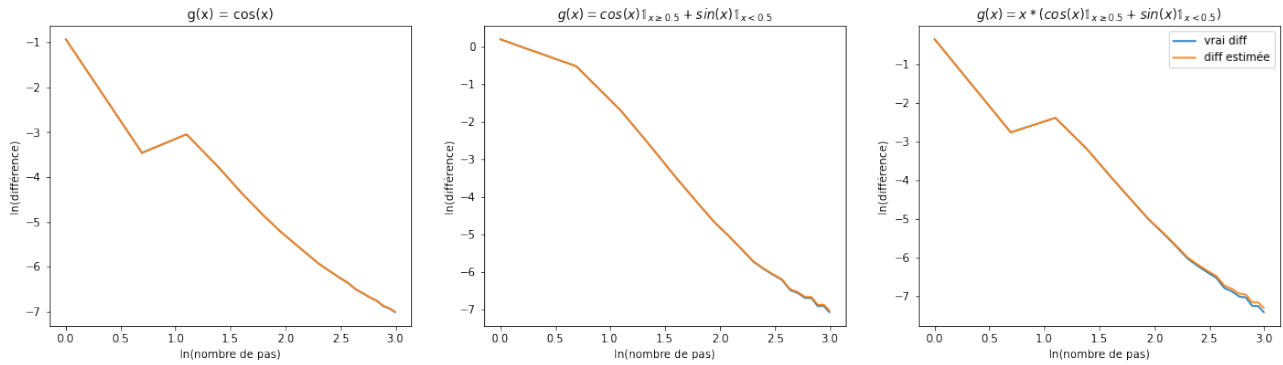


FIGURE 22 – évolution de $\ln(\text{différence exacte})$, en bleu, et $\ln(\text{différence estimée})$, en orange, en fonction de $\ln(n)$

Les erreurs calculées étant très faibles et les courbes étant très proches, il semblait pertinent de poursuivre notre exploration numérique sur de nouveaux cas, où, cette fois ci, nous avons que le schéma de Talay et pas la formule exacte du processus mais cela s'est avéré peu fructueux : des fluctuations importantes de l'erreur et des coefficients proches de 1 alors que nous attendons 2.

Références

- [1] Vlad Bally and Clément Rey. Approximation of Markov semigroups in total variation distance. *Electronic Journal of Probability*, 21 :1 – 44, 2016.
- [2] Vlad Bally and Denis Talay. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. I. Convergence rate of the distribution function. *Probab. Theory Related Fields*, 1(104) :43–60, 1996.
- [3] Syoiti Ninomiya and Nicolas Victoir. Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing. *Applied Mathematical Finance*, 15(2) :107–121, 2008.
- [4] Denis Talay. Second order discretization schemes of stochastic differential systems for the computation of the invariant law. Research Report RR-0753, INRIA, 1987.
- [5] Gilles Pages and Clément Rey. Discretization of the ergodic functional central limit theorem. 2021.