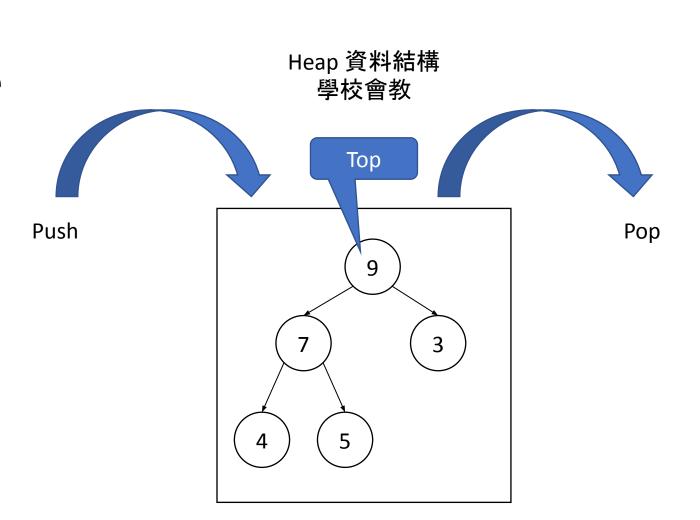
基礎資料結構應用

日月卦長

std::priority_queue

- push/ emplace(X) 加入資料
- top() 看最<mark>大</mark>的資料
- pop() 刪掉最<mark>大</mark>的資料



元素存取

最大的元素	top()	

插入刪除

插入元素	<pre>push(x)/emplace(x)</pre>	
刪除最大的元素	pop()	

數量資訊

裡面是不是空的	empty()	
裡面有多少東西	size()	

Priority Queue 使用範例

```
#include <iostream>
#include <queue>
using namespace std;
int main() {
  priority_queue<int> PQ;
  PQ.emplace(1);
  PQ.emplace(3);
  PQ.emplace(2);
  while (!PQ.empty()) {
    cout << PQ.top() << '\n'; // 3 2 1</pre>
    PQ.pop();
  return 0;
```

Example 自定義 priority_queue

• STL priority queue 是最大堆(Max heap)

```
struct CMP {
  bool operator()(int a, int b) { return a > b; }
int main() {
  priority_queue<int> PQ1;
  priority queue<int, vector<int>, CMP> PQ2;
  for (int i = 0; i < 5; ++i) {
    PQ1.emplace(i);
    PQ2.emplace(i);
  cout << PQ1.top() << ' ' << PQ2.top() << '\n';</pre>
  return 0;
```

帶有operator()的物件稱為函數物件,是一個物件,但使用行為如同函數。

Heap Sort (競賽上不會用到)

多路合併

管理走訪順序(延伸:最短路徑)

中位數類題

其他

常見應用

多路合併 Merge k Sorted Lists

- https://leetcode.com/problems/merge-k-sorted-lists/
- •給你 k 個由小到大排序好的 linklist, 請你將這些 linklist 合併成一個小到大排序好的 linklist 後輸出
- Example:
- lists = [[1,4,5],[1,3,4],[2,6]]
 - ans = [1,1,2,3,4,4,5,6]

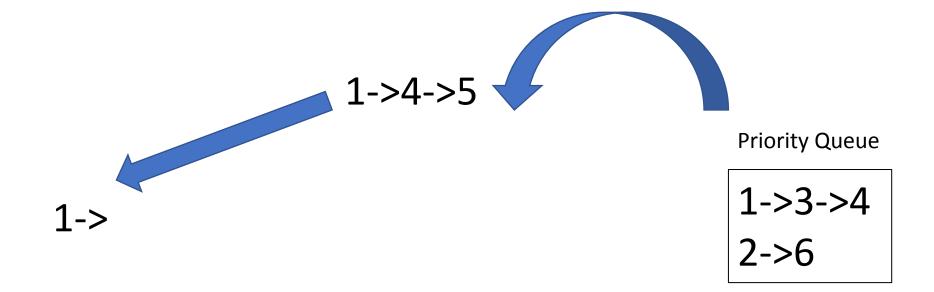


1->1->5->6

輸入輸出格式

```
struct ListNode {
  int val;
  ListNode *next;
  ListNode() : val(0), next(nullptr) {}
  ListNode(int x) : val(x), next(nullptr) {}
  ListNode(int x, ListNode *next) : val(x), next(next) {}
};
ListNode* mergeKLists(vector<ListNode*>& lists);
```

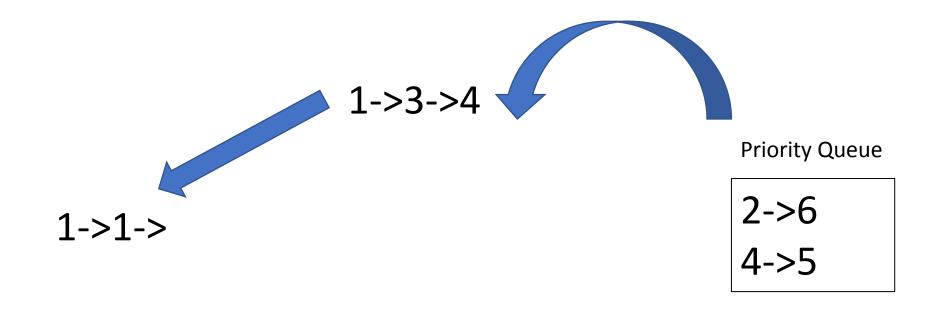
Priority Queue





1->

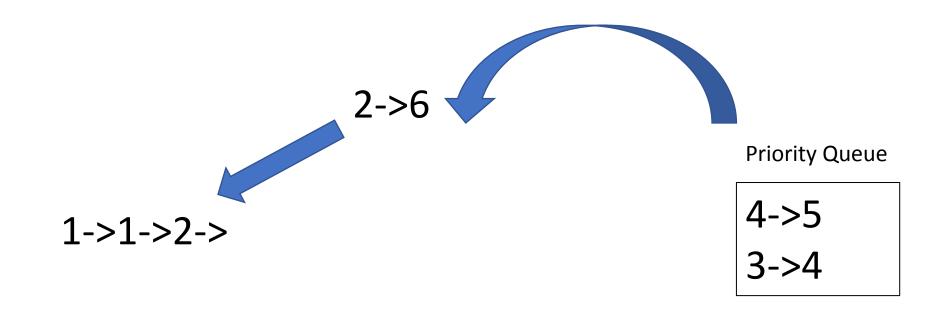
Priority Queue





1->1->

Priority Queue

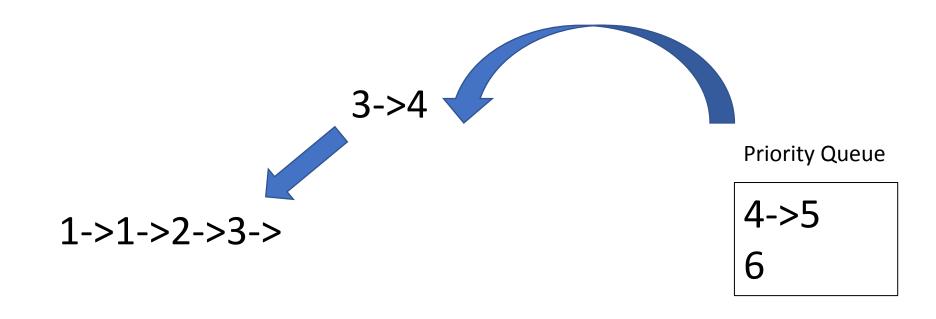




1->1->2->

Priority Queue

6





Priority Queue

6

4

初始化 priority queue

```
struct CMP {
  bool operator()(ListNode *a, ListNode *b) const { return a->val > b->val; }
};
priority_queue<ListNode *, vector<ListNode *>, CMP> PQ;
void initPQ(vector<ListNode *> &lists) {
  decltype(PQ)().swap(PQ);
  for (auto nd : lists)
    if (nd) PQ.emplace(nd);
}
```

關鍵程式碼

```
ListNode *mergeKLists(vector<ListNode *> &lists) {
 initPQ(lists);
  ListNode *root = nullptr;
  ListNode **cur = &root;
 while (PQ.size()) {
    auto nd = PQ.top();
   PQ.pop();
   *cur = nd;
   cur = &nd->next;
   if (*cur) PQ.emplace(*cur);
  return root;
```

不使用額外空間 (面試題)

```
ListNode *mergeKLists(vector<ListNode *> &lists) {
 auto iter = remove_if(lists.begin(), lists.end(), [](auto x) { return !x; });
 lists.erase(iter, lists.end());
 make_heap(lists.begin(), lists.end(), CMP());
 ListNode *root = nullptr;
 ListNode **cur = &root;
 while (lists.size()) {
   auto nd = lists.front();
   pop_heap(lists.begin(), lists.end(), CMP());
   lists.pop_back();
   *cur = nd;
   cur = &nd->next;
   if (*cur) {
     lists.emplace_back(*cur);
     push_heap(lists.begin(), lists.end(), CMP());
 return root;
```

管理走訪順序(延伸:最短路徑)

- https://leetcode.com/problems/find-the-kth-smallest-sum-of-a-matrix-with-sorted-rows/
- •給你一個每個 row 都由小到大排的矩陣 mat, 問你從每個 row 選 一個數字, 總和第 k 小的是多少
- Example:
- mat = [[1,3,11],[2,4,6]], k = 5
 - ans = 7
- mat = [[1,3,11],[2,4,6]], k = 9
 - ans = 17

mat	0	1	2
0	1	3	11
1	2	4	6

前五小的組合:[1,2],[1,4],[3,2],[3,4],[1,6]

觀察

- mat = [[1,10,10],[1,4,5],[2,3,6]]
- 觀察前幾小的狀態

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

$$K = 1$$

•[1,1,2]

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

$$K = 2$$

•[1,1,3]

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

$$K = 3$$

• [1,4,2]

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

$$K = 4$$

•[1,4,3]

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

觀察

- 第 k+1 小的答案
- •是前 k 小的答案中
- 把某 row 的 index+1後得到

2	2	3	6	
1	1	4	5	
0	1	10	10	
1	0	1	2	

2	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

3	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

4	0	1	2	
0	1	10	10	
1	1	4	5	
2	2	3	6	

作法

- •用 priority queue 存資料
- 在知道第 k 小的答案後 將每個 row 的 index+1 的結果 存到 priority queue 中

•下一輪從 priority queue 中 取出第 k+1 小的答案

•一直做下去

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

mat	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

不同狀態有機會產生相同的結果

•用 set<vector<int>> 判斷有沒有重複計算 vector<int>{-5, 0, 1, 0}

2	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

vector<int>{-7, 0, 1, 0}

3	0	1	2
0	1	10	10
1	1	4	5
2	2	3	6

4	0	1	2	
0	1	10	10	
1	1	4	5	
2	2	3	6	

vector<int>{-8, 0, 1, 0}

程式碼

```
int kthSmallest(vector<vector<int>> &mat, int k) {
  int m = mat.size(), n = mat[0].size();
  priority_queue<vector<int>> PQ;
  vector<int> cur(m + 1, 0);
  for (auto &v: mat) cur[0] -= v[0];
  PQ.emplace(cur);
  set<vector<int>> visited{{cur}};
  for(int t = 1; t < k; ++t) {
    cur = PQ.top(), PQ.pop();
    for (int i = 1; i <= m; ++i) {
     if (cur[i] == n - 1) continue;
      auto next = cur;
      ++next[i];
      next[0] -= (mat[i - 1][next[i]] - mat[i - 1][next[i] - 1]);
      if (!visited.emplace(next).second) continue;
      PQ.emplace(move(next));
  return -PQ.top().at(0);
```

另一種二分搜的做法(非本單元主題)

```
int n, m;
vector<vector<int>> *A;
int total, K;
bool dfs(int i, int sum, int limit) {
  if (i >= n) {
    total += sum <= limit;</pre>
    return sum <= limit;</pre>
  bool ans = false;
  for (auto x : A->at(i)) {
    auto cur = dfs(i + 1, sum + x)
limit);
    ans = cur;
    if (!cur || total > K) break;
  return ans;
```

```
int kthSmallest(
    vector<vector<int>> &mat, int k) {
  n = mat.size(), m = mat[0].size();
  int L = 0, R = 0;
  for (auto &V : mat) R += V.back();
  K = k;
  A = \&mat;
  tie(ignore, R) =
  binarySearch(L, R, [&](int mid) {
    total = 0;
    dfs(0, 0, mid);
    return total < k;</pre>
  });
  return R;
```

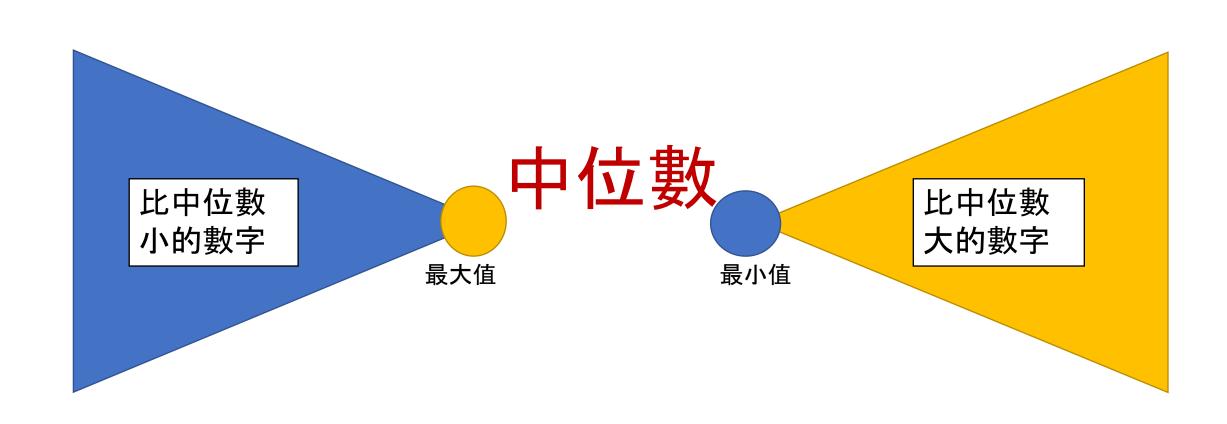
中位數 (Zerojudge D713)

中位數

Zerojudge D713

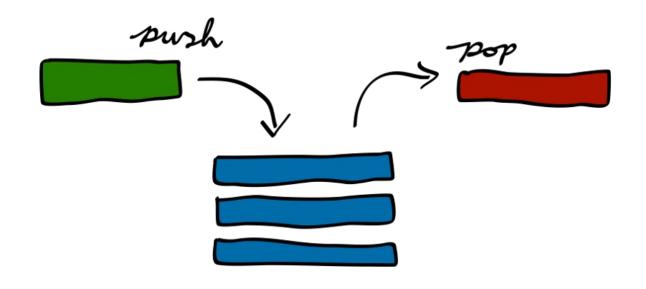
依序讀取一個數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \cdots a_n$,每讀取一個數字,請回答到目前為止的中位數是多少。若有答案是小數請直接忽略到整數位。(n < 200000)

中位數



Stack

- push/emplace(X) 加入資料X
- top() 看最上面的資料
- pop() 刪掉最上面的資料
- First in last out



std::stack

```
#include <iostream>
#include <stack>
using namespace std;
int main() {
  stack<int> STK;
  STK.emplace(123);
  STK.emplace(7122);
  STK.pop();
  STK.emplace(456);
  cout << STK.top() << '\n';</pre>
  return 0;
```

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
int main() {
   vector<int> STK;
   STK.emplace_back(123);
   STK.emplace_back(7122);
   STK.pop_back();
   STK.emplace_back(456);
   cout << STK.back() << '\n';
   return 0;
}</pre>
```

std::stack

```
#include <iostream>
                                     #include <iostream>
#include <stack>
                                     #include <vector>
using namespace std;
                                     using namespace std;
int main() {
                                     int main() {
  stack<int> STK;
                                       vector<int> STK;
  STK.emplace(123);
                                       STK.emplace_back(123);
  STK.emplace(7122);
                                       STK.emplace_back(7122);
                                       STK.pop_back();
  STK.pop();
  STK.emplace(456);
                                       STK.emplace_back(456);
  cout << STK.top() << '\n';</pre>
                                       cout << STK.back() << '\n';</pre>
  return 0;
                                       return 0;
```

123

std::stack

#include <iostream>

```
#include <stack>
                                                     #include <vector>
               using namespace std;
                                                     using namespace std;
               int main() {
                                                     int main() {
                 stack<int> STK;
                                                       vector<int> STK;
                 STK.emplace(123);
                                                       STK.emplace back(123);
                 STK.emplace(7122);
                                                       STK.emplace_back(7122);
                 STK.pop();
                                                       STK.pop_back();
7122
                 STK.emplace(456);
                                                       STK.emplace_back(456);
                 cout << STK.top() << '\n';</pre>
                                                       cout << STK.back() << '\n';</pre>
123
                 return 0;
                                                       return 0;
```

#include <iostream>

std::stack

```
#include <iostream>
                                     #include <iostream>
#include <stack>
                                     #include <vector>
using namespace std;
                                     using namespace std;
int main() {
                                     int main() {
  stack<int> STK;
                                       vector<int> STK;
  STK.emplace(123);
                                       STK.emplace back(123);
  STK.emplace(7122);
                                       STK.emplace_back(7122);
                                       STK.pop_back();
  STK.pop();
  STK.emplace(456);
                                       STK.emplace back(456);
  cout << STK.top() << '\n';</pre>
                                       cout << STK.back() << '\n';</pre>
  return 0;
                                       return 0;
```

123

std::stack

```
456
123
```

```
#include <iostream>
                                     #include <iostream>
#include <stack>
                                     #include <vector>
using namespace std;
                                     using namespace std;
int main() {
                                     int main() {
  stack<int> STK;
                                       vector<int> STK;
  STK.emplace(123);
                                       STK.emplace_back(123);
  STK.emplace(7122);
                                       STK.emplace_back(7122);
  STK.pop();
                                       STK.pop_back();
  STK.emplace(456);
                                       STK.emplace_back(456);
  cout << STK.top() << '\n';</pre>
                                       cout << STK.back() << '\n';</pre>
  return 0;
                                       return 0;
```

其實是用 deque 做出來的

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <st <typename _Tp, typename _Sequence = deque < _Tp >>

using namesp

int main() {

A standard container giving FILO behavior.

stack<int,>
A standard container giving FILO behavior.
```

讓 std::stack 內部用 vector

```
#include <iostream>
#include <stack>
#include <vector>
using namespace std;
int main() {
 stack<int, vector<int>> STK;
  STK.emplace(123);
  STK.emplace(7122);
  STK.pop();
  STK.emplace(456);
  cout << STK.top() << '\n';</pre>
  return 0;
```

元素存取

	stack
頭部	top()

數量資訊

	stack
裡面是不是空的	empty()
裡面有多少東西	size()

括號匹配問題(講義)

例題演練

Parentheses Balance

UVa 673

今天**姆咪**正在寫程式,不過由於姆咪是 ** 很粗心的人 **, 把文件中所有括號的配對都亂掉了,已知文件中的括號只有小括號()以及中括號[], 給出文件的括號序列, 能檢查括號是否有正確配對嗎?

定義一個合法的括號配對字串如下

- 1. 空字串是合法的括號字串
- 2. 如果 A, B 是合法的括號字串,那 AB 也是合法的括號字串
- 3. 如果 A 是合法的括號字串, \mathbb{E}_A (A)、[A] 也是合法的括號字串



Monotonic Stack

保證 stack 中的 值遞增或遞減 去除永遠不可能 成為答案的元素

乳牛(POJ 3250)

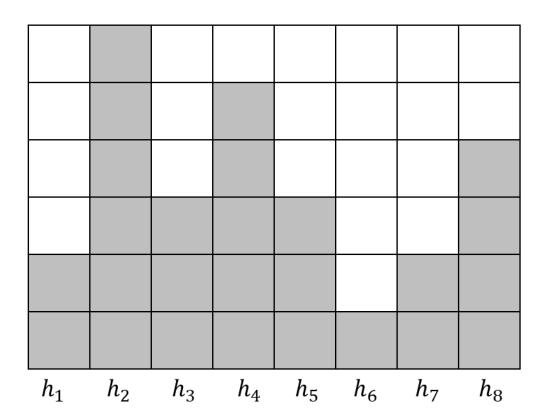
Bad Hair Day

POJ 3250

有 $n(n \le 80000)$ 隻乳牛站在一條直線上、乳牛的身高由左而右依序為 $h_1, h_2 \cdots, h_n$ 、請為每一隻乳牛向左看可以看到幾隻乳牛?

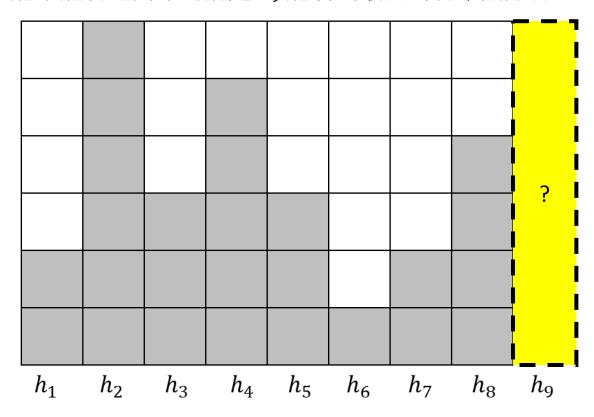
一隻乳牛可以看到左邊所有的乳牛,至到有一隻乳牛的身高大於等於該乳牛。

考慮以下乳牛



假設有個不知道高度的 h_9

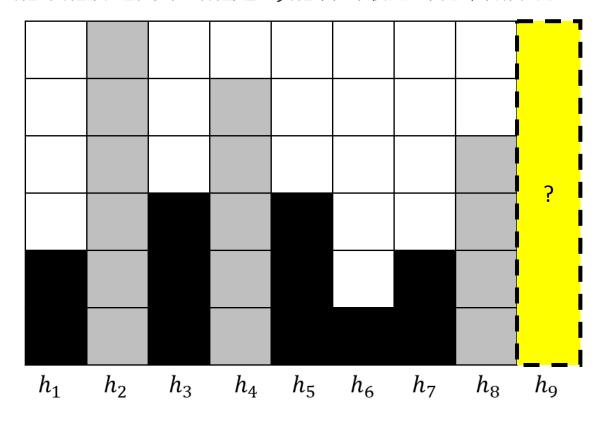
能不能將絕對不可能是 h9 能看到最遠的乳牛刪除呢?



假設有個不知道高度的 h_9

能不能將絕對不可能是 h9 能看到最遠的乳牛刪除呢?

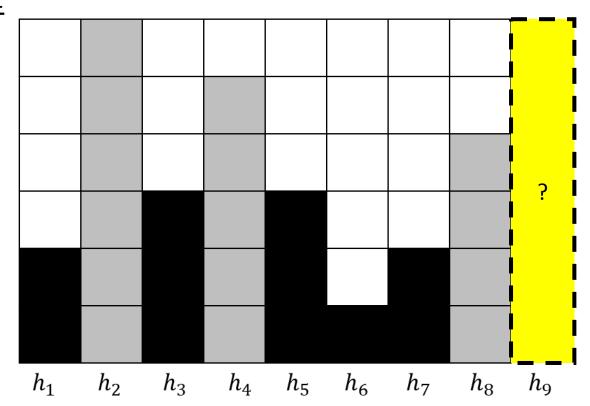
無論 h_9 高度是多少 h_1, h_3, h_5, h_6, h_7 絕對不可能 是 h_9 能看到最遠的乳牛



剩下的 h_2, h_4, h_8 會呈現非嚴格遞增的關係

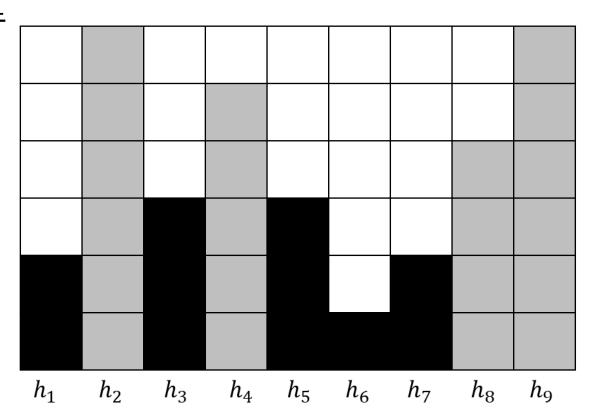
STK	
-----	--

用 stack 維護有機會被下隻牛 看到的牛



STK	
-----	--

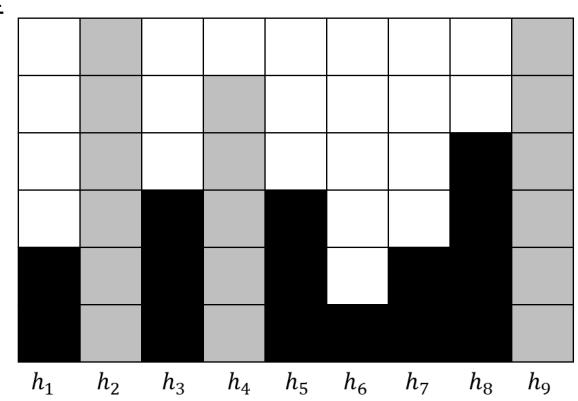
用 stack 維護有機會被下隻牛 看到的牛



假設 $h_9 = 6$

STK	
-----	--

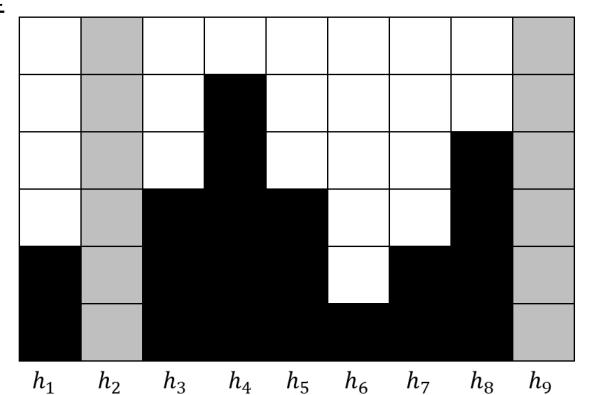
用 stack 維護有機會被下隻牛 看到的牛



假設 $h_9 = 6$ STK 頂端是 h_8 $h_8 < h_9$ 所以 h_8 沒用了

STK	
-----	--

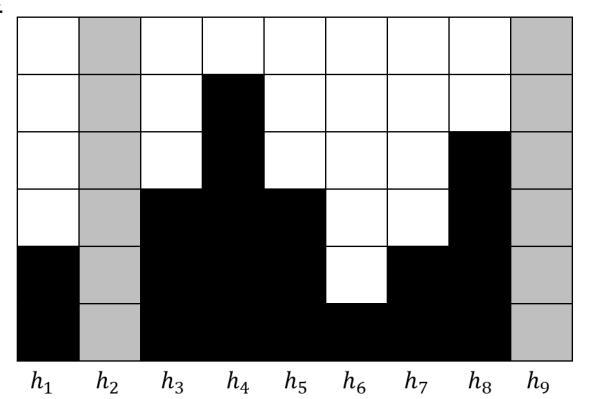
用 stack 維護有機會被下隻牛 看到的牛



假設 h_9 =6 STK 頂端是 h_8 $h_8 < h_9$ 所以 h_8 沒用了 STK 頂端是 h_4 $h_4 < h_9$ 所以 h_4 沒用了

STK 9

用 stack 維護有機會被下隻牛 看到的牛



假設 $h_9 = 6$ STK 頂端是 h_8 $h_8 < h_9$ 所以 h_8 沒用了 STK 頂端是 h_4 $h_4 < h_9$ 所以 h_4 沒用了 STK 頂端是 h_2 $h_2 \not < h_9$ 所以 h_9 最遠能看到 h_2 把 h_9 放進 STK 為 h_{10} 做準備

實際程式碼有三個部分

刪除沒用的東西

計算i的答案

將i放進STK

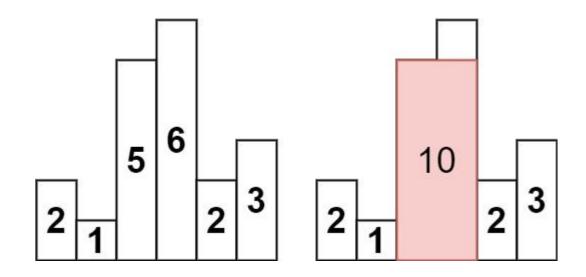
```
void solve(vector<int> h) {
    stack<int> STK;
    for (size_t i = 0; i < h.size(); ++i) {
        while (STK.size() && h[STK.top()] < h[i]) STK.pop();

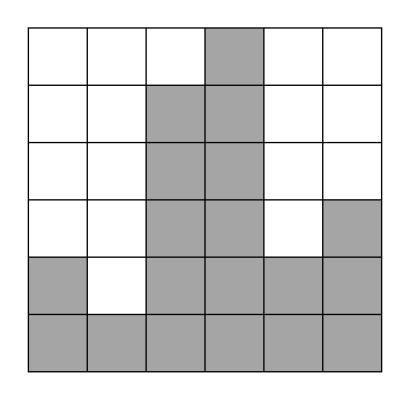
        if (STK.empty()) cout << i << endl;
        else cout << i - STK.top() << endl;

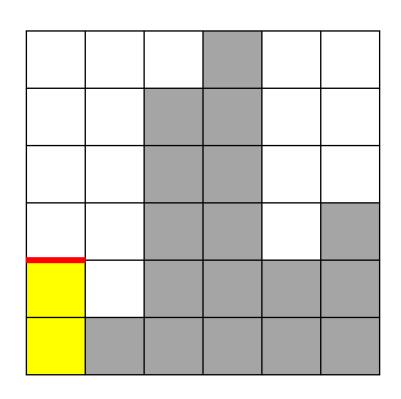
        STK.emplace(i);
    }
}</pre>
```

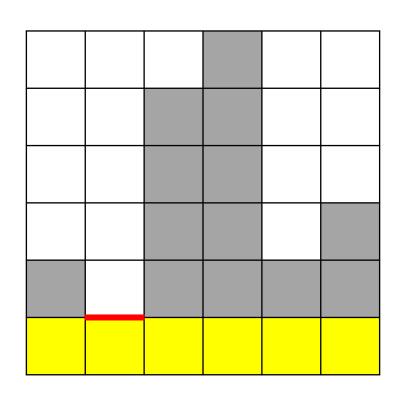
最大矩形

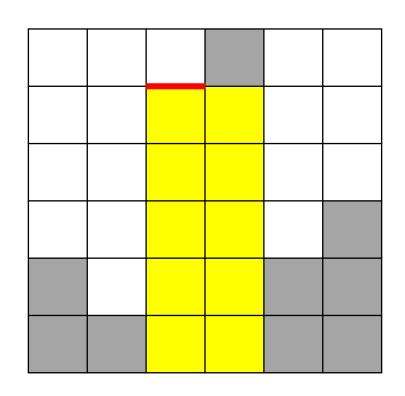
- https://leetcode.com/problems/largest-rectangle-in-histogram/
- •告訴你每根長條的高度, 問你面積最大的矩形的面積
- heights = [2,1,5,6,2,3]

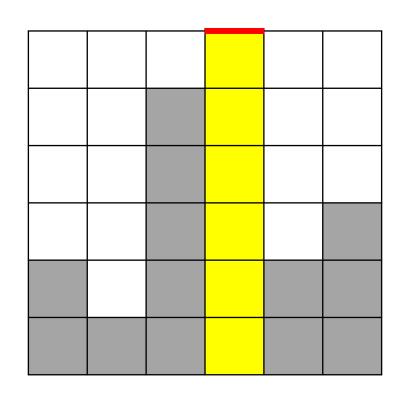


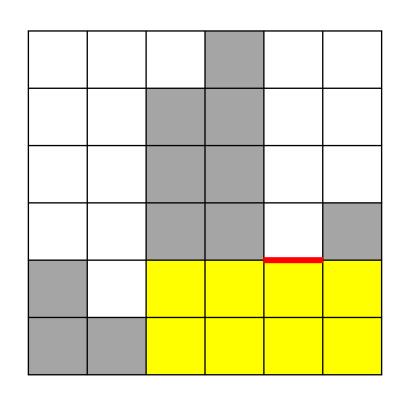


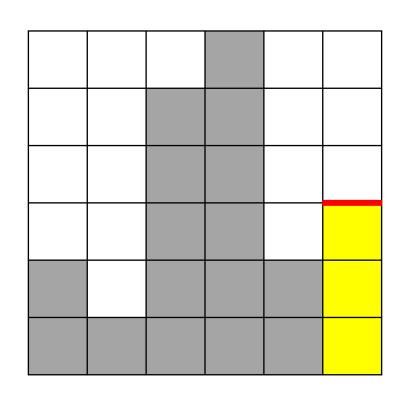








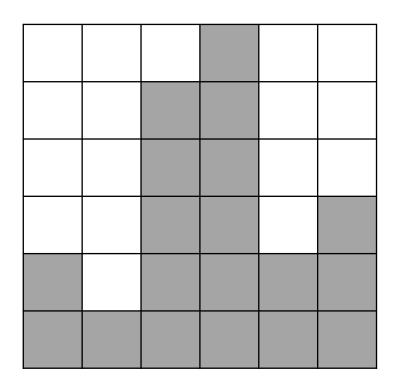




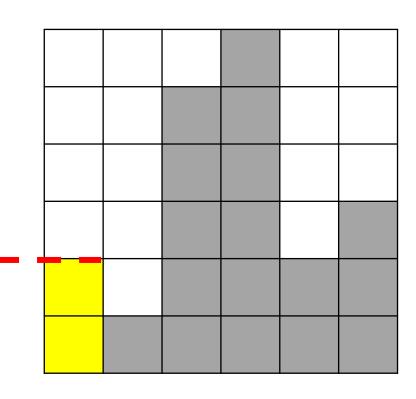
性質

邊界最大化的矩形最多只有 n 個

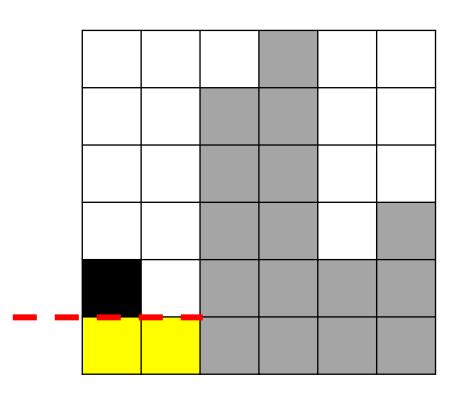
- 由左到右依序加入長條
- 每個長條被加入時 將左邊比他高的部分「砍掉」



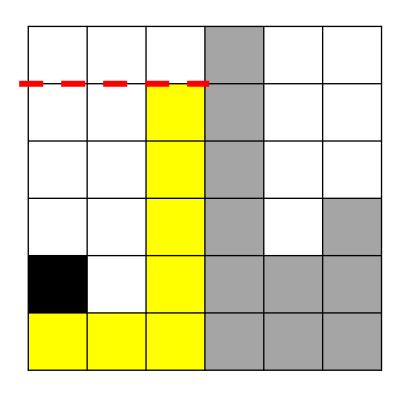
- •由左到右依序加入長條
- 每個長條被加入時 將左邊比他高的部分「砍掉」



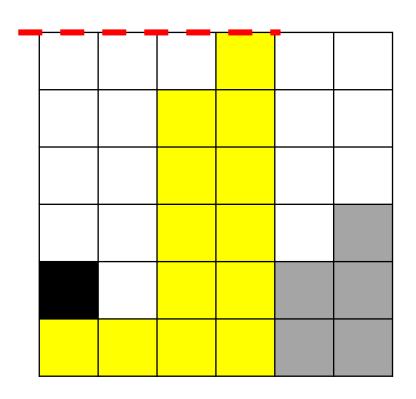
- •由左到右依序加入長條
- 每個長條被加入時 將左邊比他高的部分「砍掉」



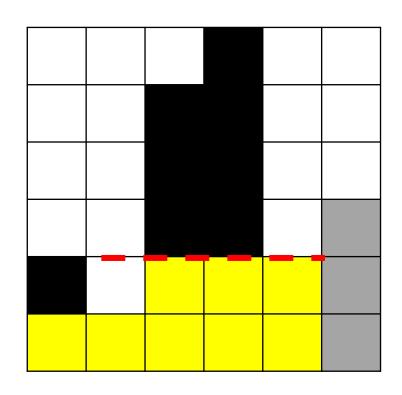
- •由左到右依序加入長條
- 每個長條被加入時 將左邊比他高的部分「砍掉」



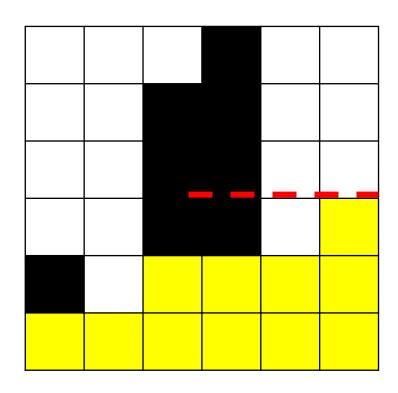
- •由左到右依序加入長條
- 每個長條被加入時 將左邊比他高的部分「砍掉」



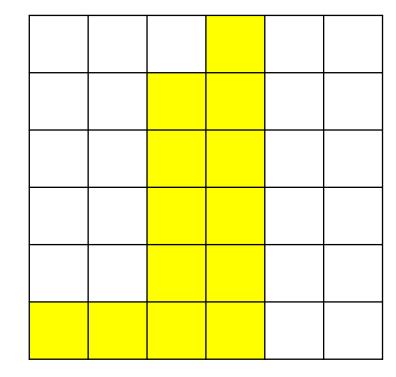
- •由左到右依序加入長條
- 每個長條被加入時 將左邊比他高的部分「砍掉」



- •由左到右依序加入長條
- 每個長條被加入時 將左邊比他高的部分「砍掉」



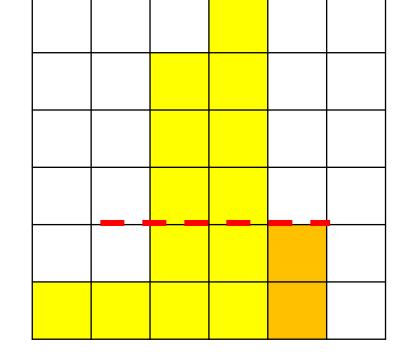
- 有用的區域會形成階梯狀的輪廓
- 只需要記錄轉折點的位置和高度就行了



STK	1	5	6		
JIK	0	2	3		

- 有用的區域會形成階梯狀的輪廓
- 只需要記錄轉折點的位置和高度就行了
- 新增下一個長條時把要被砍掉的長條 pop 掉最後被 pop 的位置會是新的轉折點

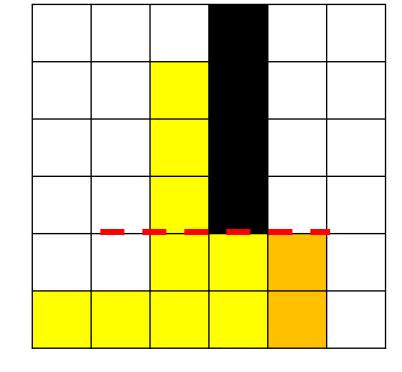
2 4



STK	1	5	6	
JIK	0	2	3	

- 有用的區域會形成階梯狀的輪廓
- 只需要記錄轉折點的位置和高度就行了
- 新增下一個長條時把要被砍掉的長條 pop 掉最後被 pop 的位置會是新的轉折點

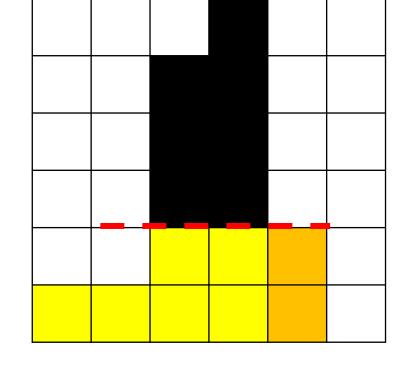
2



STK 1 5 0 2

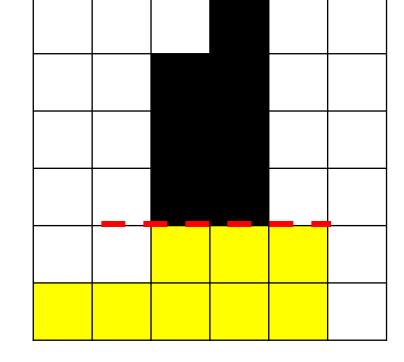
- 有用的區域會形成階梯狀的輪廓
- 只需要記錄轉折點的位置和高度就行了
- 新增下一個長條時把要被砍掉的長條 pop 掉最後被 pop 的位置會是新的轉折點

2



STK 1 0

- 有用的區域會形成階梯狀的輪廓
- 只需要記錄轉折點的位置和高度就行了
- 新增下一個長條時把要被砍掉的長條 pop 掉最後被 pop 的位置會是新的轉折點



STK	1	2	
JIK	0	2	

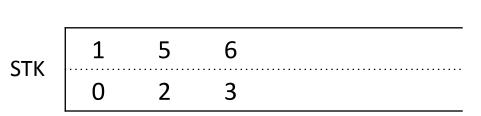
Stack O(n) 維護輪廓

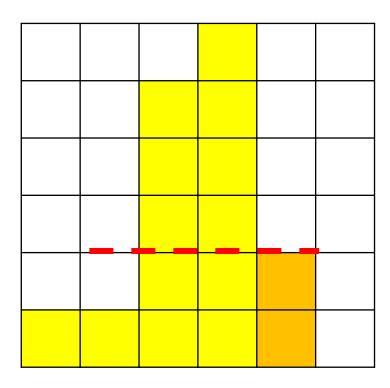
要考慮兩根一樣長的長條

```
long long maxRectangle(vector<int> h) {
  stack<pair<int, int>> STK;
 long long ans = 0;
  for (int i = 0; i < (int)h.size(); ++i) {
    int corner = i;
    while (STK.size() && STK.top().first >= h[i]) {
      corner = STK.top().second;
      STK.pop();
    STK.emplace(h[i], corner);
  return ans;
```

找出邊界最大化的矩形

•邊界最大化的矩形一定 包含某個轉折點

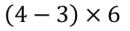


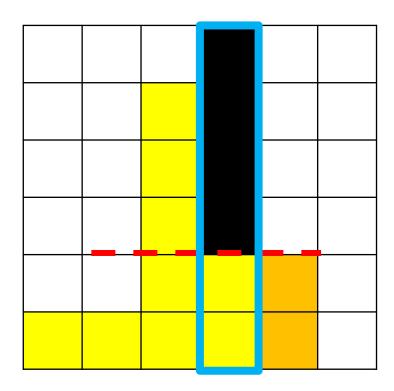


找出邊界最大化的矩形

- •邊界最大化的矩形一定 包含某個轉折點
- 轉折點被刪除時就能確定 邊界最大化的矩形的位置

STK 1 5 0 2



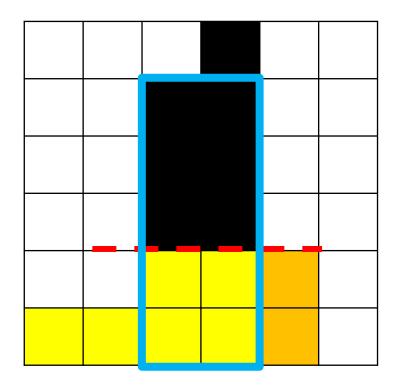


找出邊界最大化的矩形

- •邊界最大化的矩形一定 包含某個轉折點
- 轉折點被刪除時就能確定 邊界最大化的矩形的位置

STK 1 0

$$(4-2) \times 5$$



多加兩行就能 O(n) 計算答案

為了最後能刪除所有轉折點

計算當前邊界最大矩形的面積

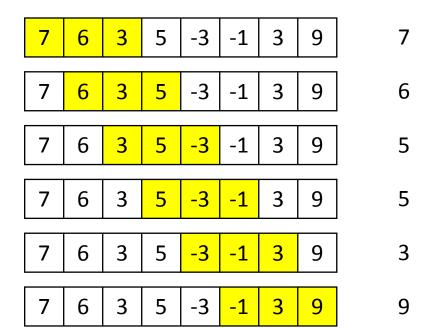
```
long long maxRectangle(vector<int> h) {
  h.emplace_back(0);
  stack<pair<int, int>> STK;
  long long ans = 0;
  for (int i = 0; i < (int)h.size(); ++i) {
    int corner = i;
    while (STK.size() && STK.top().first >= h[i]) {
      corner = STK.top().second;
      ans = max(ans, 1LL * (i - corner) * STK.top().first);
      STK.pop();
    STK.emplace(h[i], corner);
  return ans;
```

Monotonic Queue

保證 deque 中的 值遞增或遞減 去除永遠不可能 成為答案的元素 與 stack 最大的差 別是可以刪掉頭 部

Sliding Window

- https://leetcode.com/problems/sliding-window-maximum/
- 給你 sliding window 的大小, 問你輸入陣列中每個 sliding window 的最大值
- Example
- nums = [7,6,3,5,-3,-1,3,9], k = 3
 - ans = [7,6,5,5,3,9]



STK

0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

STK 0

	•						
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

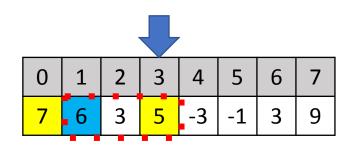
STK 0 1

•							
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

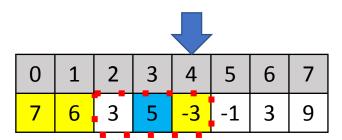
STK 0 1 2

	,	1	•				
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

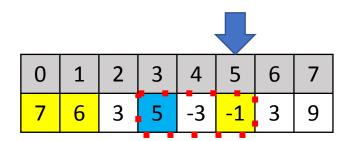
STK 0 1 3



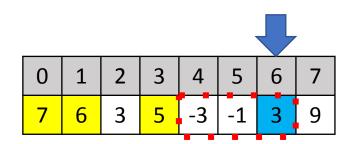
STK 0 1 3 4



STK 0 1 3 5



STK 0 1 3 6



STK 7

					,		•
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

觀察到的性質

•每個 sliding window 的最大值一定會出現在當前 STK 中

•STK 中的 index 是由小排到大 nums[index] 由大排到小



利用 Monotonic Stack + Binary Search

```
vector<int> maxSlidingWindow(vector<int> nums, int k) {
  vector<int> STK;
 vector<int> ans;
 for (int i = 0; i < (int)nums.size(); ++i) {
   while (STK.size() && nums[STK.back()] < nums[i])</pre>
     STK.pop_back();
   STK.emplace back(i);
   if (i >= k - 1) {
      auto [L, R] = binarySearch(0, (int)STK.size() - 1,
                                  [&](int mid) { return STK[mid] <= i - k; });
      ans.emplace_back(nums[STK[R]]);
  return ans;
```

DQ

0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

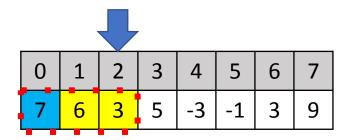
DQ 0

	•						
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

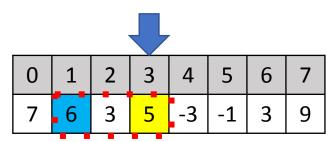
DQ 0 1

•							
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

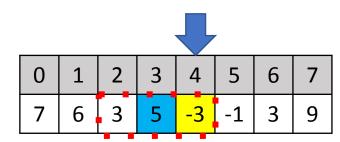
DQ 0 1 2



DQ 1 3



DQ 3 4



DQ 3 5

				,		•	
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

DQ 6

0	1	2	3	4	5	6	7		
7	6	3	5	-3	-1	3	9		

DQ 7

						•	
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	3	5	-3	-1	3	9

O(n) 四個部分

刪除超過範圍的東西

刪除沒有用的東西

加入當前資料

計算當前答案

根據不同題目性質 計算當前答案有能出現在 兩個刪除之間

```
vector<int> maxSlidingWindow(vector<int> &nums, int k) {
  deque<int> DQ;
  vector<int> ans;
  for (int i = 0; i < (int)nums.size(); ++i) {</pre>
    while (DQ.size() && DQ.front() <= i - k)</pre>
      DQ.pop_front();
    while (DQ.size() && nums[DQ.back()] < nums[i])</pre>
      DQ.pop_back();
    DQ.emplace_back(i);
   if (i >= k - 1)
      ans.emplace_back(nums[DQ.front()]);
  return ans;
```