Disjoint Set

日月卦長

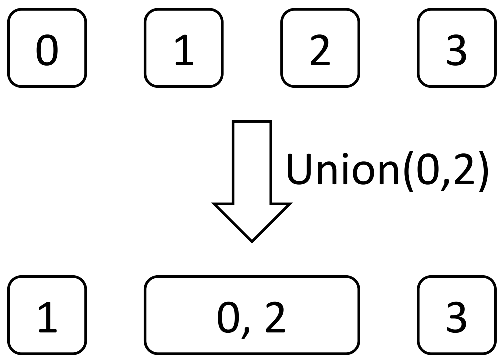
Disjoint Set 互斥集

- n 個元素，編號為 $0 \sim n-1$，每個元素初始位於它自己的集合中。

兩種經典操作：

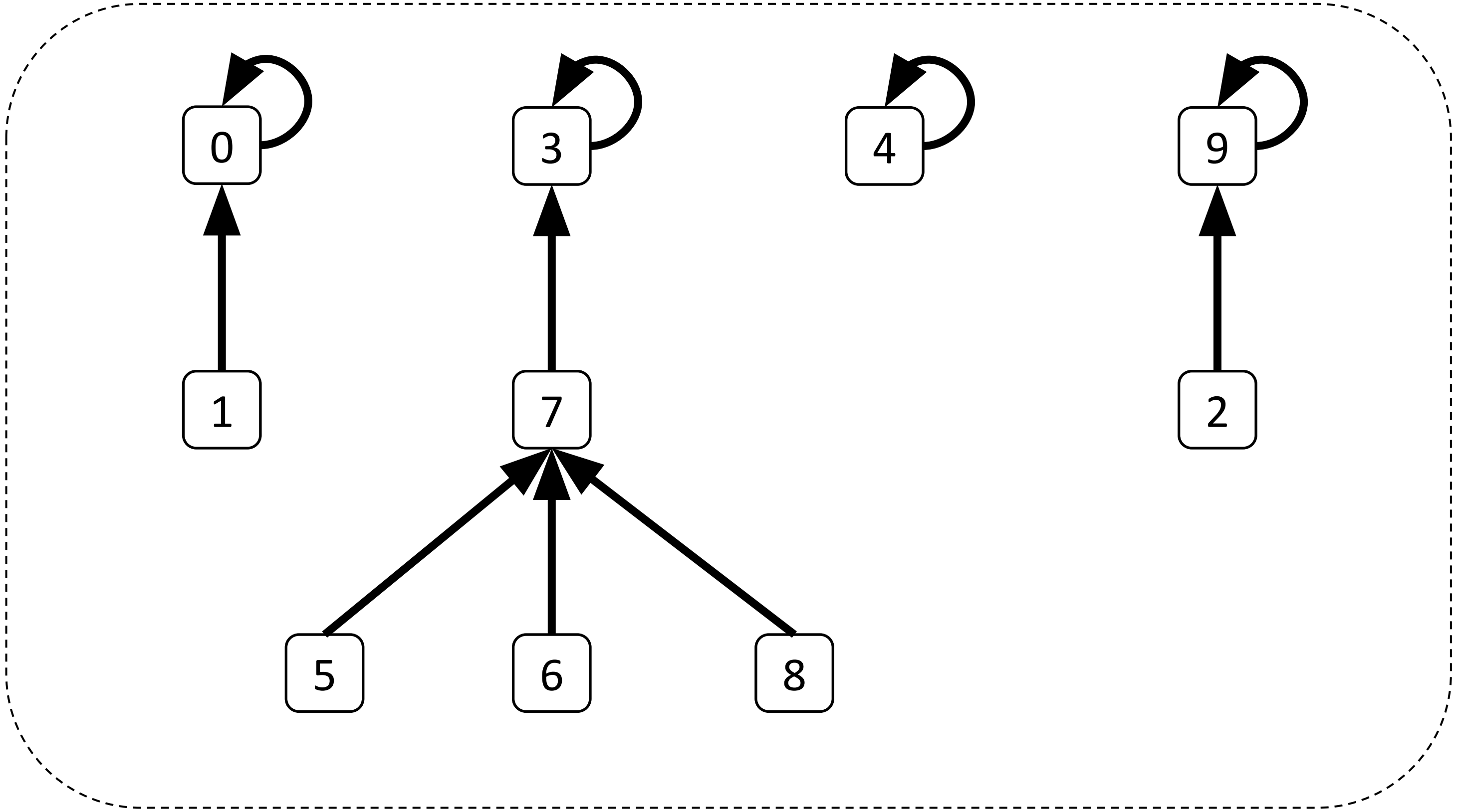
- Union(a, b):
  合併 a, b 元素所在的集合

- Same(a, b):
  查詢 a, b 是否在同一個集合中



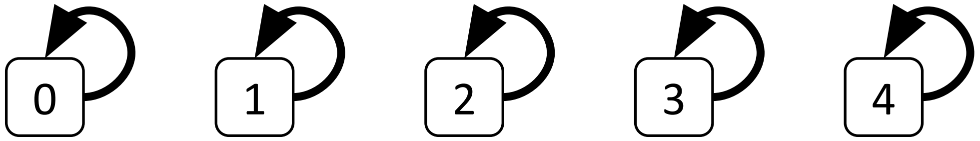
領袖選舉

- 今天如果想知道兩個員工是不是在同一個公司，我們可以去問他們的上司是誰
- 如果上司相同，則兩人同公司，否則不同公司。



Disjoint Set: 初始化

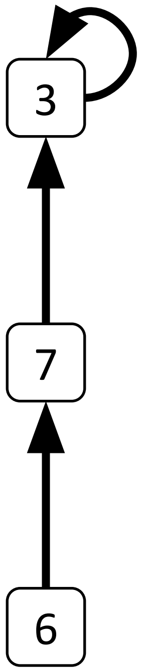
```
int parent[MAXN];
void init(int n) {
  for (int i = 0; i < n; ++i) {
    parent[i] = i;
  }
}
```



Disjoint Set: find_root

- 輔助函數 find_root(x):
  找出 x 最上面那個人是誰

```
int find_root(int x) {
  if (x == parent[x])
    return x;
  return find_root(parent[x]);
}
```



find_root(6) = 3

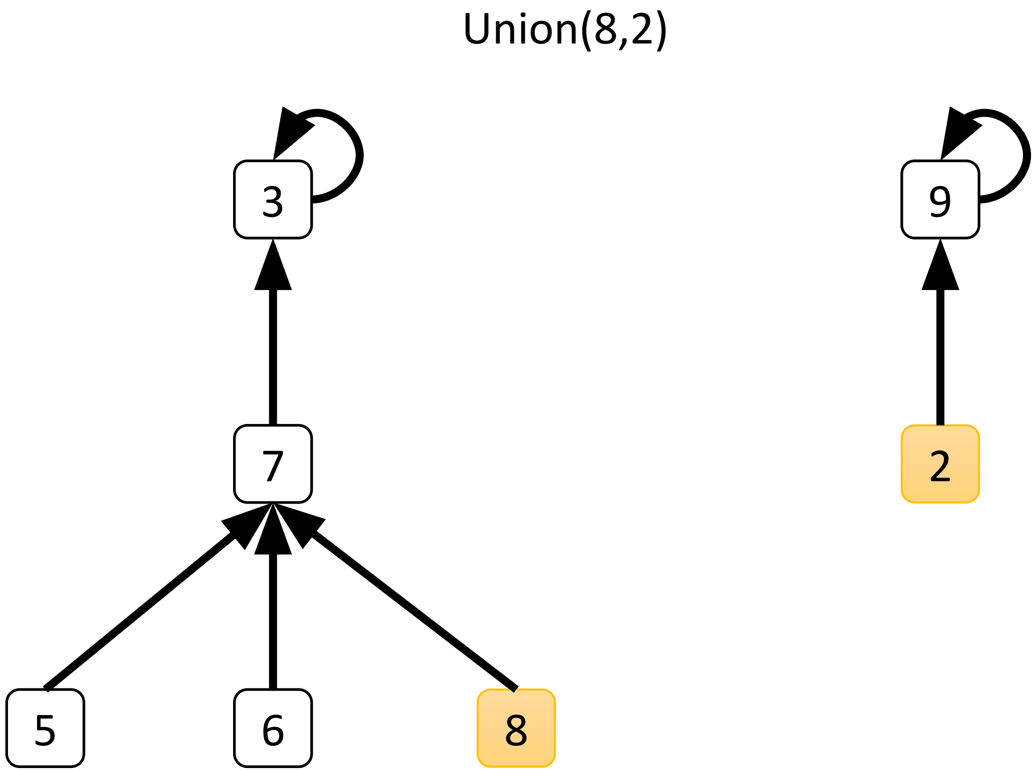
Disjoint Set: Same

- 簡單到只剩下一行

```
bool Same(int a, int b) {
  return find_root(a) == find_root(b);
}
```

Disjoint Set: Union

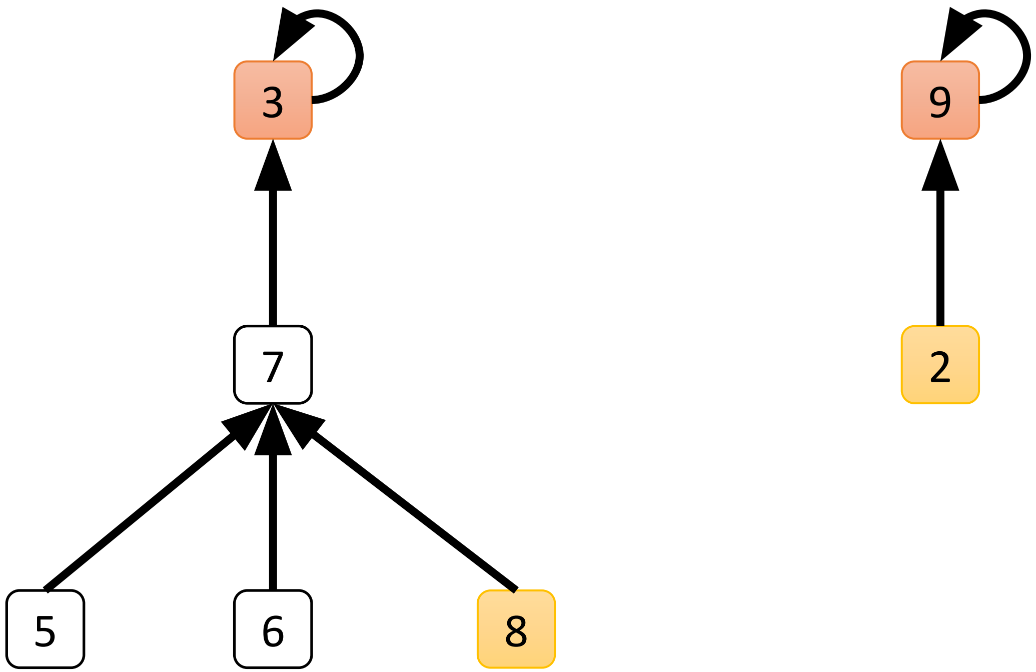
- Union(a, b)
- 把 a 的根接到 b 的根底下



Disjoint Set: Union

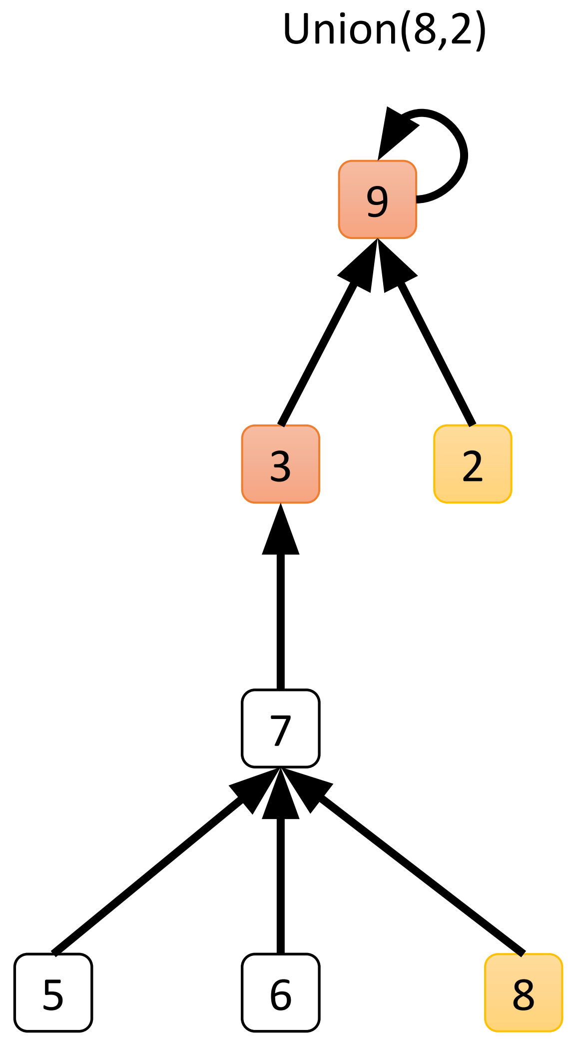
- Union(a, b)
- 把 a 的根接到 b 的根底下

Union(8,2)



Disjoint Set: Union

- Union(a, b)
- 把 a 的根接到 b 的根底下



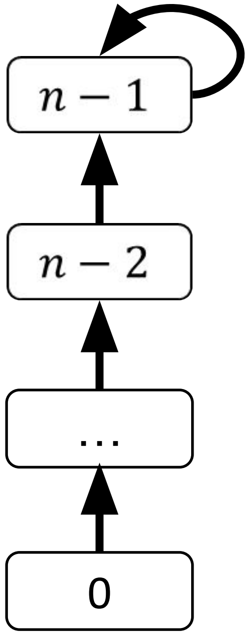
Disjoint Set: Union

- 也是只剩下一行

```
void Union(int a, int b) {
  parent[find_root(a)] = find_root(b);
}
```

複雜度

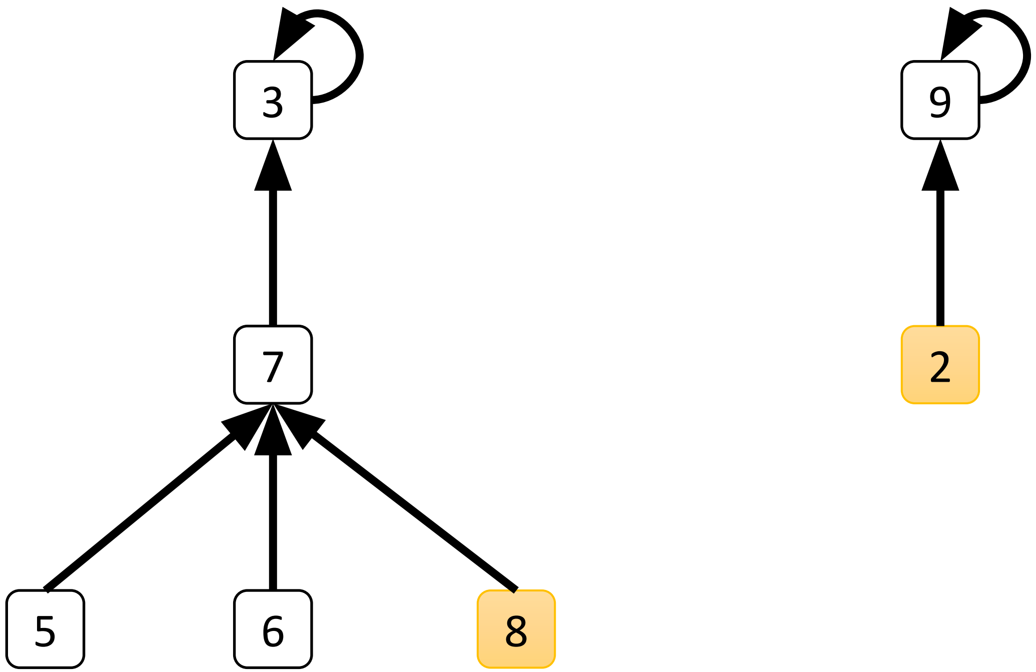
- Same 和 Union 都依賴於 find_root(x)
- 顯然在 find_root(x) 最糟糕的情況下是 $O(n)$
- 所以每個操作都是 $O(n)$



Disjoint Set:優化1

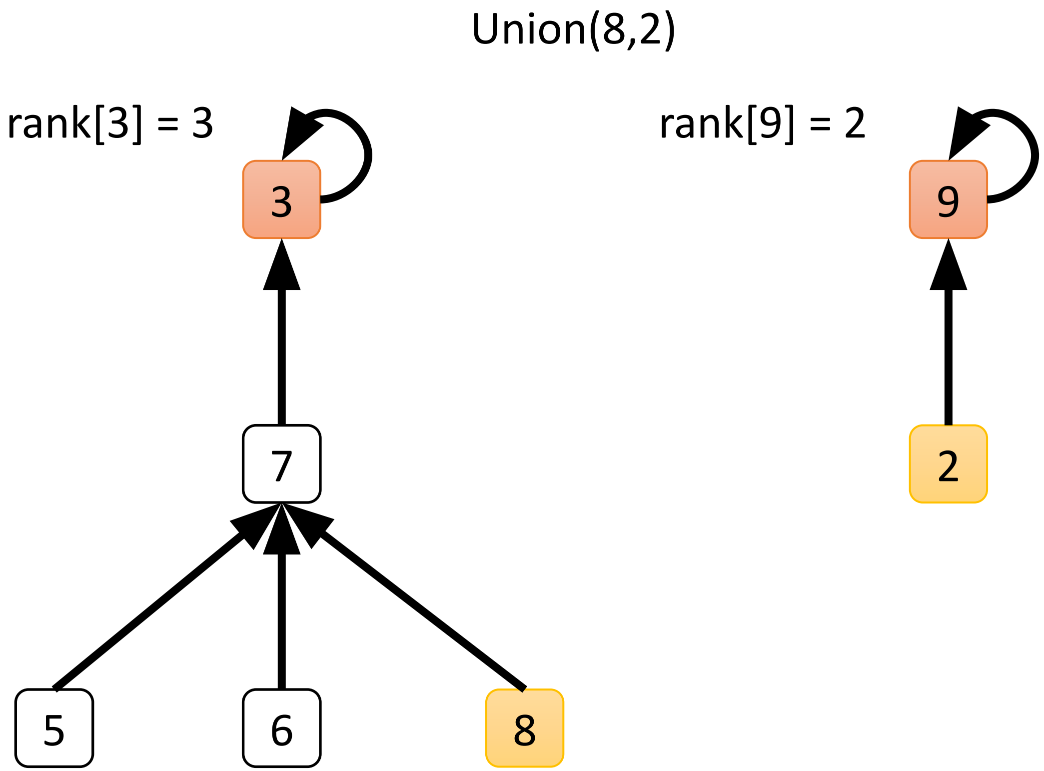
- Union by rank
- 將深度較淺的樹接到深度較深的樹的根底下

Union(8,2)



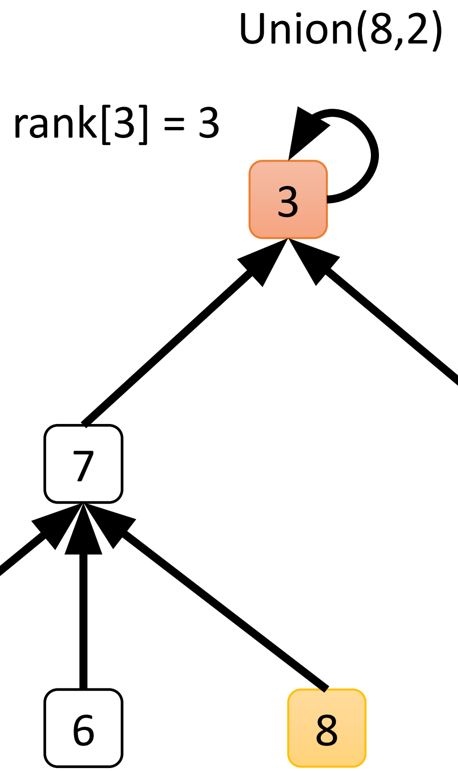
Disjoint Set:優化1

- Union by rank
- 將深度較淺的樹接到深度較深的樹的根底下



Disjoint Set:優化1

- Union by rank
- 將深度較淺的樹接到深度較深的樹的根底下

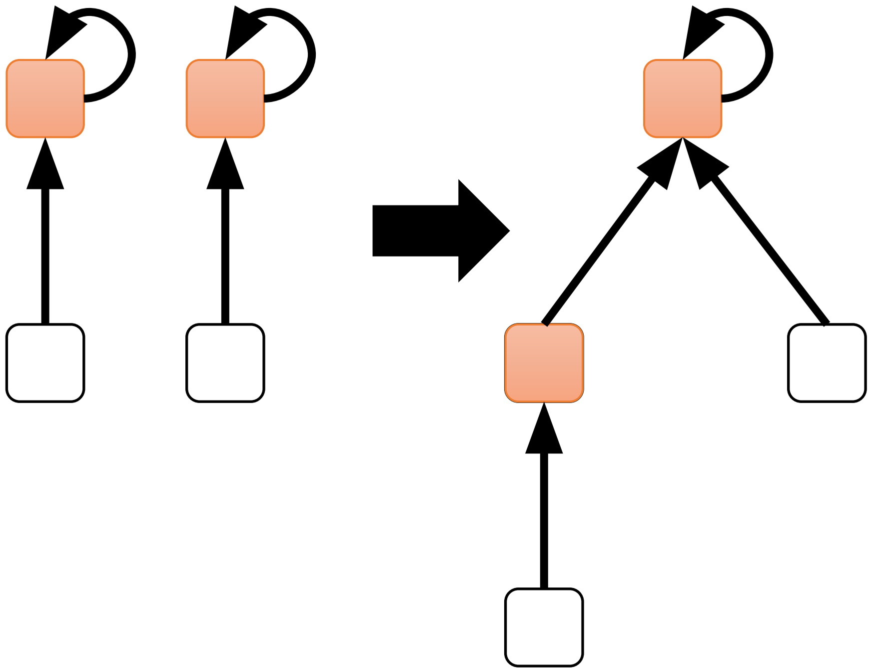


Disjoint Set:優化1

```
void Union(int a, int b) {
  int pa = find_root(a), pb = find_root(b);
  if (rank[pa] > rank[pb])
    swap(pa, pb);
  parent[pa] = pb;
  if (rank[pa] == rank[pb])
    ++rank[pb];
}
```

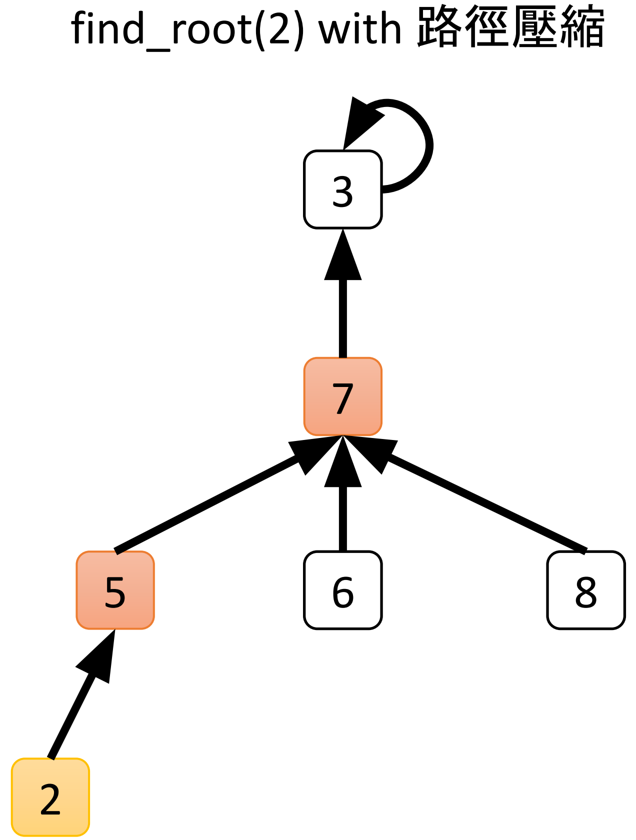
複雜度

- 只有在合併兩個 rank 相同的元素後，rank 才會加一
- 也就是說所有元素的 rank 最大值為 $\lfloor \log_2 n \rfloor$
- 所以 find_root(x) 變成 $O(\log n)$



Disjoint Set:優化2

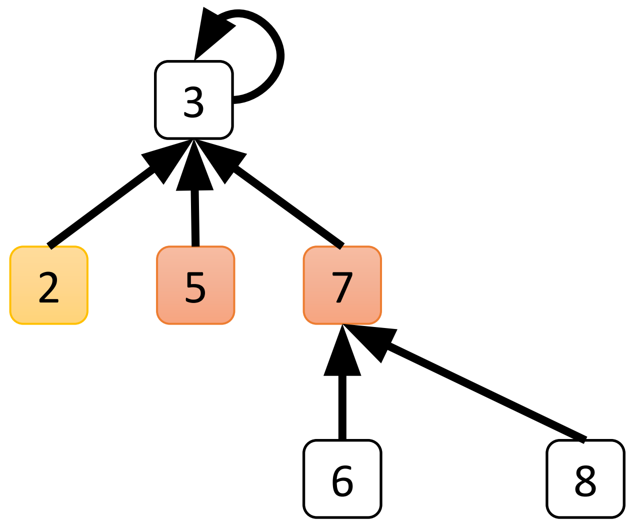
- 路徑壓縮
- 在 find_root 的時候把經過的元素都指向 root



Disjoint Set:優化2

- 路徑壓縮
- 在 find_root 的時候把經過的元素都指向 root

find_root(2) with 路徑壓縮



Disjoint Set:優化3

```
int find_root(int x) {
  if (x == parent[x])
    return x;
  int root = find_root(parent[x]);
  return parent[x] = root; // 路徑壓縮
}
```

複雜度

- 如果 Union by rank 和 路徑壓縮 一起做的話所有操作的複雜度均攤是 $O\big(\alpha(n)\big)$
  - $\alpha(n) = A^{-1}(n, n)$
  - $A(n, n)$ 會隨 n 變大而遞增
  - $A(4,4) = 2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}} - 3$
  - 所以幾乎 $\alpha(n) < 5$
- 證明：我不會證

如果只作路徑壓縮...

- Union by rank 還須要維護一個 rank 陣列有點難寫啊
- 如果只作路徑壓縮複雜度會怎樣呢？
    - 其實是可以的，複雜度是 $O\left(n + f * \left(1 + log_{2+f/n}n\right)\right)$
      這裡 n 是點數， f 是呼叫 find_root 的次數
    - 大部分時候只需要用路徑壓縮就可以了

路徑壓縮完整程式

- 只作路徑壓縮完整的程式非常短

```
int parent[MAXN];
void init(int n) {
  for (int i = 0; i < n; ++i) {
    parent[i] = i;
  }
}
int find_root(int x) {
  if (x == parent[x])
    return x;
  int root = find_root(parent[x]);
  return parent[x] = root; // 路徑壓縮
}
bool Same(int a, int b) {
  return find_root(a) == find_root(b);
}
void Union(int a, int b) {
  parent[find_root(a)] = find_root(b);
}
```

用 struct 包起來方便使用

```
class DisjointSet {
  vector<int> parent;
  int find_root(int x) {
    if (x == parent[x]) return x;
    int root = find_root(parent[x]);
    return parent[x] = root; // 路徑壓縮
  }

public:
  DisjointSet(size_t n) : parent(n + 1) { init(); }
  void init() {
    for (size_t i = 0; i < parent.size(); ++i)
      parent[i] = i;
  }
  bool Same(int a, int b) { return find_root(a) == find_root(b); }
  void Union(int a, int b) { parent[find_root(a)] = find_root(b); }
}
```

可愛的小動物 SKYOJ 121

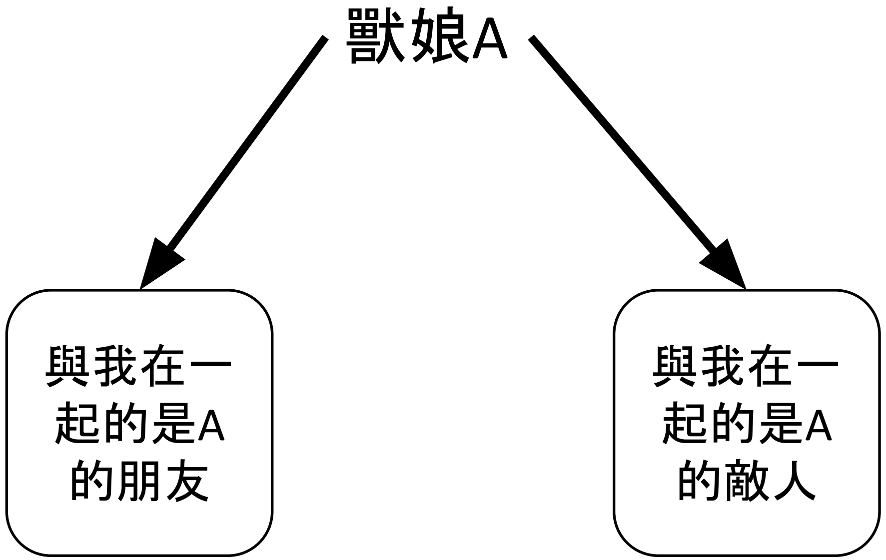
在ジャパリパーク中，獸娘都會有自己喜歡 (朋友) 跟討厭 (敵人) 的人，這些獸娘是很團結的，所以：

- 自己朋友的朋友也是自己的朋友
- 自己朋友的敵人也是自己的敵人
- 自己敵人的朋友也是自己的敵人
- 自己敵人的敵人就是自己的朋友

今天有依序有一些指令列在下方，告訴你哪兩位獸娘彼此間是朋友，哪兩位間是敵人，以及調查兩位獸娘間的關係是朋友或是敵人。如果遇到有衝突的指令的話，請無視這一條指令。

1. `you are friends a b`：指定 a, b 是朋友
2. `you are enemies a b`：指定 a, b 是敵人
3. `are you friends a b`：詢問 a, b 是否為朋友
4. `are you enemies a b`：詢問 a, b 是否為敵人

每個獸娘紀錄兩個元素



可愛的小動物－A、B是朋友

與我在一起的是A的朋友

與我在一起的是A的敵人

與我在一起的是B的朋友

與我在一起的是B的敵人

可愛的小動物 – A、B是敵人