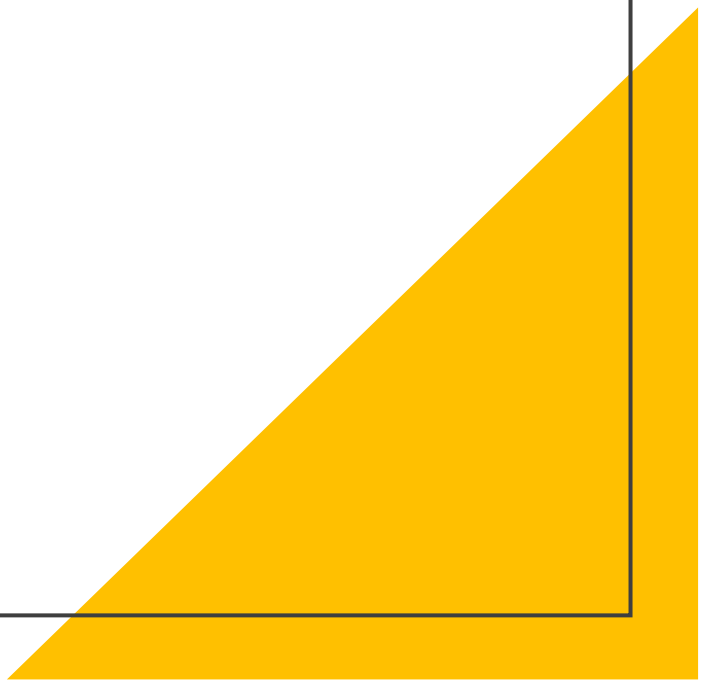
# Fenwick Tree (Binary Index Tree)

日月卦長



# 經典題

- 給你一個長度為 $n$ 的陣列 $a$，再給你 $q$ 個操作，操作有兩種：

- $sum(ql, qr)$:
  查詢 $a_{ql} + a_{ql+1} + \cdots + a_{qr}$ 的值

- $add(p, val)$:
  將 $a_p \mathrel{+}= val$

- $1 \le n, q \le 10^6$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 6 | 5 | 5 | 4 | 1 | 3 |

# 簡單！線段樹

- $4n$ 的空間
- 多個複雜的遞迴函數(build, query, update,…)

# 維護前綴和

- 我們對陣列 $a$ 維護他的前綴和陣列 $S$
- $S_0 = 0$
- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_2$
- $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
- $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$$\boldsymbol{S_n = S_{n-1} + a_n}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=ql}^{qr} a_i = S_{qr} - S_{ql-1}}$$

# Fenwick Tree – 動態維護前綴和

- 又稱為 Binary Index Tree (BIT), 樹狀樹組

- 給定 $x$，有兩種操作：
  - 在 $O(\log n)$ 的時間計算 $S_x$
  - 在 $O(\log n)$ 的時間修改(增減) $a_x$ 的數值

- 空間複雜度 $O(n)$，常數非常小！

- 非常好寫！

# BIT 操作介紹

- $modify(x, val)$:
  將 $a_x \mathrel{+}= val$

- $query(x)$:
  計算 $a_1 + a_2 + \cdots + a_x$

- ~~$build(n)$~~:
  沒有這個操作，BIT 假設一開始陣列 $a$ 裡面都是 0

# 重要函數 $lowbit(x)$

```
int lowbit(int x) { return x & -x; }
```

- $lowbit(x)$ :
  非負整數 $x$ 在二進位表示時，最靠右邊的 $1$ 所對應的值。

- 範例：

$$20_{(10)} = 10100_{(2)}$$

其中的兩個 bit 分別表示 $2^4$ 和 $2^2$，因此

$$lowbit(20) = 2^2 = 4$$

# BIT 結構

- BIT 用編號 $1\sim n$ 的陣列 $bit$ 紀錄
- $bit_x$ 記錄區間 $[x - lowbit(x) + 1, x]$ 的總和，也就是

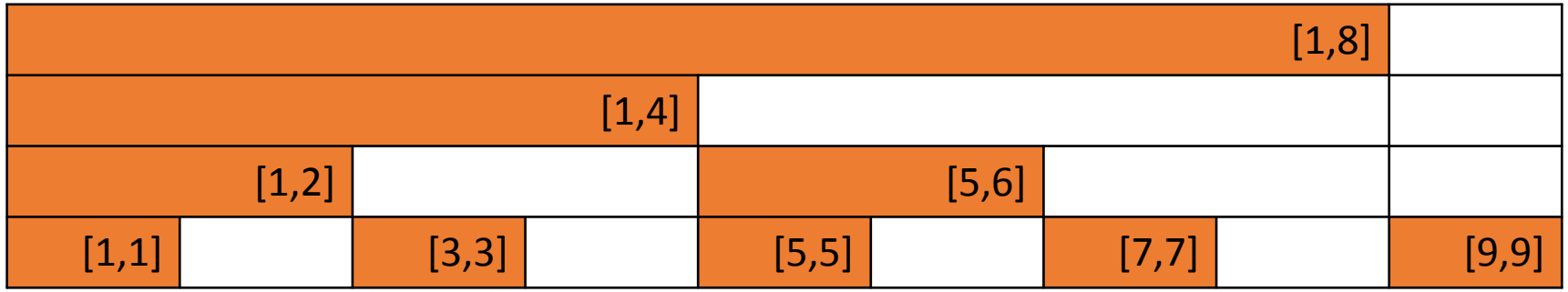
$$\sum_{i=x-lowbit(x)+1}^{x} a_i$$

$bit$ 陣列

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [1,1] | [1,2] | [3,3] | [1,4] | [5,5] | [5,6] | [7,7] | [1,8] | [9,9] |

# BIT 結構

- 將紀錄的區間圖像化後
  看起來就是沒有右子樹的線段樹

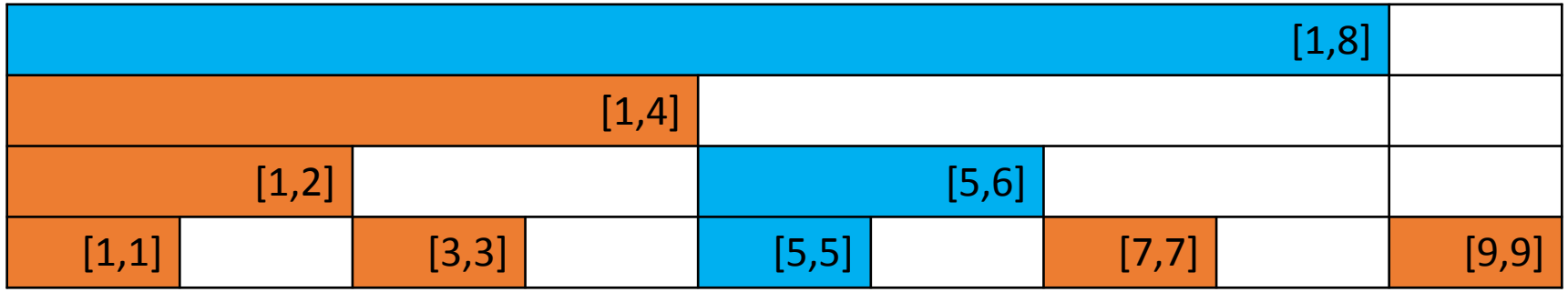



*bit* 陣列

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [1,1] | [1,2] | [3,3] | [1,4] | [5,5] | [5,6] | [7,7] | [1,8] | [9,9] |

# $modify(x, val)$

- 以 $x = 5$ 為例，修改 $a_5$ 後需要更新的塊有：$bit_5, bit_6, bit_8$
- 特殊關係：$5 + lowbit(5) = 6$， $6 + lowbit(6) = 8$




$bit$ 陣列

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [1,1] | [1,2] | [3,3] | [1,4] | [5,5] | [5,6] | [7,7] | [1,8] | [9,9] |

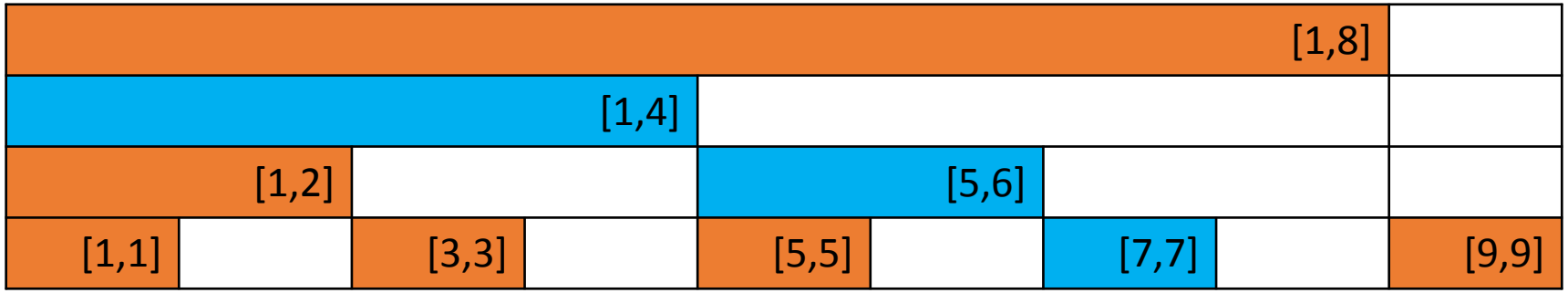
# $modify(x, val)$

$O(\log n)$

```
void modify(int x, int val) {
  for (; x <= n; x += lowbit(x))
    bit[x] += val;
}
```

# $query(x)$

- 以 $x = 7$ 為例，$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = bit_4 + bit_6 + bit_7$
- 特殊關係：$7 - lowbit(7) = 6$， $6 - lowbit(6) = 4$




*bit* 陣列

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [1,1] | [1,2] | [3,3] | [1,4] | [5,5] | [5,6] | [7,7] | [1,8] | [9,9] |

# $query(x)$

$O(\log n)$

```
long long query(int x) {
  long long sum = 0;
  for (; x; x -= lowbit(x))
    sum += bit[x];
  return sum;
}
```

# 包裝後
# 完整程式碼

```
class BIT {
  int n;
  vector<long long> bit;

public:
  void init(int _n) {
    n = _n;
    bit.resize(n);
    for (auto &b : bit) b = 0;
  }
  long long query(int x) const {
    long long sum = 0;
    for (; x; x -= lowbit(x))
      sum += bit[x];
    return sum;
  }
  void modify(int x, int val) {
    for (; x <= n; x += lowbit(x))
      bit[x] += val;
  }
};
```

# 拓展到二維

```
class BIT2D {
  int m;
  vector<BIT> bit1D;

public:
  void init(int _m, int _n) {
    m = _m;
    bit1D.resize(m);
    for (auto &b : bit1D) b.init(_n);
  }
  long long query(int x, int y) const {
    long long sum = 0;
    for (; x; x -= lowbit(x))
      sum += bit1D[x].query(y);
    return sum;
  }
  void modify(int x, int y, int val) {
    for (; x <= m; x += lowbit(x))
      bit1D[x].modify(y, val);
  }
};
```

# 經典題 – 逆序數對

- 給一個數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$
  有多少對 $(i, j)$ ，滿足 $1 \leq i < j \leq n$ 但 $a_i > a_j$ ？

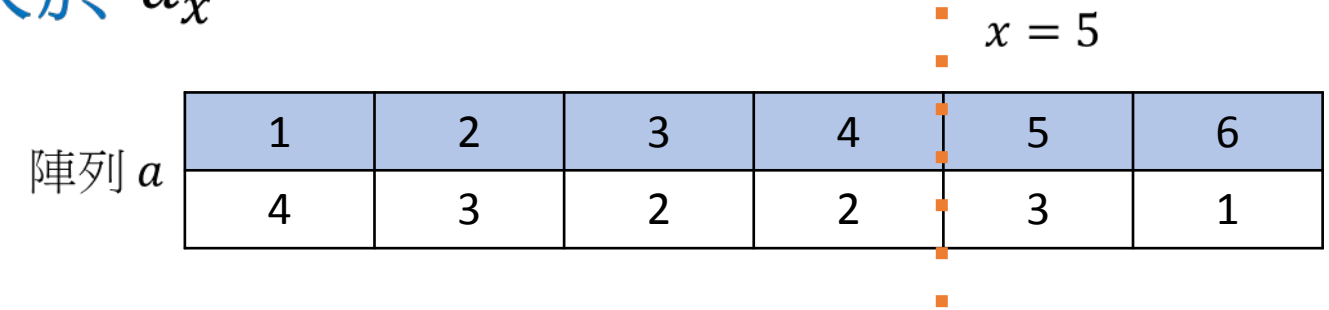
- 已知 $n \leq 100000, 1 \leq a_i \leq n$

# 方法1:在 merge sort 過程中順便求

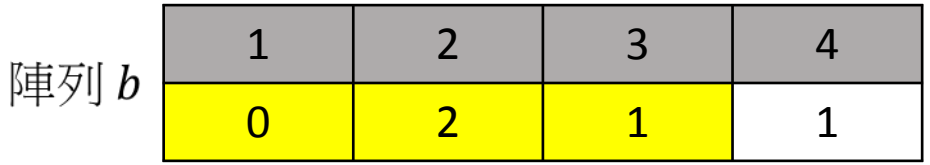
- 與本章節無關所以不討論
- 但是要知道有這個方法

# 方法2：值域 BIT

- 對於每個 $1 \le x \le n$
  計算 $a_1 \sim a_{x-1}$ 中有多少數字大於 $a_x$
- 這些數量總和就是逆序數對




- 用一個值域陣列 $b$ 紀錄
  $a_1 \sim a_{x-1}$ 中每個數字出現幾次
- $b_1 \sim b_{a_x}$ 的前綴和
  代表小於等於 $a_x$ 的數字出現幾次




$a_1 \sim a_4$ 中小於等於 $a_5$ 的有 3 個
大於 $a_5$ 的有 $(5-1)-3=1$ 個

# 陣列 $b$ 可以用 BIT 輕易維護

```
vector<int> v(n);
for(int i = 0; i < n; ++i) cin >> v[i];
BIT bit; /* 如果數值範圍太大要記得做離散化 */
bit.init(*max_element(v.begin(), v.end()));
int ans = 0;
for(int i = 0; i < n; ++i) {
  ans += i - bit.query(v[i]);
  bit.modify(v[i], 1);
}
cout << ans << '\n';
```

# 經典題 2

- 給你一個長度為 $n$ 的陣列 $a$，再給你 $q$ 個操作，操作有兩種：

- $sum(ql, qr)$:
  查詢 $a_{ql} + a_{ql+1} + \cdots + a_{qr}$ 的值

- $add(ql, qr, val)$:
  將 $a_{ql}, a_{ql+1}, \ldots, a_{qr}$ 都加上 $val$

- $1 \leq n, q \leq 10^6$

**線段樹+懶惰標記?**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 6 | 5 | 5 | 4 | 1 | 3 |

# 維護差分

- 我們對陣列 $a$ 維護他的差分陣列 $D$
- $D_1 = a_1$
- $D_2 = a_2 - a_1$
- $D_3 = a_3 - a_2$
- $D_4 = a_4 - a_3$

$$\boldsymbol{D_n = a_n - a_{n-1}}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{x} D_i = a_x}$$

# 性質

- $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{x} a_i &= \sum_{i=1}^{x}\sum_{y=1}^{i} D_y \\ &= x \times D_1 + (x-1) \times D_2 + \cdots + 1 \times D_x \\ &= \sum_{i=1}^{x} (x - i + 1) \times D_i \\ &= (x+1)\sum_{i=1}^{x} D_i - \sum_{i=1}^{x} i \times D_i\end{aligned}$$

# 性質

- $$\sum_{i=1}^{x} a_i = (x+1)\sum_{i=1}^{x} D_i - \sum_{i=1}^{x} i \times D_i$$

用兩顆 BIT 就可以維護的東西

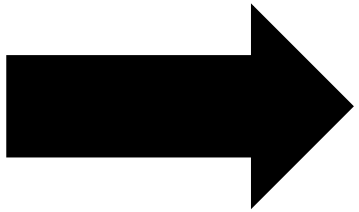
# 維護差分

- $D_2 = a_2 - a_1$
- $D_3 = a_3 - a_2$

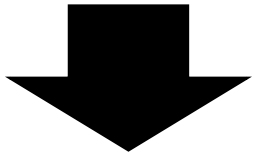
$$a_2 \mathrel{+}= x \Rightarrow \begin{matrix} D_2 \mathrel{+}= x \\ D_3 \mathrel{-}= x \end{matrix}$$

# 區間加值

- $a_{ql} \mathrel{+}= x$
- $a_{ql+1} \mathrel{+}= x$
- ...
- $a_{qr} \mathrel{+}= x$



- $D_{ql} \mathrel{+}= x$
- $D_{ql+1} \mathrel{+}= x - x$
- ...
- $D_{qr} \mathrel{+}= x - x$
- $D_{qr+1} \mathrel{+}= -x$



$$\begin{aligned} D_{ql} &\mathrel{+}= x \\ D_{qr+1} &\mathrel{-}= x \end{aligned}$$

# 區間修改+查詢

```
class RangeAddBIT {
  int n;
  BIT D, xD;

public:
  void init(int _n) {
    n = _n;
    D.init(n);
    xD.init(n);
  }
  void add(int ql, int qr, int val) { // [ql, qr] 加值
    D.modify(ql, val);
    xD.modify(ql, ql * val);
    if (qr < n) {
      D.modify(qr + 1, -val);
      xD.modify(qr + 1, -(qr + 1) * val);
    }
  }
  long long query(int x) { // 查詢 [1,x] 總和
    return (x + 1) * D.query(x) - xD.query(x);
  }
};
```