Métodos de contagem

Esta aula aborda métodos fundamentais de contagem, apresentando dois princípios essenciais para resolver problemas de enumeração: o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo. Estes princípios são fundamentais para a resolução de problemas de contagem e serão muito utilizados por nós ao longo do curso para a resolução de problemas de probabilidade.

1 Introdução

Considere o seguinte problema: em um conjunto de 4 cartas, há 2 cartas brancas e 2 cartas azuis; desejamos colocar estas cartas em uma fila de modo que duas cartas seguidas não sejam da cor azul. De quantas maneiras podemos fazer isso? Vamos resolver este problema apresentando todas as filas possíveis e, em seguida, descartaremos os casos que não desejamos contar (as filas que possuem duas cartas seguidas da cor azul). Denotando uma carta branca por B e uma carta azul por A, todas as filas possíveis serão:

1. $BBAA$
2. $BABA$
3. $ABAB$
4. $AABB$
5. $ABBA$
6. $BAAB$

Observamos agora que as filas 1, 4 e 5 são problemáticas: apresentam duas cartas brancas em sequência. Logo, das 6 filas totais, restam 3 casos possíveis. Suponha agora que tivéssemos 10 cartas sendo 6 cartas brancas e 4 cartas azuis. Quantas filas seriam possíveis respeitando o critério de que duas cartas seguidas não podem ser da cor azul? Seria uma tarefa tediosa listar todas as filas possíveis para, então, descartar as filas que não satisfazem o critério desejado. Nas próximas seções, desenvolveremos técnicas que nos possibilitarão resolver problemas deste tipo de uma maneira muito mais elegante e eficiente.

2 O Princípio Aditivo

Princípio Aditivo: sejam A e B dois conjuntos disjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$. Se A possui p elementos e B possui q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

> **Nota**
>
> A quantidade de elementos de um conjunto A qualquer será denotada por $\#A$. Assim, se A possui p elementos, escreveremos $\#A = p$.

Exemplo 1 Considere o seguinte experimento: uma moeda será lançada 3 vezes. Quantos são os resultados possíveis? Denotando cara por 0 e coroa por 1, o conjunto de todos os resultados possíveis é:

$$\Omega = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}.$$

Seja A o subconjunto de Ω formado por todos os resultados que possuem exatamente duas caras ou exatamente duas coroas. Queremos encontrar a quantidade de elementos do conjunto A. Se A_1 denota os resultados que possuem exatamente duas caras e A_2 denota os resultados que possuem exatamente duas coroas, então $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A = A_1 \cup A_2$. Logo, pelo Princípio Aditivo, temos que $\#A = \#A_1 + \#A_2$.

O conjunto A_1 é formado pelos elementos $\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ e, portanto, $\#A_1 = 3$. O conjunto A_2 é formado pelos elementos $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ e, portanto, $\#A_2 = 3$. Assim,

$$\#A = 3 + 3 = 6.$$

3 O Princípio Multiplicativo

Princípio Multiplicativo: Se uma decisão D_1 pode ser tomada de m modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de n modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a mn.

O Princípio Multiplicativo também é conhecido como Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 2 Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro.

(a) Pedro só tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Quantos programas Pedro pode fazer?

(b) Se Pedro tiver dinheiro para assistir a um filme e a uma peça de teatro, quantos os programas Pedro pode fazer?

Vamos resolver, primeiro, o item (a). Seja A o conjunto de todos os programas possíveis. Seja B o conjunto de todos os programas que envolvem filmes e C o conjunto de todos os programas que envolvem peças de teatro. Queremos encontrar a quantidade de elementos do conjunto A. Se B denota os programas que envolvem filmes e C denota os programas que envolvem peças de teatro, então $B \cap C = \emptyset$ e $A = B \cup C$. Logo, pelo Princípio Aditivo, temos que

$$\#A = \#(B \cup C) = \#B + \#C = 3 + 2 = 5.$$

Para o item (b), usando o Princípio Multiplicativo, Pedro pode escolher 1 filme dentre 3 opções e 1 peça de teatro dentre 2 peças. Portanto, o número total de programas possíveis será $3 \times 2 = 6$ programas.

4 Exercícios

Exercício 1 Dois dados serão lançados e o resultado das faces superiores será observado. Quantos resultados possíveis existem? Quantos resultados com faces diferentes existem?

Exercício 2 Quantas diferentes placas de automóveis com 7 caracteres são possíveis se os três primeiros campos forem ocupados por letras e os 4 campos finais por números? Quantas placas existem sem repetição de caracteres?

Exercício 3 Quantos são os números de três algarimos distintos?

Exercício 4 O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

Exercício 5 Quantos são os números pares de três algarismos distintos?