INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Inestabilidades Paramétricas de Ondas en Fluidos.

T E S I S
Para obtener el grado de:
Doctorado en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Presentada por:

M.Sc. Franklin W. Peña-Polo

DIRECTORES:

Dr. Ignacio Carvajal
Dr. Leonardo Sigalotti

Ciudad de México, Agosto de 2019

Contents

List of Figures

List of Tables

Nomenclatura

μ	Viscosidad dinámica
∇	Operador diferencial vectorial
ρ	Densidad
ζ	Segunda viscosidad
$\vec{F}$	Fuerza
ψ	Potencial de energía
$\vec{v}$	Vector velocidad
p	Presión
t	Tiempo

Introducción

Al someter a vibraciones netamente verticales a la superficie de un liquido, para un cierto rango de frecuencia y amplitudes en la superficie se presentan determinados patrones regulares, a este fenómeno se le llama *Inestabilidad de Faraday.* El estudio de este tipo de inestabilidad tiene una larga e interesante historia que involucra a dos de los individuos más destacados de la ciencia moderna. A mediados del año 1831, M. Faraday (1791-1867) realizó una serie de experimentos con fluidos sometidos a vibraciones . El 19 de junio, informa en su diario la aparición de patrones cuadrados cuando una capa de fluido se pone en vibración. Trispaciones casi siempre cuadrangulares, siempre cuando están bien formadas, pero modificadas por el borde del agua o el líquido, también por el centro de movimiento '[19, §2]. Para examinar este fenómeno más de cerca, extendió el líquido en una placa horizontal, fijó la placa en el centro de una tira de vidrio o listón de soporte sostenido en los nodos y causó vibración por fricción. En particular, Faraday señaló que la frecuencia de las ondas era la mitad de la frecuencia del soporte. Medio siglo después, la respuesta subarmónica a las vibraciones puramente verticales fue cuestionada por L. Mathiessen [46], quien afirmó la sincronía del forzamiento y las ondas excitadas. Esta controversia motivó a Lord Rayleigh (1842-1919) a hacer su propio examen. En un primer experimento con una instalación como Faradays, una barra de hierro de un metro de largo se colocó en vibraciones mantenidas electromagnéticamente. Para medir las frecuencias, que eran demasiado altas (20 Hz) para ser reconocidas a simple vista, construyó un aparato que consiste en un disco de papel giratorio con uno, dos o cuatro agujeros. Observando la cantidad de imágenes de la barra y las olas, confirmó la declaración de Faradays. Para resolver la cuestión más allá de cualquier duda, proporcionó al bar pesas cerca del medio para ajustar la frecuencia de resonancia. Continúa: 'El tablón se puso en vibración mediante impulsos adecuadamente sincronizados con la mano, y los pesos se ajustaron hasta que el período correspondió a un modo de vibración libre del depósito de mercurio. Cuando se completa el ajuste, una vibración muy pequeña del tablón arroja el mercurio a una gran conmoción ... '[57]. Las frecuencias ahora se podían determinar directamente mediante inspección y, una vez más, el resultado apoyaba a Faraday. La naturaleza subarmónica de la inestabilidad fue finalmente verificada teóricamente directamente de la hidrodinámica por Benjamin y Ursell [4], quienes en 1954 desarrollaron la teoría lineal. Ignorando la viscosidad, las ecuaciones fluidas ideales se expandieron en modos normales. Las amplitudes de los modos normales se desacoplan y cumplen como una primera aproximación de la ecuación de Mathieu, que es una ecuación diferencial ordinaria no autónoma de segundo orden. Benjamin y Ursell pudieron utilizar las propiedades de estabilidad conocidas de la ecuación de Mathieu para confirmar el punto de vista de Faraday y Rayleigh. La inestabilidad encontrada en la ecuación de Mathieu se llama inestabilidad paramétrica, y es conocida por sistemas físicos tan diversos como osciladores electrónicos, ondas de Langmuir en plasma y yo-yos. El prototipo es el péndulo excitado paramétricamente. Si el pivote del péndulo oscila verticalmente, el péndulo comenzará a oscilar horizontalmente con la mitad de la frecuencia para algunas amplitudes y frecuencias. En este ejemplo, así como en el experimento de Faraday, la aceleración gravitacional efectiva es el parámetro externo impulsado. La ecuación de Mathieu lleva el nombre del matemático francés E. L. Mathieu (1825-1890). En su trabajo original de 1868 aparece al resolver la ecuación de onda bidimensional para el movimiento de una membrana elíptica. Es interesante notar que Lord Rayleigh ya reconoció el experimento de Faraday como una inestabilidad paramétrica [56]. En su trabajo de 1883, en realidad analizó la ecuación de Mathieu en presencia de amortiguamiento y encontró una condición necesaria para la respuesta subarmónica. Más tarde [58] elaboró sobre el tema inspirado en el trabajo del físico estadounidense G. W. Hill (1838-1914) de 1877 sobre una generalización de la ecuación de Mathieu relativa al movimiento de la luna bajo la influencia del sol y la tierra. En los años sesenta y setenta se realizó un trabajo para ampliar el análisis de Benjamin y Ursell a amplitudes finitas mediante la incorporación de no linealidades débiles. Sin embargo, con el creciente interés de la dinámica no lineal y el caos temporal en la última década, el experimento de Faraday ha ganado un interés más amplio. En 1981 Keolian et al. [37] observó un estado caótico en una célula anular fuertemente impulsada. Dos años después de que Gollub y Meyer [23] estudiaran la transición al caos de un modo único en una celda circular. Ciliberto y Gollub [7, 8] mostraron cómo la competencia entre dos modos superpuestos puede conducir al caos. Además, Simonelli y Gollub [62] estudiaron las interacciones de dos modos casi degenerados por simetría. Los estudios experimentales fueron acompañados por esfuerzos teóricos [49, 31, 47, 26, 2, 21, 66]. El objetivo de estos estudios es extraer ecuaciones de amplitud para un solo modo o unos pocos modos resonantes de la hidrodinámica. Para una revisión ver Miles y Henderson [50]. La investigación mencionada anteriormente aborda el límite de las relaciones de aspecto bajas, es decir, cuando la longitud de onda es comparable al tamaño del sistema. En este caso, solo unos pocos modos se excitan simultáneamente y la dinámica es de baja dimensión. Gran parte del interés actual en el experimento de Faraday se debe a sus posibilidades como sistema con muchos grados de libertad. Para este propósito, el experimento de Faraday tiene dos ventajas principales; la relación de aspecto puede variarse simplemente variando la frecuencia, y la dinámica puede investigarse visualmente. Un resultado sorprendente para las relaciones de aspecto altas es la observación de que el relieve de la superficie puede tomar la forma de patrones ordenados que se asemejan mucho a los cristales bidimensionales. Sin embargo, la verdadera sorpresa es que estos patrones no se limitan a las celdas de una geometría particular. Para relaciones de aspecto altas, los límites se vuelven menos importantes y la geometría es la del plano infinito. Esto ya lo notó Faraday. Al estudiar el patrón cuadrado observa: 'Evidentemente, no es causado por ondas interferentes, aunque puede resolverse en ellas. ... Además, por irregulares que sean los bordes, la disposición puede hacerse cuadrangular '[19, §58]. Ezerskii et al. (1986) informaron recientemente un patrón cuadrado (1986) en una geometría circular. [14, 15]. En el mismo año, Aleksandrov et al. [1] encontró un patrón hexagonal para las amplitudes de la unidad debajo de aquellas para las cuales observaron el patrón cuadrado. La selección de patrones para las relaciones de aspecto intermedias ha sido investigada por Douady y Fauve [10, 11]. Notamos que se pueden introducir múltiples números de onda críticos a través de un forzado con más de un componente de frecuencia. Esto favorece el sistema Faraday de otros sistemas de formación de patrones como la convección de Rayleigh-Benard y permite la ingeniería de patrones [13]. Varios autores han estudiado experimentalmente el desglose del patrón cuadrado a un estado desordenado a medida que aumenta la amplitud de la unidad. Tuffilaro y col. [65] estudió el longitud de correlación en función de la amplitud de la unidad y encontró un punto de transición bien definido. Por encima de la transición se encuentra el caos espacio-temporal o la turbulencia débil, es decir, se pierde la coherencia espacial pero la dinámica sigue dominada por una escala de longitud única. Ezerskii y col. [15, 16, 17] encontraron que la transición está mediada por el inicio de modulaciones transversales de longitud de onda larga. Las propiedades de transporte de las turbulentas olas de Faraday se han estudiado recientemente [59, 48]. Estos aspectos se revisan en las Refs. [22, 24] y [25]. Varios trabajadores han realizado intentos teóricos para comprender la formación del patrón y la transición al caos espacio-temporal. El más ambicioso parece ser el de Milner [51], que aplica el método de escalas múltiples para derivar las ecuaciones de amplitud. Sobre la base de las consideraciones energéticas, concluye que el estado preferido es el patrón cuadrado. Esto está en contradicción con la observación antes mencionada de un patrón hexagonal [1], y con los resultados experimentales reportados en la presente tesis. La teoría de Levin et al. [42] predice patrones hexagonales y cuadrados, pero sus métodos y presunciones parecen muy burdos. Ezerskii, Rabinovich y col. [15, 16, 54, 55] aplican principalmente su versión de las ecuaciones de amplitud al problema del caos e intermitencia espacio-temporal. En esta tesis presentamos un estudio experimental del sistema de Faraday de alta relación de aspecto. Se hace hincapié en la observación de una serie de patrones cristalinos de diferente simetría. En particular, el descubrimiento de un estado cuasicristalino es de interés, ya que, según nuestro conocimiento, es el primer patrón de este tipo que se encuentra en un sistema hidrodinámico. El resto de la parte I de la tesis se organiza de la siguiente manera. En sec. 2 se desarrollan la hidrodinámica y la teoría lineal. La sección 3 ofrece una breve reseña histórica de los cuasicristales. En sec. 4 describimos la configuración experimental, y en la Sec. 5 se analiza el sistema óptico. En sec. 6 informamos nuestros resultados sobre la relación de dispersión, las tasas de amortiguamiento y la amplitud crítica, mientras que la Sec. 7 está dedicado a los patrones cristalinos y al diagrama de fases. La sección 8 contiene una discusión de la teoría no lineal. Cerramos esta parte de la tesis en la Sec. 9 con la conclusión.

Chapter 1

Marco Teórico

1.1 Descripción de un fluido

En esta sección plantearemos las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica, necesarias para la descripción del experimento de Faraday [5]. En mecánica de fluidos, las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido [2, 6, 7], en su forma más general son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right] = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}). \tag{1.2}$$

La ecuación 1.1 expresa el principio de la conservación de la materia y se conoce como la ecuación de continuidad , donde ρ es la densidad del fluido y $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ la velocidad del flujo. la ecuación 1.2 combina los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica aplicados a un volumen de fluido llamada ecuación de Navier-Stokes , donde $\vec{F}$ y p es una fuerza y la presión que actúa sobre el volumen de fluido, respectivamente, μ es la viscosidad dinámica y ζ es la segunda viscosidad.

En la mayoría de los casos de interés, un líquido convencional, tal como el agua, es incompresible. Un fluido, se dice que es incompresible, cuando la densidad de masa ρ de un elemento de volumen V no cambia notablemente con el tiempo, y ademas, tiene la capacidad de oponerse a la comprensión, es decir, el volumen del fluido permanece constante ante las variaciones de la presión, así

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{1.3}$$

Generalmente la distribución de densidad inicial de un fluido incompresible es espacialmente uniforme. Por lo tanto, podemos decir que la distribución de densidad es constante en el tiempo y uniforme en el espacio.

Debido a que el término relacionado con la segunda viscosidad resulta de mayor importancia en casos tales como fluidos compresibles, ondas de choque, propagación de sonido en un fluido Newtoniano como el de la ley de Stokes de la atenuación del sonido $[1, 4, 8]$, podemos omitir este.

Suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el volumen de fluido, presente en la ecuación 1.2, es de naturaleza conservativa, es decir,

$$\vec{F} = -\rho\nabla\mathit{\Psi}, \tag{1.4}$$

donde $\mathit{\Psi}$ es la energía potencial por unidad de masa y $\rho\mathit{\Psi}$ es la energía potencia por unidad de volumen. Ademas, si asumimos que en seno del fluido no existen fuertes variaciones de temperatura, podemos suponer que la viscosidad es espacialmente uniforme, de tal manera que la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible se reduce a

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla p - \rho\nabla\mathit{\Psi} + \rho\nu\nabla^2\tilde{v}, \tag{1.5}$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática. En términos generales, el momentum se difunde una distancia del orden $\sqrt{\nu t}$ metros en t segundos como consecuencia de la viscosidad. La viscosidad cinemática del agua a 20^oC es de aproximadamente 1.0×10^{-6} m^2/s [2]. De ello se deduce que la difusión del momento viscoso en agua es un proceso relativamente lento.

El conjunto completo de ecuaciones que gobiernan a un fluido incompresible entonces son:

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\mathit{\Psi} + \nu\nabla^2\tilde{v}. \tag{1.7}$$

Aquí, ρ y ν son consideradas constantes conocidas, y $\Psi(\tilde{r}, t)$ la asumiremos como una función conocida. Por lo tanto, tenemos cuatro ecuaciones: la ecuación 1.6, además de las tres componentes de la ecuación 1.7, para cuatro incógnitas, que serian, la presión, $p(\vec{r}, t)$ y las tres componentes de la velocidad, $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Debemos tener en cuenta que una ecuación de conservación de energía es redundante en el caso de flujo de fluido incompresible.

1.1.1 Ondas de superficie

Consideremos un volumen de agua contenido por un recipiente, el cual posee una profundidad d, sobre la superficie del planeta tierra. Asumiendo que este cuerpo es lo suficientemente pequeño en comparación con la Tierra, tal que su superficie imperturbable es aproximadamente plana. Con la coordenada cartesiana z orientada en la vertical, con $z = 0$ correspondiente a la superficie antes mencionada. Supongamos que una onda de pequeña amplitud se propaga horizontalmente a través del agua, siendo $v(r, t)$ el campo de velocidades asociado.

Debido a que el agua es un liquido en esencia incompresible, las ecuaciones de movimiento están descritas por 1.6 y 1.7, las cuales podemos reescribir como:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1.8}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p - \rho g \hat{e}_z + \mu \nabla^2 \vec{v}, \tag{1.9}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad terrestre y se ha reemplazado $\nabla \Psi = g \hat{e}_z$ el potencial gravitatorio. La presión la podemos escribir

$$p(\vec{r}, t) = p_0 - \rho g z + p_1(\vec{r}, t), \tag{1.10}$$

siendo p_0 es la presión atmosférica y p_1 la presión de perturbación debida a la onda. En ausencia de la onda, la presión del agua a una profundidad h por debajo de la superficie es $p_0 + \rho g h$. Sustituyendo en 1.9 y despreciando los términos de segundo orden, tenemos

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -\nabla p_1 + \mu \nabla^2 \vec{v}, \tag{1.11}$$

Por otra parte, despreciando la viscosidad, lo cual no es seria un error si consideramos que, por ejemplo, para el agua la viscosidad es despreciable siempre que $\lambda \gg (\frac{v^2}{g})^{\frac{1}{3}} \sim 5 \times 10^{-5}$m. Así la ecuación 1.11 se reduce a

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -\nabla p_1. \tag{1.12}$$

Si tomamos el rotor de esta ecuación obtenemos que

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \simeq 0, \tag{1.13}$$

siendo $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ la vorticidad. Lo que nos dice que el campo de velocidad asociado con la onda es irrotacional. La ecuación 1.13 puede ser satisfecha haciendo

$$\vec{v} = \nabla \phi, \tag{1.14}$$

donde $\phi(\vec{r}, t)$ es el potencial de velocidad. Sin embargo, aplicando esto a la ecuación 1.8, se obtiene que el potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{1.15}$$

Finalmente, de las ecuaciones 1.12 y 1.14 se obtiene que la presión en superficie perturbada es

$$p_1 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{1.16}$$

1.1.1.1 Condiciones de borde

Ahora debemos considerar las condiciones físicas a ser satisfechas en los limites superior e inferior del agua. El agua está delimitada por la parte de abajo por una superficie sólida situada en $z = -d$. Dado que el agua debe permanecer siempre en contacto con esta superficie, la restricción física adecuada en el límite inferior es $v_z|_{z=-h} = 0$, es decir, la velocidad normal es cero en el límite inferior, o lo que es lo mismo

$$v_z|_{z=-h} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-d} = 0. \tag{1.17}$$

El límite superior del agua es un poco más complicado, debido a que es una superficie libre. Considerando ζ como el desplazamiento vertical de esta superficie debido a la onda, tenemos que

$$v_z|_{z=0} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{1.18}$$

La restricción física adecuada para el límite superior es que la presión del agua debe ser igual a la presión atmosférica, ya que no puede haber una discontinuidad de presión a través de una superficie libre, esto en ausencia de la tensión superficial. En consecuencia, a partir de la ecuación 1.10, obtenemos

$$p_1|_{z=0} = \rho g \zeta, \tag{1.19}$$

lo cual implica que

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial t}\right|_{z=0} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\, \rho g \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0}, \tag{1.20}$$

donde también se ha empleado la ecuación 1.18. Combinando esta expresión con la ecuación 1.16 obtenemos,

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} = -g^{-1} \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 t}\right|_{z=0}, \tag{1.21}$$

la cual es la condición para la superficie libre [6].

Suponiendo una solución a la ecuación de onda 1.15 de la forma

$$\phi(\vec{r}, t) = F(z)\cos(\omega t - kx). \tag{1.22}$$

esta solución corresponde en realidad a la propagación de onda plana de vector de onda $\vec{k} = k\hat{e}_x$, frecuencia angular ω y amplitud $F(z)$. Sustituyendo en la ecuación 1.15, obtenemos,

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - k^2 F = 0, \tag{1.23}$$

cuyas soluciones independientes son $e^{(+kz)}$ y $e^{(-kz)}$. Por lo tanto, una solución general de 1.15 toma la forma

$$\phi(x, z, t) = Ae^{kz}\cos(\omega t - kx) + Be^{-kz}\cos(\omega t - kx), \tag{1.24}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. La condición de frontera 1.17 satisface la condición de que $B = Ae^{(-2kd)}$, dando

$$\phi(x,z,t) = A\left[e^{kz} + e^{-k(z+2d)}\right]\cos(\omega t - kx), \tag{1.25}$$

la condición de frontera 1.21 produce entonces

$$Ak\left(1 - e^{-2kz}\right)\cos(\omega t - kx) = A\frac{\omega^2}{g}\left(1 + e^{-2kz}\right)\cos(\omega t - kx), \tag{1.26}$$

la cual se reduce a la relación de dispersión

$$\omega^2 = gk\tanh(kd). \tag{1.27}$$

1.1.1.2 Energía de las ondas de gravedad

La velocidad de fase es la velocidad aparente de una fase determinada de una onda. La velocidad de fase está dada en términos de la frecuencia angular de la onda ω y del vector de onda k, por la relación [11],

$$v_p = \frac{\omega}{k}, \tag{1.28}$$

Empleando la ecuación 1.27 podemos escribir la velocidad de fase de una onda de gravedad que se propagando horizontalmente a través de un volumen de agua de profundidad d como,

$$v_p = (gd)^{1/2}\left[\frac{\tanh(kd)}{kd}\right]^{1/2}. \tag{1.29}$$

La tasa a la cual viaja la energía almacenada en la onda es la velocidad de grupo, la cual podemos escribir como [11],

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \tag{1.30}$$

así, empleando la ecuacion 1.27 se tiene que,

$$v_g = \frac{1}{2}\frac{\left(g\tanh(kd) + gkd(1 - \tanh^2(kd))\right)}{\sqrt{(gk\tanh(kd))}}, \tag{1.31}$$

además, la razón entre la velocidad de grupo y la velocidad de fase es

$$\frac{v_p}{v_g} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)}\right]. \tag{1.32}$$

Se debe tener en cuenta que ni la velocidad de fase ni la velocidad de grupo de una onda de gravedad pueden exceder un cierto valor critico $(gd)^{\frac{1}{2}}$. Por otra parte, el campo de desplazamiento y el campo de velocidad asociados a una onda de gravedad plana de número de onda $k\hat{e}_x$, frecuencia angular ω, y amplitud a, son

$$\begin{aligned}
\xi_x(x,z,t) &= -a\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx), && (1.33)\\
\xi_x(x,z,t) &= -a\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx), && (1.34)\\
v_x(x,z,t) &= a\omega\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx), && (1.35)\\
v_z(x,z,t) &= a\omega\frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx), && (1.36)
\end{aligned}$$

La energía cinética media por unidad de superficie asociada con una onda de gravedad se define como

$$K = \left\langle \int_{-d}^{\zeta} \frac{1}{2}\rho v^2 dz \right\rangle, \tag{1.37}$$

dónde

$$\zeta(x,t) = a\sin(\omega t - kx) \tag{1.38}$$

que es el desplazamiento vertical de la superficie, y

$$\langle \cdots \rangle = \int_0^{2\pi} (\cdots)\frac{d(kx)}{2\pi} \tag{1.39}$$

es un promedio sobre una longitud de onda. Teniendo en cuenta que $\langle \cos^2(\omega t - kx)\rangle = \langle \sin^2(\omega t - kx)\rangle = \frac{1}{2}$, se deduce a partir de las ecuaciones de 1.35 y 1.36 que,

$$K = \frac{1}{4}\rho a^2\omega^2 \int_{-d}^{0} \frac{\cosh[2k(z+d)]}{\sinh^2(kd)}dz = \frac{1}{4}\rho a^2 g\frac{\omega^2}{gk\tanh(kd)}. \tag{1.40}$$

Haciendo uso de la relación de dispersión general 1.27, obtenemos

$$K = \frac{1}{4}\rho g a^2. \tag{1.41}$$

La energía potencial media de la perturbación por unidad de superficie asociada a una onda de gravedad se define como

$$U = \left\langle \int_{-d}^{\zeta} \rho g z dz \right\rangle + \frac{1}{2}\rho g d^2, \tag{1.42}$$

de donde obtenemos

$$U = \left\langle \frac{1}{2}\rho g(\zeta^2 - d^2) + \frac{1}{2}\rho d^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\rho g \langle \zeta^2 \rangle, \tag{1.43}$$

o lo que es lo mismo,

$$U = \frac{1}{4}\rho g a^2. \tag{1.44}$$

En otras palabras, la energía potencial media por unidad de superficie de una onda de gravedad es igual a su energía cinética media por unidad de superficie.

Finalmente, la energía total media por unidad de superficie asociada a una onda de gravedad es

$$E = K + U = \frac{1}{2}\rho g a^2. \tag{1.45}$$

De donde concluimos que la energía depende de la amplitud de la onda en la superficie, pero es independiente de la longitud de onda, o la profundidad del agua.

1.1.1.3 Tensión Superficial

Las fuerzas de cohesión entre las moléculas en un líquido se distribuye entre todos los átomos vecinos. La moléculas en la superficie no tienen por su parte superior átomos vecinos, exhibiendo fuerzas atractivas más fuertes sobre sus vecinos más cercanos en la superficie. Dicho en otras palabras, La tensión superficial es la tendencia elástica de una superficie fluida que hace que adquiera la menor superficie posible. Incorporando este concepto en nuestro análisis, se puede suponer que la interfaz se encuentra en

$$z = \zeta(x, t), \tag{1.46}$$

donde $|\zeta|$ es pequeña. De este modo, la interfaz imperturbable corresponde al plano $z = 0$. El vector unitario normal a la interfaz esta dado por

$$\hat{n} = \frac{\nabla(z-\zeta)}{\nabla(z-\zeta)}. \tag{1.47}$$

de esta ecuación obtenemos que

$$n_x \simeq -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{1.48}$$

$$n_z \simeq 1. \tag{1.49}$$

Recordando que la ecuación de Young-Laplace es

$$\Delta p = \gamma \nabla \cdot \hat{n}, \tag{1.50}$$

donde Δp es el cambio de la presión a través de la interfaz en dirección opuesta a $\hat{n}$. A partir de 1.48 y 1.49, tenemos

$$\nabla \cdot \hat{n} \simeq -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \tag{1.51}$$

Por lo tanto, la ecuación 1.50 da

$$[p]_{z=0_-}^{z=0_+} = \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \tag{1.52}$$

Suponiendo que la interfaz se encuentra entre una masa de agua de densidad ρ y profundidad d, y el ambiente. El agua sin perturbación se encuentra entre $z = -d$ y $z = 0$, y la atmósfera sin perturbación ocupa la región $z > 0$. En el límite, en el que se puede despreciar la densidad de la atmósfera, la presión en la atmósfera toma el valor fijo p_0, mientras que la presión justo por debajo de la superficie del agua es $p_0 - \rho g \zeta + p_1|_{z=0}$, siendo p_1 la presión de la perturbación debido a la onda. De esta manera la ecuación 1.52 adopta la forma

$$\rho g \zeta - p_1|_{z=0} = \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \tag{1.53}$$

donde γ es la tensión superficial en la interfase aire-agua. Sin embargo, $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(\frac{\partial \phi}{\partial z})_{z=0}$, donde ϕ es el potencial de velocidad perturbado del agua. Así, a partir de 1.16, $p_1 = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$, la expresión anterior da

$$g\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0} + \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right|_{z=0} = \frac{\gamma}{\rho}\left.\frac{\partial^3\phi}{\partial z\partial^2 x}\right|_{z=0}. \tag{1.54}$$

Esta relación, es una generalización de la ecuación 1.21, la cual es la condición a satisfacer en una superficie libre tomando en cuenta la tensión superficial. De la aplicación de esta condición de frontera a la solución general 1.25, la cual ya satisface la condición de frontera en la parte inferior del volumen de agua, se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right)\tanh(kd), \tag{1.55}$$

que es una generalización de la ecuación 1.27, pero considerando la tensión superficial.

Tomando en cuenta la tension superficial podemos reescribir la energía cinética media por unidad de área y la energía potencial media por unidad de área como

$$K = \frac{1}{4}(\rho g + \gamma k^2)a^2, \tag{1.56}$$

$$U = \frac{1}{4}(\rho g + \gamma k^2)a^2, \tag{1.57}$$

respectivamente, y la energía total media por unidad de área es

$$E = \frac{1}{2}(\rho g + \gamma k^2)a^2. \tag{1.58}$$

1.1.2 Ondas de Faraday

Las ondas superficiales que se forman en un líquido contenido en un recipiente cuando éste es excitado parametricamente se le suele llamar ondas de Faraday, esto en honor a Michael Faraday quien diera por primera vez una descripción de éstas ondas en su famosa obra, titulada "On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces." [5]. Otra de las observaciones claves de M. Faraday fue que la ondas estacionarias oscilan a la mitad de la frecuencia de exitación, ésta es la llamada respuesta subarmónica. Más de un siglo después, esta respuesta subarmónica es explicada por el análisis de estabilidad lineal realizado por T.B. Benjamin, F. Ursell [3].

En los últimos 25 años, se han realizado numerosos estudios teóricos y experimentales sobre las ondas de Faraday [9,10]. El interés teórico en el problema de Faraday ha sido impulsado en parte por grandes cantidades de datos experimentales recientes. Las ondas de Faraday son un sistema experimental atractivo y conveniente debido a los numerosos parámetros de control (las propiedades del fluido, la frecuencia del forzamiento, la geometría del contenedor) ademas de que la escala de tiempo para la formación de patrones es típicamente mucho más rápida y facil de ob que para otros sistemas canónicos tales como la convección de Rayleigh-Bénard o la inestabilidad de Richtmyer–Meshkov, entre otras.

Las ondas de Faraday es el ejemplo canónico de cómo se forman patrones espacio-temporales a través de una inestabilidad paramétrica. La mayoria de los trabajos experimentales se ha utilizado fluidos newtonianos sometidos a una o dos aceleraciones sinusoidales, y en otros casos se han empleado fluidos viscoelásticos [12], por mencionar solo alguno de ellos. Una interesante variación del experimento de Faraday es la excitación de un ferrofluido, generando ondas estacionarias en la superficie del ferrofluido mediante la aplicación de corriente alterna y/o directa [Referencias]. Las ondas estacionarias pueden ser excitados por aplicación simultanea de un campo magnético D.C. y una aceleración vertical periódica [55]. Otra variación del problema Faraday se obtiene aplicando un gradiente de temperatura vertical, como en el caso de la convección de Rayleigh-Benard convección, simultáneamente con una vibración vertical [18, 19]. Las inestabilidades paramétricas y la formación de patrones no fluida también se producen en sistemas no fluidos tales como en capas granulares vibradas verticalmente con una [56, 57, 58] o dos [20] componentes de frecuencia de forzamiento.

En muchos casos teóricos se han utilizado modelos de ecuaciones diferenciales parciales para estudiar la inestabilidad paramétrica en un marco general. Estos estudios incluyen investigaciones de la dinámica en la ecuación no lineal de Mathieu con dependencia espacial [59, 60], en la formación de patrones en la ecuación Swift-Hohenberg [61], y en la inestabilidad de Faraday en las ecuaciones Grossman-Pitaevskii modelando un condensado de Bose-Einstein sometido a un campo electromagnético temporalmente periódica [62], por nombrar algunos.

[9]

1.2 Análisis Lineal

Aquí se describo los papers lineales, escribiendo las ecuaciones más representativas y los resultados de autores previos. Aquí debería también entrar algo sobre ecuaciones de Mathieu.

1.3 Análisis No-lineal

Lo mismo de arriba pero incluyendo no-linealidad.

1.4 Simulaciones numéricas

Aquí describo brevemente el trabajo numérico existente sobre patrones de Faraday.

Bibliography

[1] John D. Jr. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 2001.

[2] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. 2002.

[3] T Brooke Benjamin and F Ursell. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 225, pages 505–515. The Royal Society, 1954.

[4] A.S. Dukhin and P.J. Goetz. *Ultrasound for characterizing colloids*. Elsevier, 2002.

[5] Michael Faraday. On a Peculiar Class of Acoustical Figures; and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 121:299–340, 1831.

[6] Sir Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge university press, 1975.

[7] Ludwig. Landau and Evgeny Mikhailovich Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, New York, 1987.

[8] T.A. Litovitz and C.M. Davis. *Physical Acoustics*. Academic Press, 1964.

[9] John Miles and Diane Henderson. Parametrically forced surface waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22(1):143–165, 1990.

[10] Hanns Walter Müller, R. Friedrich, and D. Papathanassiou. Theoretical and Experimental Investigations of the Faraday Instability. In *Evolution of Spontaneous Structures in Dissipative Continuous Systems*, pages 230–265. 1998.

[11] A. Satya Narayanan and Swapan K. Saha. *Waves and oscillations in nature*, volume 20150417. CRC Press, 2015.

[12] C. Wagner, H. W. Mueller, and K. Knorr. Faraday waves on a viscoelastic liquid. *Physical Review Letters*, 83(2):308, 1999.