



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

INESTABILIDADES PARAMÉTRICAS DE ONDAS EN FLUIDOS.

T E S I S

Para obtener el grado de:

DOCTORADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA
MECÁNICA

Presentada por:

M.Sc. Franklin W. Peña-Polo

DIRECTORES:

Dr. Ignacio Carvajal
Dr. Leonardo Sigalotti



Ciudad de México, Agosto de 2019

Índice general

Introducción	1
Bibliography	8

Índice de figuras

1. Ilustraciones realizadas por Michael Faraday en su bitácora personal . 2

Índice de cuadros

Introducción

Al someter un líquido a vibraciones verticales, en la superficie de este se observa la presencia de determinados patrones regulares, los cuales están definidos por un cierto rango de frecuencia y amplitudes; a este fenómeno se le conoce como *Inestabilidad de Faraday*. El estudio de este tipo de inestabilidad tiene una larga e interesante historia que involucra a diversos científicos de los más destacados de la ciencia moderna. Sus inicios datan de mediados del año 1831, cuando M. Faraday (1791-1867) realizó una serie de experimentos con fluidos sometidos a vibraciones verticales [20]. Faraday reportó en su bitacora personal, que al hacer vibrar un fluido se presentan una serie de patrones cuadrados en su superficie “Crispaciones casi siempre cuadrangulares, siempre cuando están bien formadas, pero modificadas por el borde del agua o el líquido, también por el centro de movimiento” (Faraday, 1831) [38]. También señaló que la frecuencia de las ondas presentes en la superficie del líquido era la mitad de la frecuencia de excitación. Casi cuatro décadas después, L. Mathiessen cuestionó la respuesta subarmónica propuesta por Faraday a las vibraciones puramente verticales [40], argumentando la existencia de una sincronía entre el forzamiento y las ondas en la superficie en el fluido. Esta controversia motivó a Lord Rayleigh (1842-1919) a realizar sus propios análisis, quien mediante un dispositivo bastante ingenioso pudo constatar la afirmación realizada por Faraday [55]. Es interesante notar que Lord Rayleigh reconoció tempranamente el experimento de Faraday como una inestabi-

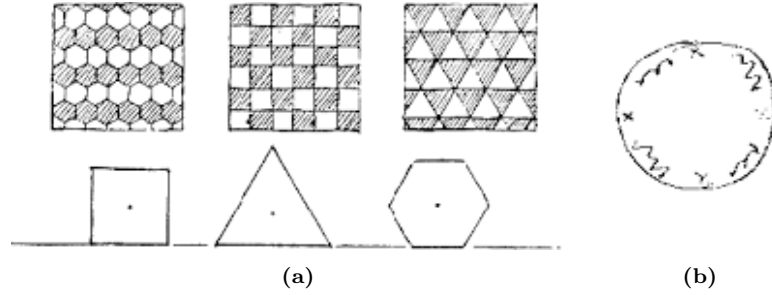


Figura 1: Ilustraciones realizadas por Michael Faraday en su bitácora personal [38]. **(a)** Bocetos de patrones hexagonales, rectangulares y triangulares realizados por Faraday como posibles interpretaciones de la geometría de las crispaciones. **(b)** Diagrama de la vista superior realizada por Faraday de la distribución de crispaciones en un vaso de agua; “x” representa los lugares donde el de agua permanece inmóvil o las crispaciones son débiles, mientras que las líneas onduladas indican una superficie más agitada. [38]

lidad paramétrica [54]. En su trabajo de 1883, analizó la ecuación de Mathieu en presencia de amortiguamiento y encontró una condición necesaria para la respuesta subarmónica. Posteriormente motivado por el trabajo de G. W. Hill (1838-1914) [24], realizó un estudio mas detallado de las ecuación de Mathieu [56].

En 1954, Benjamin y Ursell desarrollaron una teoría lineal sobre la naturaleza subarmónica de la inestabilidad, realizando la verificación teórica directamente de la hidrodinámica [8]. Sin embargo, el análisis de Benjamin y Ursell se basa en una aproximación de flujo potencial, la cual está restringida únicamente a fluidos no viscosos. Si la inestabilidad es generada en un líquido viscoso, una parte de la energía mecánica es disipada debido a esta viscosidad. Estos efectos generalmente se manejan agregando un amortiguamiento heurístico en la ecuación de Mathieu [33], que es proporcional a la viscosidad cinemática ν . La inclusión de dicho término ha sido utilizado ampliamente en varios análisis lineales como los realizados por Müller [45]; Kumar y Tuckerman [32]; Kumar [31] y Perlin y Schultz [51]. Sin embargo, esta

aproximación ignora las capas límite viscosas a lo largo de las paredes del contenedor y por debajo de la superficie, donde se produce una disipación adicional.

La descripción matemática completa del problema involucra las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio con una superficie libre, donde las amplitudes de los modos normales se desacoplan y cumplen en primera aproximación de la ecuación de Mathieu, la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no autónoma. Un sistema no autónomo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que depende explícitamente de la variable independiente. En este caso, la falta de autonomía está dada por el forzamiento externo que influye en los parámetros del fluido cuando se inicia el comportamiento oscilante. Benjamin y Ursell pudieron utilizar las propiedades de estabilidad conocidas de la ecuación de Mathieu para confirmar el punto de vista de Faraday y Rayleigh. Al tipo de inestabilidad presente en la ecuación de Mathieu se le llama *Inestabilidad paramétrica*, y es conocida por estar presente en diversos sistemas como osciladores electrónicos, ondas de Langmuir en plasma y hasta en el comportamiento estocástico de un conjunto de precios. El experimento más representativo de este fenómeno es el péndulo excitado paramétricamente. El cual consiste en un péndulo cuyo pivote es excitado verticalmente, lo que dará origen a la oscilación horizontal del péndulo con la mitad de la frecuencia de excitación para algunas amplitudes y frecuencias. En este caso, así como en el experimento de Faraday, la aceleración gravitacional efectiva es el parámetro externo propulsor. La ecuación de Mathieu debe su nombre al matemático francés E. L. Mathieu (1825-1890), quien en su trabajo original de 1868 muestra como resolver la ecuación de onda bidimensional para el movimiento de una membrana elíptica [39].

En los últimos 50 años se ha realizado un esfuerzo por ampliar el análisis de Benjamin y Ursell, a amplitudes finitas mediante la incorporación de no linealidades débiles, las cuales han dado lugar a controversia. Por su parte, Dodge et al. [16], Hens-

tock y Sani [23] y Meron y Procaccia [41] realizaron análisis para amplitudes finitas, resultado que son cuestionados por Miles [42]. Ockendon y Ockendon [49] extiende el análisis de Benjamin y Ursell a amplitudes pequeñas pero finitas, sin embargo, esto sin calcular explícitamente el parámetro de interacción que mide los efectos de inercia no lineales, siendo éstos los términos de tercer orden en las ecuaciones de movimiento. También determinan la estructura de bifurcación de las ecuaciones de evolución, incluyendo los efectos cualitativos del amortiguamiento lineal. Miles [42], por su parte, calcula el parámetro de interacción e incorpora el amortiguamiento lineal. Gu et al. [22] calculan el parámetro de interacción para un cilindro rectangular. Virnig et al. [65] pudieron medir las amplitudes de ondas en estado estacionario en grandes cilindros rectangulares en los que los efectos viscosos y capilares son pequeños, obteniendo resultados que coinciden razonablemente con los cálculos de Gu et al. [22]. Con el creciente interés en la dinámica no lineal y el caos temporal, el experimento de Faraday ha ganado un interés más amplio. Keolian et al. [27] observó un estado caótico en un contenedor circular fuertemente impulsado. Gollub y Meyer [21] estudiaron la transición al caos de un modo de oscilación único en una celda circular. Ciliberto y Gollub [12, 13] mostraron cómo los efectos de dos modos superpuestos puede conducir al caos. Simonelli y Gollub [59] estudiaron las interacciones de dos modos casi degenerados por simetría.

Otros estudios teóricos sobre la inestabilidad de Faraday han sido realizados por Miles [42, 43], Miles y Henderson [44], Bechhoefer y Johnson [7], Müller et al. [47], Müller [46], Mancebo y Vega [37], Huepe et al. [25], y adicionalmente algunos estudios experimentales desarrollados por Douady [18], Edwards y Fauve [19], Bechhoefer et al. [6], Kityk et al. [28], Westra et al. [66], Residori et al. [57], Nguyem y Caps [48] para la formación de patrones. A partir de una elección adecuada de los parámetros experimentales, se pueden observar varios patrones distintos, que consisten en

un conjunto de figuras geométricas ordenadas como rayas, cuadrados, triángulos y hexágonos. Kudrolli et al. [30] reportan patrones de superredes, mientras Arbell y Fineberg [2,3] estructuras localizadas también se han observado utilizando forzamientos de dos frecuencias. Comprender los tipos de patrones que se forman es un desafío. El umbral de inestabilidad y los patrones observados dependen de la viscosidad y la tensión superficial del fluido, la aceleración adimensional de foramiento Γ , la forma y tamaño del recipiente. Además, las fluctuaciones en la frecuencia y amplitud de la fuerza impulsora pueden llevar a un patrón existente a un estado mixto con una fracción de caos espacio-temporal [29].

En el límite de débil disipación, la comprensión de los resultados de los experimentos clásicos de Faraday se ha realizado basados en análisis lineales (Müller 1998) para un volumen de líquido espacialmente infinito. Además, los mecanismos de selección de patrones se han investigado utilizando las herramientas de simetría y teoría de la bifurcación [58, 61]. También han comenzado a aparecer simulaciones numéricas que implican la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas a un método de seguimiento frontal para el tratamiento de la superficie libre, estas asumiendo que la superficie del líquido es perfectamente plana en las paredes donde se aplican condiciones límite no deslizantes [26, 50]. Mas simulaciones numéricas han sido realizadas por otros autores como lo son las de Louis [36] y Kentaro et al. [62, 63] Sin embargo, estas no dan cuenta del realismo de los experimentos donde la dinámica del menisco es importante [18]. En particular, para recipientes de pequeño tamaño existe un fuerte acoplamiento entre las ondas capilares generadas por el menisco y las ondas de Faraday [48]. Por otra parte, han surgido variantes particulares como la simulación realizada por Ebo Adou et al. en la cual una gota es sujeta a una fuerza externa periódica presentado inestabilidades de Faraday en su superficie.

Mientras que los experimentos clásicos de patrones de onda de Faraday se refieren

a contenedores individuales de diversos tamaños y formas, Delon et al. [14] observaron la formación de patrones regulares en el caso en que la interfaz líquido-aire se dividió en una red de celdas cuadradas. Se ha encontrado que este tipo de experimentos tiene aplicaciones potenciales para la detección y ubicación de líquidos en las cavidades internas de las estructuras tipo panal empleadas en construcciones mecánicas y aeronáuticas. La característica dinámica de los patrones de onda que surgen en los arreglos de celdas también ayuda a comprender el ensamblaje de los esferoides celulares en la bioingeniería para la construcción tridimensional de tejidos y organoides [11]. De esta manera, las funciones de onda correspondientes pueden predecir patrones de ensamblaje de esferoides celulares de diferentes modos simétricos. Particularmente, nuestra atención se centra en el empleo de ondas de Faraday para la atomización ultrasónica de líquidos. La técnica de atomización ultrasónica tiene como ventaja sobre las técnicas de atomización convencionales que con este método se puede tener control sobre el tamaño de partícula y la densidad de la niebla. Los primeros trabajos sobre el empleo de la inestabilidad de Faraday para formación de micro gotas o la atomización ultrasónica datan de 1962, siendo este fenómeno fue descrito por primera vez por Wood y Loomis [67] como un medio práctico para producir aerosoles utilizando frecuencias iguales o superiores a 20 kHz. Desde entonces, los dispositivos de baja frecuencia (20 100 kHz) y alta frecuencia (0.1 5 MHz) han evolucionado. Los primeros y más comúnmente usados son los cristales piezoeléctricos que impulsan un transductor de metal sobre el cual se coloca el líquido a ser atomizado. El funcionamiento y eficiencia básica de tales dispositivos han sido estudiadas experimentalmente por Lang [34], Pohlman y Stamm [53], Lierke y Griesshammer [35], Topp [64] (1973) y Sindayihebura et al. [60].

Los estudios analíticos de Lang [34], Peskin y Raco [52] y Sindayihebura y Bole [60] se basan en el supuesto de que las gotas se forman en las crestas de las

ondas capilares estacionarias presentes sobre la superficie de la película líquida. Yule y Al-Suleimani [68] presentaron un estudio teórico para la expulsión aparentemente aleatoria de gotas de una celda de onda, aunque el modelo en sí es determinista; y Tsai et al. presentan una teoría lineal sobre la inestabilidad temporal de las ondas de Faraday para la eyección de microgotas monodispersas basada en la conservación de masa y las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes. Las investigaciones experimentales apuntan a comprender las características que dominan el proceso de atomización ultrasónica, donde analizan la distribución del tamaño de las gotas, velocidad de salida de las gotas o velocidad de atomización [5] [17] y el efecto de las propiedades de los fluidos [1, 4]. Las aplicaciones de la atomización ultrasónica empleando inestabilidades de Faraday son muy diversas. A la fecha, las investigaciones van dirigidas al rediseño de las boquillas de atomización ultrasónica para la maximización del caudal [15], el estudio de los efectos de la aceleración a la cual es sometida la película de líquido y la ruptura de esta [10], y la validación de nuevos inyectores que combina los efectos de corte con el principio de atomización ultrasónica [9].

En esta tesis presentamos un estudio ... *Aquí iría una breve descripción del contenido de la tesis por capítulos. No mas de media cuartilla.*

Bibliografía

- [1] M Ajay and T N C Anand. Study of Ultrasonic Atomization. *ILASS- Asia*, pages 1–4, 2013.
- [2] H. Arbell and J. Fineberg. Temporally harmonic oscillons in Newtonian fluids. *Physical Review Letters*, 85(4):756–759, 2000.
- [3] H. Arbell and J. Fineberg. Pattern formation in two-frequency forced parametric waves. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 65(3):1–29, 2002.
- [4] Balasubrahmanyam Avvaru, Mohan N. Patil, Parag R. Gogate, and Aniruddha B. Pandit. Ultrasonic atomization: Effect of liquid phase properties. *Ultrasonics*, 44(2):146–158, 2006.
- [5] F. Barreras, H. Amaveda, and A. Lozano. Transient high-frequency ultrasonic water atomization. *Experiments in Fluids*, 33(3):405–413, 2002.
- [6] John Bechhoefer, Valerie Ego, Sebastien Manneville, and Brad Johnson. An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids. *Journal Of Fluid Mechanics*, 288:325–350, 1995.
- [7] John Bechhoefer and Brad Johnson. A Simple Model for Faraday Waves. *arXiv*, preprint p:8, 1996.

- [8] T. B. Benjamin and F. Ursell. The Stability of the Plane Free Surface of a Liquid in Vertical Periodic Motion. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 225(1163):505–515, 1954.
- [9] Madjid Boukra, Alain Cartellier, Éric Ducasse, Pierre Gajan, Marie Lalo, Thomas Noel, and Alain Strzelecki. Use of Faraday instabilities to enhance fuel pulverisation in air-blast atomisers. *Comptes Rendus - Mecanique*, 337(6-7):492–503, 2009.
- [10] Alain Cartellier and Pierre Gajan. instabilities Changes in Aeronautical and Space Systems – Challenges for On-board Energy IMPROVEMENT OF FUEL PULVERIZATION IN AIRBLAST ATOMIZERS BY USE OF FARADAY INSTABILITIES. (June), 2006.
- [11] Pu Chen, Sinan Güven, Osman Berk Usta, Martin L. Yarmush, and Utkan Demirci. Biotunable Acoustic Node Assembly of Organoids. *Advanced Healthcare Materials*, 4(13):1937–1943, 2015.
- [12] S. Ciliberto and J. P. Gollub. Pattern competition leads to chaos. *Physical Review Letters*, 52(11):922–925, 1984.
- [13] S. Ciliberto and Jerry P. Gollub. Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 158:381–398, 1985.
- [14] G. Delon, Denis Terwagne, N. Adami, A. Bronfort, N. Vandewalle, S. Dorbolo, and H. Caps. Faraday instability on a network. *Chaos*, 20(4):1–2, 2010.
- [15] M. Dobre and L. Bolle. Practical design of ultrasonic spray devices: Experimental testing of several atomizer geometries. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 26(2-4):205–211, 2002.

- [16] Franklin T. Dodge, Daniel D. Kana, and H. Norman Abramson. Liquid Surface Oscillations in Longitudinally Excited Rigid Cylindrical Containers. *AIAA Journal*, 3(4):685–695, 1965.
- [17] T. D. Donnelly, J. Hogan, A. Mugler, N. Schommer, M. Schubmehl, Andrew J. Bernoff, and B. Forrest. An experimental study of micron-scale droplet aerosols produced via ultrasonic atomization. *Physics of Fluids*, 16(8):2843–2851, 2004.
- [18] S. Douady. Experimental study of the Faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 221:383, 1990.
- [19] W. S. Edwards and S. Fauve. Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 278:123, 1994.
- [20] Michael Faraday. On peculiar class of Acoustical Figures; and on certain Forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic Surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, (January):379–397, 1831.
- [21] J. P. Gollub and Christopher W. Meyer. Symmetry-breaking instabilities on a fluid surface. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 6(3):337–346, 1983.
- [22] X M Gu, P R Sethna, and Amitabh Narain. On three-dimensional nonlinear subharmonic resonant surface waves in a fluid: Part I—theory. *Journal of applied mechanics*, 55(1):213–219, 1988.
- [23] W Henstock and R L Sani. On the stability of the free surface of a cylindrical. *Lett. Heat Mass Transfer*, 1(5):95, 1974.
- [24] G. W. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8(1):1–36, 1886.

- [25] Cristián Huepe, Yu Ding, Paul Umbanhowar, and Mary Silber. Forcing function control of Faraday wave instabilities in viscous shallow fluids. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 73(1):1–12, 2006.
- [26] L. Kahouadji, Nicolas Périnet, Laurette S. Tuckerman, S. Shin, J. Chergui, and Damir Juric. Numerical simulation of supersquare patterns in Faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 772:R2, 2015.
- [27] R. Keolian, L. A. Turkevich, Seth J. Putterman, I. Rudnick, and J. A. Rudnick. Subharmonic sequences in the faraday experiment: Departures from period doubling. *Physical Review Letters*, 47(16):1133–1136, 1981.
- [28] A. V. Kityk, Christian Wagner, Klaus Knorr, and Hanns Walter Müller. Phase relaxation of Faraday surface waves. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 65(6):3–6, 2002.
- [29] A. Kudrolli and Jerry P. Gollub. Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves: a systematic survey at large aspect ratio. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 97(1-3):133–154, 1996.
- [30] A. Kudrolli, B. Pier, and Jerry P. Gollub. Superlattice patterns in surface waves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 123(1-4):99–111, 1998.
- [31] Krishna Kumar. Linear Theory of Faraday Instability in Viscous Liquids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 452(1948):1113–1126, 1996.
- [32] Krishna Kumar and Laurette S. Tuckerman. Parametric instability of the interface between two fluids. *J Fluid Mech*, pages 279–49, 1994.
- [33] Lev Landau and Evgeny Mikhailovich Lifshitz. *Física estadística Vol. 5*. 1988.

- [34] Robert J. Lang. Ultrasonic Atomization of Liquids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 341(1954):28–30, 1962.
- [35] EG Lierke and G Griesshammer. The formation of metal powders by ultrasonic atomization of molten metals. *Ultrasonics*, 5(4):224–228, 1967.
- [36] E. Louis, J. A. Miralles, G. Chiappe, A. Bazán, J. P. Adrados, and P. Cobo. Faraday instability in a vessel with a well: A numerical analysis. *Physics of Fluids*, 23(11), 2011.
- [37] Francisco J. Mancebo and José M. Vega. Faraday Instability Threshold In Large-aspect-ratio Containers. *Journal Of Fluid Mechanics*, 467:307–330, 2002.
- [38] Thomas Martin. *Faraday’s diary*. 1832.
- [39] Emile Mathieu. Journal de Mathematiques Pures et Appliques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 13:137–203, 1868.
- [40] Ludwig Matthiessen. Akustische Versuche, die kleinsten Transversalwellen der Flüssigkeiten betreffend. *Annalen der Physik Leipzig*, 134:107–117, 1868.
- [41] Ehud Meron and Itamar Procaccia. Low-dimensional chaos in surface waves: Theoretical analysis of an experiment. *Physical Review A*, 34(4):3221–3237, 1986.
- [42] John W Miles. Nonlinear Faraday resonance. *Journal of Fluid Mechanics*, 146:285–302, 1984.
- [43] John W. Miles. On Faraday Waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 248(1):671–683, 1993.
- [44] John W. Miles and D. M. Henderson. Parametrically Forced Surface-Waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22:143–165, 1990.

- [45] Hanns Walter Müller. Periodic triangular patterns in the faraday experiment. *Physical Review Letters*, 71(20):3287–3290, 1993.
- [46] Hanns Walter Müller. Linear aspects of the Faraday instability. *A Perspective Look at Nonlinear Media: From Physics to Biology and Social Sciences*, 503(1883):45–60, 1998.
- [47] Hanns Walter Müller, H Wittmer, Christian Wagner, J Albers, and Klaus Knorr. Analytic stability theory for Faraday waves and the observation of the harmonic surface response. *Physical Review Letters*, 78(12):2357–2360, 1997.
- [48] K.D. Nguyem Thu Lam and H. Caps. Effect of a capillary meniscus on the Faraday instability threshold. *European Physical Journal E*, 34(10):112, 2011.
- [49] J. R. Ockendon and H. Ockendon. Resonant surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 59(2):397–413, 1973.
- [50] Nicolas Périnet, Damir Juric, and Laurette S. Tuckerman. Numerical simulation of Faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 635:1–26, 2009.
- [51] Marc Perlin and William W Schultz. Capillary effects on surfacewaves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32:241–274, 2000.
- [52] Richard L. Peskin and Roland J. Raco. Ultrasonic Atomization of Liquids. *The Journal of The Acoustical Society of America*, 35(9):1–4, 1963.
- [53] Reimar Pohlman and Klaus Stamm. *Untersuchung zum Mechanismus der Ultraschallvernebelung an Flüssigkeitsoberflächen im Hinblick auf technische Anwendungen*. Springer, 1965.
- [54] Lord Rayleigh. On Maintained Vibrations. *Philosophical Magazine*, 15:229–235, 1883.

- [55] Lord Rayleigh. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *Philosophical Magazine Series 5*, 16(97):50–58, 1883.
- [56] Lord Rayleigh. On the Maintenance of Vibrations by Forces of Double frequency, and on the Propagation of Waves through a Medium endowed with a Periodic Structure. *Philosophical magazine and Journal of science*, 24(147):145–159, 1887.
- [57] S. Residori, A. Guarino, and U. Bortolozzo. Two-mode competition in Faraday instability. *Europhysics Letters (EPL)*, 77(4):44003, 2007.
- [58] Mary Silber, Chad M. Topaz, and Anne C. Skeldon. Two-frequency forced Faraday waves: Weakly damped modes and pattern selection. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):205–225, 2000.
- [59] F. Simonelli and Jerry P. Gollub. Surface wave mode interactions: Effects of symmetry and degeneracy. *Journal of Fluid Mechanics*, 199:471–494, 1989.
- [60] D Sindayihebura, M Dobre, and L Bolle. Experimental study of thin liquid film ultrasonic atomization. In *4th World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*, pages 1–7, 1997.
- [61] A. C. Skeldon and G. Guidoboni. Pattern selection for Faraday waves in an incompressible viscous fluid. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67(4):1064–1100, 2007.
- [62] Kentaro Takagi and Takeshi Matsumoto. Numerical simulation of two-dimensional Faraday waves with phase-field modelling. *Journal Fluid Mechanics*, 686:409–425, 2011.

- [63] Kentaro Takagi and Takeshi Matsumoto. Numerical simulation of Faraday waves oscillated by two-frequency forcing. *Physics of Fluids*, 27(3), 2015.
- [64] Michael N Topp. Ultrasonic atomization-a photographic study of the mechanism of disintegration. *Journal of Aerosol Science*, 4(1):17–25, 1973.
- [65] J C Virnig, A S Berman, and P R Sethna. On three-dimensional nonlinear subharmonic resonant surface waves in a fluid: Part II—Experiment. *Journal of applied mechanics*, 55(1):220–224, 1988.
- [66] Mark-Tiele Westra, Doug J. Binks, and Willem Van De Water. Patterns of Faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 496:1–32, 2003.
- [67] E.W. Wood and Alfred L. Loomis. The physical and biological effects of high-frequency sound- waves of great intensity. *The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science*, 4(22):417–436, 1927.
- [68] A. J. Yule and Y. Al-Suleimani. On droplet formation from capillary waves on a vibrating surface. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 456(1997):1069–1085, 2000.