logo-ipn.png

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Inestabilidades Paramétricas de Ondas en Fluidos.

T E S I S

Para obtener el grado de:

Doctorado en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Presentada por:

M.Sc. Franklin W. Peña-Polo

DIRECTORES:

Dr. Ignacio Carvajal
Dr. Leonardo Sigalotti

logo-esime.png

Ciudad de México, Agosto de 2019

Contents

List of Figures

List of Tables

Introducción

Cuando un líquido contenido en un recipiente es sometido a vibraciones verticales, a menudo se observa un patrón de ondas estacionarias no-lineales sobre la superficie del mismo. Estas ondas, conocidas como *ondas de Faraday* o *inestabilidades de Faraday* [**?**, **?**] se ven paramétricamente excitadas en el momento en el que las vibraciones verticales superan una cierta frecuencia crítica o aceleración crítica. Michael Faraday [**?**] se percató de que estas ondas en la superficie del líquido son sub-armónicos de la frecuencia de oscilación al que es sometido el recipiente, mas exactamente que la superficie oscilaba a la mitad de la frecuencia de excitación. Experimentos recientes, en donde se emplea una y hasta dos frecuencias de forzamiento han puesto de manifiesto que no sólo se pueden formar patrones espacialmente regulares de lineas paralelas, cuadrados, círculos y hexágonos, sino también simetrías mucho más complejas, lo que hace que la comprensión de estos tipos de patrones resulten ser un reto [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**]. El umbral para el cual se hace presente la inestabilidad y los patrones observados dependen de la viscosidad y la tensión superficial del líquido, la aceleración de la oscilación, la forma y el tamaño del contenedor..

La descripción matemática del problema está dada por las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio con una superficie libre; y la debido a la frecuencia de excitación este se convierte en un problema no autónomo. En matemáticas, un sistema no autónomo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que depende explícitamente de la variable independiente. En este caso, la variable no autónoma resulta ser el forzamiento externo que influye en los parámetros de fluido cuando el comportamiento oscilante ha iniciado. Por otro lado, el mecanismo de selección de parámetros ha sido investigado empleando herramientas de simetría y teoría de bifurcaciones [**?**, **?**, **?**]. Una teoría lineal de las inestabilidades de Faraday ha sido desarrollada por Benjamin y Ursell [**?**], quienes plantearon que el problema se puede reducir a un conjunto de osciladores de Mathieu. Sin embargo, este análisis se basa en la aproximación de flujo potencial, que se limita a líquidos no viscosos. En el caso de líquidos viscosos el análisis requeriría de la adición teórica de un término de amortiguamiento viscoso. La inclusión de este término se ha utilizado recurrentemente en una serie de análisis lineales [?, ?, ?, ?]. No obstante, esta aproximación ignora las capas límites viscosas a lo largo de las paredes del recipiente y por debajo de la superficie, donde se produce disipación adicional. Estos efectos generalmente son tratados mediante la adición de un amortiguamiento heurístico en la ecuación de Mathieu [?], el cual es proporcional a la viscosidad cinemática.

Los esfuerzos por comprender las ondas de Faraday, han dado lugar a la aparición de simulaciones numéricas, que implican la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas a un método de seguimiento frontal para el tratamiento de la superficie libre [?, ?]. En todos estos cálculos se asume que la superficie del líquido es perfectamente plana en el borde de las paredes laterales, donde no hay deslizamiento y se aplican condiciones de borde periódicas [?]. En general, debido a que el sistema es vibrado, la aceleración efectiva de la gravedad varía, ocasionando que la longitud del menisco se alterne de grande a pequeña y viceversa. Con el fin de garantizar la conservación de la masa del fluido, las ondas de superficie son emitidas desde las paredes laterales del recipiente a la frecuencia de excitación. No obstante, estas simulaciones numéricas no tienen en cuenta el realismo de los experimentos, donde la dinámica del menisco es importante [?]. Por otra parte, la disipación viscosa es la principal causante del amortiguamiento de estas ondas capilares a lo largo de la superficie del fluido.

En recipientes pequeños existe un fuerte acoplamiento entre las ondas capilares generadas por el menisco y las ondas de Faraday, donde las ondas capilares se extienden por toda la superficie del líquido. Observaciones experimentales recientes en recipientes cilíndricos de pequeños diámetros indican que se requiere un incremento del umbral de aceleración para lograr generar ondas de Faraday [?]. En analogía con los resultados experimentales para recipientes pequeños individuales a la escala de centímetros, también se ha observado la formación de patrones regulares sobre una red cuadrada de celdas [?]. Luego de un breve estado transitorio, justo por encima del umbral de Faraday, las celdas adyacentes se sincronizan para formar retículos regulares de forma cuadrada sobre toda la red, cuya orientación con respecto a la rejilla depende de una gama de frecuencias de excitación. Los experimentos de Delon y colaboradores [?] proporcionan una visión cualitativa de las ondas de superficie forzadas paramétricamente.

Las ondas de Faraday representan un sistema experimental atractivo y oportuno debido a que poseen numerosos parámetros de control. Además, representan un ejemplo canónico de como se forman patrones espacio-temporales a través de una inestabilidad paramétrica. Las fluctuaciones en la frecuencia y amplitud de la fuerza de forzamiento pueden propiciar la transición de un patrón existente bien definido a un estado mixto con una fracción de caos espacio-temporal [?, ?]. La escala de tiempo para la formación de patrones es típicamente mucho más rápida y fácil de obtener que para otros sistemas canónicos, tales como la convección de Rayleigh-Bénard [?, ?] o la inestabilidad de Taylor-Couette [?, ?]. Por consiguiente, el estudio de las ondas de Faraday constituye una manera ventajosa para explorar fenómenos no-lineales más complejos por medio de un dispositivo experimental simple.

En este trabajo se propone estudiar los patrones de ondas de Faraday que surgen cuando se somete a vibraciones verticales un liquido confinado a un contendor y en un reticulado parcialmente lleno compuesto de pequeñas celdas con diferentes geometrías y su dependencia con la frecuencia, la amplitud de las vibraciones y las geometrías de las celdas. Esto con el objetivo de caracterizar el comportamiento del fluido sometido a vibraciones para su aplicacion en la vaporización ultrazonica de gotas liquidas. Con esta finalidad se propone: 1) Variar los rangos de frecuencias F y amplitudes A de la fuerza excitadora; 2) Realizar un barrido más fino del espacio de parámetros (A, F) para determinar y definir la posible existencia de regiones que separen la formación sincronizada de patrones regulares; 3) Proporcionar un marco cuantitativo de las ondas paramétricamente excitadas en la superficie del fluido para determinar su espectro de frecuencias; y 4) Realizar un análisis detallado utilizando la relación de dispersión de las ondas de Faraday para el forzamiento y la disipación.

Antecedentes

En el año 1831, M. Faraday, motivado por los trabajos realizados por Oersted, Wheatstone y Weber, reportó en su diario, que al someter a vibraciones verticales a la superficie de un fluido, éste presenta ondas superficiales que dan lugar a diversos patrones [?]. Faraday notó que estas ondas superficiales presentan una frecuencia de oscilación, la cual es proporcional a un medio de la frecuencia de excitación [?]. Casi cuatro décadas después del descubrimiento de Faraday, Mathiessen cuestionó la afirmación realizada por Faraday acerca de la respuesta sub-armónica del sistema a las vibraciones verticales [?]. Tal controversia motivó a Lord Rayleigh a realizar sus propias observaciones [?], reproduciendo así el experimento, y pudiendo corroborar los resultados obtenidos por Faraday.

La naturaleza sub-armónica de la inestabilidad fue finalmente verificada de forma teórica, con el uso de las ecuaciones de la hidrodinámica, por Benjamin y Ursell [?], quienes desarrollaron una teoría lineal, confirmando el punto de vista de Faraday y Rayleigh [?, ?]. El estudio teórico mas extenso del problema de estabilidad ha requerido del uso de simulaciones numéricas, lo que dificulta muchas veces la interpretación y comprensión física. Una expresión analítica para la excitación de los modos sub-armónicos de las ondas de Faraday la obtuvo Müller *et al.* [?], la cual es aplicable a un amplio rango de frecuencias, abarcando tanto ondas de gravedad en aguas someras como ondas capilares en aguas profundas. Si bien este análisis es aplicable en el límite de una disipación débil, un tratamiento analítico en el límite opuesto lo llevó a cabo Cerda y Tirapegui [?]. Por otra parte, los aspectos lineales de la inestabilidad de Faraday estudiados desde el trabajo de Benjamin y Ursell fueron revisados por Müller [?]. No fue hasta hace muy poco tiempo que las primeras simulaciones numéricas de la dinámica de las ondas de Faraday comenzaron a aparecer en la literatura [?, ?], que implica la solución completa de las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones. En particular, algunas simulaciones reproducen patrones cuadrados y hexagonales [?, ?].

En los últimos años, se han realizado numerosos estudios experimentales sobre las ondas de Faraday [?] obteniéndose una enorme cantidad de datos experimentales, lo que ha generado un particular interés teórico en el problema [?, ?]. Dependiendo de la amplitud o la frecuencia de excitación, la viscosidad del fluido y la geometría del contenedor, el fluido puede exhibir ondas estacionarias que forman patrones en su superficie [?, ?]. Los experimentos con una y dos frecuencias de forzamiento muestran que no sólo se pueden formar patrones espacialmente regulares de líneas paralelas, cuadros, círculos y hexágonos, sino también, se pueden formar simetrías más complejas tales como cuasi-patrones, patrones de superlattice, y oscilones [?, ?]. Por otra parte, los mecanismos de selección del patrón han sido investigados utilizando herramientas de simetría y teoría de bifurcación [?, ?], debido a que la ruptura de la simetría es una consecuencia del acoplamiento no-lineal entre las ondas de superficie.

Mientras casi todos los experimentos clásicos sobre patrones en ondas de Faraday se refieren a recipientes individuales de tamaños y formas variadas, Delon y colaboradores [?] observaron la formación de patrones regulares, en el caso en que la interfaz líquido-aire estaba dividida por un reticulado compuesto de pequeñas celdas cuadradas. Notando que luego de un estado transitorio, justo por encima del umbral de Faraday, se observa que las celdas vecinas colaboran sincronizadamente para formar un pico de líquido en sus intersecciones comunes, dando así lugar a un retículo cuadrado regular. En particular, para contenedores de pequeño tamaño, existe un fuerte acoplamiento entre las ondas capilares generadas por el menisco y las ondas de Faraday [?, ?].

A pesar de los notables avances en la comprensión teórica de las ondas de Faraday [?, ?], algunas de sus propiedades fundamentales siguen siendo una interrogante; a tal punto que hasta donde se sabe, sorprendentemente la relación de dispersión de las ondas de agua paramétricamente forzadas no ha sido aún establecida de forma explícita. De hecho, esta relación de dispersión a menudo se establece, de forma incorrecta, con la de las ondas superficiales libres no forzadas, en contraste con la evidencia experimental que muestra desviaciones significativas [?]. Así pues, un conocimiento exacto de la relación de dispersión es de crucial importancia, verbigracia, para explorar la posibilidad de acoplamientos de multiondas y en consecuencia, predecir las simetrías de patrones en la superficie.

Chapter 1

Marco Teórico

1.1 Descripción de un fluido

En esta sección plantearemos las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica, necesarias para la descripción del experimento de Faraday [?]. En mecánica de fluidos, las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido [?, ?, ?], en su forma más general son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right] = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}). \tag{1.2}$$

La ecuación **??** expresa el principio de la conservación de la materia y se conoce como la ecuación de continuidad , donde ρ es la densidad del fluido y $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ la velocidad del flujo. la ecuación **??** combina los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica aplicados a un volumen de fluido llamada ecuación de Navier-Stokes , donde $\vec{F}$ y p es una fuerza y la presión que actúa sobre el volumen de fluido, respectivamente, μ es la viscosidad dinámica y ζ es la segunda viscosidad.

En la mayoría de los casos de interés, un líquido convencional, tal como el agua, es incompresible. Un fluido, se dice que es incompresible, cuando la densidad de masa ρ de un elemento de volumen V no cambia notablemente con el tiempo, y ademas, tiene la capacidad de oponerse a la comprensión, es decir, el volumen del fluido permanece constante ante las variaciones de la presión, así

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{1.3}$$

Generalmente la distribución de densidad inicial de un fluido incompresible es espacialmente uniforme. Por lo tanto, podemos decir que la distribución de densidad es constante en el tiempo y uniforme en el espacio.

Debido a que el término relacionado con la segunda viscosidad resulta de mayor importancia en casos tales como fluidos compresibles, ondas de choque, propagación de sonido en un fluido Newtoniano como el de la ley de Stokes de la atenuación del sonido [**?**, **?**, **?**], podemos omitir este.

Suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el volumen de fluido, presente en la ecuación **??**, es de naturaleza conservativa, es decir,

$$\vec{F} = -\rho \nabla \Psi, \tag{1.4}$$

donde Ψ es la energía potencial por unidad de masa y $\rho\Psi$ es la energía potencia por unidad de volumen. Ademas, si asumimos que en seno del fluido no existen fuertes variaciones de temperatura, podemos suponer que la viscosidad es espacialmente uniforme, de tal manera que la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible se reduce a

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right] = -\nabla p - \rho \nabla \Psi + \rho \nu \nabla^2 \tilde{v}, \tag{1.5}$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática. En términos generales, el momentum se difunde una distancia del orden $\sqrt{\nu t}$ metros en t segundos como consecuencia de la viscosidad. La viscosidad cinemática del agua a 20^{o}C es de aproximadamente 1.0×10^{-6} m^2/s [**?**]. De ello se deduce que la difusión del momento viscoso en agua es un proceso relativamente lento.

El conjunto completo de ecuaciones que gobiernan a un fluido incompresible entonces son:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Psi + \nu \nabla^2 \tilde{v}. \tag{1.7}$$

Aquí, ρ y ν son consideradas constantes conocidas, y $\Psi(\tilde{r}, t)$ la asumiremos como una función conocida. Por lo tanto, tenemos cuatro ecuaciones: la ecuación **??**, además de las tres componentes de la ecuación **??**, para cuatro incógnitas, que serian, la presión, $p(\vec{r}, t)$ y las tres componentes de la velocidad, $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Debemos tener en cuenta que una ecuación de conservación de energía es redundante en el caso de flujo de fluido incompresible.

1.1.1 Ondas de superficie

Consideremos un volumen de agua contenido por un recipiente, el cual posee una profundidad d, sobre la superficie del planeta tierra. Asumiendo que este cuerpo es lo suficientemente pequeño en comparación con la Tierra, tal que su superficie imperturbable es aproximadamente plana. Con la coordenada cartesiana z orientada en la vertical, con $z = 0$ correspondiente a la superficie antes mencionada. Supongamos que una onda de pequeña amplitud se propaga horizontalmente a través del agua, siendo $v(r, t)$ el campo de velocidades asociado.

Debido a que el agua es un liquido en esencia incompresible, las ecuaciones de movimiento están descritas por **??** y **??**, las cuales podemos reescribir como:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1.8}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p - \rho g \hat{e}_z + \mu \nabla^2 \vec{v}, \tag{1.9}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad terrestre y se ha reemplazado $\nabla \Psi = g \hat{e}_z$ el potencial gravitatorio. La presión la podemos escribir

$$p(\vec{r}, t) = p_0 - \rho g z + p_1(\vec{r}, t), \tag{1.10}$$

siendo p_0 es la presión atmosférica y p_1 la presión de perturbación debida a la onda. En ausencia de la onda, la presión del agua a una profundidad h por debajo de la superficie es $p_0 + \rho g h$. Sustituyendo en **??** y despreciando los términos de segundo orden, tenemos

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -\nabla p_1 + \mu \nabla^2 \vec{v}, \tag{1.11}$$

Por otra parte, despreciando la viscosidad, lo cual no es seria un error si consideramos que, por ejemplo, para el agua la viscosidad es despreciable siempre que $\lambda \gg (\frac{v^2}{g})^{\frac{1}{3}} \sim 5 \times 10^{-5}$m. Así la ecuación **??** se reduce a

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -\nabla p_1. \tag{1.12}$$

Si tomamos el rotor de esta ecuación obtenemos que

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \simeq 0, \tag{1.13}$$

siendo $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ la vorticidad. Lo que nos dice que el campo de velocidad asociado con la onda es irrotacional. La ecuación **??** puede ser satisfecha haciendo

$$\vec{v} = \nabla \phi, \tag{1.14}$$

donde $\phi(\vec{r}, t)$ es el potencial de velocidad. Sin embargo, aplicando esto a la ecuación **??**, se obtiene que el potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{1.15}$$

Finalmente, de las ecuaciones **??** y **??** se obtiene que la presión en superficie perturbada es

$$p_1 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{1.16}$$

1.1.1.1 Condiciones de borde

Ahora debemos considerar las condiciones físicas a ser satisfechas en los limites superior e inferior del agua. El agua está delimitada por la parte de abajo por una superficie sólida situada en $z = -d$. Dado que el agua debe permanecer siempre en contacto con esta superficie, la restricción física adecuada en el límite inferior es $v_z|_{z=-h} = 0$, es decir, la velocidad normal es cero en el límite inferior, o lo que es lo mismo

$$v_z|_{z=-h} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-d} = 0. \tag{1.17}$$

El límite superior del agua es un poco más complicado, debido a que es una superficie libre. Considerando ζ como el desplazamiento vertical de esta superficie debido a la onda, tenemos que

$$v_z|_{z=0} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{1.18}$$

La restricción física adecuada para el límite superior es que la presión del agua debe ser igual a la presión atmosférica, ya que no puede haber una discontinuidad de presión a través de una superficie libre, esto en ausencia de la tensión superficial. En consecuencia, a partir de la ecuación **??**, obtenemos

$$p_1|_{z=0} = \rho g \zeta, \tag{1.19}$$

lo cual implica que

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial t}\right|_{z=0} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\left.\rho g \frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0}, \tag{1.20}$$

donde también se ha empleado la ecuación **??**. Combinando esta expresión con la ecuación **??** obtenemos,

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} = -g^{-1} \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 t}\right|_{z=0}, \tag{1.21}$$

la cual es la condición para la superficie libre [**?**].

Suponiendo una solución a la ecuación de onda **??** de la forma

$$\phi(\vec{r}, t) = F(z)\cos(\omega t - kx). \tag{1.22}$$

esta solución corresponde en realidad a la propagación de onda plana de vector de onda $\vec{k} = k\hat{e}_x$, frecuencia angular ω y amplitud $F(z)$. Sustituyendo en la ecuación **??**, obtenemos,

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - k^2 F = 0, \tag{1.23}$$

cuyas soluciones independientes son $e^{(+kz)}$ y $e^{(-kz)}$. Por lo tanto, una solución general de **??** toma la forma

$$\phi(x, z, t) = Ae^{kz}\cos(\omega t - kx) + Be^{-kz}\cos(\omega t - kx), \tag{1.24}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. La condición de frontera **??** satisface la condición de que $B = Ae^{(-2kd)}$, dando

$$\phi(x,z,t) = A\left[e^{kz} + e^{-k(z+2d)}\right]\cos(\omega t - kx), \tag{1.25}$$

la condición de frontera **??** produce entonces

$$Ak\left(1 - e^{-2kz}\right)\cos(\omega t - kx) = A\frac{\omega^2}{g}\left(1 + e^{-2kz}\right)\cos(\omega t - kx), \tag{1.26}$$

la cual se reduce a la relación de dispersión

$$\omega^2 = gk\tanh(kd). \tag{1.27}$$

1.1.1.2 Energía de las ondas de gravedad

La velocidad de fase es la velocidad aparente de una fase determinada de una onda. La velocidad de fase está dada en términos de la frecuencia angular de la onda ω y del vector de onda k, por la relación [**?**],

$$v_p = \frac{\omega}{k}, \tag{1.28}$$

Empleando la ecuación **??** podemos escribir la velocidad de fase de una onda de gravedad que se propagando horizontalmente a través de un volumen de agua de profundidad d como,

$$v_p = (gd)^{1/2}\left[\frac{\tanh(kd)}{kd}\right]^{1/2}. \tag{1.29}$$

La tasa a la cual viaja la energía almacenada en la onda es la velocidad de grupo, la cual podemos escribir como [**?**],

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \tag{1.30}$$

así, empleando la ecuacion **??** se tiene que,

$$v_g = \frac{1}{2}\frac{(g\tanh(kd) + gkd(1 - \tanh^2(kd)))}{\sqrt{(gk\tanh(kd))}}, \tag{1.31}$$

además, la razón entre la velocidad de grupo y la velocidad de fase es

$$\frac{v_p}{v_g} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)}\right]. \tag{1.32}$$

Se debe tener en cuenta que ni la velocidad de fase ni la velocidad de grupo de una onda de gravedad pueden exceder un cierto valor critico $(gd)^{\frac{1}{2}}$. Por otra parte, el campo de desplazamiento y el campo de velocidad asociados a una onda de gravedad plana de número de onda $k\hat{e}_x$, frecuencia angular ω, y amplitud a, son

$$\xi_x(x,z,t) = -a\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx), \tag{1.33}$$

$$\xi_x(x,z,t) = -a\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx), \tag{1.34}$$

$$v_x(x,z,t) = a\omega\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx), \tag{1.35}$$

$$v_z(x,z,t) = a\omega\frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx), \tag{1.36}$$

La energía cinética media por unidad de superficie asociada con una onda de gravedad se define como

$$K = \left\langle \int_{-d}^{\zeta} \frac{1}{2}\rho v^2 dz \right\rangle, \tag{1.37}$$

dónde

$$\zeta(x,t) = a\sin(\omega t - kx) \tag{1.38}$$

que es el desplazamiento vertical de la superficie, y

$$\langle \cdots \rangle = \int_0^{2\pi} (\cdots)\frac{d(kx)}{2\pi} \tag{1.39}$$

es un promedio sobre una longitud de onda. Teniendo en cuenta que $\langle \cos^2(\omega t - kx)\rangle = \langle \sin^2(\omega t - kx)\rangle = \frac{1}{2}$, se deduce a partir de las ecuaciones de **??** y **??** que,

$$K = \frac{1}{4}\rho a^2\omega^2 \int_{-d}^{0} \frac{\cosh[2k(z+d)]}{\sinh^2(kd)}dz = \frac{1}{4}\rho a^2 g\frac{\omega^2}{gk\tanh(kd)}. \tag{1.40}$$

Haciendo uso de la relación de dispersión general **??**, obtenemos

$$K = \frac{1}{4}\rho g a^2. \tag{1.41}$$

La energía potencial media de la perturbación por unidad de superficie asociada a una onda de gravedad se define como

$$U = \left\langle \int_{-d}^{\zeta} \rho g z dz \right\rangle + \frac{1}{2}\rho g d^2, \tag{1.42}$$

de donde obtenemos

$$U = \left\langle \frac{1}{2}\rho g(\zeta^2 - d^2) + \frac{1}{2}\rho d^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\rho g \langle \zeta^2 \rangle, \tag{1.43}$$

o lo que es lo mismo,

$$U = \frac{1}{4}\rho g a^2. \tag{1.44}$$

En otras palabras, la energía potencial media por unidad de superficie de una onda de gravedad es igual a su energía cinética media por unidad de superficie.

Finalmente, la energía total media por unidad de superficie asociada a una onda de gravedad es

$$E = K + U = \frac{1}{2}\rho g a^2. \tag{1.45}$$

De donde concluimos que la energía depende de la amplitud de la onda en la superficie, pero es independiente de la longitud de onda, o la profundidad del agua.

1.1.1.3 Tensión Superficial

Las fuerzas de cohesión entre las moléculas en un líquido se distribuye entre todos los átomos vecinos. La moléculas en la superficie no tienen por su parte superior átomos vecinos, exhibiendo fuerzas atractivas más fuertes sobre sus vecinos más cercanos en la superficie. Dicho en otras palabras, La tensión superficial es la tendencia elástica de una superficie fluida que hace que adquiera la menor superficie posible. Incorporando este concepto en nuestro análisis, se puede suponer que la interfaz se encuentra en

$$z = \zeta(x, t), \tag{1.46}$$

donde $|\zeta|$ es pequeña. De este modo, la interfaz imperturbable corresponde al plano $z = 0$. El vector unitario normal a la interfaz esta dado por

$$\hat{n} = \frac{\nabla(z-\zeta)}{\nabla(z-\zeta)}. \tag{1.47}$$

de esta ecuación obtenemos que

$$n_x \simeq -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{1.48}$$

$$n_z \simeq 1. \tag{1.49}$$

Recordando que la ecuación de Young-Laplace es

$$\Delta p = \gamma \nabla \cdot \hat{n}, \tag{1.50}$$

donde Δp es el cambio de la presión a través de la interfaz en dirección opuesta a $\hat{n}$. A partir de **??** y **??**, tenemos

$$\nabla \cdot \hat{n} \simeq -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \tag{1.51}$$

Por lo tanto, la ecuación **??** da

$$[p]_{z=0_-}^{z=0_+} = \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \tag{1.52}$$

Suponiendo que la interfaz se encuentra entre una masa de agua de densidad ρ y profundidad d, y el ambiente. El agua sin perturbación se encuentra entre $z = -d$ y $z = 0$, y la atmósfera sin perturbación ocupa la región $z > 0$. En el límite, en el que se puede despreciar la densidad de la atmósfera, la presión en la atmósfera toma el valor fijo p_0, mientras que la presión justo por debajo de la superficie del agua es $p_0 - \rho g \zeta + p_1|_{z=0}$, siendo p_1 la presión de la perturbación debido a la onda. De esta manera la ecuación **??** adopta la forma

$$\rho g \zeta - p_1|_{z=0} = \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \tag{1.53}$$

donde γ es la tensión superficial en la interfase aire-agua. Sin embargo, $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(\frac{\partial \phi}{\partial z})_{z=0}$, donde ϕ es el potencial de velocidad perturbado del agua. Así, a partir de **??**, $p_1 = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$, la expresión anterior da

$$g\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\bigg|_{z=0} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\bigg|_{z=0} = \frac{\gamma}{\rho}\,\frac{\partial^3\phi}{\partial z\partial^2 x}\bigg|_{z=0}. \tag{1.54}$$

Esta relación, es una generalización de la ecuación **??**, la cual es la condición a satisfacer en una superficie libre tomando en cuenta la tensión superficial. De la aplicación de esta condición de frontera a la solución general **??**, la cual ya satisface la condición de frontera en la parte inferior del volumen de agua, se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right)\tanh(kd), \tag{1.55}$$

que es una generalización de la ecuación **??**, pero considerando la tensión superficial.

Tomando en cuenta la tension superficial podemos reescribir la energía cinética media por unidad de área y la energía potencial media por unidad de área como

$$K = \frac{1}{4}(\rho g + \gamma k^2)a^2, \tag{1.56}$$

$$U = \frac{1}{4}(\rho g + \gamma k^2)a^2, \tag{1.57}$$

respectivamente, y la energía total media por unidad de área es

$$E = \frac{1}{2}(\rho g + \gamma k^2)a^2. \tag{1.58}$$

1.1.2 Ondas de Faraday

Las ondas superficiales que se forman en un líquido contenido en un recipiente cuando éste es excitado parametricamente se le suele llamar ondas de Faraday, esto en honor a Michael Faraday quien diera por primera vez una descripción de éstas ondas en su famosa obra, titulada "On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces." [**?**]. Otra de las observaciones claves de M. Faraday fue que la ondas estacionarias oscilan a la mitad de la frecuencia de exitación, ésta es la llamada respuesta subarmónica. Más de un siglo después, esta respuesta subarmónica es explicada por el análisis de estabilidad lineal realizado por T.B. Benjamin, F. Ursell [**?**].

En los últimos 25 años, se han realizado numerosos estudios teóricos y experimentales sobre las ondas de Faraday [?, ?]. El interés teórico en el problema de Faraday ha sido impulsado en parte por grandes cantidades de datos experimentales recientes. Las ondas de Faraday son un sistema experimental atractivo y conveniente debido a los numerosos parámetros de control (las propiedades del fluido, la frecuencia del forzamiento, la geometría del contenedor) ademas de que la escala de tiempo para la formación de patrones es típicamente mucho más rápida y facil de ob que para otros sistemas canónicos tales como la convección de Rayleigh-Bénard o la inestabilidad de Richtmyer–Meshkov, entre otras.

Las ondas de Faraday es el ejemplo canónico de cómo se forman patrones espacio-temporales a través de una inestabilidad paramétrica. La mayoria de los trabajos experimentales se ha utilizado fluidos newtonianos sometidos a una o dos aceleraciones sinusoidales, y en otros casos se han empleado fluidos viscoelásticos [?], por mencionar solo alguno de ellos. Una interesante variación del experimento de Faraday es la excitación de un ferrofluido, generando ondas estacionarias en la superficie del ferrofluido mediante la aplicación de corriente alterna y/o directa [Referencias]. Las ondas estacionarias pueden ser excitados por aplicación simultanea de un campo magnético D.C. y una aceleración vertical periódica [55]. Otra variación del problema Faraday se obtiene aplicando un gradiente de temperatura vertical, como en el caso de la convección de Rayleigh-Benard convección, simultáneamente con una vibración vertical [18, 19]. Las inestabilidades paramétricas y la formación de patrones no fluida también se producen en sistemas no fluidos tales como en capas granulares vibradas verticalmente con una [56, 57, 58] o dos [20] componentes de frecuencia de forzamiento.

En muchos casos teóricos se han utilizado modelos de ecuaciones diferenciales parciales para estudiar la inestabilidad paramétrica en un marco general. Estos estudios incluyen investigaciones de la dinámica en la ecuación no lineal de Mathieu con dependencia espacial [59, 60], en la formación de patrones en la ecuación Swift-Hohenberg [61], y en la inestabilidad de Faraday en las ecuaciones Grossman-Pitaevskii modelando un condensado de Bose-Einstein sometido a un campo electromagnético temporalmente periódica [62], por nombrar algunos.

[?]

1.2 Análisis Lineal

Aquí se describo los papers lineales, escribiendo las ecuaciones más representativas y los resultados de autores previos. Aquí debería también entrar algo sobre ecuaciones de Mathieu.

1.3 Análisis No-lineal

Lo mismo de arriba pero incluyendo no-linealidad.

1.4 Simulaciones numéricas

Aquí describo brevemente el trabajo numérico existente sobre patrones de Faraday.