Modello Tesi HCP

Pietro Francaviglia

June 7, 2023

1 Il problema ***Home Care***

Per *Home Care* si intende l'insieme di prestazioni sanitarie erogate a domicilio rivolte alla fascia più fragile della popolazione, che spesso non ha la possibilità di muoversi per ricevere le cure necessarie.
L'*Home Care Problem* può essere affrontato utilizzando modelli matematici e algoritmi per ottimizzare la pianificazione e l'assegnazione delle risorse. Questi modelli considerano una serie di variabili e vincoli per trovare soluzioni ottimali o approssimate.
Affrontare questo problema significa prendere tre tipologie di decisioni:

- **schedulazione** delle visite;
- **assegnazione** di ogni visita a un operatore;
- ***routing*** degli operatori.

Un'ulteriore sfida in questo contesto è garantire **robustezza** al modello, ovvero considerare incertezza nei dati di input, dovuta ad esempio alla cancellazione di una visita o all'indisponibilita di un operatore, e apportare correzioni efficaci alla soluzione trovata per il caso nominale.
Un approccio comune è formulare l'*Home Care Problem* come un problema di programmazione intera, ed è anche quello proposto di seguito.

2 Versione nominale

2.1 Insiemi e loro proprietà

Inizialmente, è necessario modellare il contesto dell'*Home Care* , definendo le sue componenti e le relative proprietà.

- W orizzonte di pianificazione, tipicamente una settimana;

- P insieme di pazienti;
- O insieme di operatori;
  - $s_o \in \mathbb{N}$ livello di specializzazione;
  - $h_o \in \mathbb{N}$ tempo di servizio previsto nell'orizzonte di pianificazione;
  - $c_o \in \mathbb{R}$ stipendio unitario;
  - $r_{od} \in \{0, 1\}$ reperibilità nel giorno $d \in W$;
  - $[t^1_{od}, t^2_{od}] \subseteq \mathbb{N}$ orario di inizio e fine servizio nel giorno $d \in W$;

Per quanto riguarda le visite, assumiamo che ci possa essere al massimo una richiesta al giorno per paziente. Conseguentemente, possiamo indicizzare le informazioni relative alle visite indicando il paziente $p \in P$ e il giorno $d \in W$ a cui sono riferite:

- $r_{pd} \in \{0, 1\}$ richiesta del paziente $p \in P$ per una visita nel giorno $d \in D$;
- $s_{pd} \in \mathbb{N}$ livello di specializzazione della visita;
- $[t^1_{pd}, t^2_{pd}] \subseteq \mathbb{N}$ intervallo temporale nel quale deve essere eseguita la visita;

Abbiamo considerato un orizzonte temporale di una settimana e 8 slot temporali della durata τ di un'ora ciascuno, nel tentativo di modellare una situazione di lavoro 9-13 e 14-18.

Le visite non sono distinte per tipologie, ma per livello di specializzazione richiesto. È prassi definire un'organizzazione gerarchica del livello di specializzazione, tale per cui si assume che un operatore di livello s_o sia in grado di eseguire ogni visita v di livello $s_v \leq s_o$.

Nel problema considerato, ogni visita è associata a uno slot temporale, e si assume $t^1_{pd} + h_{pd} \leq t^2_{pd}\ \forall p \in P,\, d \in W$. Gli operatori, invece, hanno facoltà di comunicare le proprie disponibilità settimanali, sia per giornate intere sia comunicando orari di inizio e fine servizio, in modo da consentire la flessibilità necessaria per applicare tecniche di ottimizzazione.

2.1.1 Rete logistica

Per tener conto della distanza tra le abitazioni dei pazienti e degli operatori, definiamo un grafo

$$G = (N, A),\ N = P \cup O,\ A \subseteq N \times N$$

in cui ogni operatore o paziente è rappresentato come un nodo sulla rete. Questo ci consente di definire:

- $a_{ij} \in \mathbb{N}$, $i, j \in N$, $(i, j) \in A$ tempo di percorrenza dell'arco da i a j;
- γ costo unitario degli spostamenti.

2.2 Parametri derivati

Per ogni $o \in O$, definiamo $F_o \subseteq P$ come insieme dei *feasible patients*, e affermiamo che $p \in F_o$ se e solo se le seguenti condizioni sono verificate:

- $\max_{d \in W} s_{pd} \leq s_o$;
- $\forall d \in W$, $r_{od} \cdot t^1_{pd} \geq r_{pd} \cdot (t^1_{od} + a_{op})$;
- $\forall d \in W$, $r_{od} \cdot t^2_{od} \geq r_{pd} \cdot (t^2_{pd} + a_{po})$;

Per ogni operatore, questo insieme contiene i pazienti che possono essergli assegnati, e ci consente di semplificare la scrittura di alcuni vincoli.

Inoltre, definiamo $\mathcal{M} \in \mathbb{N}$ come un numero molto grande, pensato per definire alcuni vincoli con condizioni binarie.

2.3 Variabili

Definiamo due famiglie di variabili:

- $x_{po} \in \{0, 1\}$, $o \in O$, $p \in F_o$

$$x_{po} = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente } p \text{ è assegnato all'operatore } o \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $y^{od}_{ij} \in \{0, 1\}$, $(i, j) \in A$, $o \in O$, $d \in W$,

$$y^{od}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'operatore } o \text{ percorre l'arco } (i, j) \text{ nel giorno } d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modello, ad essere assegnato a un operatore non sono le visite, ma i pazienti: questo perché nell'ambito dell'*Home Care* è prassi seguire il principio di *care continuity*, per cui ogni paziente viene seguito dal minor numero di operatori possibile. In particolare, in questa versione abbiamo deciso di impostare un vincolo forte su questo numero, e limitarlo a 1.

2.4 Funzione obiettivo

Il nostro obiettivo è minimizzare i costi, divisi tra stipendi degli operatori e rimborsi di viaggio. Assumiamo che i lavoratori siano pagati per ore effettive di lavoro, e che percepiscano un rimborso spese durante gli spostamenti da un domicilio all'altro.

Definiamo dunque la seguente funzione di costo:

$$\Xi = \sum_{o \in O} \left(\sum_{p \in F_o} \left(x_{po} \cdot c_o \cdot \sum_{d \in W} (t^2_{pd} - t^1_{pd}) \right) + \gamma \cdot \sum_{(i,j) \in A} \left(a_{ij} \cdot \sum_{d \in W} y^{od}_{ij} \right) \right)$$

Come anticipato sopra, la prima parte dell'espressione riguarda gli stipendi degli operatori, mentre la seconda riguarda le spese di viaggio.

2.5 Vincoli

In questa sezione elenchiamo e definiamo tutti i vincoli a cui è soggetta la funzione obiettivo.

- a ogni paziente deve essere assegnato esattamente un operatore:

$$\forall p \in P, \quad \sum_{o \in O:\, p \in F_o} x_{po} = 1 \tag{1}$$

- a ogni operatore devono essere assegnati solo pazienti per i quali può eseguire visite:

$$\forall p \in P, \quad \sum_{o \in O:\, p \notin F_o} x_{po} = 0 \tag{2}$$

- ogni operatore può lavorare al massimo quanto previsto dal proprio contratto:

$$\forall o \in O, \quad \sum_{p \in F_o} x_{po} \cdot \left(\sum_{d \in W} \left(r_{pd} \cdot (t^2_{pd} - t^1_{pd}) \right) \right) \leq h_o \tag{3}$$

- il domicilio di ogni paziente da visitare deve essere raggiunto e lasciato esattamente una volta per visita:

$$\forall o \in O,\, \forall p \in F_o,\, \forall d \in W, \quad \sum_{j \in P \cup \{o\}} y^{od}_{pj} = x_{po} \cdot r_{pd} \tag{4}$$

$$\forall o \in O,\, \forall p \in F_o,\, \forall d \in W, \quad \sum_{i \in P \cup \{o\}} y^{od}_{ip} = x_{po} \cdot r_{pd} \tag{5}$$

- ogni operatore ha diritto al rimborso spese quando parte dal proprio domicilio a inizio giornata e quando vi ritorna la sera:

$$\begin{gathered} \forall o \in O,\, \forall d \in W,\, \forall p \in F_o :\; r_{pd} = 1, \\ t^1_{od} + a_{op} \leq t^1_{pd} + \mathcal{M} \cdot (1 - y^{od}_{op}) \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \forall o \in O,\, \forall d \in W,\, \forall p \in F_o :\; r_{pd} = 1, \\ t^1_{pd} + t_{po} \leq t^2_{od} + \mathcal{M} \cdot (1 - y^{od}_{po}) \end{gathered} \tag{7}$$

- per ogni operatore, tra una visita e un'altra deve passare sufficiente tempo per raggiungere il domicilio del paziente successivo:

$$\begin{gathered}\forall o \in O,\, \forall d \in W,\, \forall p_1, p_2 \in F_o,\, p_1 \neq p_2,\, r_{p_1 d} = 1, r_{p_2 d} = 1, \\ t^2_{p_1 d} + a_{p_1 p_2} \leq t^1_{p_2 d} + \mathcal{M} \cdot (1 - y^{od}_{p_1 p_2})\end{gathered} \tag{8}$$