

DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation

$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \forall x \in \Omega \\ u(a) &= u(b) = 0 \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein gegebenes f

Ziel

Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x) v'(x) + \cancel{[u'(x)v(x)]_a^b} = \int_a^b f(x) v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in L^1$

DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

Wiederholung

1.
$$\begin{cases} u: \Omega = (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \\ \int_{\Omega} u'(x) v'(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx \\ u(a) = u(b) \end{cases}$$
2. Eigenschaften L^p :
 - $1 \leq p < \infty \Rightarrow L^p$ separabel
 - L^{∞} nicht separabel
 - $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (L^p)' \equiv L^q$
 $T: L^q \rightarrow (L^p)', (Tg)f = \int_{\Omega} f(x) g(x) \, dx$
 - $(L^1)' \equiv L^{\infty}, L^1 \subsetneq (L^{\infty})'$
 $\Rightarrow L^1, L^{\infty}$ sind nicht reflexiv

Definition

$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: u|_K \in L^1(K) \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
Raum der lokal integrierbaren Abbildungen

Definition

$\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: f \in \mathcal{C}^{\infty}, \text{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger
 $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}}$
 $\mathcal{C}_c^{\infty} \neq \mathcal{C}_0^{\infty}$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$

Glättungskern $J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

Definition

$u, v \in L^1_{\text{loc}}$. Es gelte

$$\int_{\Omega} u(x) \phi(x) \, dx = - \int_{\Omega} v(x) \phi'(x) \, dx \forall \phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}$$

u heißt schwache Ableitung von v , v heißt schwach differenzierbar

Beispiel

1. $u(x) = |x|$ schwach differenzierbar auf $(-1, 1)$

$$u'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

2. Heaviside-Funktion auf $\Omega = (-1, 1)$

$$H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} \text{ ist nicht schwach differenzierbar}$$

Eigenschaften:

- klassisch differenzierbar \Rightarrow schwach differenzierbar
- schwache Ableitung ist eindeutig im L^1 -Sinne
- übliche Eigenschaften (Linearität,...) bleiben erhalten

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}$ und

$$\int_{\Omega} u(x) \phi(x) \, dx = 0 \, \forall \phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}$$

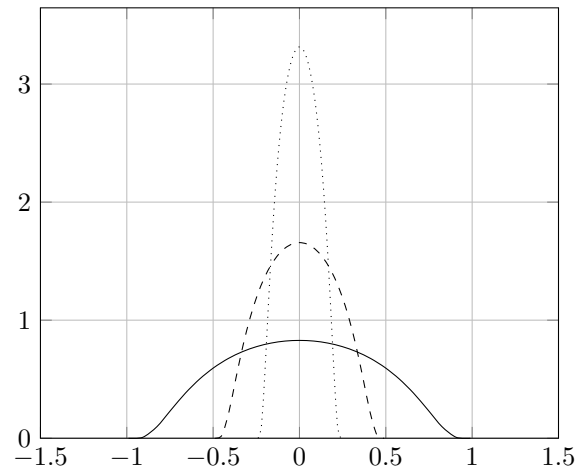
so folgt $u = 0 \in L^1_{\text{loc}}$.

Definition

$$J_{\epsilon}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, J_{\epsilon}(x) = \begin{cases} c_{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & , x \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$c_{\epsilon} := \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) \, dx\right)^{-1}$ J_{ϵ} ist der Standard-Glättungskern mit Träger $[-\epsilon, \epsilon]$

- $J_{\epsilon} \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$
 - $\int_{\mathbb{R}} J_{\epsilon}(x) \, dx = 1$
 - $J_{\epsilon}(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\Rightarrow J_{\epsilon}$ ist Wahrscheinlichkeits-Dichte



DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 3: 25.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

Definition $u: \Omega = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ außerhalb von Ω mit 0 fortgesetzt

$$u_\epsilon := (J_\epsilon \star u)(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y) u(x-y) dy$$

heißt Glättung oder Regularisierung.**Eigenschaften** $u \in L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $p \in [1, \infty)$

1. für $\epsilon > 0$ ist u_ϵ wohldefiniert
2. $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$
3. $\text{supp}(u) \subset \Omega$ kompakt, ϵ klein genug $\Rightarrow u_\epsilon \in C_c^\infty$
4. $\|u_\epsilon\|_{0,p} \leq \|u\|_{0,p}$
5. $\|u - u_\epsilon\|_{0,p} \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$
6. $u_\epsilon(x) \rightarrow u(x)$ fast überall
7. $u \in C(\Omega) \Rightarrow \|u - u_\epsilon\|_\infty \rightarrow 0$ auf jeder kompakten Teilmenge

Fundamentallemma der VariationsrechnungSei $u \in L^1_{\text{loc}}$ und

$$\int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx = 0 \forall \phi \in C_c^\infty$$

so folgt $u = 0 \in L^1_{\text{loc}}$.**Beweis**Sei $K \subset \Omega$ beliebig und kompakt und $w = \text{sgn}(u) \mathbb{1}_K$. Wäre $w \in C_c^\infty(\Omega)$, dann würde gelten

$$0 = \int_{\Omega} uw = \int_{\Omega} |u| \Rightarrow u = 0.$$

Im Allgemeinen ist w jedoch nicht glatt und wir müssen den Übergang zu w_ϵ vollziehen. Wähle hierfür $\epsilon_0 < \text{dist}(K, \partial\Omega)$. Es gilt $w_\epsilon \in C_c^\infty \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ da $\text{supp}(w)$ kompakt. Somit gilt

$$\int_{\Omega} uw_\epsilon = 0 \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$$

und somit $(uw_\epsilon)(x) \rightarrow |u(x)|$ fast überall.Weiterhin gilt $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |u(x) w_\epsilon(x)| &= |u(x)| \left| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) w(y) dy \right| \\ &\leq |u(x)| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) \underbrace{|w(y)|}_{\leq 1} dy \\ &\leq |u(x)| \end{aligned}$$

Somit hat $|u(x)| \mathbb{1}_{\text{supp}(w_{\epsilon_0})}$ kompakten Träger und ist Majorante für uw_ϵ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(x) w_\epsilon(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x) w_\epsilon(x) \, dx \\ &= \int_{\Omega} u(x) w(x) \, dx = \int_{\Omega} |u(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Somit folgt $u = 0$ auf K . □

Beweis der Eigenschaften der Glättung

1. Übung
2. Übung
3. $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p \in [1, \infty], x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)^{\frac{1}{p}+1q} |u(y)| \, dy \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) \, dy \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1} \left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) |u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \|u_\epsilon\|_{0,p}^p &= \int_{\Omega} |u_\epsilon(x)|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_\epsilon(x)|^p \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) |u(y)|^p \, dy \, dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) \, dx}_{=1} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p \, dy = \int_{\Omega} |u(y)|^p \, dy = \|u\|_{0,p}^p \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} |(u_\epsilon - u)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y) (u(x-y) - u(x)) \, dy \right| \\ &\leq \dots \stackrel{\text{Hölder}}{\dots} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y) |u(x-y) - u(x)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \|u_\epsilon - u\|_{0,p}^p &\leq \int_{\Omega} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) |u(x-y) - u(x)|^p \, dy \, dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \int_{\Omega} |u(x-y) - u(x)|^p \, dx \, dy \\ &\leq \sup_{y \in [-\epsilon, \epsilon]} \int_{\Omega} |u(x-y) - u(x)|^p \, dx \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, da $\forall u \in L^p(\Omega)$ gilt $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{y \in [-\epsilon, \epsilon]} \int_{\Omega} |u(x-y) - u(x)|^p \, dx = 0$

5. analog

6. $u \in \mathcal{C}(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt. Wähle $\epsilon_0 < \text{dist}(K, \partial\Omega)$.

$K_0 = [\inf K - \epsilon_0, \sup K + \epsilon_0]$ bleibt kompakt und somit u gleichmäßig stetig auf K_0 .

$\Rightarrow \forall \epsilon < \min \{ \delta, \epsilon_0 \}, x \in K$ gilt

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \underbrace{|u(x-y) - u(x)|}_{\leq \eta} dy \\ &\leq \eta \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) dy = \eta \end{aligned}$$

□

— **Korollar** —

$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ schwach differenzierbar, v, w schwache Ableitungen von u . Dann gilt

$$v = w \text{ fast überall}$$

— **Satz** —

$\Omega = (a, b), u \in L^1(\Omega), u' \in L^1(\Omega)$ schwache Ableitung von u
 $\Rightarrow u$ auf $\bar{\Omega}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \|u\|_{1,1} = \frac{\max(1, b-a)}{b-a} (\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1})$$

DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 4: 26.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

Beweis

$$v(x) = \int_a^x u'(y) \, dy$$

mit $u \in L^1(\Omega)$. Somit ist v absolut stetig für klassisch differenzierbare u mit $u^{prime} = v'$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) \, dx &= - \int_{\Omega} v'(x) \phi(x) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} u'(x) \phi(x) \, dx = \int_{\Omega} u(x) \phi(x) \, dx \end{aligned}$$

Mit dem vorigen Korollar erhält man somit

$$\exists c \in \mathbb{R}: u(x) = v(x) + c \text{ fast überall in } \Omega$$

Mit dem Mittelwertsatz erhält man

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] = \bar{\Omega}: \int_a^b u(\xi) \, d\xi &= (b-a) u(x_0) \\ \Rightarrow u(x) &= u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(\xi) \, d\xi \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b u(\xi) \, d\xi + \int_{x_0}^x u'(\xi) \, d\xi \\ \Rightarrow \|u\|_{\infty} &\leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} (\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1}) \end{aligned}$$

□

– Dieser Satz gilt nur im Eindimensionalen!

– Fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion \neq Fast überall absolut stetig

Definition

$u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, n -te schwache Ableitung von u

$$\int_{\Omega} v(x) \phi(x) \, dx = (-1)^n \int_{\Omega} u(x) \phi^{(n)}(x) \, dx \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

Im höherdimensionalen ist das Fehlen von Ableitungen niedrigerer Ordnung möglich.

Satz

$u \in L^1(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = (a, b)$

$\exists n$ -te schwache Ableitung $u^{(n)} \in L^1(\Omega) \Rightarrow \exists k$ -te schwache Ableitung für $k = 1, \dots, n-1$ und $u^{(k)}$ ist

fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.

Beweis

$v_{n-1}(x) = \int_a^x u^{(n)}(y) dy$ und somit ist v_{n-1} absolut stetig und damit $v'_{n-1} = u^{(n)}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.

Rekursiv erhält man $v_{k-1}(x) = \int_a^x v_k(y) dy \Rightarrow v_{k-1}$ absolut stetig und somit $v'_{k-1} = v_k$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.

Und somit:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_a^b u(x) \phi^{(n)}(x) dx &= \int_a^b u^{(n)}(x) \phi(x) dx \\ &= \int_a^b v'_{n-1}(x) \phi(x) dx \\ &= \dots = (-1)^n \int_a^b v_0(x) \phi^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$

Außerdem lässt sich das Korollar verallgemeinern

$$\int_{\Omega} w \phi^{(n)} dx = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) \Rightarrow w(x) = p(x) \text{ fast überall, } p \in \mathbb{P}_{n-1}[x]$$

Und somit $u(x) = v_0(x) + p(x)$ ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion. Da u' existiert (im klassischen Sinne falls $n \geq 2$) ist u' absolut stetig. Diese Erkenntnis kann iteriert werden. \square

2 Die Sobolew-Räume $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$

Definition

$$W^{k,p}(\Omega) := \left(u \in L^p : \exists u^{(k)} \in L^p \right)$$

ist mit

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_{0,p}^p \right)^{1/p}$$

ein Banachraum, genannt Sobolewraum.

Definition

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

ist ein Hilbertraum.

Satz

$$\|u\|_{1,2} = (u, u)_{1,2}^{1/2}$$

mit

$$(u, v)_{1,2} = (u, v)_{0,2} + (u', v')_{0,2} = \int uv + u'v' dx$$

definiert eine Norm, bzw ein Skalarprodukt. $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}, (\cdot, \cdot)_{1,2})$ ist ein separabler Hilbertraum.

Beweis

Vollständigkeit

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H^1 . Es gilt also:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \\ u'_n &\rightarrow v \end{aligned}$$

in L^2 . Da Ω beschränkt ist gilt:

$$\|u_n - u\|_{0,1} = \int_{\Omega} |u_n - u| \, dx = \int_W 1 |u_n - u| \, dx \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \int_{\Omega} 1 \, dx \|u_n - u\|_{0,2}$$

Mit einer Hausaufgabe folgt, dass u schwach differenzierbar ist und $u' = v$. Somit ist $u \in H^1(\Omega)$.

Separabilität

Sei $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $T: H^1(\Omega) \rightarrow X, u \mapsto Tu = (u, u')$.

T ist wohldefiniert, linear und isometrisch. Also ist T injektiv. Somit ergibt sich, dass $T(H^1(\Omega)) \subset X$ ein Unterraum ist. Also $H^1(\Omega) \cong T(H^1(\Omega))$. Es folgt somit aus $H^1(\Omega)$ vollständig, dass $T(H^1(\Omega))$ abgeschlossen in X ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) \text{ separabel} &\Rightarrow X \text{ separabel} \\ &\Rightarrow T(H^1(\Omega)) \text{ separabel, da abgeschlossen} \\ &\Rightarrow H^1(\Omega) \text{ separabel} \end{aligned}$$

□

DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 5: 02.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

Definition

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ seien Banachräume. Eine lineare, injektive Abbildung

$$j: X \rightarrow Y$$

wird **Einbettung** genannt. X kann also mit $j(X)$ identifiziert werden.

- Ist j stetig, so sagt man, X ist stetig in Y eingebettet ($X \hookrightarrow Y$).
- Ist j kompakt, so sagt man, X ist kompakt in Y eingebettet ($X \xhookrightarrow{c} Y$)
- Ist $j(X)$ dicht in Y und $X \hookrightarrow Y$, so sagt man, X ist dicht in Y eingebettet ($X \xhookrightarrow{d} Y$)

Satz

$u \in H^1(\Omega)$ ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.

$$H^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} C(\overline{\Omega})$$

Beweis

Mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ und somit $H^1(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$ und somit die erste Aussage.

Sei $u \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &\leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b |u(\xi)| \, d\xi + \int_a^b |u'(\xi)| \, d\xi \right) \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b 1 \, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_a^b (|u(\xi)| + |u'(\xi)|)^2 \, d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2} \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b 1 \, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_a^b |u(\xi)|^2 + |u'(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2} \frac{\max(1, b-a)}{\sqrt{b-a}} \|u\|_{1,2} \end{aligned}$$

und somit haben wir $H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Sei $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ eine bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ beschränkte Folge. Dann ist (u_n) auch bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt. Mit

$$\begin{aligned} |u_n(x_1) - u_n(x_2)| &= \int_{\min}^{\max} u'_n(\xi) \, d\xi \\ &< \sqrt{|x_1 - x_2|} \underbrace{\left(\int_\Omega |u'_n(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}}_{\leq \|u\|_{1,2} \leq M} \end{aligned}$$

erhalten wir, dass (u_n) gleichgradig stetig ist. Wir erhalten mit Arzela-Ascoli, dass (u_n) kompakt ist und $H^1(\Omega) \xrightarrow{C} \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ \square

Satz

$C^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $H^1(\Omega)$.

Lemma

$u \in H^1(\Omega), 0 < \epsilon_0 < \frac{b-a}{2}$.

$\Rightarrow u_\epsilon = J_\epsilon \star u \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u$ bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ auf $(a - \epsilon, b + \epsilon)$.

Beweis

$x \in (a + \epsilon_0, b - \epsilon_0), \epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Es sei $\phi: y \mapsto J_\epsilon(x - y) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\text{supp}(\phi) = [x - \epsilon, x + \epsilon] \subset (a, b)$$

und somit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Es folgt also $\forall x \in (a + \epsilon_0, b - \epsilon_0), \epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$\begin{aligned} (u')_\epsilon(x) &= \int_{\Omega} J_\epsilon(x - y) u'(y) \, dy \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} J_\epsilon(x - y) u(y) \, dy \\ &\stackrel{\text{Kette}}{=} (-1)^2 \int_{\Omega} J'_\epsilon(x - y) u(y) \, dy \\ &\stackrel{\text{Majorante}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega} J_\epsilon(x - y) u(y) \, dy = (u_\epsilon)'(x) \end{aligned}$$

Somit folgt $u_\epsilon \rightarrow u$ und $(u')_\epsilon \rightarrow u'$ in $L^2(a + \epsilon_0, b - \epsilon_0)$. \square

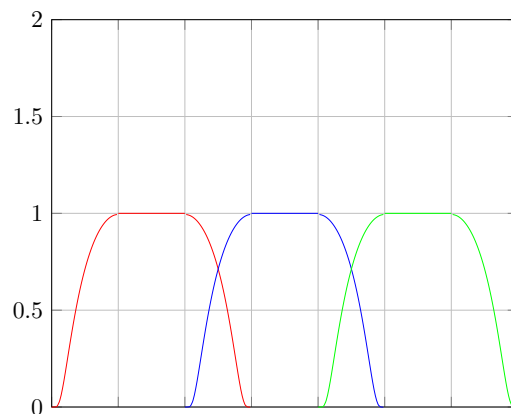
Beweis des Satzes

1. Seien I_1, I_2, I_3 offene Intervalle mit $\bigcup_{i=1}^3 I_i \supset [a, b]$, $a \in I_1, b \in I_3, I_2 \subset [a, b]$, $I_1 \cap I_3 = \emptyset$
2. Partition der Eins
 $\Psi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), i = 1, 2, 3$
 $\text{supp}(\Psi_i) \subset I_i, \sum_{i=1}^3 \Psi_i(x) = 1 \forall x \in [a, b]$
3. $u_i := u \Psi_i \Rightarrow u = \sum_{i=1}^3 u_i$ in $[a, b]$.
 Es gilt $u'_i = u \Psi'_i + u' \Psi_i$ und somit $u' \in L^2(\Omega)$ und $u_i \in H^1(\Omega)$.
 Wir definieren nun $v_1 := u_1(x + \delta)$ für $\delta \in (0, \epsilon_0)$. Da $b \notin \text{supp}(u_1)$ gilt

$$v_1 \in H^1(a - \delta, b + \delta)$$

und somit

$$\forall \eta > 0 \exists \delta_0 \leq \delta: \|v_{1,\epsilon} - v_1\|_{1,2} < \eta \forall \epsilon \in (0, \delta_0)$$



DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 6: 03.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

Beweis Fortsetzung

4. Stetigkeit im L^2 -Mittel $\Rightarrow \forall \eta > 0 \exists \epsilon_\eta \in (0, \delta) : \forall \epsilon \in (0, \epsilon_\eta) : \|v_{1,\epsilon_\eta} - v_1\|_{1,2} < \eta$ in $H^1(a, b)$.
 5. Zusammen ergibt sich für δ, ϵ hinreichend klein:

$$\|v_{1,\epsilon} - u_1\| \leq \|v_{1,\epsilon} - v_1\|_{1,2} + \|v_1 - u_1\|_{1,2} < 2\eta$$

6. u_3 wird analog approximiert, u_2 kann direkt geglättet werden
 7. $v_\epsilon := (v_{1,\epsilon} + v_{2,\epsilon} + v_{3,\epsilon})|_{[a,b]} \in C^\infty[a, b]$ mit

$$\|v_\epsilon - u\|_{1,2} \leq \sum_{i=1}^3 \|v_{i,\epsilon} - u_i\|_{1,2} < 6\eta$$

□

Produktregel

$$u \in H^1(\Omega), \Psi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u\Psi \in H^1(\Omega) \text{ und } (u\Psi)' = u'\Psi + u\Psi'$$

Beweis

$\Psi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u\Psi \in L^2(\Omega)$ und $u'\Psi + u\Psi' \in L^2(\Omega)$. Für $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\Psi\phi' \, dx &= \int_{\Omega} u[(\Psi\phi)' - \Psi'\phi] \, dx \\ &= - \int_{\Omega} u'(\Psi\phi) \, dx - \int_{\Omega} u\Psi'\phi \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (u'\Psi - u\Psi')\phi \, dx \end{aligned}$$

Zusammen folgt, dass $u\Psi \in H^1(\Omega)$.

□

Satz von Rellich

Es gilt

$$H^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)$$

Beweis

Es gilt $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, da

$$\begin{aligned}\|v\|_{0,2}^2 &= \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \\ &\leq \|v\|_{\infty}^2 \int_{\Omega} 1 dx \\ &= \|v\|_{\infty}^2 (b-a)\end{aligned}$$

Somit folgt

$$H^1(\Omega) \xhookrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

□

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 1$ auch dicht in $H^1(\Omega)$
- \mathcal{C}_c^{∞} **nicht** dicht in $H^1(\Omega)$

Definition

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)}$$

wobei der Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ gebildet wird.

Es gilt $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$

Sei $(\phi_n) \subset \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ mit $\|\phi_n - u\|_{1,2} \rightarrow 0$ für ein $u \in H^1(\Omega)$. Dann hat u einen absolut stetigen Repräsentanten und es gilt $\|\phi_n - u\|_{\infty} \rightarrow 0$ und somit $u(a) = \lim \phi_n(a) = 0$ und analog $u(b) = 0$.

— **Charakterisierung von $H_0^1(\Omega)$** —

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(a) = u(b) = 0\}$$

— **Poincare-Friedrichs-Ungleichung** —

Sei $u \in H_0^1(\Omega)$. Dann gilt $\|u\|_{0,2} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|u'\|_{0,2}$.

Die Aussage gilt nicht für $H^1(\Omega)$!

Beweis

$$\begin{aligned}u(x) &= \underbrace{u(a)}_{=0} + \int_a^x u'(\xi) d\xi \Rightarrow |u(x)| \leq \int_a^x |u'(\xi)| d\xi \\ \Rightarrow \|u\|_{0,2}^2 &\leq \int_{\Omega} \left(\int_a^x |u'(\xi)| d\xi \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_a^x 1 d\xi \int_a^x |u'(\xi)|^2 d\xi \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega} (x-a) dx \int_a^b |u'(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2} (b-a)^2 \|u'\|_{0,2}^2\end{aligned}$$

□

- Die Konstante kann auf $\frac{b-a}{\pi}$ verbessert werden.
- $\|\cdot\|_{1,2}$ und $|\cdot|_{1,2} := \|u'\|_{0,2}$ sind äquivalent auf $H_0^1(\Omega)$.
- Auf $H^1(\Omega)$ ist $|\cdot|_{1,2}$ nur eine Halbnorm, da sie Konstanten übersieht.

Satz

$(H_0^1(\Omega), |\cdot|_{1,2}, [u, v]_{1,2} := \int_{\Omega} u'(\xi) v'(\xi) \, d\xi = (u', v')_{0,2})$ ist ein separabler Hilbertraum.
Es gilt $H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} C(\bar{\Omega})$.

Satz

$H_0^1(\Omega)$ liegt dicht in $L^2(\Omega)$. Dies folgt aus $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$.

$$C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

Definition

$$H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))'$$

- $H^{-1}(\Omega) \simeq H_0^1(\Omega)$ mit dem Riesz'schen Darstellungssatz
- Gelfand-Tripel: $H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{d} L^2(\Omega) \simeq (L^2(\Omega))' \xhookrightarrow{d} H^{-1}(\Omega)$

Satz

$$\|f\|_{-1,2} := \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle f, v \rangle|}{|v|_{1,2}}$$

definiert eine Norm auf $H^{-1}(\Omega)$. $(H^{-1}(\Omega), \|\cdot\|_{-1,2})$ bildet einen reflexiven Banachraum.

$$L^2(\Omega) \xhookrightarrow{c} H^{-1}(\Omega)$$

oder

$$\forall f \in H^{-1}(\Omega) \exists u_f \in L^2(\Omega) : \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} u_f v' \, dx \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 7: 09.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

Beweis der Charakterisierung von $H^{-1}(\Omega)$

Eine Richtung wurde in der Definition schon skizziert.

Sei $u \in H^1(\Omega)$ mit $u(a) = u(b) = 0$. Weiterhin sei $\delta \in (0, \frac{b-a}{5})$. Wähle nun $\Psi_\delta \in C_c^\infty(\Omega)$ so, dass

1. $0 \leq \Psi_\delta \leq 1$ in Ω
2. $|\Psi'_\delta| \leq \frac{c}{\delta}$ für $c > 0$
3. $\Psi_\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [a, a + \delta] \cup [b - \delta, b] \\ 1 & , x \in [a + 2\delta, b - 2\delta] \end{cases}$

So ein Ψ_δ existiert, z.B. $\Psi_\delta(x) = \int_{a+\delta}^x J_{\delta/2}(y - (a + \frac{3}{2}\delta)) \, dy$ auf $[a + \delta, a + 2\delta]$.

Setze nun

$$\begin{aligned} v &:= u\Psi_\delta \Rightarrow \text{supp}(v) \subset [a + \delta, b - \delta] \\ &\Rightarrow v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Setzt man nun v außerhalb von Ω konstant 0 fort, so erhält man sogar $v \in H^1(\mathbb{R})$.

TODO

□

3 Variationelle Formulierung von Randwertproblemen und abstrakte Operatorgleichungen

Gegeben ist das Randwertproblem

$$(P_{\text{Dir}}) \begin{cases} \text{Finde } u \in C(\bar{\Omega}) \cup C^2(\Omega) \\ -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x) \text{ in } \Omega \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Zur Überführung von P_{Dir} in eine variationelle (schwache) Formulierung führen wir folgende Schritte durch

1. Multiplikation der DGL mit hinreichend glatter Testfunktion v
2. Integration des Produkts über Ω
3. Term zweiter Ordnung einmal partiell integrieren
4. Ableitungen im schwachen Sinne interpretieren

Es ergibt sich

$$(V_{\text{Dir}}) = \begin{cases} \text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \rightarrow (\text{Ansatzraum}) \\ \int_{\Omega} (u'v' + cu'v + duv) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \, \forall v \in H_0^1(\Omega) \rightarrow (\text{Testraum}) \end{cases}$$

Für eine sinnvolle Definition ist nötig $c, d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Definition

Die Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des variationellen Problems V_{Dir} wird **schwache Lösung** von P_{Dir} genannt.

DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 8: 10.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

Randbedingungen

1. Dirichlet: $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$
2. Neumann: $u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta$
3. Robin: $c_a u(a) + u'(a) = \alpha, c_b u(b) + u'(b) = \beta$
4. periodisch: $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$

Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen führen zu Problemen, da die Lösung $u \notin H_0^1(\Omega)$. Es wird ein neuer Ansatzraum kreiert

$$\begin{aligned} H_{\alpha,\beta}(\Omega) &:= \{u \in H^1(\Omega) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \\ &= g + H_0^1(\Omega), g \in H^1(\Omega) : g(a) = \alpha, g(b) = \beta \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit ein erstes variationelles Problem

$$(V_1) = \begin{cases} \text{Finde } u \in H_{\alpha,\beta} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

oder die alternative Form

$$(V_2) = \begin{cases} \text{Finde } u_0 \in H_0^1 \\ a(u_0, v) = \langle f, v \rangle - a(g, v) = \langle \tilde{f}, v \rangle \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen werden auch wesentliche Randbedingungen genannt, da sie die Wahl des Ansatzraums beeinflussen.

Bei Neumann-Randbedingungen ergibt sich als Ansatz- und Testraum der Raum $H^1(\Omega)$. Betrachte das Problem

$$(P_{\text{Neu}}) \begin{cases} \text{Finde } u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \\ -u''(x) = f(x) \forall x \in \Omega \\ u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta \end{cases}$$

Dieses Problem ist klassisch nicht eindeutig lösbar sondern nur bis auf eine Konstante. Es ist also eine weitere Bedingung $(\int_{\Omega} u \, dx = 0)$ nötig. Die Überführung in die variationelle Formulierung ergibt das Problem

$$(V_{\text{Neu}}) \begin{cases} \text{Finde } u \in H^1(\Omega) \\ a(u, v) = \int_{\Omega} u'(x) v'(x) \, dx = (\alpha v(a) - \beta v(b)) + (f, v)_{0,2} \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Die Neumann-Randbedingungen werden auch natürliche Randbedingungen genannt, da sie den größtmöglichen Ansatzraum $H^1(\Omega)$ erlauben.

Insgesamt ergibt sich das abstrakte variationelle Problem

$$(V) \begin{cases} \text{Finde } u \in V \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle \forall v \in V \end{cases}$$

Hierbei ist

- $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reeller Banachraum

- $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ linear und beschränkt im zweiten Argument ($a(u, \cdot) \in V'$)
- $A: V \rightarrow V', u \mapsto a(u, \cdot)$ der zu a assoziierte Operator

Es ergibt sich somit das Operator-Problem

$$(O) \begin{cases} \text{Finde } u \in V \text{ zu } f \in V' \\ A[u] = f \end{cases}$$

Lemma

(V) und (O) sind äquivalent.
