DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation
$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x)\, \forall x \in \Omega \\ u(a) = u(b) &= 0 \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein gegebenes f
Ziel
Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x)\, v'(x) + \cancel{\left[u'(x)\, v(x)\right]_a^b} = \int_a^b f(x)\, v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in \mathrm{L}^1$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Wiederholung

1. $\begin{cases} u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R} \\ \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \\ u(a) = u(b) \end{cases}$
2. Eigenschaften L^p:
   - $1 \leq p < \infty \Rightarrow \mathrm{L}^p$ separabel
   - L^∞ nicht separabel
   - $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\mathrm{L}^p)' \equiv \mathrm{L}^q$
     $T\colon \mathrm{L}^q \to (\mathrm{L}^p)', (Tg)\, f = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$
   - $\left(\mathrm{L}^1\right)' \equiv \mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1 \subsetneq (\mathrm{L}^\infty)'$
     $\Rightarrow \mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty$ sind nicht reflexiv

Definition

$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u|_K \in \mathrm{L}^1(K)\, \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\right\}$
Raum der lokal integrierbaren Abbildungen

Definition

$\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \in \mathcal{C}^\infty, \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger
$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}} \neq \mathcal{C}^\infty_0}$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$
Glättungskern $J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Es gelte

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\, \phi'(x)\, \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

u heißt schwache Ableitung von v, v heißt schwach differenzierbar

Beispiel

1. $u(x) = |x|$ schwach differenzierbar auf $(-1, 1)$
   $u'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$
2. Heaviside-Funktion auf $\Omega = (-1, 1)$
   $H\colon \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ ist nicht schwach differenzierbar

Eigenschaften:

- klassisch differenzierbar $\Rightarrow$ schwach differenzierbar
- schwache Ableitung ist eindeutig im L^1-Sinne
- übliche Eigenschaften (Linearitär,...) bleiben erhalten

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\,\phi(x)\;\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

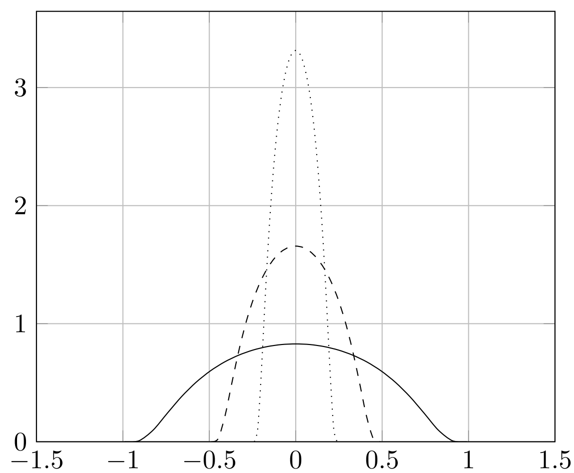
Definition

$J_\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, J_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & , x \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

$c_\epsilon := \left(\int_\epsilon^\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}$ J_ϵ ist der Standard-Glättungskern mit Träger $[-\epsilon, \epsilon]$

- $J_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$
- $\int_\mathbb{R} J_\epsilon(x)\;\mathrm{d}x = 1$
- $J_\epsilon(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow J_\epsilon$ ist Wahrscheinlichkeits-Dichte



DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 3: 25.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Definition

$u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R}$ außerhalb von Ω mit 0 fortgesetzt
$u_\epsilon := (J_\epsilon \star u)(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon (x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon (y)\, u(x-y)\, \mathrm{d}y$
heißt Glättung oder Regularisierung.

Eigenschaften
$u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall $, p \in [1, \infty)$

1. für $\epsilon > 0$ ist u_ϵ wohldefiniert
2. $u_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
3. $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega$ kompakt, ϵ klein genug $\Rightarrow u_\epsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$
4. $\|u_\epsilon\|_{0,p} \leq \|u\|_{0,p}$
5. $\|u - u_e\|_{0,p} \to 0$ für $\epsilon \to 0$
6. $u_e(x) \to u(x)$ fast überall
7. $u \in \mathcal{C}(\Omega) \Rightarrow \|u - u_\epsilon\|_\infty \to 0$ auf jeder kompakten Teilmenge

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

Beweis

Sei $K \subset \Omega$ beliebig und kompakt und $w = \operatorname{sgn}(u)\, \mathbb{1}_K$. Wäre $w \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$, dann würde gelten

$$0 = \int_\Omega uw = \int_\Omega |u| \Rightarrow u = 0.$$

Im Allgemeinen ist w jedoch nicht glatt und wir müssen den Übergang zu w_ϵ vollziehen. Wähle hierfür $\epsilon_0 < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Es gilt $w_\epsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ da $\operatorname{supp}(w)$ kompakt. Somit gilt

$$\int_\Omega u w_\epsilon = 0 \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$$

und somit $(uw_\epsilon)(x) \to |u(x)|$ fast überall.
Weiterhin gilt $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|u(x)\, w_\epsilon(x)| &= |u(x)| \left| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon (x-y)\, w(y)\, \mathrm{d}y \right| \\
&\leq |u(x)| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon (x-y) \underbrace{|w(y)|}_{\leq 1} \mathrm{d}y \\
&\leq |u(x)|
\end{aligned}$$

Somit hat $|u(x)|\mathbb{1}_{\text{supp}(w_{\epsilon_0})}$ kompakten Träger und ist Majorante für uw_ϵ. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} u(x)\, w_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\epsilon\to 0} u(x)\, w_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega |u(x)|\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Somit folgt $u = 0$ auf K. □

Beweis der Eigenschaften der Glättung

1. Übung
2. Übung
3. $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p \in [1,\infty], x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)^{\frac{1}{p}+1q} |u(y)|\, \mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}}_{=1} \left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\, |u(y)|^p\, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \|u_\epsilon\|_{0,p}^p &= \int_\Omega |u_\epsilon(x)|^p\, \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} |u_\epsilon(x)|^p\, \mathrm{d}x \\ &\le \int_R \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\, |u(y)|^p\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\, \mathrm{d}x}_{=1}\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p\, \mathrm{d}y = \int_\Omega |u(y)|^p\, \mathrm{d}y = \|u\|_{0,p}^p \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} |(u_\epsilon - u)(x)| &= |\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\, (u(x-y) - u(x))\, \mathrm{d}y| \\ &\le \dots \text{ Hölder } \dots \le \left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\, |u(x-y) - u(x)|^p\, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \|u_\epsilon - u\|_{0,p}^p &\le \int_\Omega \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y)\, |u(x-y) - u(x)|^p\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \int_\Omega |u(x-y) - u(x)|^p\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &\le \sup_{y\in[-\epsilon,\epsilon]} \int_\Omega |u(x-y) - u(x)|^p\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Die Behauptung folgt, da $\forall u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ gilt $\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{y\in[-\epsilon,\epsilon]} \int_\Omega |u(x-y) - u(x)|^p\, \mathrm{d}x = 0$
5. analog
6. $u \in \mathcal{C}(\Omega), K \subset \Omega$ kompakt. Wähle $\epsilon_0 < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$.
   $K_0 = [\inf K - \epsilon_0, \sup K + e_0]$ bleibt kompakt und somit u gleichmäßig stetig auf K_0.

$\Rightarrow \forall \epsilon < \min\{\delta, \epsilon_0\}, x \in K$ gilt

$$\begin{aligned} |u_e(x) - u(x)| &\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \underbrace{|u(x-y) - u(x)|}_{\leq \eta} \, \mathrm{d}y \\ &\leq \eta \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \, \mathrm{d}y = \eta \end{aligned}$$

$\square$

Korollar

$u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwach differenzierbar, v, w schwache Ableitungen von u. Dann gilt

$$v = w \text{ fast überall}$$

Satz

$\Omega = (a,b), u \in \mathrm{L}^1(\Omega), u' \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ schwache Ableitung von u
$\Rightarrow u$ auf $\overline{\Omega}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \|u\|_{1,1} = \frac{\max(1, b-a)}{b-a} (\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1})$$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 4: 26.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beweis

$$v(x) = \int_a^x u'(y)\, \mathrm{d}y$$

mit $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Somit ist v absolut stetig für klassisch differenzierbare u mit $u^{prime} = v'$

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x &= -\int_\Omega v'(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega u'(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Mit dem vorigen Korrolar erhält man somit

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon u(x) = v(x) + c \text{ fast überall in } \Omega$$

Mit dem Mittelwertsatz erhält man

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] = \overline{\Omega}\colon \int_a^b u(\xi)\, \mathrm{d}\xi = (b-a)\,u(x_0) \\ &\Rightarrow u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &\qquad = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^x u'(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &\Rightarrow \|u\|_\infty \leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a}\left(\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1}\right)\end{aligned}$$

□

- **Dieser Satz gilt nur im Eindimensionalen!**
- **Fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion $\neq$ Fast überall absolut stetig**

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), n \in \mathbb{N}, v n$-te schwache Ableitung von u

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^n \int_\Omega u(x)\phi^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$$

Im höherdimensionalen ist das Fehlen von Ableitungen niedrigerer Ordnung möglich.

Satz

$u \in \mathrm{L}^1(\Omega), n \in \mathbb{N}, \Omega = (a,b)$
$\exists n$-te schwache Ableitung $u^{(n)} \in \mathrm{L}^1(\Omega) \Rightarrow \exists k$-te schwache Ableitung für $k = 1, \ldots, n-1$ und $u^{(k)}$ ist

fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.

Beweis

$v_{n-1}(x) = \int_a^x u^{(n)}(y)\,\mathrm{d}y$ und somit ist v_{n-1} absolut stetig und damit $v_{n-1}' = u^{(n)}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.
Rekursiv erhält man $v_{k-1}(x) = \int_a^x v_k(y)\,\mathrm{d}y \Rightarrow v_{k-1}$ absolut stetig und somit $v_{k-1}' = v_k$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.
Und somit:

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_a^b u(x)\,\phi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b u^{(n)}(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b v_{n-1}'(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cdots = (-1)^n \int_a^b v_0(x)\,\phi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Außerdem lässt sich das Korollar verallgemeinern

$$\int_\Omega w\phi^{(n)}\,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \Rightarrow w(x) = p(x) \text{ fast überall }, p \in \mathrm{P}_{n-1}[x]$$

Und somit $u(x) = v_0(x) + p(x)$ ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion. Da u' existiert (im klassischen Sinne falls $n \geq 2$) ist u' absolut stetig. Diese Erkenntnis kann iteriert werden. □

2 Die Sobolew-Räume $\mathrm{H}^1(\Omega), \mathrm{H}_0^1(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

Definition

$$W^{k,p}(\Omega) := \left(u \in \mathrm{L}^p \colon \exists u^{(k)} \in \mathrm{L}^p\right)$$

ist mit

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_{0,p}^p\right)^{1/p}$$

ein Banachraum, genannt Sobolewraum.

Definition

$$W^{1,2}(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega)$$

ist ein Hilbertraum.

Satz

$$\|u\|_{1,2} = (u,u)_{1,2}^{1/2}$$

mit

$$(u,v)_{1,2} = (u,v)_{0,2} + (u',v')_{0,2} = \int uv + u'v'\,\mathrm{d}x$$

definiert eine Norm, bzw ein Skalarprodukt. $\left(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}, (\cdot,\cdot)_{1,2}\right)$ ist ein separabler Hilbertraum.

Beweis

Vollständigkeit

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H^1. Es gilt also:

$$\begin{aligned} u_n &\to u \\ u_n' &\to v \end{aligned}$$

in L^2. Da Ω beschränkt ist gilt:

$$\|u_n - u\|_{0,1} = \int_\Omega |u_n - u| \,\mathrm{d}x = \int_W 1|u_n - u| \,\mathrm{d}x \overset{\text{C-S}}{\leq} \int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x \|u_n - u\|_{0,2}$$

Mit einer Hausaufgabe folgt, dass u schwach differenzierbar ist und $u' = v$. Somit ist $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Separabilität

Sei $X = \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega), T\colon \mathrm{H}^1(\Omega) \to X, u \mapsto Tu = (u, u')$.

T ist wohldefiniert, linear und isometrisch. Also ist T injektiv. Somit ergibt sich, dass $T\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right) \subset X$ ein Unterraum ist. Also $H^1(\Omega) \cong T\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right)$. Es folgt somit aus $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vollständig, dass $T\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right)$ abgeschlossen in X ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ separabel } &\Rightarrow X \text{ separabel} \\ &\Rightarrow T\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right) \text{ separabel, da abgeschlossen} \\ &\Rightarrow \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ separabel} \end{aligned}$$

$\square$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 5: 02.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Definition

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ seien Banachräume. Eine lineare, injektive Abbildung

$$j\colon X \to Y$$

wird **Einbettung** genannt. X kann also mit $j(X)$ identifiziert werden.

- Ist j stetig, so sagt man, X ist stetig in Y eingebettet ($X \hookrightarrow Y$).
- Ist j kompakt, so sagt man, X ist kompakt in Y eingebettet ($X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$)
- Ist $j(X)$ dicht in Y und $X \hookrightarrow Y$, so sagt man, X ist dicht in Y eingebettet ($X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$)

Satz

$u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.
$\mathrm{H}^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$

Beweis

Mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir $\mathrm{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^1(\Omega)$ und somit $\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$ und somit die erste Aussage.
Sei $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty &\leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b |u(\xi)| \,\mathrm{d}\xi + \int_a^b |u'(\xi)| \,\mathrm{d}\xi \right) \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b 1 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \left(\int_a^b (|u(\xi)| + |u'(\xi)|)^2 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2} \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b 1 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \left(\int_a^b |u(\xi)|^2 + |u'(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2} \frac{\max(1, b-a)}{\sqrt{b-a}} \|u\|_{1,2}
\end{aligned}$$

und somit haben wir $\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$.
Sei $(u_n) \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$ eine bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ beschränkte Folge. Dann ist (u_n) auch bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt. Mit

$$\begin{aligned}
|u_n(x_1) - u_n(x_2)| &= \int_{\min}^{\max} u_n'(\xi) \,\mathrm{d}\xi \\
&< \sqrt{|x_1 - x_2|} \underbrace{\left(\int_\Omega |u_n'(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2}}_{\leq \|u\|_{1,2} \leq M}
\end{aligned}$$

erhalten wir, dass (u_n) gleichgradig stetig ist. Wir erhalten mit Arzela-Ascoli, dass (u_n) kompakt ist und $\mathrm{H}^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ □

Satz

$C^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $H^1(\Omega)$.

Lemma

$u \in \mathrm{H}^1(\Omega), 0 < \epsilon_0 < \frac{b-a}{2}$.
$\Rightarrow u_\epsilon = J_e \star u \overset{\epsilon\to 0}{\to} u$ bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ auf $(a-\epsilon, b+\epsilon)$.

Beweis

$x \in (a+\epsilon_0, b-\epsilon_0), \epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Es sei $\phi\colon y \mapsto J_\epsilon(x-y) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\operatorname{supp}(\phi) = [x-\epsilon, x+\epsilon] \subset (a,b)$$

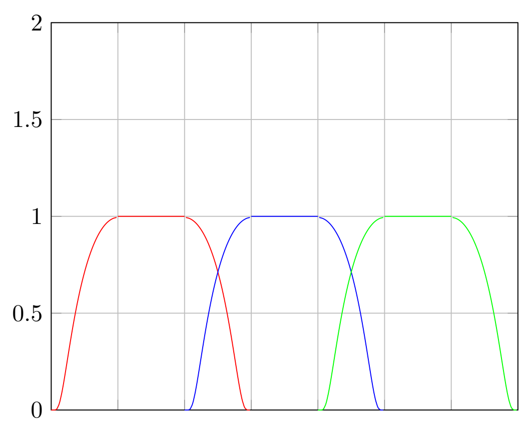
und somit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Es folgt also $\forall x \in (a+\epsilon_0, b-\epsilon_0), \epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$\begin{aligned}(u')_\epsilon(x) &= \int_\Omega J_\epsilon(x-y)\, u'(y)\, \mathrm{d}y \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y} J_\epsilon(x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Kette}}{=} (-1)^2 \int_\Omega J'_\epsilon(x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Majorante}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \int_\Omega J_\epsilon(x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y = (u_\epsilon)'(x)\end{aligned}$$

Somit folgt $u_\epsilon \to u$ und $(u')_\epsilon \to u'$ in $\mathrm{L}^2(a+\epsilon_0, b-\epsilon_0)$. □

Beweis des Satzes

1. Seien I_1, I_2, I_3 offene Intervalle mit $\bigcup_{i=1}^3 I_i \supset [a,b]$, $a \in I_1, b \in I_3$, $I_2 \subset [a,b]$, $I_1 \cap I_3 = \emptyset$
2. <u>Partition der Eins</u>
   $\Psi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $i = 1,2,3$
   $\operatorname{supp}(\Psi_i) \subset I_i$, $\sum_{i=1}^3 \Psi_i(x) = 1 \forall x \in [a,b]$
3. $u_i := u\Psi_i \Rightarrow u = \sum_{i=1}^3 u_i$ in $[a,b]$.
   Es gilt $u_i' = u\Psi_i' + u'\Psi_i$ und somit $u' \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $u_i \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.
   Wir definieren nun $v_1 := u_1(x+\delta)$ für $\delta \in (0, \epsilon_0)$. Da $b \notin \operatorname{supp}(u_1)$ gilt
   $$v_1 \in \mathrm{H}^1(a-\delta, b+\delta)$$
   und somit
   $$\forall \eta > 0 \exists \delta_0 \leq \delta\colon \|v_{1,\epsilon} - v_1\|_{1,2} < \eta \forall \epsilon \in (0, \delta_0)$$



DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 6: 03.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beweis Fortsetzung

4. Stetigkeit im L^2-Mittel $\Rightarrow \forall \eta > 0 \exists \epsilon_\eta \in (0,\delta) : \forall \epsilon \in (0,\epsilon_\eta) : \|v_{1,\epsilon_\eta} - v_1\|_{1,2} < \eta$ in $\mathrm{H}^1(a,b)$.
5. Zusammen ergibt sich für δ, ϵ hinreichend klein:

$$\|v_{1,\epsilon} - u_1\| \leq \|v_{1,\epsilon} - v_1\|_{1,2} + \|v_1 - u_1\|_{1,2} < 2\eta$$

6. u_3 wird analog approximiert, u_2 kann direkt geglättet werden
7. $v_\epsilon := (v_{1,\epsilon} + v_{2,\epsilon} + v_{3,\epsilon})\big|_{[a,b]} \in \mathcal{C}^\infty[a,b]$ mit

$$\|v_\epsilon - u\|_{1,2} \leq \sum_{i=1}^{3} \|v_{i,\epsilon} - u_i\|_{1,2} < 6\eta$$

$\square$

Produktregel

$u \in \mathrm{H}^1(\Omega), \Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u\Psi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ und $(u\Psi)' = u'\Psi + u\Psi'$

Beweis

$\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u\Psi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $u'\Psi + u\Psi' \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Für $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\Psi\phi' \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega u\left[(\Psi\phi)' - \Psi'\phi\right] \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega u'(\Psi\phi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u\Psi'\phi\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega (u'\Psi - u\Psi')\,\phi\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Zusammen folgt, dass $u\Psi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. $\square$

Satz von Rellich

Es gilt

$$\mathrm{H}^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^2(\Omega)$$

Beweis

Es gilt $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$, da

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,2}^2 &= \int_\Omega |v(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \|v\|_\infty^2 \int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x \\ &= \|v\|_\infty^2 (b-a) \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathrm{H}^1(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$$

$\square$

- $\mathcal{C}^k(\Omega), k \geq 1$ auch dicht in $\mathrm{H}^1(\Omega)$
- $\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$ **nicht** dicht in $\mathrm{H}^1(\Omega)$

Definition

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)}$$

wobei der Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ gebildet wird.
Es gilt $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \subsetneq \mathrm{H}^1(\Omega)$
Sei $(\phi_n) \subset \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ mit $\|\phi_n - u\|_{1,2} \to 0$ für ein $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Dann hat u einen absolut stetigen Repräsentanten und es gilt $\|\phi_n - u\|_\infty \to 0$ und somit $u(a) = \lim \phi_n(a) = 0$ und analog $u(b) = 0$.

Charakterisierung von $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \left\{u \in \mathrm{H}^1(\Omega) : u(a) = u(b) = 0\right\}$$

Poincare-Friedrichs-Ungleichung

Sei $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Dann gilt $\|u\|_{0,2} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|u'\|_{0,2}$.

Die Aussage gilt nicht für $H^1(\Omega)$!

Beweis

$$u(x) = \underbrace{u(a)}_{=0} + \int_a^x u'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \Rightarrow |u(x)| \leq \int_a^x |u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u\|_{0,2}^2 &\leq \int_\Omega \left(\int_a^x 1|u'(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega \left(\int_a^x 1\,\mathrm{d}\xi \int_a^x |u'(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega (x-a)\,\mathrm{d}x \int_a^b |u'(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^2 \|u'\|_{0,2}^2 \end{aligned}$$

□

- Die Konstante kann auf $\frac{b-a}{\pi}$ verbessert werden.
- $\|\cdot\|_{1,2}$ und $|\cdot|_{1,2} := \|u'\|_{0,2}$ sind äquivalent auf $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.
- Auf $\mathrm{H}^1(\Omega)$ ist $|\cdot|_{1,2}$ nur eine Halbnorm, da sie Konstanten übersieht.

Satz

$\left(\mathrm{H}_0^1(\Omega), |\cdot|_{1,2}, [u,v]_{1,2} := \int_\Omega u'(\xi)\, v'(\xi)\, \mathrm{d}\xi = (u', v')_{0,2}\right)$ ist ein separabler Hilbertraum.
Es gilt $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Satz

$\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ liegt dicht in $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Dies folgt aus $\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ dicht in $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

$$\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)$$

Definition

$$\mathrm{H}^{-1}(\Omega) := \left(\mathrm{H}_0^1(\Omega)\right)'$$

- $\mathrm{H}^{-1}(\Omega) \simeq \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ mit dem Riesz'schen Darstellungssatz
- Gelfand-Tripel: $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^2(\Omega) \simeq \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)' \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

Satz

$$\|f\|_{-1,2} := \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle f, v\rangle|}{|v|_{1,2}}$$

definiert eine Norm auf $H^{-1}(\Omega)$. $\left(\mathrm{H}^{-1}(\Omega), \|\cdot\|_{-1,2}\right)$ bildet einen reflexiven Banachraum.

$$L^2(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$$

oder

$$\forall f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)\, \exists u_f \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \langle f, v\rangle = \int_\Omega u_f v'\, \mathrm{d}x \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 7: 09.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beweis der Charakterisierung von $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

Eine Richtung wurde in der Definition schon skizziert.
Sei $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ mit $u(a) = u(b) = 0$. Weiterhin sei $\delta \in \left(0, \frac{b-a}{5}\right)$. Wähle nun $\Psi_\delta \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ so, dass

1. $0 \leq \Psi_\delta \leq 1$ in Ω
2. $|\Psi_\delta'| \leq \frac{c}{\delta}$ für $c > 0$
3. $\Psi_\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [a, a+\delta] \cup [b-\delta, b] \\ 1 & , x \in [a+2\delta, b-2\delta] \end{cases}$

So ein Ψ_δ existiert, z.B. $\Psi_\delta(x) = \int_{a+\delta}^x J_{\delta/2}\left(y - \left(a + \frac{3}{2}\delta\right)\right) \,\mathrm{d}y$ auf $[a+\delta, a+2\delta]$.
Setze nun

$$
\begin{aligned}
v := u\Psi_\delta &\Rightarrow \operatorname{supp}(v) \subset [a+\delta, b-\delta] \\
&\Rightarrow v \in \mathrm{H}^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

Setzt man nun v außerhalb von Ω konstant 0 fort, so erhält man sogar $v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$.
TODO □

3 Variationelle Formulierung von Randwertproblemen und abstrakte Operatorgleichungen

Gegeben ist das Randwertproblem

$$
(P_\mathrm{Dir}) \begin{cases} \text{Finde } u \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \cup \mathcal{C}^2(\Omega) \\ -u''(x) + c(x)\,u'(x) + d(x)\,u(x) = f(x) \text{ in } \Omega \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}
$$

Zur Überführung von P_Dir in eine variationelle (schwache) Formulierung führen wir folgende Schritte durch

1. Multiplikation der DGL mit hinreichend glatter Testfunktion v
2. Integration des Produkts über Ω
3. Term zweiter Ordnung einmal partiell integrieren
4. Ableitungen im schwachen Sinne interpretieren

Es ergibt sich

$$
(V_\mathrm{Dir}) = \begin{cases} \text{Finde } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \text{(Ansatzraum)} \\ \int_\Omega \left(u'v' + cu'v + duv\right) \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \text{(Testraum)} \end{cases}
$$

Für eine sinnvolle Definition ist nötig $c, d \in \mathrm{L}^\infty(\Omega), f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Definition

Die Lösung $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ des variationellen Problems V_Dir wird **schwache Lösung** von P_Dir genannt.

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 8: 10.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Randbedingungen

1. Dirichlet: $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$
2. Neumann: $u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta$
3. Robin: $c_a u(a) + u'(a) = \alpha, c_b u(b) + u'(b) = \beta$
4. periodisch: $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$

Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen führen zu Problemen, da die Lösung $u \notin \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Es wird ein neuer Ansatzraum kreiert

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{\alpha,\beta}(\Omega) &:= \left\{u \in \mathrm{H}^1(\Omega) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\right\} \\ &= g + \mathrm{H}_0^1(\Omega), g \in \mathrm{H}^1(\Omega) : g(a) = \alpha, g(b) = \beta\end{aligned}$$

Es ergibt sich somit ein erstes variationelles Problem

$$(V_1) = \begin{cases}\text{Finde } u \in \mathrm{H}_{\alpha,\beta} \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle \,\forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\end{cases}$$

oder die alternative Form

$$(V_2) = \begin{cases}\text{Finde } u_0 \in \mathrm{H}_0^1 \\ a(u_0,v) = \langle f, v\rangle - a(g,v) = \left\langle \tilde{f}, v\right\rangle \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\end{cases}$$

Die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen werden auch wesentliche Randbedingungen genannt, da sie die Wahl des Ansatzraums beeinflussen.

Bei Neumann-Randbedingungen ergibt sich als Ansatz- und Testraum der Raum $H^1(\Omega)$. Betrachte das Problem

$$(P_{\text{Neu}}) \begin{cases}\text{Finde } u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \\ -u''(x) = f(x) \,\forall x \in \Omega \\ u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta\end{cases}$$

Dieses Problem ist klassisch nicht eindeutig lösbar sondern nur bis auf eine Konstante. Es ist also eine weitere Bedingung ($\int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0$)nötig. Die Überführung in die variationelle Formulierung ergibt das Problem

$$(V_{\text{Neu}}) \begin{cases}\text{Finde } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \\ a(u,v) = \int_\Omega u'(x)\, v'(x) \,\mathrm{d}x = (\alpha v(a) - \beta v(b)) + (f,v)_{0,2} \,\forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)\end{cases}$$

Die Neumann-Randbedingungen werden auch natürliche Randbedingungen genannt, da sie den größtmöglichen Ansatzraum $H^1(\Omega)$ erlauben.

Insgesamt ergibt sich das abstrakte variationelle Problem

$$(V) \begin{cases}\text{Finde } u \in V \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle \,\forall v \in V\end{cases}$$

Hierbei ist

– $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reeller Banachraum

- $a \colon V \times V \to \mathbb{R}$ linear und beschränkt im zweiten Argument ($a(u,\cdot) \in V'$)
- $A \colon V \to V', u \mapsto a(u,\cdot)$ der zu a assoziierte Operator

Es ergibt sich somit das Operator-Problem

$$(O) \begin{cases} \text{Finde } u \in V \text{ zu } f \in V' \\ A[u] = f \end{cases}$$

Lemma

(V) und (O) sind äquivalent.

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 9: 16.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

4 Lineare Variationsprobleme mit stark positiver Bilinearform

Definition

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reeller Banachraum, $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $A\colon V \to V'$ der assoziierte Operator.

- a ist **bilinear**, wenn es linear in beiden Eingängen ist.
- a bzw A ist **symmetrisch**, wenn gilt $a(v,u) = a(u,v)$ bzw $\langle Av, u\rangle = \langle Au, v\rangle$.
- a bzw A ist **positiv**, wenn gilt $a(u,u) \geq 0$ bzw $\langle Au, u\rangle \geq 0$
- a bzw A ist **stark positiv**, wenn gilt $a(u,u) > 0$ bzw $\langle Au, u\rangle > 0$
- a ist **beschränkt**, wenn gilt: $\exists \beta > 0\colon |a(u,v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V$
- A ist **beschränkt**, wenn es beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.

Lemma

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reeller Banachraum, $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ und $A\colon V \to V'$ der assoziierte Operator. Es gilt

- A linear $\Leftrightarrow$ a bilinear
- A symmetrisch $\Leftrightarrow$ a symmetrisch
- Sei a bilinear. A beschränkt $\Leftrightarrow$ a beschränkt
- A stark positiv $\Leftrightarrow$ a stark positiv

Definition

Sei $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, stark positive Bilinearform, V Hilbertraum, $f \in V'$.

$$\begin{aligned} J\colon V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto J[v] := \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v\rangle \end{aligned}$$

heißt **Energiefunktional**.

Satz von Lax-Milgram

Sei $(V, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|_V)$ ein reeller Hilbertraum, $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, stark positive Bilinearform. Dann besitzt das Variationsproblem (V) für alle $f \in V'$ eine eindeutige Lösung.
Es wird keine Symmetrie von a gefordert.

Beweis

1. Da a beschränkt ist, ist $A\colon V \to V'$ ein lineares, stark positives Funktional.
2. Mit dem Rieszschen Darstellungssatz gilt $V \simeq V'$ mit $I\colon V' \to V$.
3. Sei $u_0 \in V, \tau \in (0, \infty)$ beliebig. Wir definieren die Folge

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau I\left(f - Au^{(n)}\right) = \Phi\left(u^{(n)}\right)$$

4. $\Phi(u) = u \Leftrightarrow u = u + \tau I (f - Au)$
5. Seien $v, w \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_V^2 &= \|v - w - \tau IA(v-w)\|_V^2 \\
&= \|v-w\|_V^2 - 2\tau\,(v-w, IA(v-w))_V + \tau^2 \|IA(v-w)\|_V^2 \\
&= \|v-w\|_V^2 - 2\tau\,\langle A(v-w), v-w\rangle + \tau^2 \|A(v-w)\|_V^2 \\
&\leq \|v-w\|_V^2 - 2\tau\,\underbrace{a(v-w, v-w)}_{\geq \mu\|v-w\|_V^2} + \tau^2\beta^2 \|v-w\|_V^2 \\
&\leq \left(1 - 2\tau\mu + \tau^2\beta^2\right) \|v-w\|_V^2
\end{aligned}$$

Für $\tau \in \left(0, \frac{2\mu}{\beta^2}\right)$ gilt Φ ist eine Kontraktion und besitzt somit mit dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt.

$\square$

Korollar

Unter den Voraussetzungen von Lax-Milgram gilt:

$$A \text{ bijektiv} \Leftrightarrow A^{-1} \colon V' \to V \text{ linear, beschränkt und stark positiv}$$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 10: 17.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beispiel

Das klassische Problem

$$(P_2)\begin{cases}-u''(x)=\delta_0(x) \text{ in } \Omega=(-1,1)\\ u(-1)=u(1)=0\end{cases}$$

ergibt das variationelle Problem

$$(V_2)\begin{cases}\text{Finde } u\in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\\ \int_{-1}^1 u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x=v(0)\,\forall v\in \mathrm{H}^1_0\end{cases}$$

Hierbei ist $a(u,v)=\int_{-1}^1 u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$ ein inneres Produkt und erfüllt somit die Voraussetzungen von Lax-Milgram an a. Außerdem gilt $|v(0)|\le \|v\|_\infty \le c\|v\|_{1,2}$ und somit ist die rechte Seite stetig. Somit sind alle Voraussetzungen von Lax-Milgram erfüllt und es existiert eine eindeutige Lösung von (V_2).

Beispiel

$$(P_3)\begin{cases}-u''(x)-u(x)=f(x) \text{ in } \Omega=(0,\pi)\\ u(-1)=u(\pi)=0\end{cases}$$

mit $f\in \mathrm{H}^{-1}$ beliebig.

$$(V_3)\begin{cases}\text{Finde } u\in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\\ \int_0^\pi u'(x)\,v'(x)-u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x=\langle f,v\rangle\,\forall v\in \mathrm{H}^1_0\end{cases}$$

Hierbei ist a bilinear und beschränkt. Es gilt jedoch für $v(x)=\sin(x)$

$$a(v,v)=\int_0^\pi \cos^2(x)-\sin^2(x)\,\mathrm{d}x=0$$

Somit ist a nicht stark positiv und der Satz von Lax-Milgram nicht anwendbar.
In der Tat gibt es für $f\equiv 1$ keine schwache Lösung und für $f\equiv 0$ existieren unendlich viele Lösungen.

Korollar

Sei $V=\mathrm{H}^1_0(\Omega), f\in \mathrm{H}^{-1}(\Omega), c,c',d\in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ und $\underline{d}$: $d(x)-\frac{1}{2}c'(x)\ge \underline{d}>-\frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ fast überall. Dann besitzt (P_{Dir}) genau eine schwache Lösung $u\in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

Regularitätsfrage für Randwertprobleme

Unter Voraussetzungen des obigen Korollars und der zusätzlichen Annahme $c,d\in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega)$ für ein

$k \in \mathbb{N}$, $f, f', \ldots, f^{(k-1)} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ ergibt sich, für die schwache Lösung $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^{k+1}(\Omega)$ und

$$\exists C \in (0, \infty) : \|u\|_{\mathrm{H}^{k+1}(\Omega)} \leq C\|f\|_{\mathrm{H}^{k-1}(\Omega)}$$

Beweis

<u>Beweis für den Fall $k = 1$</u> Definiere

$$w := -(f - cu' - du) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$$

Weiterhin sei $\psi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} a(u, \phi) &= \int_\Omega (u'\phi' + cu'\phi + du\phi)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\phi\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \int_\Omega u'\phi'\,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega -(f\phi - cu'\phi - du\phi)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega -\underbrace{(f - cu' - du)}_{=w}\phi\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

und somit $u \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.
Weiterhin

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u''|^2\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |w|^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq C\left(\|f\|_{0,2}^2 + \|c\|_\infty^2 |u|_{1,2}^2 + \|d\|_\infty^2 \|u\|_{0,2}^2\right) \\ &\leq C\left(\|f\|_{0,2}^2 + \left(\|c\|_\infty^2 + \|d\|_\infty^2 \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right)|u|_{1,2}^2\right) \end{aligned}$$

und mit $u = A^{-1}f$ und $\|A^{-1}\|_{L\left(\mathrm{H}^{-1}, \mathrm{H}_0^1\right)} < \infty$ ergibt sich

$$|u|_{1,2} \leq |A^{-1}f| \leq \|A^{-1}\|\|f\|_{0,2}$$

□

Korollar

Unter den Voraussetzungen des Regularitätssatzes und der zusätzlichen Annahme $f \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $k = 1$ gilt, dass u eine Lösung im klassischen Sinne ist.

Beweis

Sei $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$. Dann besitzt $u' \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ einen stetigen Repräsentanten.
Setze $w = -(f - cu' - du) \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$. Betrachten wir nun das Problem

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = w \\ \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0 \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{u} = u$ fast überall. □

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 11: 23.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Es stellt sich die Frage, ob der Satz von Lax-Milgram auch auf Banachräume anwendbar ist. Hierbei unterscheiden wir 2 Fälle.

1. a ist symmetrisch.
   Dann ist a ein Skalarprodukt. Nun führen wir über das Skalarprodukt eine Norm ein und erhalten, dass diese äquivalent zur Energienorm ist. Betrachte nun den Raum $(V, \|\cdot\|_a, a(\cdot,\cdot))$. Dieser ist ein Hilbertraum und wir können Lax-Milgram anwenden.
2. a allgemein.
   Hierbei betrachten wir den symmetrischen Anteil $\tilde{a}(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) + a(v,u))$. Dann ist $\tilde{a}$ symmetrisch, bilinear, beschränkt und stark positiv. Somit ist $\tilde{a}$ ein Skalarprodukt und wir können wie im obigen Fall weiter machen.

Somit kann nicht auf jeden Banachraum der Satz von Lax-Milgram angewendet werden. Zusätzliche Anforderungen an a geben die benötigte Struktur.

5 Nicht-lineare Variationsprobleme mit stark monotonen Operatoren

Betrachte das Problem

$$(P_{\text{Mon}}) \begin{cases} -\left(\Psi\left(|u'(x)|\right)u'(x)\right)' + c(x)\,u'(x) + d(x)\,u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega = (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

mit $-\left(\Psi\left(|u'(x)|\right)u'(x)\right)'$ nicht-linear (genauer: quasi-linear). An $\Psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig haben wir folgende Anforderungen

1. $|\Psi(t)| \leq M \forall t \geq 0$
2. $|\Psi(t)\,t - \Psi(s)\,s| \leq M|t-s| \forall t, s \in [0,\infty)$
3. $\Psi(t)\,t - \Psi(s)\,s \geq m(t-s)$ für $t \geq s \geq 0$
   $\Rightarrow \Psi(t) \geq m \forall t \in [0,\infty)$

Diese Modelle werden beispielsweise in der nichtlinearen Elastizitätstheorie angewandt.

Definition

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reeller Banachraum und $A\colon V \to V'$ **Lipschitz-stetig**, dh

$$\|A[u] - A[v]\|_{V'} \leq \beta\|u-v\|_V \text{ für ein } \beta \in (0,\infty)$$

- A heißt **monoton** $\Leftrightarrow \langle A[u] - A[v], u - v\rangle \geq 0$
- A heißt **stark monoton** $\Leftrightarrow \exists \mu \in (0,\infty)\colon \langle A[u] - A[v], u-v\rangle \geq \mu\|u-v\|_V^2$

Satz von Zarantonello

Sei $(V, \|\cdot\|_V, (\cdot,\cdot)_V)$ ein reeller Hilbertraum, $A\colon V \to V'$ Lipschitz-stetig und stark monoton. Dann hat für jedes $f \in V'$ das Problem $A[u] = f$ eine eindeutige Lösung.

Beweis

Der Beweis folgt in den Schritten 1. bis 4. analog dem Beweis von Lax-Milgram.

5.

$$\begin{aligned}\|\Psi(v)-\Psi(w)\|_V^2 &= \|v-w\|_V^2 - 2\tau\left(I\left(A[v]-A[w]\right), v-w\right) + \tau^2 \|I\left(A[v]-A[w]\right)\|_V^2 \\ &= \|v-w\|_V^2 - 2\tau\left\langle A[v]-A[w], v-w\right\rangle + \tau^2\|A[v]-A[w]\|_{V'}^2 \\ &\overset{\text{Monoton}}{\leq} \left(1-2\tau\mu+\tau^2\beta^2\right)\|v-w\|_V^2\end{aligned}$$

□

Hiermit ist auch gezeigt, dass $A^{-1}\colon V' \to V$ existiert. Weiterhin kann gezeigt werden, dass A^{-1} Lipschitz-stetig und stark monoton ist.

Korollar

Sei $V = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $f \in V', c, c', d \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ und für ein $\underline{d} \in \mathbb{R}$ gilt

$$d(x) - \frac{1}{2}c'(x) \geq \underline{d} \geq -\frac{m\pi^2}{(b-a)^2} \text{ fast überall in } \Omega$$

Dann besitzt das Problem $A[u] = f$ genau eine Lösung, wenn Ψ die Eigenschaften vom Anfang der Vorlesung erfüllt.

Beweis

Wir zeigen, dass unter den Voraussetzungen A stark monoton und Lipschitz-stetig ist.

Seien $c \equiv d \equiv 0$. Ansonsten folge dem linearen Fall.

Lipschitz-Stetigkeit

Seien $u, v, w \in V$.

$$\begin{aligned}|\langle A[u]-A[v], w\rangle| &= |a(u,w)-a(v,w)| \\ &= \left|\int_\Omega \left(\Psi(|u'|)\,u - \Psi(|v'|)\,v\right) w \,\mathrm{d}x\right| \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \left(\int_\Omega |\Psi(|u'|)\,u' - \Psi(|v'|)\,v'|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + |w|_{1,2}\end{aligned}$$

Aus Voraussetzung 2. vom Anfang der Vorlesung folgt $\forall x \in \Omega\colon u'(x)\,v'(x) \geq 0$

$$|\Psi(|u'(x)|)\,u'(x) - \Psi(|v'(x)|)\,v'(x)| \leq M|u'(x)-v'(x)|$$

und $\forall x \in \Omega\colon u'(x) \geq 0, v'(x) < 0$ folgt

$$\begin{aligned}|\Psi(|u'(x)|)\,u'(x) - \Psi(|v'(x)|)\,v'(x)| &\leq |\Psi(|u'(x)|)\,u'(x)| + |\Psi(|v'(x)|)\,v'(x)| \\ &\leq \underbrace{\Psi(|u'(x)|)}_{\leq M} u'(x) + \underbrace{\Psi(|v'(x)|)}_{\leq M}|v'(x)| \\ &\leq M\left(u'(x) - |v'(x)|\right) \leq M\left(u'(x)-v'(x)\right) = M|u'(x)-v'(x)|\end{aligned}$$

Der Fall $u'(x) < 0, v'(x) \geq 0$ folgt analog.

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 12: 24.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beweis Fortsetzung

starke Monotonie
Betrachte

$$\langle A[u] - A[v], u - v\rangle = \int_\Omega \left(\Psi(|u'|)\, u' - \Psi(|v'|)\, v'\right)(u' - v')\, \mathrm{d}x$$

Wir unterscheiden die Fälle

1. $x \in \Omega\colon u'(x) \geq v'(x) \geq 0$: Mit Eigenschaft 3. folgt

$$\left(\Psi(|u'(x)|)\, u'(x) - \Psi(|v'(x)|)\, v'(x)\right)(u'(x) - v'(x)) \geq m\,(u'(x) - v'(x))^2$$

2. $x \in \Omega\colon v'(x) \geq u'(x) \geq 0$ folgt analog mit vertauschten Rollen
3. $x \in \Omega\colon v'(x) \leq u'(x) \leq 0$ und $x \in \Omega\colon u'(x) \leq v'(x) \leq 0$ folgen analog
4. $x \in \Omega\colon v'(x) \leq 0 \leq u'(x)$

$$\begin{aligned} &\left(\Psi(|u'(x)|)\, u'(x) - \Psi(|v'(x)|)\, v'(x)\right)(u'(x) - v'(x)) \\ =&\underbrace{\Psi(-u'(x))}_{\geq m}\underbrace{u'(x)}_{}\leq 0\,\underbrace{(u'(x) - v(x))}_{\leq 0} - \underbrace{\Psi(-v'(x))}_{\geq m}\underbrace{v'(x)}_{}\geq 0\,\underbrace{(u'(x) - v(x))}_{\geq 0} \\ \geq& m\,(u'(x) - v'(x))^2 \end{aligned}$$

5. $x \in \Omega\colon u'(x) \leq 0 \leq v'(x)$ analog zu 4.

Somit ist Ψ stark monoton. $\square$

Für nichtlineare Probleme ist kein allgemein gültiger Regularitätssatz bekannt.

Eindeutigkeit

$A\colon V \to V'$ stark monoton $\Rightarrow$ A injektiv.

Beweis

Seien $v_1, v_2 \in V\colon A[v_1] = A[v_2]$. Dann gilt

$$0 = \langle A[v_1] - A[v_2], v_1 - v_2\rangle \geq \mu \|v_1 - v_2\|^2$$

Somit folgt $v_1 = v_2$. $\square$

6 Galerkin-Verfahren und FEM

Definition

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reeller Banachraum und $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von endlichdimensionalen Teilräumen.

(V_m) heißt **Galerkin-Schema**, falls $\lim_{m\to\infty} \mathrm{d}(v, V_m) = 0 \forall v \in V$. Diese Eigenschaft wird **limitierte Vollständigkeit** genannt.

Definition

Sei $(\phi_j)_{j\in I} \subset V$, $I \subset \mathbb{N}$ mit
- je endlich viele Elemente von (ϕ_j) sind linear unabhängig
- $V_m := \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}, m \in I$, ist ein Galerkin-Schema

Dann wird (ϕ_j) **Galerkin-Basis** von V genannt.

Lemma

Sei V ein reeller, separabler Banachraum. Dann besitzt V eine Galerkin-Basis.

Beweis

1. $\dim V < \infty$: Dann ist jede Basis von V eine Galerkin-Basis.
2. $\dim V = \infty$: Da V separabel ist existiert eine dichte Teilmenge $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$.
   Setze nun
$$\begin{aligned} \phi_1 &:= \psi_1 & V_1 &= \operatorname{span}\{\phi_1\} \\ \phi_m &:= \psi_{j(m)} & j(m) &= \min\{j \in \mathbb{N}\colon \psi_j \notin V_{m-1}\} \end{aligned}$$
   und es folgt
$$(\psi_j)_{j=1}^{j(m)} \subset V_m = \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$$
   und somit auch
$$(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m \Rightarrow \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m} = V$$
   Also gilt: $\forall \epsilon > 0, v \in V \exists \tilde{v} \in \bigcup_{m=1}^{\infty}\colon \|v - \tilde{v}\|_V < \epsilon$ und $\exists m \in \mathbb{N}\colon \tilde{v} \in V_m \subset V_{\tilde{m}} \forall \tilde{m} \geq m$.
   Zusammen erhält man
$$\mathrm{d}(v, V_{\tilde{m}}) = \inf_{w\in V_{\tilde{m}}} \|v - w\|_V \leq \|v - \tilde{v}\|_V < \epsilon \forall \tilde{m} \geq m$$

□

Betrachtet man das Problem
$$(V) \begin{cases} \text{Finde } u \in V \text{ mit} \\ a(u, v) = \langle f, v\rangle \, \forall v \in V \end{cases}$$
mit a wie in Kapitel 4. oder 5. Dann können wir (V) mit einer Galerkin Dimensionsreduzierung in das Ersatzproblem
$$(V_m) \begin{cases} \text{Finde } u_m \in V_m \text{ mit} \\ a(u_m, v_m) = \langle f, v_m\rangle \, \forall v_m \in V_m \end{cases}$$
überführen.

1. <u>Lösbarkeit</u>
   Da V_m ein Teilraum von V ist, ist V_m abgeschlossen und somit ein Banachraum. Demzufolge sind Lax-Milgram oder Zarantonello anwendbar um die Lösbarkeit zu erhalten.

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 13: 30.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

2. zugehörige Operatorgleichung
$A_m\colon V_m \to V_m'$ wird analog zu Kapitel 4. und 5. definiert. Es ergibt sich

$$(V_m)\begin{cases}\text{Finde } u_m \in V_m \text{ mit}\\ a\left(u_m, v_m\right) = \langle f, v_m\rangle\end{cases} \Leftrightarrow (O_m)\begin{cases}\text{Finde } u_m \in V_m \text{ mit}\\ A_m\left[u_m\right] = \langle f, \cdot\rangle\end{cases}$$

Nun definieren wir uns die Operatoren

$$p_m\colon V_m \to V \qquad p_m^\star\colon V' \to V_m'$$

Hierbei wird p_m als **Prolongationsoperator** bezeichnet und $p_m^\star$ beschreibt den zu p_m adjungierten Operator mit

$$\langle p_m^\star g, v_m\rangle = \langle g, p_m v_m\rangle \,\forall v_m \in V_m$$

$p_m^\star$ ist linear und beschränkt da

$$\begin{aligned}\|p_m^\star g\|_{V_m'} &= \sup_{v_m \in V_m, v_m \neq 0} \frac{|\langle p_m^\star g, v_m\rangle|}{\|v_m\|_{V_m}}\\ &= \sup_{v_m \in V_m, v_m \neq 0} \frac{|\langle g, p_m v_m\rangle|}{\|v_m\|_{V_m}}\\ &\leq \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\langle g, v\rangle|}{\|v\|_V}\\ &= \|g\|_{V'}\end{aligned}$$

Es gilt also

$$A_m\left[v_m\right] = p_m^\star A\left[p_m v_m\right] \forall v_m \in V_m$$

und somit

$$\begin{aligned}\langle A_m\left[v_m\right], w_m\rangle_{V_m' \times V_m} &= a\left(v_m, w_m\right)\\ &= \langle A\left[v_m\right], w_m\rangle_{V' \times V}\\ &= \langle A\left[p_m v_m\right], p_m w_m\rangle_{V' \times V}\\ &= \langle p_m^\star A\left[p_m v_m\right], w_m\rangle_{V_m' \times V_m}\end{aligned}$$

Damit ist klar, dass

$$(O_m)\begin{cases}\text{Finde } u_m \in V_m \text{ mit}\\ A_m\left[u_m\right] = \langle f, \cdot\rangle\end{cases} \Leftrightarrow (O_m^\star)\begin{cases}\text{Finde } u_m \in V_m \text{ mit}\\ p_m^\star A_m\left[p_m u_m\right] = p_m^\star\langle f, \cdot\rangle\end{cases}$$

3. Konvergenz von $(u_m)_m \to u$

Lemma von Cea

Sei $(V, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|_V)$ ein reeller Hilbertraumm $V_m \subset V$ ein abgeschlossener Teilraum, $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$

bilinear, beschränkt, stark positiv. $u \in V$ löst (V), $u_m \in V_m$ löst (V_m). Dann gilt

$$\|u - u_m\|_V \leq \frac{\beta}{\mu} \operatorname{dist}(u, V_m)$$

Beweis

u und u_m existieren nach dem Satz von Lax-Milgram und es gilt

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle_{V' \times V}$$
$$a(u_m, v_m) = \langle f, v_m \rangle_{V_m' \times V_m}$$

und somit ergibt sich

$$a(u, v_m) - a(u_m, v_m) \text{ oder } a(u - u_m, v_m) = 0 \forall v_m \in V_m$$

Diese Eigenschaft wird **Galerkin-Orthogonalität** genannt. Es folgt

$$\begin{aligned} \mu \|u - u_m\|_V^2 &\leq a(u - u_m, u - u_m) \\ &= a(u - u_m, u - v_m) + \underbrace{a(u - u_m, v_m - u_m)}_{=0} \\ &\leq \beta \|u - u_m\|_V \|u - v_m\|_V \end{aligned}$$

und somit

$$\|u - u_m\|_V \leq \frac{\beta}{\mu} \|u - v_m\| \forall v_m \in V_m$$

Durch einen Übergang zum Infimum erhält man die Aussage. □

Die Aussage lässt sich auch auf nichtlineare Probleme übertragen

Ab jetzt sei a bilinear.

Implementierung

Sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt, dass $\operatorname{dist}(u, V_m)$ hinreichend klein und $V_m = \operatorname{span}\{\phi_j, j = 1, \ldots, m\}, \dim V = m$. Dann lässt sich $u_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_j$ darstellen, wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T$ eindeutig ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} u_m \text{ löst } (V_m) &\Leftrightarrow a(u_m, \phi_j) = \langle f, \phi_j \rangle, j = 1, \ldots, m \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m \alpha_j a(\phi_j, \phi_i) = \langle f, \phi_i \rangle, i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

und somit ist das Problem auf ein lineares Gleichungssystem reduziert. Hierfür definieren wir

$$[\mathbb{A}_m]_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j) \qquad [f_m]_i = \langle f, \phi_i \rangle$$

und erhalten das System

$$\mathbb{A}_m \alpha = f_m$$

Die Wahl von V_m beeinflusst sowohl die Konvergenzgeschwindigkeit, als auch die Kosten. Nutze Algorithmen, die schnell sind, wenn $\mathbb{A}_m$ sparse ist. Also ist erwünscht, dass $a(\phi_i, \phi_j) = 0$ für möglichst viele Kombinationen von i und j.

Betrachte das Problem (P_{Dir}) linear mit $V = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $\Omega = (a, b)$ mit einem äquidistanten Gitter $z_i = a + ih$. $(z_j)_{j=1}^m$ heißen **Knoten** und $[z_{i-1}, z_i]$ heißen **Elemente des Gitters**.

Definition

Funktionen $\phi_j \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit

1. ϕ_j stetig
2. $\phi_j \left(z_i\right) = \delta_{ij}$
3. $\phi_j\big|_{[z_{i-1}, z_i]} \in \mathbb{P}_1$

heißen **Hütchenfunktionen**.

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 14: 31.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beispiel

Betrachte das Problem

$$(V)\begin{cases}\text{Finde } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ mit} \\ a(u,v) = \int_\Omega u'v' \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x\end{cases}$$

Es ergibt sich

$$a(\phi_i, \phi_j) = \begin{cases}\frac{2}{h} & , i = j \\ \frac{-1}{h} & , |i-j| = 1 \\ 0 & , \text{ sonst}\end{cases}$$

und daher

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ziel ist es, dass $(V_h)_{h\in(0,1)}$ ein Galerkin-Schema wird. Wir definieren dann

$$I_h\colon V \to V_h, v \mapsto \sum_{j=1}^m v(z_j)\,\phi_j$$

so, dass $[I_h v](z_i) = \sum_{j=1}^m v(z_j)$. Man nennt I_h **Interpolation** und der Operator ist wohldefiniert, da $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Satz

Die Folge $(V_h)_{h\in(0,1)}$ der stückweise linearen FE-Räume mit äquidistanten Gitter bildet ein Galerkin-Schema in $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ und es gilt $\forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega), h = \frac{b-a}{m+1} \in (0,1)$

$$\|v - I_h v\|_{0,2} \le Ch^2 \|v\|_{2,2}$$
$$|v - I_h v|_{1,2} \le Ch \|v\|_{2,2}$$

Beweis

1. Beschränktheit von I_h
   Es gilt:

$$[I_h v](x) = v(z_{i-1}) + \frac{x - z_{i-1}}{h}(v(z_i) - v(z_{i-1})) \text{ für } x \in [z_{i-1}, z_i]$$
$$[I_h v]'(x) = \frac{1}{h}(v(z_i) - v(z_{i-1})) \text{ für } x \in [z_{i-1}, z_i]$$

Und somit folgt

$$
\begin{aligned}
|I_h v|_{1,2}^2 &= \int_\Omega \left([I_h v]'(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{1}{h^2}\left(v(z_i) - v(z_{i-1})\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h}\sum_{i=1}^m \left(\int_{z_{i-1}}^{z_i} v'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^2 \\
&\le \frac{1}{h}\sum_{i=1}^m h\int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(v'(\xi)\right)^2 \,\mathrm{d}\xi = |v|_{1,2}^2
\end{aligned}
$$

und somit $\|I_h\|_{L(V)} \le 1$.

2.

$$
\begin{aligned}
|v - I_h v|_{1,2}^2 &= \sum_{i=1}^m \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\left(v(x) - [I_h v](x)\right)'\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(v'(x) - \frac{1}{h}\left(v(z_i) - v(z_{i-1})\right)\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^m \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\int_{z_{i-1}}^{z_i} v'(x) - v'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{CSU}}{\le} \frac{1}{h}\sum_{i=1}^m \int_{z_{i-1}}^{z_i}\int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\int_{z_{i-1}}^{z_i} |v''(\xi)|\,\mathrm{d}y\right)^2 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{CSU}}{\le} \sum_{i=1}^m \int_{z_{i-1}}^{z_i}\int_{z_{i-1}}^{z_i}\int_{z_{i-1}}^{z_i} |v''(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&= h^2\|v'\|_{0,2}^2 \le h^2\|v\|_{2,2}^2
\end{aligned}
$$

Durch ziehen der Wurzel ist die zweite Abschätzung gezeigt.

3. <u>limitierte Vollständigkeit</u>
Sei $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)}, \epsilon \in (0,\infty)$. Dann existiert ein $\Psi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ mit $|v - \Psi|_{1,2} < \frac{\epsilon}{3}$ und es gilt

$$
|v - I_h v|_{1,2} \le \underbrace{|v - \Psi|_{1,2}}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|\Psi - I_h\Psi|_{1,2}}_{\le h\|\Psi\|_{2,2}} + \underbrace{|I_h(\Psi - v)|_{1,2}}_{\le|\Psi - v|_{1,2} < \frac{\epsilon}{3}}
$$

Für $h \in \left(0, \frac{\epsilon}{3}\|\Psi\|_{2,2}^{-1}\right)$ gilt also $|v - I_h v|_{1,2} < \epsilon$. Da es für $\epsilon \in (0,\infty)$ ein m_0 gibt, so dass $\forall m \ge m_0, h = \frac{b-a}{m+1}$ gilt

$$
\operatorname{dist}(v, V_h) \le |v - I_h v|_{1,2} \le \epsilon
$$

ist $(V_h)_{h\in(0,1)}$ ein Galerkin-Schema.

Die erste Ungleichung ist eine Übung. □

Korollar

$(V_h)_{h\in(0,1)}$ wie eben und $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ ist die schwache Lösung zum linearen Randwertproblem (P_{Dir}). Dann konvergiert die Folge $(u_h)_{h\in(0,1)}$ der FEM-Lösungen gegen u in $|\cdot|_{1,2}$. Gilt zusätzlich $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, dann gilt $|u-u_h|_{1,2} \leq ch\|u\|_{2,2} \forall h \in (0,1)$.

Es ergibt sich also ein Konvergenz erster Ordnung.

Satz

Unter den Voraussetzungen des obigen Korollars und $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ gilt

$$\|u-u_h\|_{0,2} \leq ch^2\|u\|_{2,2}$$

Beweis

Wir verwenden den sogenannten "Nitsche Trick".
Sei $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $u_h \in V_h$ wie oben. Dann definieren wir $e_h := u-u_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{H}^{-1}$ und betrachten das Problem

$$(V')\begin{cases}\text{Finde } w \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\\ a(v,w) = \langle e, v\rangle \, \forall v \in V\end{cases}$$

das die Voraussetzungen von Lax-Milgram erfüllt. Also gibt es eine Lösung von (V'). Mit dem Regularitätssatz erhält man $\|w\|_{2,2} \leq c\|e\|_{0,2}$. Testet man mit e, so erhält man

$$\begin{aligned}\|e\|_{0,2}^2 = (e,e)_{0,2} &= \langle e, e\rangle \\ &= a(e,w) = a(u-u_h, w) \\ &= a(u-u_h, w-v_h) \\ &\leq \beta|u-u_h|_{1,2}|w-v_h|_{1,2} \\ &\leq c\beta h\|u\|_{2,2}|w-v_h|_{1,2}\end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$\|e\|_{0,2}^{\cancel{2}} < \tilde{c}h\|u\|_{2,2}|w-I_hw|_{1,2} \leq til\tilde{d}ech^2\|u\|_{2,2}\|w\|_{2,2} \leq \bar{c}h^2\|u\|_{2,2}\cancel{\|e\|_{0,2}}$$

$\square$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 15: 06.06.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ ein beschränktes Gebiet. Hierbei meint Gebiet eine nichtleere, offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Wir betrachten das Randwertproblem

$$(P_d) \begin{cases} \text{Finde } u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \\ -\Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u(x) = g(x) \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Definition

$\mathcal{C}_c^\infty := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty \colon \operatorname{supp}(\phi) \subset_c \Omega\}$ ist die **Menge der Testfunktionen**. Wenn Ω offen und $\operatorname{supp}(\phi)$ abgeschlossen ist und $\operatorname{supp}(\phi) \subset_c \Omega$, dann gilt $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \operatorname{supp}(\phi)) > 0$.
$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{u \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon u\big|_K \in \mathrm{L}^1(K)\, \forall K \subset_c \Omega\right\}$ ist der **Raum der lokal integrierbaren Funktionen**.
Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ beschreibt die **Ordnung der Ableitung** und $\partial^\alpha := \Pi_{i=1}^d \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$ die **Ableitung**.

Definition

Es sind $u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. v ist die **α-te schwache Ableitung** von u wenn gilt

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \phi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \,\mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Es sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\int_\Omega u\phi \,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt $u = 0$ fast überall.

Definition

Sei $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$.
$W^{k,p}(\Omega) := \left\{u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \colon \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \leq k \exists \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega)\right\}$

$$p \in [1, \infty): \qquad \|u\|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p\right)^{1/p}$$

$$p = \infty: \qquad \|u\|_{k,\infty} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{0,\infty}$$

definiert Normen und

$$p \in [1,\infty): \qquad |u|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p\right)^{1/p}$$

$$p = \infty: \qquad |u|_{k,\infty} := \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{0,\infty}$$

definiert Halbnormen. Der Raum $W^{k,2} =: \mathrm{H}^k$ ist ein Hilbertraum mit

$$(u,v)_{k,2} := \sum_{|\alpha|\le k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{0,2}$$

Es gilt

- $p \in [1,\infty], k \in \mathbb{N}$: $W^{k,p}$ sind Banachräume und H^k sind Hilberträume.
- $p \in [1,\infty], k \in \mathbb{N}$: $W^{k,p}$ sind separabel.
- $p \in (1,\infty), k \in \mathbb{N}$: $W^{k,p}$ sind reflexiv.
- $\mathrm{L}^p(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega)$ für $p \ge q$ (mit Hölder) und demzufolge $W^{k,p} \hookrightarrow W^{k,q}$ für $p \ge q, k \in \mathbb{N}$

Definition

$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}$
$\mathrm{H}^{-1}(\Omega) := \left(\mathrm{H}_0^1(\Omega)\right)'$

Satz

$W^{k,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ liegt dich in $W^{k,p}(\Omega)$.

Definition

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heißt **Lipschitz-Gebiet**, wenn

$$\forall x_0 \in \partial\Omega \exists r \in (0,\infty) \text{ und } g\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R} \text{ Lipschitz-stetig so, dass}$$
$$B(x_0,r) \cap \Omega = \{(x_1,\dots,x_d) \in B(x_0,r) : x_d > g(x_1,\dots,x_{d-1})\}$$

Ist Ω beschränkt, so ist $\partial\Omega$ kompakt und es existieren endlich viele Lipschitz-stetige g um $\partial\Omega$ zu beschreiben.
Von jetzt an sei Ω ein Lipschitz-Gebiet.

Satz

$\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

Sobolewscher Einbettungssatz

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei ein Lipschitz-Gebiet

1. $kp < d$: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}$, falls $\frac{1}{q} - \frac{m}{d} \ge \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$.
   Also $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega)$ falls $\frac{1}{q} \ge \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$.
2. $kp = d$: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega) \, \forall 1 \le q < \infty$
3. $kp > d$: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Beispiel

- $d = 1$: $\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ für $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- $d = 2$: $\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega)\, \forall q \in [1, \infty)$
- $d = 3$: $\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^6(\Omega)$
- $d = 4$: $\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^3(\Omega)$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 16: 07.06.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Satz von Rellich

Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$$

falls $\frac{1}{q} - \frac{m}{d} > \frac{1}{p} - \frac{k}{d}, k > m$.

Poincare-Friedrich-Ungleichung

Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt $\forall u \in W_0^{k,p}(\Omega)\, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d\colon |\alpha| \leq k$

$$\|\partial^\alpha u\|_{0,p} \leq c|u|_{k,p}$$

wobei c nur von Ω abhängt.
Auf $W_0^{k,p}(\Omega), k \in \mathbb{N}$, bildet $|\cdot|_{k,p}$ eine zu $\|\cdot\|_{k,p}$ äquivalente Norm.

Randwerte in $W^{k,p}(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet.

1. $kp > d$: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ und $u\big|_{\partial\Omega}$ ist sinnvoll
2. $kp \leq d$:

Spursatz

Es existiert ein eindeutiges $\gamma\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{L}^p(\partial\Omega)$ stetig und linear mit

$$\gamma(u) = u\big|_{\partial\Omega} \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

Definition

Der eindeutig bestimmte Operator heißt **Spuroperator**.

$$\mathrm{trace}(u) := \mathrm{tr}(u) \in \mathrm{L}^p(\partial\Omega)$$

Ein expliziter Ausdruck für den Spuroperator kann nicht konstruktiv bestimmt werden. $\mathrm{L}^p(\partial\Omega)$ wird über das $(d-1)$-dimensionale Oberflächenmaß konstruiert.

Eigenschaften der Spur

1. Charakterisierung: $W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega) : \gamma(u) = 0\right\}$
2. $\gamma\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{L}^p(\partial\Omega)$ ist nicht surjektiv.
   $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) := \gamma\left(W^{1,p}(\Omega)\right) \subsetneq \mathrm{L}^p(\partial\Omega)$

Beispiel

- Das Problem

$$(P_d)\begin{cases}\text{Finde } u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \\ -\Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\end{cases}$$

  heißt **Poisson-Gleichung**.
- Das Problem

$$\left(\tilde{P}_d\right)\begin{cases}\text{Finde } u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \\ -\operatorname{div}\left(\mathbb{A}(x)\nabla u(x)\right) + c(x) \cdot \nabla u(x) + d(x)\,u(x) = f(x) \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\end{cases}$$

  beschreibt ein allgemeines lineares Randwertproblem. Übergang in die variationelle Formulierung von $\left(\tilde{P}_d\right)$.

$$-\int_\Omega \operatorname{div}\left(\mathbb{A}(x)\nabla u(x)\right) v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbb{A}(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x - \cancel{\int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot n(x)\,v(x)\,\mathrm{d}S}$$

  ergibt die Bilinearform $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$$a(u,v) := \int_\Omega \mathbb{A}(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \left(c(x) \cdot \nabla u(x)\right) v(x) + d(x)\,u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

  der wohldefiniert ist, wenn $d \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $c \in \mathrm{L}^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$, $\mathbb{A} \in \mathrm{L}^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d}\right)$.