DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation
$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$-u''(x) = f(x)\,\forall x \in \Omega$$
$$u(a) = u(b) = 0 \forall x \in \partial\Omega$$

für ein gegebenes f

Ziel
Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x)\,v'(x) + \cancel{\left[u'(x)\,v(x)\right]_a^b} = \int_a^b f(x)\,v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in \mathrm{L}^1$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Wiederholung

1. $\begin{cases} u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R} \\ \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \\ u(a) = u(b) \end{cases}$

2. Eigenschaften L^p:
   - $1 \le p < \infty \Rightarrow \mathrm{L}^p$ separabel
   - L^∞ nicht separabel
   - $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\mathrm{L}^p)' \equiv \mathrm{L}^q$
     $T\colon \mathrm{L}^q \to (\mathrm{L}^p)', (Tg)\, f = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$
   - $\left(\mathrm{L}^1\right)' \equiv \mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1 \subsetneq (\mathrm{L}^\infty)'$
     $\Rightarrow \mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty$ sind nicht reflexiv

Definition

$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u|_K \in \mathrm{L}^1(K)\, \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\right\}$
<u>Raum der lokal integrierbaren Abbildungen</u>

Definition

$\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \in \mathcal{C}^\infty, \mathrm{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
<u>Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger</u>
$\mathrm{supp}(f) := \{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}} \neq \mathcal{C}^\infty_0}$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$
Glättungskern $J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \ge 1 \end{cases}$

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Es gelte

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\, \phi'(x)\, \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

u heißt <u>schwache Ableitung</u> von v, v heißt <u>schwach differenzierbar</u>

Beispiel

1. $u(x) = |x|$ schwach differenzierbar auf $(-1, 1)$
   $$u'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$
2. Heaviside-Funktion auf $\Omega = (-1, 1)$
   $H\colon \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$ ist nicht schwach differenzierbar

Eigenschaften:

– klassisch differenzierbar $\Rightarrow$ schwach differenzierbar
– schwache Ableitung ist eindeutig im L^1-Sinne
– übliche Eigenschaften (Linearitär,...) bleiben erhalten

Lemma Fundamentallemma der Variationsrechnung ;

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und
$$\int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$
so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

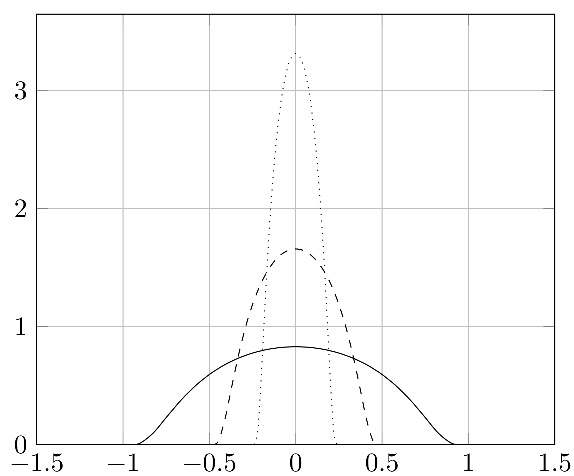
Definition

$$J_\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, J_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & , x \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$c_\epsilon := \left(\int_\epsilon^\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x\right)^{-1}$ J_ϵ ist der <u>Standard-Glättungskern</u> mit Träger $[-\epsilon, \epsilon]$

– $J_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$
– $\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$
– $J_\epsilon(x) \ge 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow J_\epsilon$ ist Wahrscheinlichkeits-Dichte



DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 3: 25.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Definition

$u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R}$ außerhalb von Ω mit 0 fortgesetzt
$u_\epsilon := (J_\epsilon \star u)(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon (x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon (y)\, u(x-y)\, \mathrm{d}y$
heißt Glättung oder Regularisierung.

Eigenschaften

$u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall $, p \in [1,\infty)$

- für $\epsilon > 0$ ist u_ϵ wohldefiniert
- $u_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
- $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega$ kompakt, ϵ klein genug $\Rightarrow u_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty$
- $\|u_\epsilon\|_{0,p} \leq \|u\|_{0,p}$
- $\|u - u_e\|_{0,p} \to 0$ für $\epsilon \to 0$
- $u_e(x) \to u(x)$ fast überall
- $u \in \mathcal{C}(\Omega) \Rightarrow \|u - u_\epsilon\|_\infty \to 0$ auf jeder kompakten Teilmenge

Lemma Fundamentallemma der Variationsrechnung ;

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

Beweis

Sei $K \subset \Omega$ beliebig und kompakt.