DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation
$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x)\,\forall x \in \Omega \\ u(a) = u(b) &= 0 \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein gegebenes f
Ziel
Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x)\,v'(x) + \cancel{[u'(x)\,v(x)]_a^b} = \int_a^b f(x)\,v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in \mathrm{L}^1$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Wiederholung

1. $\begin{cases} u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R} \\ \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, v(x)\ \mathrm{d}x \\ u(a) = u(b) \end{cases}$
2. Eigenschaften L^p:
   - $1 \leq p < \infty \Rightarrow \mathrm{L}^p$ separabel
   - L^∞ nicht separabel
   - $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\mathrm{L}^p)' \equiv \mathrm{L}^q$
     $T\colon \mathrm{L}^q \to (\mathrm{L}^p)', (Tg)\, f = \int_\Omega f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x$
   - $\left(\mathrm{L}^1\right)' \equiv \mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1 \subsetneq (\mathrm{L}^\infty)'$
     $\Rightarrow \mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty$ sind nicht reflexiv

Definition

$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u|_K \in \mathrm{L}^1(K)\, \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\right\}$
<u>Raum der lokal integrierbaren Abbildungen</u>

Definition

$\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \in \mathcal{C}^\infty, \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
<u>Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger</u>
$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}} \neq \mathcal{C}^\infty_0}$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$
Glättungskern $J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Es gelte

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\, \phi'(x)\ \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

u heißt <u>schwache Ableitung</u> von v, v heißt <u>schwach differenzierbar</u>

Beispiel

1. $u(x) = |x|$ schwach differenzierbar auf $(-1,1)$
   $u'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$
2. Heaviside-Funktion auf $\Omega = (-1,1)$
   $H\colon \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ ist nicht schwach differenzierbar

Eigenschaften:

- klassisch differenzierbar $\Rightarrow$ schwach differenzierbar
- schwache Ableitung ist eindeutig im L^1-Sinne
- übliche Eigenschaften (Linearitär,...) bleiben erhalten

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

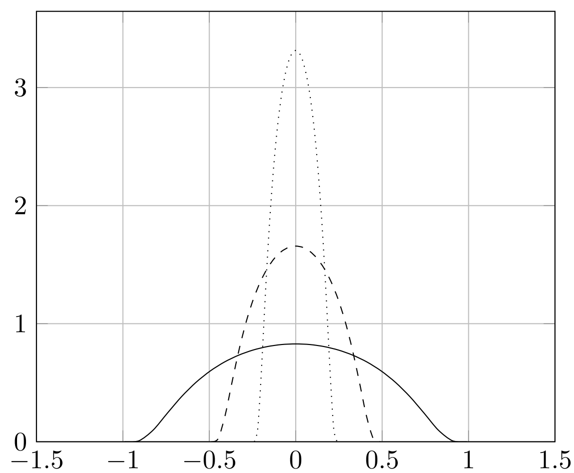
Definition

$J_\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, J_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & , x \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

$c_\epsilon := \left(\int_\epsilon^\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-x^2}\right)\mathrm{d}x\right)^{-1}$ J_ϵ ist der Standard-Glättungskern mit Träger $[-\epsilon, \epsilon]$

- $J_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$
- $\int_\mathbb{R} J_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- $J_\epsilon(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ J_ϵ ist Wahrscheinlichkeits-Dichte



DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 3: 25.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Definition

$u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R}$ außerhalb von Ω mit 0 fortgesetzt
$u_\epsilon := (J_\epsilon \star u)(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\,u(x-y)\,\mathrm{d}y$
heißt Glättung oder Regularisierung.

Eigenschaften

$u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall $, p \in [1,\infty)$

1. für $\epsilon > 0$ ist u_ϵ wohldefiniert
2. $u_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
3. $\mathrm{supp}(u) \subset \Omega$ kompakt$, \epsilon$ klein genug $\Rightarrow u_\epsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$
4. $\|u_\epsilon\|_{0,p} \leq \|u\|_{0,p}$
5. $\|u - u_e\|_{0,p} \to 0$ für $\epsilon \to 0$
6. $u_e(x) \to u(x)$ fast überall
7. $u \in \mathcal{C}(\Omega) \Rightarrow \|u - u_\epsilon\|_\infty \to 0$ auf jeder kompakten Teilmenge

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

Beweis

Sei $K \subset \Omega$ beliebig und kompakt und $w = \mathrm{sgn}(u)\,\mathbb{1}_K$. Wäre $w \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$, dann würde gelten

$$0 = \int_\Omega uw = \int_\Omega |u| \Rightarrow u = 0.$$

Im Allgemeinen ist w jedoch nicht glatt und wir müssen den Übergang zu w_ϵ vollziehen. Wähle hierfür $\epsilon_0 < \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$. Es gilt $w_\epsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty \forall \epsilon \in (0,\epsilon_0)$ da $\mathrm{supp}(w)$ kompakt. Somit gilt

$$\int_\Omega u w_\epsilon = 0 \forall \epsilon \in (0,\epsilon_0)$$

und somit $(uw_\epsilon)(x) \to |u(x)|$ fast überall.
Weiterhin gilt $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|u(x)\,w_\epsilon(x)| &= |u(x)|\,|\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,w(y)\,\mathrm{d}y| \\
&\leq |u(x)| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) \underbrace{|w(y)|}_{\leq 1}\,\mathrm{d}y \\
&\leq |u(x)|
\end{aligned}$$

Somit hat $|u(x)|\mathbb{1}_{\text{supp}(w_{\epsilon_0})}$ kompakten Träger und ist Majorante für uw_ϵ. Es folgt

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} u(x)\, w_\epsilon(x)\;\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\lim_{\epsilon\to 0} u(x)\, w_\epsilon(x)\;\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega u(x)\, w(x)\;\mathrm{d}x = \int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Somit folgt $u = 0$ auf K. □

Beweis der Eigenschaften der Glättung

1. Übung
2. Übung
3. $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p \in [1, \infty], x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|u_\epsilon(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)^{\frac{1}{p}+1q}\,|u(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\;\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}}_{=1}\left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\\ \Rightarrow \|u_\epsilon\|_{0,p}^p &= \int_\Omega |u_\epsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} |u_\epsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_R\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\;\mathrm{d}x}_{=1}\;\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p\,\mathrm{d}y = \int_\Omega |u(y)|^p\,\mathrm{d}y = \|u\|_{0,p}^p\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}|(u_\epsilon - u)(x)| &= |\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\,(u(x-y) - u(x))\;\mathrm{d}y|\\ &\le \ldots\ \text{Hölder}\ \ldots \le \left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\,|u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\\ \Rightarrow \|u_\epsilon - u\|_{0,p}^p &\le \int_\Omega\int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y)\,|u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y)\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\le \sup\nolimits_{y\in[-\epsilon,\epsilon]}\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, da $\forall u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ gilt $\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{y\in[-\epsilon,\epsilon]}\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x = 0$

5. analog
6. $u \in \mathcal{C}(\Omega), K \subset \Omega$ kompakt. Wähle $\epsilon_0 < \text{dist}(K, \partial\Omega)$.
   $K_0 = [\inf K - \epsilon_0, \sup K + e_0]$ bleibt kompakt und somit u gleichmäßig stetig auf K_0.

$\Rightarrow \forall \epsilon < \min\{\delta, \epsilon_0\}, x \in K$ gilt

$$|u_e(x) - u(x)| \leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \underbrace{|u(x-y) - u(x)|}_{\leq \eta} \,\mathrm{d}y$$
$$\leq \eta \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \,\mathrm{d}y = \eta$$

$\square$

Korollar

$u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwach differenzierbar, v, w schwache Ableitungen von u. Dann gilt

$$v = w \text{ fast überall}$$

Satz

$\Omega = (a, b), u \in \mathrm{L}^1(\Omega), u' \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ schwache Ableitung von u
$\Rightarrow u$ auf $\overline{\Omega}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \|u\|_{1,1} = \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1}\right)$$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 3: 26.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beweis

$$v(x) = \int_a^x u'(y)\ \mathrm{d}y$$

mit $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Somit ist v absolut stetig für klassisch differenzierbare u mit $u^{prime} = v'$

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x)\,\phi(x)\ \mathrm{d}x &= -\int_\Omega v'(x)\,\phi(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega u'(x)\,\phi(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\,\phi(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Mit dem vorigen Korrolar erhält man somit

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon u(x) = v(x) + c \text{ fast überall in } \Omega$$

Mit dem Mittelwertsatz erhält man

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] = \overline{\Omega}\colon \int_a^b u(\xi)\ \mathrm{d}\xi = (b-a)\,u(x_0) \\ &\Rightarrow u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &\qquad = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^x u'(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &\Rightarrow \|u\|_\infty \le \frac{\max(1, b-a)}{b-a}\left(\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1}\right)\end{aligned}$$

□

- **Dieser Satz gilt nur im Eindimensionalen!**
- **Fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion $\neq$ Fast überall absolut stetig**

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), n \in \mathbb{N}, v n$-te schwache Ableitung von u

$$\int_\Omega v(x)\,\phi(x)\ \mathrm{d}x = (-1)^n \int_\Omega u(x)\,\phi^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$$

Im höherdimensionalen ist das Fehlen von Ableitungen niedrigerer Ordnung möglich.

Satz

$u \in \mathrm{L}^1(\Omega), n \in \mathbb{N}, \Omega = (a,b)$
$\exists n$-te schwache Ableitung $u^{(n)} \in \mathrm{L}^1(\Omega) \Rightarrow \exists k$-te schwache Ableitung für $k = 1, \ldots, n-1$ und $u^{(k)}$ ist

fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.

Beweis

$v_{n-1}(x) = \int_a^x u^{(n)}(y)\,\mathrm{d}y$ und somit ist v_{n-1} absolut stetig und damit $v'_{n-1} = u^{(n)}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.
Rekursiv erhält man $v_{k-1}(x) = \int_a^x v_k(y)\,\mathrm{d}y \Rightarrow v_{k-1}$ absolut stetig und somit $v'_{k-1} = v_k$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.
Und somit:

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_a^b u(x)\,\phi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b u^{(n)}(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b v'_{n-1}(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cdots = (-1)^n \int_a^b v_0(x)\,\phi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Außerdem lässt sich das Korollar verallgemeinern

$$\int_\Omega w\phi^{(n)}\,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \Rightarrow w(x) = p(x) \text{ fast überall }, p \in \mathrm{P}_{n-1}[x]$$

Und somit $u(x) = v_0(x) + p(x)$ ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion. Da u' existiert (im klassischen Sinne falls $n \geq 2$) ist u' absolut stetig. Diese Erkenntnis kann iteriert werden. □

2 Die Sobolew-Räume $\mathrm{H}^1(\Omega), \mathrm{H}_0^1(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

Definition

$$W^{k,p}(\Omega) := \left(u \in \mathrm{L}^p : \exists u^{(k)} \in \mathrm{L}^p\right)$$

ist mit

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_{0,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ein Banachraum, genannt Sobolewraum.

Definition

$$W^{1,2}(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega)$$

ist ein Hilbertraum.

Satz

$$\|u\|_{1,2} = (u,u)_{1,2}^{\frac{1}{2}}$$

mit

$$(u,v)_{1,2} = (u,v)_{0,2} + (u',v')_{0,2} = \int uv + u'v'\,\mathrm{d}x$$

definiert eine Norm, bzw ein Skalarprodukt. $\left(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}, (\cdot,\cdot)_{1,2}\right)$ ist ein separabler Hilbertraum.