DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation
$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x)\,\forall x \in \Omega \\ u(a) = u(b) &= 0 \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein gegebenes f
Ziel
Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x)\,v'(x) + \cancel{\left[u'(x)\,v(x)\right]_a^b} = \int_a^b f(x)\,v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in \mathrm{L}^1$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Wiederholung

1. $\begin{cases} u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R} \\ \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, v(x)\ \mathrm{d}x \\ u(a) = u(b) \end{cases}$
2. Eigenschaften L^p:
   - $1 \leq p < \infty \Rightarrow \mathrm{L}^p$ separabel
   - L^∞ nicht separabel
   - $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\mathrm{L}^p)' \equiv \mathrm{L}^q$
     $T\colon \mathrm{L}^q \to (\mathrm{L}^p)', (Tg)\, f = \int_\Omega f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x$
   - $\left(\mathrm{L}^1\right)' \equiv \mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1 \subsetneq (\mathrm{L}^\infty)'$
     $\Rightarrow \mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty$ sind nicht reflexiv

Definition

$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u|_K \in \mathrm{L}^1(K)\, \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\right\}$
Raum der lokal integrierbaren Abbildungen

Definition

$\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \in \mathcal{C}^\infty, \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger
$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}} \neq \mathcal{C}^\infty_0}$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$
Glättungskern $J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Es gelte

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\, \phi'(x)\ \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

u heißt schwache Ableitung von v, v heißt schwach differenzierbar

Beispiel

1. $u(x) = |x|$ schwach differenzierbar auf $(-1, 1)$
   $$u'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$
2. Heaviside-Funktion auf $\Omega = (-1, 1)$
   $H\colon \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ ist nicht schwach differenzierbar

Eigenschaften:

- klassisch differenzierbar $\Rightarrow$ schwach differenzierbar
- schwache Ableitung ist eindeutig im L^1-Sinne
- übliche Eigenschaften (Linearitär,...) bleiben erhalten

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x) \phi(x) \, \mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_\mathrm{c}$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

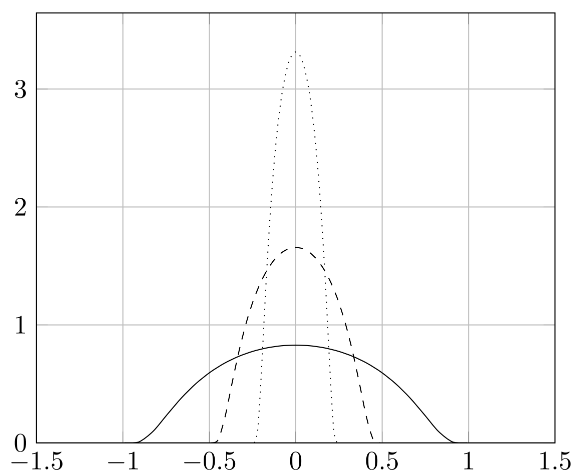
Definition

$$J_\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, J_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & , x \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$c_\epsilon := \left(\int_\epsilon^\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x\right)^{-1}$ J_ϵ ist der Standard-Glättungskern mit Träger $[-\epsilon, \epsilon]$

- $J_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$
- $\int_\mathbb{R} J_\epsilon(x) \, \mathrm{d}x = 1$
- $J_\epsilon(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ J_ϵ ist Wahrscheinlichkeits-Dichte



DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 3: 25.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Definition

$u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R}$ außerhalb von Ω mit 0 fortgesetzt
$u_\epsilon := (J_\epsilon \star u)(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\, u(x-y)\, \mathrm{d}y$
heißt Glättung oder Regularisierung.

Eigenschaften

$u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall $, p \in [1,\infty)$

1. für $\epsilon > 0$ ist u_ϵ wohldefiniert
2. $u_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
3. $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega$ kompakt, ϵ klein genug $\Rightarrow u_\epsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$
4. $\|u_\epsilon\|_{0,p} \leq \|u\|_{0,p}$
5. $\|u - u_e\|_{0,p} \to 0$ für $\epsilon \to 0$
6. $u_e(x) \to u(x)$ fast überall
7. $u \in \mathcal{C}(\Omega) \Rightarrow \|u - u_\epsilon\|_\infty \to 0$ auf jeder kompakten Teilmenge

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

Beweis

Sei $K \subset \Omega$ beliebig und kompakt und $w = \operatorname{sgn}(u)\, \mathbb{1}_K$. Wäre $w \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$, dann würde gelten

$$0 = \int_\Omega uw = \int_\Omega |u| \Rightarrow u = 0.$$

Im Allgemeinen ist w jedoch nicht glatt und wir müssen den Übergang zu w_ϵ vollziehen. Wähle hierfür $\epsilon_0 < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Es gilt $w_\epsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ da $\operatorname{supp}(w)$ kompakt. Somit gilt

$$\int_\Omega u w_\epsilon = 0 \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$$

und somit $(uw_\epsilon)(x) \to |u(x)|$ fast überall.
Weiterhin gilt $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |u(x)\, w_\epsilon(x)| &= |u(x)| \left| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\, w(y)\, \mathrm{d}y \right| \\ &\leq |u(x)| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) \underbrace{|w(y)|}_{\leq 1} \mathrm{d}y \\ &\leq |u(x)| \end{aligned}$$

Somit hat $|u(x)|\mathbb{1}_{\operatorname{supp}(w_{\epsilon_0})}$ kompakten Träger und ist Majorante für uw_ϵ. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} u(x)\,w_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\lim_{\epsilon\to 0} u(x)\,w_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Somit folgt $u = 0$ auf K. $\square$

Beweis der Eigenschaften der Glättung

1. Übung
2. Übung
3. $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p \in [1,\infty], x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)^{\frac{1}{p}+1q}\,|u(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}}_{=1}\left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \|u_\epsilon\|_{0,p}^p &= \int_\Omega |u_\epsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} |u_\epsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_R\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}x}_{=1}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p\,\mathrm{d}y = \int_\Omega |u(y)|^p\,\mathrm{d}y = \|u\|_{0,p}^p \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} |(u_\epsilon - u)(x)| &= |\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\,(u(x-y) - u(x))\,\mathrm{d}y| \\ &\leq \ldots \text{ Hölder } \ldots \leq \left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\,|u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \|u_\epsilon - u\|_{0,p}^p &\leq \int_\Omega\int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y)\,|u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y)\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\leq \sup_{y\in[-\epsilon,\epsilon]}\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Die Behauptung folgt, da $\forall u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ gilt $\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{y\in[-\epsilon,\epsilon]}\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x = 0$
5. analog
6. $u \in \mathcal{C}(\Omega), K \subset \Omega$ kompakt. Wähle $\epsilon_0 < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$.
   $K_0 = [\inf K - \epsilon_0, \sup K + e_0]$ bleibt kompakt und somit u gleichmäßig stetig auf K_0.

$\Rightarrow \forall \epsilon < \min\{\delta, \epsilon_0\}, x \in K$ gilt

$$\begin{aligned} |u_e(x) - u(x)| &\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \underbrace{|u(x-y) - u(x)|}_{\leq \eta} \,\mathrm{d}y \\ &\leq \eta \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y = \eta \end{aligned}$$

□

Korollar

$u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwach differenzierbar, v, w schwache Ableitungen von u. Dann gilt

$$v = w \text{ fast überall}$$

Satz

$\Omega = (a, b), u \in \mathrm{L}^1(\Omega), u' \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ schwache Ableitung von u
$\Rightarrow u$ auf $\overline{\Omega}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \|u\|_{1,1} = \frac{\max(1, b-a)}{b-a} (\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1})$$