DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation
$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \, \forall x \in \Omega \\ u(a) = u(b) &= 0 \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein gegebenes f
Ziel
Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x)\, v'(x) + \cancel{\left[u'(x)\, v(x)\right]_a^b} = \int_a^b f(x)\, v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in \mathrm{L}^1$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Wiederholung

1. $\begin{cases} u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R} \\ \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, v(x)\ \mathrm{d}x \\ u(a) = u(b) \end{cases}$
2. Eigenschaften L^p:
   - $1 \leq p < \infty \Rightarrow \mathrm{L}^p$ separabel
   - L^∞ nicht separabel
   - $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\mathrm{L}^p)' \equiv \mathrm{L}^q$
     $T\colon \mathrm{L}^q \to (\mathrm{L}^p)', (Tg)\, f = \int_\Omega f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x$
   - $\left(\mathrm{L}^1\right)' \equiv \mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1 \subsetneq (\mathrm{L}^\infty)'$
     $\Rightarrow \mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty$ sind nicht reflexiv

Definition

$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u|_K \in \mathrm{L}^1(K)\, \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\right\}$
Raum der lokal integrierbaren Abbildungen

Definition

$\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \in \mathcal{C}^\infty, \mathrm{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger
$\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}} \neq \mathcal{C}^\infty_0}$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$
Glättungskern $J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Es gelte

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\ \mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\, \phi'(x)\ \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

u heißt schwache Ableitung von v, v heißt schwach differenzierbar

Beispiel

1. $u(x) = |x|$ schwach differenzierbar auf $(-1,1)$
   $u'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$
2. Heaviside-Funktion auf $\Omega = (-1,1)$
   $H\colon \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ ist nicht schwach differenzierbar

Eigenschaften:
- klassisch differenzierbar $\Rightarrow$ schwach differenzierbar
- schwache Ableitung ist eindeutig im L^1-Sinne
- übliche Eigenschaften (Linearitär,...) bleiben erhalten

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

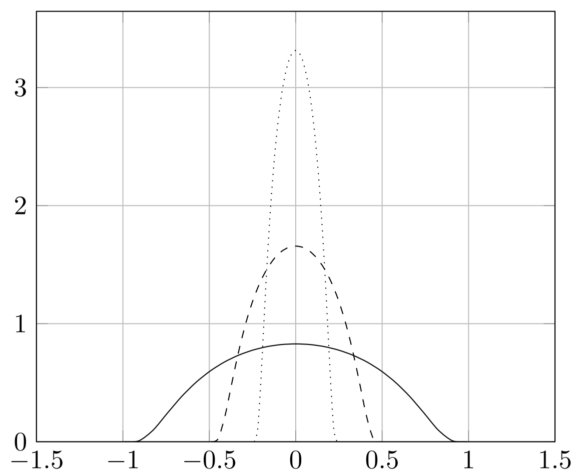
Definition

$J_\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, J_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & , x \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

$c_\epsilon := \left(\int_\epsilon^\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x\right)^{-1}$ J_ϵ ist der Standard-Glättungskern mit Träger $[-\epsilon, \epsilon]$

- $J_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$
- $\int_\mathbb{R} J_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- $J_\epsilon(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ J_ϵ ist Wahrscheinlichkeits-Dichte



DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 3: 25.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Definition

$u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R}$ außerhalb von Ω mit 0 fortgesetzt
$u_\epsilon := (J_\epsilon \star u)(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon (x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon (y)\, u(x-y)\, \mathrm{d}y$
heißt Glättung oder Regularisierung.

Eigenschaften
$u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall , $p \in [1,\infty)$

1. für $\epsilon > 0$ ist u_ϵ wohldefiniert
2. $u_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
3. $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega$ kompakt, ϵ klein genug $\Rightarrow u_\epsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$
4. $\|u_\epsilon\|_{0,p} \leq \|u\|_{0,p}$
5. $\|u - u_e\|_{0,p} \to 0$ für $\epsilon \to 0$
6. $u_e(x) \to u(x)$ fast überall
7. $u \in \mathcal{C}(\Omega) \Rightarrow \|u - u_\epsilon\|_\infty \to 0$ auf jeder kompakten Teilmenge

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

Beweis

Sei $K \subset \Omega$ beliebig und kompakt und $w = \operatorname{sgn}(u)\,\mathbb{1}_K$. Wäre $w \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$, dann würde gelten

$$0 = \int_\Omega uw = \int_\Omega |u| \Rightarrow u = 0.$$

Im Allgemeinen ist w jedoch nicht glatt und wir müssen den Übergang zu w_ϵ vollziehen. Wähle hierfür $\epsilon_0 < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Es gilt $w_\epsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty \forall \epsilon \in (0,\epsilon_0)$ da $\operatorname{supp}(w)$ kompakt. Somit gilt

$$\int_\Omega uw_\epsilon = 0 \forall \epsilon \in (0,\epsilon_0)$$

und somit $(uw_\epsilon)(x) \to |u(x)|$ fast überall.
Weiterhin gilt $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|u(x)\,w_\epsilon(x)| &= |u(x)|\,|\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,w(y)\,\mathrm{d}y| \\
&\leq |u(x)| \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y) \underbrace{|w(y)|}_{\leq 1} \mathrm{d}y \\
&\leq |u(x)|
\end{aligned}$$

Somit hat $|u(x)|\mathbb{1}_{\operatorname{supp}(w_{\epsilon_0})}$ kompakten Träger und ist Majorante für uw_ϵ. Es folgt

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} u(x)\,w_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\lim_{\epsilon\to 0} u(x)\,w_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Somit folgt $u = 0$ auf K. □

Beweis der Eigenschaften der Glättung

1. Übung
2. Übung
3. $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p \in [1,\infty], x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|u_\epsilon(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)^{\frac{1}{p}+1q}|u(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}}_{=1}\left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \|u_\epsilon\|_{0,p}^p &= \int_\Omega |u_\epsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} |u_\epsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_R\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p\underbrace{\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}x}_{=1}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p\,\mathrm{d}y = \int_\Omega |u(y)|^p\,\mathrm{d}y = \|u\|_{0,p}^p\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}|(u_\epsilon - u)(x)| &= |\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)\,(u(x-y) - u(x))\,\mathrm{d}y| \\ &\le \text{... Hölder ...} \le \left(\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(y)|u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \|u_\epsilon - u\|_{0,p}^p &\le \int_\Omega\int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y)|u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y)\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\le \sup\nolimits_{y\in[-\epsilon,\epsilon]}\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   Die Behauptung folgt, da $\forall u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ gilt $\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{y\in[-\epsilon,\epsilon]}\int_\Omega |u(x-y)-u(x)|^p\,\mathrm{d}x = 0$
5. analog
6. $u \in \mathcal{C}(\Omega), K \subset \Omega$ kompakt. Wähle $\epsilon_0 < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$.
   $K_0 = [\inf K - \epsilon_0, \sup K + e_0]$ bleibt kompakt und somit u gleichmäßig stetig auf K_0.

$\Rightarrow \forall \epsilon < \min\{\delta, \epsilon_0\}, x \in K$ gilt

$$\begin{aligned} |u_e(x) - u(x)| &\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \underbrace{|u(x-y) - u(x)|}_{\leq \eta} \, \mathrm{d}y \\ &\leq \eta \int_{-\epsilon}^{\epsilon} J_\epsilon(y) \, \mathrm{d}y = \eta \end{aligned}$$

□

Korollar

$u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwach differenzierbar, v, w schwache Ableitungen von u. Dann gilt

$$v = w \text{ fast überall}$$

Satz

$\Omega = (a, b), u \in \mathrm{L}^1(\Omega), u' \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ schwache Ableitung von u
$\Rightarrow u$ auf $\overline{\Omega}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \|u\|_{1,1} = \frac{\max(1, b-a)}{b-a} (\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1})$$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 4: 26.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beweis

$$v(x) = \int_a^x u'(y)\, \mathrm{d}y$$

mit $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Somit ist v absolut stetig für klassisch differenzierbare u mit $u^{prime} = v'$

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x &= -\int_\Omega v'(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega u'(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Mit dem vorigen Korrolar erhält man somit

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon u(x) = v(x) + c \text{ fast überall in } \Omega$$

Mit dem Mittelwertsatz erhält man

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] = \overline{\Omega}\colon \int_a^b u(\xi)\, \mathrm{d}\xi = (b-a)\, u(x_0) \\ &\Rightarrow u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b u(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^x u'(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &\Rightarrow \|u\|_\infty \leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a}\left(\|u\|_{0,1} + \|u'\|_{0,1}\right)\end{aligned}$$

□

- **Dieser Satz gilt nur im Eindimensionalen!**
- **Fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion $\neq$ Fast überall absolut stetig**

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), n \in \mathbb{N}, v n$-te schwache Ableitung von u

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^n \int_\Omega u(x)\phi^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$$

Im höherdimensionalen ist das Fehlen von Ableitungen niedrigerer Ordnung möglich.

Satz

$u \in \mathrm{L}^1(\Omega), n \in \mathbb{N}, \Omega = (a,b)$
$\exists n$-te schwache Ableitung $u^{(n)} \in \mathrm{L}^1(\Omega) \Rightarrow \exists k$-te schwache Ableitung für $k = 1, \dots, n-1$ und $u^{(k)}$ ist

fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.

Beweis

$v_{n-1}(x) = \int_a^x u^{(n)}(y)\,\mathrm{d}y$ und somit ist v_{n-1} absolut stetig und damit $v'_{n-1} = u^{(n)}$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.
Rekursiv erhält man $v_{k-1}(x) = \int_a^x v_k(y)\,\mathrm{d}y \Rightarrow v_{k-1}$ absolut stetig und somit $v'_{k-1} = v_k$ fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.
Und somit:

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_a^b u(x)\,\phi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b u^{(n)}(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b v'_{n-1}(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cdots = (-1)^n \int_a^b v_0(x)\,\phi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Außerdem lässt sich das Korollar verallgemeinern

$$\int_\Omega w\phi^{(n)}\,\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \Rightarrow w(x) = p(x) \text{ fast überall }, p \in \mathrm{P}_{n-1}[x]$$

Und somit $u(x) = v_0(x) + p(x)$ ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion. Da u' existiert (im klassischen Sinne falls $n \geq 2$) ist u' absolut stetig. Diese Erkenntnis kann iteriert werden. □

2 Die Sobolew-Räume $\mathrm{H}^1(\Omega), \mathrm{H}_0^1(\Omega), \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

Definition

$$W^{k,p}(\Omega) := \left(u \in \mathrm{L}^p \colon \exists u^{(k)} \in \mathrm{L}^p\right)$$

ist mit

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_{0,p}^p\right)^{1/p}$$

ein Banachraum, genannt Sobolewraum.

Definition

$$W^{1,2}(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega)$$

ist ein Hilbertraum.

Satz

$$\|u\|_{1,2} = (u,u)_{1,2}^{1/2}$$

mit

$$(u,v)_{1,2} = (u,v)_{0,2} + (u',v')_{0,2} = \int uv + u'v'\,\mathrm{d}x$$

definiert eine Norm, bzw ein Skalarprodukt. $\left(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}, (\cdot,\cdot)_{1,2}\right)$ ist ein separabler Hilbertraum.

Beweis

Vollständigkeit

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H^1. Es gilt also:

$$\begin{aligned} u_n &\to u \\ u_n' &\to v \end{aligned}$$

in L^2. Da Ω beschränkt ist gilt:

$$\|u_n - u\|_{0,1} = \int_\Omega |u_n - u| \,\mathrm{d}x = \int_W 1|u_n - u| \,\mathrm{d}x \overset{\text{C-S}}{\leq} \int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x \|u_n - u\|_{0,2}$$

Mit einer Hausaufgabe folgt, dass u schwach differenzierbar ist und $u' = v$. Somit ist $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Separabilität

Sei $X = \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega), T\colon \mathrm{H}^1(\Omega) \to X, u \mapsto Tu = (u, u')$.
T ist wohldefiniert, linear und isometrisch. Also ist T injektiv. Somit ergibt sich, dass $T\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right) \subset X$ ein Unterraum ist. Also $H^1(\Omega) \cong T\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right)$. Es folgt somit aus $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vollständig, dass $T\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right)$ abgeschlossen in X ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ separabel } &\Rightarrow X \text{ separabel} \\ &\Rightarrow T\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right) \text{ separabel, da abgeschlossen} \\ &\Rightarrow \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ separabel} \end{aligned}$$

$\square$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 5: 02.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Definition

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ seien Banachräume. Eine lineare, injektive Abbildung

$$j \colon X \to Y$$

wird **Einbettung** genannt. X kann also mit $j(X)$ identifiziert werden.

- Ist j stetig, so sagt man, X ist stetig in Y eingebettet ($X \hookrightarrow Y$).
- Ist j kompakt, so sagt man, X ist kompakt in Y eingebettet ($X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$)
- Ist $j(X)$ dicht in Y und $X \hookrightarrow Y$, so sagt man, X ist dicht in Y eingebettet ($X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$)

Satz

$u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ ist fast überall gleich einer absolut stetigen Funktion.
$\mathrm{H}^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(\overline{\Omega})$

Beweis

Mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir $\mathrm{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^1(\Omega)$ und somit $\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$ und somit die erste Aussage.
Sei $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty &\leq \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b |u(\xi)| \,\mathrm{d}\xi + \int_a^b |u'(\xi)| \,\mathrm{d}\xi \right) \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b 1 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \left(\int_a^b (|u(\xi)| + |u'(\xi)|)^2 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2} \frac{\max(1, b-a)}{b-a} \left(\int_a^b 1 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \left(\int_a^b |u(\xi)|^2 + |u'(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2} \frac{\max(1, b-a)}{\sqrt{b-a}} \|u\|_{1,2}
\end{aligned}$$

und somit haben wir $\mathrm{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
Sei $(u_n) \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$ eine bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ beschränkte Folge. Dann ist (u_n) auch bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt.
Mit

$$\begin{aligned}
|u_n(x_1) - u_n(x_2)| &= \int_{\min}^{\max} u_n'(\xi) \,\mathrm{d}\xi \\
&< \sqrt{|x_1 - x_2|} \underbrace{\left(\int_\Omega |u_n'(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \right)^{1/2}}_{\leq \|u\|_{1,2} \leq M}
\end{aligned}$$

erhalten wir, dass (u_n) gleichgradig stetig ist. Wir erhalten mit Arzela-Ascoli, dass (u_n) kompakt ist und $\mathrm{H}^1(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ $\square$

Satz

$C^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $H^1(\Omega)$.

Lemma

$u \in \mathrm{H}^1(\Omega), 0 < \epsilon_0 < \frac{b-a}{2}$.
$\Rightarrow u_\epsilon = J_e \star u \overset{\epsilon \to 0}{\to} u$ bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ auf $(a-\epsilon, b+\epsilon)$.

Beweis

$x \in (a+\epsilon_0, b-\epsilon_0), \epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Es sei $\phi\colon y \mapsto J_\epsilon(x-y) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\operatorname{supp}(\phi) = [x-\epsilon, x+\epsilon] \subset (a,b)$$

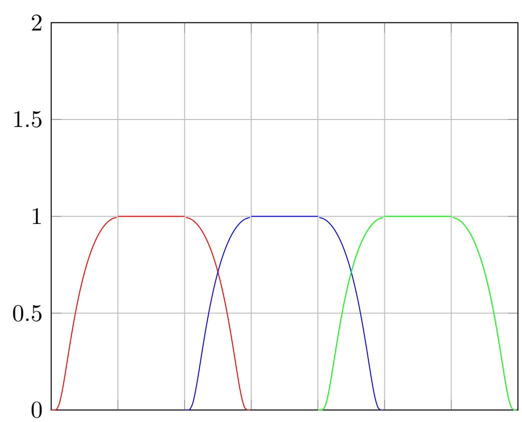
und somit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Es folgt also $\forall x \in (a+\epsilon_0, b-\epsilon_0), \epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$\begin{aligned}
(u')_\epsilon(x) &= \int_\Omega J_\epsilon(x-y)\, u'(y)\, \mathrm{d}y \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y} J_\epsilon(x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Kette}}{=} (-1)^2 \int_\Omega J'_\epsilon(x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Majorante}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \int_\Omega J_\epsilon(x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y = (u_\epsilon)'(x)
\end{aligned}$$

Somit folgt $u_\epsilon \to u$ und $(u')_\epsilon \to u'$ in $\mathrm{L}^2(a+\epsilon_0, b-\epsilon_0)$. $\square$

Beweis des Satzes

1. Seien I_1, I_2, I_3 offene Intervalle mit $\bigcup_{i=1}^3 I_i \supset [a,b]$, $a \in I_1$, $b \in I_3$, $I_2 \subset [a,b]$, $I_1 \cap I_3 = \emptyset$
2. Partition der Eins
   $\Psi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $i = 1,2,3$
   $\operatorname{supp}(\Psi_i) \subset I_i$, $\sum_{i=1}^3 \Psi_i(x) = 1 \forall x \in [a,b]$
3. $u_i := u\Psi_i \Rightarrow u = \sum_{i=1}^3 u_i$ in $[a,b]$.
   Es gilt $u_i' = u\Psi_i' + u'\Psi_i$ und somit $u' \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $u_i \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.
   Wir definieren nun $v_1 := u_1(x+\delta)$ für $\delta \in (0, \epsilon_0)$. Da $b \notin \operatorname{supp}(u_1)$ gilt
   $$v_1 \in \mathrm{H}^1(a-\delta, b+\delta)$$
   und somit
   $$\forall \eta > 0 \exists \delta_0 \le \delta\colon \|v_{1,\epsilon} - v_1\|_{1,2} < \eta \forall \epsilon \in (0, \delta_0)$$



DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 6: 03.05.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Beweis Fortsetzung

4. Stetigkeit im L^2-Mittel $\Rightarrow \forall \eta > 0 \exists \epsilon_\eta \in (0, \delta) : \forall \epsilon \in (0, \epsilon_\eta) : \|v_{1,\epsilon_\eta} - v_1\|_{1,2} < \eta$ in $\mathrm{H}^1(a,b)$.
5. Zusammen ergibt sich für δ, ϵ hinreichend klein:

$$\|v_{1,\epsilon} - u_1\| \leq \|v_{1,\epsilon} - v_1\|_{1,2} + \|v_1 - u_1\|_{1,2} < 2\eta$$

6. u_3 wird analog approximiert, u_2 kann direkt geglättet werden
7. $v_\epsilon := (v_{1,\epsilon} + v_{2,\epsilon} + v_{3,\epsilon})\big|_{[a,b]} \in \mathcal{C}^\infty[a,b]$ mit

$$\|v_\epsilon - u\|_{1,2} \leq \sum_{i=1}^{3} \|v_{i,\epsilon} - u_i\|_{1,2} < 6\eta$$

□

Produktregel

$u \in \mathrm{H}^1(\Omega), \Psi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \Rightarrow u\Psi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ und $(u\Psi)' = u'\Psi + u\Psi'$

Beweis

$\Psi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \Rightarrow u\Psi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $u'\Psi + u\Psi' \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Für $\phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\Psi\phi' \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega u\left[(\Psi\phi)' - \Psi'\phi\right] \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega u'(\Psi\phi) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u\Psi'\phi \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega (u'\Psi - u\Psi')\phi \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Zusammen folgt, dass $u\Psi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. □

Satz von Rellich

Es gilt

$$\mathrm{H}^1(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^2(\Omega)$$

Beweis

Es gilt $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathrm{L}^2\left(\Omega\right)$, da

$$\begin{aligned}\|v\|_{0,2}^2 &= \int_\Omega |v\left(x\right)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \|v\|_\infty^2 \int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x \\ &= \|v\|_\infty^2 (b-a)\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathrm{H}^1\left(\Omega\right) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathrm{L}^2\left(\Omega\right)$$

□

- $\mathcal{C}^k\left(\Omega\right), k \geq 1$ auch dicht in $\mathrm{H}^1\left(\Omega\right)$
- $\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty$ **nicht** dicht in $\mathrm{H}^1\left(\Omega\right)$

Definition

$$H_0^1\left(\Omega\right) := \overline{\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty\left(\Omega\right)}$$

wobei der Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$ gebildet wird.
Es gilt $\mathrm{H}_0^1\left(\Omega\right) \subsetneq \mathrm{H}^1\left(\Omega\right)$
Sei $(\phi_n) \subset \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty\left(\Omega\right)$ mit $\|\phi_n - u\|_{1,2} \to 0$ für ein $u \in \mathrm{H}^1\left(\Omega\right)$. Dann hat u einen absolut stetigen Repräsentanten und es gilt $\|\phi_n - u\|_\infty \to 0$ und somit $u\left(a\right) = \lim \phi_n\left(a\right) = 0$ und analog $u\left(b\right) = 0$.

Charakterisierung von $\mathrm{H}_0^1\left(\Omega\right)$

$$\mathrm{H}_0^1\left(\Omega\right) = \left\{u \in \mathrm{H}^1\left(\Omega\right) : u\left(a\right) = u\left(b\right) = 0\right\}$$

Poincare-Friedrichs-Ungleichung

Sei $u \in \mathrm{H}_0^1\left(\Omega\right)$. Dann gilt $\|u\|_{0,2} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|u'\|_{0,2}$.

Die Aussage gilt nicht für $H^1\left(\Omega\right)$!

Beweis

$$u\left(x\right) = \underbrace{u\left(a\right)}_{=0} + \int_a^x u'\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi \Rightarrow |u\left(x\right)| \leq \int_a^x |u\left(\xi\right)|\,\mathrm{d}\xi$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|u\|_{0,2}^2 &\leq \int_\Omega \left(\int_a^x 1|u'\left(\xi\right)|\,\mathrm{d}\xi\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega \left(\int_a^x 1\,\mathrm{d}\xi \int_a^x |u'\left(\xi\right)|^2\,\mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega \left(x-a\right)\,\mathrm{d}x \int_a^b |u'\left(\xi\right)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2}\left(b-a\right)^2 \|u'\|_{0,2}^2\end{aligned}$$

$\square$

- Die Konstante kann auf $\frac{b-a}{\pi}$ verbessert werden.
- $\|\cdot\|_{1,2}$ und $|\cdot|_{1,2} := \|u'\|_{0,2}$ sind äquivalent auf $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.
- Auf $\mathrm{H}^1(\Omega)$ ist $|\cdot|_{1,2}$ nur eine Halbnorm, da sie Konstanten übersieht.

Satz

$\left(\mathrm{H}_0^1(\Omega), |\cdot|_{1,2}, [u,v]_{1,2} := \int_\Omega u'(\xi)\, v'(\xi)\, \mathrm{d}\xi = (u', v')_{0,2}\right)$ ist ein separabler Hilbertraum.
Es gilt $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Satz

$\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ liegt dicht in $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Dies folgt aus $\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ dicht in $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

$$\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)$$

Definition

$$\mathrm{H}^{-1}(\Omega) := \left(\mathrm{H}_0^1(\Omega)\right)'$$

- $\mathrm{H}^{-1}(\Omega) \simeq \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ mit dem Riesz'schen Darstellungssatz
- Gelfand-Tripel: $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^2(\Omega) \simeq \left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)' \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

Satz

$$\|f\|_{-1,2} := \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle f, v\rangle|}{|v|_{1,2}}$$

definiert eine Norm auf $H^{-1}(\Omega)$. $\left(\mathrm{H}^{-1}(\Omega), \|\cdot\|_{-1,2}\right)$ bildet einen reflexiven Banachraum.

$$L^2(\Omega) \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$$

oder

$$\forall f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)\, \exists u_f \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \langle f, v\rangle = \int_\Omega u_f v'\, \mathrm{d}x \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$