

DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \forall x \in \Omega \\ u(a) &= u(b) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein gegebenes f **Ziel**

Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x) v'(x) + \cancel{[u'(x)v(x)]_a^b} = \int_a^b f(x) v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in L^1$

DGL IIa

SoSe 2017

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse

Mitschrift: Frank Rehfeld

Wiederholung

$$1. \begin{cases} u: \Omega = (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \\ \int_{\Omega} u'(x) v'(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx \\ u(a) = u(b) \end{cases}$$

2. Eigenschaften L^p :

- $1 \leq p < \infty \Rightarrow L^p$ separabel
- L^∞ nicht separabel
- $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (L^p)' \equiv L^q$
 $T: L^q \rightarrow (L^p)', (Tg)f = \int_{\Omega} f(x) g(x) \, dx$
- $(L^1)' \equiv L^\infty, L^1 \subsetneq (L^\infty)'$
 $\Rightarrow L^1, L^\infty$ sind nicht reflexiv

Definition

$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: u|_K \in L^1(K) \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
 Raum der lokal integrierbaren Abbildungen

Definition

$C_c^\infty(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: f \in C^\infty, \text{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
 Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger
 $\text{supp}(f) := \{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}$
 $C_c^\infty \neq C_0^\infty$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$

Glättungskern $J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

Definition

$u, v \in L^1_{\text{loc}}$. Es gelte

$$\int_{\Omega} u(x) \phi(x) \, dx = - \int_{\Omega} v(x) \phi'(x) \, dx \forall \phi \in C_c^\infty$$

u heißt schwache Ableitung von v , v heißt schwach differenzierbar

??? Beispiele als Füllmaterial ???

Eigenschaften:

- klassisch differenzierbar \Rightarrow schwach differenzierbar
- schwache Ableitung ist eindeutig im L^1 -Sinne
- übliche Eigenschaften (Linearität,...) bleiben erhalten

Lemma

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}$ und

$$\int_{\Omega} u(x) \phi(x) \, dx = 0 \, \forall \phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}$$

so folgt $u = 0 \in L^1_{\text{loc}}$.

Definition

$$J_{\epsilon}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, J_{\epsilon}(x) = \begin{cases} c_{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & , x \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$c_{\epsilon} := \left(\int_{\epsilon}^{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) \, dx \right)^{-1}$ J_{ϵ} ist der Standard-Glättungskern mit Träger $[-\epsilon, \epsilon]$

- $J_{\epsilon} \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$
- $\int_{\mathbb{R}} J_{\epsilon}(x) \, dx = 1$
- $J_{\epsilon}(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow J_{\epsilon}$ ist Wahrscheinlichkeits-Dichte

