DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation
$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x)\,\forall x \in \Omega \\ u(a) = u(b) &= 0 \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein gegebenes f

Ziel
Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x)\,v'(x) + \cancel{\left[u'(x)\,v(x)\right]_a^b} = \int_a^b f(x)\,v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in \mathrm{L}^1$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Wiederholung

1. $\begin{cases} u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R} \\ \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \\ u(a) = u(b) \end{cases}$
2. Eigenschaften L^p:
   - $1 \leq p < \infty \Rightarrow \mathrm{L}^p$ separabel
   - L^∞ nicht separabel
   - $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\mathrm{L}^p)' \equiv \mathrm{L}^q$
     $T\colon \mathrm{L}^q \to (\mathrm{L}^p)', (Tg)\, f = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$
   - $\left(\mathrm{L}^1\right)' \equiv \mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1 \subsetneq (\mathrm{L}^\infty)'$
     $\Rightarrow \mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty$ sind nicht reflexiv

Definition

$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u|_K \in \mathrm{L}^1(K)\, \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\right\}$
Raum der lokal integrierbaren Abbildungen

Definition

$\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \in \mathcal{C}^\infty, \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger
$\operatorname{supp}(f) := \{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}} \neq \mathcal{C}^\infty_0}$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$
Glättungskern $J(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

Definition

$u, v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Es gelte

$$\int_\Omega u(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\, \phi'(x)\, \mathrm{d}x \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

u heißt schwache Ableitung von v, v heißt schwach differenzierbar

??? Beispiele als Füllmaterial ???

Eigenschaften:

- klassisch differenzierbar $\Rightarrow$ schwach differenzierbar
- schwache Ableitung ist eindeutig im L^1-Sinne
- übliche Eigenschaften (Linearitär,...) bleiben erhalten

Lemma

Sei $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ und

$$\int_\Omega u(x)\,\phi(x)\;\mathrm{d}x = 0 \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}$$

so folgt $u = 0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

Definition

Glättungskerne

$J_\epsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, J_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & , x \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

$c_\epsilon := \left(\int_\epsilon^\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}$ J_ϵ ist der Standard-Glättungskern mit Träger $[-\epsilon, \epsilon]$

- $J_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$
- $\int_\mathbb{R} J_\epsilon(x)\;\mathrm{d}x = 1$
- $J_\epsilon(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow J_\epsilon$ ist Wahrscheinlichkeits-Dichte