DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 1: 18.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

1 Verallgemeinerte Ableitungen im Eindimensionalen

Motivation
$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x)\,\forall x \in \Omega \\ u(a) = u(b) &= 0 \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein gegebenes f

Ziel
Lösungsbegriff abschwächen um unstetige f umzusetzen. Idee hierfür ist die Multiplikation mit Testfunktionen und anschließende partielle Integration.

$$\int_a^b u'(x)\,v'(x) + \cancel{\left[u'(x)\,v(x)\right]_a^b} = \int_a^b f(x)\,v(x)$$

Somit ist nicht mehr nötig, dass $u \in \mathcal{C}^2$. Dafür zusätzliche Forderung: $u'v', fv \in \mathrm{L}^1$

DGL IIa **SoSe 2017**

Vorlesung 2: 19.04.2017

Dozent: Dr. Raphael Kruse *Mitschrift: Frank Rehfeld*

Wiederholung

1. $$\begin{cases} u\colon \Omega = (a,b) \to \mathbb{R} \\ \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, v(x)\ \mathrm{d}x \\ u(a) = u(b) \end{cases}$$

2. Eigenschaften L^p:

   - $1 \leq p < \infty \Rightarrow \mathrm{L}^p$ separabel
   - L^∞ nicht separabel
   - $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\mathrm{L}^p)' \equiv \mathrm{L}^q$
     $T\colon \mathrm{L}^q \to (\mathrm{L}^p)', (Tg)\, f = \int_\Omega f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x$
   - $\left(\mathrm{L}^1\right)' \equiv \mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1 \subsetneq (\mathrm{L}^\infty)'$
     $\Rightarrow \mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty$ sind nicht reflexiv

Definition

$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u|_K \in \mathrm{L}^1(K)\, \forall K \subset \Omega \text{ kompakt}\right\}$
Raum der lokal integrierbaren Abbildungen

Definition

$\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \in \mathcal{C}^\infty, \mathrm{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$
Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger
$\mathrm{supp}(f) := \{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\}$
$\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}} \neq \mathcal{C}^\infty_0}$

Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$