Grafi: introduzione

Definizione e rappresentazione

Definizioni: che cosa sono i grafi

Definizione

Un grafo G=(V,E) consiste in:

- un insieme V di vertici (o nodi)
- un insieme E di coppie di vertici, detti archi o spigoli: ogni arco connette due vertici

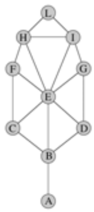
Esempio 1: V={persone che vivono in Italia},
E={coppie di persone che si sono strette la mano}

Esempio 2: V={persone che vivono in Italia},
E={(x,y) tale che x ha inviato una mail a y}

Terminologia (1/2)

Esempio 1: relazione simmetrica ➡ grafo non orientato

Esempio 2: relazione non simmetrica ➡ grafo orientato



n = numero di vertici
m = numero di spigoli

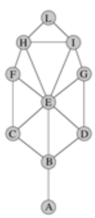
L ed I sono adiacenti

(L,I) è incidente a L

I ha grado 4: $\delta(I)=4$

$\sum \delta(v)=2m$

Terminologia (2/2)



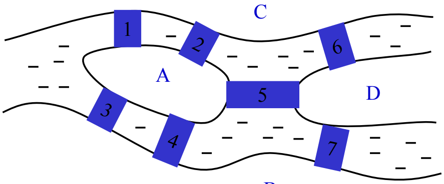
< L , I , E, C, B, A > è un cammino di lunghezza 5 nel grafo

Non è il più corto cammino tra L ed A

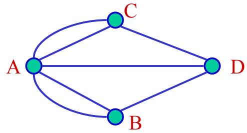
La lunghezza del più corto cammino tra due vertici si dice distanza: L ed A hanno distanza 4

Definizioni: che cosa sono i grafi (una presentazione piu' dettagliata)

A COSA SERVONO I GRAFI?
Un esempio: il problema dei ponti di Königsberg



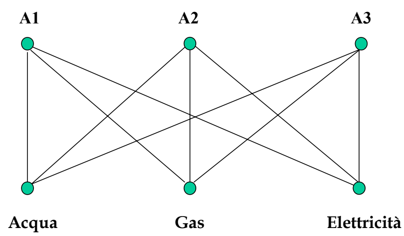
È possibile partire da A e ritornare in A attraversando tutti i ponti esattamente una volta?



A COSA SERVONO I GRAFI?
Un altro esempio

Problema: Supponiamo di dover collegare tre abitazioni A1, A2 e A3 tramite tubature per fornirle di Acqua, Gas ed Elettricità.

Se assumiamo che le tubature vadano posizionate alla stessa profondità, è possibile offrire la fornitura a tutte le abitazioni senza far incrociare le tubature?



Definizione

Un **grafo** ***G*** è una coppia di elementi ***<V, E>*** dove:

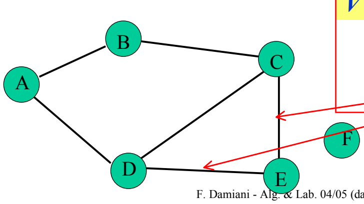
V è un insieme detto insieme dei **vertici**

E è un insieme detto insieme degli **archi** **($E \subseteq V x V$)**

Un **arco** quindi è una coppia di vertici ***(v,w)***, cioè $v \in V$ e $w \in V$

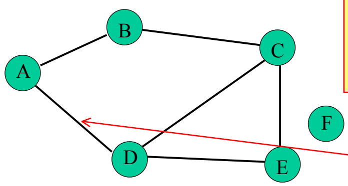
V = {A, B, C, D, E, F}

Come denotiamo gli archi?



se ***E*** è un insieme di coppie ***non ordinate*** di vertici il grafo e' detto **non orientato**

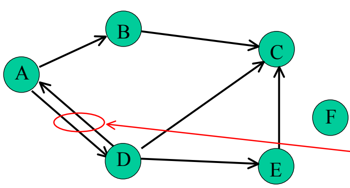
V = {A, B, C, D, E, F}
E = {(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)}



(A,D) *e* (D,A) denotano lo stesso arco

se ***E*** è un insieme di coppie ***ordinate*** di vertici il grafo e' detto **orientato**

V = {A, B, C, D, E, F}
E ={<A,B>, <A,D>, <B,C>, <D,C>, <E,C>, <D,E>, <D,A>}

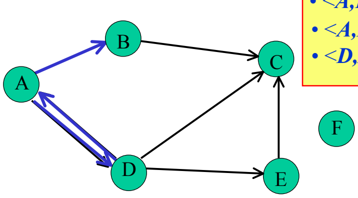


<A,D> *e* <D,A> denotano due archi diversi

Definizione

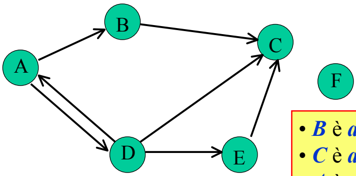
In un grafo orientato, un arco ***<w,v>*** si dice **incidente** da ***w*** in ***v***

- *<A,B>* è ***incidente*** da ***A*** a ***B***
- *<A,D>* è ***incidente*** da ***A*** a ***D***
- *<D,A>* è ***incidente*** da ***D*** a ***A***



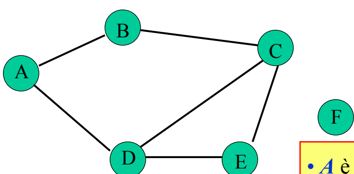
Definizione

Un vertice ***w*** si dice **adiacente** a ***v*** se e solo se ***<v, w> ∈ E***.



- ***B*** è ***adiacente*** ad ***A***
- ***C*** è ***adiacente*** a ***B*** e a ***D***
- ***A*** è ***adiacente*** a ***D*** e viceversa
- ***B NON*** è ***adiacente*** a ***D ne'*** a ***C***
- ***F NON*** è ***adiacente*** ad alcun vertice

In un ***grafo non orientato*** la relazione di ***adiacenza*** tra vertici è ***simmetrica***



- ***A*** è ***adiacente*** a ***D*** e viceversa
- ***B*** è ***adiacente*** a ***A*** e viceversa
- ***F NON*** è ***adiacente*** ad alcun vertice

Definizioni

In un ***grafo non orientato***:

- il **grado** di un ***vertice*** è il ***numero di archi*** che da esso si dipartono

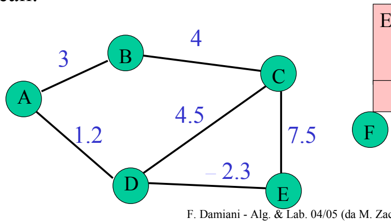
In un ***grafo orientato***:

- il **grado entrante** (**uscente**) di un ***vertice*** è il ***numero di archi incidenti*** in (da) esso
- il **grado** di un ***vertice*** è la somma del suo ***grado entrante*** e del suo ***grado uscente***

Definizione

Associamo ad ogni arco un **peso** (o **costo**).

Definiamo **grafo pesato** la coppia **<G, W>**, dove **W** e' la funzione peso, **W: E → R**, dove **R** è l'insieme dei numeri reali.



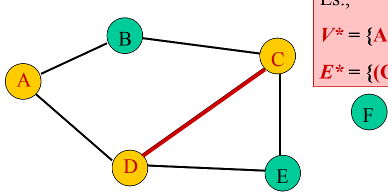
Es., ***W*(A, B) = 3,**
***W*(D,E) = – 2.3**,
ecc.

***W*(C,F) = ∞**

Definizione

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un **sottografo** di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$ (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$).



Es.,

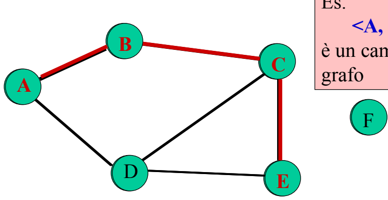
V^* = {A, C, D},

E^* = {(C, D)}.

Definizione

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

Un **cammino** nel grafo è una sequenza di vertici $<w_1, w_2, ..., w_n>$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.



Es.

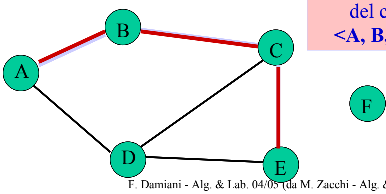
<A, B, C, E>

è un cammino nel grafo

Il ***cammino*** $\langle w_1, w_2, ..., w_n \rangle$ **contiene** i vertici w_1, $w_2, \ldots, w_n$ e gli archi (w_1,w_2) (w_2,w_3) $\ldots(w_{n-1},w_n)$.

La **lunghezza** del cammino è il ***numero totale di archi*** che collegano i vertici della sequenza (uno in meno del numero di vertici).

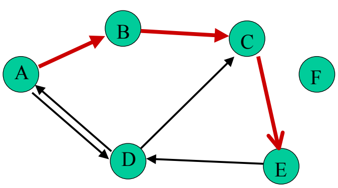
Es. la unghezza del cammino **<A, B, C, E>** è **3**.



Esempio: in un grafo orientato

Es., <A, B, C, E> è un cammino in questo grafo orientato, ma ...

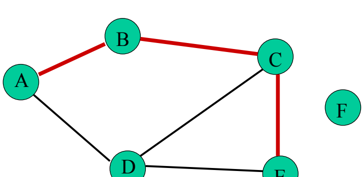
<A, B, C, D> **NON** *è* un cammino, poiché **<C, D>** non è un arco.



Un cammino si dice **semplice** se tutti i ***suoi vertici sono distinti*** (compaiono una sola volta nella sequenza), eccetto al più il primo e l'ultimo che possono essere lo stesso.

Es. il cammino **<A, B, C, E>** è **semplice** ...

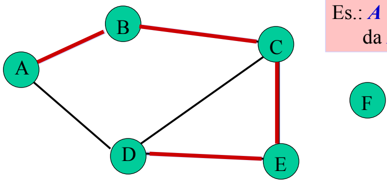
... ma il cammino **<A, B, C, E, D, C >** **NON** è semplice, poiché **C** è ripetuto.



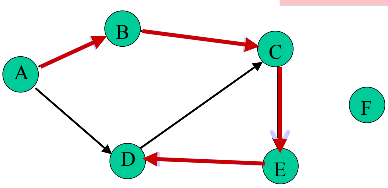
Se esiste un cammino ***p*** tra i vertici ***v*** e ***w***, si dice che ***w* è raggiungibile da *v*** tramite ***p***

$v \xrightarrow{p} w$

Es.: ***A*** è **raggiungibile** da ***D*** e viceversa



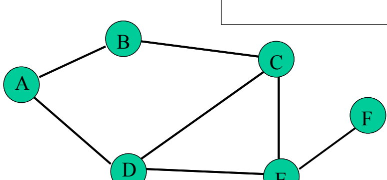
Es.: ***D*** è **raggiungibile** da ***A*** ma non viceversa



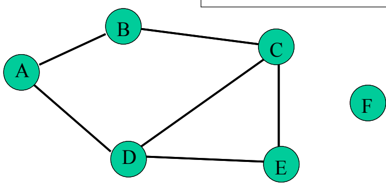
Definizione

Se ***G*** è un ***grafo non orientato***, definiamo ***G*** **connesso** se esiste un ***cammino*** da ***ogni vertice*** ad ***ogni altro vertice***.

Ad es. questo grafo non orientato è **connesso**.



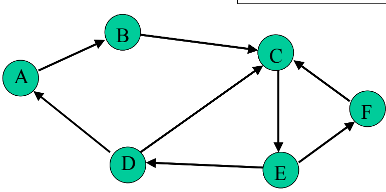
Ad es. questo grafo non orientato **NON** è connesso.



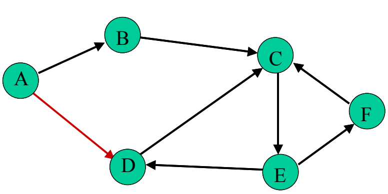
Definizione

Se ***G*** è un ***grafo orientato***, definiamo ***G*** **fortemente connesso** se esiste un ***cammino*** da ***ogni vertice*** ad ***ogni altro vertice***.

Ad es. questo grafo orientato è **fortemente connesso**.



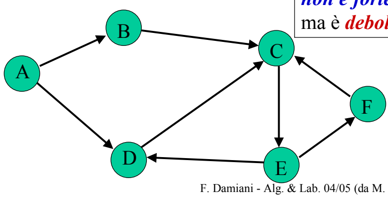
Ad es. questo grafo orientato **NON** è fortemente connesso. **Infatti, *non esiste cammino da* D *a* A.**



Definizione

Definiamo **debolmente connesso** un ***grafo orientato*** tale che il grafo ottenuto da esso ***dimenticando la direzione degli archi*** è ***connesso*****.**

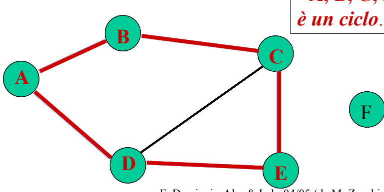
Ad es. questo grafo orientato ***non è fortemente connesso***, ma è ***debolmente connesso***



Definizione

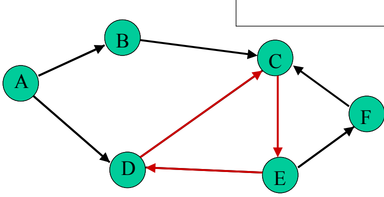
Un **ciclo** in un grafo è un cammino $<w_1, w_2, \ldots, w_n>$ di lunghezza almeno 1, tale che $w_1 = w_n$.

Es.: il cammino **<A, B, C, E, D, A>** ***è un ciclo***.

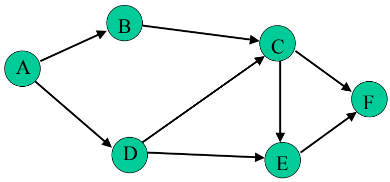


Un ***grafo senza cicli*** è detto ***aciclico***.

Ad es. questo grafo orientato ***non è aciclico***, ...



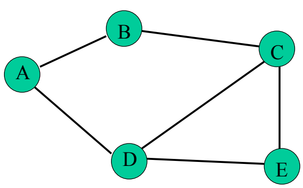
Un ***grafo orientato aciclico*** è spesso chiamato **DAG** (***D**irected **A**cyclic **G**raph*).



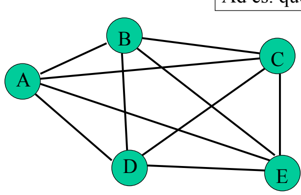
Definizione

Un **grafo completo** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici***.

Ad es. questo grafo **NON** è completo



Ad es. questo grafo è **completo**

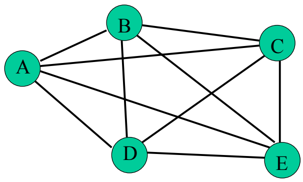


Suppomiano che ***G* = (*V*, *E*)** sia ***completo***.

É possibile esprimere |*E*| come funzione di |*V*|?

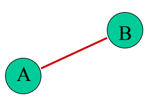
Es. di grafo completo

Questo grafo ha |*V*| = **5** vertici e |*E*| = **10** archi.



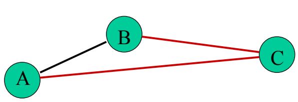
Grafi Completi

|*V*|	|*E*|
1	0

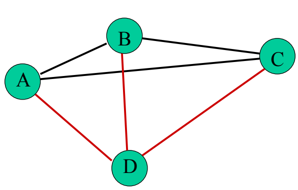


|*V*|	|*E*|
1	0
2	1

Grafi Completi

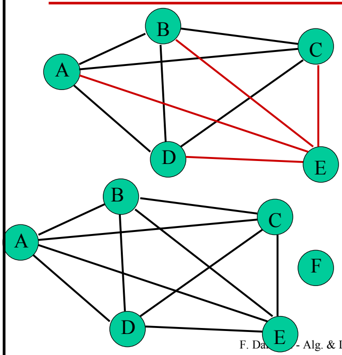


|*V*|	|*E*|
1	0
2	1
3	3



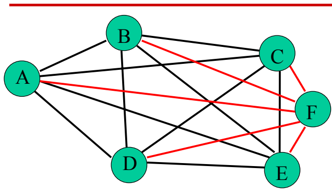
|*V*|	|*E*|
1	0
2	1
3	3
4	6

Grafi Completi



$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert$
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert$
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	?



$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert$	
1	0	
		+1
2	1	
		+2
3	3	
		+3
4	6	
		+4
5	10	
		+5
6	15	

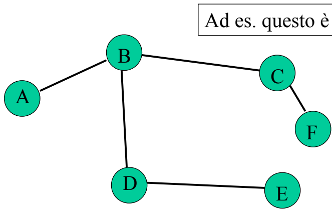
Per ottenere un grafo completo con ***n*** vertici da un grafo completo con ***n*–1 vertici**, si devono aggiungere n–1 nuovi archi ... quindi il **numero totale di archi**, quando $|V| = n$ è

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{|V|^2 - |V|}{2}$$

Definizione

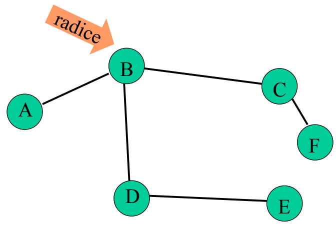
Un **albero libero** è un ***grafo non orientato connesso, aciclico***.

Ad es. questo è un ***albero libero***



"**libero**" si riferisce al fatto che non esiste un vertice designato ad essere la "**radice**"

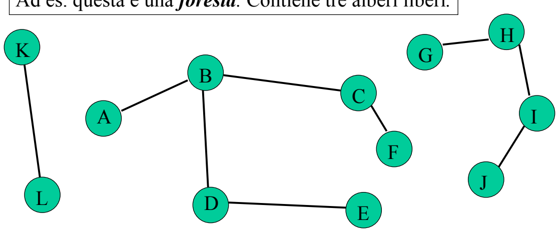
Se qualche ***vertice*** è designato ad essere la ***radice***, otteniamo un **albero radicato**.



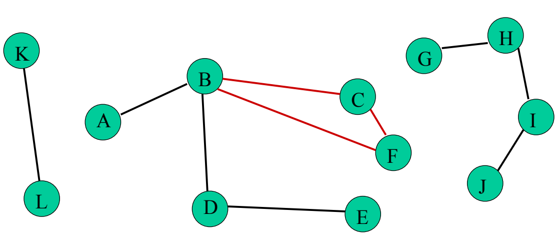
Definizione

Un ***grafo non orientato aciclico*** ma ***non connesso***, prende il nome di ***foresta***.

Ad es. questa è una ***foresta***. Contiene tre alberi liberi.

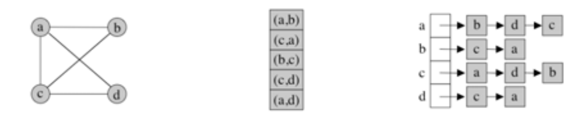


Ad es. questo ***grafo contiene un ciclo***. Perciò ***non é*** un ***né albero libero né*** una ***foresta***.

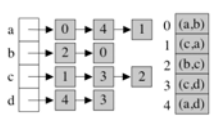


Strutture dati per rappresentare grafi

Grafi non orientati



(a) Grafo non orientato G (b) Lista di archi di G (c) Liste di adiacenza di G



(d) Liste di incidenza di G

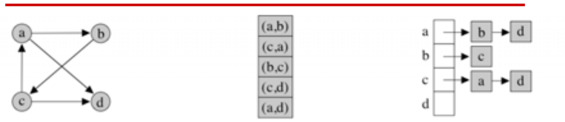
	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

(e) Matrice di adiacenza di G

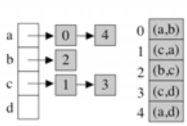
	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	1	0	0	1
b	1	0	1	0	0
c	0	1	1	1	0
d	0	0	0	1	1

(f) Matrice di incidenza di G

Grafi orientati



(a) Grafo orientato G (b) Lista di archi di G (c) Liste di adiacenza di G



(d) Liste di incidenza di G

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	0	1
d	0	0	0	0

(e) Matrice di adiacenza di G

	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	-1	0	0	1
b	-1	0	1	0	0
c	0	1	-1	1	0
d	0	0	0	-1	-1

(f) Matrice di incidenza di G

Prestazioni della lista di archi su grafi non orientati

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$O(m)$
archiIncidenti(v)	$O(m)$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(m)$
aggiungiVertice(v)	$O(1)$?
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$?
rimuoviVertice(v)	$O(m)$
rimuoviArco(e)	$O(m)$

Prestazioni delle liste di adiacenza su grafi non orientati

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$O(\delta(v))$
archiIncidenti(v)	$O(\delta(v))$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
aggiungiVertice(v)	$O(1)$?
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$?
rimuoviVertice(v)	$O(m)$?
rimuoviArco($e = (x, y)$)	$O(\delta(x) + \delta(y))$

Prestazioni della matrice di adiacenza su grafi non orientati

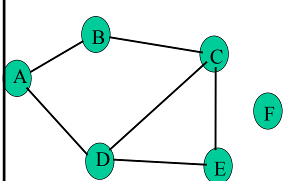
Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$O(n)$
archiIncidenti(v)	$O(n)$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(1)$
aggiungiVertice(v)	$O(n^2)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(v)	$O(n^2)$
rimuoviArco(e)	$O(1)$

Strutture dati per rappresentare grafi (ulteriori dettagli su matrici di adiacenza e liste di adiacenza)

Rappresentazione con *matrice di adiacenza* di un *grafo non orientato*

$$M(v, w) = \begin{cases} 1 & \text{se } (v, w) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Spazio: $|V|^2$

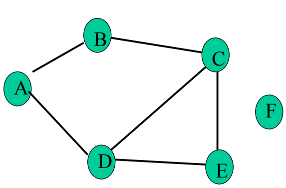


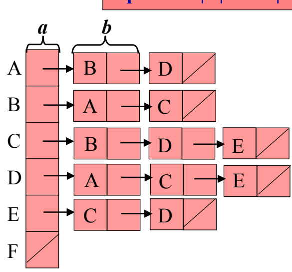
	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	1	0	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Rappresentazione con *liste di adiacenza* di un *grafo non orientato*

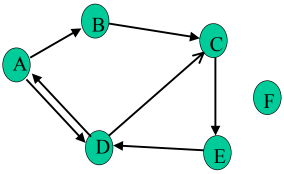
$L(v)$ = lista di w, tale che $(v, w) \in E$, per $v \in V$

Spazio: $a\,|V| + 2\,b\,|E|$



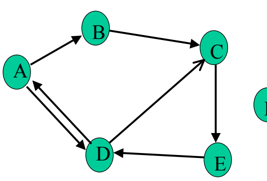


Rappresentazione con ***matrice di adiacenza*** di un ***grafo orientato***

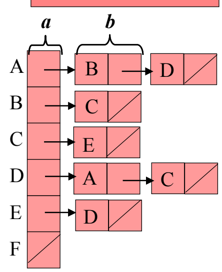


$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

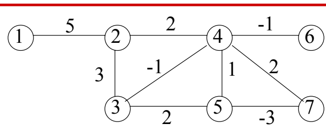
Rappresentazione con ***liste di adiacenza*** di un ***grafo orientato***



Spazio: *a* |V| + *b* |E|

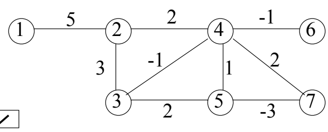


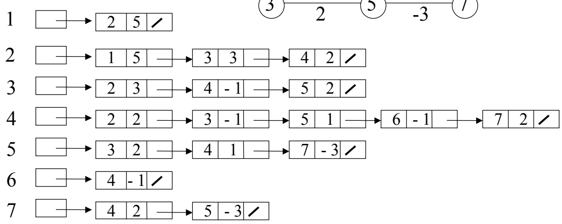
Esempio di rappresentazione con ***matice di adiacenza*** di un ***grafo PESATO non orientato***



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio di rappresentazione con ***liste di adiacenza*** di un ***grafo PESATO non orientato***





Riepilogo (1/2)

- Concetto di grafo e terminologia
- Diverse strutture dati per rappresentare grafi nella memoria di un calcolatore

Riepilogo (2/2)

Matrice di adiacenza

- Spazio richiesto **$O(|V|^2)$**
- Verificare se i vertici ***u*** e ***v*** sono adiacenti richiede tempo **$O(1)$**
- Adatta per grafi ***densi***, in cui |E| è dell'ordine di $|V|^2$

Liste di adiacenza

- Spazio richiesto **$O(|E|+|V|)$**
- Verificare se i vertici ***u*** e ***v*** sono adiacenti richiede tempo **$O(|V|)$**
- Adatta per grafi ***sparsi***, in cui |E| è molto minore di $|V|^2$