Exercices sur la transformée en Z

EXERCICE 1

A partir de la définition et en admettant que l'on peux dériver la somme, calculer la transformée de $n \times U(n)$ où U représente l'échelon unité.

A partir de la définition et en admettant que l'on peux dériver la somme, calculer la transformée de $n^2 \times U(n)$ où U représente l'échelon unité.

EXERCICE 2

Retrouver les originaux de $F(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+3)}$, $G(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}$ et de $H(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z+3)}$

EXERCICE 3

On emprunte 10000 euros à $1,6\%$ par mois. On décide de rembourser 300 euros par mois. On note $D(n)$ la dette après n mois.

1-Montrer que $D(n+1) = 1,016D(n) - 300$ (E)

2- Calculer $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$ et $D(5)$ à l'aide de la formule (E).

On note F la transformée en Z de l'échantillon $D(n)$

3- Montrer que $F(z) = \dfrac{10000}{z-1,016} - \dfrac{300z}{(z-1)(z-1,016)}$

4- Montrer que $\dfrac{F(z)}{z} = \dfrac{18750}{z-1} - \dfrac{8750}{z-1,016}$

5- En déduire l'expression de $D(n)$ (S)

6- Calculer $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$ et $D(5)$ à l'aide de la formule (S).

7- Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $D(n) < 0$. Donner une signification pratique du résultat obtenu.

EXERCICE 4

On définit la suite U par $U(n+2) = 2U(n+1) + 8U(n) + 2$, $U(0) = 1$ et $U(1) = 2$

1- Calculer $U(1)$, $U(2)$, $U(3)$, $U(4)$ et $U(5)$ à l'aide de la définition de U.

On note F la transformée en Z de U

2- Montrer que $F(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 2z - 8} + \dfrac{2z}{z-1}$

3- Montrer que $\dfrac{F(z)}{z} = \dfrac{A}{z-4} + \dfrac{B}{z+2} + \dfrac{C}{z-1}$ où A, B et C sont des constantes réelles à déterminer.

4- En déduire l'expression de $U(n)$ (S)

5- Calculer $U(1)$, $U(2)$, $U(3)$, $U(4)$ et $U(5)$ à l'aide de la formule (S).