CORRECTION DU TD D'ANALYSE II

Serie 1:

Exercice 1

(a) On trouve : $\dfrac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)} = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{s}{s^2+1}$.

(b) La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$s^2Y - 2 - \frac{5}{2}sY + Y = -\frac{5}{2}\frac{1}{s^2+1}, \quad \text{d'où } Y = \frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)},$$

et l'on déduit du (a) que $y(x) = \mathrm{e}^{2x} - \cos x$, qui vérifie bien les conditions initiales.

Exercice 2

La transformée de Laplace du système est :

$$\begin{cases} s^2Y - 1 + s(Z-Y) = -\frac{3}{4}Y \\ s^2Z + 1 - s(Z-Y) = -\frac{3}{4}Z \end{cases}, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} s^2(Y+Z) = -\frac{3}{4}(Y+Z) \\ s^2(Y-Z) - 2 + 2s(Z-Y) = -\frac{3}{4}(Y-Z) \end{cases},$$

si bien que

$$\begin{cases} Y + Z = 0 \\ 2s^2Y - 2 - 4sY = -\frac{3}{2}Y \end{cases}, \qquad \text{d'où} \quad Y = \frac{1}{(s-1/2)(s-3/2)} = -\frac{1}{s-1/2} + \frac{1}{s-3/2} = -Z.$$

On a donc $y(x) = -\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{3x/2} = -z(x)$, qui vérifie bien les conditions initiales.

Exercice 3

La transformée de Laplace du système est :

$$\begin{cases} sY_1 + 2sY_2 + 3sY_3 = 0 \\ sY_1 - sY_2 = 3/s^2 - 3/s \\ sY_2 + 2Y_3 = 1/s - 2/s^3 \end{cases}, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} sY_1 = -2sY_2 - 3sY_3 \\ -sY_2 - sY_3 = 1/s^2 - 1/s \\ sY_2 + 2Y_3 = 1/s - 2/s^3 \end{cases},$$

puis

$$\begin{cases} sY_1 = -2sY_2 - 3sY_3 \\ -sY_2 - sY_3 = 1/s^2 - 1/s \\ (2-s)Y_3 = 1/s^2 - 2/s^3 \end{cases}, \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} Y_1 = -2/s^2 + 3s^3 \\ Y_2 = 1/s^2 \\ Y_3 = -1/s^3 \end{cases}.$$

On obtient $y_1(x) = -2x + \dfrac{3}{2}x^2$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Exercice 4

(a) On a : $f'(x) = \sin(\omega x) + x\omega\cos(\omega x)$, donc

$$f''(x) = \omega\cos(\omega x) + \omega\cos(\omega x) - x\omega^2\sin(\omega x) = 2\omega\cos(\omega x) - \omega^2 f(x).$$

(b) En prenant la transformée de Laplace de f'', on trouve :

$$s^2\,\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2} - \omega^2\,\mathcal{L}(f) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}(f) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

(c) On en déduit :

$$\frac{s}{(s^2+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{3}s}{\left(s^2+\sqrt{3}^2\right)^2} = \mathcal{L}\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x)\right).$$

Serie 2:

Exercice 1:

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, on vient de montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et par conséquent simplement sur $\mathbb{R}$

2. Les fonctions f_n sont continues, elles convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonctions continue.
3. La convergence étant uniforme sur $[0,\pi] \subset \mathbb{R}$ et les fonctions f_n étant continues donc intégrables on a

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^\pi f_n(x)dx \;= \sum_{n\geq 1} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx$$

On calcule

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n^3}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n^4}(-\cos(n\pi)+1) = \frac{1}{n^4}(1-(-1)^n)$$

Selon que n est pair ou impair $1-(-1)^n$ est nul ou vaut 2, on va couper la somme en deux

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx \;= \sum_{n\geq 1}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2p}}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^4} = 0 + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^4}$$

Puis on pose $n = p+1$, $p = 0 \Rightarrow n = 1$

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx \;= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}$$

C'est bien l'égalité demandé.

4. Les fonctions f_n sont dérivables, $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement il reste à montrer que la série de fonction de terme général f_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

La série de fonction de terme général f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation des séries

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Remarque : il n'était pas nécessaire de montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général f_n' sur $\mathbb{R}$, sur un intervalle $[a,b]$ cela suffit.

5. D'après la question précédente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} = f'(x)$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}$$

Pour les valeurs paires $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc on va distinguer les valeurs paires de valeurs impaires

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(2p\frac{\pi}{2}\right)}{(2p)^3} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(p\pi)}{(2p)^3} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3}$$

$$= 0 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

Puis on pose $n = p$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Serie 3:

II-d Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. Soit $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} n2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|} = \frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n} = 2\frac{n}{n-1} \to 2$$

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{2}$

2. Soit $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} n2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|} = \frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n} = 2\frac{n}{n-1} \to 2$$

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{2}$.

3. Soit $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$

$$f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$$

4. Soit $a_n = e^{-n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = e^{n^2-(n+1)^2} = e^{-2n-1} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Ou

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{-n} \to 0$$

5. Soit $a_n = \frac{n-1}{n^2+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n}{(n+1)^2+1}}{\frac{n-1}{n^2+1}} = \frac{n(n^2+1)}{((n+1)^2+1)(n-1)} \to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R = 1$.

6. Soit $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln(n)}{n^2}} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{1} = 1$.

7.

$$f_7(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} X^n$$

Avec $x = z^2$

Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{[a_n|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1} X^n$ est $R = \frac{1}{1}$

Et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n}$ est $R'^2 = R = 1$, donc $R' = 1$.

8. Soit $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{[a_n|} = \frac{\left|\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}\right|}{\left|\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right|} = \frac{(3(n+1))!}{(3n)!} \times \frac{(n!)^3}{((n+1)!)^3} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \times \frac{(n!)^3}{((n+1)n!)^3} =$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(3n)!} \times \frac{(n!)^3}{(n+1)^3(n!)^3} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}$$

$$\to 3^3 = 27$$

Donc

$$R = \frac{1}{27}$$

9. Soit $a_n = n^\alpha$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{1}$.

Exercice 1:

1. Pour tout $x \in [0,1[$, $x^2 \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{N} x^{2n} = \sum_{n=0}^{N} (x^2)^n = \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2} \to \frac{1}{1-x^2}$$

Cette série de fonctions converge simplement vers la fonction $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

2. $\forall x \in [0,1[, |x^{2n}| \leq a^{2n}$, or la série de terme général a^{2n} converge (voir 1.) donc la série de fonction de terme général x^{2n} est normalement convergente sur $[0,a]$ par conséquent elle converge uniformément sur $[0,a]$.

3. Supposons que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,1[$ alors elle converge uniformément vers sa limite simple $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2}\right| = \frac{x^{2N+2}}{1-x^2}$$

On considère la suite de terme général

$$x_N = 1 - \frac{1}{N}$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} = \frac{e^{(2N+2)\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{1-\left(1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}\right)} = \frac{e^{(2N+2)\left(-\frac{1}{N}+o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}}{\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}} = N^2\frac{e^{-2+o(1)}}{2N-1} \sim \frac{N}{2e} \to +\infty$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,1[}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \sup_{x\in[0,1[}\left|\frac{x^{2N+2}}{1-x^2}\right| \geq \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} \to +\infty$$

Ce qui montre qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonction de terme général x^{2n}.

Exercice 2:

1. On va appliquer les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2 \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)} \to 0$$

Donc la série (numérique) de terme général $\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général $f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge simplement.

2.

$$\left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}\right| < \frac{e^{-na}|\sin(nx)|}{\ln(n+1)} \leq \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$$

On applique les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2 \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)} \to 0$$

Donc la série numérique de terme général $\frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$ converge, par conséquent la série fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$, ce qui entraine que la série fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3:

1. Sur $[0,1[$, $x^n \to 0$ donc $f_n(x) \to 0$
   Si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$
   Si $x \in]1, +\infty[$, $x^n \to +\infty$ donc $f_n(x) \to 1$
   Revenons à la série de fonctions de terme général f_n :
   - Sur $[0, +\infty[$, il y a des valeurs pour lesquelles $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0, +\infty[$,, donc elle ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
   - Sur $[0,1]$, il y a un problème en $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0,1]$,, donc elle ne converge pas normalement sur $[0,1]$.
   - Sur $[0, a]$, pour tout $x \in [0, a]$ $f_n(x) \to 0$ mais cela ne suffit pas à assurer la converge simple de la série de fonctions de terme général f_n (avec $f_n(x) > 0$)
   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n} \sim x^n$$
   x^n est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$ donc convergente, ce qui entraine que la série numérique de terme général converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0, a]$.
   $$\forall x \in [0, a], \left|\frac{x^n}{1 + x^n}\right| \leq \frac{a^n}{1 + 0} = a^n$$
   a^n est le terme général d'une série géométrique convergente car $a \in]0,1[$ donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement.
2. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, la série nulle converge.
   Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3} \sim \frac{x^2}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$
   Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   $$f_n'(x) = \frac{2x(n^3 + x^3) - x^2 \times 3x^2}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{2nx^3 - x^4}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{x^3(2n - x)}{(n^3 + x^3)^2}$$
   Manifestement les fonctions f_n admettent un maximum en $x = 2n$ (il faut faire un tableau de variation)
   $$f_n(2n) = \frac{(2n)^2}{n^3 + (2n)^3} = \frac{4n^2}{9n^3} = \frac{4}{9n}$$
   On a donc
   $$\sup_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(2n) = \frac{4}{9n}$$
   Il s'agit d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$)
   Donc la série ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
   Sur $[0, a]$ le maximum est en $f_n(a)$ (au moins pour n assez grand)
   $$f_n(a) = \frac{a^2}{n^3 + a^3} \sim \frac{a^2}{n^3}$$
   ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, par conséquent elle converge normalement sur $[0, a]$.
3. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, la série nulle converge.
   Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3} \sim \frac{x}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$
   Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   $$f_n'(x) = \frac{n^3 + x^3 - x \times 3x^2}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{n^3 - 2x^3}{(n^3 + x^3)^2}$$
   Il est à peu près clair que les fonctions f_n atteignent leur maximum là où la dérivée s'annule, c'est-à-dire pour

$$x^3 = \frac{n^3}{2} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{3}}n$$

$$f_n\left(2^{-\frac{1}{3}}n\right) = \frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{n^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}n\right)^3} = \frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{\frac{3}{2}n^3} = \frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$

Il s'agit d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$, donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4:

1. Si $x \neq 0$

$$|f_n(x)| \sim \frac{x^2}{n}$$

c'est insuffisant pour la convergence de la série, mais il s'agit d'une série alternée.

On pose $g_n(x) = \frac{x^2}{x^4+n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, pour un x fixé, cette suite est décroissante, d'après le TSSA, la suite numérique de terme général $\frac{x^2}{x^4+n}$ converge, au moins pour $x \neq 0$, mais pour $x = 0$, tout est nul, il y a convergence aussi.

2. Il faut utiliser le théorème du TSSA sur la majoration du reste

$$R_n(x) \leq |f_n(x)| = g_{n+1}(x) = \frac{x^2}{x^4 + n + 1}$$

Il suffit de montrer que cette expression tend vers 0 indépendamment de x.

$$g'_{n+1}(x) = \frac{2x(x^4 + n + 1) - x^2 \times 4x^3}{(x^4 + n + 1)^2} = \frac{2x(-2x^4 + n + 1)}{(x^4 + n + 1)^2}$$

Les fonctions g_n sont positives, donc elles atteignent leur max quand la dérivée s'annule.

$$g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$g_{n+1}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\frac{n+1}{2} + n + 1} = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\frac{3}{2}(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

Ce qui entraine que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} R_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions f_n.

3. Examinons la convergence normale sur un intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

Etudions la suite de fonctions

$$|f_n(x)| = g_n(x) = \frac{x^2}{x^4 + n}$$

L'étude de cette fonction a déjà été faite au 2. en remplaçant $n + 1$ par n

Sur $[a, b]$, le maximun est

soit

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Soit

$$\frac{a^2}{a^4+n} \sim \frac{a^2}{n}$$

Soit

$$\frac{b^2}{b^4+n} \sim \frac{b^2}{n}$$

Qui sont les termes généraux de séries divergentes avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ et $\alpha = 1 \leq 1$, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n n'est pas absolument convergente, sur un intervalle $[a, b]$.
Pour les intervalles du même type dans $\mathbb{R}^-$ cela ne change rien puisque les fonctions f_n sont paires.

4. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la convergente est uniforme sur $\mathbb{R}$ donc la somme est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9:

1. On pose $g_n(x) = |f_n(x)| = \frac{1}{(n+1)(x+1)}$

   La série de fonctions de terme général f_n est une série alternée, on va appliquer le TSSA

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(x+1)} = 0$$

   La suite $\left(\frac{1}{(n+1)(x+1)}\right)_n$ est décroissante, d'après le TSSA la série de fonctions f_n' converge simplement.

2. D'après le TSSA le reste de la série vérifie

   $$\forall x \in [0,1], \qquad |R_n(x)| \leq g_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+2)(x+1)} \leq \frac{1}{(n+2)(1+1)} = \frac{1}{2(n+2)}$$

   Ce reste est majoré indépendamment de x et tend vers 0, cela montre que la série de fonctions f_n converge uniformément.

3.

   $$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{(n+1)(x+1)} = \frac{1}{2(n+1)} \sim \frac{1}{2n}$$

   La valeur maximum est atteint pour $x = 1$

   $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc la série ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

II-Series de Fourier exercice 1,2,3,4,5&6:

Solution de l'exercice 1 Il est facile de voir que la fonction f est paire, de sorte que les coefficients b_n sont tous nuls, et que

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n^2}\big(1-(-1)^n\big) & \text{si } n \neq 0, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On a donc :

$$SF(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k\geq 1} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos\big((2k+1)t\big).$$

Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet montre que la série converge vers f en tout point de $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2 La fonction f n'est ni paire ni impaire. Calculons ses coefficients de Fourier trigonométriques. D'une part,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

et d'autre part, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right\} \\
&= -\frac{2}{\pi}\left\{\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{n^2}\,\mathrm{d}t\right\} \\
&= -\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{2\pi}{n^2} + \left[\frac{\sin(nt)}{n^3}\right]_0^{2\pi}\right\} \\
&= \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-t^2\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2t\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{4\pi^2}{n} + \left[2t\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\frac{\sin(nt)}{n^2}\,\mathrm{d}t\right\} \\
&= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^3}\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{4\pi}{n}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$SF(f)(t) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\pi\sin(nt)}{n}\right).$$

La fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série $SF(f)$ converge en tout t vers

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2\pi^2 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 3

(1) La fonction f étant impaire, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La série de Fourier trigonométrique de f est donc donnée par

$$SF(f)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin\big((2k+1)t\big).$$

(2) La fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série $SF(f)$ converge en tout t vers

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = f(t).$$

La convergence ne peut être uniforme car la limite f n'est pas continue.

(3) Pour $t = \pi/2$, on a :

$$\sin\big((2k+1)t\big) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque f est impaire, l'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n(f)|^2 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ensuite, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Enfin,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solution de l'exercice 4

(1) On a :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}}{1-in}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left((-1)^n\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1-in}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-in}. \end{aligned}$$

(2) On vérifie facilement que les hypothèses du théorème de Dirichlet sont satisfaites. Il s'ensuit que

$$SF(f)(t) = c_0(f) + \sum_{n\geq 1}\left(c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}\right)$$

converge vers $f(t)$ si $t \in]-\pi,\pi[$ et vers $\big(f(\pi+)+f(\pi-)\big)/2 = \operatorname{ch}\pi$ si $t=\pi$. Autrement dit,

$$\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{int} = \begin{cases} e^t & \text{si } t\in]-\pi,\pi[\\ \operatorname{ch}\pi & \text{si } t=\pi. \end{cases}$$

La fonction somme n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

(3) Pour $t=0$, on obtient :

$$1 = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{1-in}+\frac{1}{1+in}\right) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1+n^2},$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi}+1\right).$$

Pour $t=\pi$, on obtient :

$$\operatorname{ch}\pi = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\operatorname{th}\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-in} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{1+n^2},$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{th}\pi}+1\right).$$

Solution de l'exercice 5 :

(1) On remarque que f est paire, de sorte que $b_n(f) = 0$ pour tout n. Par ailleurs,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny + n\pi)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{4}{n^2}(-1)^n \pi \\ &= \frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

où l'on a effectué deux intégrations par parties. La série de Fourier de f s'écrit donc

$$SF(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

(2) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Le théorème de Dirichlet permet donc de conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SF(f)(x) = f(x)$.

(3) D'après la question précédente,

$$\pi^2 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad 0 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Solution de l'exercice 6 : On écrit :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

et, en dérivant terme à terme,

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos nt - nA_n \sin nt)\,.$$

On a alors

$$x'(t) + \alpha x(t) = \frac{\alpha A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big[(nB_n + \alpha A_n)\cos nt + (\alpha B_n - nA_n)\sin nt\big].$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & \alpha A_0, \\ a_n & = & nB_n + \alpha A_n, \\ b_n & = & \alpha B_n - nA_n, \end{array}\right. \qquad \textit{i.e.} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} A_0 & = & \dfrac{a_0}{\alpha}, \\ A_n & = & \dfrac{\alpha a_n - nb_n}{n^2+\alpha^2}, \\ B_n & = & \dfrac{na_n + \alpha b_n}{n^2+\alpha^2}. \end{array}\right.$$

La fonction f proposée est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons ses coefficients de Fourier. On a :

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\left[-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2}.$$

Par ailleurs, on remarque que la fonction $f - a_0(f)/2$ est impaire, de sorte que $a_n(f) = 0$ pour $n \geq 1$. Enfin,

$$\begin{array}{rcl} b_n(f) & = & \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\left[-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]\sin nt\,\mathrm{d}t \\ & = & \dfrac{1-(-1)^n}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}\int_\pi^{2\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t \\ & = & \dfrac{1-(-1)^n}{\pi} I_1 + \dfrac{\pi}{2} I_2, \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \displaystyle\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\left[-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos nt}{n}\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{\pi^2}{4n}\big(1-(-1)^n\big) + \frac{2}{n}\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos nt\,\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{\pi^2}{4n}\big(1-(-1)^n\big) + \frac{2}{n}\left(\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t\right) \\ & = & \displaystyle\frac{\pi^2}{4n}\big(1-(-1)^n\big) + \frac{2}{n^2}\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi \\ & = & \displaystyle\frac{\pi^2}{4n}\big(1-(-1)^n\big) + \frac{2}{n^3}\big(1-(-1)^n\big) \\ & = & \displaystyle\big(1-(-1)^n\big)\left[\frac{\pi^2}{4n} - \frac{2}{n^3}\right] \end{array}$$

et

$$I_2 = \int_\pi^{2\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_\pi^{2\pi} = -\frac{1}{n}\big(1-(-1)^n\big).$$

Donc

$$b_n(f) = \frac{-4(1-(-1)^n)}{\pi n^3}.$$

On obtient $A_0 = \pi^2/2$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_{2k} = B_{2k} = 0$,

$$\begin{array}{rcl} A_{2k-1} & = & \dfrac{8}{\pi(2k-1)^2\big((2k-1)^2+1\big)} \\ \text{et } B_{2k-1} & = & \dfrac{-8}{\pi(2k-1)^3\big((2k-1)^2+1\big)}. \end{array}$$

Finalement, il est facile de voir que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos nt - nA_n \sin nt)$$

est uniformément convergente, et que par conséquent la série

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)\,,$$

qui est aussi uniformément convergente, a pour somme une fonction $x(t)$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est solution de l'équation différentielle donnée.

Serie 4:

Exercice 1:

$x_1(t) = 6 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$:

Pour $x_1(t)$, en comparant à la relation générale du développement en série de Fourier,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \quad (1.1)$$

on a :

1. Une composante continue $\frac{a_0}{2} = \frac{12}{2} = 6$
2. Une harmonique 1 (fondamental) à $f_0 = 1\,[\mathrm{kHz}]$, avec $a_1 = -2$ et $b_1 = 3$

Pour la représentation des spectres unilatéraux et bilatéraux, il faut calculer la série de Fourier en cosinus ainsi que la série de Fourier complexe. On a tout d'abord pour la série en cosinus :

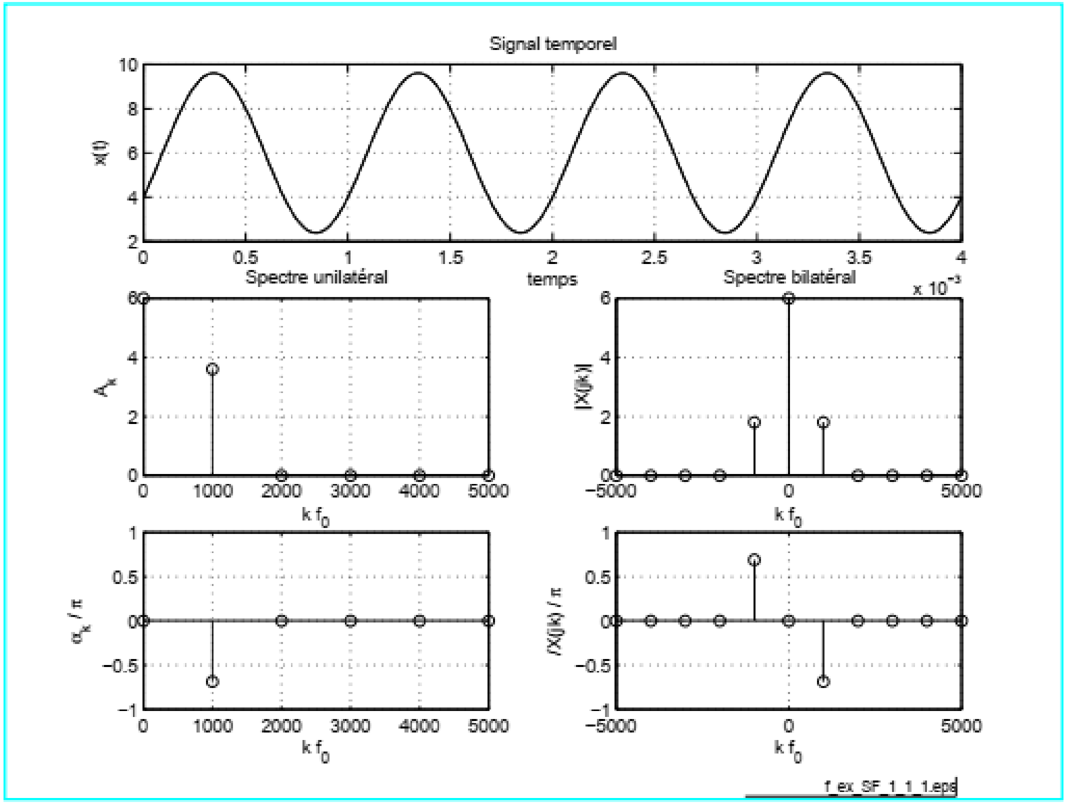

FIG. 1.1 – Spectres unilatéral et bilatéral de $x_1(t)$ (fichier source).

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\
A_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3.6056 \\
\alpha_1 &= \arctan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-3}{-2}\right) = -2.1588 \text{ [rad]} = -123.6901 \text{ [°]}
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= 6 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
&= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) \\
&= 6 + 3.6056 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - 2.1588)
\end{aligned}
$$

$x_2(t) = 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$ **:**

Pour $x_2(t)$, on a en se référant au développement en série de Fourier (1.1) :

1. Une composante continue $\frac{a_0}{2} = \frac{8}{2} = 4$

2. Des harmoniques à $f_0 = 1\,[\text{kHz}]$ et $3 \cdot f_0 = 3\,[\text{kHz}]$, avec a_1 et b_1 à calculer, $a_3 = 0$, $b_3 = 0.8$

Pour la représentation des spectres unilatéraux et bilatéraux, il faut calculer la série de Fourier en cosinus ainsi que la série de Fourier complexe. On a pour la série en cosinus :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{a_0}{2} = 4 \\
A_1 &= 1.8 \quad \left(= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right) \\
\alpha_1 &= \frac{\pi}{3} \\
A_3 &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{0^2 + 0.8^2} = 0.8 \\
\alpha_3 &= \arctan\left(\frac{-b_3}{a_3}\right) = \arctan\left(\frac{-0.8}{0}\right) \to -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t\right) \\
&= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= A_0 + A_1 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1\right) + A_3 \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3\right)
\end{aligned}$$

Dans le cas général, il aurait fallu calculer a_1 et b_1 selon les relations :

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t\right) \cdot dt \qquad k \geq 0 \\
b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t\right) \cdot dt \qquad k \geq 1
\end{aligned}$$

En tenant compte des identités trigonométriques

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) \\
\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

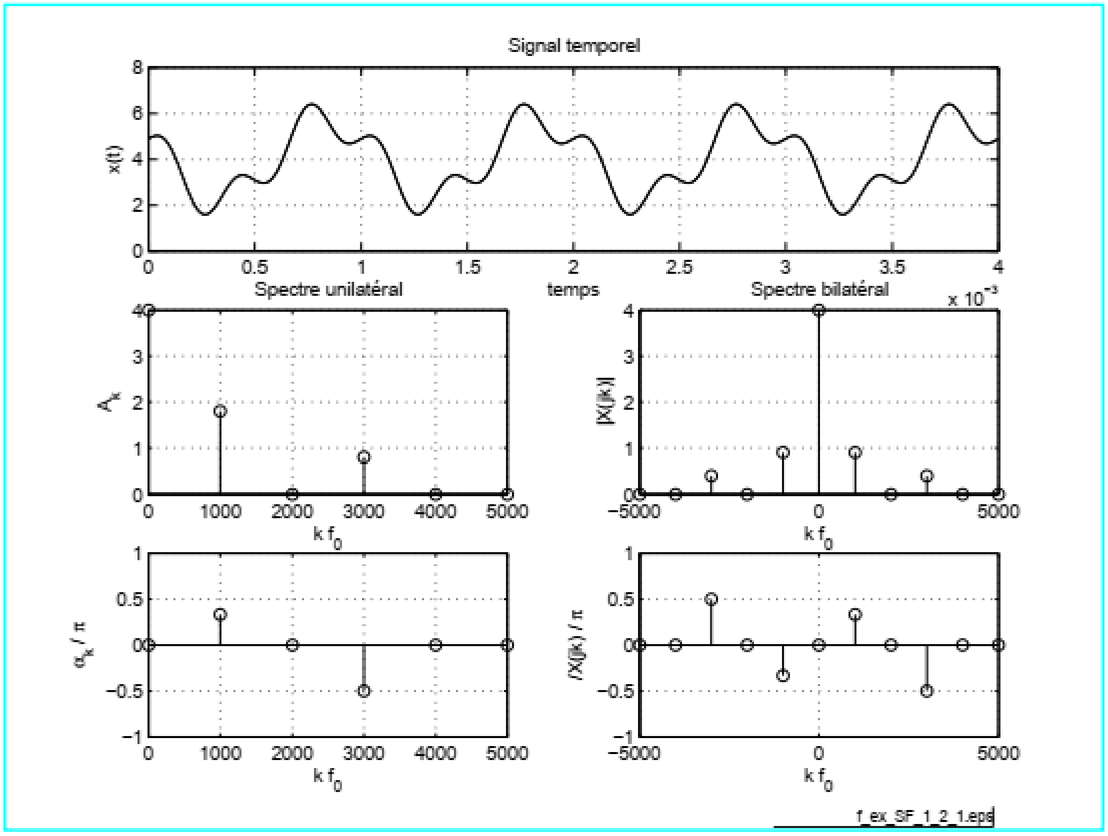

FIG. 1.2 – Spectres unilatéral et bilatéral de $x_2(t)$ (fichier source).

on a donc :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \cos\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) [t]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \\
&= 0.9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \sin\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) [t]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \\
&= -0.9 \cdot \sqrt{3}
\end{aligned}$$

On vérifie que l'on a bien :

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{0.9^2 + \left(-0.9 \cdot \sqrt{3}\right)^2} = 1.8$$

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{0.9 \cdot \sqrt{3}}{0.9}\right) = 1.047 = \frac{\pi}{3}$$

Pour $x_1(t)$:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1\right) \\
&= A_0 + \frac{A_1}{2} \cdot \left(e^{+j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)} + e^{-j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)}\right) \\
&= A_0 + \frac{A_1}{2} \cdot \left(e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \cdot e^{+j\cdot\alpha_1} + e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \cdot e^{-j\cdot\alpha_1}\right) \\
&= \underbrace{X_1(j\cdot 0)}_{A_0} + \underbrace{X_2(j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{+j\cdot\alpha_1}} \cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X_2(-j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{-j\cdot\alpha_1}} \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}
\end{aligned}$$

Pour $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1\right) + A_3 \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3\right) \\
&= A_0 + \frac{A_1}{2} \cdot \left(e^{+j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)} + e^{-j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)}\right) + \frac{A_3}{2} \cdot \left(e^{+j\cdot(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)} + e^{-j\cdot(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)}\right) \\
&= A_0 + \frac{A_1}{2} \cdot \left(e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \cdot e^{+j\cdot\alpha_1} + e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \cdot e^{-j\cdot\alpha_1}\right) + \frac{A_3}{2} \cdot \left(e^{+j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \cdot e^{+j\cdot\alpha_3} + e^{-j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \cdot e^{-j\cdot\alpha_3}\right) \\
&= \underbrace{X_1(j\cdot 0)}_{A_0} + \underbrace{X_2(j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{+j\cdot\alpha_1}} \cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X_2(-j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{-j\cdot\alpha_1}} \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X_2(j\cdot 3)}_{\frac{A_3}{2}\cdot e^{+j\cdot\alpha_3}} \cdot e^{j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X_2(-j\cdot 3)}_{\frac{A_3}{2}\cdot e^{-j\cdot\alpha_3}} \cdot e^{-j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}
\end{aligned}$$

Question 1:

1.

Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

2.

$$\frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2k}$$

Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

Question 2:

$\frac{n^2+1}{n^2} \to 1 \neq 0$ donc la série ne converge pas

$\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ il s'agit du terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$

$$\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \sim \frac{2^4}{7^3} \times \frac{1}{n^2}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \to \frac{1}{e} \neq 0$$

La série diverge.

$$ne^{\frac{1}{n}} - n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = 1 + o(1) \to 1 \neq 0$$

La série diverge.

$$\ln(1 + e^{-n}) \sim e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$.

Question 3:

1.

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n+1+o(1)}$$

$$= e^{-n}e^{1+o(1)} \sim e^{-n} \times e = e\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.

2.

$$u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)} > \frac{1}{n}$$

Il s'agit d'une série à termes positifs supérieurs à $\frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$. La série diverge.

3.

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln(n)} \to 0$$

D'après la règle de Cauchy, $0 < 1$, la série converge.

Question 4:

1. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

2. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

3. $u_n \to 1 \neq 0$ la série diverge grossièrement
4. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

5. Méfiance

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{n} n^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(n)}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(n)} = 1$$

Ce qui montre que

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

6. u_n est de signe constant

$$u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)} = \frac{1}{\ln\left(n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)} = \frac{1}{2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)}$$

$$n^{\frac{1}{2}} u_n = n^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)} \to +\infty$$

D'après les règles de Riemann $n^\alpha u_n \to +\infty$ avec $\alpha < 1$ entraine que la série de terme général u_n diverge.

7. u_n est de signe constant

$$n^{\frac{5}{4}} u_n = n^{\frac{5}{4}} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \to 0$$

D'après les règles de Riemann $n^\alpha u_n \to +\infty$ avec $\alpha > 1$ entraine que la série de terme général u_n converge.

8. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

D'après la règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

9. u_n est de signe constant

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln(n) + 5^n} \sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, la série de terme général u_n converge.

10. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0<0$$

D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

11. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)!}}{\frac{n^{10000}}{n!}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000}\frac{n!}{(n+1)!}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000}\times\frac{1}{n+1}\to 0<1$$

D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

12. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{4^{n+2}\left((n+2)!\right)^2}{(2n+1)!}}{\frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n-1)!}}=\frac{4^{n+2}\left((n+2)!\right)^2(2n-1)!}{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2(2n+1)!}=4\frac{((n+2)^2\left((n+1)!\right)^2(2n-1)!}{\left((n+1)!\right)^2(2n+1)2n(2n-1)!}$$

$$=4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n}\sim 1$$

Cà ce n'est pas de chance, sauf si on peut montrer que la limite est 1 par valeur supérieure

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n}=\frac{4(n^2+4n+4)}{4n^2+2n}=\frac{4n^2+16n+16}{4n^2+2n}>1$$

Ouf ! La limite est 1^+ donc la série de terme général diverge.

13. u_n est de signe constant

$$u_n=\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=e^{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}=e^{1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\to\frac{1}{e}\neq 0$$

La série de terme général u_n diverge grossièrement

Remarque : il était inutile de faire un développement limité à l'ordre 3 de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

14. u_n est de signe constant

$$u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=e^{n^2\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{-n-\frac{1}{2}+o(1)}=e^{-n}e^{-\frac{1}{2}+o(1)}\sim\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ strictement inférieure à 1. La série de terme général u_n converge.

15.

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}>1$$

Donc u_n ne peut pas tendre vers 0.