Chapitre 4

LA TRANSFORMEE EN Z

Objectifs

Général

- *L'étudiant apprendra à utiliser la transformée en Z.*

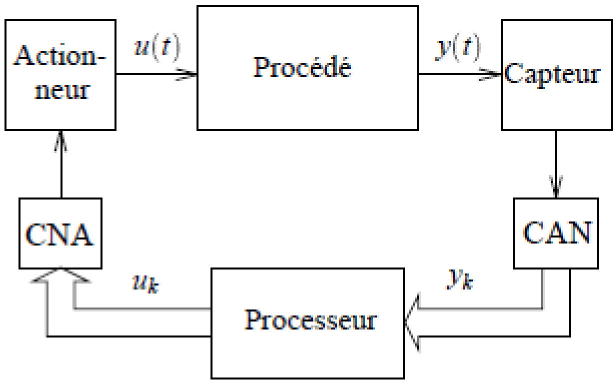
Spécifiques

- *Déterminer les transformées en Z de signaux simples ;*
- *Déterminer les signaux dont les transformées en Z sont données ;*
- *Résoudre des équations récurrentes relatives à des systèmes en utilisant les propriétés et le tableau des transformées.*

I. Signal échantillonné

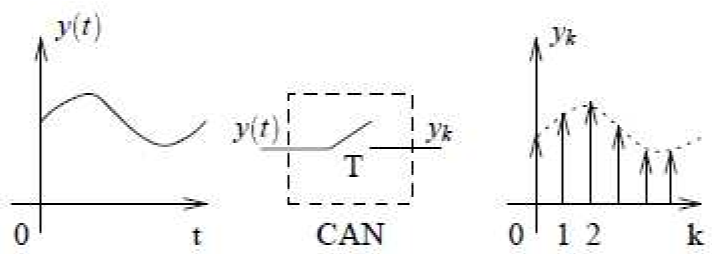
I.1. Introduction

Le schéma suivant représente la structure générale d'une commande de procédé par calculateur :



I.2. Conversion analogique numérique

On peut représenter l'opération de conversion analogique-numérique selon le schéma suivant :



$$y^*(t) = y(t)\delta_T(t) \qquad avec : \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT) \text{ : Peigne de Dirac}$$

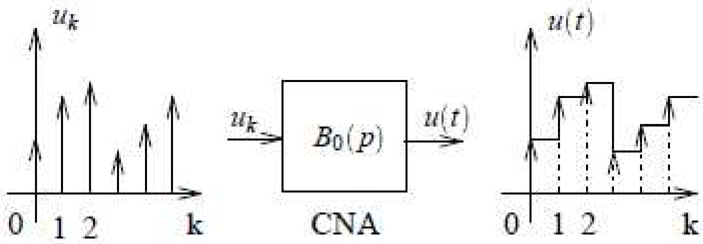
$$\Rightarrow \; y^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(t)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k\delta(t-kT) \qquad avec\,\{y(kT)\} \equiv \{y_k\}$$

Remarque :

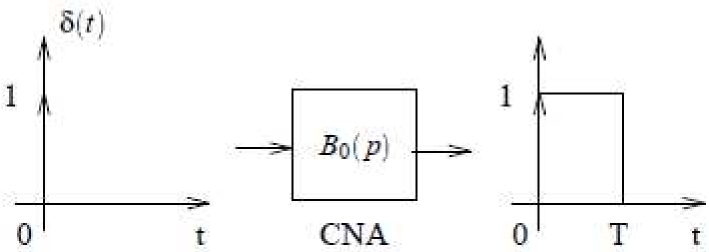
L'échantillonnage conduit à une perte d'information au regard du signal continu. Cette perte d'information est d'autant plus grande que la fréquence f =1/T est petite. L'échantillonnage doit respecter le théorème de Shannon : $f \geq 2\, F_{max}$.

I.3. Conversion numérique analogique

On peut représenter l'opération de conversion numérique-analogique selon le schéma suivant :



Le modèle mathématique que l'on associe alors à la conversion numérique analogique est le bloqueur d'ordre zéro $B_0(p)$ représenté par la figure suivante :

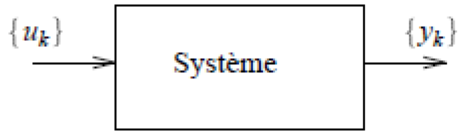


La réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro est de la forme : $\Gamma(t)=\Gamma(t-T)$ où $\Gamma(t)$ représente l'échelon de position unitaire. Il vient donc :

$$B_0(p)=\frac{1}{p}-\frac{e^{-Tp}}{p}=\frac{1-e^{-Tp}}{p}$$

II. Système à temps discret

Un système à temps discret se définit comme un opérateur entre deux signaux à temps discret :



II.1. Equation récurrente

La modélisation initiale d'un système à temps discret conduit souvent à l'écriture d'une équation récurrente entre différents termes des séquences d'entrée et de sortie. La forme générale d'une équation récurrente linéaire peut être donnée par :

$$\boxed{a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \ldots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k}$$

Par hypothèse $a_n \neq 0$ et n est appelé l'ordre du système. Le système est dit causal si les sorties dépendent uniquement des évènements passés. Pour cela il doit obligatoirement vérifier $m \leq n$.

II.2. Fonction de transfert en z

De la même manière que l'on associe à un système à temps continu, une fonction de transfert, par application de la transformation de Laplace à son équation différentielle, on peut associer à un système à temps discret, une fonction de transfert en z, par application de la transformation en z à son équation récurrente.

Dans le cas général où les conditions initiales sont non nulles la représentation en z du système s'écrit plus exactement :

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} U(z) + \frac{I(z)}{D(z)}$$

où le polynôme $I(z)$ ne dépend que des conditions initiales. Il influe sur la sortie du système sans modifier le comportement dû au signal d'entrée $U(z)$.

La factorisation du numérateur et du dénominateur conduit à la forme pôles, zéros, gain suivante :

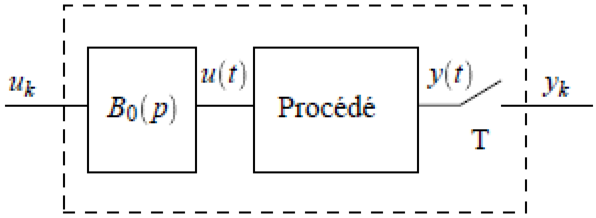
$$G(z) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n)}$$

avec : $P_{i=1,\ldots,n}$: pôles $\qquad z_{j=1,\ldots,m}$: zéros $\qquad k = \dfrac{b_m}{a_n}$: gain

III. Système échantillonné

III.1. Introduction

L'analyse d'un système commandé par calculateur numérique passe par la définition d'un système à temps discret, comprenant le procédé commandé de nature généralement continue, et les convertisseurs numérique-analogique et analogique-numérique, que l'on peut respectivement assimiler au bloqueur d'ordre zéro et à l'échantillonneur, selon le schéma suivant :



Théorème 1 : En pratique, il est recommandé de choisir la fréquence d'échantillonnage dans une fourchette de l'ordre de 6 à 24 fois la fréquence de coupure du procédé.

Exemple :

Soit un procédé d'ordre 1 :

$$G(p) = \frac{1}{1+\tau p}$$

Réponse :

la fréquence de coupure est $f_c = 1/(2\pi\tau)$. La fréquence d'échantillonnage $f = 1/T$ sera choisie telle que :

$$\frac{6}{2\pi\tau} < \frac{1}{T} < \frac{24}{2\pi\tau}$$

soit approximativement :

$$\frac{\tau}{4} < T < \tau$$

III.2. Fonction de transfert échantillonnée

Théorème 2 : Soit un procédé continu modélisé par une fonction de transfert $G_c(p)$. Ce procédé, échantillonné admet une fonction de transfert en z telle que :

$$G(z) = Z\left[G(p)B_0(p)\right] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{G_c(p)}{p}\right]$$

On considère la notation suivante :

$$H(p) \xrightarrow{L^{-1}} h(t) \xrightarrow{T} h_k \xrightarrow{Z} H(z)$$

Exemple :

La fonction de transfert continue étant : $G_c(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$

↳Réponse :

La fonction de transfert échantillonnée est donnée par :

$$G(z) = Z\left[B_0(p)G_c(p)\right] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{G_c(p)}{p}\right]$$

avec la décomposition en éléments simples suivante:

$$\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

En utilisant le tableau des transformées en Z, on obtient :

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{-z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right]$$

soit :

$$G(z) = K\frac{(z-b)}{(z-1)(z-a)} \quad avec \begin{cases} K = e^{-T} - 1 + T \\ a = e^{-T} \\ b = 1 - \dfrac{T\left(1-e^{-T}\right)}{e^{-T} - 1 + T} \end{cases}$$

Application numérique : soit T=1s. On obtient :

$$G(z) = 0.3679\frac{z+0.7183}{(z-1)(z-0.3679)}$$

IV. Transformée inverse

Théorème 3 : Soit $G(z)$ une fonction de transfert et $U(z) = \mathrm{Z}[u_k]$ la transformée en Z d'une séquence d'entrée, sous l'hypothèse de conditions initiales nulles la réponse du système est donnée par :

$$y_k = \mathrm{Z}^{-1}\left[G(z)U(z)\right]$$

Comme dans le cas des systèmes à temps continu, la fonction de transfert permet un calcul aisé des réponses uniquement dans le cas des systèmes initialement au repos. La méthode est illustrée sur l'exemple du paragraphe précédent.

Exemple :

La fonction de transfert du système s'écrit :

$$G(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$$

La transformée en z du signal impulsionnel u_k est ici :

$$U(z)=1$$

Il vient donc :

$$Y(z)=G(z)U(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$$

Le calcul de l'original peut se faire à partir de tables de transformées, ce qui nécessite généralement une décomposition en éléments simples. Pour simplifier les calculs il est recommandé d'effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{Y(z)}{z}$ et non pas celle de $Y(z)$. En effet, il vient ici :

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{z\ (z^2-3z+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

Ainsi on obtient une décomposition de $Y(z)$ en éléments qui sont tous des transformées de termes connus :

$$Y(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}$$

La transformée inverse s'obtient directement par application des transformées de la table :

$$y_k=Z^{-1}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}\right]=\frac{1}{2}\delta_k+\frac{1}{2}2^k-1^k$$

Ce qui donne :

$$y_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}2^0-1^0=0 \qquad ;$$

$$y_{k>0}=\frac{1}{2}2^k-1^k=2^{k-1}-1$$

V. Tables de quelques Transformées en Z

Le tableau ci-dessous donne les transformées en Z couramment utilisées en automatique :

$x(t)$	**Transformée de Laplace**	**Transformée en Z**
$\delta(t)$	1	Non définie !…
$\begin{cases}1, t=0\\0, t\neq 0\end{cases}$	0	$X_z(z)=1$
$u(t)=\begin{cases}1, t>=0\\0, t<0\end{cases}$	$u(p)=\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e.z}{[z-1]^2}$
$\frac{t^2}{2}.u(t)$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T_e^2.z.[z+1]}{2.[z-1]^3}$
$e^{-a.t}.u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-a.T_e}}$
$t.e^{-a.t}.u(t)$	$\frac{1}{[p+a]^2}$	$\frac{T_e.z.e^{-a.T_e}}{\left[z-e^{-a.T_e}\right]^2}$
$\left[1-e^{-a.t}\right].u(t)$	$\frac{a}{p.(p+a)}$	$\frac{\left(1-e^{-a.T_e}\right).z}{(z-1).\left(z-e^{-a.T_e}\right)}$
$\left[t-\frac{1-e^{-a.t}}{a}\right].u(t)$	$\frac{a}{p^2.(p+a)}$	$\frac{T_e.z}{(z-1)^2}-\frac{\left(1-e^{-a.T_e}\right).z}{a.(z-1).\left(z-e^{-a.T_e}\right)}$
$\sin(\omega_0.t).u(t)$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\frac{z.\sin(\omega_0.T_e)}{z^2-2.z.\cos(\omega_0.T_e)+1}$
$\cos(\omega_0.t).u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$\frac{z.[z-\cos(\omega_0.T_e)]}{z^2-2.z.\cos(\omega_0.T_e)+1}$
$e^{-a.t}.\sin(\omega_0.t).u(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{z.e^{-a.T_e}.\sin(\omega_0.T_e)}{z^2-2.z.e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)+e^{-2.a.T_e}}$
$e^{-a.t}.\cos(\omega_0.t).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{z.\left[z-e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)\right]}{z^2-2.z.e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)+e^{-2.a.T_e}}$