



**Examen de la normale : Analyse II**

PARCOURS : DUT GE 1.

SESSION DE: Juin 2017

DUREE : 2h00

Exercice1 : [6pts]

On considère la fonction  $f$  de  $R \rightarrow R$ ; définie par :  $f(x) = |x|$  si  $0 \leq x \leq \pi$  et  $2\pi$ -périodique.

- Montrer que  $f$  est paire et tracer sa représentation graphique sur  $[-3\pi, 3\pi]$ .
- Calculer les coefficients de Fourier et en déduire que pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$$

- En utilisant le développement de  $f$  en série de Fourier pour  $x=0$  et  $x=\pi$ , déterminer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

- Calculer  $Fe^2$  sachant que  $Fe^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx$ . Que désigne  $Fe^2$  ?

- Donner l'expression de  $Fe^2$  à l'aide de la formule de Parseval.

Exercice2 : [5pts]

- Quelle est la nature de la série numérique dont le terme général est :

$$\text{a) } U_n = \frac{-1}{n^2} \quad \text{b) } U_n = \frac{1}{n} \quad \text{c) } U_n = \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}} \quad \text{d) } U_n = \frac{5}{4^n}$$

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général:

$$\text{a) } U_n = \frac{\sin(n)}{n^2} \quad \text{b) } U_n = \frac{n^2 + n}{2^n + n!} \quad \text{c) } U_n = \frac{n^2 - 3}{n^2 + n + 3}$$

Exercice3 : [4pts]

- Résoudre l'équation différentielle en utilisant la transformée de Laplace:

$$y'' + 3y' + 2y = t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$\text{b) Calculer } L^{-1} = \frac{2p+3}{2p^2+4p+5}$$

Exercice 4 : [5pts]

- Calculer la transformée en Z de la fonction causale suivante et calculer ses zéros et /ou ses pôles.

|      |   |   |   |   |   |       |
|------|---|---|---|---|---|-------|
| n    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5.... |
| x(n) | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0     |

- Trouver la séquence  $y(n)$  qui a comme transformée en Z  $Y(z) = \frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}}$