

Chapitre 8

problème général du filtrage

Soit un signal $f(t)$ comprenant plusieurs composantes sinusoïdales. Un filtre (fig. 1) est un dispositif dont la fonction de transfert complexe $\underline{T} = \underline{V}_2 / \underline{V}_1$ permet d'isoler certaines composantes en éliminant les composantes de fréquence indésirable.

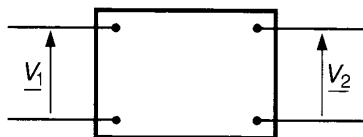


Fig. 1

Suivant la valeur des fréquences transmises nous distinguerons essentiellement :

- les **filtres passe-bas** qui isolent les signaux de fréquence basse;
- les **filtres passe-haut**;
- les **filtres passe-bande** qui favorisent les signaux situés dans une bande de fréquence.

L'étude initiale du filtrage est supportée par un **filtre passe-bas**. Le cas du filtre passe-haut ainsi que celui du filtre passe-bande seront ramenés, par un changement de variables, à l'étude d'un filtre passe-bas.

1. GABARIT

Soit à construire un filtre passe-bas qui ne transmet que les signaux de fréquence inférieure à f_0 . La transmittance mesurée en décibels, $20 \lg |\underline{T}|$, doit posséder une valeur minimale a dans la bande de fréquences à transmettre, et une valeur maximale b dans la bande de fréquences à éliminer.

Le problème pratique est traduit, dans le **diagramme de Bode**, par un **gabarit** (fig. 2).

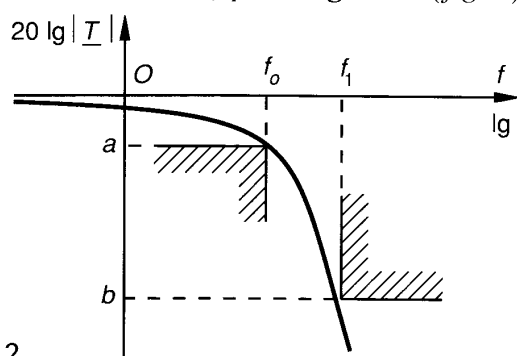


Fig. 2

L'observation du gabarit montre que la courbe $20 \lg |\underline{T}|$, tracée en fonction de la fréquence, doit emprunter un « canal » limité par les valeurs suivantes :

- f_0 qui est la fréquence de coupure à a décibels;
- b qui traduit l'atténuation minimale dans la bande de fréquences à rejeter.

Globalement le gabarit est caractérisé par deux points dont les coordonnées sont respectivement (f_0, a) et (f_1, b) .

2. NORMALISATION

Afin d'établir des résultats valables pour tous les filtres passe-bas, on effectue les changements de variables suivants :

Normalisation des fréquences

On pose

$$\underline{s} = j \frac{f}{f_0} = j \frac{\omega}{\omega_0}$$

et on définit la pulsation normalisée x par le module de \underline{s} :

$$x = |\underline{s}| = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Ce changement de variables revient à prendre ω_0 comme unité de pulsation. La pulsation normalisée x est alors un nombre sans dimension.

Normalisation des composants

Soit R_C la résistance de charge de filtre (fig. 3).

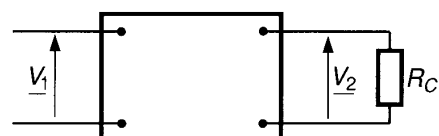


Fig. 3

On définit la résistance normalisée par

$$R_n = \frac{R}{R_C}$$

Ce changement de variable consiste à prendre la résistance R_C comme unité de résistance. La résistance R_n est alors un nombre sans dimension.

REMARQUE

Ce changement de variable, indispensable pour les filtres passifs, est inutile pour l'étude des filtres actifs. En effet la fonction de transfert des filtres passifs dépend de leur résistance de charge, alors que les filtres actifs, réalisés à l'aide d'amplificateurs opérationnels, ont une transmittance indépendante de la résistance de charge R_C .

Les deux normalisations précédentes permettent de définir les unités d'inductance et de capacité.

Pour une inductance, l'impédance $Z = L\omega$ conduit à l'impédance normalisée

$$Z_n = \frac{L\omega}{R_C} = \frac{L\omega_0}{R_C} \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L}{R_C} x.$$

Ce qui amène à définir l'unité d'inductance par :

$$L_u = \frac{R_C}{\omega_0}$$

La valeur normalisée de l'inductance s'écrit

ainsi $\lambda_n = \frac{L}{L_u}$.

Pour une capacité, l'impédance $Z = \frac{1}{C\omega}$ conduit à l'impédance normalisée

$$Z_n = \frac{1}{R_C C \omega} = \frac{1}{R_C C \omega_0} \times \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{R_C C \omega_0} x$$

ce qui amène à définir l'unité de capacité par :

$$C_u = \frac{1}{R_C \omega_0}$$

La valeur normalisée de la capacité s'écrit ainsi

$$\gamma_n = \frac{C}{C_u}$$

3. DIFFÉRENTES FORMES DE RÉPONSE

Après normalisation, le problème du filtrage passe-bas se ramène à la détermination de la transmittance $\underline{T}(s) = \underline{T}(jx)$ telle que $20 \lg |T(x)|$ s'inscrive dans le gabarit normalisé de la figure 4.

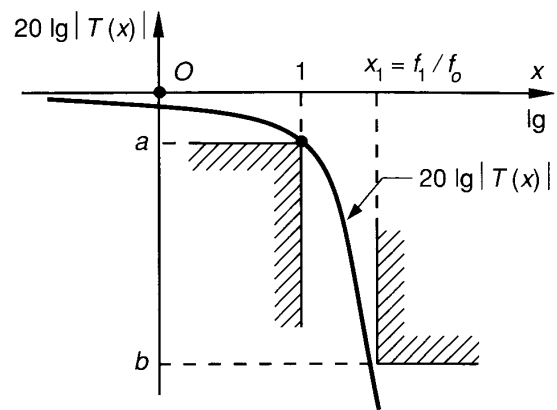


Fig. 4

La résolution commence par la détermination d'une fonction $T(x) = |\underline{T}(s)|$ qui possède les propriétés suivantes (conformes au gabarit)

- Pour $x = 1$ $20 \lg T(x) = a$
soit $T(1) = 10^{a/20}$.
- Pour $x < 1$ $20 \lg T(x) \geq a$.
- Pour $x > x_1$ $20 \lg T(x) \leq b$.

Plusieurs approximations sont possibles. Nous étudierons les réponses de Butterworth et de Chebyshev.

3.1. RÉPONSE DE BUTTERWORTH

La fonction $T(x)$ est cherchée sous la forme

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$$

où n est l'ordre du filtre de Butterworth.

En d'autres termes, on cherche n tel que la fonction $20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$ s'inscrive dans le gabarit de la figure 4.

- Pour $x = 1$

$$20 \lg T(x) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ décibels}$$

quel que soit n , toutes les courbes passent par -3 db pour $x = 1$ c'est-à-dire pour $f = f_0$.

- Pour $x < 1$

$$20 \lg T(x) > 20 \lg \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ db.}$$

La fréquence de coupure est définie à $a = -3 \text{ db}$ quel que soit n .

Plus n est grand, plus la décroissance de $T(x)$ est forte lorsque x augmente. La coupure est donc

d'autant plus brutale que n est plus grand. Pour satisfaire aux exigences du gabarit, l'ordre n doit vérifier l'inéquation suivante :

$$20 \lg \frac{1}{\sqrt{1+x_1^{2n}}} \leq b$$

$$\text{soit } -10 \lg(1+x_1^{2n}) \leq b$$

$$x_1^{2n} \geq 10^{-\frac{b}{10}} - 1 \text{ ce qui conduit à}$$

$$n \geq \frac{\lg(10^{-\frac{b}{10}} - 1)}{2 \lg x_1} = \frac{\lg(10^{-\frac{b}{10}} - 1)}{2 \lg \left(\frac{f_1}{f_0} \right)}$$

La connaissance de l'ordre n permet la détermination complète de la fonction $T(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}$.

Afin de déterminer la transmittance du filtre de Butterworth qui satisfait au gabarit, il faut déterminer une fraction rationnelle $\underline{T}(s)$ qui admette $T(x)$ pour module. Pour cela, on factorise le polynôme $P(x) = 1 + x^{2n}$ en utilisant les remarques suivantes :

- si n est impair, $x = j$ et $x = -j$ sont deux zéros de $P(x)$;
- le polynôme $P(x)$ est pair : en conséquence, si $a + jb$ est un zéro de $P(x)$, $-a - jb$ est aussi un zéro de $P(x)$;
- les coefficients du polynôme $P(x)$ sont réels. En conséquence, si $a + jb$ est un zéro de $P(x)$, $a - jb$ est aussi zéro de $P(x)$.

Les deux dernières remarques permettent de conclure que si $a + jb$ est un zéro de $P(x)$, $-a + jb$, $-a - jb$, $a - jb$, sont aussi des zéros de $P(x)$. Globalement $P(x) = 1 + x^{2n}$ peut être écrit sous la forme :

si n est impair

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 + x^{2n} = (x + j)(x - j)(x + a + jb) \\ &\quad (x + a - jb)(x - a - jb)(x - a + jb)(\dots) \\ &= (1 + x^2)[(x + a)^2 + b^2][(x - a)^2 + b^2][\dots] \end{aligned}$$

si n est
impair

$P(x)$ apparaît ainsi comme le carré du module du polynôme en $\underline{s} = jx$

$$\begin{aligned} \underline{P}(\underline{s}) &= (1 + jx)[b + j(x + a)][b + j(x - a)][\dots] \\ &= (1 + \underline{s})(b + \underline{s} + ja)(b + \underline{s} - ja)(\dots) \\ &= (1 + \underline{s})[(b + \underline{s})^2 + a^2][\dots] \\ &= (1 + \underline{s})(a^2 + b^2 + 2b\underline{s} + \underline{s}^2)(\dots) \end{aligned}$$

si n est
impair

La fonction de transfert normalisée s'écrit ainsi :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{(1 + \underline{s})(a^2 + b^2 + 2b\underline{s} + \underline{s}^2)(\dots)}$$

REMARQUE

$P(x)$ est aussi le carré du module du polynôme :

$$\underline{P}(\underline{s}) = (1 + \underline{s})[b - \underline{s} - ja][b - \underline{s} + ja][\dots]$$

mais cette solution ne peut convenir car elle conduirait à des pôles en $\underline{s} = jx$ dont la partie réelle est positive, entraînant de ce fait l'instabilité du filtre.

Exemple de calcul

Pour $n = 3$, les zéros de $P(x) = 1 + x^6$ sont les racines sixièmes de -1 soit :

$$\begin{aligned} &+j; \quad -j; \quad \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}; \quad \cos \frac{\pi}{6} - j \sin \frac{\pi}{6}; \\ &-\cos \frac{\pi}{6} - j \sin \frac{\pi}{6}; \quad -\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\underline{P}(\underline{s}) = (1 + \underline{s})(\underline{s}^2 + 2b\underline{s} + a^2 + b^2)$$

avec

$$a = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad b = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\text{soit : } \underline{P}(\underline{s}) = (1 + \underline{s})(\underline{s}^2 + \underline{s} + 1).$$

En pratique

L'expression de $\underline{P}(\underline{s})$ ne dépend que de l'ordre n du filtre. Il est donc inutile de l'établir pour chaque étude de filtre passe-bas.

Les expressions de $\underline{P}(\underline{s})$ sont données par des tables dont on trouvera, page 197, un extrait jusqu'à l'ordre 6.

REMARQUE

La fonction de transfert normalisée du filtre de Butterworth passe-bas du 2^e ordre s'écrit

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\underline{s} + \underline{s}^2}$$

ou en remplaçant \underline{s} par son expression $\underline{s} = j \frac{\omega}{\omega_0}$.

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{avec } m = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707.$$

Il s'agit bien (voir Tome 1, chapitre 2) d'un filtre passe-bas du 2^e ordre dont la pulsation de coupure à 3 db est égale à la pulsation unité ω_0 .

Ordre	$\underline{P}(\underline{s})$
1	$1 + \underline{s}$
2	$1 + \sqrt{2}\underline{s} + \underline{s}^2$
3	$(1 + \underline{s})(1 + \underline{s} + \underline{s}^2)$ $= 1 + 2\underline{s} + 2\underline{s}^2 + \underline{s}^3$
4	$(\underline{s}^2 + 0,7653\underline{s} + 1)(\underline{s}^2 + 1,848\underline{s} + 1)$ $= 1 + 2,613\underline{s} + 3,414\underline{s}^2 + 2,613\underline{s}^3 + \underline{s}^4$
5	$(1 + \underline{s})(\underline{s}^2 + 0,618\underline{s} + 1)(\underline{s}^2 + 1,618\underline{s} + 1)$ $= 1 + 3,236\underline{s} + 5,236\underline{s}^2 + 5,236\underline{s}^3 + 3,236\underline{s}^4 + \underline{s}^5$
6	$(\underline{s}^2 + 0,5176\underline{s} + 1)(\underline{s}^2 + \sqrt{2}\underline{s} + 1)$ $(\underline{s}^2 + 1,932\underline{s} + 1)$

Exemple de calcul

Problème

Déterminer la transmittance du filtre passe-bas de Butterworth qui satisfait au gabarit de la figure 5.

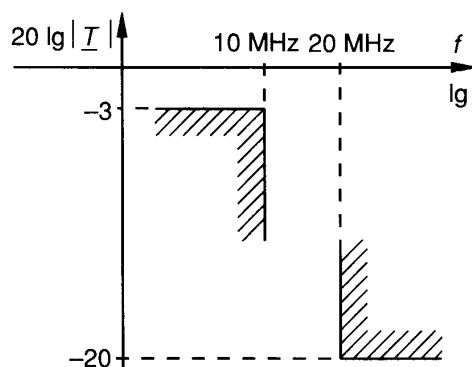


Fig. 5

La fréquence $f_0 = 10$ MHz est prise comme unité de fréquence, ce qui conduit à $x_1 = \frac{f_1}{f_0} = 2$.

L'ordre n du filtre est déterminé par

$$n \geq \frac{\lg [10^{+ \frac{20}{10}} - 1]}{2 \lg 2} = 3,315.$$

Il s'agit donc d'un filtre d'ordre 4 dont la fonction de transfert est obtenue à l'aide du tableau précédent

$$T(\underline{s}) = \frac{1}{(1 + 0,7653\underline{s} + \underline{s}^2)(1 + 1,848\underline{s} + \underline{s}^2)}$$

soit

$$T(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 0,7653j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \left[1 + 1,848j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

3.2. RÉPONSE DE CHEBYCHEV

La fonction $T(x)$ est cherchée sous la forme

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}}$$

dans laquelle ε est un nombre et $C_n(x)$ est un polynôme, défini par récurrence, et qui vérifie les relations suivantes :

$$C_0(x) = 1; \quad C_1(x) = x;$$

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x)$$

ε et l'ordre n du filtre doivent être déterminés de telle sorte que $20 \lg |T(x)|$ s'inscrive dans le gabarit.

• Pour la fréquence unité, $x = 1$. Les polynômes $C_n(x)$ sont tels que $C_0(1) = 1$, $C_1(1) = 1$ et par récurrence $C_{n+1}(1) = 2 - 1 = 1$.

Quel que soit l'ordre n du filtre

$$20 \lg T(1) = -10 \lg (1 + \varepsilon^2).$$

Ainsi la fréquence de coupure n'est pas définie à -3 db mais à $-10 \lg (1 + \varepsilon^2)$ db qui n'est égal à -3 db que pour $\varepsilon = 1$.

• Pour les fréquences inférieures à la fréquence unité f_0 , x est inférieur à 1.

Avec le changement de variable $x = \cos \varphi$, $C_n(x)$ s'écrit $\cos n\varphi$, en effet :

$$C_0(x) = \cos 0 = 1; \quad C_1(x) = \cos \varphi.$$

Si la relation est vérifiée à l'ordre n et à l'ordre $n - 1$,

$$\begin{aligned} C_{n+1}(x) &= 2xC_n(x) - C_{n-1}(x) \\ &= 2 \cos \varphi \cos n\varphi - \cos (n-1)\varphi \\ &= \cos (n+1)\varphi + \cos (n-1)\varphi \\ &\quad - \cos (n-1)\varphi \\ &= \cos (n+1)\varphi. \end{aligned}$$

La relation est vérifiée à l'ordre $n + 1$.

Ainsi, pour $x \leq 1$, $C_n(x)$ qui s'écrit $\cos n\varphi$ est toujours inférieur à 1 et $20 \lg T(x)$ est supérieur à $-10 \lg(1 + \varepsilon^2)$, ce qui confirme que la pulsation de coupure soit définie à

$$a = -10 \lg(1 + \varepsilon^2) \text{ db.}$$

De plus, dans la bande passante, $20 \lg T(x)$ évolue au rythme de $\cos[n\varphi] = \cos[n \arccos x]$ et la courbe de réponse ondule entre 0 et

$$-10 \lg(1 + \varepsilon^2) \text{ décibels (fig. 6)}$$

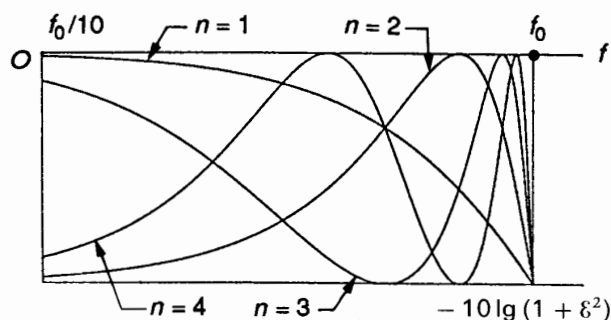


Fig. 6

• Pour les fréquences supérieures à la fréquence unité f_0 , x est supérieur à 1 et le changement de variable précédent est impossible. Pour les fréquences suffisamment élevées par rapport à f_0 , c'est-à-dire pour $x \gg 1$, on peut faire l'approximation suivante :

$$C_n(x) \approx 2xC_{n-1}(x)$$

$C_n(x)$ apparaît ainsi comme une progression géométrique de raison $2x$ et peut être écrit

$$C_n(x) = \frac{(2x)^n}{2} \text{ pour } n \geq 1.$$

La fonction $T(x)$ est alors peu différente de

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4} (2x)^{2n}}} \approx \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} (2x)^n} \approx \frac{1}{\left[\frac{2\omega}{\omega_0} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{1/n} \right]^n} \\ \approx \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^n} \text{ avec } \omega_1 = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}}$$

La courbe $20 \lg T(x)$ admet donc pour asymptote la droite de pente $20n$ décibels par décade

passant par la pulsation $\omega_1 = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}}$. ε ayant

été déterminé en fonction de l'ondulation tolérable dans la bande passante, il est possible de déterminer l'ordre n du filtre en positionnant la droite asymptote dans le gabarit.

On détermine ainsi $T(x)$ compte tenu de l'ondulation tolérable et de l'ordre n . Les racines de $1 + \varepsilon^2 C_n(x)$ sont données par des tables et, comme dans la réponse de Butterworth, la fonction de transfert normalisée $\underline{T}(s)$ peut être écrite sous la forme d'un produit de fonctions de transfert du premier et du second ordre :

$$\underline{T}(s) = (1 + as)(1 + 2b's + a's^2)(\dots)$$

4. FILTRE PASSE-HAUT

Un filtre passe-haut est décrit par le gabarit de la figure 7.

Racines des polynômes de Chebychev $1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)$

Ondulation db	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0,01	$\pm 2,234 \pm 2,28j$	$\pm 1,589j$ $\pm 1,626 \pm 0,795j$	$\pm 1,355 \pm 0,411j$ $\pm 0,561 \pm 0,992j$	$\pm 1,228 \pm 0,253j$ $\pm 0,759 \pm 0,661j$ $\pm 0,817j$
0,1	$\pm 1,381 \pm 1,186j$	$\pm 0,969j$ $\pm 1,206 \pm 0,485j$	$\pm 1,123 \pm 0,264j$ $\pm 0,465 \pm 0,638j$	$\pm 0,804 \pm 0,166j$ $\pm 0,668 \pm 0,436j$ $\pm 0,539j$
1	$\pm 0,895 \pm 0,549j$	$\pm 0,494j$ $\pm 0,966 \pm 0,247j$	$\pm 0,983 \pm 0,139j$ $\pm 0,407 \pm 0,337j$	$\pm 0,990 \pm 0,089j$ $\pm 0,612 \pm 0,234j$ $\pm 0,289j$

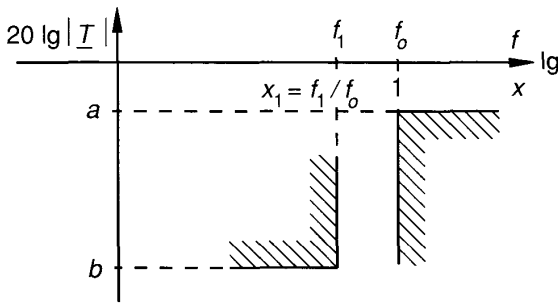


Fig. 7

La fréquence f_0 étant prise comme fréquence unité, on effectue le changement de variables

$$\underline{s} = j \frac{f}{f_0} = j \frac{\omega}{\omega_0}$$

et on pose $x = |\underline{s}| = \frac{\omega}{\omega_0}$.

La transformation $\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \frac{1}{\underline{s}}$ conduit au changement de variable

$$x \rightarrow X = \frac{1}{x},$$

c'est-à-dire $\lg x \rightarrow \lg X = -\lg x$.

Dans cette transformation, on associe à tout point son symétrique par rapport à la verticale $\lg x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$. Le gabarit de la figure 7 conduit ainsi à celui de la figure 8.

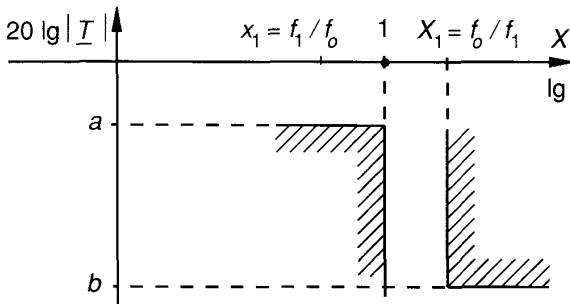


Fig. 8

Ce gabarit est caractéristique d'un filtre passe-bas dont on peut déterminer la transmittance normalisée $\underline{T}(\underline{S})$ par une des méthodes exposées précédemment (Butterworth, Chebychev ou autre).

La transformation $\underline{S} \rightarrow \frac{1}{\underline{s}}$ permet ensuite d'écrire la transmittance normalisée $\underline{T}(\underline{s})$ du filtre passe-haut.

Exemple de calcul

Problème

Déterminer, à l'aide d'un polynôme de Butterworth, la transmittance $\underline{T}(\underline{s})$ d'un filtre passe-

haut, conforme au gabarit de la figure 7, avec

$$f_0 = 10 \text{ MHz}, \quad f_1 = 4 \text{ MHz}, \quad a = -3 \text{ db}, \\ b = -18 \text{ db}.$$

L'ordre n du filtre est déterminé par :

$$n \geq \frac{\lg [10^{\frac{18}{10}} - 1]}{2 \lg \frac{10}{4}} = 2,25.$$

Il s'agit donc d'un filtre d'ordre 3 dont la fonction de transfert est obtenue à partir du tableau précédent.

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{1}{1 + 2\underline{S} + 2\underline{S}^2 + \underline{S}^3}.$$

Après la transformation $\underline{S} \rightarrow \frac{1}{\underline{s}}$, on obtient pour le filtre passe-haut, la transmittance

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^3}{1 + 2\underline{s} + 2\underline{s}^2 + \underline{s}^3},$$

$$\text{soit } \underline{T}(j\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^3}{1 + 2\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + 2\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^3}.$$

REMARQUE

La fonction de transfert normalisée du filtre de Butterworth passe-haut du 2^e ordre s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^2}{1 + \sqrt{2}\underline{s} + \underline{s}^2},$$

$$\text{soit } \underline{T}(j\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $m = 0,7$.

Il s'agit bien (voir Tome 1, chapitre 2) d'un filtre passe-haut du 2^e ordre dont la pulsation de coupure à 3 db est égale à ω_0 .

Dans la transformation $\underline{s} \rightarrow \frac{1}{\underline{S}}$, l'inductance de valeur normalisée λ_n , d'impédance complexe normalisée $\lambda_n \underline{s}$ se transforme en un élément dont l'impédance complexe normalisée est

$$\lambda_n \frac{1}{\underline{s}} = \frac{1}{\underline{s} \lambda_n}.$$

Il s'agit d'une capacité de valeur normalisée

$$\gamma_n = \frac{1}{\lambda_n}.$$

De même la capacité de valeur normalisée γ_n est remplacée par l'inductance normalisée $\lambda_n = \frac{1}{\gamma_n}$.

5. FILTRE PASSE-BANDE

Un filtre passe-bande est décrit par le gabarit de la figure 9.

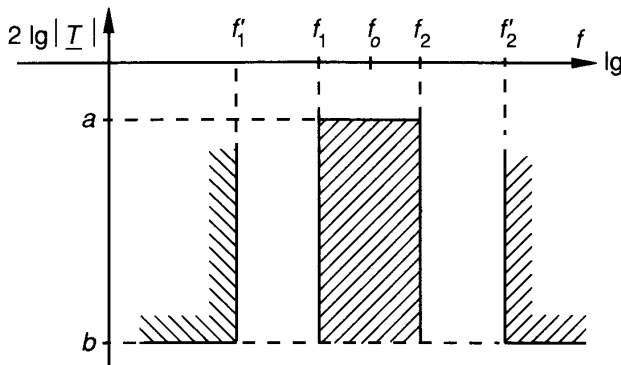


Fig. 9

La fréquence $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$ est choisie comme unité de fréquence (sur l'axe des fréquences gradué logarithmiquement, le point représentatif de f_0 est le milieu du segment $f_1 f_2$).

On effectue alors la transformation

$$\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \frac{1}{\Delta x} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right) \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{f_2 - f_1}{f_0}.$$

Cette transformation conduit au changement de variables

$$x = |\underline{s}| \rightarrow X = |\underline{S}| = \frac{1}{\Delta x} \left| x - \frac{1}{x} \right|$$

$$\text{soit} \quad X = \frac{|f^2 - f_0^2|}{f(f_2 - f_1)}.$$

- Les fréquences f_1 et f_2 conduisent à $X = 1$.
- La fréquence f_0 correspond à $X = 0$ et le point représentatif part à $-\infty$ sur l'axe des fréquences.
- Les fréquences f'_1 et f'_2 conduisent à des valeurs de X supérieures à 1.

En conséquence, le gabarit de la figure 9 est associé au gabarit normalisé de la figure 10, où P est la valeur minimale de X'_1 et de X'_2 (valeurs de X associées respectivement aux fréquences f'_1 et f'_2).

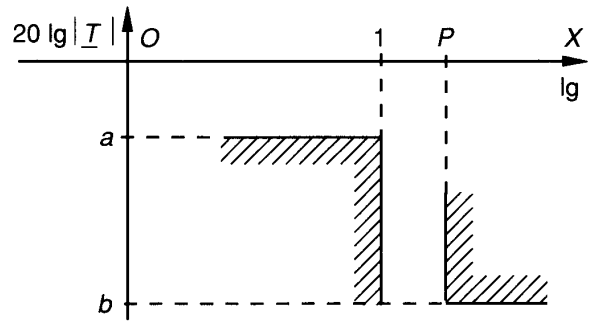


Fig. 10

Comme pour le filtre passe-haut, la détermination de la fonction de transfert du filtre passe-bande est ainsi ramenée à l'étude d'un filtre passe-bas.

Exemple de calcul

Problème

Déterminer, à l'aide d'un polynôme de Butterworth la fonction de transfert du filtre passe-bande conforme au gabarit de la figure 9 avec

$$f_1 = 2 \text{ MHz}; \quad f_2 = 8 \text{ MHz}; \quad f'_1 = 500 \text{ kHz}; \\ f'_2 = 16 \text{ MHz}; \quad a = -3 \text{ db} \quad \text{et} \quad b = -20 \text{ db}.$$

La fréquence unité est $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 4 \text{ MHz}$.

Les fréquences f'_1 et f'_2 conduisent respectivement à

$$X'_1 = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \left| \frac{f'_1}{f_0} - \frac{f_0}{f'_1} \right| = 5,25$$

$$\text{et} \quad X'_2 = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \left| \frac{f'_2}{f_0} - \frac{f_0}{f'_2} \right| = 2,5.$$

D'où l'on déduit $P = \text{valeur minimale de } (X'_1, X'_2) = 2,5$.

L'ordre n du filtre est donné par :

$$n \geq \frac{\lg(10^{\frac{20}{10}} - 1)}{2 \lg 2,5} = 2,51.$$

Il s'agit donc d'un filtre d'ordre 3 dont la fonction de transfert est obtenue à partir du tableau précédent

$$T(\underline{S}) = \frac{1}{1 + 2\underline{S} + 2\underline{S}^2 + \underline{S}^3}.$$

Après la transformation $\underline{S} \rightarrow \frac{1}{\Delta x} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right)$, on obtient pour le filtre passe-bande la transmittance normalisée

$$T(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \frac{2}{\Delta x} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right) + \frac{2}{\Delta x^2} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right)^2 + \frac{1}{\Delta x^3} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right)^3}.$$

REMARQUE

La fonction de transfert normalisée du filtre de Butterworth passe-bande du 1^{er} ordre s'écrit

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Delta x} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right)} = \frac{\Delta x \underline{s}}{1 + \Delta x \underline{s} + \underline{s}^2}$$

soit
$$\underline{T}(j\omega) = \frac{2jm \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

avec $2m = \Delta x$.

Il s'agit bien (voir tome 1, chapitre 2) d'un filtre passe-bande centré sur ω_0 dont la bande passante à 3 db est égale à

$$2m\omega_0 = \Delta x \times \omega_0 = \omega_2 - \omega_1.$$

Dans la transformation $\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \frac{1}{\Delta x} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right)$, l'inductance de valeur normalisée λ_n , d'impédance normalisée $\lambda_n \underline{s}$ se transforme en un élément d'impédance normalisée

$$\frac{\lambda_n}{\Delta x} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right) = \frac{\lambda_n}{\Delta x} \underline{s} + \frac{1}{\frac{\Delta x}{\lambda_n} \underline{s}}$$

Cette impédance résulte de la mise en série (fig. 11) d'une inductance normalisée $\frac{\lambda_n}{\Delta x}$ et d'une capacité normalisée $\frac{\Delta x}{\lambda_n}$.

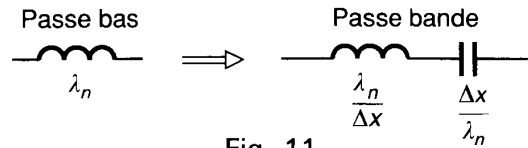


Fig. 11

De la même manière, la capacité de valeur normalisée γ_n , d'admittance normalisée $\gamma_n \underline{s}$ se transforme en un élément d'admittance normalisée

$$\frac{\gamma_n}{\Delta x} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right) = \frac{\gamma_n}{\Delta x} \underline{s} + \frac{1}{\frac{\Delta x}{\gamma_n} \underline{s}}$$

Cette admittance résulte de la mise en parallèle (fig. 12) d'une capacité normalisée $\frac{\gamma_n}{\Delta x}$ et d'une inductance normalisée $\frac{\Delta x}{\gamma_n}$.

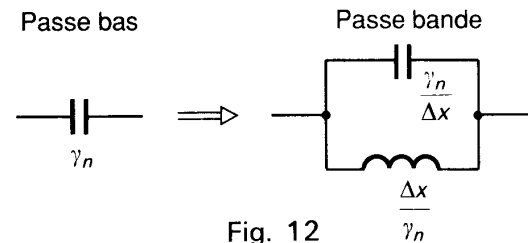


Fig. 12

Dans ce chapitre nous avons établi la fonction de transfert du filtre dont la représentation dans les diagrammes de Bode s'inscrit dans le gabarit imposé par le problème pratique. Nous étudierons dans les chapitres suivants des dispositifs permettant de réaliser la fonction de transfert souhaitée. Ce seront successivement, les filtres passifs, les filtres actifs, les filtres numériques.

EXERCICES

1. On désire déterminer, à l'aide d'un polynôme de Chebychev, la fonction de transfert $T(jf)$ dont le module s'inscrit dans le gabarit de la figure 1

1° En posant $x = \frac{f}{f_0}$, le module $T(x)$ de la fonction de transfert s'écrit

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}},$$

avec

$$C_0(x) = 1; \quad C_1(x) = x; \quad C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x).$$

Sachant que $|C_n(x)| \leq 1$ pour $x \leq 1$, montrer que l'ondulation de 0,3 db dans la bande passante impose $\varepsilon^2 = 0,0715$.

2° Établir l'expression du polynôme $C_4(x)$ et montrer que la fonction de transfert de Chebychev d'ordre 4, s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

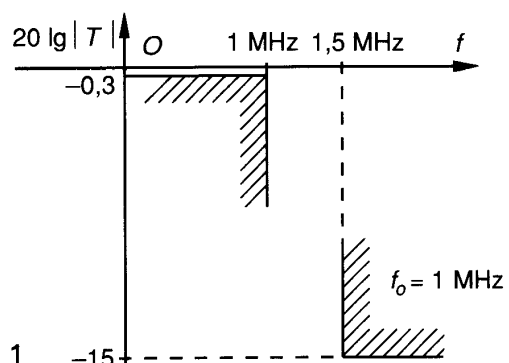


Fig. 1

3° Pour une ondulation de 0,3 db dans la bande passante, les racines du polynôme $1 + \varepsilon^2 C_4(x)$ s'écrivent

$$x_1 = \pm 1,04536 \pm 0,2026j, \\ x_2 = \pm 0,43300 \pm 0,48912j.$$

Vérifier que x_1 et x_2 sont bien solutions de $1 + \varepsilon^2 C_4(x)$.

4° Montrer par une méthode analogue à celle du paragraphe 3.1 que la fonction de transfert normalisée du filtre s'écrit (avec $\underline{s} = jx = j \frac{f}{f_0}$)

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{0,4675}{(\underline{s}^2 + 0,978\underline{s} + 0,427)(\underline{s}^2 + 0,405\underline{s} + 1,134)}.$$

5° En déduire la fonction de transfert $\underline{T}(jf)$. Tracer, à l'aide d'un ordinateur, son module $20 \log |\underline{T}|$ dans les diagrammes de Bode et vérifier (fig. 2) que la courbe s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

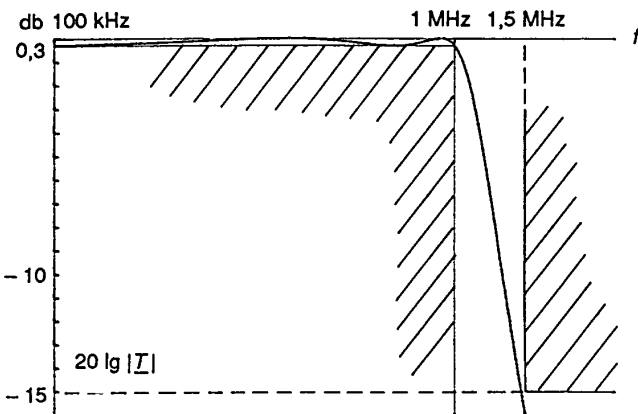


Fig. 2

2. On désire déterminer à l'aide d'un polynôme de Chebychev la fonction de transfert $\underline{T}(jf)$ dont le module s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

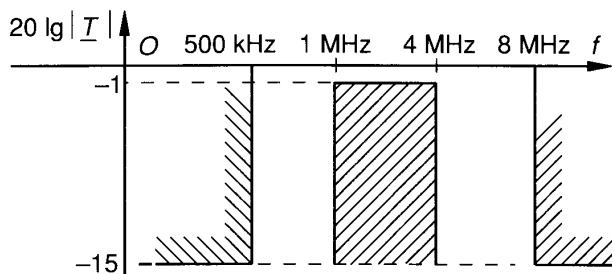


Fig. 1

1° On pose

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \text{ MHz}, & f_2 &= 4 \text{ MHz}, \\ f'_1 &= 500 \text{ kHz}, & f'_2 &= 8 \text{ MHz}, \\ f_0 &= \sqrt{f_1 f_2} \quad \text{et} \quad x = \frac{f}{f_0}. \end{aligned}$$

Montrer que le gabarit normalisé du filtre passe-bas équivalent est conforme au graphe de la figure 2.

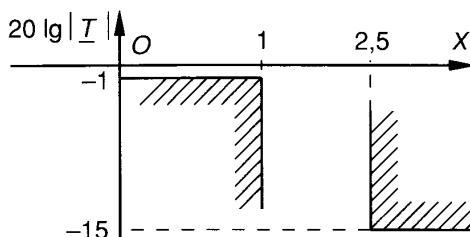


Fig. 2

2° En posant $X = \frac{f}{f_0}$, le module $T(X)$ de la fonction de transfert s'écrit

$$T(X) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(X)}},$$

avec

$$C_0(X) = 1, \quad C_1(X) = X, \quad C_n(X) = 2XC_{n-1}(X) - C_{n-2}(X).$$

Sachant que $|C_n(X)| \leq 1$ pour $X \leq 1$, montrer que l'ondulation tolérable dans la bande passante impose $\varepsilon^2 = 0,2589$.

3° Établir l'expression du polynôme $C_2(X)$ et montrer que la fonction de transfert

$$T(X) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_2^2(X)}}$$

s'inscrit dans le gabarit de la figure 2.

4° Montrer que les racines du polynôme $1 + \varepsilon^2 C_2^2(X)$ s'écrivent

$$X_0 = \pm 0,895 \pm 0,549j.$$

5° Montrer par une méthode analogue à celle du paragraphe 3.1 que la fonction de transfert normalisée du filtre passe-bas s'écrit

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{0,9827}{\underline{s}^2 + 1,098\underline{s} + 1,102}.$$

6° En déduire par la transformation $\underline{s} = \frac{1}{\Delta x} \left(\underline{s} + \frac{1}{\underline{s}} \right)$, avec $\Delta x = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$, l'expression de la fonction de transfert normalisée du filtre passe-bande (fig. 1) :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{0,9827 \underline{s}^2}{0,444 \underline{s}^4 + 0,732 \underline{s}^3 + 1,99 \underline{s}^2 + 0,732 \underline{s} + 0,444}.$$

7° En déduire la fonction de transfert $\underline{T}(jf)$:

$$\underline{T}(jf) = \frac{-0,2457 f^2}{0,0278 f^4 - 0,0915 j f^3 - 0,4975 f^2 + 0,366 j f + 0,444}.$$

8° Tracer, à l'aide d'un ordinateur, la fonction de transfert $20 \log |\underline{T}(jf)|$ et vérifier (fig. 3) qu'elle s'inscrit dans le gabarit de la figure 1.

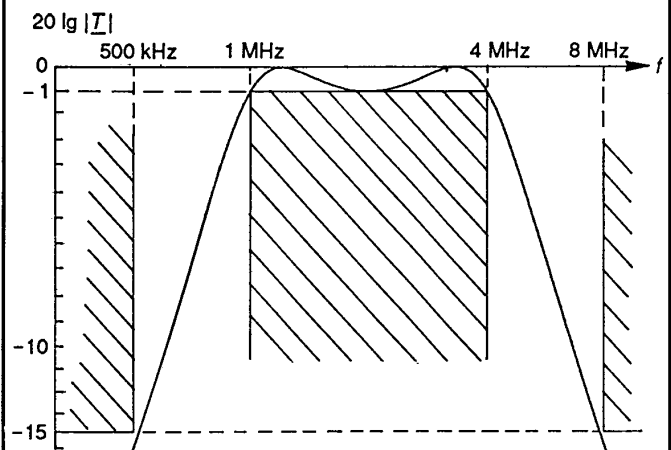


Fig. 3