Institut Universitaire de Technologie Fotso-Victor de Bandjoun

Cours et Travaux dirigés d'Analyse II

Année académique 2019-2020

Classe : DUT GE

NIVEAU : I

Dr. NOUBISSIE Samuel / NGOUABO Ulrich

PROGRAMME

Chapitre 0 : Les suites numériques (Rappels)

Chapitre 1: Les Séries Numériques

II-1 Définitions

Soit $(U_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombre réels et $(S_n)_{n\geq n_0}$ la suite des termes U_n telle que $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} U_k$. La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée série de terme général U_n et est notée $\sum_{n\geq n_0} U_n$ ou plus simplement $\sum U_n$.

S_n est appelé somme partielle de rang n de la série $\left(\sum_{n\geq n_0} U_n\right)$.

II-2 Séries convergentes

Une série $\left(\sum_{n\geq n_0} U_n\right)$ est convergente si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ de ses $\sum_{k=n_0}^{n} U_k$ (somme partielle) est convergente. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} U_k$ est appelée somme de la série et est notée $\sum_{k=n_0}^{+\infty} U_k$.

Si $U_n = a_n + i\, b_n$ avec $(a_n\,,\ b_n\,) \in \mathbb{R}^2$ alors $\sum_{k=n_0}^{+\infty} U_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_n + i \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_n$

Une série $(\sum U_n)$ à terme complexe est convergente si et seulement si la série partie réelle $\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_n$ et la série partie imaginaire $\sum_{k=n_0}^{+\infty} b_n$ sont simultanément convergentes.

Lorsque deux séries sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes, elles sont dites de même nature.

Exemples:

1) Soit $q \in \mathbb{R}$. Considérons la série de terme générale q^n.
a) Donner une expression simplifiée de la somme partielle de rang n $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$?
b) Discuter suivant les valeurs de q de la nature de cette série.

2) Soit la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

   a) Donner une expression simplifiée de la somme partielle S_n.

   b) En déduire la somme de cette série ?

II-3 Conditions de convergence d'une série

II-3-1 Condition nécessaire

Etudier la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente. Ici nous nous proposons d'établir un critère nécessaire de convergence.

Si une série converge, alors son terme général tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par conséquent, si U_n ne converge pas vers 0, la série diverge $\sum U_n$ diverge (condition nécessaire de convergence).

Exemple :

Considérons la série : $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots$

Donner la nature de cette série ?

Soulignons que le critère examiné donne une condition nécessaire mais non suffisante c'est-à-dire qu'une série peut bien diverger bien que son n$^{\text{ième}}$ terme général tende vers 0.

Exemple:

Considérons la série harmonique : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Cette série harmonique est divergente alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ de son terme général tend vers 0.

II-3-2 Conditions nécessaire et suffisante : Critère de Cauchy

Soit $K \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\sum U_n$ une série à valeur dans K. Pour que $\sum U_n$ converge, il faut et il suffit qu'elle vérifie les critères de Cauchy se traduisant par l'une ou l'autre des formulations équivalentes suivantes :

a) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N \Rightarrow \left\|\sum_{k=n}^{n+p} U_k\right\| < \epsilon$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{k=n}^{n+p} U_k\right\| = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{p\geq\mathbb{N}} \left\|\sum_{k=n}^{n+p} U_k\right\| = 0$

En pratique, pour montrer qu'une série $\sum U_n$ converge, on s'efforcera de majorer la quantité $\left\|\sum_{k=n}^{p} u_k\right\|$ indépendamment de p par une suite de limite nulle.

II-3-3 Séries absolument convergente – Série semi-convergente

Une série $\sum U_n$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite absolument convergente si et seulement si la série $\sum \|U_n\|$ est convergente. C'est une condition suffisante mais non nécessaire.

$\sum U_n$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite semi convergente si et seulement si elle est convergente mais non absolument convergente.

Exemple :

Considérons la série de terme général $U_n = \frac{n}{(1+in)^2}$. Etudier la série $\sum U_n$.

Dire si elle est absolument convergente ?

II-3-4 Opérations sur les séries

Soient deux séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ et un réel $\lambda \neq 0$,

a) $\sum U_n$ et $\sum \lambda U_n$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent, $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(\lambda U_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$

b) Si les séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ convergent alors $\sum(U_n + V_n)$ converge également et $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(U_n + V_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} V_n$

c) Si $\sum U_n$ converge et $\sum V_n$ diverge alors $\sum(U_n + V_n)$ diverge.

d) Si $\sum U_n$ et $\sum V_n$ divergent, on ne peut rien dire de la nature de $\sum(U_n + V_n)$.

II-4 Séries à termes positifs

II-4-1 Définition

Une série $\sum Un$ est dite à termes positifs si et seulement si $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; / \forall n \geq n_0 \; u_n \geq 0$.

Exemple :

$\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs.

II.4.2 Théorèmes fondamentaux.

Considérons une série à termes positifs $\sum Un$ et $\sum Vn$ de sommes partielles respectives

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \; , \; S'_n = \sum_{k=n'_0}^{n} v_k$$

*$\sum Un$ converge si et seulement si (Sn) est majorée.

*$\sum Un$ diverge si et seulement si $\lim_{n \to +\infty}(S_n) = +\infty$.

Supposons qu'à partir d'un certain rang $0 \leq u_n \leq v_n$

*Si $\sum Vn$ converge alors $\sum Un$ converge.

*Si $\sum Un$ diverge alors $\sum Vn$ diverge. (Règle de comparaison)

Exemple :

$\forall n \geq 2,\ \ 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ or on a vue précédemment que $\frac{1}{n(n-1)}$ est convergente donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

- Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0\ et\ v_n \geq 0$ et si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $\sum Un$ et $\sum Vn$ sont de même nature (règle des équivalents).

Exemple :

Etudions la nature de $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$\forall n \geq 2\ \ \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \prec 0\ et\ -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \succ 0$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$ diverge et $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

$\sum \frac{1}{n^2+\ln(n)}$ est une série à termes positifs $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2+\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ $car\ \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} 0\,(n^2)$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{1}{n^2+\ln(n)}$ converge.

- Formule de Stirling

$n! \sim n^n e^{-n\sqrt{2\pi n}}$

- Règle d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l\ \ alors\ \begin{cases} si\ l \prec 1\ la\ série\ converge \\ si\ l \succ 1\ la\ série\ diverge \\ si\ l = 1\ on\ ne\ rien\ dire\ de\ la\ série \end{cases}$$

Exemple :

Déterminer la nature de la série définie par $\sum \frac{2^n}{n!}$ en utilisant la règle d'Alembert.

- Règle de Cauchy

Soit $\sum Un$ une série à termes réels positifs ou nuls. Supposons que

$$\sqrt[n]{u_n} = l \ : \begin{cases} si\ l \prec 1\ la\ série\ de\ terme\ général\, u_n\ est\, convergente \\ si\ l \succ 1\ la\ série\ de\ terme\ général\, u_n\ est\ divergente \end{cases}$$

Exemple :

Soit la série $\sum \left(\frac{n^2+1}{2n^2+5} \right)^n$, déterminer sa nature.

II.4.3 comparaison d'une série à termes positifs avec une intégrale

Soit f une fonction continue, positive, décroissante sur un intervalle $\sum f(n)\ et \int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Exemple 1 :

$f(x) = \frac{1}{x}$ est continue, positif et décroissante sur $[1,+\infty[\Rightarrow \sum \frac{1}{n}\ et \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dt$ sont de même nature.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dt = [\ln(x)]_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n}\ diverge$$

Exemple2 :

Etudier la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{t\ln(t)}$. f est continue, positive, et dérivable sur $[2,+\infty[$ et $f'(t)=-\dfrac{\ln(t)+1}{(t\ln(t))^2}\leq 0$

f est décroissante sur $[2,+\infty[$.

$\sum\dfrac{1}{n\ln(n)}$ est donc de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln(t)}dt$.

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln(t)}dt=\left[\ln(\ln(t))\right]_2^{+\infty}=+\infty\Rightarrow\sum\frac{1}{n\ln(n)}\ \textit{diverge}$$

II.5 Groupement- modification de l'ordre : des termes d'une série.

II.5.1 Groupement des termes.

a) Définition

Soit $\sum Un$ une serie à valeurs dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ et f une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telle que $f(0)=0$.

La série de terme général $v_n=\displaystyle\sum_{k=f(n)}^{f(n+1)}u_k$ est dite déduite de $\sum Un$ par groupement des termes ou par sommation par tranches.

b) Théorème

- Si $\sum Un$ converge, alors $\sum Vn$ converge et $\displaystyle\sum_{k=f(n)}^{f(n+1)}u_k=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$
- Si $\sum Vn$ diverge, alors $\sum Un$ diverge
- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et s'il $\exists\ M\in\mathbb{N}^*/\forall n\in\mathbb{N}$,

  $f(n+1)-f(n)\leq M$ alors $\sum Un$ et $\sum Vn$ sont de même nature.

Exemple1

Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \quad \forall\ n \geq 2$

$\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2n(2n+1)}$$

Exemple 2 :

Soit $\quad u_n = \dfrac{\cos\left(2n\dfrac{\pi}{3}\right)}{n} \quad n \geq 1$

$\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est de même nature que $\sum v_n$ avec

$$\begin{aligned} v_n &= u_{3n+1} + u_{3n+2} + u_{3n+3} \\ &= -\frac{1}{2(3n+1)} - \frac{1}{2(3n+2)} + \frac{1}{(3n+3)} \\ &= -\frac{9n+5}{2(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \end{aligned}$$

II.5.2 modification de l'ordre des termes

a) Définition

Soit $\sum u_n$ une série a valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et σ une permutation de $\mathbb{N}$.

La série $\sum v_n$ de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ est dite déduite de $\sum u_n$ par modification de l'ordre des termes ou par réarrangement.

b) Remarque

Un réarrangement peut modifier la nature d'une série. Mais il peut également sans changer la nature de la série modifier sa somme. Lorsque la série $\sum u_n$ est convergente et que toute série $\sum v_n$ qui s'en déduit par modification de l'ordre des termes est convergente et de même somme, $\sum v_n$ est dite commutativement convergente.

II.6 Etude de quelques séries de références

II.6.1 la série géométrique et ses dérivées.

Soit x un nombre réel. On appelle série géométrique de raison x la série de terme général x^n. Les séries $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$ sont appelées séries dérivées premières et seconde de la série géométrique $\sum x^n$.

Si $|x| \geq 1$, $\sum x^n$, $\sum nx^{n-1}$, $\sum n(n-1)x^{n-2}$ sont divergente et

Si $|x| \prec 1$, ces trois séries sont convergentes et ;

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad \sum nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \quad \text{et} \quad \sum n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} = \left(\frac{1}{1-x}\right)''$$

Les séries $\sum nx^n$ et $\sum n^2x^n$ converge si et seulement si $|x| \prec 1$.

Si $|x| \prec 1$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\quad \left(nx^n = x\left(nx^{n-1}\right)\right)$

Et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ $\quad \left(n^2x^n = n(n-1)x^n + nx^n\right)$

II.6.2 la série de Riemann

On appelle série de Riemann, toute série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}\right)$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement $\alpha \succ 1$

Considérons $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ définit sur $[1, +\infty[$

$f'(x) = -\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}}$ f est décroissante

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ sont de même nature.

Etudions l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{-1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty}$

Si $\alpha \succ 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) = 0$

Si $\alpha \prec 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) = +\infty$

Si $\alpha = 1$ $\sum \frac{1}{n}$ diverge

<u>Conclusion</u>

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha \succ 1$

II.6.3 la série de Bertrand

On considère les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha \, ln^\beta(n)}$ $(n \geq 2, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ dites séries de Bertrand. Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

<u>Exemple :</u>

Donner la nature de la série : $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ pour $n \geq 2$.

II.6.3 la série exponentielle

On appelle série exponentielle, la série de terme général $\frac{x}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x}{n!}$ converge et est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{n!} = e^x$

Comparaison logarithmique

$\forall n \in \mathbb{N}, n_0 \geq n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors:

i) Pour que $\sum v_n$ diverge ; il suffit que $\sum u_n$ diverge.

ii) Pour que $\sum u_n$ converge ; il suffit que $\sum v_n$ converge.

iii) Dans le cas (ii); $\forall n_0 \geq n$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_k \leq \frac{u_n}{v_n} \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

Remarque

Les règles d'Alembert, de Cauchy et Riemann ne s'appliquent qu'aux séries à termes positifs. Lorsque le terme général u_n d'une série ne reste pas positif, ou lorsque u_n est complexe, on doit appliquer ces règles à la série de terme général $|u_n|$: si la série de terme général $|u_n|$ converge, le théorème absolue affirme que la série de terme général u_n converge aussi.

II.7 Séries alternées

Une série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si et seulement si la suite $\left((-1)^n u_n\right)$ est de signe constant.

II.7.1 le critère de Leibniz ou critère spécial des séries alternées •

Soit $\sum u_n$ une série de Leibniz.

Si la suite $(|u_n|)$ décroit et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ alors $\sum u_n$ converge.

Exemple :

Montrer que la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est alternée et d'après le critère de Leibniz, elle converge pour tout $\alpha > 1$.

Chapitre 2: Les séries de fonctions

III.1 définitions et exemples.

Soient $(f)_0^{(n)}, (f)_1^{(n)}, \ldots, (f)_n^{(n)}$ des fonctions numériques toutes définies sur un intervalle I . On appelle série de fonctions de terme général $u_n(x)$, la série de somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

<u>Exemples</u>

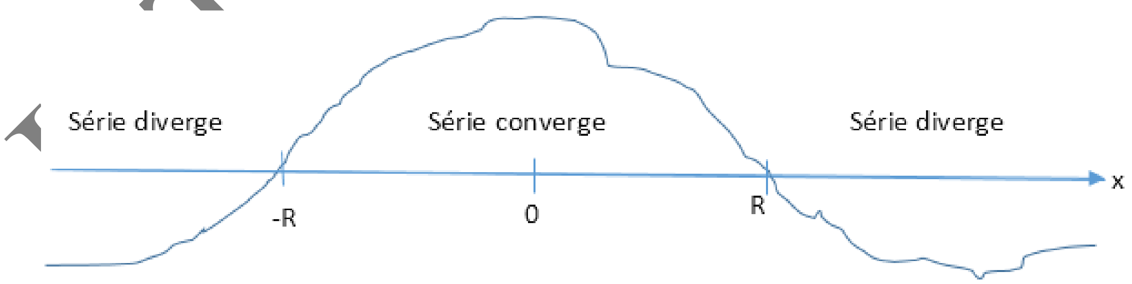
Soit $\sum_{k=0}^{n} u(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ est la somme partielle de la série définie à partir de la fonction $u_n(x) = x^n$.

L'ensemble $J \subset I$ des valeurs de x pour lesquelles la série de fonction converge est appelé domaine de convergence de cette série.

Dans ce cas la somme de la série de fonction

$$u = \sum u_n \,/\; u : J \to \mathbb{R}$$
$$x \to u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$$

Lorsque l'intervalle J est centré en O, c'est-à-dire se met sous la forme $]-R, R[$, R est appelé le rayon de convergence.



Aux extrémités de l'intervalle, i.e. $x = R$ ou $x = -R$. La question de convergence ou de divergence fait l'objet d'une étude particulière.

Dans l'exemple précèdent, la série $\sum x^n$ converge

$\Leftrightarrow |x| \prec 1 \Rightarrow u :]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x \rightarrow u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

III.2 Propriétés.

Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ est convergente sur l'intervalle J et posons $u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

i) Si toutes les fonctions u_n sont croissantes sur J, alors u est croissante sur J.

ii) Supposons que J a pour centre O. si toutes les fonctions u_n sont paires (Resp. impaire) alors u est paire (Resp. impaire).

iii) Si $J = R$ et si toutes les fonctions sont périodiques de même période T, alors la fonction u est périodique de période T.

Exemple :

Soit la série de fonction définie par le terme général.

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ n^2 + x^2 \geq n^2 \Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum f_n(x)$ est convergente $\Rightarrow f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Puisque f_n est paire, décroissante sur $[0;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ donc f paire, décroissante sur $[0;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$.

III.3 la convergence normale

III.3.1 définition

Soit $\sum u_n$ une série de fonction définie sur un intervalle I et soit J un intervalle contenu dans I. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur J si l'on peut trouver une série convergente $\sum a_n$ de nombre positifs tels que $|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall n ; \forall x \in J$.

III.3.2 Théorème

Toute série de fonctions normalement convergente sur I est convergente sur J.

REMARQUES

i) Une série de fonctions normalement convergente sur J est aussi normalement convergente tout intervalle $J' \subset J$.

ii) Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ sont des séries de fonctions normalement convergentes sur le même intervalle J, alors $\sum(\alpha f_n)+\sum(\beta g_n), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est une série normalement convergente.

Exemples :

Soit la série de fonction définie par le terme général $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}$

Déterminer la nature de cette série.

Solution

1) $\forall n \geq 1,\ u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$u_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2}$$

$\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Considérons la série de terme général $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n(1+nx)}$. Donnons la nature de cette série.

Solution

2) $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n(1+nx)}\quad \forall x \geq 0\quad \forall n \geq 1$

Si $x \succ 0,\ |u_n(x)| \le \frac{1}{n^2 x} \Rightarrow u_n(x)$ est absolument convergente et de plus $\frac{1}{n^2 x}$ est positif si $x \succ 0 \Rightarrow \sum u_n$ est absolument convergente sur $[x, +\infty[,\ \ x \succ 0$.

III.3.3 conséquences

a) Théorème de passage à la limite terme à terme.

Soit $\sum u_n$ une série de fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un élément de I.

Supposons $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = l \in$. Si $\sum u_n$ converge normalement sur I, alors la série de terme général $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)$ est convergente et l'on a : $\lim\limits_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) \right)$

Ce théorème permet d'intervertir les signes $\sum$ et *lim* dans le cas d'une série normalement convergente.

b) Continuité, dérivabilité et intégrabilité

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment contenu dans I et si toutes les fonctions f_n sont continues sur I, alors la somme de la série est continue sur I.

- Si $\sum f_n$ converge normalement sur un intervalle J contenu dans I, si la série $\sum f'_n$ est normalement convergente sur J, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur J et $\forall x \in J$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$

Intégralité

Si

- $\sum f_n$ normalement convergente sur tout segment $[a, u] \subset [a, b]$
- La série de terme général $\int_a^b |f_n(t)| dt$ est convergente

Alors l'intégrale $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$ est convergente et l'on a $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$.

Exemple :

σ_x considère la série de terme général $n^x e^{-nx}$

a) Donner l'intervalle de définition de sa somme

b) Montrer que σ_x est continue sur l'intervalle de définition.

c) Quelle est la limite de S en $+\infty$.

Réponses

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) \succ 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = e^{-x}$ la règle d'Alembert, la série converge si et seulement si $x \succ 0 \Rightarrow \sum u_n$ converge si et seulement $x \in \left]0,+\infty\right[\Leftrightarrow$ l'intervalle de définition de $\left(\sum u_n\right)$.

b) $u_n(x) = n^x e^{-nx} = e^{x(\ln(n)-n)}$ et $\ln(n) - n \prec 0 \Rightarrow u_n$ est décroissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

$\Rightarrow \forall a \succ 0$, on a $\forall x \in \left[a,+\infty\right[$, $0 \le u_n(x) \le u_n(a)$.

$\sum u_n(a)$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge normalement.

c) $\ln(n) - n \prec 0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(u_n) = 0$. De plus $\sum u_n$ est normalement convergente

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sum^{+\infty} u_n = \sum^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n$$

III.4 convergence uniforme

On considère les fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$

La série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur I s'il existe une suite (a_n) de nombres réels tels que $\lim a_n = 0 \quad \forall x \in I \ et \ \forall n. \quad \left|f(x) - S_n(x)\right| \le a_n$

III.4.2 propriétés

i) Toute série de fonctions normalement convergente sur I est uniformément convergente sur I.

ii) Les théorèmes de passage à la limite terme à terme, de continuité, de dérivation et d'intégration terme à terme sont encore vrais lorsqu'on remplace l'hypothèse de convergence normale par l'hypothèse de convergence uniforme (mais la réciproque est fausse).

iii) Soient g_n des fonctions définies sur I et telles que :

$$0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \;\; \forall n \; et \; \forall x \in I .$$

S'il existe $(a_n) / \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 \; et \; si \; g_n(x) \leq a_n \;\; \forall n \; et \; \forall x \in I$, alors $\sum (-1)^n g_n$ est uniformément convergente sur I .

Exemple :

$$\forall n \geq 1, \; f_n : [0;+\infty[\to \mathbb{R} \; / \; f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+x)}$$

$$\forall n \geq 1, \; \forall x \geq 0, \; 0 \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow$ la proposition précédente affirme que la série de terme général $\sum f_n$ est uniformément convergente.

iv) Soient (a_n) et (b_n) des suites décroissantes ayant pour limite 0. Les séries de fonctions $\sum a_n \sin(nx)$ et $\sum b_n \cos(nx)$ convergent uniformément sur tout intervalle $[u, 2\pi - u]$ où u est un nombre tel que $0 \leq u \leq 2\pi$.

Chapitre 3: Les Séries de Fourier

Les séries de Fourrier ont une importance capitale dans le traitement des signaux. Notamment des signaux non sinusoïdaux mais périodique.

En effet, sous certaines conditions un tel signal peut être décomposé en somme de signaux simples trigonométriques. Ensuite on étudie le circuit en utilisant le principe de superposition des effets simples correspondant à ces signaux connus.

Afin de mieux comprendre les séries de Fourrier il est important de comprendre certains préliminaires sur les séries trigonométriques.

4-1 séries trigonométriques

4-1-1 fonctions périodiques

Une fonction f est dite α-périodique si $\forall t \in R;\ f(t+\alpha)=f(t)$. α se nomme une période. Parmi toutes les valeurs possibles de α la plus petite valeur positive est appelée la période.

4-1-2 Définition et notation d'une série trigonométrique

Considérons un espace normé E sur K $(\mathbb{R}\ ou \mathbb{C})$ (a_n) et $(b_n)_{n\in N}$ deux suites d'élément de E.

La série de terme général $u_n(t)=a_n\cos nt+b_n\sin nt$ est appelé série trigonométrique a coefficient a_n et b_n dans E. Lorsque la série converge $\forall t\in\mathbb{R}$ et a pour somme $f(t)$, on peut écrire $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt$ et f est 2π périodique.

La représentation complexe s'obtient en posant $\cos nt=\dfrac{e^{\text{int}}+e^{-\text{int}}}{2}$, $\sin nt=\dfrac{e^{\text{int}}-e^{-\text{int}}}{2i}$

d'où $u_n(t)=c_ne^{\text{int}}+c_{-n}e^{-\text{int}}$ avec $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$ et $c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$.

Dès lors la série trigonométrique se présente sous la forme :

$c_0+\left(c_1e^{\text{it}}+c_{-1}e^{-\text{it}}\right)+.......+\left(c_ne^{\text{int}}+c_ne^{-int}\right)+....$ avec $c_0=a_0$ sous forme compacte elle se note : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{\text{int}}$ ou $c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{\text{int}}+c_{-n}e^{-\text{int}}\right)$ cependant pour écrire de façon plus générale

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}$, il faut choisir $c_0 = 2a_0$. C'est la raison pour laquelle le terme constant de la série trigonométrique se notera $\frac{a_0}{2}$ au lieu de a_0 d'où la notation

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(t) = \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos t + b_1 \sin t\right) + ... + \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)$$

4-2-critère d'Abel

Soient (a_n) *et* (b_n) deux suites décroissantes de nombre réels positifs convergeant vers 0.

La série trigonométrique $\sum u_n(t)$ avec $u_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt \left(u_0(t) = \frac{a_0}{2} \right)$. Converge $\forall t \in \mathbb{R} - 2\pi Z$. De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle $I_k = \left[2\pi k + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha\right], \forall k \in Z, \forall \alpha \in \mathbb{R} / 0 \prec \alpha \prec \pi$. la somme de cette série est fonction continue sur $\mathbb{R} - 2\pi Z$.

4-3 les séries de Fourier : calcul des coefficients de Fourier

En générale, on appelle série de fourrier une série de terme général :
$u_n(t) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

u_n est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de période $\frac{2\pi}{\omega}, \omega$ étant la pulsation fondamentale. La série est convergente, sa somme $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

4-3- calcul des coefficients

Le problème ici est le suivant : on se donne une fonction périodique de période T, on demande pour quelle condition imposée à $f(t)$ il existe une série trigonométrique convergente vers $f(t)$. Supposons que la série de terme général $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$. on démontre que les coefficients $a_0, a_n \; et \, b_n$ ont pour expressions :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int f(t)dt \quad (valeur\ moyenne\ de\ f), \; a_n = \frac{1}{T}\int f(t)\cos n\omega t dt, \; b_n = \frac{1}{T}\int f(t)\sin n\omega t dt$$

Avec T intervalle quelconque d'amplitude T . $n=1$ donne le mode fondamental ; $n \succ 1$ donne les harmoniques

Remarque :

Supposons que la série est intégrable terme à terme sur tout intervalle $\Delta = [\alpha, \alpha + T]$ et Si

$f(t) = a_0 + a_1 cos\omega t + b_1 sinn\omega t + \cdots + a_n cosn\omega t + b_n sinn\omega t + \cdots$, alors on aura les coefficients suivant:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{T+\alpha} f(t)dt \,,\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{T+\alpha} f(t)\cos n\omega t dt \ \text{ et } \ b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{T+\alpha} f(t) Sinn\omega t dt$$

- Si f est **paire** $\left(f(t) = f(-t)\right)$, on choisit $(T) = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ et on obtient les simplifications :

  $$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt \qquad b_n = 0$$

  D'où : $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$ (Attention $a_0 = \frac{u_0}{2}$)

- Si f est **impaire** $(\forall t \ \ f(t) = f(-t)$) on choisir toujours, $(T) = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

  $$a_0 = 0 \ ; \ a_n = 0 \quad et \quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt$$

  D'où : $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$

  Il est à noter que : $\sin n\pi = 0 \quad \cos n\pi = (-1)^n$

  - ❖ Si $f(t) = f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ seul les coefficients de rang pair seront présentés dans la décomposition.

  - ❖ Si $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ seul les coefficients de rang impair seront présentés dans la décomposition.

Théorème de Dirichlet.

Retournons maintenant au problème posé au début du paragraphe. Quelles sont les propriétés que doit posséder la fonction $f(t)$ pour que la série de fourrier converge et que sa somme soit égale aux valeurs de la fonction aux points considérés ?

Soit f une fonction périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

- ❖ f continue et a dérivée f' continue sauf peut-être en un nombre fini de points (sur une période).
- ❖ f et f' admettant une limite à droite et à gauche en ces points de discontinuité.

On peut alors associer à f une série de fourrier convergente dont la somme $s(t)$ vérifie.

$s(t) = f(t)$ en tout point où f est continue

$s(t) = \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ en tout point de discontinuité.

4-3-1 Exemples

Exemple1 :

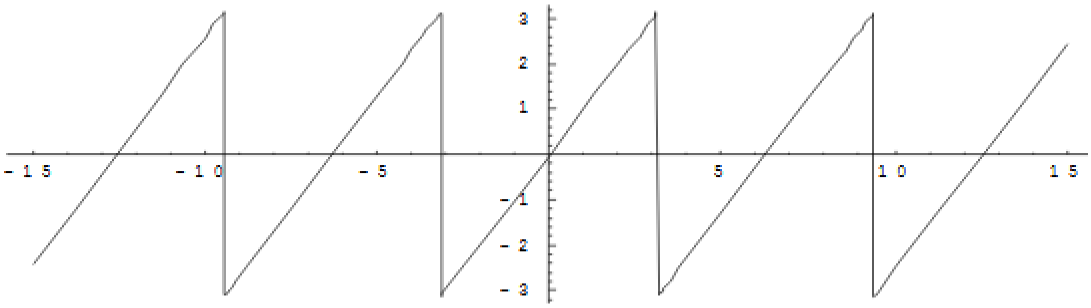
On donne une fonction périodique de période 2π définir comme suit :

$f(x) = x \quad pour \quad -\pi \le x \le \pi$

1) Représenter $f(x)$ sur une largeur $l = 4\pi$
2) Montrer que f admet un développement en série de fourrier.
3) Déterminer que les coefficients de fourrier associes à f
4) Ecrire la série trigonométrique associes à f

Réponse

1) Représentation de f.



2) f est périodique, f et $f^{'}$ sont continués sur T sauf en $-\pi$ et π , mais admettant une limite en ces points $(-\pi, \pi)$ $\Rightarrow$ f admet un développement en série de fourrier.

3) Soit $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt$ la série de fourrier associée à f. Comme f alors les coefficients a_0 et a_n sont nuls. On trouve alors :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(n\omega x)\, dx, \text{ car } T = 2\pi \text{ et donc } \omega = 1$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin ntdt = \frac{-2}{n} \cos n\pi$$

4) $f(t) = \frac{2}{1} \sin t - \frac{2}{2} \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t......$

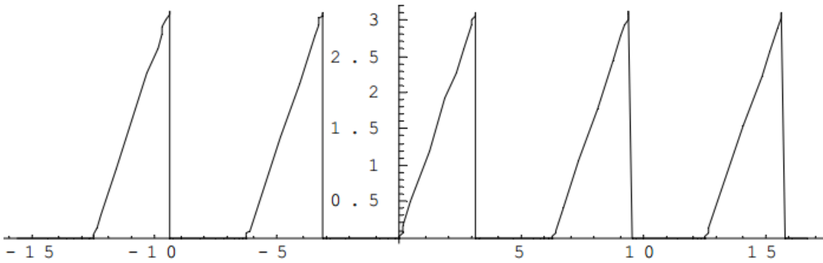
Exemple2 :

On se donne une fonction périodique de période $T = 2\pi$ définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Questions (les questions que dans l'exemple précédant)

Solution



- *Calculons les coefficients de Fourier :*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Pour le calcul de a_n, on utilise une intégration par partie :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{[x\frac{1}{n}\sin nx]_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{n\pi}[\frac{1}{n}\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}[\cos(n\pi) - 1] \\ &= \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

De la même manière pour calculer les b_n, on utilise une intégration par partie :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[[-x\frac{1}{n}\cos nx]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right] \\ &= -\frac{\pi}{n\pi}\cos(nx) + \frac{1}{n\pi}\underbrace{[\frac{1}{n}\sin nx]_0^{\pi}}_{0} \\ &= \frac{1}{n}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Le développement en série de Fourier est

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \\ &= \frac{\pi}{2} + (-\frac{2}{\pi}\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\sin x}{1}) + (0 - \frac{\sin 2x}{2}) + (-\frac{2}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\sin 3x}{3}) \\ &\quad +(0 - \frac{\sin 4x}{4}) + (-\frac{2}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\sin 5x}{5}) + ... \end{aligned}$$

Aux points de discontinuité de la fonction $f(x)$ la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite (dans le cas présent à $\frac{\pi}{2}$).

Remarque 4 *En posant dans l'égalité obtenue $x = 0$, on obtient*

$$\frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

4-3-3 Valeur efficace –Egalité de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $2T$-périodique et intégrable sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt$ est relié à ses coefficients de Fourrier sous la forme :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{T+\alpha} f(t)^2 dt = {a_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{a_n}^2 + {b_n}^2}{2}$$

Si f représente un signal périodique de temps :

$$F^2 = f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{T+\alpha} f(t)^2 dt$$

Représente le carré de la valeur efficace ou encore l'énergie du signal. La formule de Perseval peut donc s'interpréter en termes d'énergie :

$$F^2 = f_{moy}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E^2(u_n)$$

En particulier, si $f_{moy}^2 = 0$, l'énergie du signal est la somme des énergies des harmoniques $(E^2(u_n))$.

Application

Prenons l'exemple $f(t) = t$, $0 \prec t \prec \pi$ f est périodique, paire.

$$a_0 = \pi \text{ et } \forall p \in \mathrm{N} \text{ , } a_{2P+1} = \frac{-4}{\pi(2P+1)^2} \text{ , } a_{2p+1} = 0 \text{ , } \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2P+1)^4} \Rightarrow \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2P+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

En conclusion, on peut en déduire $S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \ldots.. + \frac{1}{n^4} + \ldots. = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2P+1)^4} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2P)^4}$

$$= \frac{\pi^4}{96} + \frac{s}{2^4} \Rightarrow S = \frac{\pi^4}{90}$$

4-3-4 Développement d'une fonction quelconque en série de fourrier

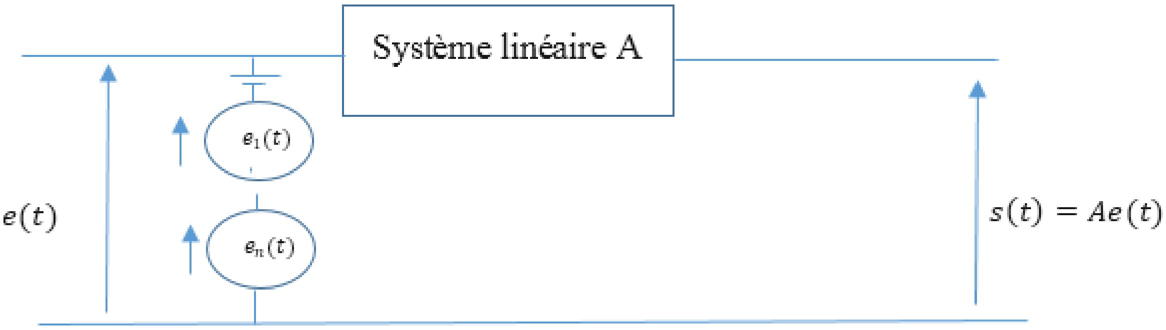
Une fonction f définie, bornée sur un intervalle $[a,b]$ peut être développée en série de Fourrier. Pour cela on se ramène au cas des fonctions périodiques en prolongeant f sur $\mathbb{R}$ par une fonction g périodique, de période $T \succ b-a$.

On peut même, suivant que l'on désiré une série en sinus ou en cosinus, choisir g paire ou impaire.

4-4 Applications en électronique et en électrotechnique

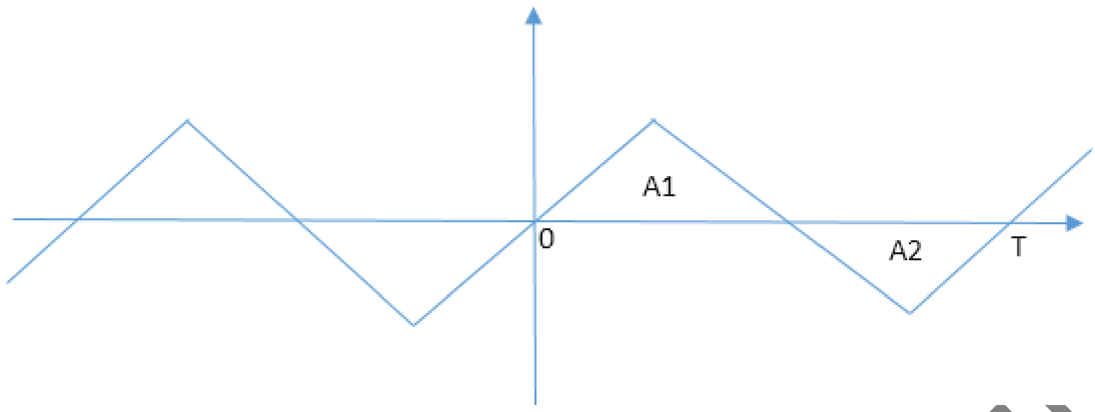
4-4-1 en Electronique :

Analyse des signaux par la décomposition en série de fourrier .Considérons un système linéaire alimenté par une source de tension $e(t)$ comme l'indique la figure ci-dessous.



On peut écrire $e(t) = u_0 + e_1(t) + ...e_n(t)$. Le signal $e(t)$ peut être décompose en tension élémentaire et somme élémentaire des fonctions sinusoïdale dont les fréquences sont des multiples de celle de l'original (n=1).

Exemple :



(i) $s(t) = -s(-t)$ (ii) $s(t) = -s(t+\frac{T}{2})$ $avec\ A_1 = A_2$

(i) $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, (ii) $b_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

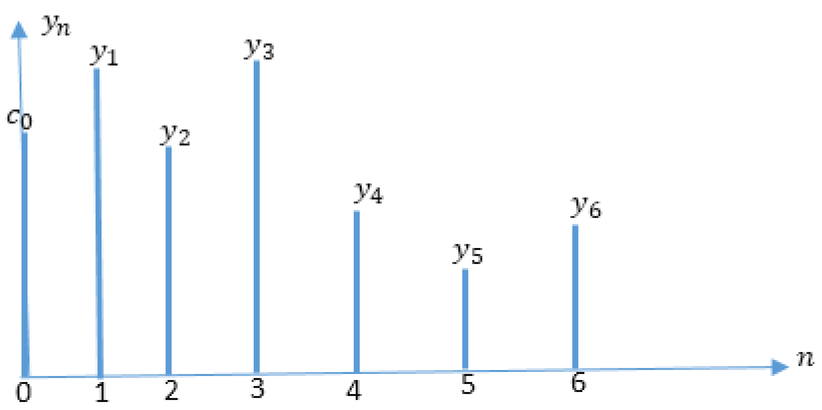
2) analyse spectrale des signaux

L'analyse spectrale d'un signal consiste à déterminer les caractéristiques suivantes :

- Le spectre en fréquence du signal, la courbe enveloppe du spectre, valeurs efficaces du signal, le taux de distorsion harmonique.

❖ **Spectre en fréquence d'un signal**

C'est la représentation graphique des coefficients a_n et b_n de la décomposition en série du signal, en fonction de n. par conséquent ce diagramme est discontinu. Lorsque si a_n si $b_n = 0$, on associe très souvent la variable $y_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$



c_0 est la composante continue du signal (valeur moyenne)

❖ **Courbe enveloppe du spectre**

C'est une courbe continue associée au spectre en fréquence et enveloppant l'ensemble des raies.

Cette enveloppe permet d'analyser l'importance des harmoniques dans la composition du signal.

- **Valeur efficaces du signal à partir de la décomposition**

Elle est donnée directement à partir du théorème de Parseval

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{2}{T}\int |f(t)|^2 dt = S_{eff}^2$$

- **Taux de distorsion**

Le taux de distorsion permet de déterminer l'importance des harmoniques face au fondamental. Il est établi par rapport :

$$d = \frac{valeur\ efficace\ de\ l'ensemble\ des\ harmoniques}{valeur\ efficace\ du\ fondamental}$$

Exemple :

Soit le signal définir par :

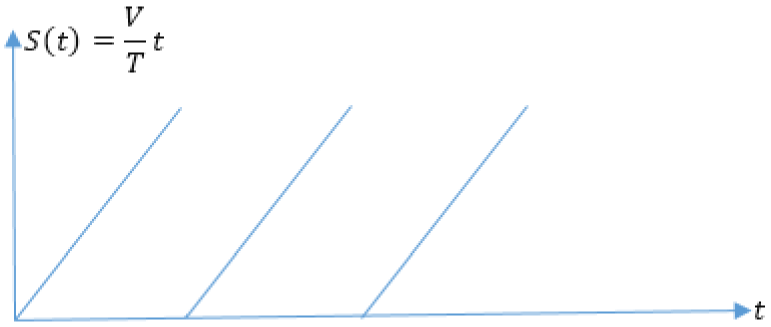
$S(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + ... + a_n \cos n\omega t$ La distorsion liée à $S(t)$ est

$$d = \frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}}{a_1}$$

L'une des applications importante de l'analyse spectrale réside dans l'amplification d'un signal non sinusoïdal. En effet dès qu'une tension non sinusoïdale doit être amplifiée, il faut se soucier de la bande passante nécessaire du système actif pour garantir une restitution optimale. Dès lors la représentation spectrale revêt un caractère important.

Exemple :

Considérons un signal $S(t)$ représenté par la figure ci-dessus



Recherchons le gabarit de la courbe de gain nécessaire au système susceptible d'amplifier le signal $S(t)$.

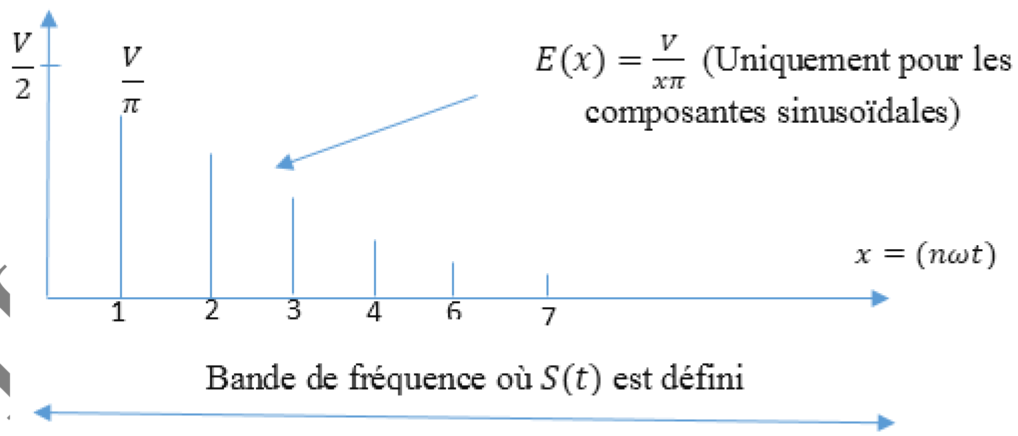
Pour cela décomposons $S(t)$ en série de fourrier.

S est impaire $\Rightarrow$ il n'y a de terme en cos. $\Rightarrow$ $a_n = 0$

$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt = \frac{V}{2}$ (*valeur moyenne de* $s(t)$) $\qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin n\omega t\,dt = -\frac{V}{n\pi}$

❖ Ensuite cherchons l'enveloppe du spectre

Elle se déduit du calcul de $|b_n|$, $|b_n| = \frac{V}{n\pi}$ $\Rightarrow E(x) = \frac{V}{x\pi}$ peut-être une équation de la courbe enveloppe pour $1 \le x \prec \infty$ d'où le spectre de fréquence associée à $S(t)$

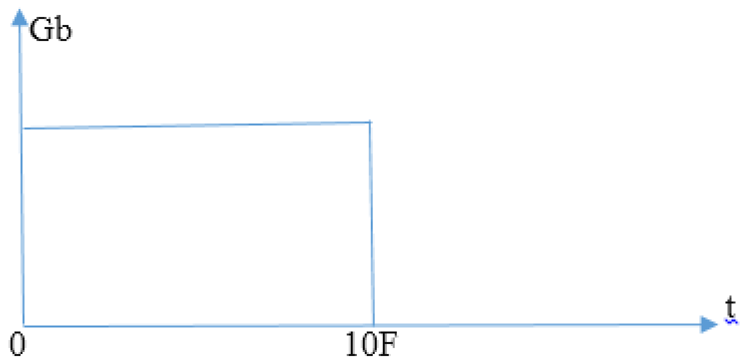


Pour définir la largeur du spectre qui suffit au signal, on doit retenir un nombre fini d'harmonique.

Une des approximations consiste à ne retenir que les harmoniques d'une amplitude supérieure à 10% de celle du fondamental.

$\Rightarrow b_n \succ \frac{1}{10} b_1 \Rightarrow \frac{V}{n\pi} \succ \frac{1}{10}\frac{V}{\pi} \Rightarrow n \prec 10$ le spectre utile $S(t)$ serait, d'après cette approximation, composé de ses 10 premiers harmoniques. En d'autres termes, il s'étalerait alors sur une plage de fréquence comprise de 0hz (en raison de la composante continue) à 10 fois la fréquence du signal.

D'où la figure



Bande passante nécessaire pour amplifier correctement le signal

4-5 Applications en Electrotechnique

En électronique de puissance il arrive souvent que tension et courants ne soient pas sinusoïdaux pourtant il est intéressant de calculer la puissance engendré par ce type de signaux. Parfois il est aussi nécessaire de transformer un signal périodique quelconque en signal sinusoïdal. Dans tous ces types de problèmes on utilise la décomposition en série de Fourrier.

4-5-1 puissance et série de fourrier.

a) Puissance due à des tensions et courants sinusoïdaux de fréquences différentes.

Considérons la tension $v(t)$ et l'intensité $i(t)$ définies par : $v(t) = v_m \sin \omega t$,

$i(t) = I_m \sin(\omega' t - \varphi)$ $\quad \omega \neq \omega'$ $\quad p(t) =$ puissance instantanée $= v(t)\,i(t)$

$= V_m I_m \sin \omega t \, \sin(\omega' t - \varphi)$

$$p(t) = \left[\frac{V_m I_m}{2}\cos\left((\omega - \omega')t + \varphi\right)\right] + \left[-\frac{V_m I_m}{2}\cos\left((\omega + \omega')t - \varphi\right)\right]$$

La valeur moyenne de chacun des termes ci-dessus est nulle $\Rightarrow$ la valeur moyenne de $p(t)$ l'est donc également. En conclusion, la puissance active $p = \overline{p(t)}$ (valeur moyenne de la puissance instantanée) engendrée par des courants et tensions de fréquences est nulle.

b) Relation entre valeur efficace et séries de fourrier

Considérons un signal $S(t)$ dont la décomposition en série de fourrier est donnée par

$S(t)=\overline{S}+\sum_{n=1}^{\infty} S_{nm}\sin(n\omega t-\varphi)$, $S_{eff}=\sqrt{\overline{S}^2+\sum_{n=1}^{\infty} S_n^2}$ où S_n est la valeur efficace de l'harmonique de rang n.

c) Relation entre puissance et série de fourrier

Considérons maintenant des courants et tensions périodiques mais non sinusoïdaux mais ayant même fréquence et définir par :

$$v(t)=\overline{V}+\sum_{n=1}^{\infty} S_{nm}\sin(n\omega t-\varphi_n) \qquad i(t)=\overline{I}+\sum_{n=1}^{\infty} S_{nm}\sin(n\omega t-\varphi'_n)$$

- ❖ La puissance moyenne ou active sera définie par :

$P=\overline{V}\,\overline{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{T}\int_0^{\frac{T}{n}} V_{nm}I_{nm}\sin(n\omega t-\varphi_n)*\sin(n\omega t-\varphi'_n)\,dt$ qui peut encore s'écrire

$P=\overline{V}\,\overline{I}+\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n\,\phi_n$ avec $\phi_n=\varphi_n-\varphi'_n$ $\frac{V_{nm}I_{nm}}{2}=V_n I_n$

On remarque alors que seuls les harmoniques de courant et tension de même ordre engendrent de la puissance active.

- ❖ Puissance réactive Q

La puissance réactive n'est définie que sur les fondamentaux des courants et tensions

$$Q=V_1I_1\sin\phi_1$$

- ❖ Puissance apparente A

La puissance apparente est le produit des valeurs des valeurs efficaces de la tension et du courant

$$A=VI=\left(V_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}\right)\left(I_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'^2_n+b'^2_n}{2}\right)$$

- ❖ Puissance déformante

Contrairement au régime sinusoïdale, la somme $A^2 = P^2 + Q^2 + D^2$ où D est appelé la puissance déformante.

4-6 Analyse harmonique numérique

La théorie de la décomposition des fonctions en séries de Fourier est appelée analyse harmonique.

Nous allons faire maintenant quelques remarques sur le calcul approché des coefficients de fourrier i.e. sur l'analyse harmonique numérique.

Nous savons que les coefficients de fourrier de la fonction $f(t)$ de période T sont définis par les formules suivant :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int f(t)dt \quad a_n = \frac{2}{T}\int f(t)\cos ntdt \quad b_n = \frac{2}{T}\int f(t)\sin ntdt$$

Or dans beaucoup de cas rencontrés en pratique la fonction $f(t)$ est donnée sous forme d'un tableau lorsque la dépendance fonctionnelle est obtenue expérimentalement. Le calcul des coefficients de fourrier se calcul au moyen des méthodes d'intégration approchée. Considérons le segment $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ de longueur T. Subdivisons ce segment en n parties ou intervalle égale S tel que $t_0 = -\frac{T}{2}, t_1, ..., t_n = \frac{T}{2}$. La longueur d'un segment parfait est alors $\Delta_x = \frac{\pi}{n}$. Désignons aux point $t_0, t_1, t_2, ...t_n$ par $y_0 = f(t_0)$, $y_1 = f(t_1), ...y_n = f(t_n)$. ces valeurs y_1 sont prises soit dans un tableau soit sur une courbe de fonction.

En utilisant par exemple la formule des rectangles, on détermine les coefficients de fourrier par les formules suivantes :

$$a_0 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad a_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos k\,t\,i \quad b_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin k\,t\,i$$

n=nombre de parties ou intervalle.

Chapitre 4: Les séries entières

4.1 Rayon de convergence

Définition (séries entières réelles ou complexes)

On appelle série entière toute série de fonctions de la forme :

$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où z est la variable réelle ou complexe et les (a_n) des constantes réelles ou complexes.

a) Définition (Rayon de convergence)

Soit a_n une suite de définie dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. L'ensemble des réels r positifs ou nuls pour lesquels la suite $(a_n r^n)$ est bornée est non vide (car il contient 0). Sa borne supérieure R_c, éventuellement infinie est appelée rayon de convergence de la série entière complexe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, ou de la série réelle $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$.

Disque ouvert de convergence.

Convergence d'une série entière

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, et soit R_c son rayon de convergence. Si la suite $(|a_n| z^n)$ est bornée, alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z| \prec R_c$.

Définition (disque ouverte de convergence)

Le cercle de centre 0 et de rayon R_c tel que:

$\{z \in C, |z| \prec R_c\}$ est appelé disque de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

4.2 Règle d'Alembert.

soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit R_c son rayon de convergence. On suppose que les coefficients a_n sont non nuls au moins à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in \mathbb{R}^{+}\cup\{+\infty\}$ alors ($R_c = \frac{1}{\lambda}$ $\quad R_c = +\infty \ si \ \lambda = 0 \ et \ R_c = 0 \ si \ \lambda = +\infty$)

Continuité de la somme.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_c \succ 0$. Cette série est normalement convergente sur tout compact (tout disque (série entière complexe) ou tout intervalle (série entière réelle) pris dans le disque ouvert de convergence) dans son disque ouvert de convergence.

Conséquence.

La somme $s(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

4.3 Opérations sur les séries entières.

Somme de deux séries entières.

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence $R_c \ et \ R_c^{'}$. Soit $R_c^{''}$ le rayon de convergence de la série entière somme $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ alors $R_c^{''} \geq \min(R_c, R_c^{'})$ avec l'égalité si $R_c = R_c^{'}$. Pour $|z| \prec \min(R_c, R_c^{'})$, et on a : $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

a) Produit de Cauchy de deux séries entières.

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence $R_c \ et \ R_c^{'}$. Soit $R_c^{''}$ le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où pour tout n , $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$. (On dit que la série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$). Alors $R_c^{''} \geq \min(R_c, R_c^{'})$ pour $|z| \prec \min(R_c, R_c^{'})$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

b) Unicité des coefficients d'une série entière.

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_c *et* R_c'. On suppose que la somme de ces deux séries coïncide sur le voisinage de 0. Alors ces deux séries sont identiques : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$

Conséquence :

La somme $s(t)$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une fonction paire (Resp. impaire) $\Leftrightarrow$ les a_n de rang impair (Resp. paire) sont nuls.

4.4 Dérivation et intégration d'une série entière.

Définition (série entière dérivée).

La série entière $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ est appelée série dérivée de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

Généralisation.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_c \succ 0$, la série entière $\sum_{n\geq 0} (n+P)(n+p-1)...(n+1) a_{n+p} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$ est la dérivée p-ième de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Son rayon de convergence est R_c. Cette série peut aussi s'écrire $\sum_{n\geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}$.

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} a_{n-1} z^n$ obtenue par « intégration terme à terme » de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a le même rayon de convergence R_c.

4.5 Dérivabilité de la somme d'une série entière réelle.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R_c \succ 0$, de somme $s(t)$. Alors $s(t)$ est dérivable sur $]-R_c, R_c[$, et sur tout cet intervalle : $s'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$

Généralisation.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R_c \succ 0$, de somme $s(t)$.

L'application $s(t)$ est de classe C^∞ sur $]-R_c, R_c[$ et sur tout cet intervalle :

$$
\begin{aligned}
\forall p \succ 0 \quad s^{(p)}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p+1)\dots(n+1)a_{n+p}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n \\
&= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n t^{n-p} \\
&= \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n t^{n-p}
\end{aligned}
$$

Conséquence.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R_c \succ 0$, de somme $s(t)$. Pout tout entier n, le coefficient a_n est égale à : $\frac{1}{n!} s^{(n)}(0)$.

Quelques exemples.

1) $\sum \frac{n^2+n}{2^n+n!} z^n$ 2) $\sum \frac{n^2-1}{n^2+n+2} z^n$ 3) $\sum \frac{\sin(n)}{n^2+1} z^n$

Chapitre 5: Les Transformées de Laplace

5.1 Rappel sur la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

On appelle fraction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ le rapport entre deux polynômes P et Q. Les valeurs de x qui annulent le numérateur de $P(x)$ s'appellent les zéros de F tandis que les valeurs qui annulent $Q(x)$ s'appellent les pôles de F. Ces zéros et pôles de F peuvent être simple ou multiples. On dit qu'ils sont simples lorsqu'ils annulent leurs polynômes correspondants une seule fois. On dit qu'ils sont multiples d'ordre de multiplicité k s'ils annulent leurs polynômes $k\ fois$.

Première étape :

La décomposition en éléments simple est effectuée uniquement lorsque le degré du polynôme $P(x)$ au numérateur est inférieur ou égale au degré du polynôme $Q(x)$ au dénominateur.

Deuxième étape :

L'étape suivante consiste à mettre sous forme factorisée le dénominateur $Q(x)$. C'est cette forme factorisée qui nous guidera dans la décomposition.

Premier cas : cas des pôles simples

Etudions ce cas à travers un exemple concret.

$F(x) = \frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+2)}$, après avoir factorisé le dénominateur, décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ consiste à proposer une somme de fraction dont chacune d'elle a pour dénominateur l'un des facteurs de degré l de Q et a pour numerateur un polynôme de degré $l-1$.

Deuxième cas : cas des pôles multiples

Etudions ce cas à travers un exemple. Considérons $F(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)^3}$,

la première forme de décomposition est la suivante :

$F(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{b_2x^2+b_1x+b_0}{(x+1)^3}$, cependant le dernier terme n'est pas une décomposition complète. Cette décomposition complète s'obtient en écrivant

$F(x) = \frac{a_1}{x+1} + \frac{c_1}{(x+1)^1} + \frac{c_2}{(x+1)^2} + \frac{c_3}{(x+1)^3}$. Lorsque l'ordre de multiplicité n'est trop élevé ($k = 3$), on peut utiliser la même technique que dans le cas des pôles simples uniquement pour déterminer la constance au-dessus de la puissance la plus élevée ($c_3\ dans\ notre$). Toutes les valeurs successives à x. Lorsque l'ordre de multiplicité du pôle est élevé, la méthode précédente devient fastidieuse, car elle débouche sur les systèmes d'équation de grande taille à résoudre. Cependant on peut contourner cette difficulté en utilisant la notion de développement limité. Explorons cette méthode à travers un exemple.

$$F(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)^4}$$

5.1.1 Rappel décomposition des fractions rationnelles en éléments dans ℂ.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{(x^2+1)} + \frac{c}{x-1}$$

Très souvent dans R, le dénominateur $Q(x)$ de la fraction $\frac{P}{Q}$ présente des termes irréductibles du second degré (exemple : x^2+1)

Dans ce cas, il est judicieux de transiter par la décomposition dans C avant de déduire celle dans R. Rappelons le théorème suivant :

Pour une équation à coefficients réels, si un complexe z_0 est la solution d'ordre de multipliciték, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution du même ordre de multiplicité. Cette notion s'entend dans la décomposition, car les coefficients des pôles conjugués sont aussi conjugués.

Soit $F(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x-1)}$

1) décomposer $F(x)$ dans C
2) déduire la décomposition dans $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$

$$\frac{1}{(x-i)(x+i)(x-1)} = \frac{a_1}{x-i} + \frac{a_2}{x+i} + \frac{a_3}{x-1}$$

5.2 Les transformées de LAPLACE

5.2.1 Définition

Soit la fonction f une fonction de la variable réelle t tel que

$$f(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \; (fonction \; nulle \; quand \; l'argument \; est \; négatif) \\ existe \;\; si \; t \geq 0 \; (fonction \; existe \; quand \; l'argument \; est \; positif) \end{cases}$$

On appelle transformée de Laplace de f l'expression : $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-Pt}dt = F(P)$,

très souvent, la transformée de Laplace est notée : $L\big(f(t)\big) = F(P)$.

Bien que cette intégrale ne soit pas définie pour toute fonction (t) , on s'arrangera dans ce chapitre pour que toute fonction $f(t)$ ait sa transformée de Laplace. Pour cela, il suffit que f soit une fonction usuelle.

<u>Exemple 1 :</u>

$$f(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \geq 0 \\ 0 \;\; si \; t < 0 \end{cases}; \;\; \int_0^{+\infty} f(t) e^{-Pt} dt = F(P)$$

$\int_0^{+\infty} 1. e^{-Pt} dt = -\frac{1}{P} [e^{-Pt}]_0^{+\infty}$ pour $P = a + ib$ avec $R_e(P) = a > 0$

$$L(1) = -\frac{1}{P} [e^{-at}(\cos(-bt) + isin(-bt))]_0^{+\infty} = \frac{1}{P}$$

$$L(1) = \frac{1}{P}$$

5.3 Théorème de l'unicité

Toute fonction $f(t)$ admet une et seule transformée de Laplace. Réciproquement, toute transformée de Laplace admet et une seule fonction. En d'autres termes, si deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ admettent la même transformée de Laplace, alors elles sont égales.

5.4 Propriétés de linéarité

Considérons $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + c_3 f_3(t) + \cdots + c_n f_{n,}(t)$

$$L(f(t)) = c_1 L(f_1(t)) + c_2 L(f_2(t)) + c_3 L(f_3(t)) + \cdots + c_n L(f_{n,}(t))$$

Cette propriété est appelée linéarité.

1.2.4) Transformée de Laplace de certaines fonctions usuelles :
$e^{at}, \sin(at), \cos(at), \sinh(at), \cosh(at), t \; et \; t^n$

Tableau1 : Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles.

$f(t)$	$L(f(t)) = F(P)$
e^{at}	$\frac{1}{P-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{P^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{P}{P^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{P^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{P^2-a^2}$
t	$\frac{1}{P^2}$

t^n	$\frac{n!}{P^{n+1}}$

5.6 Quelques Propriétés

Tableau2 : quelques Propriétés

$f(t)$	$L\big(f(t)\big) = F(P)$	Exemple
$f(\boldsymbol{a}t)$	$\frac{1}{\boldsymbol{a}}F(\frac{P}{\boldsymbol{a}})$	$L(cost) = \frac{P}{P^2+1}$ $L(cos3t) = \frac{P}{P^2+9}$
$\frac{1}{\boldsymbol{a}}f(\frac{t}{\boldsymbol{a}})$	$F(\boldsymbol{a}P)$	
$f(t-\boldsymbol{a})$	$e^{-\boldsymbol{a}P}F(P)$	$L(\cos(t-4) = e^{-4t}\frac{P}{P^2+1}$
$e^{\boldsymbol{a}t}f(t)$	$F(p-\boldsymbol{a})$	

Exercice :

Trouver la fonction qui a pour transformée de Laplace $F(P) = \frac{5}{P^2+4} + \frac{20P}{P^2+9}$

En restant dans $\mathbb{R}$ on trouve facilement :

$$F(P) = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{P^2+4}\right) + 20\left(\frac{P}{P^2+9}\right)$$

On a finalement : $f(t) = \frac{5}{2}\sin(2t) + 20\cos(3t)$

En restant dans $\mathbb{C}$, on peut réécrire :$F(P)$ comme suit :

$$F(P) = \frac{a_1}{P+2i} + \frac{a_2}{P-2i} + \frac{b_1}{P+3i} + \frac{b_2}{P-3i}$$

$$a_1 = \frac{5}{P-2i}\bigg|_{P=-2i} = \frac{5i}{4} \ ; \ a_2 = \overline{a_1} = -\frac{5i}{4} \,; b_1 = \frac{20P}{P-3i}\bigg|_{P=-3i} = 10 \ \text{ et } \ b_2 = \overline{b_1} = 10$$

$$f(t) = \frac{5i}{4}e^{-2it} - \frac{5i}{4}e^{2it} + 10e^{-3it} + 10e^{3it}$$

On a alors :

$f(t) = \frac{5}{2}\sin(2t) + 20\cos(3t)$

Exercice :

Trouver respectivement $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions suivantes :

$F(P) = \frac{7}{P^2+10P+41}$ (solution $f(t) = \frac{7}{4}e^{-5t}\sin(4t)$)

$G(P) = \frac{P+3}{P^2+2P+10}$ (solution $g(t) = e^{-t}(\cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t))$

5.7 Dérivation de l'image

La transformée de Laplace est égale à l'image et l'original est égale à $f(t)$.

Soit $F(P)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, on a alors la relation suivante :

$$(-1)^n \frac{d^n F(P)}{dP^n} = L(t^n f(t))$$

Exemple :

Trouver la transformée de Laplace de $h(t) = t^3 e^{-t}$.

5.8 Application des transformées de Laplace à la résolution des équations différentielles.

5.8.1 Transformée de Laplace des dérivées de fonctions

Considérons une fonction $f(t)$ et $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$ ses drivées successives. Recherchons la transformée de la Laplace de ces dérivées sachant que $L\big(f(t)\big) = F(P)$.

Tableau3 : Transformée de Laplace des dérivées de fonctions

$L\big(f(t)\big) =$	$F(P)$.
$L\big(f'(t)\big) =$	$P^1 F(P) - f(0)$.
$L\big(f''(t)\big) =$	$P^2 F(P) - Pf(0) - f'(0)$
…	…
$L\left(f^{(n)}(t)\right) =$	$P^n F(P) - P^{n-1} f(0) - f^{n-1}(0)$

Exemple :

1) Résoudre l'équation différentielle $(E): x' + x = 1\ avec\ x(0) = 0$
2) Résoudre l'équation différentielle $(E): x'' - x' + 2x = 0\ avec\ x'(0) = 1$ et $x(0) = 0$
3) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x' + y' = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}\ avec\ x(0) = 0\ et\ y(0) = 1$

Solutions :

1) En appliquant la transformée de Laplace des dérivées de fonctions on obtient :

$X(P) = \frac{1}{P} - \frac{1}{P+1}$ d'où $x(t) = 1 - e^{-t}$

Travaux dirigés

Série1

Exercice 1

(a) Décomposer en éléments simples la fraction : $\dfrac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$.

(b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = -\frac{5}{2}\sin x \ , \qquad \text{avec } y(0) = 0, \ y'(0) = 2 \ .$$

Exercice 2

Résoudre le système :

$$\begin{cases} y'' + (z' - y') = -\dfrac{3}{4}y \\ \\ z'' - (z' - y') = -\dfrac{3}{4}z \ , \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y(0) = z(0) = 0$, $y'(0) = 1$ et $z'(0) = -1$.

Exercice 3

Résoudre le système :

$$\begin{cases} y_1'(x) & + & 2y_2'(x) & + & 3y_3'(x) & = & 0 \\ y_1'(x) & - & y_2'(x) & & & = & 3x - 3 \\ & & y_2'(x) & + & 2y_3(x) & = & 1 - x^2 \ , \end{cases}$$

avec conditions initiales : $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$.

Exercice 4

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\sin(\omega x)$.

(a) Montrer que $f''(x) = 2\omega\cos(\omega x) - \omega^2 f(x)$.

(b) En déduire la transformée de Laplace de f.

(c) De quelle fonction $\dfrac{s}{(s^2+3)^2}$ est-elle la transformée de Laplace ?

Série2

Exercice1

On considère la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec :

$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1) Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que : $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$, est une fonction continue.
3) Montrer que :

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

4) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

5) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 2

On donne l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

1) Rechercher sous forme de série entière la solution de cette équation passant par le point $x = 0$, $y = 1$.
2) Quelle est le rayon de convergence de la série obtenue ?
3) Montrez que cette solution peut se donner à l'aide des fonctions élémentaires de façon suivante:
   a) Pour $x > 0$, $y(x) = cos\sqrt{x}$.
   b) Pour $x < 0$, $y(x) = ch\sqrt{-x}$.

Exercice3

α désigne un réel de l'intervalle $]0;\pi[$ et f la fonction 2π périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq \alpha \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Étudier la série de Fourier de f ainsi que sa convergence.

2) Que vaut la somme de cette série pour $x = 0$, pour $x = \alpha$?

3) Calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$$

4) Calculer et justifier :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}$$

Exercice4

Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la transformée de Laplace :

$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = -\frac{5}{2}\sin(x)$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Série3

I. SERIES NUMERIQUES

a- Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ pour $n > 1$.

b- Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = k^{\ln(n)}$, où k est une constante positive.

c- Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{|\cos(n)|}{2^n}$

d- Déterminer la nature des séries des termes généraux respectifs :

$u_n = \frac{g(n)}{f(n)}$ et $v_n = \frac{g(n)}{f(n)} + \frac{1}{3n}$

Où $f(n) = -1 + (1-n)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $g(n) = -\frac{1}{2n} - f(n)$.

e- Nature de la série de terme général $u_n = \left(ln\frac{1}{cos\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}$, ou α designe une constante reelle et ln le logarithme népérien.

f- Discuter, suivant la valeur de α reel fixé, la nature de la série de terme u_n tel que :

$$(1+n)^{\alpha}u_n = \ln\left(cos\frac{1}{n}\right)$$

g- Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

h- Convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$.

i- Nature la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n2^n}$ où x est un nombre positif.

j- 1) quelle est la nature est la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n ch\left(\frac{1}{n}\right) sin\left(\frac{1}{n}\right)$?

2) quelle est la nature de la série de terme général $v_n = ln|nu_n|$?

f- 1) Etude de la fonction $y = \frac{\ln(x)}{1+x}$. Graphe (c) dans le système d'axes Ox, Oy orthonormé. Déterminer l'intersection de (c) avec l'axe Ox et la tangente en ce point. Calculer les coordonnées du point à tangente parallèle à Ox, à 0.1 près.

2) On considère la fonction $y = \frac{\ln(x)}{1+x}cos^2 x$. Montrer la courbe représentative (Γ) est : tangente à (c) aux points d'abscisse $x = n\pi$.

Tangente à Ox aux points d'abscisse $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ $(n\ entier\ positif\ ou\ nul)$.

Tracé sommaire de (Γ). Interprétation géométrique de la somme S_n des $n+1$ permiers termes de la serie de terme général $u_n = \int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x)}{1+x} cos^2(x)dx$

3) On définit les séries (v_n) et (w_n) par $v_n = \int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2(x)}{1+x}dx$ et

$$w_n = \int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2(x)}{1+x}dx$$

Montrer que la série de terme général : $U_n = v_n + w_n$ diverge.

4) Montrer que la série de terme général : $V_n = v_n - w_n$ converge. On pourra démontrer que : $V_n = \frac{1}{2}\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2(x)}{(1+x)^2}dx$

5) Déduire des deux questions précédentes que (v_n) et (w_n) sont les séries divergentes.

6) montrer que la série (u_n) diverge.

II. SERIES ENTIERES ET SERIES DE FONCTIONS

a- Déterminer les rayons de convergence des séries de terme général :$u_n(x) = \frac{n^{2n}}{(2n)!}x^n$,

$u_n(x) = \frac{n^2+n+1}{(n)!}x^n$, $u_n(x) = \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)x^n$

b- On considère la série entière de terme général $u_n(x) = \frac{1}{n(n+4)}x^n$

1) Déterminer le rayon de convergence.
2) Cette série converge-t-elle pour $x = \pm 1$?

c- Déterminer le rayon de convergence des séries :

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(ch\frac{1}{n} + cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} z^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{n^n}z^n$,

d- Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n z^n; \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+1}{3^n}z^n; \quad f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

$$f_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n^2}z^n; \quad f_5(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n^2+1}z^n; \quad f_6(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}z^{2n}$$

$$f_7(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{2n+1}; \quad f_8(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}z^n; \quad f_9(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}n^\alpha z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Series de fonctions

Exercice 1.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $[0,1[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,a]$ où $a \in]0,1[$.
3. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1[$.

Exercice 2.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $]0,+\infty[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[a,+\infty[$ où $a > 0$.

Exercice 3. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonction $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1]$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 4. On considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} f_n \quad \text{avec} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$$

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle cette série est normalement convergente.
4. Montrer que cette série est continue.

Exercice 9. Soit une suite de fonctions réelles définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$.

1. Montrer que la série de fonctions associée converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que cette série de converge uniformément sur $[0,1]$.
3. La série converge-t-elle normalement ?

II. SERIES DE FOURRIER

Exercice 1 Calculer la série de Fourier trigonométrique de la fonction 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi]$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 2 Calculer la série de Fourier, sous forme trigonométrique, de la fonction 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 3 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \,]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

(1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

(2) étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.

(3) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 4 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \,]-\pi, \pi]$.

(1) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction f.

(2) étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.

(3) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice 5 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = (x-\pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[\,.$$

(1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

(2) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

(3) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continûment différentiable, et soit α un réel non nul. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + \alpha x(t) = f(t).$$

Trouver une solution 2π-périodique de cette équation en écrivant $x(t)$ et $f(t)$ sous la forme de séries de Fourier trigonométrique. Appliquer ce résultat au cas où $\alpha = 1$ et

$$f(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{si } t \in [0, \pi[\,, \\ -\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[\,. \end{cases}$$

Série4

Exercice1 :

Considérant les deux (02) signaux suivants pour lesquels $f_0 = 1\ kHz$:

$x_1(t) = 6 - 2\cos(2\pi f_0 t) + 3\sin(2\pi f_0 t)$

$x_2(t) = 4 + 1.8\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8\sin(6\pi f_0 t)$

1. Dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase unilatéraux et bilatéraux ;
2. Ecrivez $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sous forme de série de Fourier complexe.

Exercice 2 :

On considère la fonction $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$

1. Calculer l'intégrale $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnxdx\ (n > 0)$
2. Développer $f(x)$ en série de Fourrier dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$. Montrer que le développement converge vers une fonction de x périodique, et continue sur tout segment.
3. Calculer les sommes des séries : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$
4. Développer $f(x)$ en série à termes complexes.
5. La série des modules de la série obtenue est-elle convergente ?

Exercice 3 :

Déterminer la nature des séries de terme général

a) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ b) $u_n = k^{lnx}$ où k est une constant positive

b) c) $u_n = \left(ln\frac{1}{cos\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}$ ou α désigne une constante réelle d) $u_n = \frac{|cosn|}{2^n}$

Exercice 4 :

1. En utilisant la transformée de Laplace résoudre l'équation différentielle (E).
   $y''(t) + y(t) = e^t$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
2. En utilisant la transformée en Z résoudre l'équation aux différences:
   $u_{n+1} = 1.2u_n + 10$. On donne $u_0 = 2$

Exercice 5 :

Trouvez le rayon de convergence de la série entière de terme général :

$u_n = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{3.10^{n-1}}$

1. x appartenant à l'intervalle de convergence déterminé précédemment, on pose :

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

a) Donner le développement limités de chx et sin$x$ à l'ordre 7.

b) En utilisant la question a) déterminer la partie principale de l'infiniment petit de $chx.sinx - f(x)$ quand tend vers 0.

c) Montrer que le terme général est une série géométrique dont on précisera la raison.

d) Calculer alors explicitement $f(x)$.

FICHE TD1 SUR LES SERIES ENTIERES.

Exercice1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

b) $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2} z^n$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

d) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

e) $\sum_{n\geq 0} n! z^n$

f) $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n$

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

h) $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$

i) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

j) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

l) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\mathrm{ch}\, \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right) \right)^{n^4} z^n$

n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{n^n} z^n$

Exercice2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n z^n\,;\quad f_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+1}{3^n}z^n\,;\quad f_3(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

$$f_4(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n^2}z^n\,;\quad f_5(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n^2+1}z^n\,;\quad f_6(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}z^{2n}$$

$$f_7(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{2n+1}\,;\quad f_8(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}z^n\,;\quad f_9(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha}z^n,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

Exercice3

On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}a_k$$

(a) Donner une formule permettant de calculer

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$$

(b) Calculer $S(x)$.

(c) Calculer les a_n.

(d) Donner un équivalent de la suite (a_n).

FICHE DE TD1 : SERIES NUMERIQUES.

Question 1 :

Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\qquad\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$$

Question2 :

Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+1}{n^2}\,;\qquad S_2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\,;\qquad S_3=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$$

$$S_4=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\,;\qquad S_5=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(ne^{\frac{1}{n}}-n\right);\qquad S_6=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1+e^{-n})$$

Question 3 :

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
2. $u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)}$
3. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$

Question4 :

Etudier la nature de la série de terme général:

1. $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$
2. $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$
3. $u_n = \frac{n+1}{n-7}$
4. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
5. $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$
6. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$
7. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
8. $u_n = \frac{n}{2^n}$
9. $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$
10. $u_n = \frac{1}{n!}$
11. $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$
12. $u_n = \frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n-1)!}$
13. $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
14. $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
15. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Question5 :

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos n}{n^\alpha + \cos n},$$

Où α est un paramètre réel.

a) Si α > 1, montrer que la série converge absolument.

b) Si 1< α ≤ 1, montrer que la série converge.

c) Si α =1/2, montrer que la série diverge.

Question 6 :

Etudier la convergence des séries suivantes, de termes généraux :

a) $v_n = \frac{10^n}{n!}$, b) $w_n = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Question 7 :

Donner la nature de la série :

$$\sum \frac{\cos(\ln n)}{n} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Question 8 :

Préciser la nature de la serie dont le terme general est donné par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \qquad u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n} \qquad \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n}$$