

24

Plane Geometry

平面几何

用 Matplotlib 绘制各种平面几何形状



艺术就是谎言，但艺术让我们看清真相。

Art is the lie that enables us to realize the truth.

——毕加索 (Pablo Picasso) | 西班牙艺术家 | 1881 ~ 1973



- ◀ matplotlib.patches.Arc() 绘制弧线
- ◀ matplotlib.patches.Arrow() 绘制箭头
- ◀ matplotlib.patches.Circle() 绘制正圆
- ◀ matplotlib.patches.Ellipse() 绘制椭圆
- ◀ matplotlib.patches.FancyBboxPatch() 绘制 Fancy 矩形框
- ◀ matplotlib.patches.Polygon() 绘制多边形
- ◀ matplotlib.patches.Rectangle() 绘制长方形
- ◀ matplotlib.patches.RegularPolygon() 绘制正多边形
- ◀ matplotlib.pyplot.cm 提供各种预定义色谱方案，比如 matplotlib.pyplot.cm.rainbow
- ◀ matplotlib.pyplot.contour() 绘制平面等高线
- ◀ matplotlib.pyplot.contourf() 绘制填充等高线图
- ◀ numpy.cos() 计算余弦值
- ◀ numpy.diag() 如果 A 为方阵，numpy.diag(A) 函数提取对角线元素，以向量形式输入结果；如果 a 为向量，numpy.diag(a) 函数将向量展开成方阵，方阵对角线元素为 a 向量元素
- ◀ numpy.dot() 计算向量标量积。值得注意的是，如果输入为一维数组，numpy.dot() 输出结果为标量积；如果输入为矩阵，numpy.dot() 输出结果为矩阵乘积，相当于矩阵运算符@
- ◀ numpy.linalg.inv() 矩阵求逆
- ◀ numpy.linalg.norm() 计算范数
- ◀ numpy.meshgrid() 创建网格化数据
- ◀ numpy.sin() 计算正弦值
- ◀ numpy.sqrt() 计算平方根

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

24.1 使用 patches 绘制平面几何形状

相信大家对 `matplotlib.patches` 已经不陌生了。`matplotlib.patches` 是 Matplotlib 库中的一个模块，可以使用它来绘制如图 1 圆形、矩形、多边形、箭头等等。

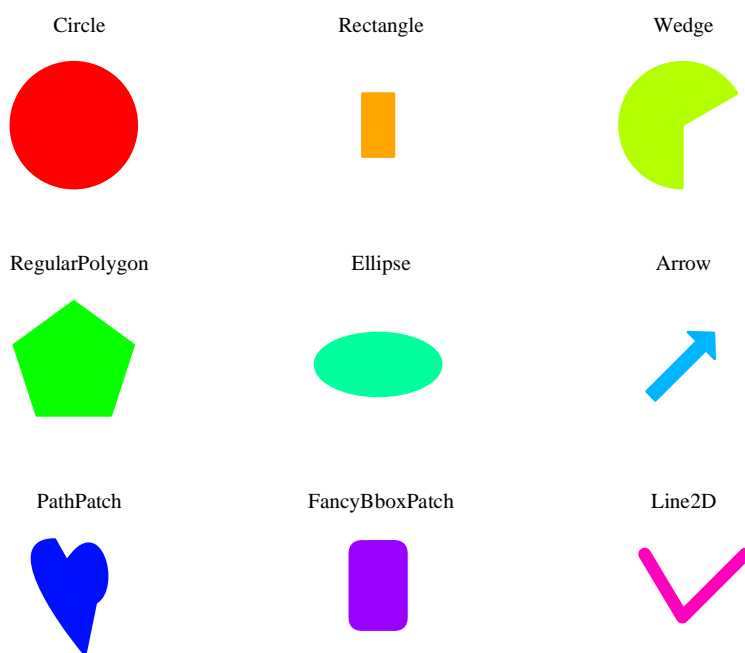


图 1. `matplotlib.patches` 中常见的几何图形

图 1 参考如下示例：

https://matplotlib.org/stable/gallery/shapes_and_collections/artist_reference.html

图 2 所示为利用 `matplotlib.patches` 绘制一组单位圆内接、外接正多边形。举个例子，`patches.Circle` 可以创建一个圆形对象。这个对象可以具有不同的参数，如位置、大小、边框颜色、填充颜色、阴影线等。

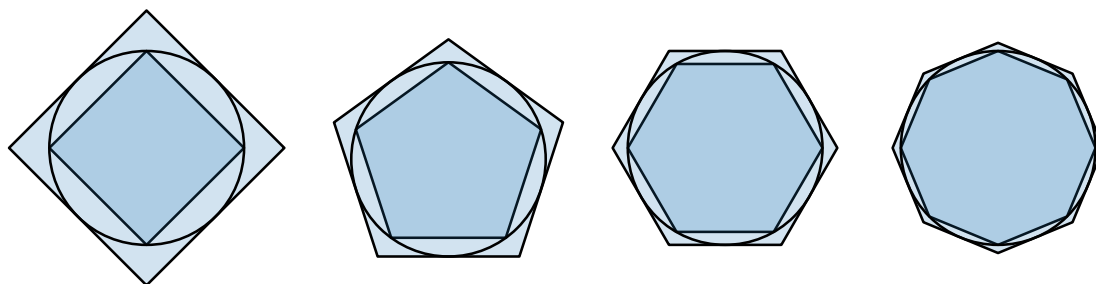


图 2. 利用 `patches` 绘制正圆，以及外切、内接正多边形

《数学要素》第 3 章中，大家会看到我们利用图 2 介绍如何估算圆周率。



Jupyter 笔记 BK_2_Ch24_1.ipynb 绘制图 2。

斐波那契数列可以在自然界中找到很多例子，如植物的分枝结构、蜂窝的排列方式等。这是因为斐波那契数列具有一种黄金分割比例的特性，在自然界中被广泛运用。斐波那契数列在计算机科学和编程中有着广泛的应用。例如，它可以用来设计递归算法和动态规划算法，解决一些复杂的问题。斐波那契数列与黄金分割比例、数学规律等有着密切的联系。它在代数、数论、几何等数学领域中都有重要的应用。

24.2 使用等高线绘制平面几何形状

“鸢尾花书”中，我们更常见的是利用平面等高线可视化平面几何形状。

图 16 上图所示为利用等高线绘制的一组圆锥曲线。通过在 $[0, 3]$ 范围之内改变离心率，圆锥曲线从正圆、椭圆，最终变成双曲线。绘制每条曲线时，我们先设置离心率，然后利用网格数据生成特定圆锥曲线的数据。绘制等高线时，仅仅绘制等高线值为 1 的那一条曲线。并且，利用色谱我们生成一组连续变化的颜色，分别渲染每一条圆锥曲线。



《数学要素》第 9 章将介绍如何通过设定离心率改变圆锥曲线类型。

图 16 下图绘制的是在给定椭圆上不同点处的切线。绘制这幅图时需要用到椭圆切线的解析式，《矩阵力量》第 20 章将专门讲解这一话题。

下面我们看两个更复杂的例子。如图 17 上图所示，给定矩形，绘制一组和矩形相切的椭圆。图中的矩形用 `matplotlib.patches` 绘制。而椭圆采用等高线绘制。



《数学要素》第 9 章会专门讲解这组椭圆的性质。

如图 17 下图所示，给定旋转椭圆，绘制一组和椭圆相切的矩形。椭圆采用参数方程绘制，而矩形采用 `matplotlib.patches`。

绘制矩形还用到了仿射变换 (affine transformation)。本书后续将专门讲解仿射变换。



《统计至简》第 14 章将讲解图 17 下图用到的数学工具。

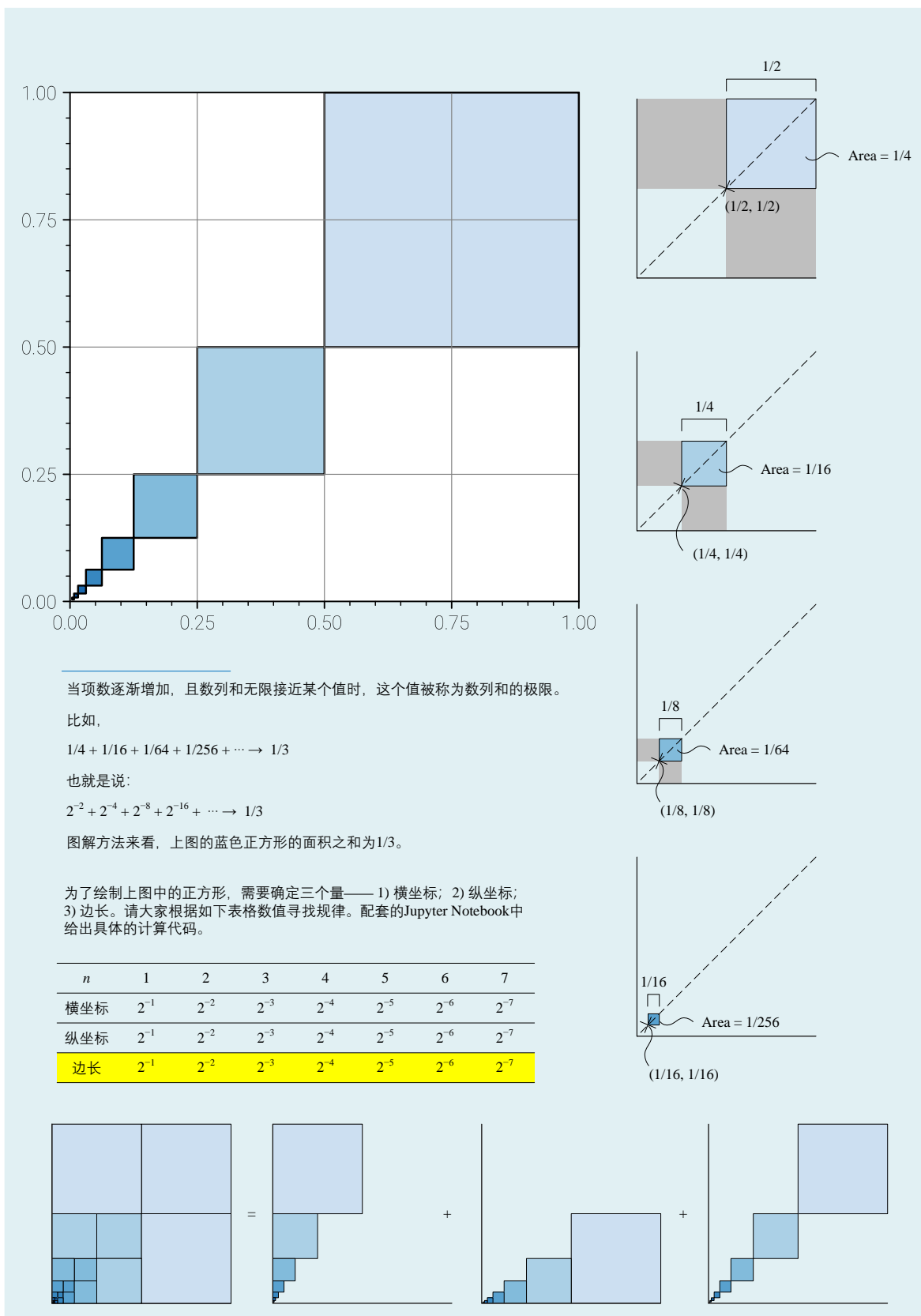


Jupyter 笔记 BK_2_Ch24_2.ipynb 绘制图 16 上图。Jupyter 笔记 BK_2_Ch24_3.ipynb 绘制图 16 下图。
Jupyter 笔记 BK_2_Ch24_4.ipynb 绘制图 17 上图。Jupyter 笔记 BK_2_Ch24_5.ipynb 绘制图 17 下图。



想要理解如何用 `patches` 绘制各种几何图形，大家可以参考如下链接：

https://matplotlib.org/stable/api/patches_api.html



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

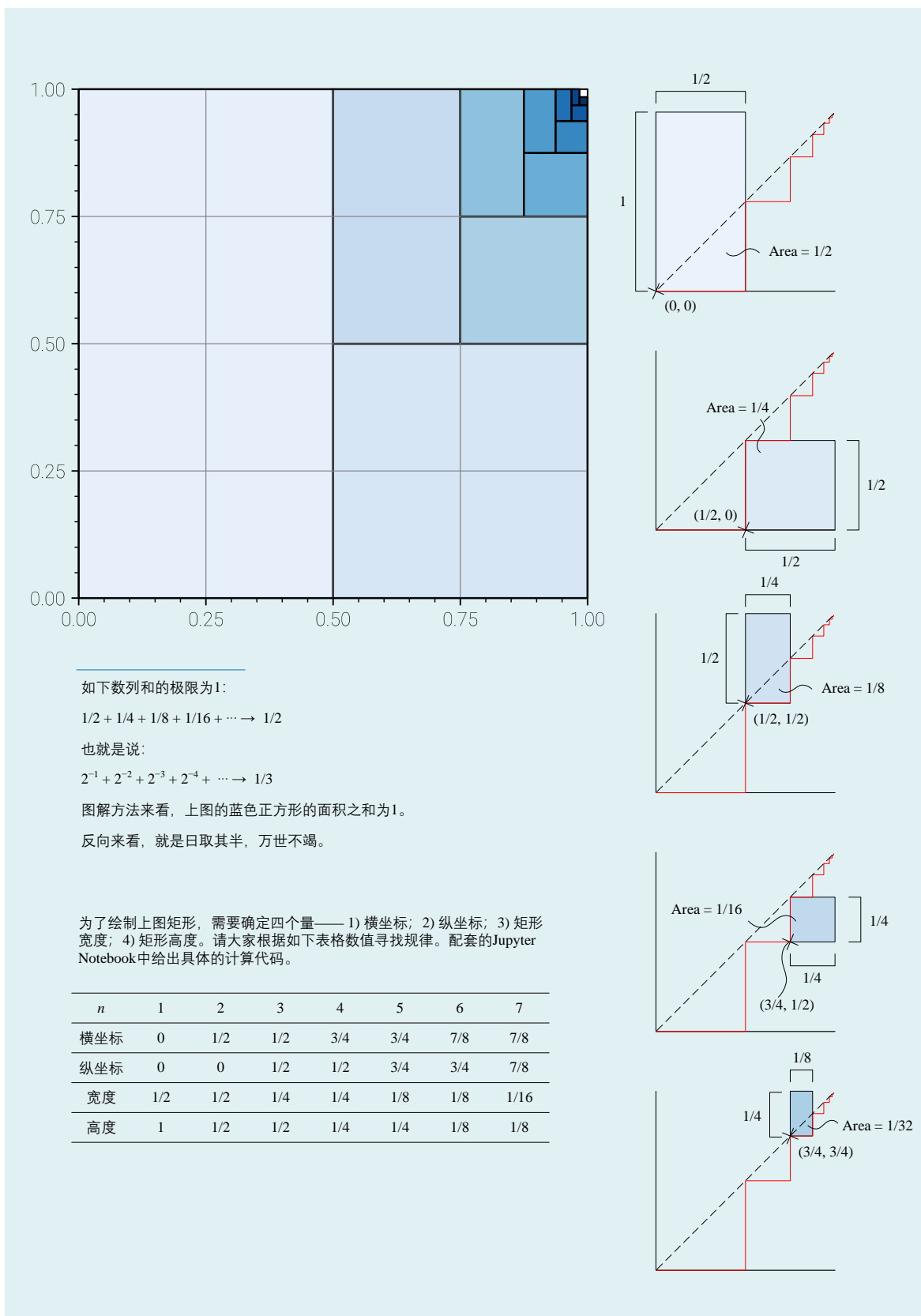


图 4. 可视化极限, 第 2 组

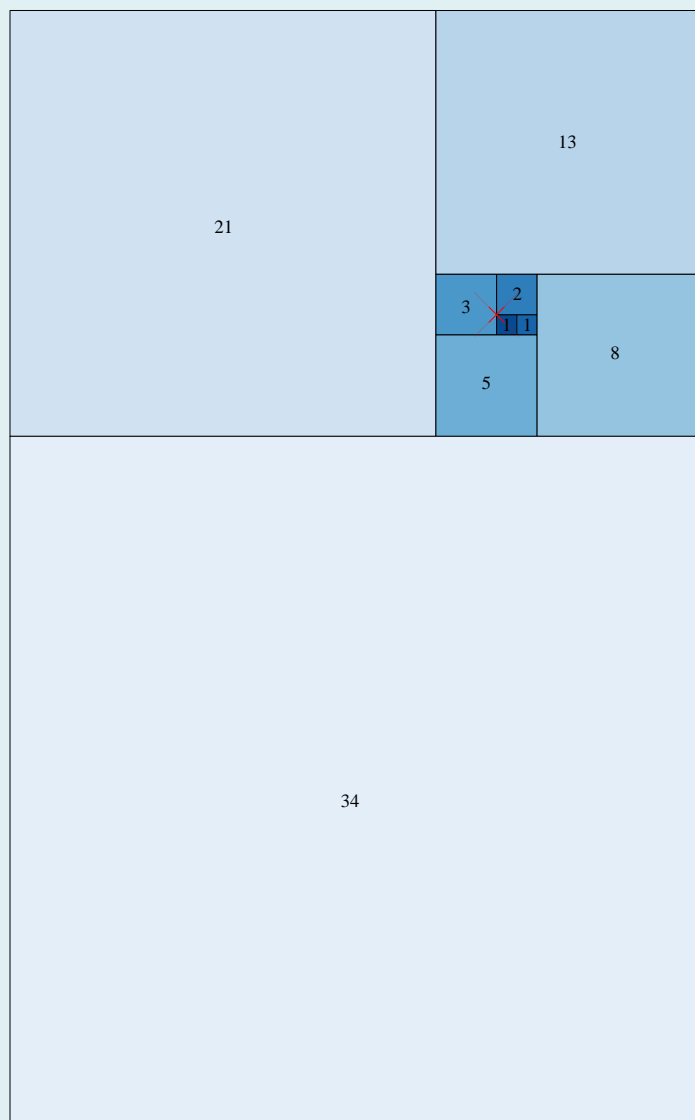
本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com



为了绘制这组正方形，需要确定四个量——1) \times 横坐标；2) \times 纵坐标；3) 正方形边长；4) 旋转角度。请大家根据如下表格数值寻找规律。配套的Jupyter Notebook中给出具体的计算代码。

n	1	2	3	4	5	6	7
横坐标	0	1	2	0	-3	2	10
纵坐标	0	-1	0	2	-1	-6	2
边长	1	1	2	3	5	8	13
旋转角	-90	0	90	180	270	360	450

斐波那契数列 (Fibonacci sequence) 以递归的方式定义。它的前两个数字是0和1，从第三个数字开始，每个数字都是前两个数字的和。

斐波那契数列前几项为：

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34。

左图的正方形的边长展示的便是 (0以外) 斐波那契数列。

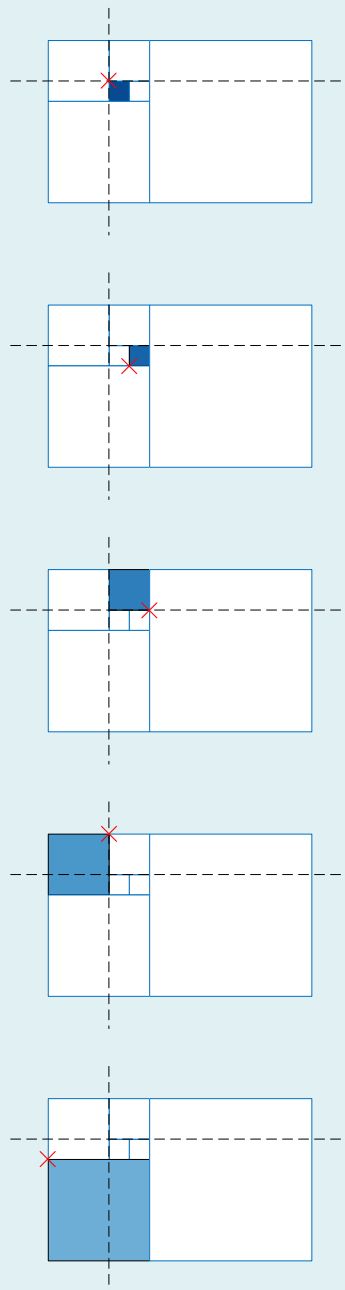
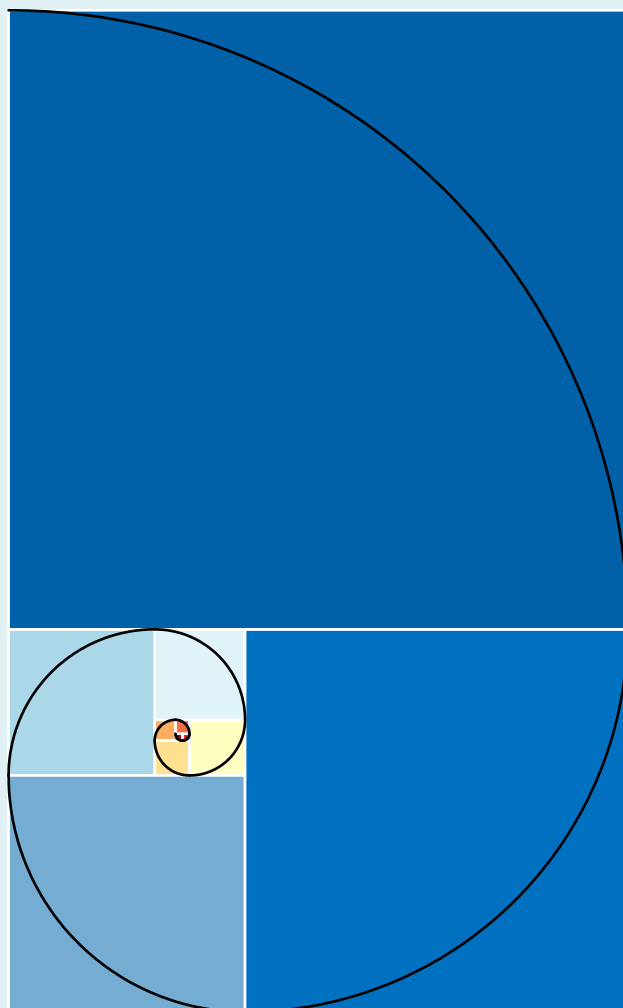
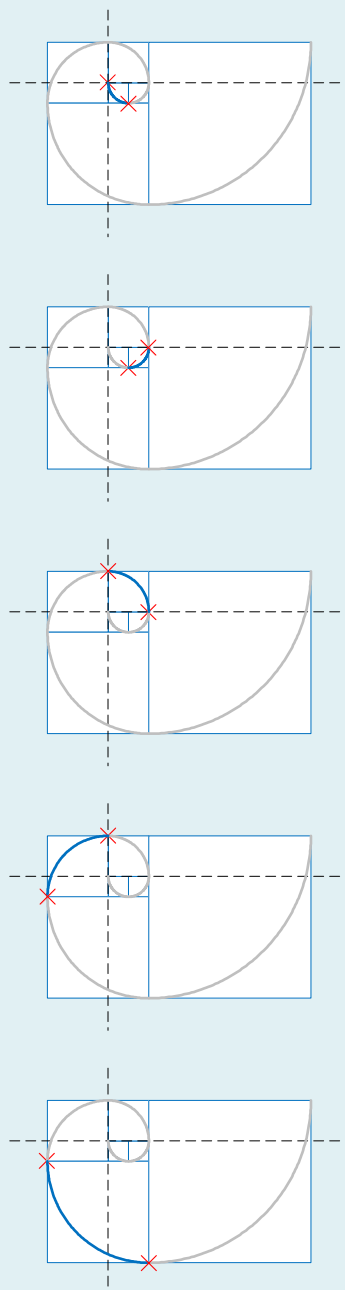


图 5. 可视化斐波那契数列



斐波那契螺旋线基于斐波那契数列。它的构造方式基于上一页的正方形，用1/4圆弧(90度)连接×，最终形成一个螺旋线。

斐波那契螺旋线可以用来近似黄金螺旋 (Golden spiral)。



为了绘制斐波那契螺旋线，需要确定四个量——1) 圆心横坐标；2) 圆心纵坐标；3) 半径；4) 1/4圆弧起始角。请大家根据如下表格数值寻找规律。配套的Jupyter Notebook中给出具体的计算代码。

n	1	2	3	4	5	6	7
横坐标	1	1	0	0	2	2	-3
纵坐标	0	0	0	-1	-1	2	2
半径	1	1	2	3	5	8	13
起始角	2×90	3×90	3×90	4×90	5×90	6×90	7×90

代码中还用到了如下三角波。



图 6. 可视化斐波那契螺旋线

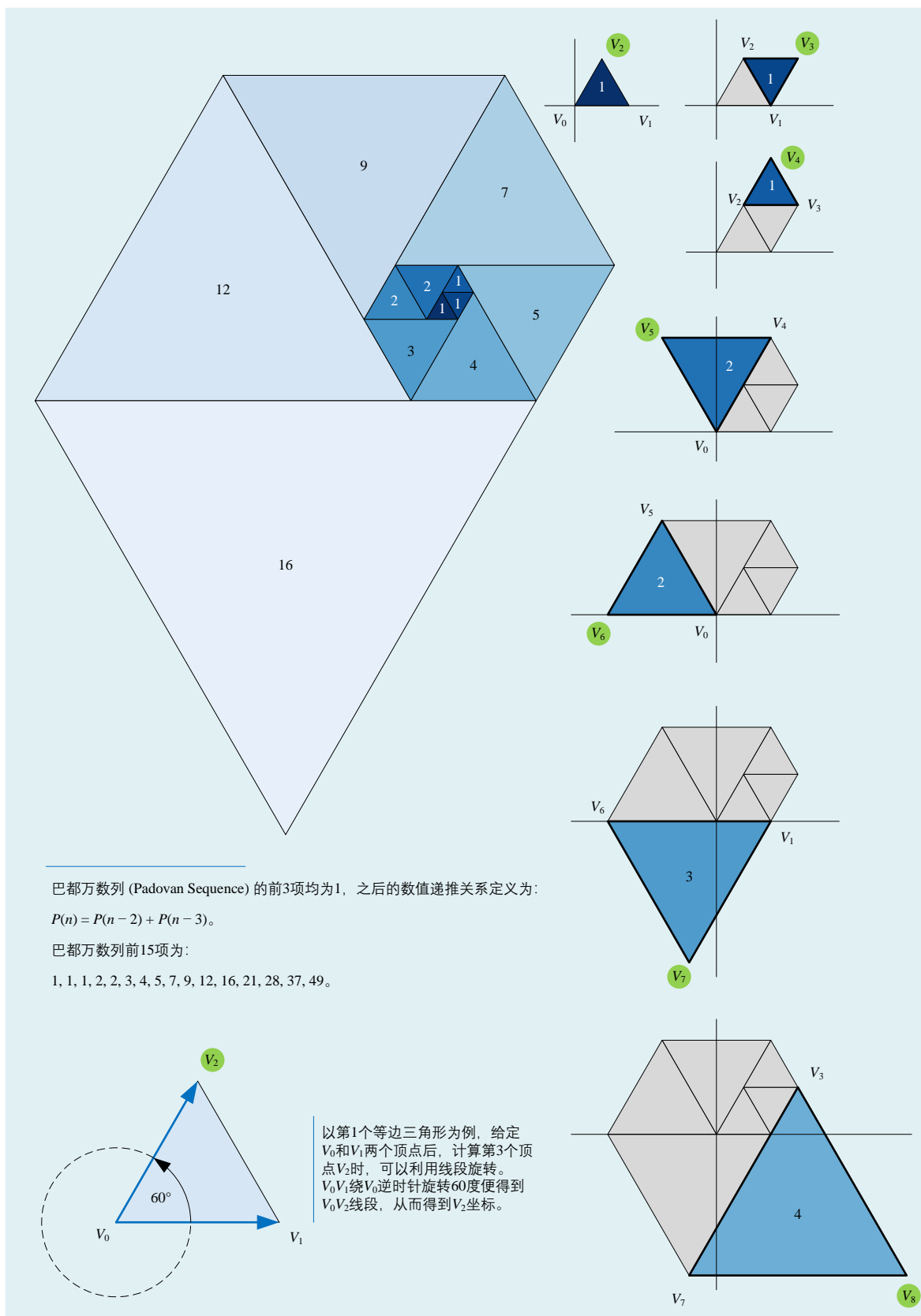


图 7. 可视化雷卡曼数列

本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

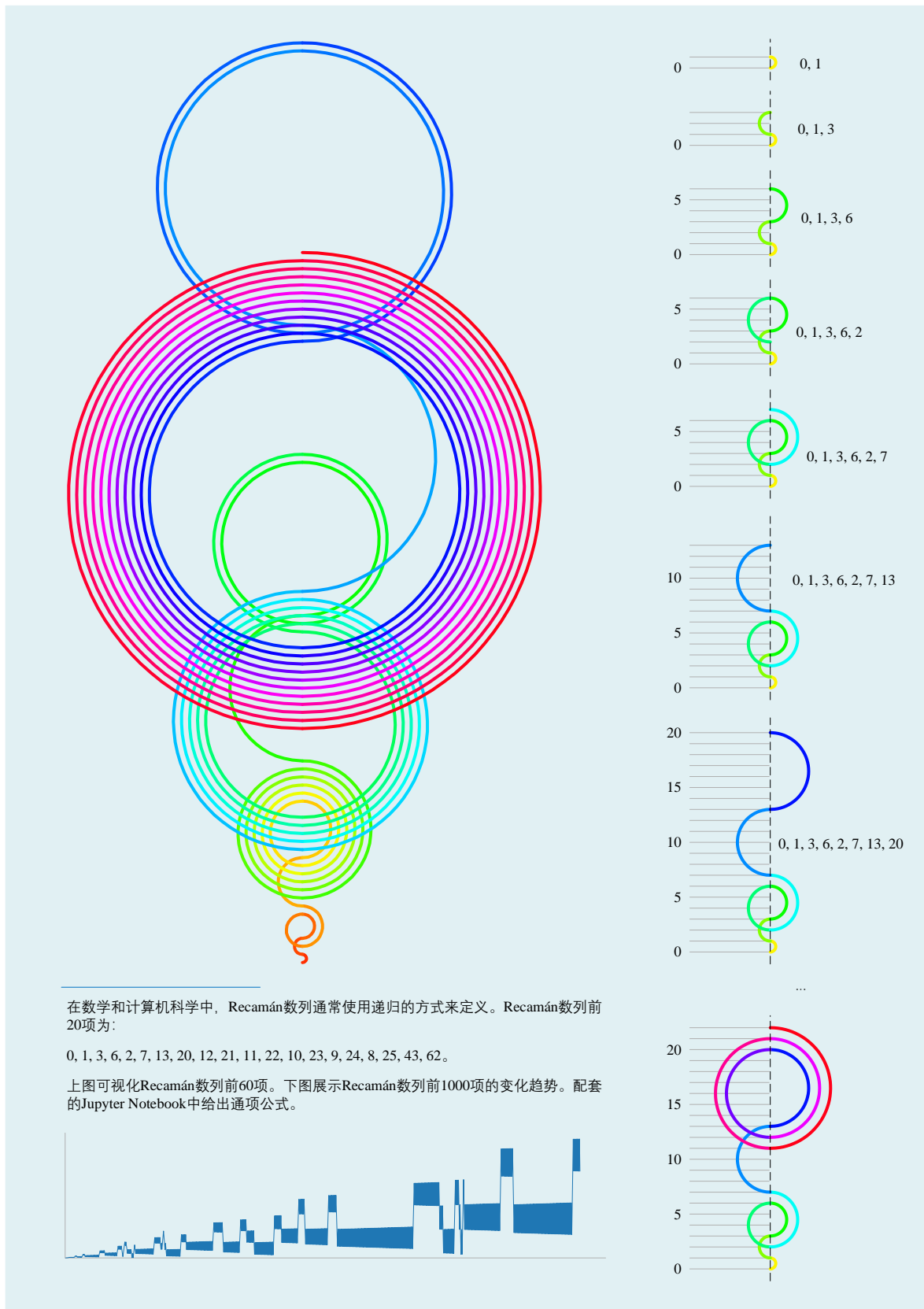


图 8. 可视化巴都万数列

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

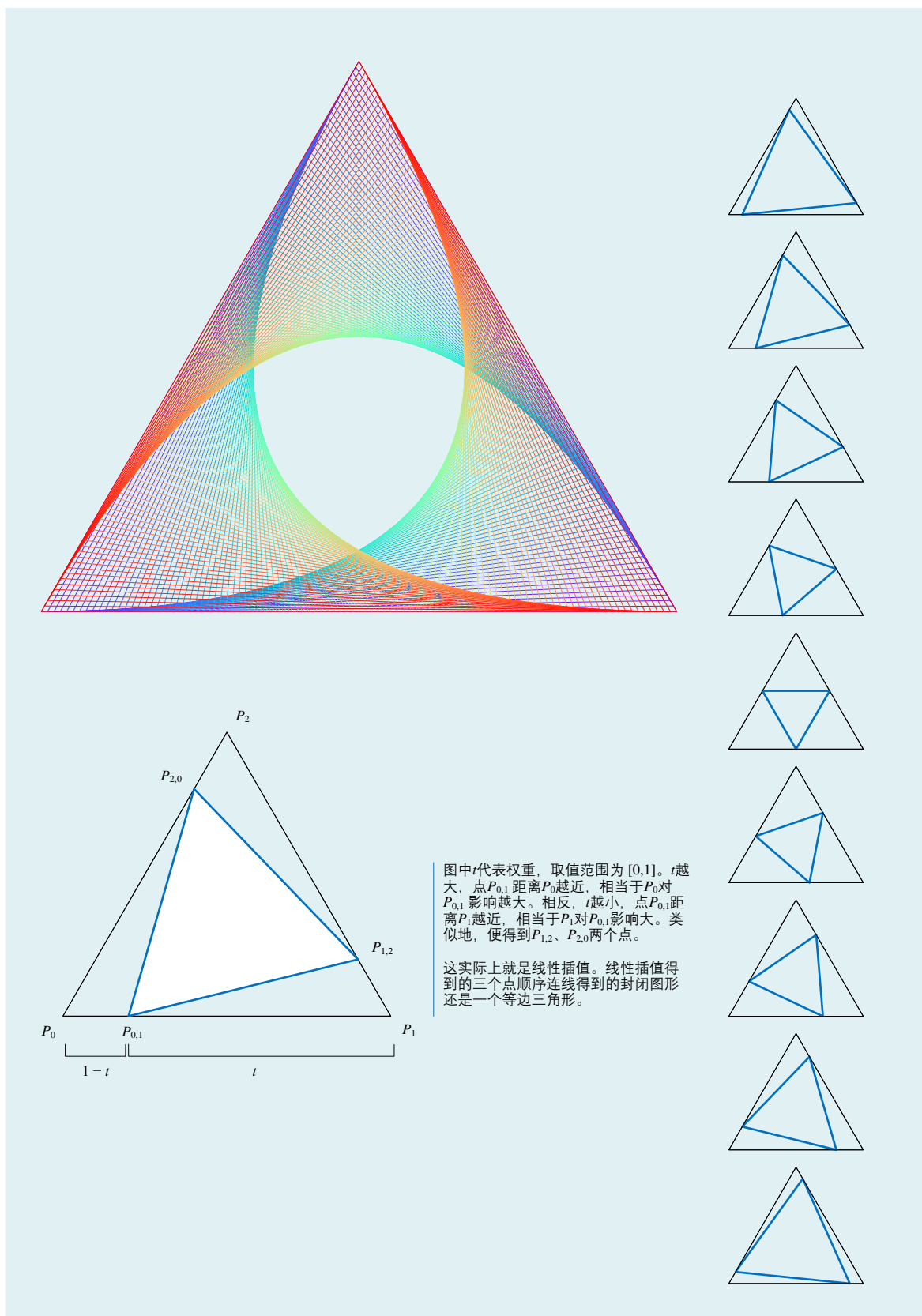


图 9. 线性插值，等边三角形

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

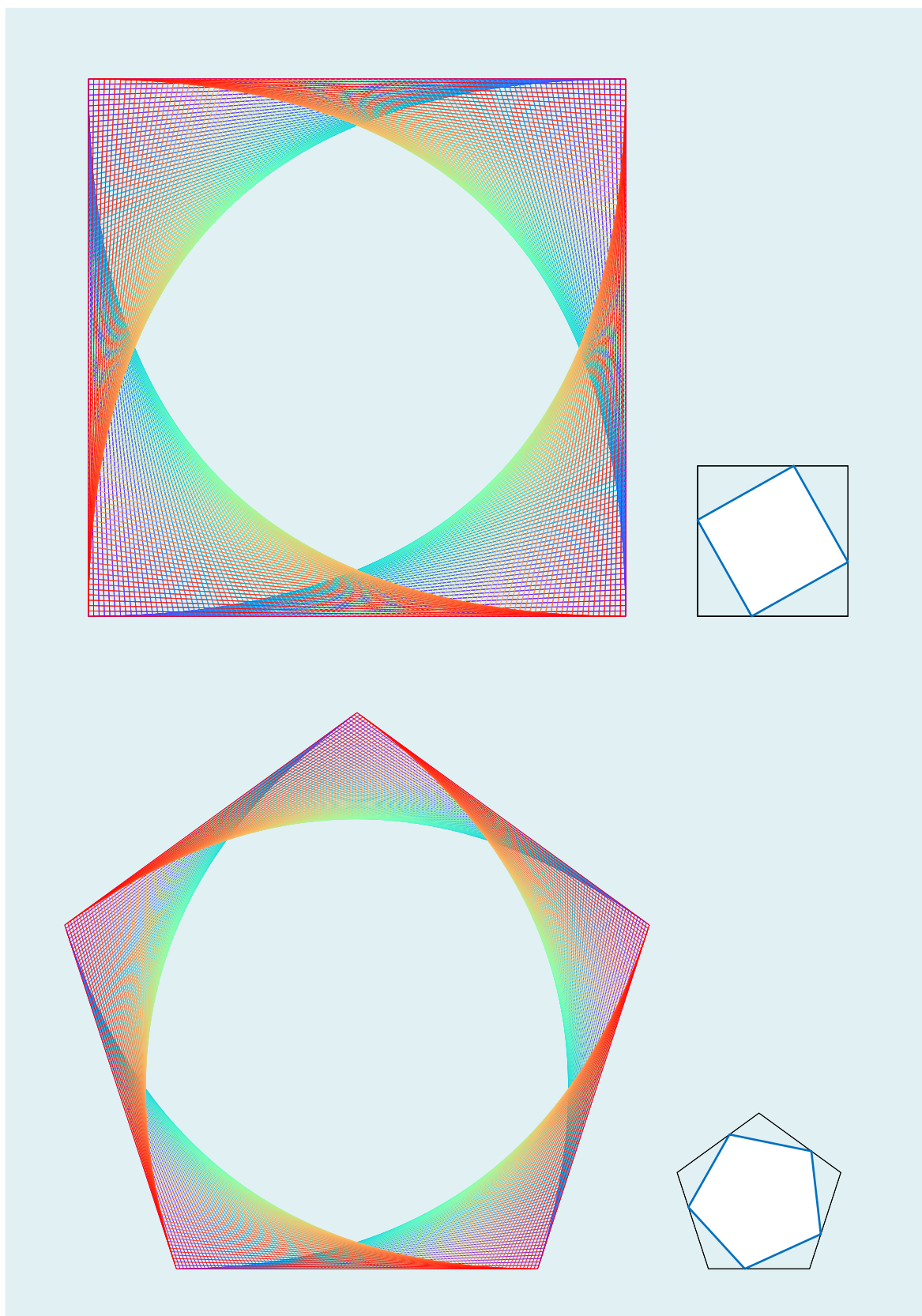


图 10. 线性插值，正方形、正五边形

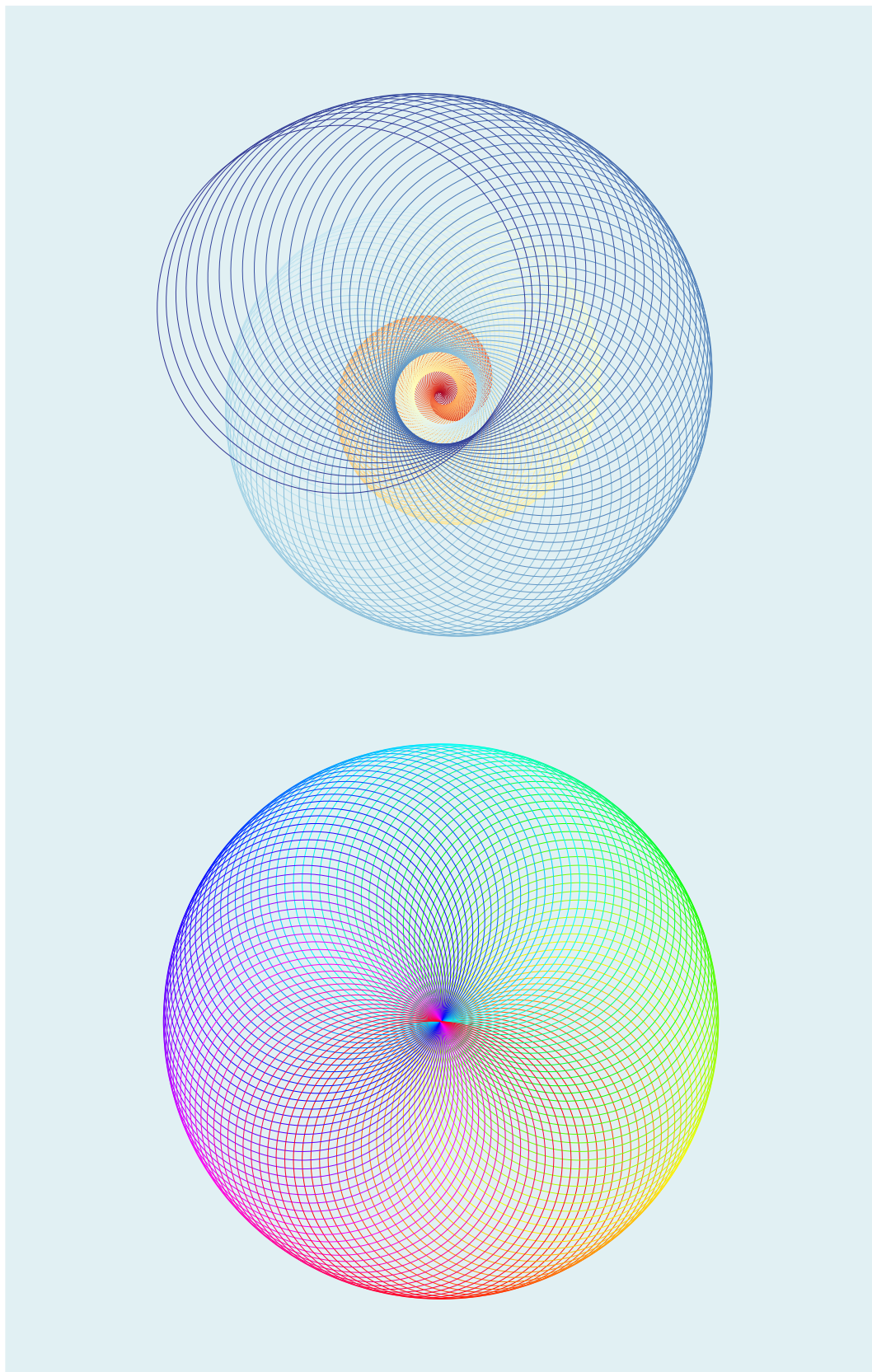


图 11. 两组旋转正圆

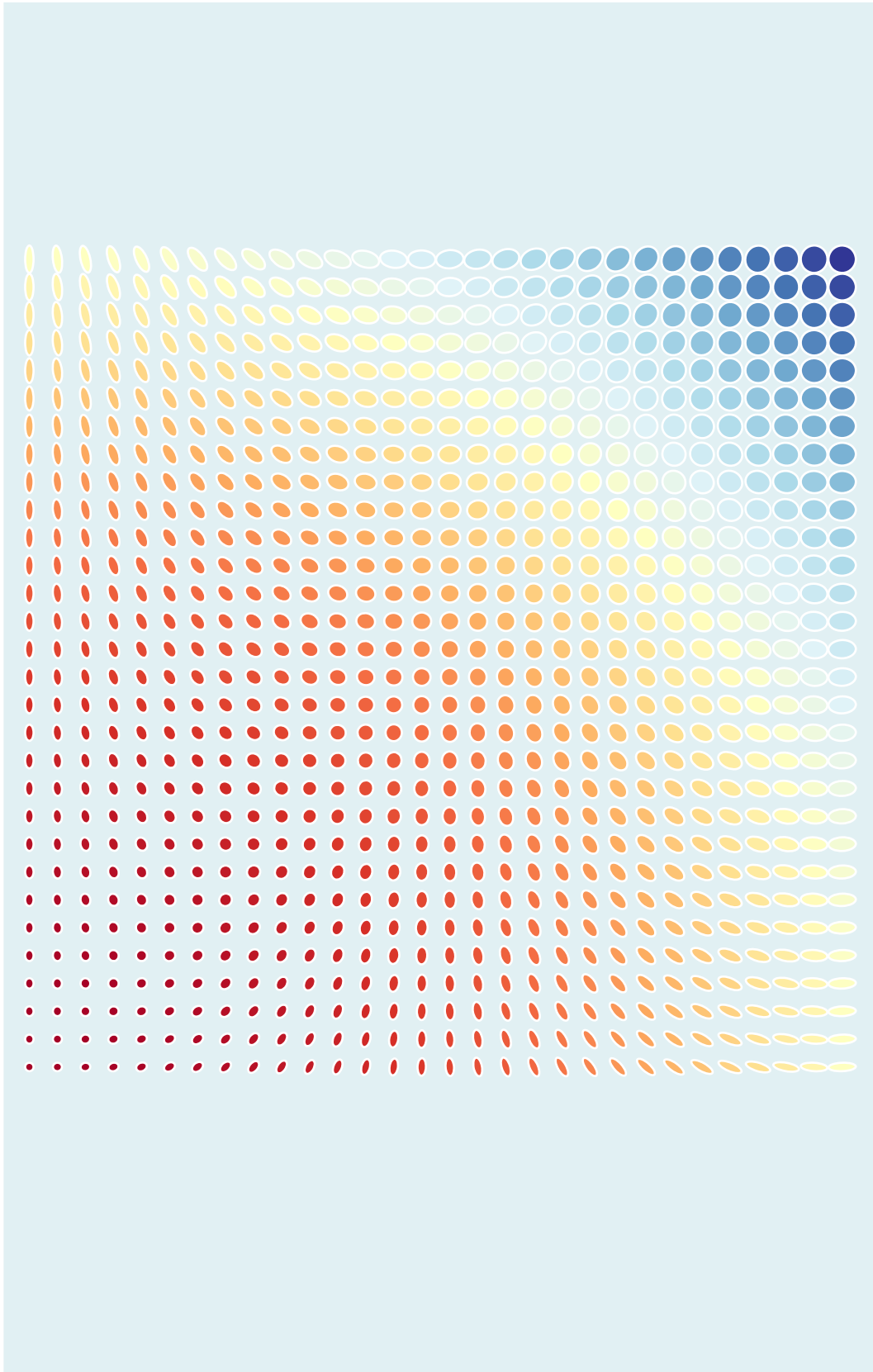


图 12. 一组旋转椭圆

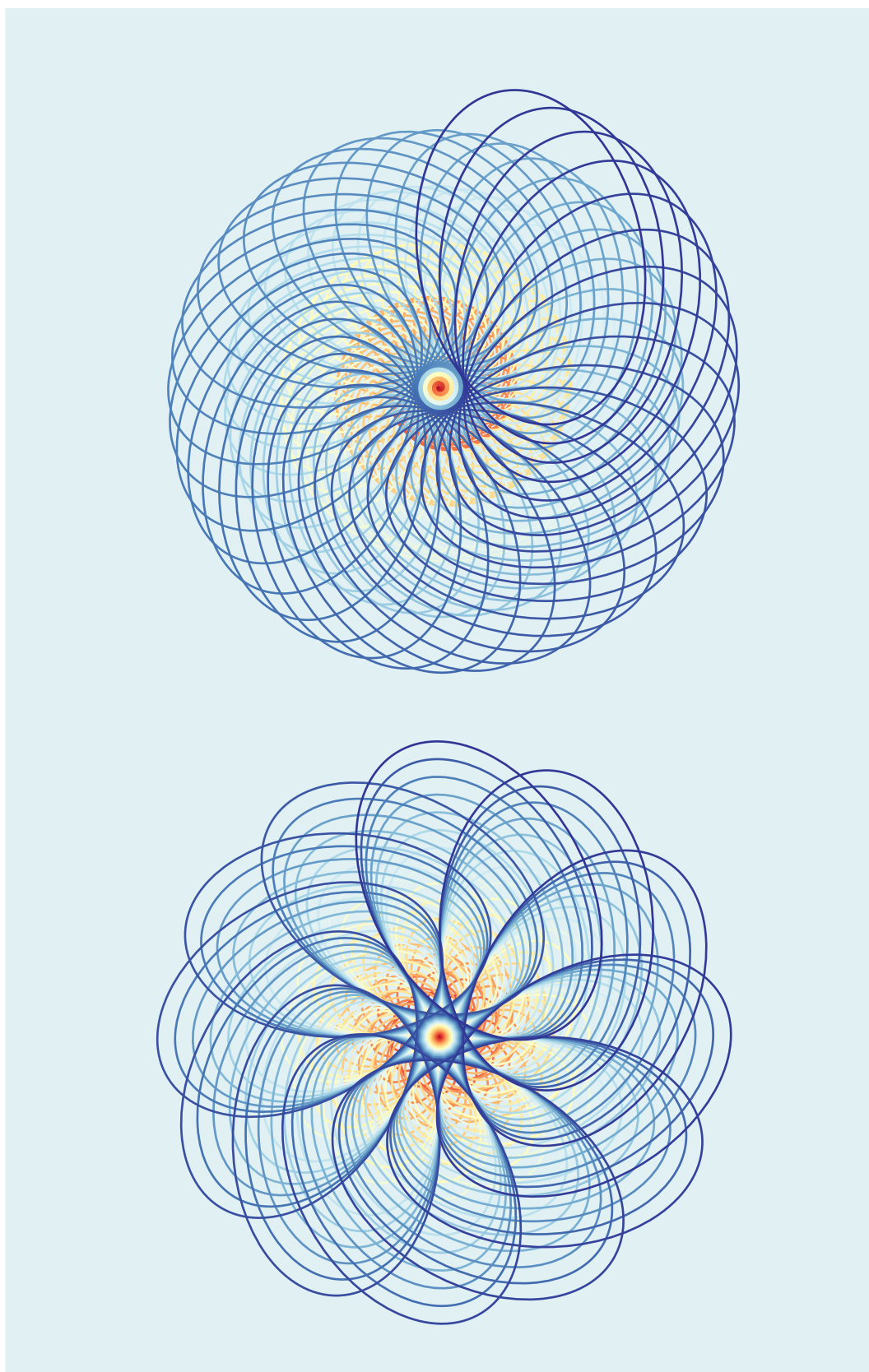


图 13. 两组旋转椭圆

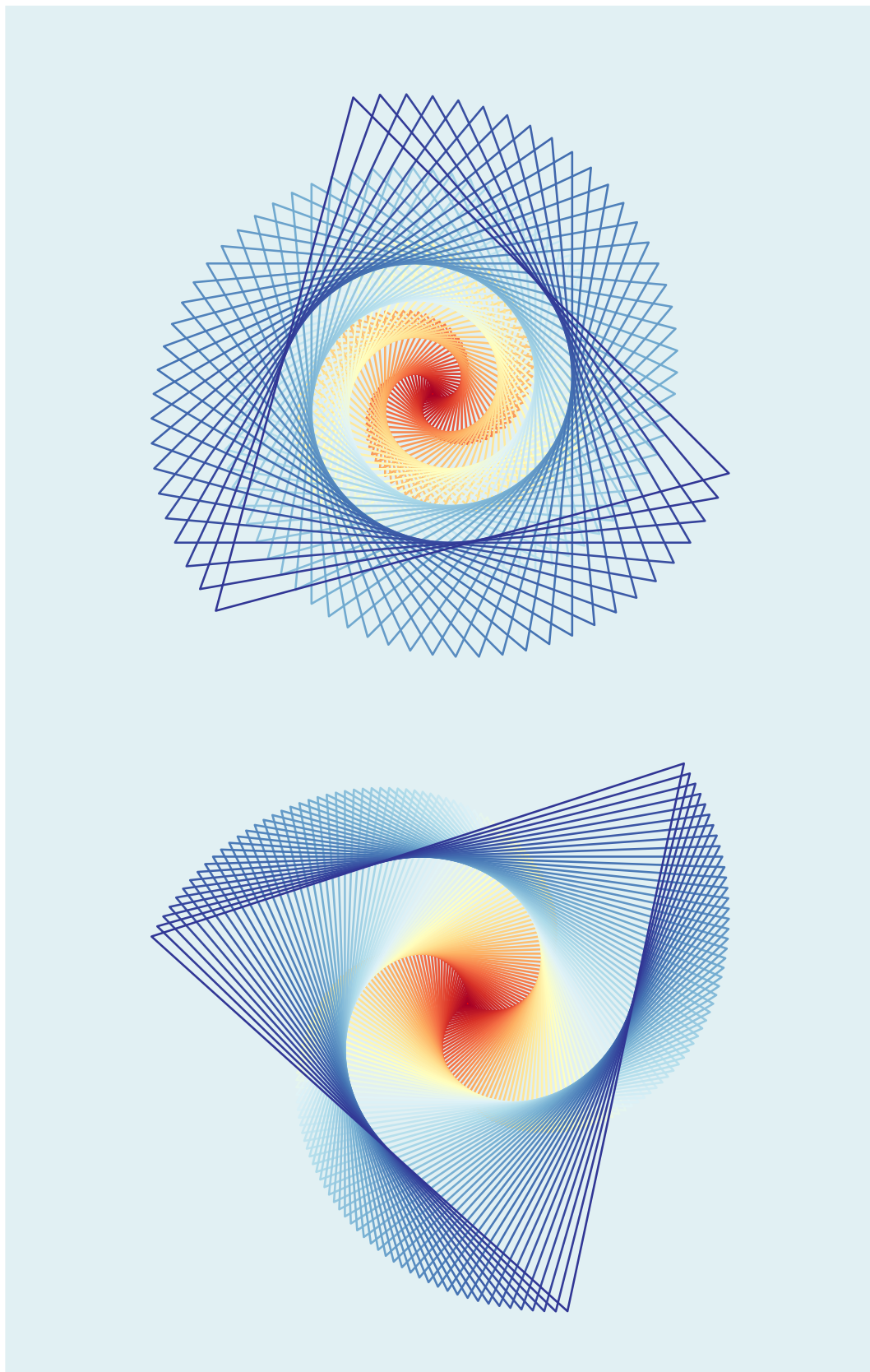


图 14. 两组旋转三角形

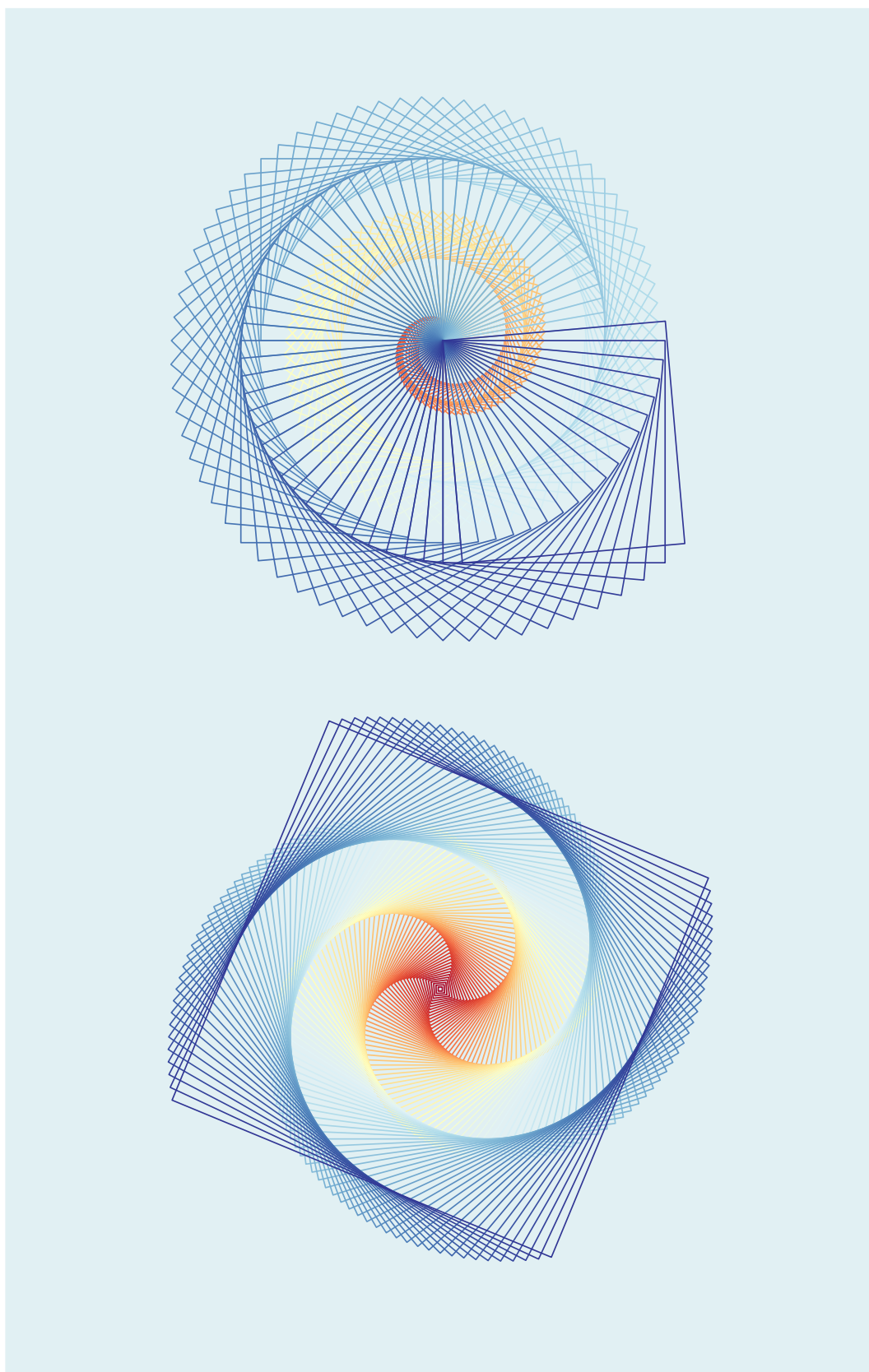


图 15. 两组旋转正方形

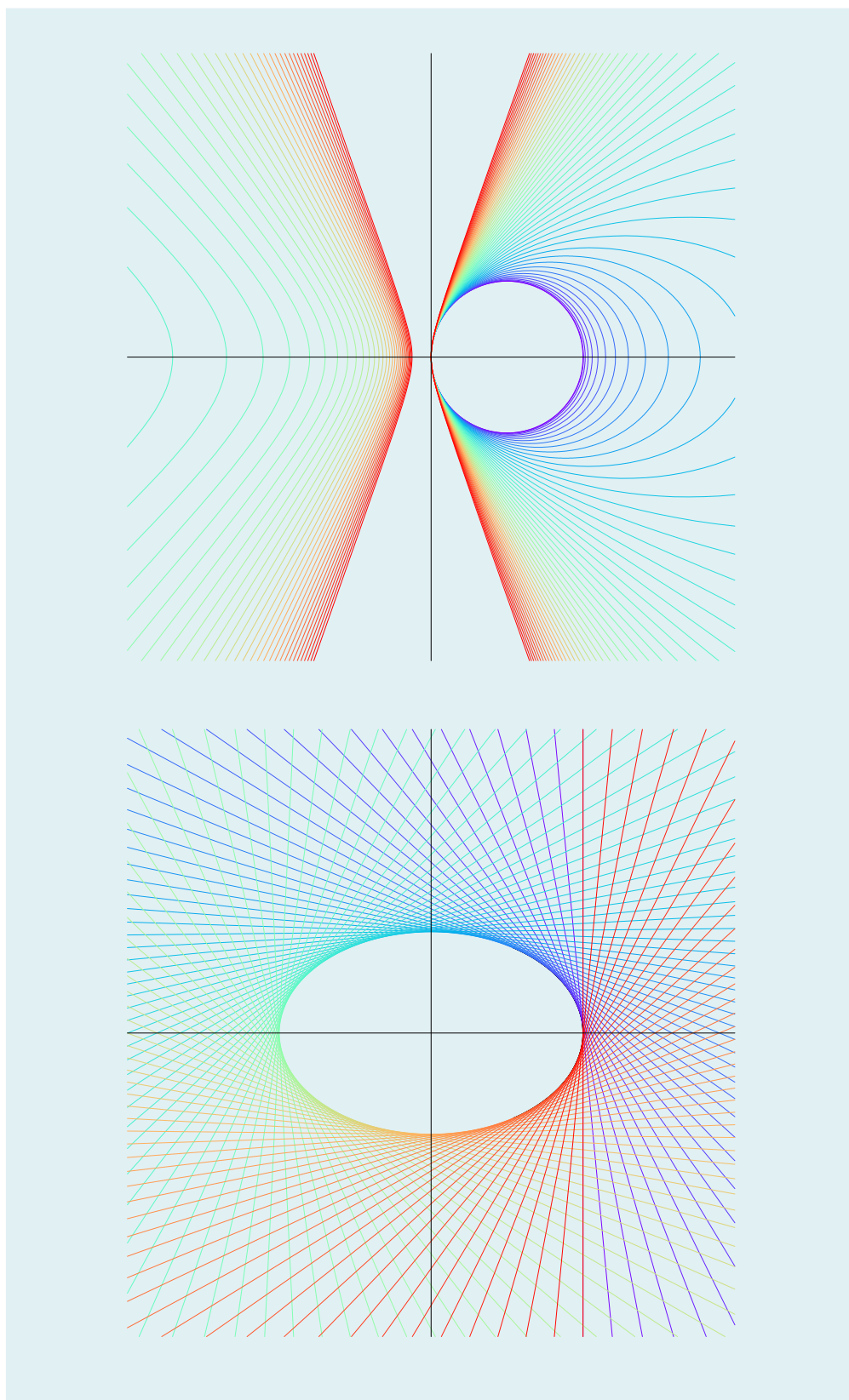


图 16. 利用等高线绘制圆锥曲线、椭圆切线

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

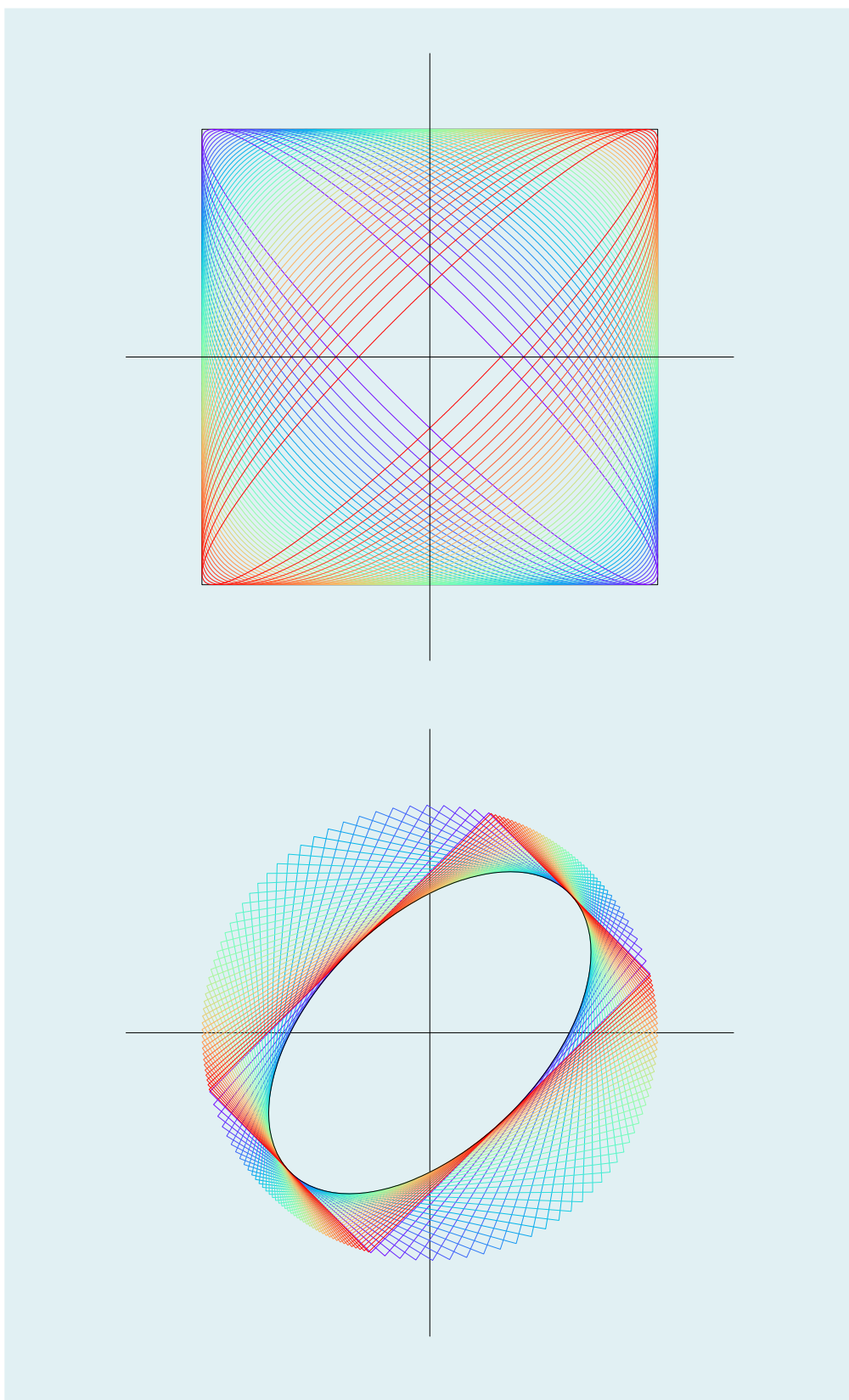


图 17. 给定矩形相切的一组椭圆、给定椭圆相切的一组矩形

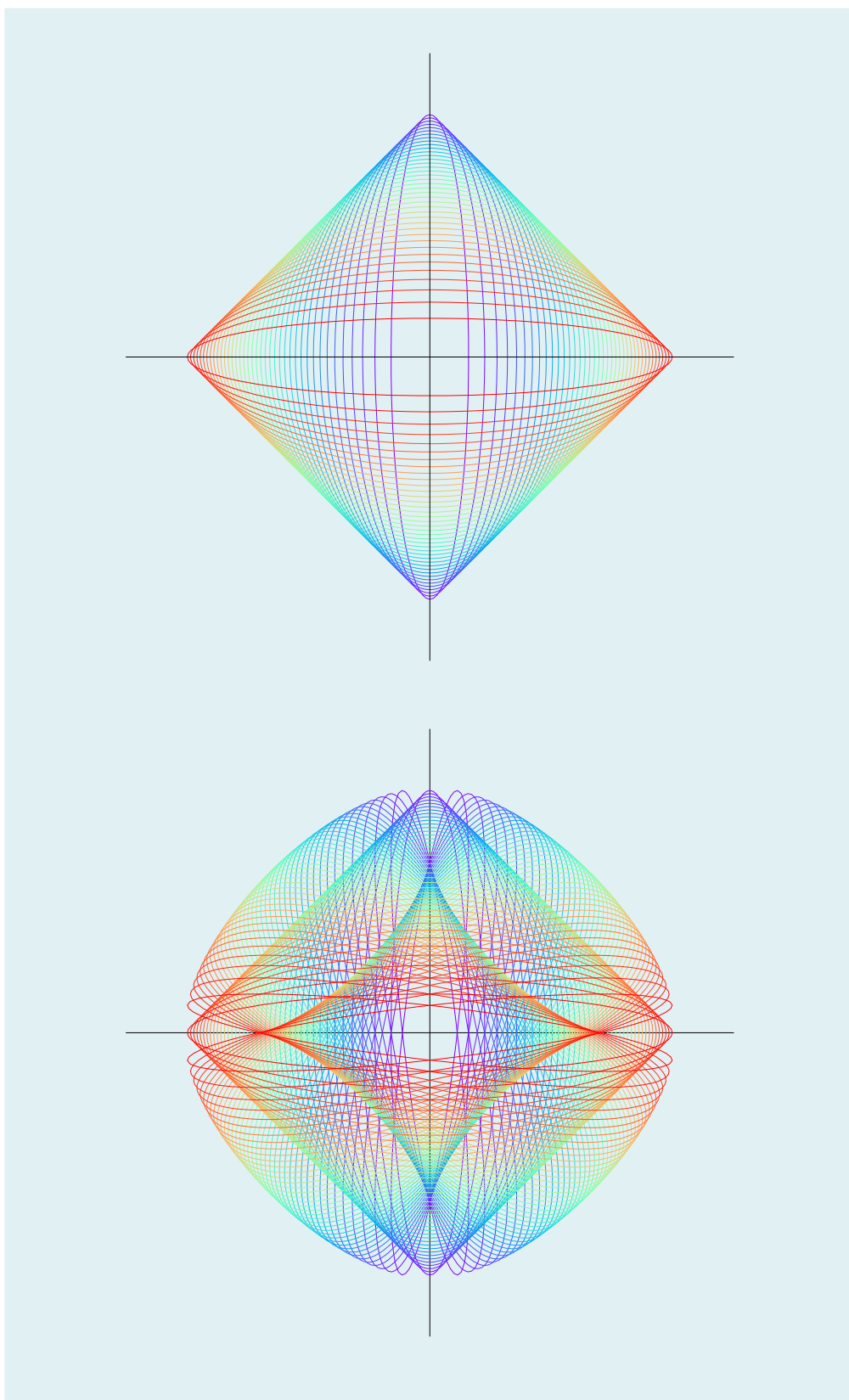


图 18. 一组椭圆，长半轴平方、短半轴平方之和为定值