

## 23

## Triangular Grid

## 三角网格

将给定的几何形状划分为一组不重叠的三角形



天地间唯一的英雄主义——参破尘世真相，依旧热爱生活。

*There is only one heroism in the world: to see the world as it is, and to love it.*

—— 罗曼·罗兰 (Romain Rolland) | 法国作家、诺贝尔文学奖得主 | 1866 ~ 1944



- ▶ `matplotlib.pyplot.plot_trisurf()` 在三角形网格上绘制平滑的三维曲面图
- ▶ `matplotlib.pyplot.tricontourf()` 在三角形网格上绘制填充的等高线图
- ▶ `matplotlib.pyplot.triplot()` 在三角形网格上绘制线条
- ▶ `matplotlib.tri.Triangulation()` 生成三角剖分对象
- ▶ `matplotlib.tri.UniformTriRefiner()` 对三角形网格进行均匀细化，生成更密集的三角形网格，以提高绘制的精细度和准确性
- ▶ `numpy.asarray()` 将输入数据，比如列表、元组等，转换为 NumPy 数组
- ▶ `numpy.clip()` 用于将数组中的元素限制在指定的范围内，将小于最小值的元素设置为最小值，将大于最大值的元素设置为最大值，返回经过剪切后的数组
- ▶ `numpy.column_stack()` 将两个矩阵按列合并
- ▶ `numpy.meshgrid()` 产生网格化数据
- ▶ `scipy.spatial.Delaunay()` 生成一个点集的 Delaunay 三角剖分
- ▶ `scipy.stats.dirichlet.pdf()` 计算 Dirichlet 分布的概率密度函数
- ▶ `sympy.diff()` 求解符号导数和偏导解析式
- ▶ `sympy.exp()` 符号自然指数
- ▶ `sympy.lambdify()` 将符号表达式转化为函数

## 23.1 三角剖分

三角剖分是计算几何学中的一个重要概念，用于将给定的几何形状划分为一组不重叠的三角形。详细来说，三角剖分的目标是将一个多边形或多边形的集合分解成一组互不相交的三角形，使得这些三角形的顶点恰好是原始几何形状的顶点，并且任意两个三角形之间的交集只能是共享一个边或顶点。

`matplotlib.tri` 是 Matplotlib 中的一个模块，提供了三角剖分的绘图功能。`scipy.spatial` 中的 `Delaunay` 类可以帮助我们生成一个点集的 Delaunay 三角剖分，它可以用于构建三角形网格、寻找最近邻等等。

图 1 (a) 所示的网格可以手动设定，也可以自动生成。自动生成的三角网格采用 Delaunay 三角剖分。三角网格可以帮助我们绘制各种类型的三角形网格，例如等高线图、三角形色块图和三角形曲面图等。图 1 (b) 所示为三角网格等高线图。

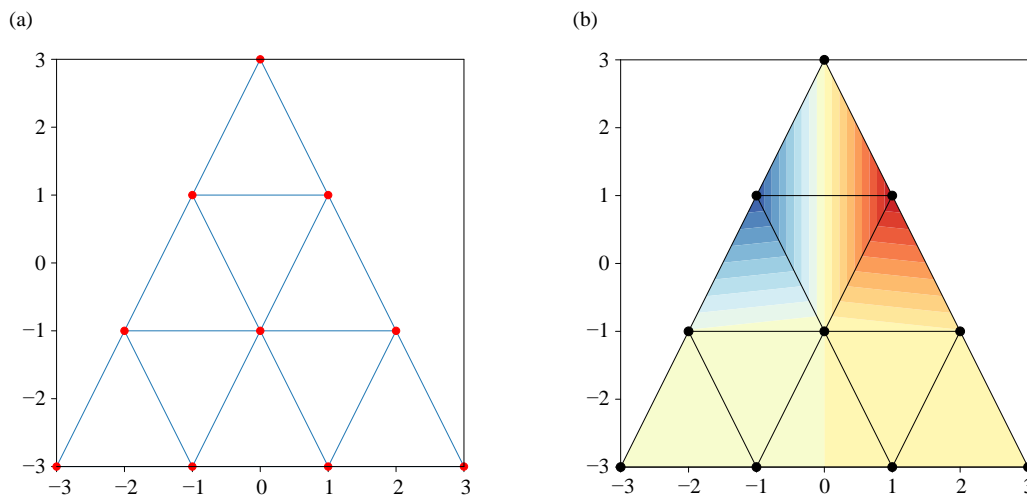


图 1. 三角网格和等高线



Bk\_2\_Ch23\_1.ipynb 笔记中给出更多三角剖分的范例，请大家自行学习。

### Delaunay 三角剖分

Delaunay 三角剖分是一个用于将点集分割为三角形的算法，其中任何三角形的外接圆不包含其他任何点。它的名字来源于它的发明者 Boris Delaunay。

Delaunay 三角剖分是计算机图形学、计算几何和计算机视觉中常用的技术之一，它在三维重建、图像处理、自然语言处理、机器学习等领域都有广泛的应用。

### 颗粒度

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

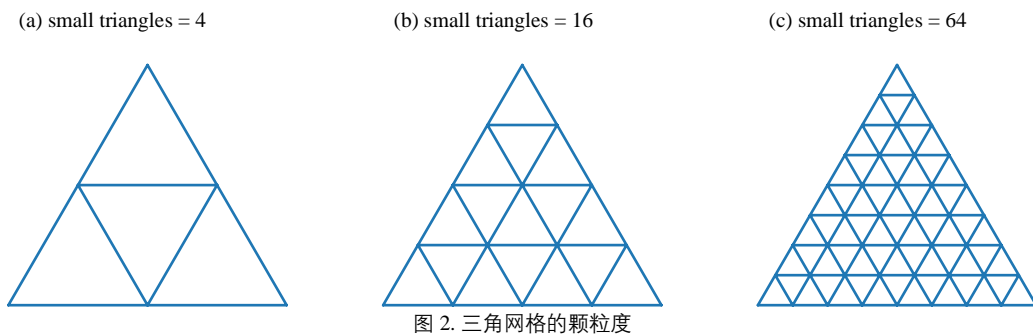
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

三角网格也存在颗粒度的问题。图 2 所示为给定等边三角形不同的颗粒度的三角网格剖分。颗粒度越高，三角网格越细腻，但是计算量也急剧增大。



Bk\_2\_Ch23\_2.ipynb 绘制图 2。

## 23.2 重心坐标系

“鸢尾花书”中三维网格常常用来可视化重心坐标系。从物理角度来看，重心坐标系 (barycentric coordinate system) 是一种描述一个几何形状内部任意点位置的方法。它是以该形状的重心作为原点建立的坐标系。

在平面上的一个三角形中，任何一点都可以表示为三个定点的加权平均值，其中每个定点的权重由它到该点的距离与该三角形的周长之比确定。这些权重称为该点在三角形的重心坐标。

实际上，用三维直角坐标系解释重心坐标系更方便。图 3 左图所示为三维直角坐标系，为了区分坐标系的横轴、纵轴、竖轴分别记做  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 。这个三维直角坐标系中坐标可以记做  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 。

图 3 左图浅蓝色平面上的每个坐标  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  都满足  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ 。 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$  这个限制条件，让原本三维的空间降维成二维。即便如此，如图 3 右图所示，三角网格的每一点仍旧对应  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 。

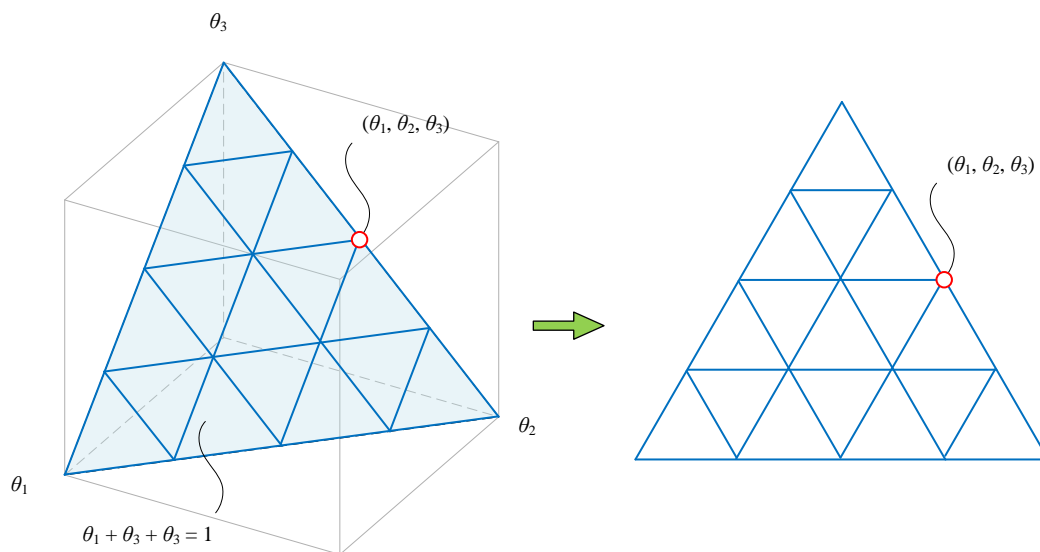
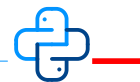


图 3. 从三维直角坐标系到重心坐标系

图 4 从三个不同的视角分别看  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 。图 5 上下两幅子图比较两个坐标系。上图给出的是利用三角网格表达平面直角坐标系。下图则是利用相同网格表达重心坐标系坐标。请大家注意区分。



Bk\_2\_Ch23\_3.ipynb 绘制图 5。

## 23.3 Dirichlet 分布

“鸢尾花书”中，重心坐标系常用来可视化 Dirichlet 分布概率密度函数。

《统计至简》一册将专门讲解 Dirichlet 分布及其在贝叶斯推断的应用。

Dirichlet 分布是一种连续的概率分布，通常用于描述一个多元随机变量的概率分布。它是以德国数学家 Peter Gustav Lejeune Dirichlet 的名字命名的。

Dirichlet 分布是一种在开区间  $(0,1)$  上的多维概率分布，参数是一个向量  $\alpha$ 。

本书前文利用其它可视化方案展示过 Dirichlet 分布。图 6、图 7 向大家展示如何利用重心坐标系可视化三元 Dirichlet 分布随参数  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  变化。



Bk\_2\_Ch23\_4.ipynb 绘制图 6、图 7。

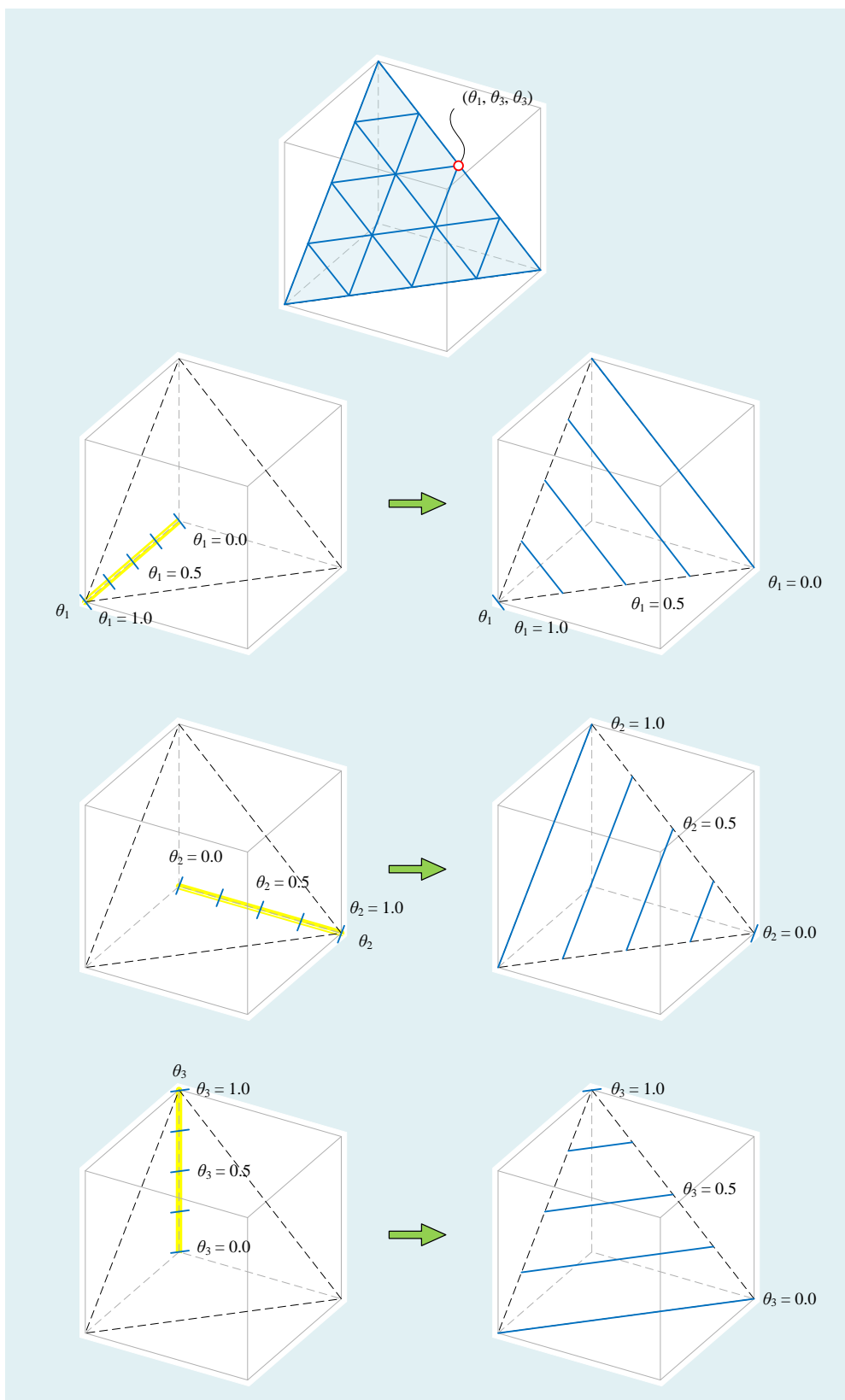


图 4. 三维直角坐标系角度看重心坐标系

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

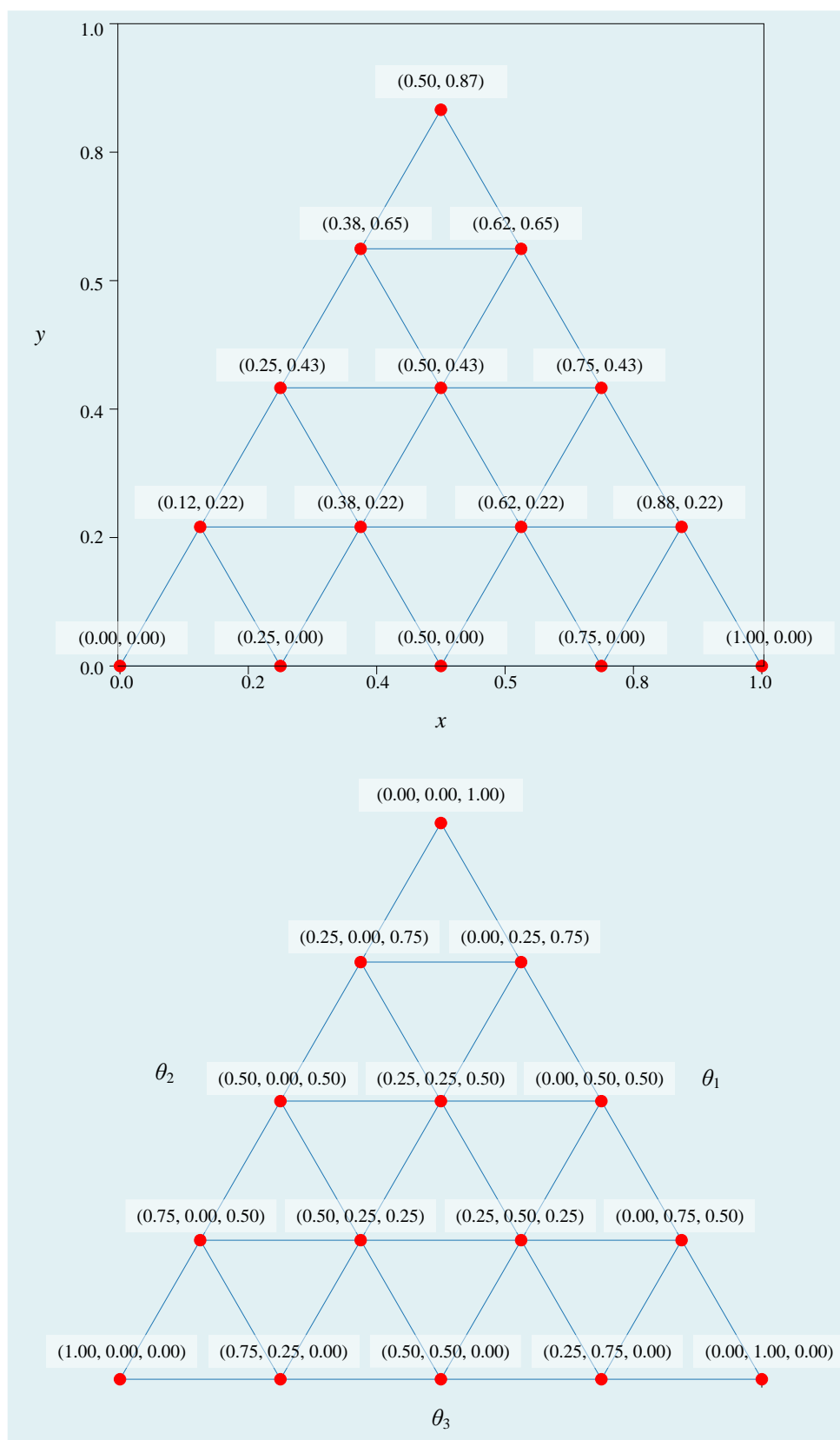


图 5. 比较平面直角坐标系坐标、重心坐标系坐标

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

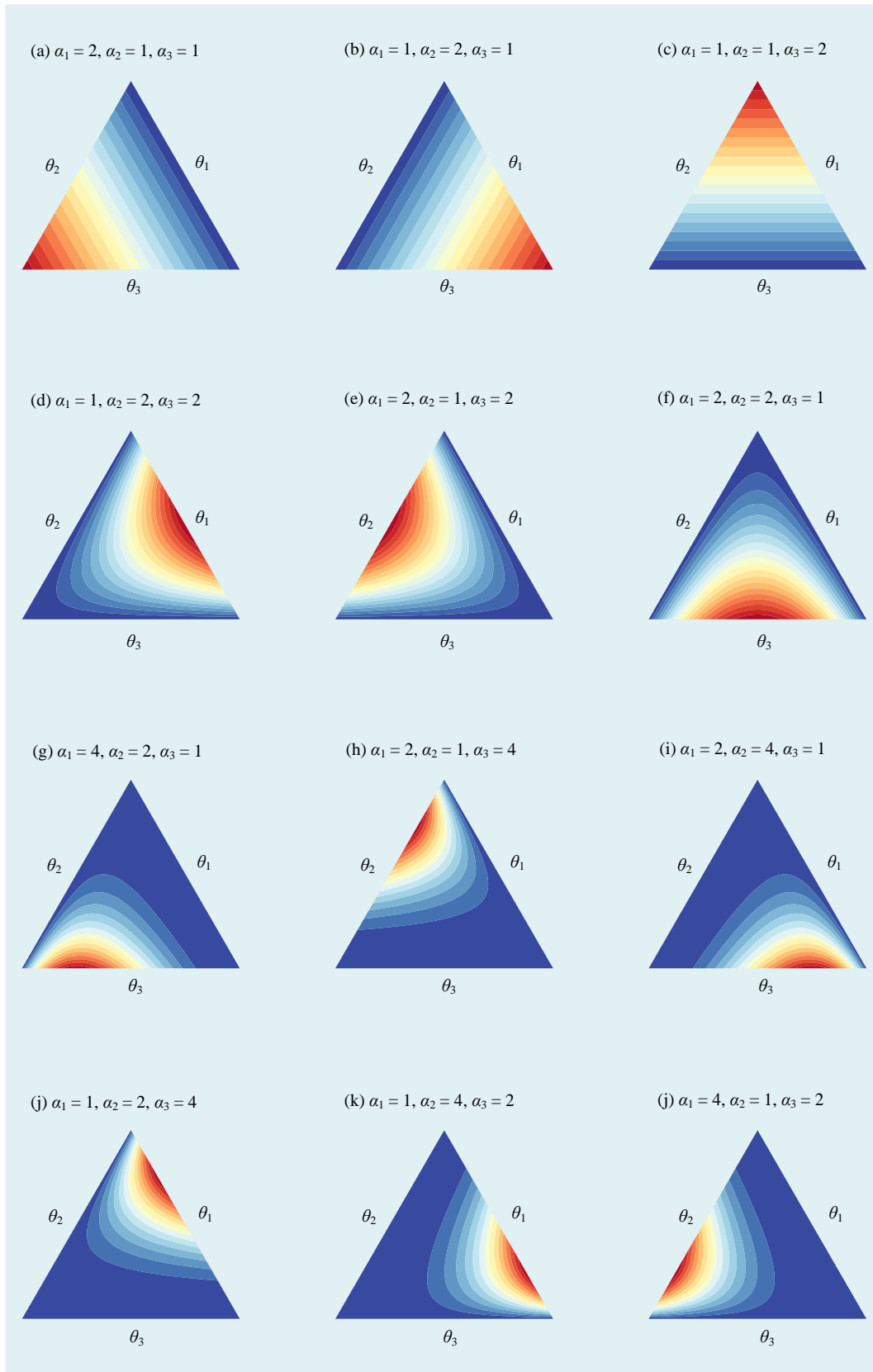


图 6. Dirichlet 分布，第 1 组

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

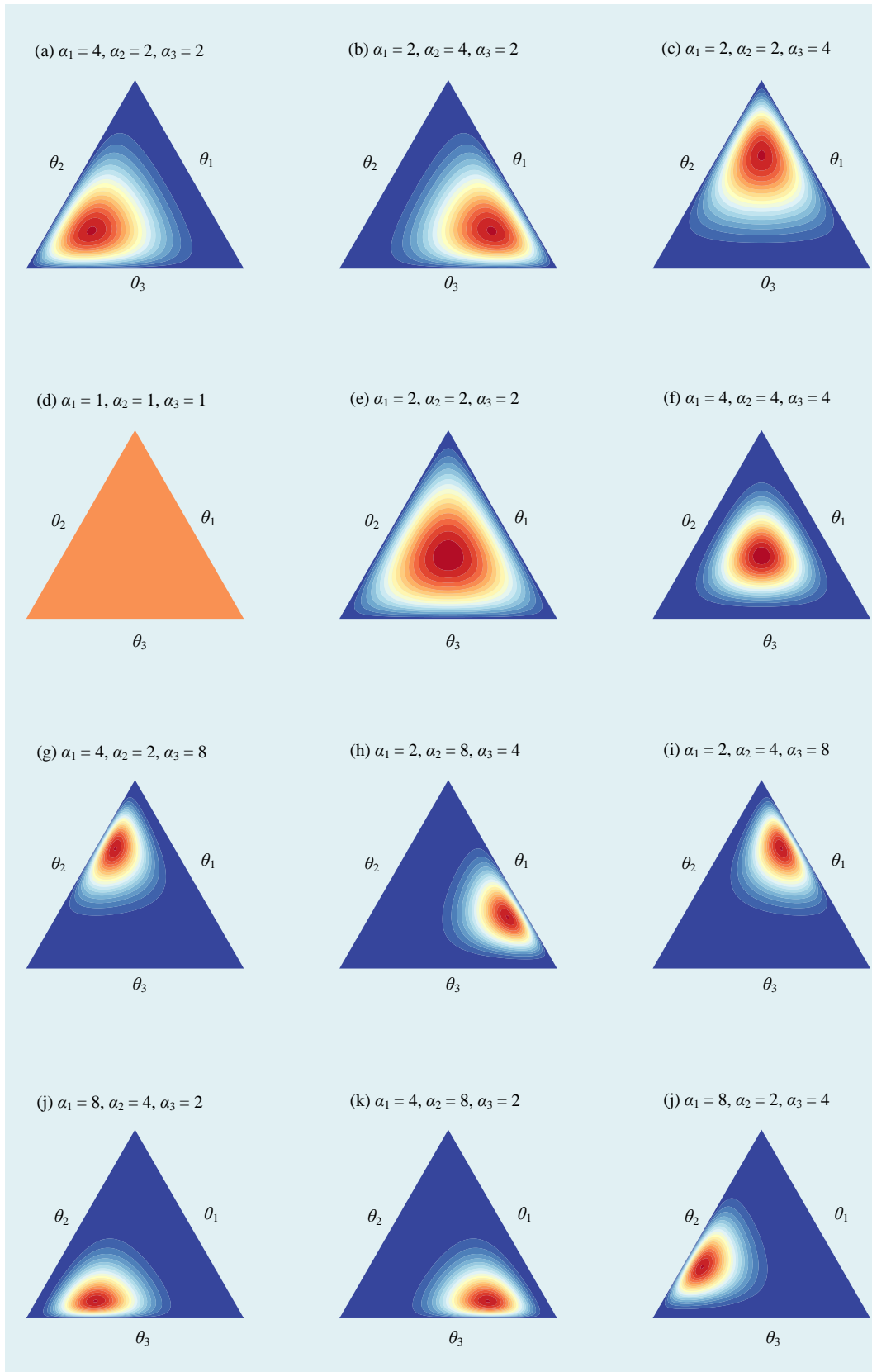


图 7. Dirichlet 分布，第 2 组

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)