

21

3D Contours

三维等高线

可视化应用极为灵活



真正的艺术家不是被启发，而是启发别人。

A true artist is not one who is inspired, but one who inspires others.

—— 萨尔瓦多·达利 (Salvador Dali) | 西班牙超现实主义画家 | 1904 ~ 1989



- ▶ `matplotlib.pyplot.contour()` 绘制等高线图
- ▶ `matplotlib.pyplot.contourf()` 绘制平面填充等高线
- ▶ `matplotlib.pyplot.plot_wireframe()` 绘制线框图
- ▶ `numpy.dot()` 计算向量标量积。值得注意的是，如果输入为一维数组，`numpy.dot()` 输出结果为标量积；如果输入为矩阵，`numpy.dot()` 输出结果为矩阵乘积，相当于矩阵运算符@
- ▶ `numpy.linalg.det()` 计算行列式值
- ▶ `numpy.linalg.inv()` 矩阵求逆
- ▶ `numpy.meshgrid()` 创建网格化数据
- ▶ `numpy.sqrt()` 计算平方根
- ▶ `numpy.vstack()` 返回竖直堆叠后的数组
- ▶ `sympy.diff()` 求解符号导数和偏导解析式
- ▶ `sympy.exp()` 符号自然指数
- ▶ `sympy.lambdify()` 将符号表达式转化为函数

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

21.1 沿三个方向获取等高线

如图 1 所示，Matplotlib 中三维空间等高线和填充等高线实际上可以指定三个不同方向。下面，我们分别介绍这三种不同获取等高线的方向。

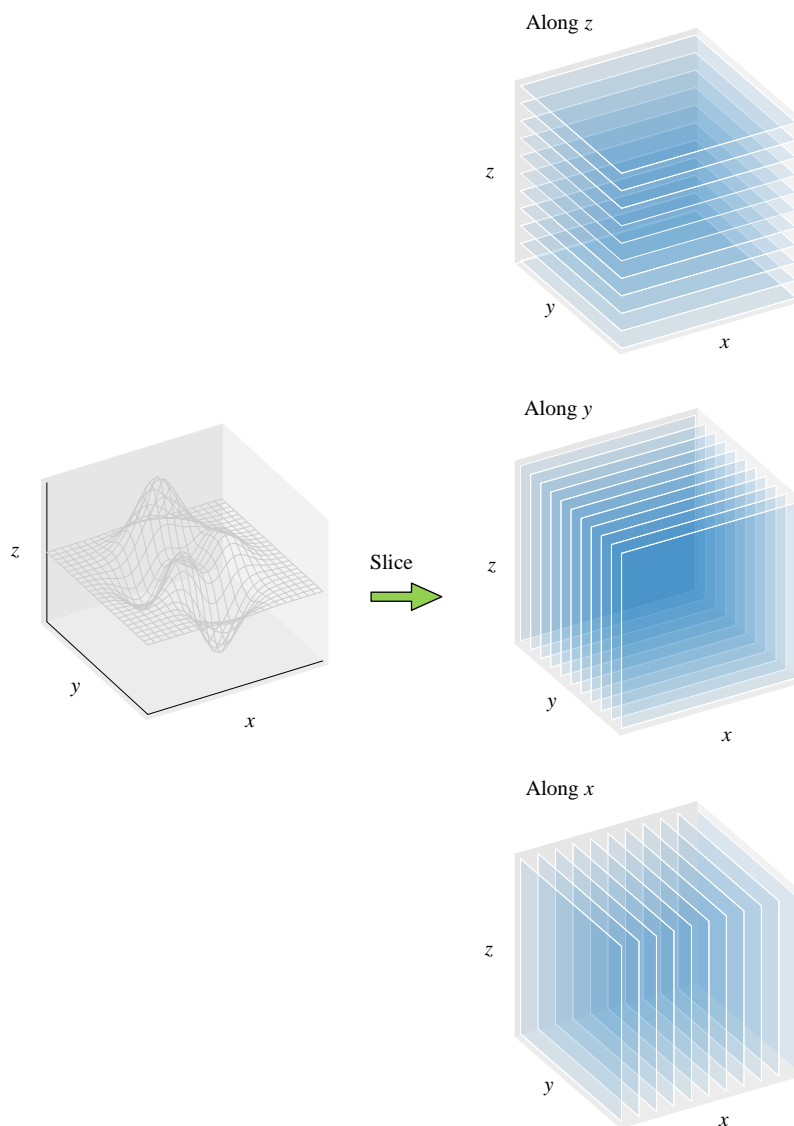
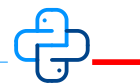


图 1. 三种不同切取等高线的方式

沿 z 方向

大家已经非常熟悉的是其默认竖直方向，即 z 方向，具体如图 6 (a)、(b) 所示。

此外，`matplotlib.pyplot.contour()` 和 `matplotlib.pyplot.contourf()` 还可以通过设置 `offset` 指定绘制所有等高线的具体高度。图 6 剩下几幅子图绘制等高线高度不同。



Jupyter 笔记 BK_2_Topic_5.06_1.ipynb 绘制图 6 所有子图。

沿 x 方向

设置 `zdir='x'`，我们可以绘制沿 x 轴方向的等高线，如图 7 (a) 所示。注意，只有在 3D 轴的条件下，这个设置才会生效。同时设定 `offset`，我们可以在不同位置绘制这些等高线，如图 7 (c)、(e)、(g) 所示。

沿 y 方向

类似地，设置 `zdir='y'` 和不同 `offset` 值，我们可以绘制沿 y 轴方向的等高线，如图 7 (b)、(d)、(f)、(h) 所示。通过调整视角我们还可以绘制如图 2 所示平面等高线。



Jupyter 笔记 BK_2_Topic_5.06_2.ipynb 绘制图 7 所有子图。

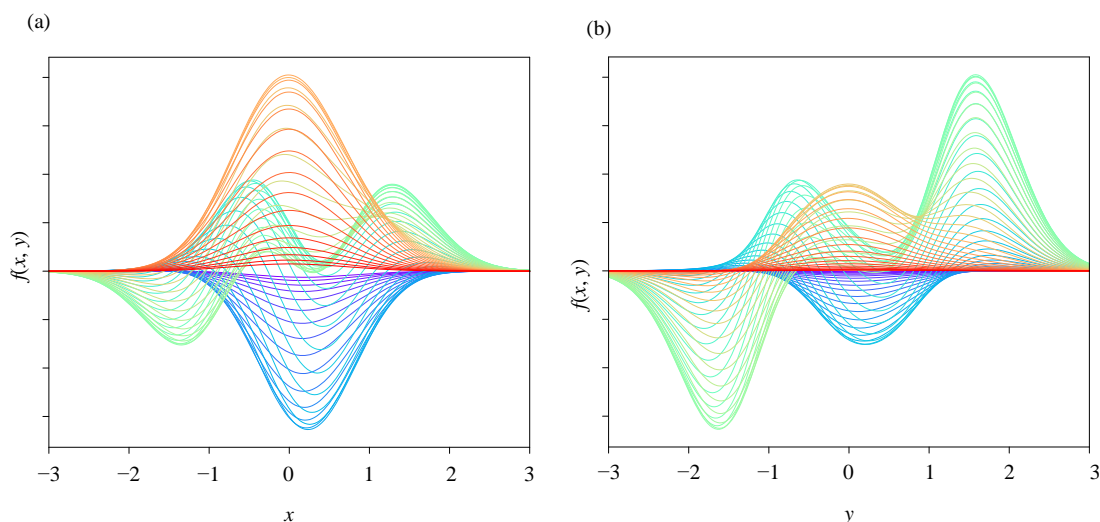


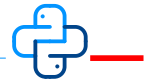
图 2. 通过改变视角绘制两组平面等高线

21.2 特定等高线

将满足单位圆 ($x_1^2 + x_2^2 = 1$) 的坐标映射到不同二次曲面，我们可以得到如图 8、图 9 所示的几个子图。

对于单位圆，我们可以用极坐标系很容易获得满足条件的一系列坐标 (x_1, x_2) 。然后再用三维线图绘制 $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ 。

图 8、图 9 这几幅图和正定性、瑞利商有关。《矩阵力量》一册将介绍这两个概念。



Jupyter 笔记 BK_2_Topic_5.07_1.ipynb 绘制图 8、图 9 所有子图。

提取特定等高线数值

下面，我们了解一种相对更为方便的可视化方案。如图 3 所示，我们可以先绘制 $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ 。

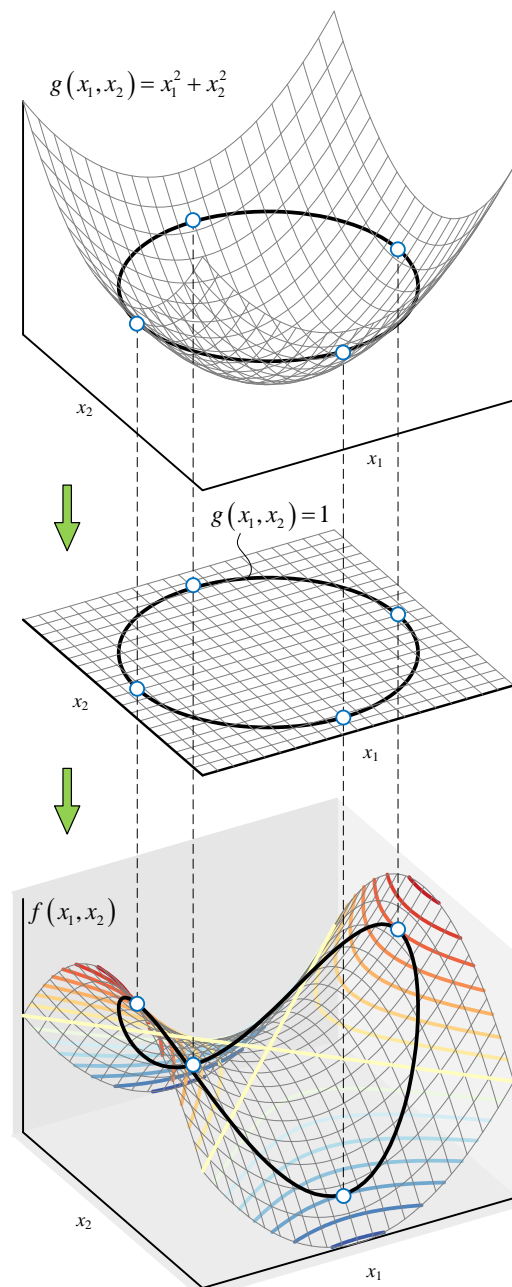


图 3. 提取特定等高线坐标点

然后找到满足 $g(x_1, x_2) = 1$ 的等高线坐标，再将它们映射到 $f(x_1, x_2)$ 曲面上。

提取特定等高线数值的方法很适合处理较为复杂的等式。如图 10 所示，利用提取等高线数值的方法，我们可以很容易获得满足 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ 的坐标点。然后，再将其映射到特定曲面。



Jupyter 笔记 BK_2_Topic_5.07_2.ipynb 绘制图 10 所有子图。

绘制交线

类似地，我们可以用提取等高线的方法绘制如图 11 所示曲面和平面的交线。



Jupyter 笔记 BK_2_Topic_5.07_3.ipynb 绘制图 11 所有子图。

21.3 可视化四维数据

等高线还可以完成很多有趣的可视化方案，这个话题介绍如何用分层等高线可视化四维数据。这个四维数据是三元高斯分布， $f_{X1,X2,X3}(x_1, x_2, x_3)$ 。

《统计至简》第 10 章将介绍二元高斯分布，第 11 章介绍多元高斯分布。

x_1, x_2, x_3 的取值范围都是 $(-\infty, +\infty)$ 。为了方便可视化，我们给 x_1, x_2, x_3 设定的取值范围是 $[-2, 2]$ 。

这样，我们便得到如图 4 左图所示的“豆腐块”。豆腐块表面的“纹理”就是概率密度 $f_{X1,X2,X3}(x_1, x_2, x_3)$ ，第四维数据。

显然，这块豆腐内部每一点都对应一个概率密度。为了可视化这些概率密度值，我们采用“切豆腐”的方法来观察剖面上的概率密度等高线。大家对这种方法应该不陌生，我们在本书前文已经看到好几次。

图 4 右侧三幅子图展示的是三种切豆腐的“手法”。举个例子，如图 5 所以，垂直 x_3 轴切豆腐，意味着绘制等高线时， x_3 固定在某个特定值 c ， $x_3 = c$ 。我们这次用等高线可视化 $f_{X1,X2,X3}(x_1, x_2, x_3 = c)$ 。

为了看到等高线的全貌，我们采用单独子图的可视化方案。图 12 所示为沿着三个不同方向切豆腐的结果。



Jupyter 笔记 BK_2_Topic_5.08_1.ipynb 绘制图 12 所有子图。

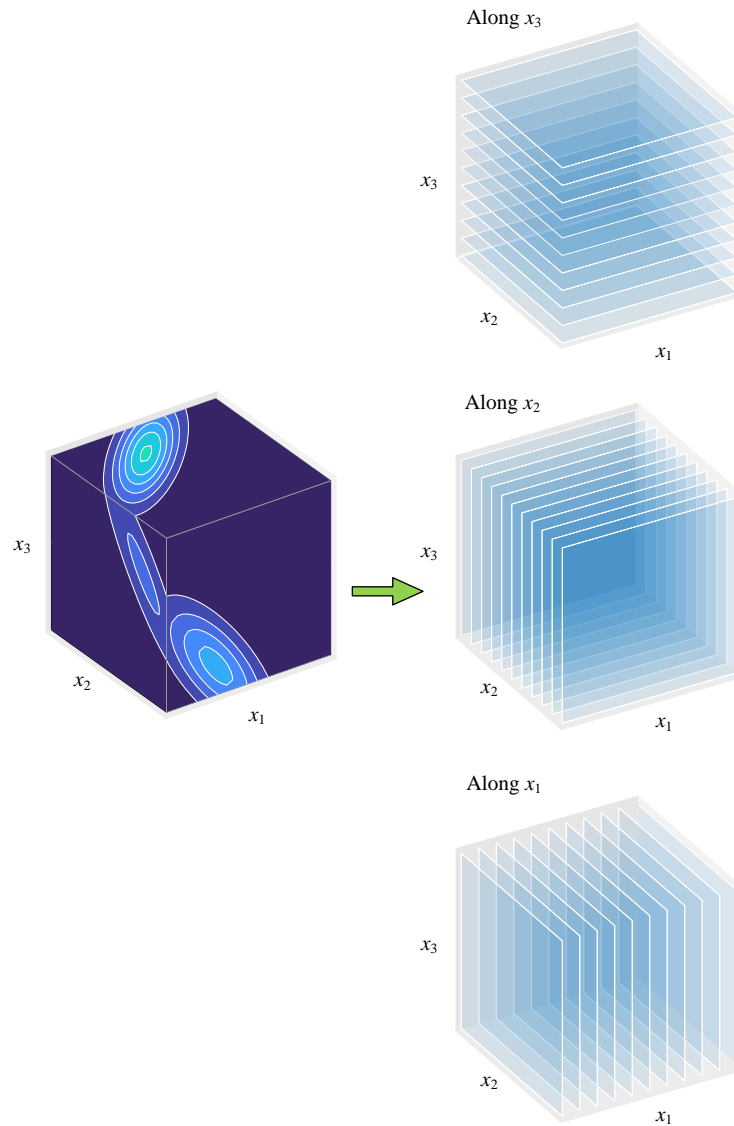


图 4. 三种不同切“豆腐”

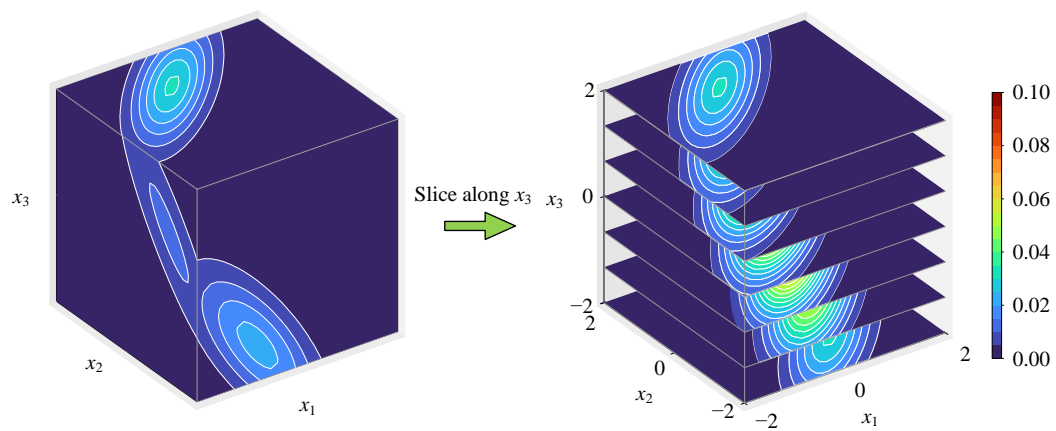
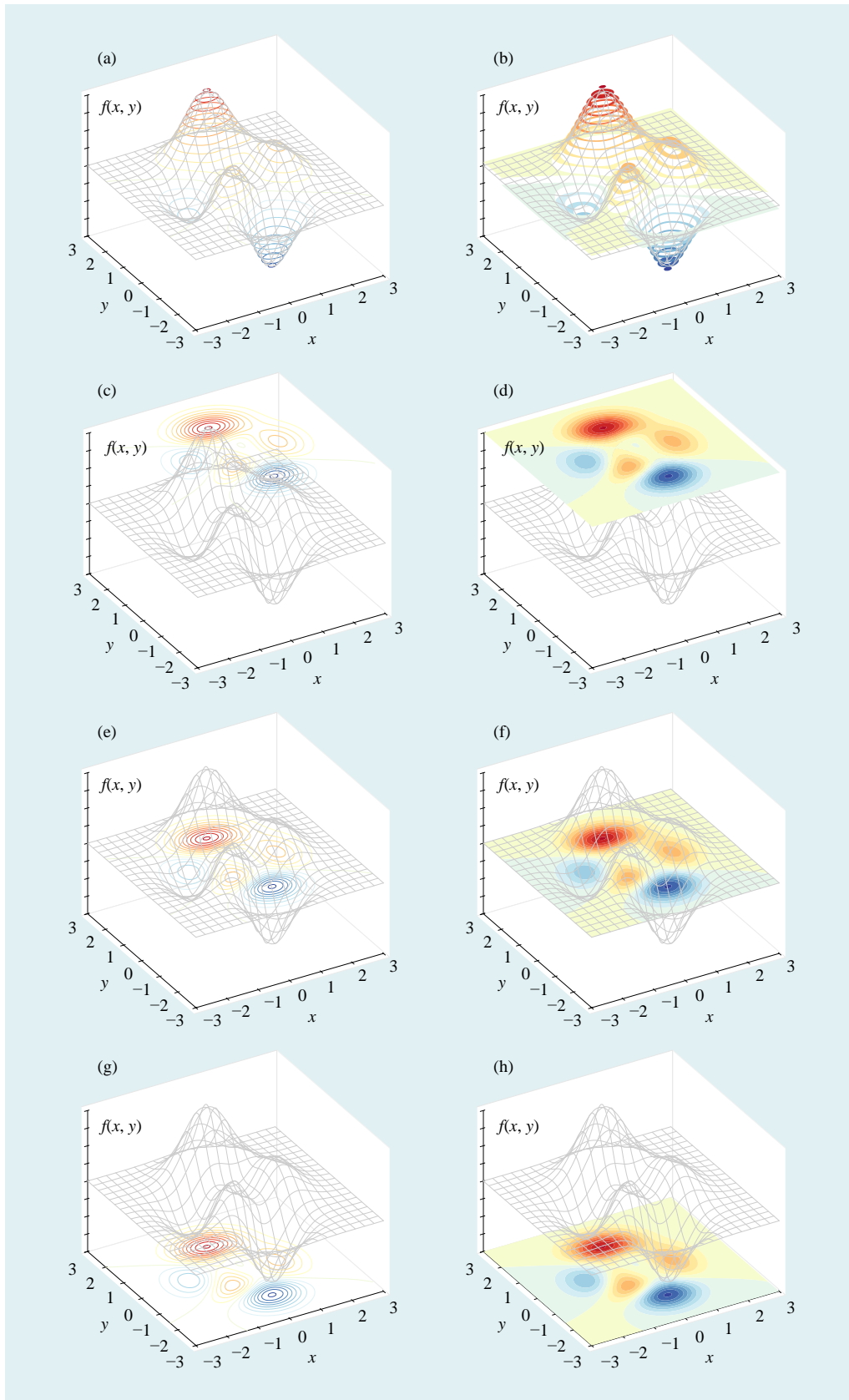


图 5. 垂直 x_3 切豆腐

图 6. 沿 z 方向获取等高线

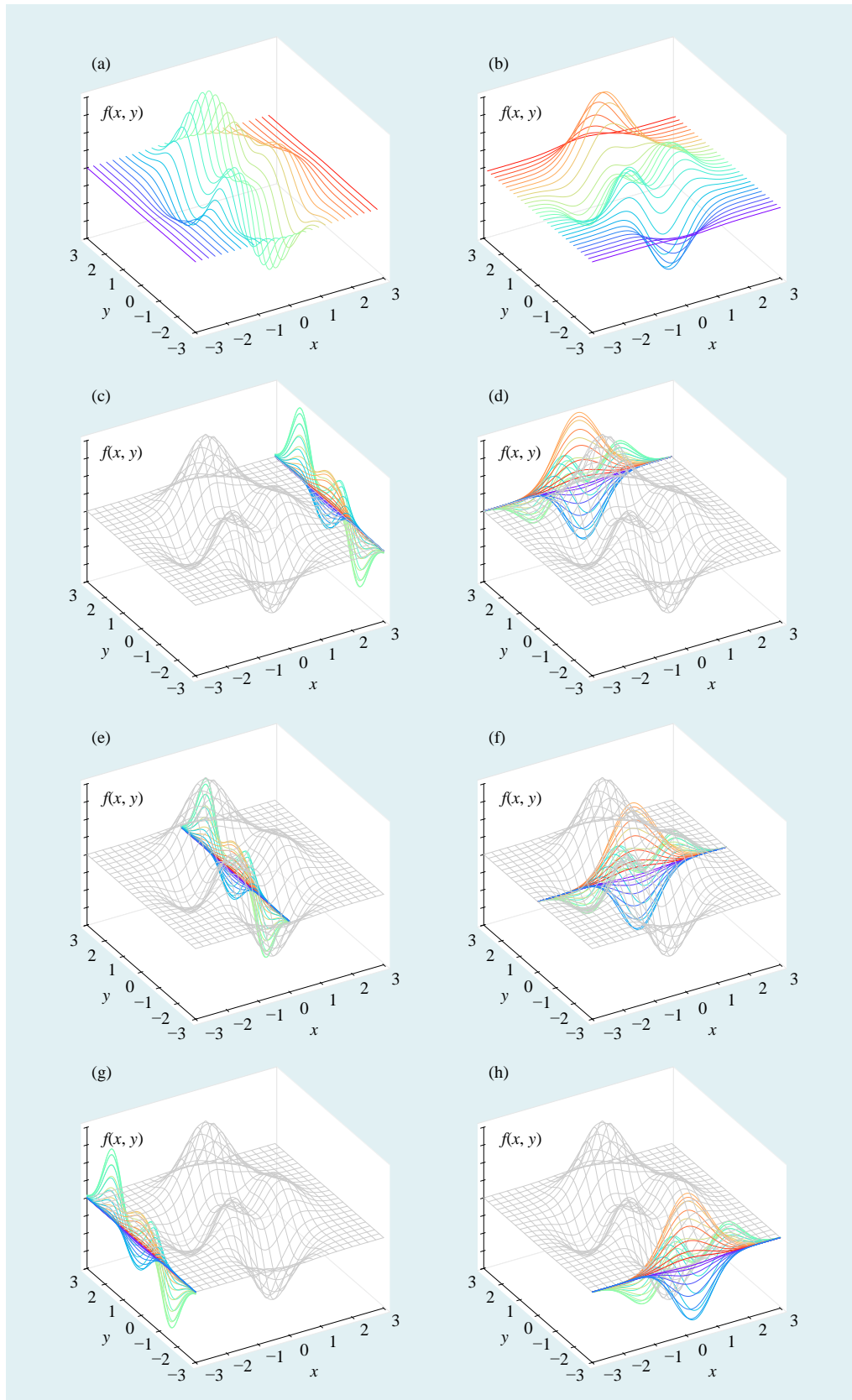
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

图 7. 沿 x 、 y 方向获取等高线

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

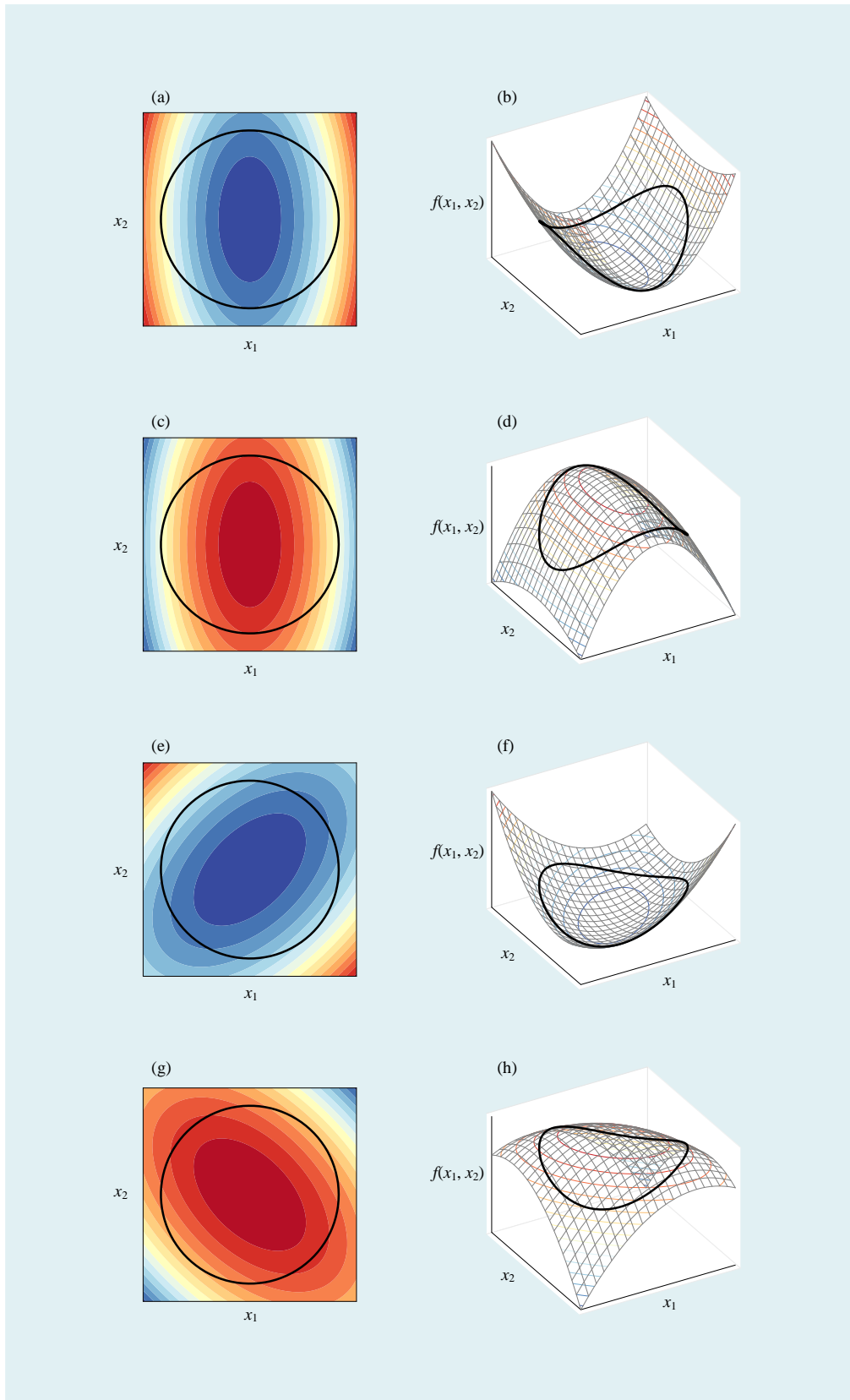


图 8. 将单位圆对应坐标映射到特定曲面，前四个例子

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

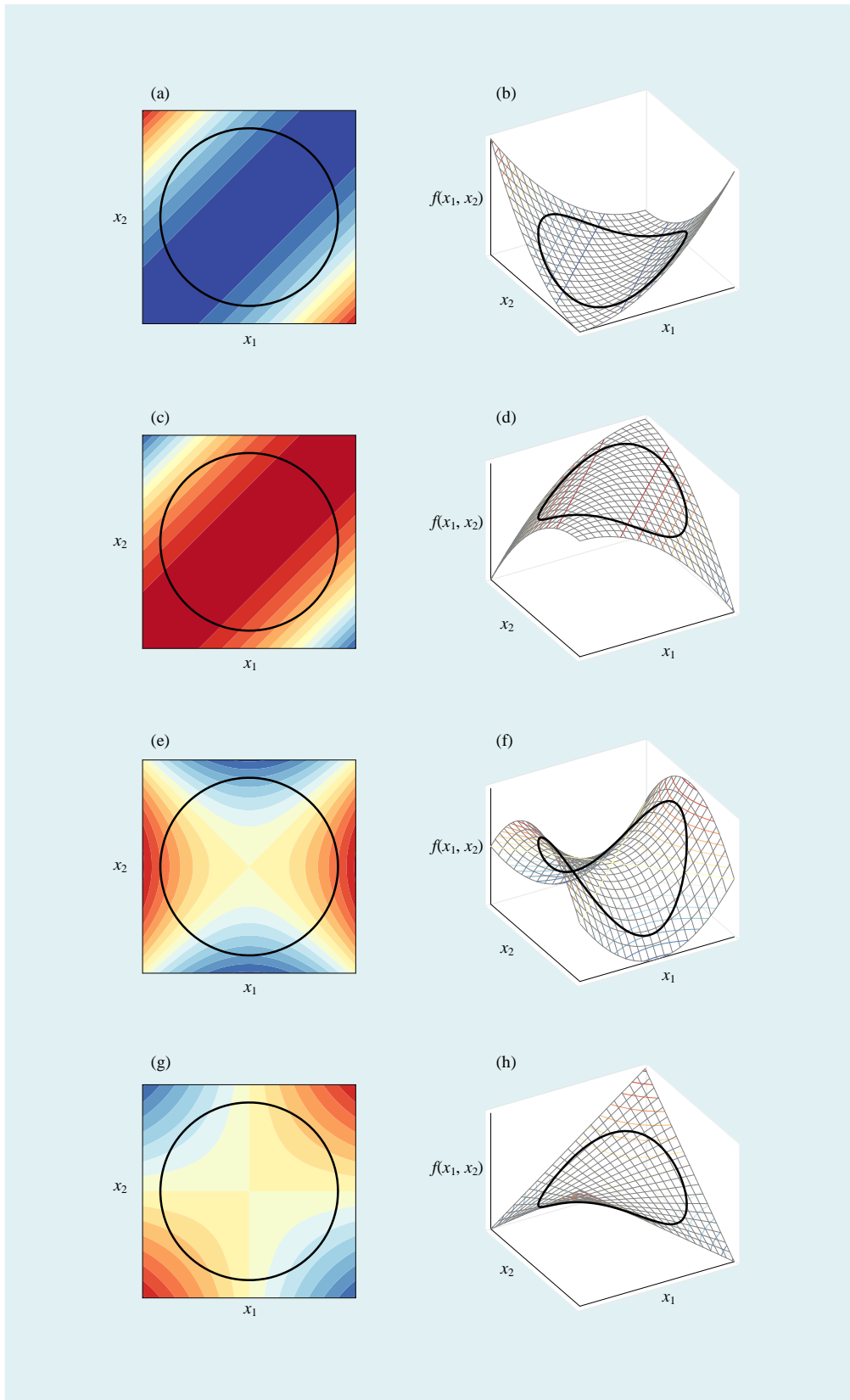


图 9. 将单位圆对应坐标映射到特定曲面，后四个例子

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

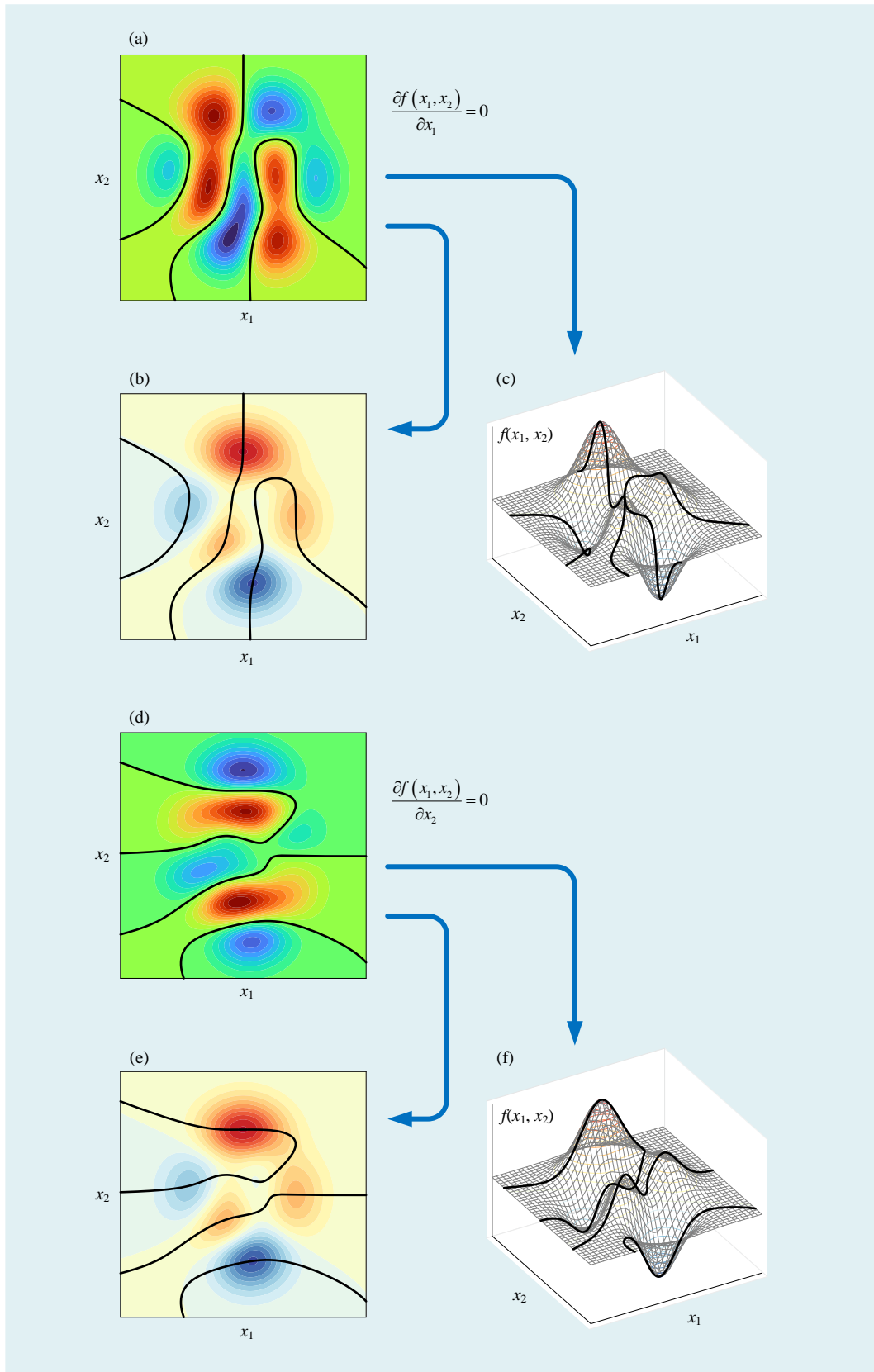


图 10. 提取等高线坐标

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

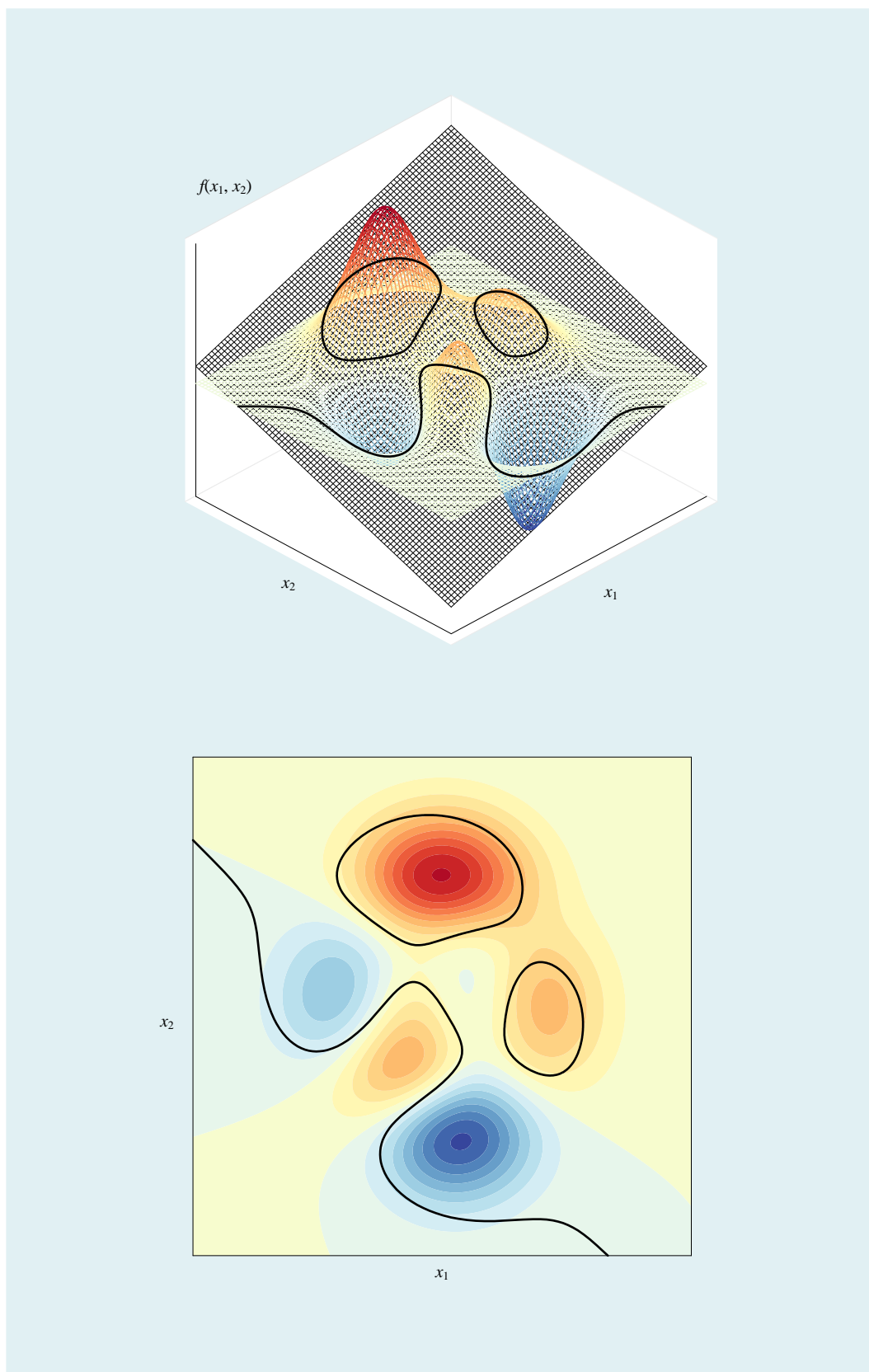


图 11. 用等高线绘制交线

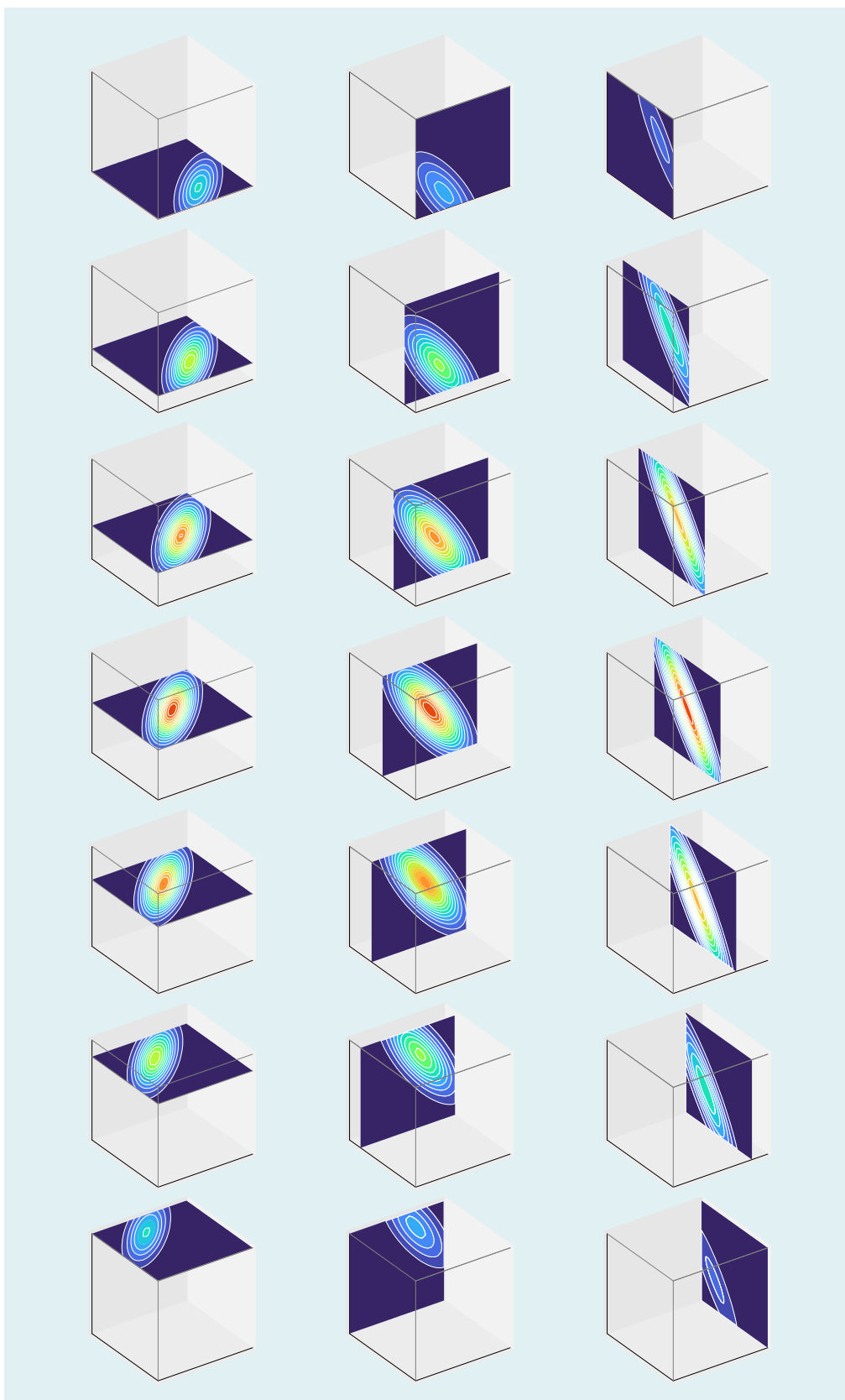


图 12. 沿三个不同方向切豆腐

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com