

## 26

## Types of Distances

## 距离

两点连线、欧氏距离、闵氏距离、马氏距离



没有人会两次踏入同一条河流；江河川流不息，红尘物是人非。

*No man ever steps in the same river twice. For it's not the same river and he's not the same man.*

—— 赫拉克利特 (Heraclitus) | 古希腊哲学家 | 535 ~ 475 BC



- ▶ `numpy.diag()` 如果 A 为方阵，`numpy.diag(A)` 函数提取对角线元素，以向量形式输入结果；如果 a 为向量，`numpy.diag(a)` 函数将向量展开成方阵，方阵对角线元素为 a 向量元素
- ▶ `numpy.linalg.inv()` 计算逆矩阵
- ▶ `numpy.linalg.norm()` 计算范数
- ▶ `scipy.spatial.distance.chebyshev()` 计算切比雪夫距离
- ▶ `scipy.spatial.distance.cityblock()` 计算城市街区距离
- ▶ `scipy.spatial.distance.euclidean()` 计算欧氏距离
- ▶ `scipy.spatial.distance.mahalanobis()` 计算马氏距离
- ▶ `scipy.spatial.distance.minkowski()` 计算闵氏距离
- ▶ `scipy.spatial.distance.seuclidean()` 计算标准化欧氏距离
- ▶ `sklearn.metrics.pairwise.euclidean_distances()` 计算成对欧氏距离矩阵
- ▶ `sklearn.metrics.pairwise_distances()` 计算成对距离矩阵

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 26.1 欧氏距离

欧氏距离，也叫欧几里得距离 (Euclidean Distance)，是最常见的距离度量方法，它计算两个点之间的直线距离。如图 1 所示，在一维数轴上，任意一点  $x$  到原点的距离就是  $x$  的绝对值  $|x|$ 。

对于平面直角坐标系，欧氏距离可以通过使用勾股定理来计算。平面上任意一点  $(x_1, x_2)$  和原点  $(0, 0)$  的距离为  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 。如图 1 所示，欧氏距离的等距线为一系列同心圆。如图 5 所示为平面上常见的两点连线的可视化方案。

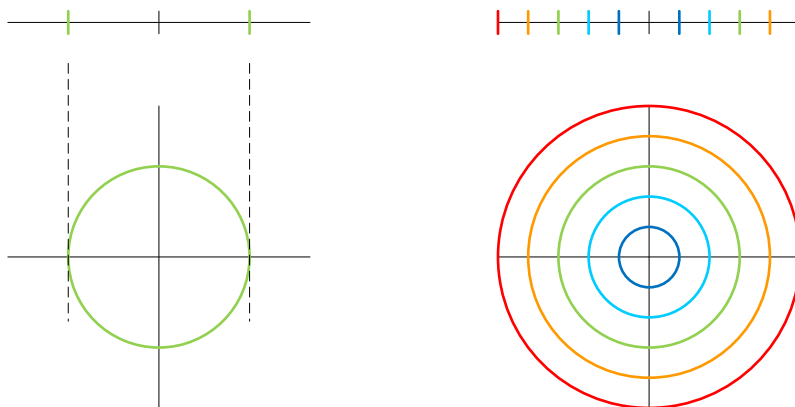


图 1. 数轴、平面直角坐标系上的欧氏距离等距线

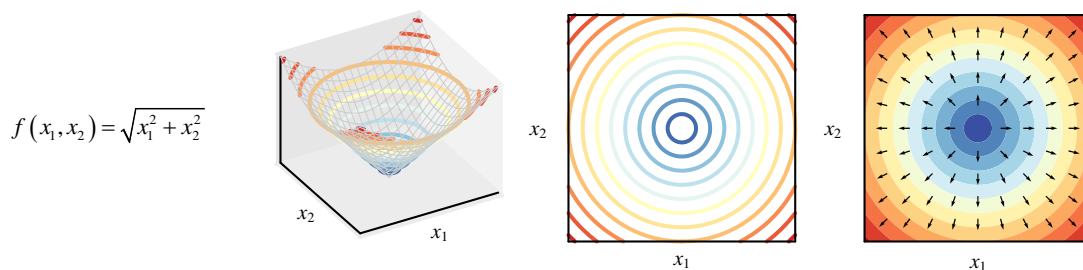


图 2. 平面上任意一点  $(x_1, x_2)$  和  $(0, 0)$  之间的欧氏距离的几种可视化方案

如图 3 所示，在三维直角坐标系中，任意一点  $(x_1, x_2, x_3)$  和  $(0, 0, 0)$  之间的欧氏距离为  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ，其等距线为正球体。

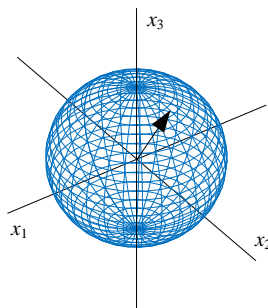


图 3. 三维直角坐标系上的欧氏距离等距线

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 26.2 其他距离

在机器学习中，距离不再仅仅是两点之间最短的线段。距离变成用于衡量两个对象或数据之间的相似性或差异性的概念。不同的距离度量方法可以基于不同的度量标准和算法来计算。以下是几种常见的距离度量方法。

如图 4 所示，在平面上，城市街区距离，也叫曼哈顿距离 (Manhattan Distance) 或  $L^1$  距离，通过沿着坐标轴的垂直和水平线段的长度之和来测量两个点之间。

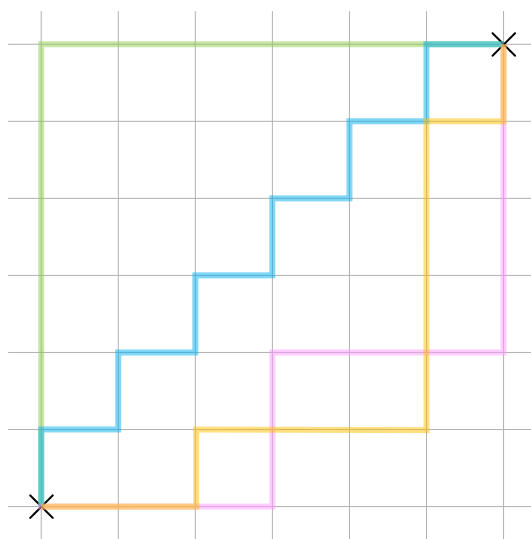


图 4. 城市街区距离

$L^p$  范数是向量的一种度量方式，用来衡量向量中各个元素的大小。在  $L^p$  范数中， $p$  是一个实数，并且  $p$  大于等于 1。

《矩阵力量》第 3 章将专门讲解向量  $L^p$  范数。

$L^p$  距离，也叫闵氏距离 (Minkowski Distance)，是使用  $L^p$  范数来度量两个向量之间的距离。当  $p = 1$  时，得到的是城市街区距离；当  $p = 2$  时，得到的是欧氏距离；当  $p$  趋近于无穷大时，得到的是切比雪夫距离 (Chebyshev distance)。

标准化欧氏距离 (Standardized Euclidean Distance) 是对欧氏距离进行标准化的一种方法。在计算标准化欧氏距离时，对每个维度的值进行标准化处理，然后再计算欧氏距离。

马氏距离 (Mahalanobis Distance) 是一种考虑特征之间相关性的距离度量方法。它使用协方差矩阵来衡量特征之间的相关性，从而在计算距离时考虑到了特征之间的相关性。

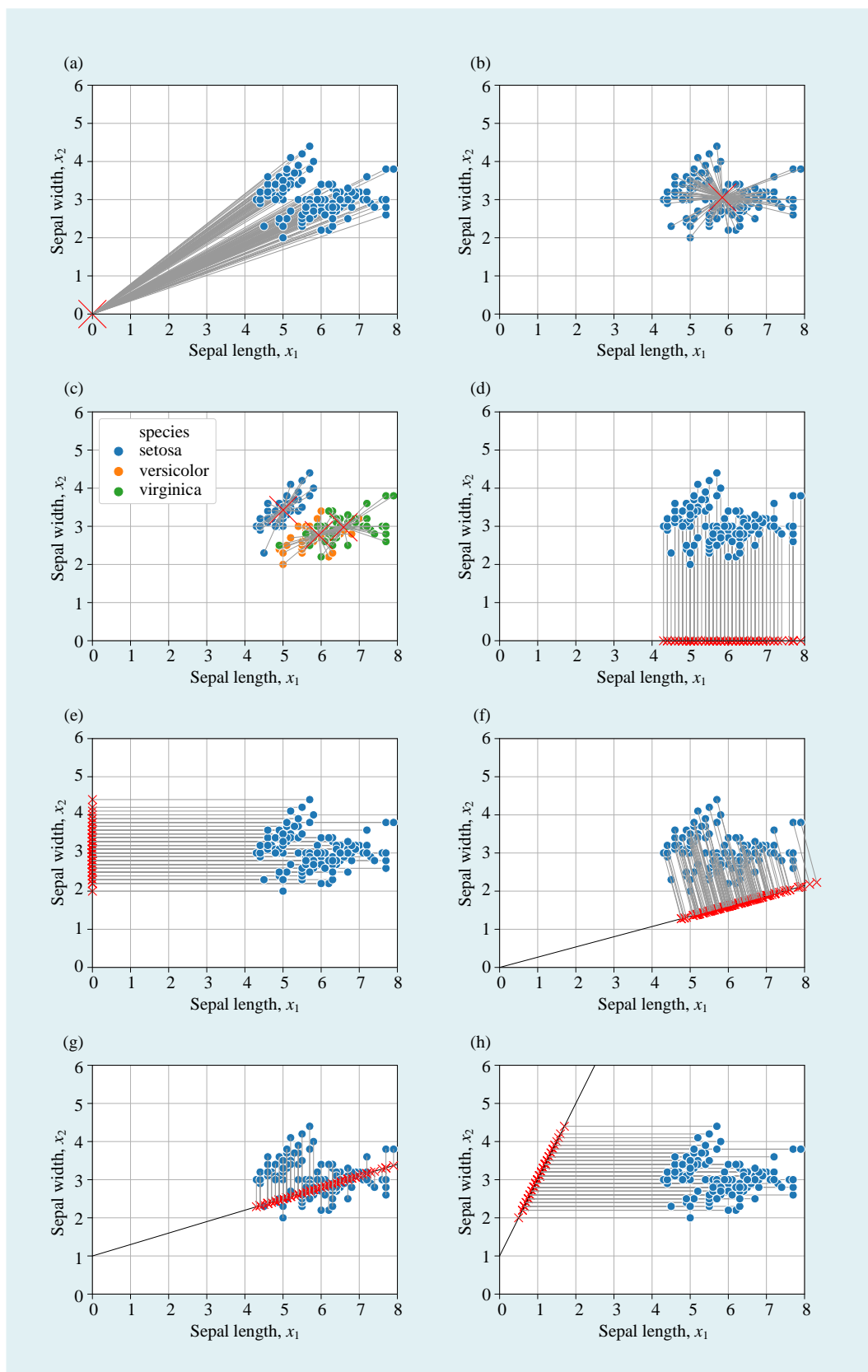


图 5. 平面两点距离的几种情况

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

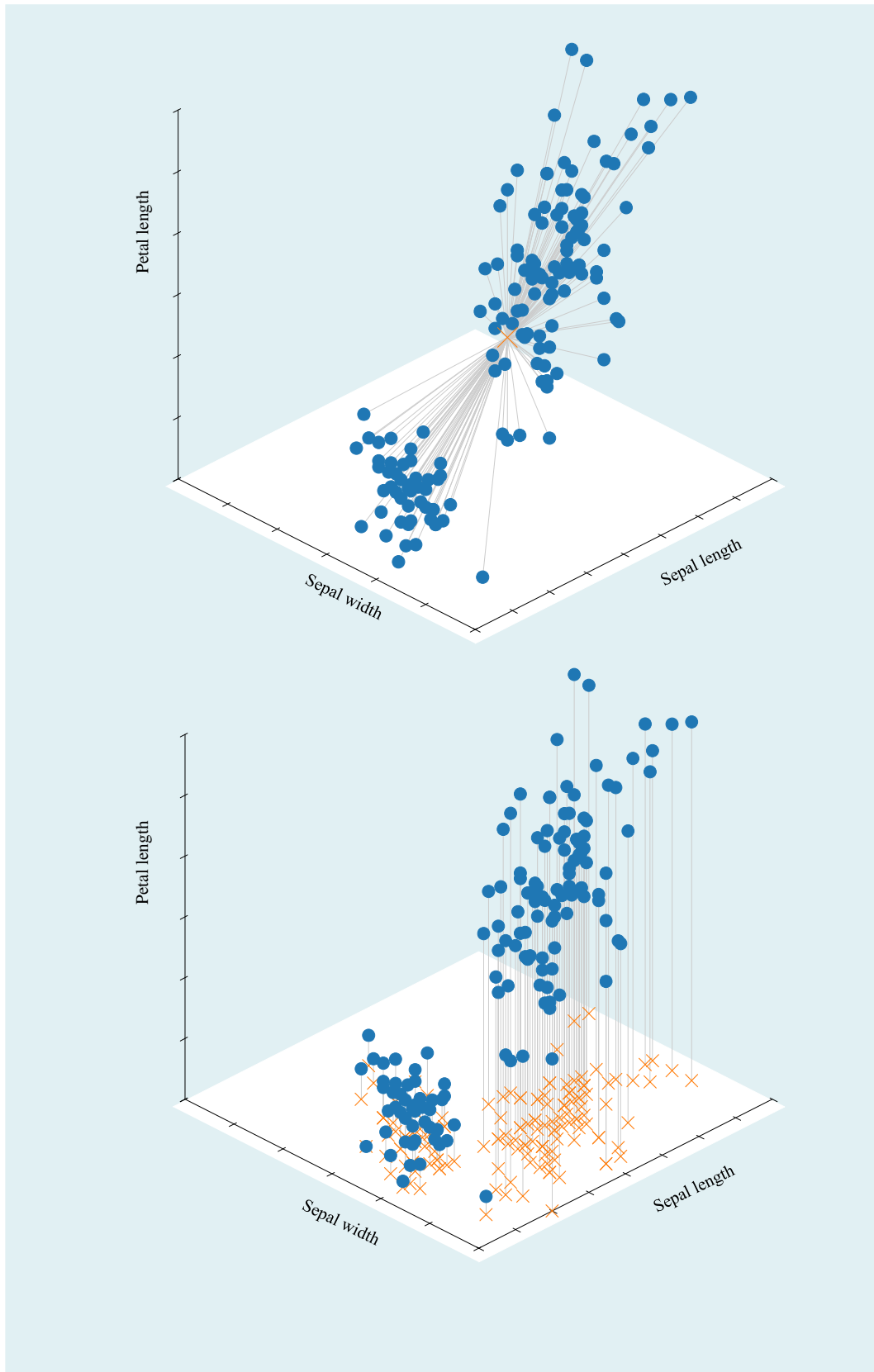
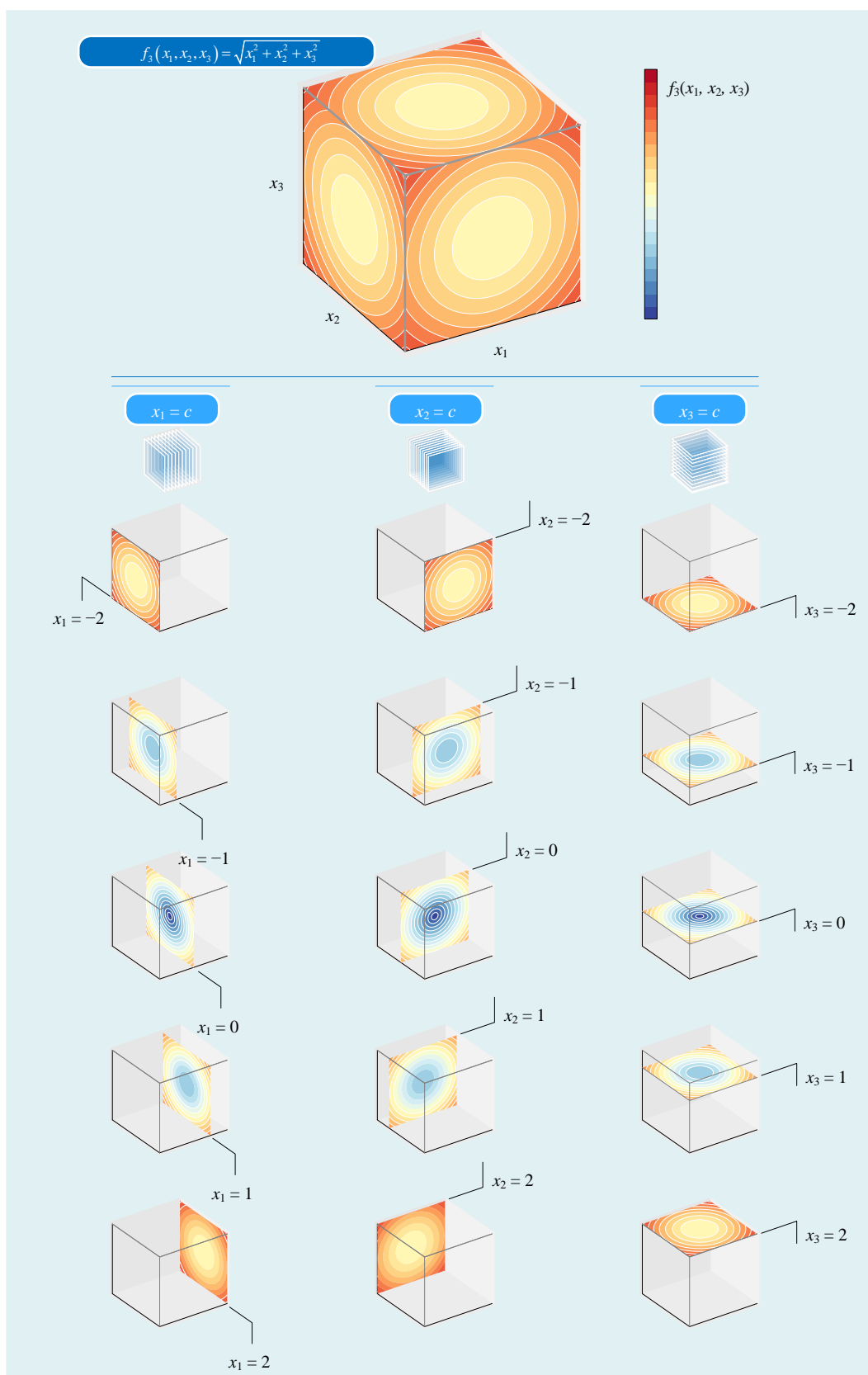


图 6. 三维空间距离

图 7. 三维直角坐标系中，任意一点  $(x_1, x_2, x_3)$  和  $(0, 0, 0)$  之间的欧氏距离

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



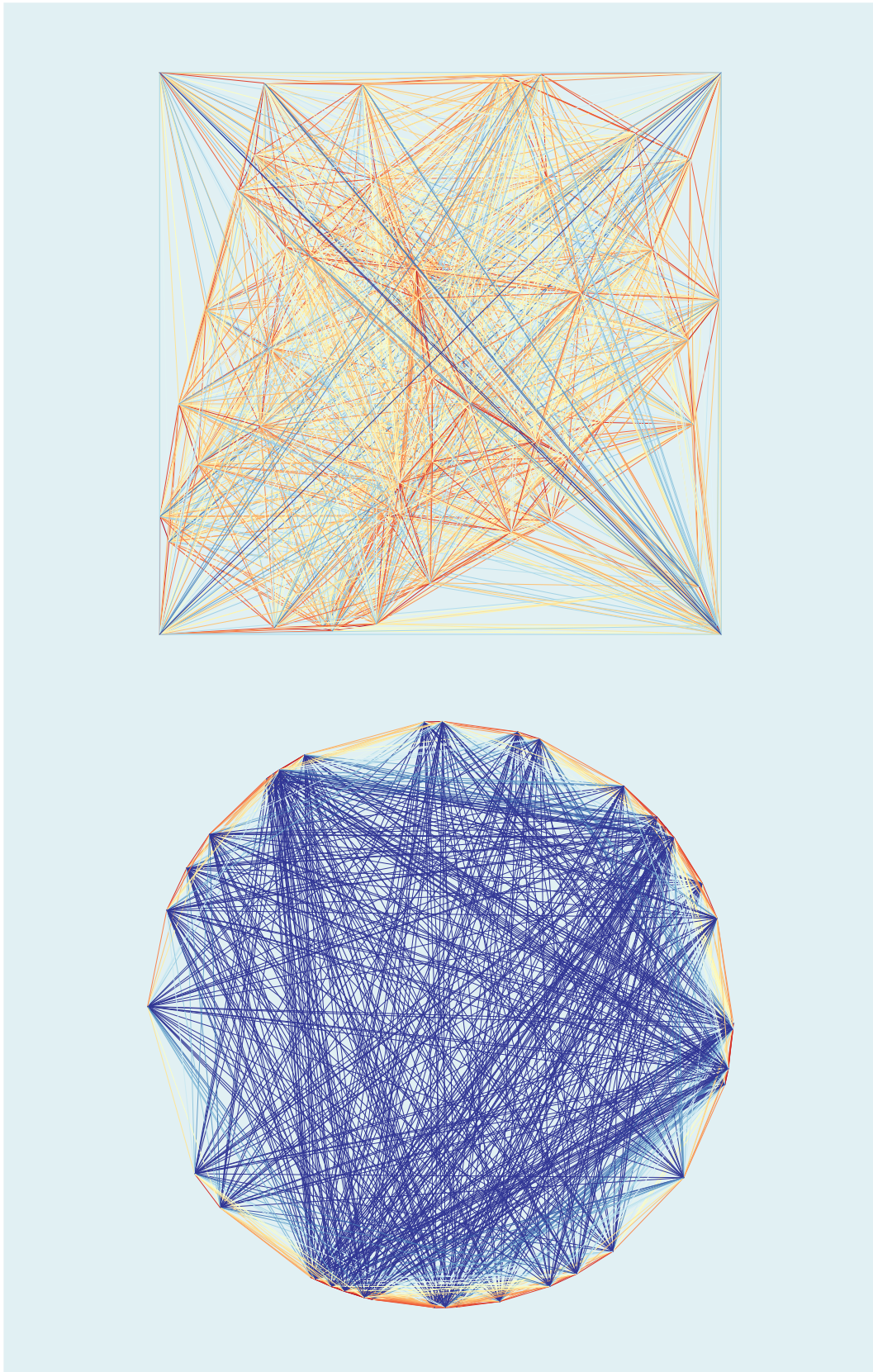


图 8. 根据欧氏距离远近渲染两点连线

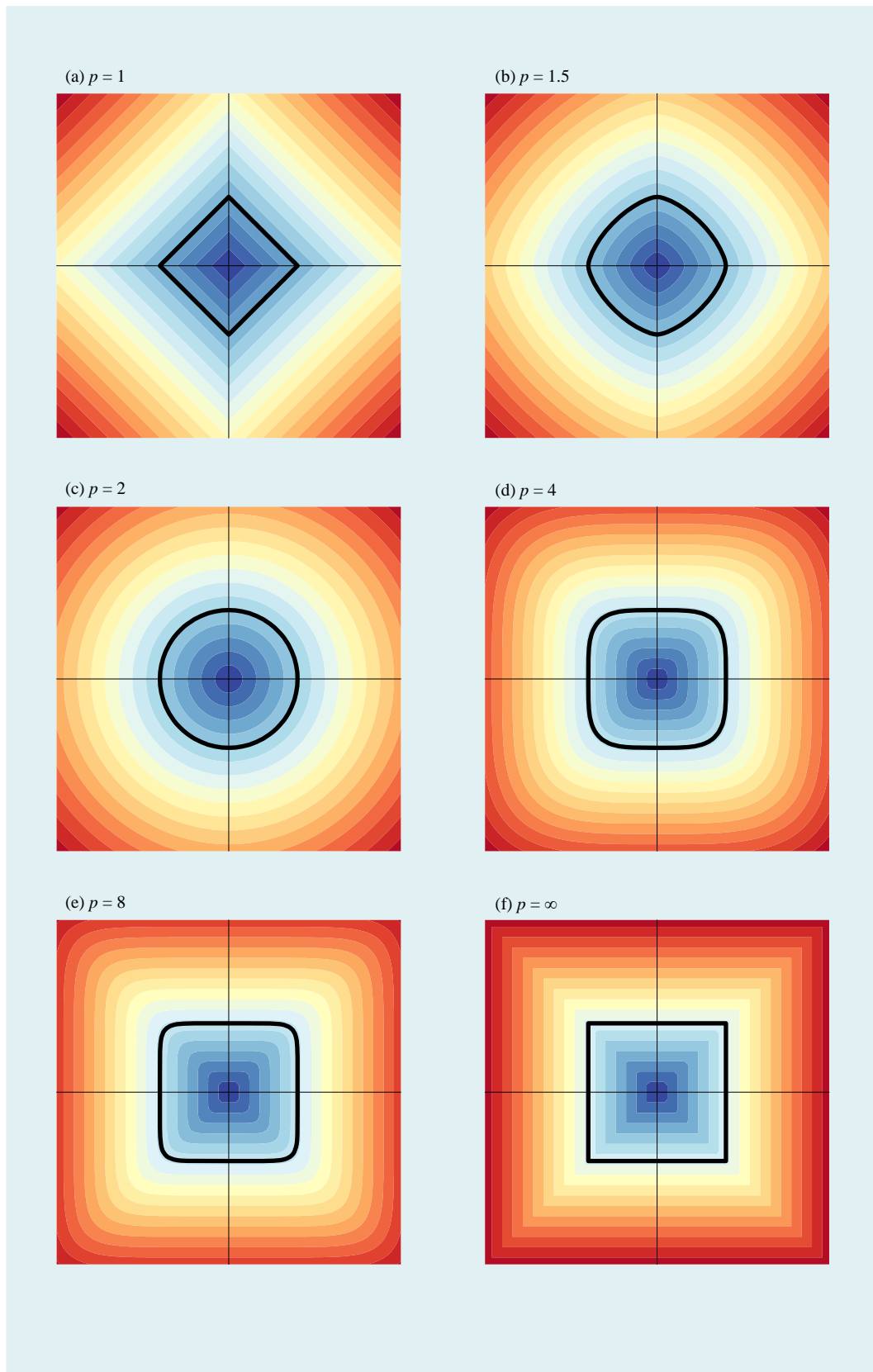


图 9. 向量范数，二维等高线

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



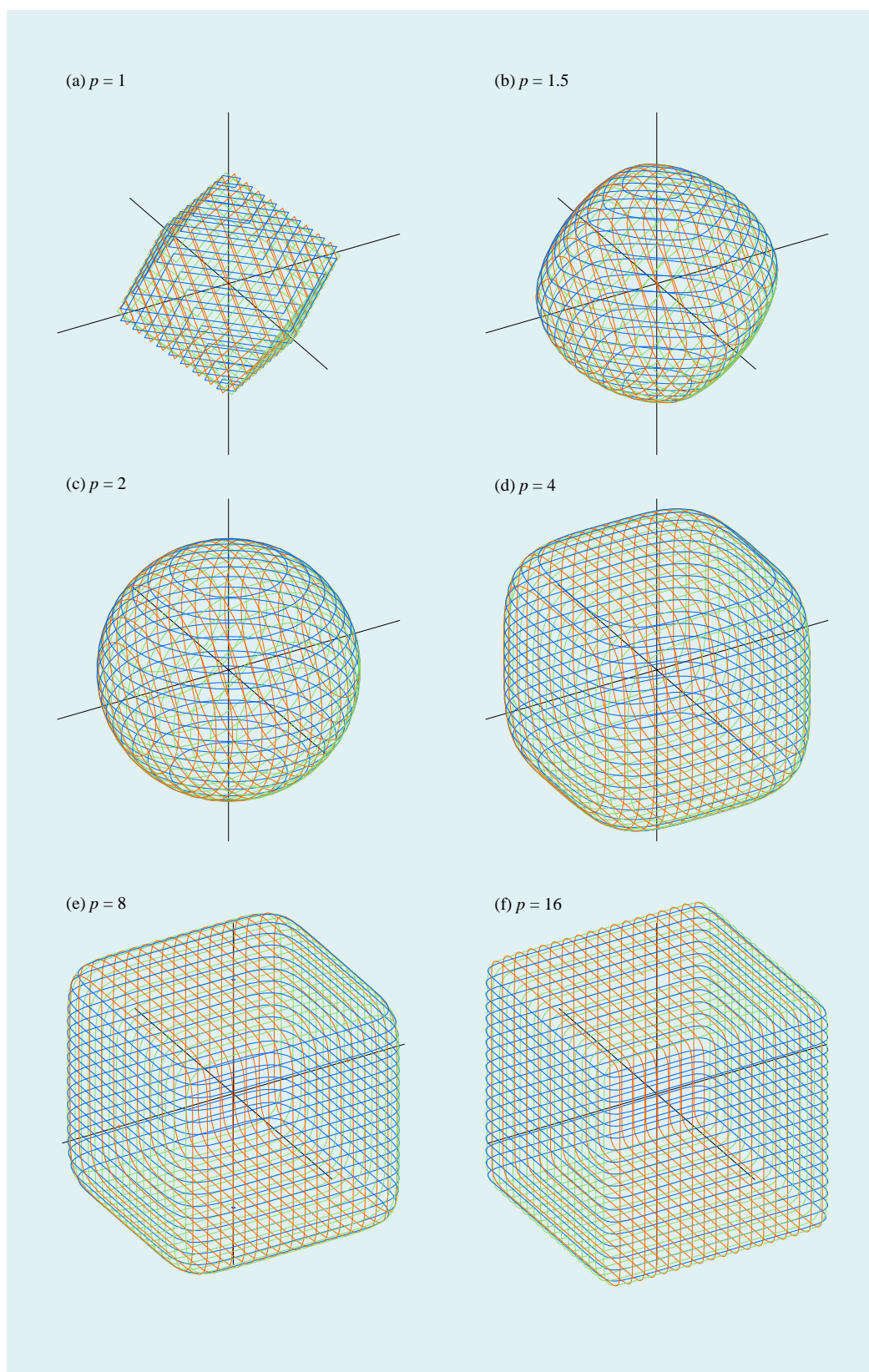


图 10. 向量范数，三维几何体

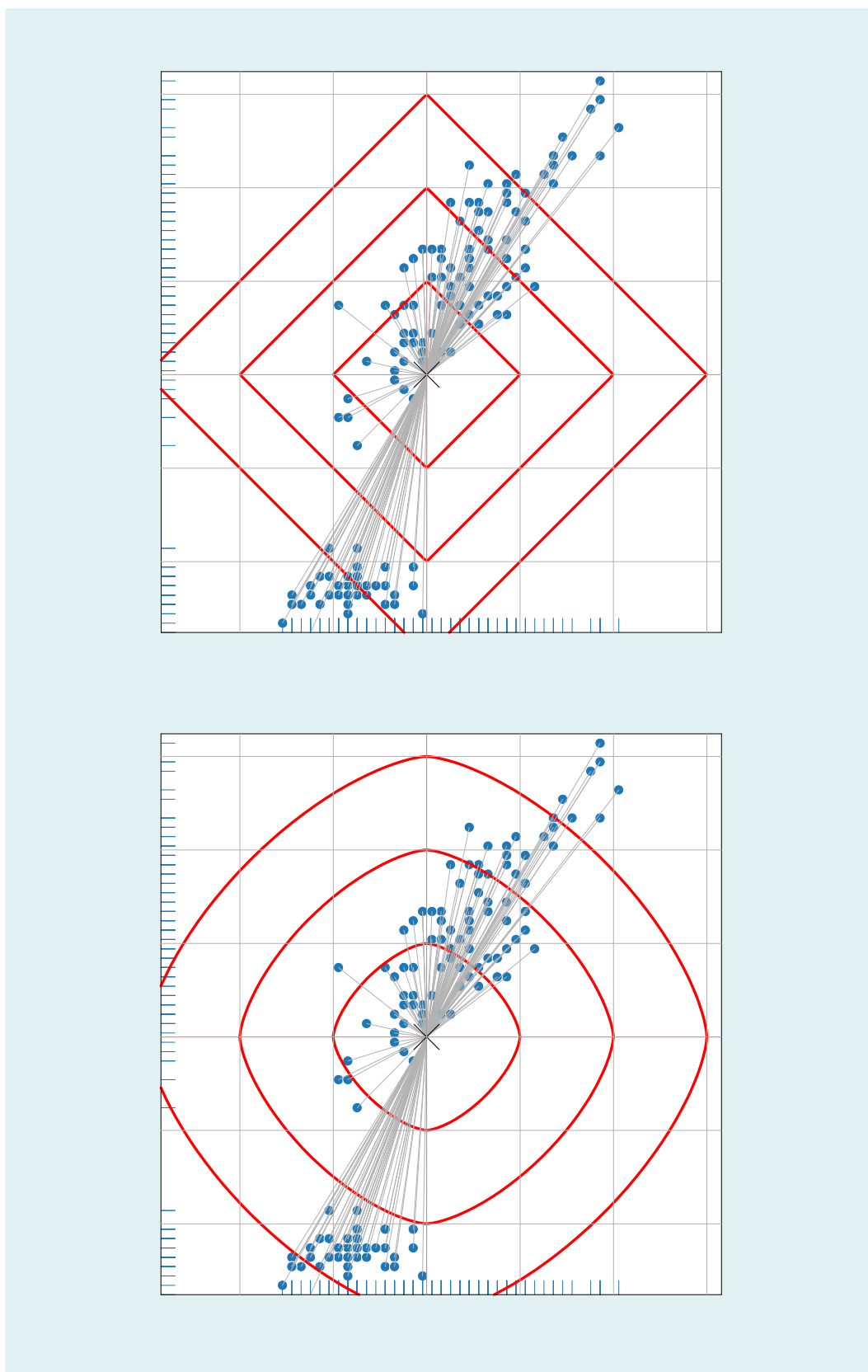
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 11. 鸢尾花数据，距离质心， $L^1$ 、 $L^{1.5}$  距离

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

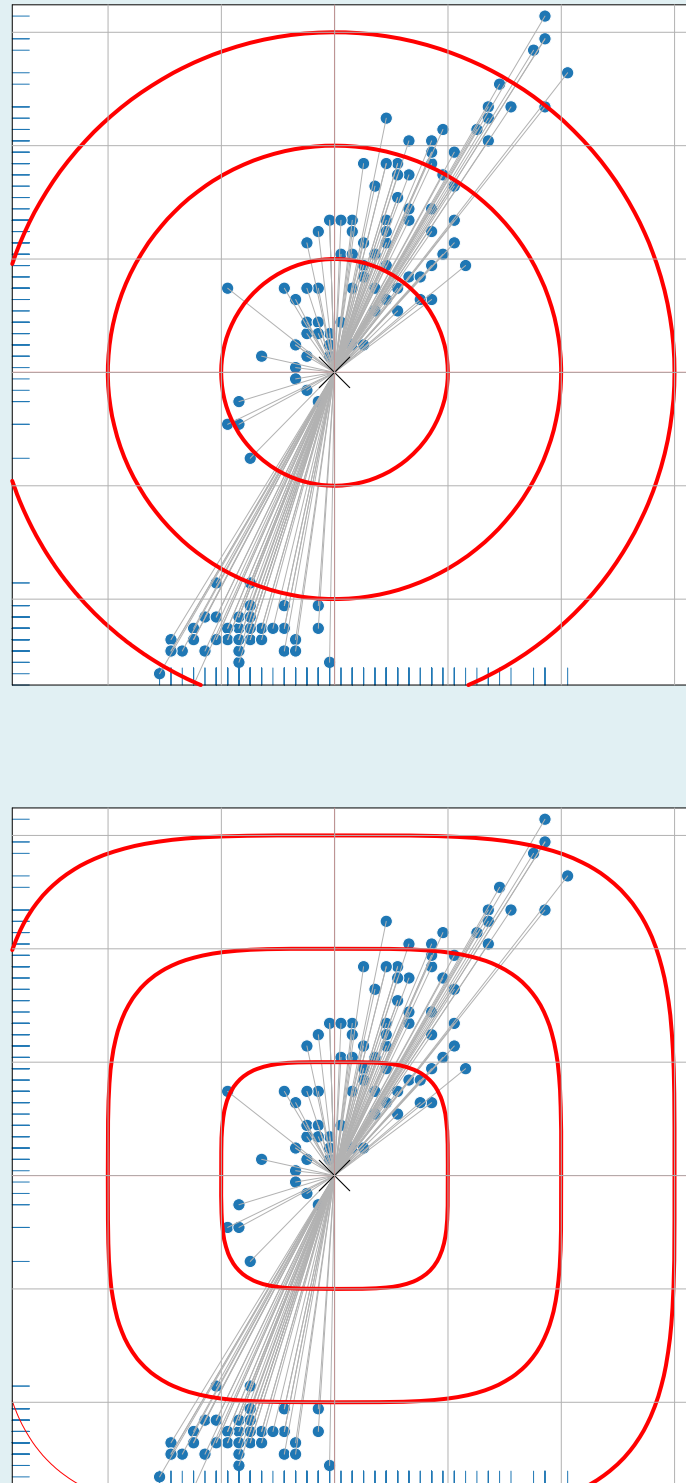
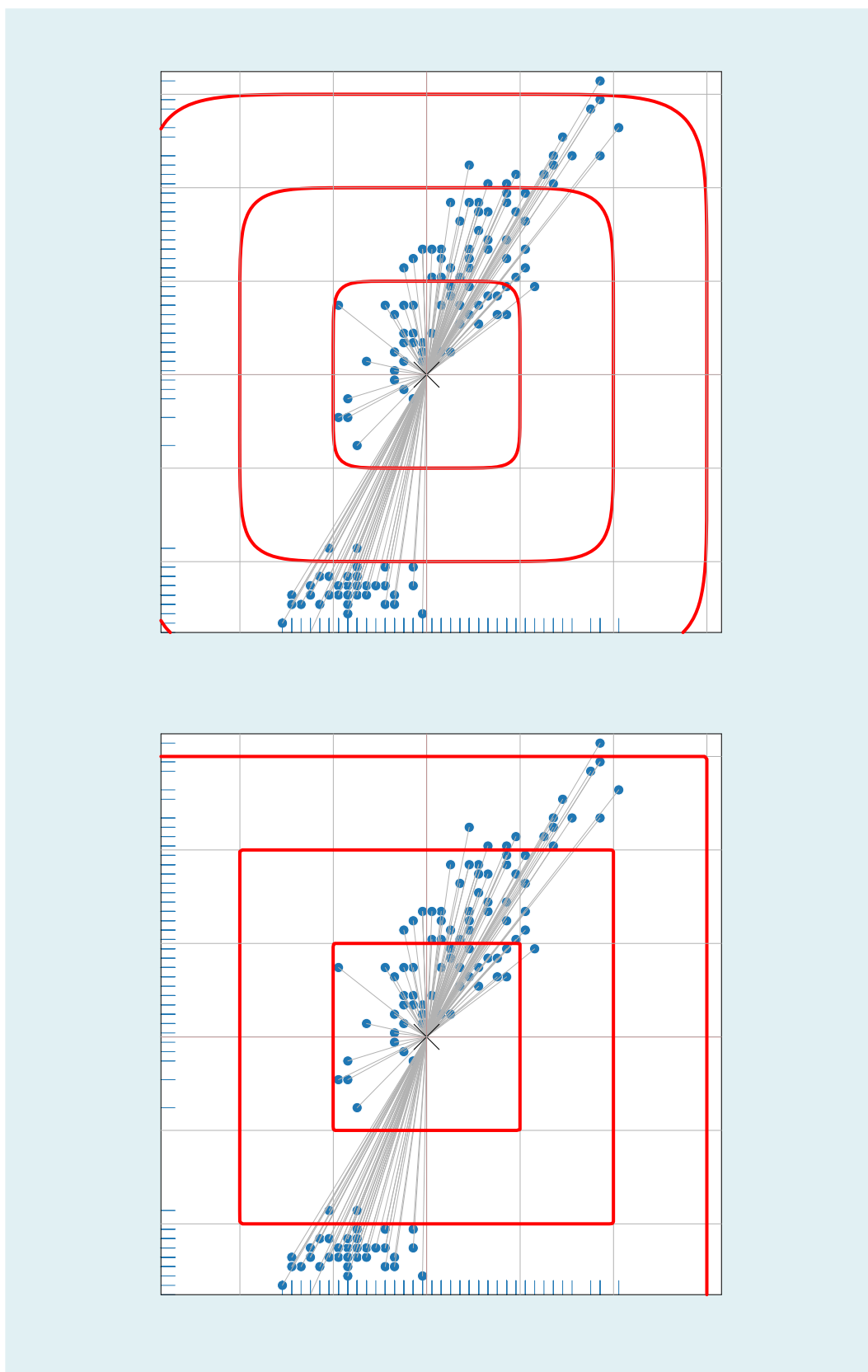


图 12. 鸢尾花数据，距离质心，L2、L4 距离

图 13. 鸢尾花数据，距离质心， $L^1$ 、 $L^\infty$  距离

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

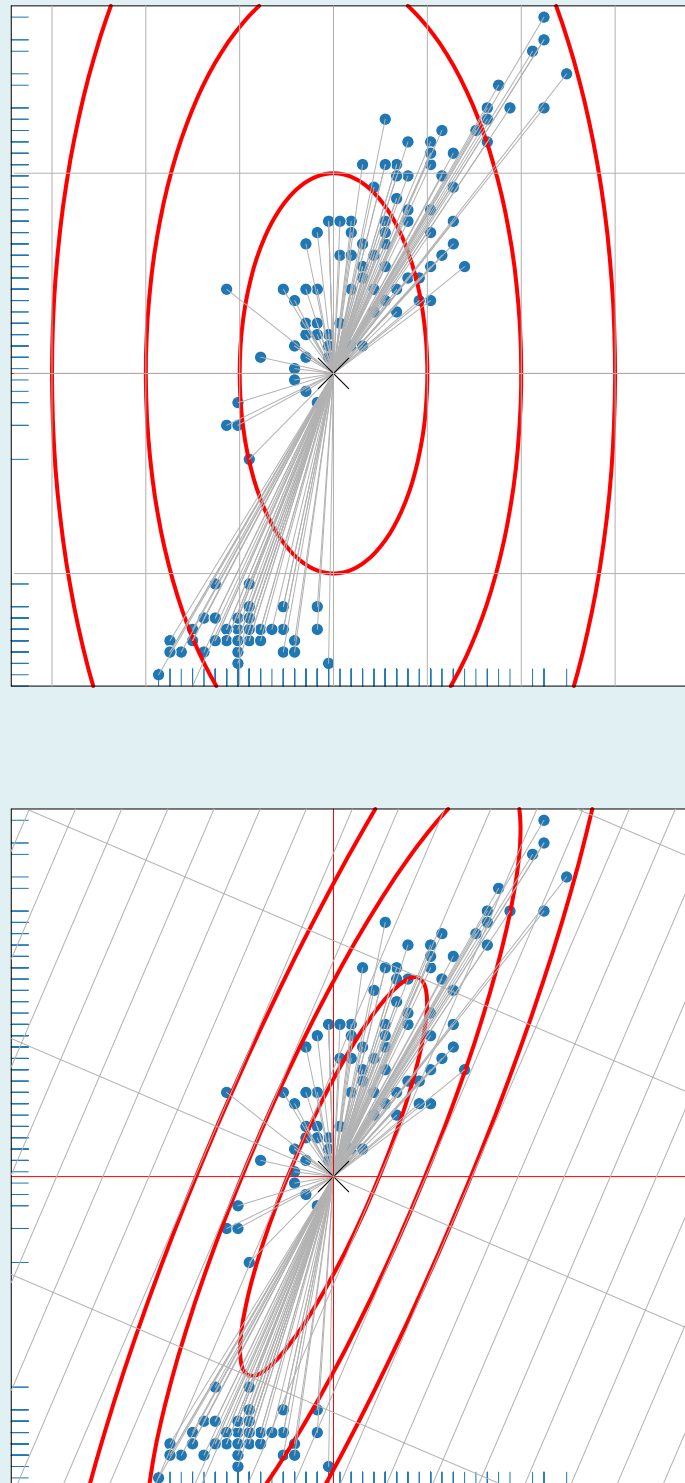


图 14. 鸢尾花数据，距离质心，标准化欧氏距离、马氏距离

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)