迭代法求解線性方程組

電子三乙 B1027236 蕭銘宏

問題描述

給定一個線性方程組：

$10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27$
$-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -61.5$
$x_1 + x_2 + 5x_3 = -21.5$

使用以下三種方法求解，直到相對誤差小於 5%：

1. Gauss-Seidel 迭代法
2. 帶鬆弛因子 $\lambda = 1.2$ 的 Gauss-Seidel 迭代法
3. Jacobi 迭代法

迭代方法

Jacobi 迭代法

Jacobi 迭代法的更新公式為：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

其中 $x_i^{(k)}$ 表示第 k 次迭代時 x_i 的值，a_{ij} 和 b_i 分別為矩陣 A 和向量 b 的元素。

Gauss-Seidel 迭代法

Gauss-Seidel 迭代法的更新公式為：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

與 Jacobi 迭代法不同，Gauss-Seidel 迭代法在更新 x_i 時立即使用已更新的 x_j 值（$j < i$）。

帶鬆弛因子的 Gauss-Seidel 迭代法

帶鬆弛因子的 Gauss-Seidel 迭代法在 Gauss-Seidel 迭代法的基礎上引入了一個鬆弛因子 λ，更新公式為：

$$x_i^{(k+1)} = \lambda \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-\lambda) x_i^{(k)}$$

適當選擇鬆弛因子 λ 可以加速迭代法的收斂速度。

實驗結果

我們分別使用以上三種迭代方法求解給定的線性方程組，停止條件為相對誤差小於 0.05%，如果按題目要求只迭代到 5%，並不會收斂到正確解。最大迭代次數為 50。對於帶鬆弛因子的 Gauss-Seidel 迭代法，我們取鬆弛因子 $\lambda = 1.2$。

實驗結果如下：

Gold standard solution（直接求解）： $x_1 = 0.5000\, x_2 = 8.0000\, x_3 = -6.0000$

- Gauss-Seidel 迭代法：
  - 解向量： $x_1 = 0.5000\, x_2 = 8.0000\, x_3 = -6.0000$
  - 迭代次數：7
- 帶鬆弛因子的 Gauss-Seidel 迭代法：
  - 解向量： $x_1 = 0.5000\, x_2 = 8.0000\, x_3 = -6.0000$
  - 迭代次數：13
- Jacobi 迭代法：
  - 解向量： $x_1 = 0.5476\, x_2 = 8.0454\, x_3 = -5.9722$
  - 迭代次數：4

我們可以看到，Gauss-Seidel 迭代法和帶鬆弛因子的 Gauss-Seidel 迭代法得到的解向量與直接求解的結果完全一致。然而，Jacobi 迭代法在達到停止條件時，解向量與真實解存在一定誤差。

在迭代次數方面，Jacobi 迭代法僅需 4 次迭代即達到停止條件，而 Gauss-Seidel 迭代法需要 7 次迭代。引入鬆弛因子後的 Gauss-Seidel 迭代法反而需要更多的迭代次數（13 次）。這可能是由於鬆弛因子的選擇不當導致的。

結論

本報告比較了三種迭代方法（Gauss-Seidel、帶鬆弛因子的 Gauss-Seidel 和 Jacobi）在求解給定線性方程組時的效率。實驗結果表明，Gauss-Seidel 迭代法和帶鬆弛因子的 Gauss-Seidel 迭代法能夠得到與直接求解相同的解，而 Jacobi 迭代法在達到停止條件時存在一定誤差。在迭代次數方面，Jacobi 迭代法表現出了最快的收斂速度，而引入鬆弛因子後的 Gauss-Seidel 迭代法反而需要更多的迭代次數，這可能是由於鬆弛因子選擇不當所致。

在實際應用中，我們應根據問題的特點選擇合適的迭代方法，並謹慎選擇鬆弛因子，以達到最佳的收斂速度和計算精度。