# Skript Elektrodynamik

## 1 Kapitel I - Maxwell-Gleichungen

Dies sind partielle Differentialgleichungen für elektrische und magnetische Felder, d.h. ortsabhängige Vektorgrößen.
Beispiel: $\vec{E}(t,\vec{x})$ = “elektrisches Feld am Ort $\vec{x}$ zur Zeit t.”
Grundinterpretation: Kraft auf Teilchen der Ladung $q$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$

### 1.1 Lorenz-Kraft

$\vec{F} = q[\vec{E}(t,\vec{x}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x},t)]$ $(= m\ddot{\vec{x}})$

### 1.2 $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$ *und* $\vec{H}$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllen die homogenen Maxwell-Gleichungen:

$$div\ \vec{B} = 0$$
$$rot\ \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

Die Felder werden “erzeugt” durch Ladungen und Ströme. Dazu fürhen wir ein:
$\vec{D}(t,\vec{x})$ = “dielektrische Verschiebung”
$\vec{H}(t,\vec{x})$ = “magnetische Erregung”
$div\ \vec{D} = \rho$ = Ladungsdichte
$rot\ \vec{H} - \dot{\vec{D}} =$ j = Stromdichte
Der Zusammenhang $(\vec{E}, \vec{B})$ mit $(\vec{D}, \vec{H})$ wird hergestellt durch **Materialgleichungen**.
Das einfachste Material ist Vakuum:
$\vec{D} = \epsilon_0\ \vec{E}$ ($\epsilon_0$ = Dieelektirzitätskonstante)
$\vec{B} = \mu_0\ \vec{H}$ ($\mu_0$ = Permeabilität des Vakuums)

#### 1.2.1 Dielektrika

Materialgleichungen wie oben, aber: $\epsilon_0 \to \epsilon(\vec{x},t)$ und $\mu_0 \to \mu(\vec{x},t)$

#### 1.2.2 Komplikationen

- $\epsilon, \mu \to Matrizen$ (anisotropes Material)
- $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ nicht linear
- $\vec{D} = \vec{D}$ ganze Vorgeschichte [Gedächtniseffekt] des Material(punktes) $\to$ Dispersion
- Leiter: Ohmesches Gesetz: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ ($\sigma$ = Leitfähigkeit)

- Supraleiter: $\vec{B} = 0$ im Supraleiter
- der ganze Rest: Fast alle Materialgrößen koppeln an EM-Felder, Piezo-Kristall, Thermo-Element, Magneto-Hydrodynamik

# 2 Kapitel II - Vektoranalysis und Potentiale

## 2.1 Ableitung als lineare Approximation

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ n=m=1
Gesucht: affine Approximation:
$f(x) = a + B\ x$ mit $f_j(x_1, ..., x_n) = \sum_{\alpha=1}^n B_{i\alpha}\ x_\alpha + a_j$ j=1, ..., m $a \in \mathbb{R}^m$ B = m $\times$ n-Matrix

Aproximiere allgemeine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch eine affine ????????? in der Nähe von $\mathbb{R}^n$
$f(x+y) - f(a + B\ y) = \theta(y)$ $(\theta := Terme, dieschnelleralsygegenNullgehen)$
d.h.: $\lim_{|y|\to 0} \frac{1}{|y|} |f(x+y) - (a + B\ y)| = 0$
hier sind |y| und |...| beliebige "Vektorbeträge" (=Normen)
Alle Normen liefern den gleichen Begriff von "f ist differenzierbar bei x" $\Leftrightarrow \exists a, B$ lin. Apporximation.
Dann sind a, B eindeutig bestimmt.
Wenn $\tilde{a},\ \tilde{B}$ andere wählen $\Rightarrow |\tilde{a} + B\ y - (a + B\ y)| \leq |\tilde{a} + \tilde{B}y - f(x+y) - a - B\ y|\ =\ \theta(y)$
$\frac{|(\tilde{B}-B)\ y|}{|y|} \to 0$
Es ist a=f(x)
$B := (\nabla f)(x) = m \times n - Matrix$
$B_{j\alpha} = \frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha}(x) :=$ gewöhnliche Ableitung von $f_j$ nach $x_\alpha$, wobei die Übrigen $x_\beta$ festgehalten werden.

## 2.2 Volumina und Determinanten

Berechne in n Dimensionen das Volumen eines Parallel-Epipedes
A=($\vec{a}^{(1)}\ \vec{a}^{(2)}\ \vec{a}^{(3)}$) mit $A_{ij} = (\vec{\alpha}^j)_i$ Das Volumen ist also: $V(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n) = |detA|$
Für EDynamik extrem praktisch: betrachte direkt (det A) = "orientiertes Volumen"

## 2.3 Integrale über diverser Dimensionen

### 2.3.1 Kurvenintegrale

parametrisierte Kurve $\xi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$
Definiere Integrale als Summen über Teilintervalle (Die sind viel einfacher!).
Kurve ist praktisch eine Gerade (Integrand praktisch konstant)
Betrag des Intervalls $[s_{i-1}, s_i]$ entlang des Vektors $\vec{\xi}(s_i) - \vec{\xi}(s_{i-1})$. Also in Relation $(\vec{\xi}(s_i) - \vec{\xi}(s_{i-1}))$ * $\vec{F}(\vec{\xi}(s_i))$ ($\vec{F}$ ist ein Vektorfeld)
$\int_{Kurve} d\,\vec{\xi}\,\vec{F}(\vec{\xi}) = \lim_{Unterteilung\ fein} \sum_{i=1}^N (\vec{\xi}(s_i) - \vec{\xi}(s_{i-1})) * \vec{F}(\vec{\xi}(s)) = lim \sum_{i=1}^N (s_i - s_{i-1})\dot{\vec{\xi}}(s_1)\ \vec{F}(\vec{\xi}(s_i)) = \int_0^1 \dot{\vec{\xi}}\ \vec{F}(\vec{\xi}(s))\ ds$

### 2.3.2 Flächenintegrale

Gleiche Prinzipien: $\eta : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisierte Fläche.
Wir möchten etwas über die Fläche $\Omega = \eta(\Omega_0)$
Zerlege in kleine Stückchen und betrachte das Integral über diese, viel einfacheren Flächen.

- Integrand soll linear an beiden Kantenvektoren abhängen
- Abhängigkeit soll determinantenartig sein, parallele Vektoren $\longrightarrow$ Fläche Null <=> F antisymmetrisch:
  $0 = f(a+b, a+b) = F(a,a) + F(b,a) + F(b,b)$ außerdem gilt: F(a, b) = -F(b, a)
  $\Rightarrow F(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{ij} F_{ij} a_i b_j$ mit $F_{ij} = -F_{ji}$ drei unabhängige Komponenten: $\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$
  $F(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}\ \vec{G} \quad (\vec{G} = \text{Vektorfeld})$
- Flächenintegral:
  $\int_\Omega \vec{G}\ d\vec{f} = \int_\Omega \vec{n}\ \vec{G}\ d\vec{f} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial T}\ \vec{G}(n(s,t))$

$\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial T}$ = Normalenvektor an die Fläche

### 2.3.3 Idee bei all diesen Integralen:

Über kleine Flächenstücke wird alles einfach
Es reichen: (wegen linearer Approximation)

- flache Plaketten
- konstante Funktionen

$\eta : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
Tangentialvektoren: $\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t}(t,s)$, $\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial s}(t,s)$
$\eta(t + \Delta t, s) = \vec{\eta}(t,s) + \Delta t \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t}(t,s) + \theta(\Delta t)$
Plaketten haben Kantenvektoren:
$\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t}\Delta t$ und $\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial s}\Delta s$
Wir betrachten Integranden, für die der Betrag einer kleinen Plakette linear in den Kantenvektoren ist. (=> automaitsch richtiges Verhalten bei Untersuchung) -> Integrand gegeben durch Vektorfeld $\vec{G}$
Betrag einer Plakette = $\Delta t \Delta s\ (\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t} \times x \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial s}) * \vec{G}(\vec{\eta}(t,s))$
Volumenintegrale: genauso!
Parallelogramme, Platten $\rightarrow$ Spate
L = Integrieren in krummlinigen Koordinaten = Substitutionsregel

### 2.3.4 Jacobi-Matrix der Transformation

dx dy dz = Funktionaldeterminante dr d$\vartheta$ d$\varphi$ = det $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial zb}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$

### 2.3.5 Beispiel: 3D Polarkoordinaten

$\vec{p}(r,\vartheta,\varphi) = r \begin{pmatrix} cos(\varphi)sin(\vartheta) \\ sin(\varphi)sin(\vartheta) \\ cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

$|\vec{p}|^2 = r^2(sin^2\vartheta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + cos^2\vartheta) = r^2$

$\nabla\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial r} \cdots \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi)sin(\vartheta) & rcos(\varphi)cos(\vartheta) & -rsin(\varphi)sin(\vartheta) \\ sin(\varphi) & rsin(\varphi)cos(\vartheta) & rcos(\varphi)sin(\vartheta) \\ cos(\vartheta) & -rsin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$

det(Jacobi) $= r^2[0 + cos^2(\vartheta)sin(\vartheta)cos^2(\varphi) + sin^3(\vartheta)sin^2(\varphi) - (-cos^2(\vartheta)sin(\vartheta)sin^2(\varphi) - sin^3(\vartheta)cos^2(\varphi) + 0)] = r^2(sin^3(\vartheta) + sin(\vartheta)cos^2(\vartheta)) = r^2 sin(\vartheta)$