

Notas de Cosmología

E. Vázquez
CRyA/UNAM

Chapter 1

Preliminares

1.1 Unidades y escalas

(Bernstein, pp. 3-22.)

La cosmología relaciona todas las escalas del Universo, desde las más pequeñas (partículas elementales) hasta las más grandes (el tamaño del Universo observable). Por ello se utilizan unidades muy variadas. Además, de acuerdo a la Relatividad, la masa y la energía son equivalentes.

A nivel atómico es común usar:

- Energía en eV: $1 \text{ eV} = 1.6022 \times 10^{-12} \text{ erg}$.
- Distancia en fermi: $1 \text{ f} = 10^{-13} \text{ cm}$.
- Masa en Mega electrón Volts: $\frac{\text{MeV}}{c^2}$ (frecuentemente se omite la c)

Ejemplos:

$$\begin{aligned} m_p &= 938.27 \text{ MeV} & (=1.67 \times 10^{-24} \text{ g.}) \\ m_e &= 0.511 \text{ MeV} \end{aligned}$$

También es común hacer $\hbar = c = k = 1$. Práctico pero confuso al principio, y aquí no lo haremos.

TAREA: Usando factores de constantes fundamentales, calcular la temperatura, tiempo, longitud y masa equivalentes a 1 GeV .

Planck definió un sistema de unidades más “fundamental” que el *cgs* o el *mks*, basado precisamente en las constantes fundamentales:

Masa: $M_p \equiv (\hbar c / G)^{1/2} = 2.18 \times 10^{-5} \text{ g}$.

Energía: $M_p c^2 = 1.96 \times 10^{16} \text{ erg} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$

Tiempo: $t_p = \hbar / (M_p c^2) = 5.39 \times 10^{-44} \text{ s}$.

Temperatura: $T_p = M_p c^2 / k = 1.417 \times 10^{32} \text{ K}$.

Longitud: $ct_p = 1.616 \times 10^{-33} \text{ cm}$.

La masa de Planck tiene la propiedad de que su radio de Schwarzschild (tamaño de su hoyo negro, $= 2GM_p/c^2$) es igual a su longitud de onda de Compton dividida por π ($2\hbar/mc$), que es una cota inferior a la escala de tamaño con

la cual se puede especificar la posición de una partícula de masa m , debido al principio de incertidumbre Heisenberg. En efecto, la definición de M_p implica que

$$\frac{GM_p}{c^2} = \frac{\hbar}{M_p c}. \quad (1.1)$$

Es decir, esto sugiere que partículas elementales con $m \gtrsim M_p$ tienen que ser estudiadas con gravedad cuántica (aunque no existe todavía la teoría correspondiente).

Encontraremos las unidades de Planck al estudiar las etapas más tempranas del Universo (edades del Universo del orden del tiempo de Planck), llamadas “la época de Planck”.

Unidades a nivel astronómico:

$$\begin{aligned} 1 \text{ pc} &= 3.26 \text{ años luz} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm} = 2.05 \times 10^5 \text{ AU.} \\ 1M_\odot &= 1.99 \times 10^{33} \text{ g.} \end{aligned}$$

Ejemplos:

- Radio de la órbita terrestre ($150 \times 10^6 \text{ km}$) $\equiv 1 \text{ UA} = 4.86 \times 10^{-6} \text{ pc}$.
- Diámetro de la Vía Láctea $\approx 30 \text{ kpc}$
- Masa de la Vía Láctea $\approx 2 \times 10^{11} M_\odot$
- Tamaño del Universo observable $\approx 4000 \text{ Mpc} \equiv R_U$
- Edad de la Tierra $\sim 4.5 \times 10^9 \text{ años}$
- Edad del Universo $\sim 10 - 15 \times 10^9 \text{ años} \equiv t_U \sim \frac{R_U}{c}$

1.2 Fuerzas y partículas elementales

Hay cuatro fuerzas en el Universo:

- Fuerte (nuclear)
- EM (Electromagnética)
- Débil
- Gravedad

descritas por teorías cuánticas de campo (excepto la gravedad)

Partículas:

- “*Partículas*”
 - Leptones (electrón, neutrino (ν), μ , τ , y sus antipartículas)

- Quarks \rightarrow forman *hadrones* (bariones [protones y neutrones] y mesones);
- *Mediadores de la fuerzas:*
 - Bosones

Los quarks y leptones ejercen las fuerzas intercambiando bosones. La fuerza de la interacción está caracterizada por “constantes de acoplamiento” g , donde

$$\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \quad (1.2)$$

es una cantidad adimensional, proporcional a la probabilidad de interacción. Sus valores para las diferentes fuerzas son:

Fuerza	cte. acoplamiento	($g \propto$ amplitud de probabilidad)
fuerte	$g^2/4\pi\hbar c \sim 1$	
EM	$\alpha = e^2/4\pi\hbar c \sim 1/137$	
débil	$g_\omega^2/4\pi\hbar c \sim 10^{-2}$	

Las interacciones se representan con “diagramas de Feynmann”. Por ejemplo, la dispersión entre electrones e^- se representa:

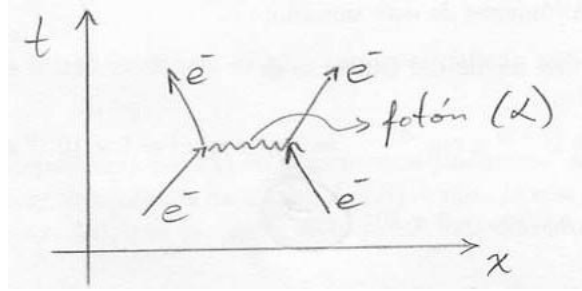


Figure 1.1: Diagrama de Feynmann que representa la interacción entre dos electrones. La partícula que media dicha interacción es el fotón.

Vale la pena notar que la gravedad es debilísima: Por ejemplo, el cociente entre las fuerzas EM y gravitacional entre protones es:

$$\frac{F_G}{F_{EM}} = \frac{Gm_p^2}{e^2/4\pi} \approx 10^{-36} \quad (1.3)$$

pero la gravedad domina el Universo porque éste es neutro, y porque la fuerza fuerte es de muy corto alcance (limitada al núcleo atómico).

1.3 Constituyentes del Universo

(según los cosmólogos...)

i) Materia Bariónica (principalmente en galaxias):

Ya hacia 1920 se había establecido que las galaxias son objetos externos a la Vía Láctea.

- Se estima que hay $\sim 10^{11}$ galaxias en el Universo observable.
- Contienen $\sim 10^{11}$ estrellas c/u.
- Tamaño típico: 20 kpc (la Vía Láctea es mayor que el promedio).
- $\sim 10 - 20\%$ se encuentran aisladas. $\sim 10\%$ en **cúmulos** con más de 100 miembros; el resto, en **grupos**, con menos de 100 miembros. (El Grupo Local contiene ~ 30 galaxias, incluyendo la Vía Láctea, M31 y las nubes de Magallanes)
- Masa “luminosa” por cúmulo $\sim 10^{14} M_{\odot}$ ($\sim 1/2$ en estrellas, $\sim 1/2$ en gas caliente ($\geq 10^6 K$)).
- Los dos cúmulos más cercanos son el Cúmulo de Virgo, a ~ 15 Mpc, y el de Coma, a ~ 90 Mpc.
- Promediando sobre volúmenes ≥ 50 Mpc de diámetro, las galaxias están distribuidas más o menos uniformemente.
- Comparando con $R_U \sim 10^4$ Mpc, se ve que el Universo observable contiene $\sim 200^3$ volúmenes de este tamaño.
- La densidad media del Universo es

$$\rho_m \sim 5 \times 10^{-30} gcm^{-3} \quad (1.4)$$

$$\Rightarrow u_m \equiv \rho_m c^2 \approx 5 \times 10^{-9} ergcm^{-3} \quad (1.5)$$

$$\Rightarrow n_m \equiv \rho_m / m_p \sim 3 \times 10^{-7} cm^{-3} \quad (1.6)$$

donde n_m es la densidad numérica de nucleones (protones y neutrones), u_m es la densidad de energía correspondiente a esta densidad de materia, y m_p es la masa del protón.

\Rightarrow El número total de nucleones es $\sim \frac{4}{3} \pi R_U^3 n_m \sim 10^{77}$.

ii) Fotones de micro-ondas (CMBR, “Cosmic Microwave Background Radiation”):

En todas direcciones en el Universo se observa una señal en radio correspondiente a un cuerpo negro de 2.725 ± 0.001 K.

- $\lambda_{max} \sim 1\text{mm}$ ($\lambda_{max} = 0.29 \text{ K cm}/T$)

- Su densidad de energía es:

$$u_\gamma = \frac{\pi^2 (kT)^4}{15 (\hbar c)^3} \equiv aT^4, \quad (1.7)$$

donde $a = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3}\text{K}^{-4}$. Se encuentra entonces $u_\gamma(T = 2.73\text{K}) = 4.77 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3} \sim 10^{-4} u_m$. Esta densidad de energía corresponde a una densidad numérica de fotones

$$n_\gamma = \frac{2.4}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \approx 420 \text{ cm}^{-3} \quad (1.8)$$

(sec. 6.5, o consultar cualquier texto de mecánica cuántica, sobre la distribución de Bose-Einstein). De aquí:

$$\Rightarrow n_\gamma \sim 10^9 n_m, \quad N_\gamma = n_\gamma V_v \sim 10^{86},$$

es decir, que hay aproximadamente 10^9 fotones por cada barión en el Universo.

Finalmente, la entropía en la CMBR es: $S_\gamma \sim kN_\gamma$ (cap. 6).

iii) Neutrinos

- Como veremos, es de esperar que haya casi tantos neutrinos como fotones en el Universo, aunque por su bajísima sección eficaz de interacción, no se ha detectado este fondo de neutrinos.
- Si tienen masa, aunque sea muy pequeña ($\sim 30 \text{ eV}$), pueden dominar la densidad total de energía total en el Universo (y cerrarlo). Los límites superiores reportados actualmente para los tres tipos de neutrinos son
 - $m_{\nu_e} < 2.2 \text{ eV}$.
 - $m_{\nu_\mu} < 170 \text{ keV}$.
 - $m_{\nu_\tau} < 15.5 \text{ MeV}$.

(consultar, p. ejm., <http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino> para actualizaciones de estos datos.)

iv) Materia Oscura

- Hay una fuerte evidencia de que hay más materia que la materia “luminosa”.

- Esta evidencia está basada en argumentos dinámicos: se observa que el gas en galaxias tiene velocidades de rotación $v(R) \sim \text{cte.}$, lo que implica $M \propto R$ (**TAREA:** Demostrarlo), que es significativamente más que la masa observada

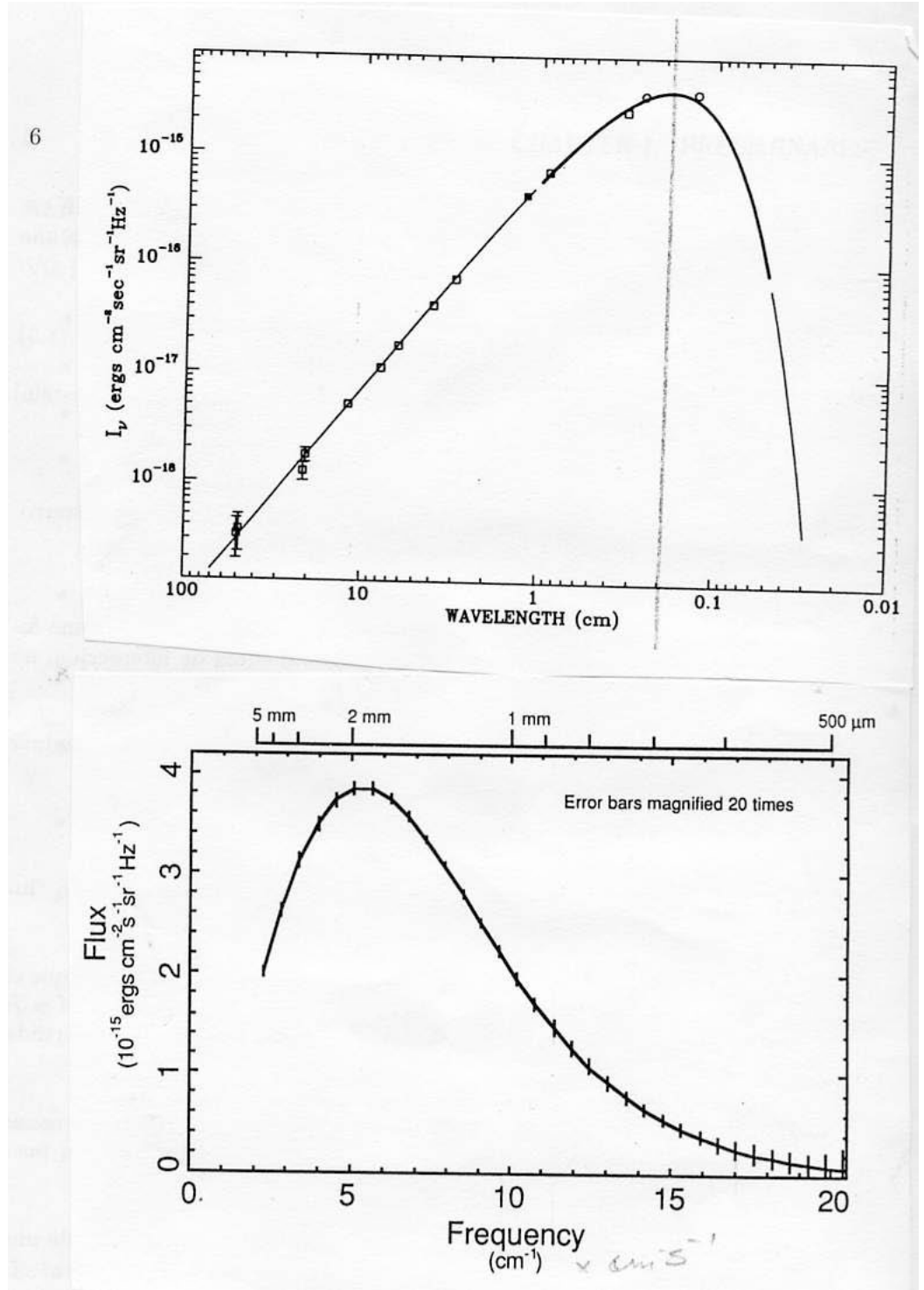


Figure 1.2: Espectro de la CMBR (Peebles, figs. 6.1 y 6.2).

en estrellas.

- Después de todo, no toda la materia tiene que brillar, e.g.: enanas cafés, estrellas de neutrones, hoyos negros,... (Los planetas no cuentan, pues tienen muy poca masa.

- Las galaxias en los cúmulos parecen estar sujetas al potencial de una masa 10 veces mayor que la observada en materia luminosa dentro de ellas.

La materia Oscura puede ser:

- Bariónica (MACHOs [“Massive Compact Halo Objects”]): enanas cafés, estrellas de neutrones, hoyos negros.
- Exótica: neutrinos, otras partículas exóticas (Weakly Interacting Massive Particles, o WIMPs)...
- Aunque hay otras opciones; p. ejm., la teoría MOND (“Modified Newtonian Dynamics”). Se basan en proponer modificaciones a la teoría de la gravitación, en lugar de añadir masa al Universo

Chapter 2

Evidencia Observacional

2.1 Distribución espacial uniforme de la materia

(Peebles sec. 3, p. 20)

En 1926, Hubble presentó una prueba observacional de que las galaxias están distribuidas uniformemente:

Suponiendo que todas las galaxias tienen la misma luminosidad L , el flujo observado de energía proveniente de una galaxia a distancia r es

$$f = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (2.1)$$

La suposición $L = \text{cte.}$ para todas las galaxias implica que todas las galaxias con $f > f_0$ están a $r < r_0$.

El volumen subtendido dentro de un estereoradián (sr) hasta r_0 es $V_0 = r_0^3/3$. Por lo tanto, si las galaxias están distribuidas uniformemente, con densidad numérica promedio n , el número de galaxias más brillantes que f_0 por estereoradián en el cielo es

$$N(> f_0) = nV_0 = \frac{nr_0^3}{3} = \frac{n}{3} \left(\frac{L}{4\pi f_0} \right)^{3/2} \quad (2.2)$$

por lo que, en general,

$$N(> f) \propto f^{-3/2}. \quad (2.3)$$

Ahora, las magnitudes aparente y absoluta se definen como:

$$\text{aparente} \quad m = -2.5 \log(f) + C_1 \quad (2.4)$$

$$\text{absoluta} \quad M = -2.5 \log(L) + C_2 \quad (2.5)$$

($\Delta m = 5 \Rightarrow f_2/f_1 = 100$). Las constantes son tales que $m(r = 10 \text{ pc}) = M$.

Si restamos (2.5) a (2.4) obtenemos que

$$\begin{aligned}
 m - M &= -2.5(\log f - \log L) + C_3 \\
 &= -2.5 \log \left(\frac{f}{L} \right) + C_3 \\
 &= -2.5 \log \left(\frac{1}{4\pi r^2} \right) + C_3 \\
 &= 5 \log(r) + \underbrace{2.5 \log(4\pi) + C_3}_{\equiv C_4}
 \end{aligned}$$

Ahora, $r = 10$ pc ($m = M$) $\Rightarrow r_{\text{Mpc}} = 10^{-5}$ (con r_{Mpc} la distancia expresada en Mpc). Por lo tanto,

$$0 = -(5)(5) + C_4 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 25,$$

de donde

$$m - M = 5 \log(r_{\text{Mpc}}) + 25. \quad \text{Módulo de distancia} \quad (2.6)$$

Ahora bien, de la ecuación (2.4),

$$-\frac{m - C_1}{2.5} = \log f \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow f \propto 10^{-0.4m} \quad (2.8)$$

y de (2.3)

$$N(> f) \propto f^{-3/2}. \quad (2.9)$$

Por lo tanto

$$N(< m) \propto (10^{-0.4m})^{-3/2} = 10^{0.6m}, \quad (2.10)$$

o, en forma diferencial,

$$\frac{dN}{dm} \propto 10^{0.6m}. \quad (2.11)$$

Lo interesante de este resultado es que en efecto, las galaxias parecen seguir la relación (2.10), como se muestra en la fig. 2.1.

2.2 Expansión del Universo

A reserva de que más adelante (sec. 5.2) discutiremos la dificultad para determinar de las distancias a objetos astronómicos, en 1929 Hubble presentó el fundamental resultado de que:

Las galaxias se alejan de nosotros con velocidades proporcionales a sus distancias:

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad \text{Ley de Hubble} \quad (2.12)$$

donde H_0 es la “Constante” de Hubble.

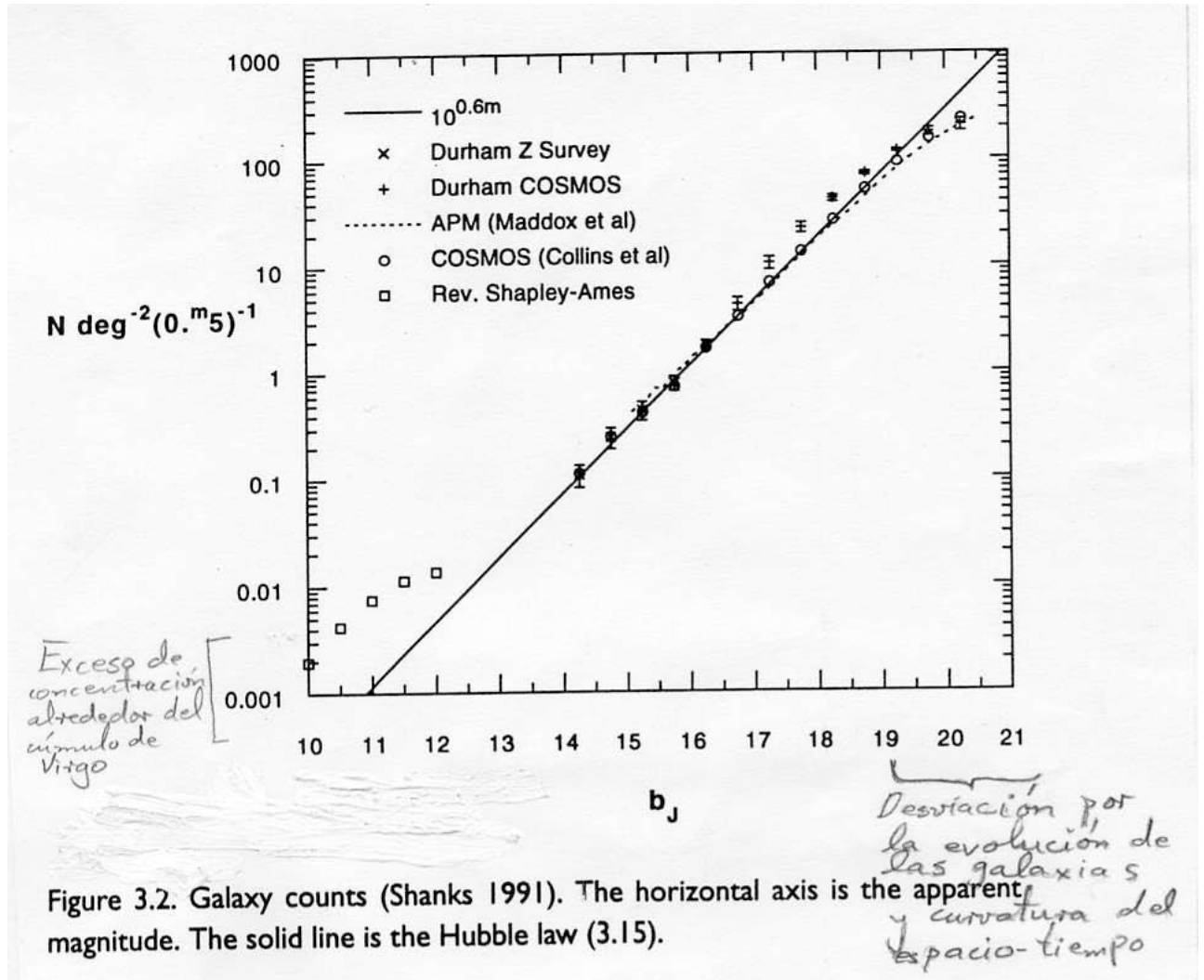


Figure 2.1: Conteos de galaxias. Figura 3.2 de Peebles.

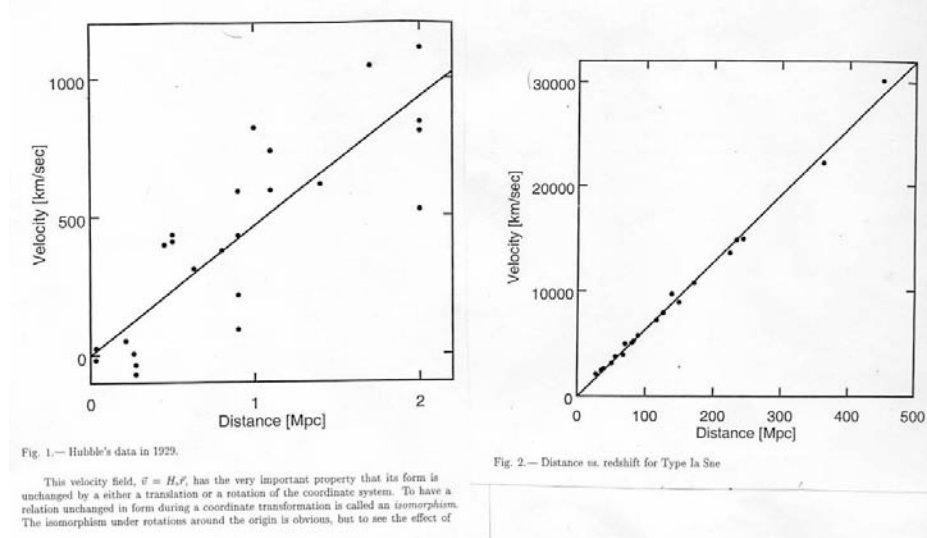


Figure 2.2: Ley de Hubble. La gráfica original de Hubble, y gráficas recientes para supernovas tipo Ia.

La ley de Hubble implica que el Universo está en expansión, y no sólo con respecto a nosotros: esta ley es “isomórfica”; es decir, es invariante frente a transformaciones de coordenadas (rotaciones y translaciones).

TAREA : Mostrar que la ley de Hubble es invariante frente a una rotación o una translación de coordenadas.

Se pueden presentar excepciones a la Ley de Hubble entre galaxias muy cercanas entre sí, para las cuales sus velocidades “peculiares” (o “propias”) son mayores que la velocidad de recesión dada por la Ley de Hubble. Pueden incluso presentarse casos de galaxias acercándose entre sí, como por ejemplo sucede con la Vía Láctea y M31 (la galaxia de Andrómeda). Nótese que el alejamiento entre todas las galaxias no implica que haya ningún “centro de expansión” (fig. 2.3).

La “constante” de Hubble en realidad depende del tiempo (por lo que actualmente se le conoce como “Parámetro de Hubble”):

- Tradicionalmente, se había pensado que H_0 disminuye, pues la auto-gravedad del Universo desacelera la expansión.
- Sin embargo, la evidencia observacional moderna sugiere que la expansión pasó de estar desacelerada a estar *acelerada* en épocas recientes de la historia del Universo, debido a la llamada “energía oscura” (sec. 4.4.4).



Figure 2.3: La expansión del Universo implica que todos los puntos se alejan unos de otros sin que exista un “centro” de expansión.

Chapter 3

Elementos de Relatividad

3.1 El principio cosmológico

(Peebles sec. 2; Peacock sec. 3.1, pp. 65-66)

Einstein, con su característica gran intuición (ya para la relatividad especial había propuesto la constancia de la velocidad de la luz, sin saber del experimento de Michelson-Morley) propuso el llamado *Principio Cosmológico* (PC) para encontrar una familia de soluciones a sus ecuaciones *previamente* a los resultados observacionales mencionados en el capítulo anterior.

Para formular el PC, se basó en *el principio de Mach* (1893), que rechazaba el carácter absoluto de las rotaciones y translaciones en la mecánica clásica, así como el papel “privilegiado” de los marcos inerciales. El **Principio de Mach**¹ es bastante vago, y se le encuentra enunciado de muy diversas maneras. Una forma conveniente de enunciarlo sería:

“Los marcos de referencia inerciales no son una propiedad absoluta del espacio, sino que están definidos por la distribución y movimiento de la materia en el Universo.”

Sin embargo, como veremos más adelante, en Relatividad General, los marcos de referencia inerciales son equivalentes a un espacio plano, y éste es solución de las ecuaciones de Einstein en *ausencia* de masa. En presencia de una densidad de materia, el espacio se curva, aunque sobre regiones suficientemente pequeñas el espacio es “localmente plano”, o “de Minkowsky”.

Entonces se da la siguiente paradoja: notamos primero que, si nos alejamos suficientemente de toda la materia del Universo, el espacio se haría asintóticamente plano, llegando así a la conclusión de que *lejos de toda distribución de materia, el espacio debería ser plano, y el marco de referencia, inercial*. Sin embargo, esto está en contradicción con el principio de Mach, según el cual no debería ser posible definir un marco de referencia en la ausencia de materia. Para resolverlo, Einstein postuló que

¹Una interesante y reciente discusión sobre este principio se encuentra en <http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0407078>.

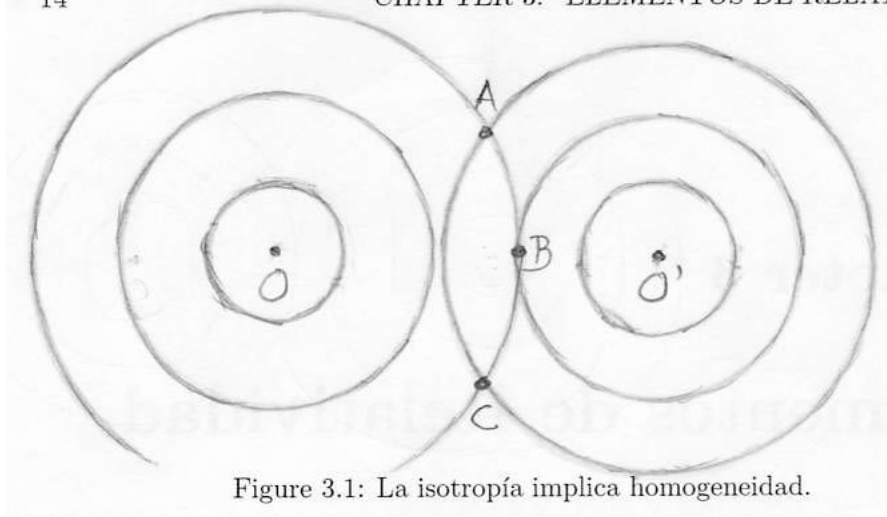


Figure 3.1: La isotropía implica homogeneidad.

Figure 3.1: La isotropía implica homogeneidad.

La distribución de materia en el Universo es homogénea a gran escala, de manera que no es posible alejarse arbitrariamente de toda la materia en el Universo.

Para evitar problemas similares con las rotaciones, el **Principio Cosmológico** ahora aceptado se generaliza a

- *La distribución de materia en el Universo es homogénea e isotrópica a gran escala.*

Nótese que la condición de isotropía para *todos* los observadores implica homogeneidad pero no al revés (homogeneidad no implica isotropía). Como se puede observar en la figura 3.1, por isotropía alrededor de O , la densidad ρ en tres puntos diferentes A , B y C satisface

$$\rho(A) = \rho(B) = \rho(C),$$

pero la distancia $r_{O'}$ medida desde O' satisface:

$$r_{O'}(B) \neq r_{O'}(A),$$

por lo que $\rho(A) = \rho(B) \Rightarrow$ homogeneidad.

3.2 La paradoja de Olbers

(Bernstein pp. 39-40; Peacock, pp. 353-355)

Mostraremos ahora que la suposición de homogeneidad sin la de un espacio finito llevaría a la **Paradoja de Olbers**: ¡el cielo nocturno debería tener una intensidad de brillo infinita!

En efecto, si el número de estrellas por unidad de volumen n es constante, entonces el número de estrellas en un cascarón esférico de radio r es:

$$dN(r) = 4\pi n r^2 dr. \quad (3.1)$$

Por otro lado, el flujo recibido de una estrella a una distancia r es

$$f(r) = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (3.2)$$

por lo tanto, el flujo recibido del cascarón esférico es:

$$f(r)dN(r) = nLdr, \quad (3.3)$$

y el flujo total recibido es:

$$F = \int f(r)dN(r) = nL \int_0^\infty dr \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Es decir, que si la densidad numérica de estrellas es uniforme y la línea de visión se extiende hasta el infinito, entonces el flujo radiativo observado en esa línea de visión aumenta sin límite, pues el número de estrellas intersectadas por ella también aumenta sin límite.

Como veremos, la resolución de la paradoja de Olbers está dada por dos factores:

a) Existe el horizonte: Aún si el Universo es infinito, si tuvo un origen (en la gran explosión, o “Big Bang”), los objetos más remotos de los cuales nos puede haber llegado luz están a una distancia $R_U = ct_U < \infty$, con t_U = edad del Universo. Si el Universo es finito, en principio su tamaño puede ser mayor o menor que R_U .

b) La CMBR: a final de cuentas, ésta es la “luz” de Olbers, aunque en frecuencias de radio, pues el agente emisor es gas ionizado muy uniformemente distribuido, no estrellas, y su flujo es finito, porque la región dentro de la cual se emite esta radiación es finita (ver sec. 6.11).

3.3 Repaso de Relatividad Especial

(Ludvigsen, caps. 2 y 3)

3.3.1 Fundamentos

La Teoría de la Relatividad Especial (RE) de Einstein está basada en el **Principio de Relatividad**: Las leyes de la física son invariantes frente a cambios de un marco de referencia inercial a otro. Es decir, todos los marcos de referencia inerciales son equivalentes.

En esta teoría, en lugar de usar una transformación Galileana ($\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t$), la transformación de un marco de referencia a otro que se mueve con velocidad uniforme v (en el eje x) se realiza a través de la llamada **transformación de Lorentz (TL)** (que tiene la propiedad de que la suma de velocidades no puede exceder la velocidad de la luz):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma(x - vt) \quad (3.5)$$

$$y' = y \quad (3.6)$$

$$z' = z \quad (3.7)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

y el **elemento de distancia** se define por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (3.10)$$

que es invariante frente a una TL. (**TAREA:** Demostrarlo). Nótese que es también común definirlo como $-ds^2$.

Para interpretar la TL y al elemento de distancia, consideremos el **espacio-tiempo de Minkowsky**:

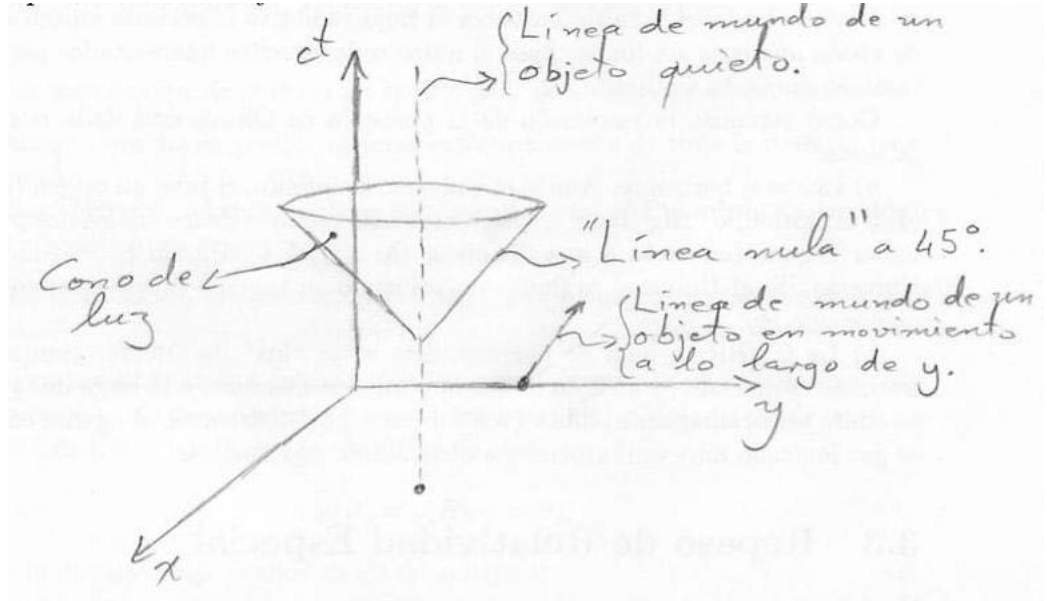


Figure 3.2: Espacio-tiempo de Minkowsky

- Para representarlo en papel es necesario omitir al menos una dimensión espacial.
- Con unidades adecuadas, $c = 1$ (de modo que las unidades de tiempo y distancia son, por ejemplo, el segundo y el segundo-luz), los rayos de luz describen líneas a 45° de la vertical, llamadas *líneas nulas* (“null lines”). Para ellas $ds^2 = 0$.
- Las historias de posiciones de los objetos se describen por las *líneas de mundo* (“world lines”).
- Las líneas de mundo de los objetos materiales necesariamente están a $\theta < 45^\circ$ de la vertical, y se dice que son *líneas temporaloides* (“time-like”).
- Líneas de mundo con $\theta > 45^\circ$ no corresponden al movimiento de ningún objeto material, y se llaman *líneas espacialoides* (“space-like”).
- A un punto en el espacio-tiempo se le llama *evento* (algo que ocurre en algún lugar en algún momento).
- Para líneas temporaloides, $ds^2 > 0$, y en este caso ds corresponde al *tiempo propio*: el tiempo medido en un marco de referencia en donde la velocidad es cero:

$$d\tau \equiv \frac{ds}{c} \quad \text{Tiempo propio} \quad (3.11)$$

En efecto:

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} \quad (3.12)$$

$$= dt^2 - \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} \right) \quad (3.13)$$

$$= \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) dt^2 \quad (3.14)$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dt^2 \equiv \frac{dt^2}{\gamma^2}. \quad (3.15)$$

Por lo tanto, si $v = 0$, $dt = d\tau$; si $v \neq 0$, $dt > d\tau$, donde dt es el tiempo medido desde el marco con velocidad v .

- Para líneas espacialoides, $ds^2 < 0$, y $|ds|$ es la distancia (“propia”) entre dos eventos medida por un observador para el cual los eventos ocurren simultáneamente.
- Eventos sobre líneas espacialoides están *causalmente desconectados*: no se pueden afectar mutuamente, pues están separados por una distancia mayor que la que la luz puede recorrer en el tiempo que los separa, y la información no se puede propagar a velocidades mayores que la de la luz.

3.3.2 Métrica

El elemento de distancia también se puede escribir como:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta, \quad (3.16)$$

con

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Métrica de Minkowsky.}$$

donde

$$\begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z, \end{aligned}$$

y se aplica la convención de Einstein: suma sobre índices repetidos.

Notas:

- x^α es un *cuadrivector*; $\eta_{\alpha\beta}$ es un tensor de rango 2.
- $\odot \text{ j } \odot$: Un tensor se puede escribir como una matriz, pero no es lo mismo. Una matriz es un arreglo de números. Un tensor es un objeto matemático que se define por sus propiedades de transformación de un marco de referencia a otro.

3.3.3 Sincronización

A pesar del carácter relativo de las mediciones, es posible sincronizar los relojes de observadores separados, gracias a que $c = \text{cte.}$ y la misma para todo observador. Se puede:

a) Medir la distancia entre el observador O_1 y O_2 (en reposo entre sí, lo que se puede verificar vía efecto Doppler):

- O_1 manda un fotón a O_2 en t_1 .
- O_2 lo recibe en t_2 y lo refleja a O_1 .
- O_1 lo recibe en t_3 .
- Entonces,

$$d = \frac{c(t_3 - t_1)}{2}. \quad (3.17)$$

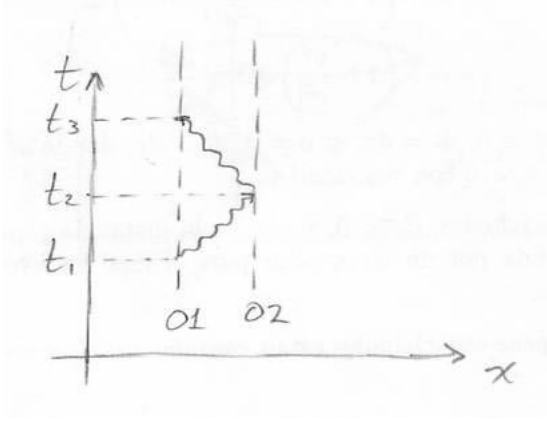


Figure 3.3: Sincronización de relojes entre observadores en reposo entre sí.

b) Se repite el experimento, pero ahora O_1 envía un fotón (o señal) en t_1 , con información de d y t_1 , e indicándole que ponga su reloj a las $t_2 = t_1 + d/c = t_1 + c(t_3 - t_1)/(2c)$, o sea

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, es posible hablar de una función de tiempo universal $t(p)$ tal que si $t(p) = t(q)$ para dos eventos p y q , entonces podemos decir que p y q son *síncronos*. **Nota:** La velocidad entre p y q debe ser cero (i.e., sus líneas de mundo deben ser paralelas).

3.3.4 Efecto Doppler

(Ludvigsen sec. 3.2)

Ahora nos interesa estudiar cómo un observador puede medir la velocidad de otro que se mueve con respecto a él. Supongamos entonces que O_1 y O_2 se mueven sobre líneas de mundo no paralelas, habiendo estado juntos a un cierto tiempo $t = 0$ (fig. 3.4).

Si al tiempo t después de que se cruzaron, O_2 emite un fotón hacia O_1 , éste lo recibe a un tiempo $t' = Kt > t$, donde K es un factor multiplicativo que deseamos determinar. K es mayor que 1 puesto que incluye el tiempo de viaje del fotón desde O_2 hasta O_1 . Además, por el Principio de Relatividad, lo mismo sucede con un fotón de O_1 a O_2 , por lo que, si O_1 rebota el fotón, O_2 lo recibe al tiempo K^2t . De la ec. (3.18), O_2 determina que el fotón salió de O_1 al tiempo

$$t_2 = \frac{t + K^2t}{2} = \frac{t}{2}(K^2 + 1), \quad (3.19)$$

y de la ec. (3.17), calcula la distancia a O_1 en ese momento como $d = ct(K^2 - 1)/2$. Por lo tanto, la velocidad que O_2 calcula para O_1 es la distancia total

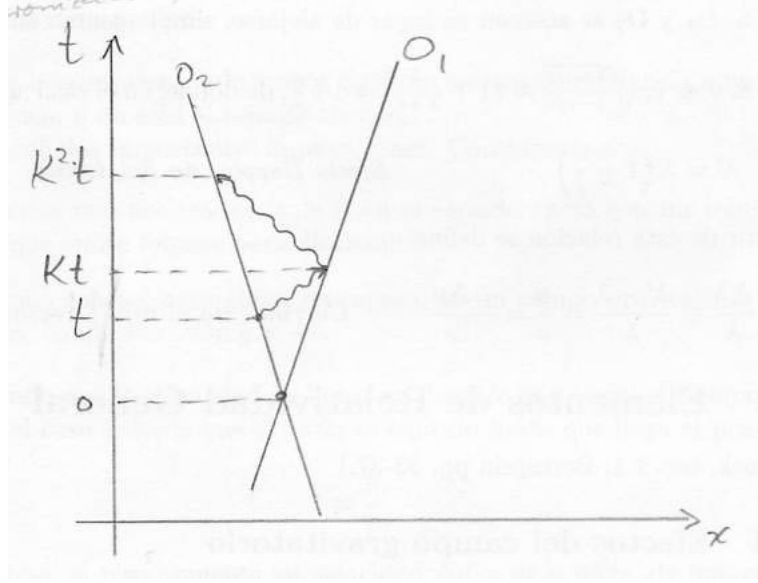


Figure 3.4: Efecto Doppler relativista.

recorrida (d) por O_1 desde que se cruzaron hasta t_2 , dividida por este tiempo:

$$v = \frac{d}{t_2} = \frac{c(K^2 - 1)}{K^2 + 1}, \quad (3.20)$$

de donde,

$$K = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \quad (3.21)$$

Ahora consideremos que O_2 emite una señal de longitud de onda $\lambda = ct$. Entonces, para O_1 , esta señal tiene $\lambda' = ct' = cKt$ (piénsese en pulsos separados por un tiempo t).

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad \text{Efecto Doppler Relativista.} \quad (3.22)$$

TAREA: Obtenerlo a partir de la Transformación de Lorentz.

Notas:

1) Si O_1 y O_2 se acercan en lugar de alejarse, simplemente cambia el signo de v .

2) Si $v \ll c$, $\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right)^2 \approx 1 + \frac{v}{c}$, de donde, en el caso no relativista:

$$\lambda' = \lambda \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \text{Efecto Doppler no Relativista.} \quad (3.23)$$

A partir de esta relación se define

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \equiv \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \quad \text{Corrimiento al rojo ("redshift").} \quad (3.24)$$

Nótese que esta definición se basa en la aproximación no relativista, por lo que la última igualdad sólo es válida en esta aproximación. En general, es posible tener corrimientos al rojo $z > 1$, pues de acuerdo con la ec. (3.22) $\Delta\lambda$ puede ser arbitrariamente mayor que λ , aunque v no puede ser mayor que c .

3.4 Elementos de Relatividad General

(Peacock, sec. 1.1; Bernstein pp. 33-37.)

3.4.1 Efectos del campo gravitatorio

La Relatividad General (RG) extiende la RE para incluir marcos acelerados. Einstein notó que, cuando se considera la Segunda Ley de Newton en el caso de la fuerza de gravedad, escribiendo

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}, \quad (3.25)$$

en realidad está implícita la fuertísima suposición de que la masa que aparece del lado izquierdo (la llamada *masa inercial* m_i , o tendencia de los cuerpos a mantener su estado de reposo o movimiento uniforme) es la misma que la que aparece del lado derecho, que podemos llamar *masa gravitatoria*, m_g , y que es la fuente del potencial gravitacional.

A priori, no hay razón para que esto sea así. De hecho, no sucede lo mismo entre la carga eléctrica y la masa. Pero para m_i y m_g , la igualdad está experimentalmente verificada hasta una parte en 10^{11} . (Primer experimento: Galileo)

Einstein decidió elevar esta suposición al nivel de principio, postulando el llamado *Principio de Equivalencia* (PE):

$$m_i \equiv m_g. \quad (3.26)$$

Hay dos versiones de este principio: el *Principio "Débil" de Equivalencia*:

- Un campo gravitatorio (uniforme) es equivalente a un marco de referencia acelerado,

que es una condición sobre el espacio-tiempo, requiriendo que sea el mismo tanto en marcos acelerados como en marcos dentro de un campo gravitatorio. La otra forma es el *Principio "Fuerte" de Equivalencia*

- Las leyes de la física son iguales en un marco en caída libre y uno en ausencia de gravedad,

que extiende la equivalencia de ambos tipos de marcos de referencia a todas las leyes de la física, y no sólo al espacio-tiempo.

El PE tiene dos importantes implicaciones. Consideremos:

1. Un cohete con aceleración $a > 0$ en el espacio vacío con un reloj en el techo que emite fotones periódicamente.
2. El mismo cohete, pero ahora en reposo, en un campo gravitatorio de un planeta, con aceleración $g = -a$.

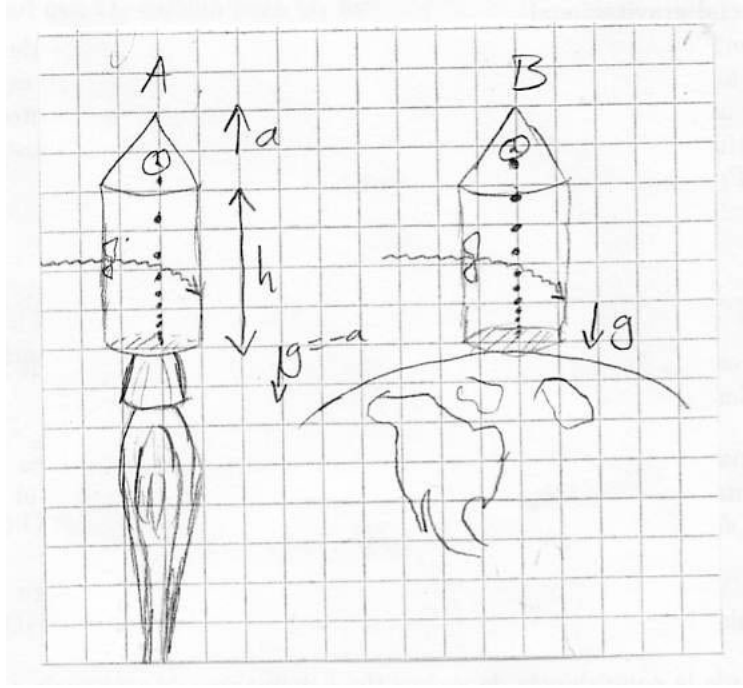


Figure 3.5: Equivalencia de marcos de referencia acelerados y marcos en un campo gravitatorio.

Recordando que la velocidad de la luz es siempre la misma, el tiempo transcurrido en el caso (1) desde que el fotón es emitido hasta que llega al piso es

$$t = \frac{h}{c} \quad (3.27)$$

En este tiempo, el piso cambia su velocidad por la cantidad $\Delta v = -at = -ah/c$. El signo “-” aparece porque el fotón y el cohete se mueven en direcciones opuestas. Entonces, un observador allí ve un cambio en la frecuencia:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{\Delta v}{c} = \frac{ah}{c^2} > 0. \quad (3.28)$$

Esto implica un *corrimiento al azul*, y que un observador en el piso de (1) concluye que el reloj del techo se adelanta (y viceversa). Por el principio de equivalencia, lo mismo sucede en el cohete (2), de donde tenemos:

Consecuencia 1: *Los relojes van más lento a mayor profundidad en un pozo de potencial gravitacional.*

Como $ah = \Delta\Phi$, donde $\Delta\Phi$ es la diferencia de potencial gravitacional entre los puntos de emisión y de recepción del fotón,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} = \frac{\Phi(x_{\text{em}}) - \Phi(x_{\text{rec}})}{c^2}, \quad (3.29)$$

Esto es:

$\frac{\Delta\nu}{\nu} > 0$ *entrando* a un pozo de potencial \Rightarrow Corrimiento al azul.

$\frac{\Delta\nu}{\nu} < 0$ *saliendo* de un pozo de potencial \Rightarrow Corrimiento al rojo.

Consideremos ahora un rayo de luz entrando por la ventana del cohete (1). En el marco del cohete, la trayectoria es parabólica. Por el PE, lo mismo sucede en (2).

Puesto que los fotones siguen la trayectoria más corta en el espacio-tiempo, la curvatura de su trayectoria implica que el espacio-tiempo mismo está curvado en (2), i.e.:

Consecuencia 2: *Los campos gravitatorios curvan el espacio-tiempo.*

3.4.2 La métrica de Robertson y Walker

(Peebles, sec. 4, pp. 58-62; Kolb & Turner sec. 2.1)

En un espacio plano se aplica la métrica de Minkowski (sec. 3.3.2). El tensor métrico de Minkowski correspondiente a un espacio plano tiene coeficientes constantes, independientes de las coordenadas. Sin embargo, cuando el espacio es curvo, la distancia entre dos puntos al transportarlos *paralelamente* depende de las coordenadas, y por lo tanto los elementos del tensor métrico se vuelven función de las coordenadas.

Las *geodésicas* son las líneas de mínima longitud entre un punto y otro, en el espacio en cuestión. En un espacio plano son rectas, pero en un espacio curvo son en general curvas (fig. 3.6). Por ejemplo, sobre la superficie de la Tierra, tenemos un ejemplo muy conocido de geodésicas. (¿Cuáles, los paralelos o los meridianos?)

Para un espacio curvo, la generalización de la ec. (3.16) es:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.30)$$

donde $g_{\alpha\beta}$ es la métrica. ¿Qué forma debe de tener? Veamos por casos:

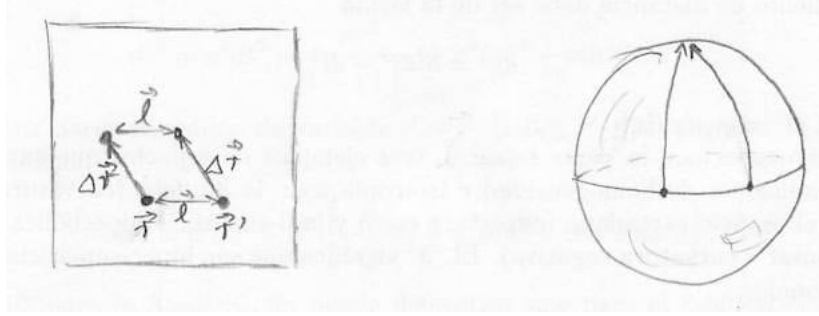


Figure 3.6: Transporte paralelo en un espacio plano y en un espacio curvo.

a) g_{00} : Consideremos dos eventos en la misma posición espacial ($dx^i = 0$).² En este caso:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 = c^2dt^2, \quad \Rightarrow g_{00} = 1. \quad (3.31)$$

b) De acuerdo con el principio cosmológico, la isotropía del Universo implica que:

$$g_{0i} = g_{i0} = 0. \quad (3.32)$$

(el intervalo de tiempo no puede depender de la dirección). Esto se puede ver tomando el producto escalar, definido por $x^\alpha \cdot y^\alpha \equiv g_{\beta\gamma}x^\beta y^\gamma$, de los vectores $x^\alpha = (cdt, 0)$ y $y^\alpha = (0, x^i)$, y exigiendo que su producto escalar sea cero, de modo que el intervalo temporal sea linealmente independiente del intervalo espacial.

Concluimos entonces que, en un Universo acorde con el principio cosmológico, el elemento de distancia debe ser de la forma

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2, \quad (3.33)$$

donde $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.

Con respecto a la parte espacial, hay tres tipos de espacios que satisfacen las condiciones de homogeneidad e isotropía (ver, p. ejm., Lawden, § 60): la 3-esfera (curvatura positiva); el espacio cartesiano (curvatura cero) y la 3-superficie hiperbólica (“silla de montar”; curvatura negativa). El “3” significa que son hiper-superficies tridimensionales.

Consideremos la 3-esfera (extensión natural de la superficie esférica bidimensional que conocemos) inmersa en un espacio de 4 dimensiones³. Está definida por

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

²Se acostumbra denotar con letras griegas los índices que corren sobre las cuatro componentes espacio-temporales (0,1,2,3), y con letras latinas los índices que corren sólo sobre las tres componentes espaciales (1,2,3), aunque en algunos textos la convención se invierte.

³Este espacio 4-dimensional **no** es el espacio-tiempo; es un espacio ficticio inventado para calcular la métrica.

con $R = cte$, y w una cuarta coordenada ficticia w . Se puede despejar w^2 para obtener

$$w^2 = R^2 - r^2, \quad (3.34)$$

con

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Diferenciando (3.34):

$$2w dw = -2r dr, \quad \text{o} \quad dw = -\frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (3.35)$$

En el espacio 4-dimensional que contiene a la esfera, el elemento de longitud es:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2. \quad (3.36)$$

Sustituyendo (3.35) en (3.36), tenemos:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{r^2 dr^2}{(R^2 - r^2)}. \quad (3.37)$$

Cambiando a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

la ec. (3.37) queda como:

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{r^2 dr^2}{(R^2 - r^2)}. \quad (3.38)$$

Por lo que el elemento de distancia en el espacio-tiempo para un espacio esférico queda:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.39)$$

Conviene hacer el cambio de variable $r' = r/R$ ($0 \leq r' \leq 1$) y quitar la prima, para obtener

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right].$$

Esto fue para la 3-esfera. Se puede demostrar que para el 3-hiperboloide, el primer término entre corchetes queda (se necesitan 4 dimensiones ficticias extra)

$$\frac{dr^2}{1 + r^2},$$

mientras que para el espacio plano, este término claramente se reduce a dr^2 . Entonces, en general, podemos escribir

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad \text{Métrica de Robertson-Walker,} \quad (3.40)$$

con

$$k = \begin{cases} 1 & \text{curvatura positiva (espacio esférico, cerrado)} \\ 0 & \text{curvatura cero (espacio plano,abierto)} \\ -1 & \text{curvatura negativa (espacio hiperbólico, abierto)} \end{cases}$$

Por “cerrado” se entiende un espacio que tiene una extensión finita, aunque no tenga “orillas”, justo como la superficie de una esfera. Por “abierto”, en cambio, se entiende un espacio con extensión infinita, como un plano o un hiperboloide.

Otras formas útiles de la métrica de RW se obtienen definiendo:

a)

$$r \equiv S_k(\chi) = \begin{cases} \chi & k = 0 \\ \sin \chi & k = 1 \\ \sinh \chi & k = -1. \end{cases}$$

(Esto es una definición para χ y para $S_k(\chi)$.)

\Rightarrow

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (3.41)$$

TAREA: Verificar.

b) El *tiempo conforme* η , tal que $d\eta = c dt/R$, quedando

$$ds^2 = R^2 [d\eta^2 - d\chi^2 - S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (3.42)$$

Notas:

a) R es el radio de la esfera en el espacio ficticio de 4 dimensiones. Dado que dicho espacio es ficticio, R es sólo un factor de escala, aunque en el caso del Universo cerrado, se acostumbra hablar de él como el “radio del Universo”.

b) El caso hiperbólico se obtiene haciendo $R \rightarrow iR$ en (3.39).

c) Más adelante veremos que el Universo está en expansión. Ella se describe por $R(t)$, con las demás coordenadas sin cambio. $R(t)$ será el *factor de escala*, y de las demás coordenadas se dice que son *comóviles*, incrementándose junto con R .

3.4.3 Notación tensorial y definiciones

(Lawden, secs. 8 y 31)

Caso Euclidiano

Consideremos dos sistemas S y S' , de manera que en general las coordenadas en uno y otro sistemas están relacionadas por

$$x'_\alpha = A_{\alpha\beta}x_\beta + b_\alpha \quad (3.43)$$

(esto es, el sistema primado se obtiene a partir de una rotación más una translación del sistema no primado). Si los coeficientes constantes $A_{\alpha\beta}$ satisfacen la condición de que la distancia entre dos puntos x_α y y_α es invariante de S a S' , es decir, que

$$(x'_\alpha - y'_\alpha)^2 = (x_\alpha - y_\alpha)^2,$$

se dice que la transformación es ortogonal. (**TAREA:** Encontrar la propiedad que debe satisfacer $A_{\alpha\beta}$ para que se cumpla esta propiedad.)

De la ec. (3.43) es claro entonces que el *desplazamiento* $z_\alpha = x_\alpha - y_\alpha$ satisface

$$z'_\alpha = A_{\alpha\beta}z_\beta$$

Se llama *vector* a todo conjunto de N números B_α que se transforman igual que el vector de desplazamiento; es decir,

$$B'_\alpha = A_{\alpha\beta}B_\beta,$$

en donde N es el número de dimensiones del espacio. Asimismo, se llama *tensor de segundo rango* a todo conjunto de N^2 números $C_{\alpha\beta}$ que se transforman como

$$C'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma}A_{\beta\delta}C_{\gamma\delta},$$

y así sucesivamente para rangos superiores.

Notas:

1. Los coeficientes $A_{\alpha\beta}$ *definen* la transformación de S a S' .
2. Se puede *demostrar* que la $g_{\alpha\beta}$ de Minkowski es un tensor (porque $dx_\alpha dx_\beta$ es tensor y ds^2 es invariante), pero no lo es *a priori*.
3. La transformación misma $A_{\alpha\beta}$ no es necesariamente un tensor.
4. En el caso Euclidiano sólo hay un tipo de vectores, y por lo tanto se utilizan sólo subíndices (comparar con la siguiente sección).

Caso no Euclidiano

Cuando el espacio no es Euclidiano, la regla de transformación de S a S' depende de las coordenadas mismas en S : $x'^\alpha = x'^\alpha(x^\beta)$. Entonces, aparecen dos tipos de vectores, que se denotan por subíndices y superíndices. Consideremos primero

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta.$$

El vector dx^α constituye el prototipo del *vector contravariante*, que se transforma con $\partial x'^\alpha / \partial x^\beta$, y se denota con superíndices: B^α .

Consideremos ahora una función $V(x^\alpha)$, y su gradiente $\partial V / \partial x^\alpha$. Si V es sólo función de la posición, se tiene que su valor numérico satisface $V(x'^\alpha) = V(x^\alpha)$,⁴ porque las coordenadas son sólo “etiquetas”, pero la posición en el espacio es la misma. Entonces, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial V}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial V}{\partial x^\beta}.$$

El gradiente constituye el prototipo del *vector covariante*, que se transforma con $\partial x^\beta / \partial x'^\alpha$, y se denota con subíndices: B_α .

En el caso no Euclidiano, los tensores pueden ser covariantes, contravariantes, o *mixtos*. Estos últimos tienen propiedades tanto covariantes como contravariantes, indicadas por la posición de sus índices.

3.4.4 Las ecuaciones del campo de Einstein

(Peacock cap. 1)

Estas ecuaciones son las ecuaciones fundamentales de la RG, y describen la evolución del Universo. Su obtención involucra usar toda la maquinaria de la RG, y además no puede hacerse de manera rigurosa, sino sólo a través de analogías relativistas con la gravitación de Newton, que aquí sólo esbozaremos de manera superficial.

Como hemos visto, una consecuencia fundamental del principio de equivalencia (sec. 3.4.1) es que la masa curva el espacio-tiempo. Como además, de la RE, sabemos que la materia y la energía son equivalentes, la energía también lo curva.

La curvatura del espacio se caracteriza a través de las geodésicas (ver sec. 3.4.2), que se obtienen minimizando la longitud de las trayectorias $\int \sqrt{ds^2}$, para obtener

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad \text{Ecuación de las geodésicas} \quad (3.44)$$

donde

$$\dot{x}^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad d\tau = \frac{ds}{c},$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

es el *símbolo de Christoffel*, y ξ^ν es un sistema de coordenadas de Minkowski.

(TAREA: Obtener la ecuación (3.44) suponiendo que en el sistema de Minkowski la ecuación de movimiento uniforme es

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0,$$

⁴Sin embargo, las formas funcionales de $V(x'^\alpha)$ y de $V(x^\alpha)$ son en general diferentes.

con $c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$, y que las coordenadas curvilíneas x^μ son funciones de las de Minkowski:

$$x^\mu = x^\mu(\xi^\nu).$$

Demostrar además que

$$c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

con

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}.$$

La ecuación de la geodésica en RG juega el papel de la 2ª ley de Newton en mecánica clásica. Esto se puede ver porque los símbolos de Christoffel también se pueden escribir como

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right),$$

donde $g^{\alpha\nu}$ es la matriz inversa de $g_{\alpha\nu}$. Entonces, homologando al tensor métrico de la RG con el potencial gravitacional de la mecánica clásica, vemos que la ecuación de la geodésica relaciona primeras derivadas espaciales de $g_{\alpha\nu}$ con segundas derivadas temporales de la posición, análogamente a la 2ª Ley de Newton

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi$$

en Mecánica Clásica. La complicación adicional viene de que la derivada de un vector no es un vector en RG. Es necesario utilizar vectores, que siguen las leyes de transformación correctas de un marco a otro, a fin de que estas leyes físicas se satisfagan en todos los marcos de referencia, de acuerdo al principio fuerte de equivalencia. Entonces es necesario introducir las llamadas *derivadas covariantes*, que involucran a los símbolos de Christoffel.

Es necesario complementar lo anterior con el equivalente de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho,$$

que en Mecánica Clásica estipula que la fuente del potencial gravitacional es la densidad de masa.

Necesitamos entonces, por un lado, una cantidad que contenga segundas derivadas espaciales de $g_{\alpha\beta}$ (i.e., primeras derivadas de $\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$) y por otro una cantidad representativa de la distribución de masa-energía. Aplicando de nuevo el principio fuerte de equivalencia, se exige que las cantidades a utilizar deben ser tensores, pues éstos se caracterizan por dicha invariancia.

Sin demostración, enunciaremos que el tensor representativo de la distribución de materia en un fluido es el

$$T_{\alpha\beta} = (\rho c^2 + P)u_\alpha u_\beta - P g_{\alpha\beta} \quad \text{Tensor de Energía-Momento,} \quad (3.45)$$

donde $u_\alpha = \gamma(1, -\mathbf{v}/c)$ es el cuadvivector velocidad y P es la presión. Por ejemplo, en un marco de Minkowski en reposo ($g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$),

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Análogamente, el tensor que involucra las segundas derivadas espaciales de $g_{\alpha\beta}$ es

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R,$$

donde $R_{\alpha\beta}$ es el llamado *tensor de Ricci*, y R es el *escalar de Ricci*. (No confundir con el factor de escala.)

Así pues, se llega al equivalente de la ecuación de Poisson, que son las

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad \text{Ecuaciones del campo de Einstein,} \quad (3.47)$$

en donde Einstein añadió el término en Λ para permitir una solución en equilibrio. Λ es la *constante cosmológica*, cuyo significado e implicaciones discutiremos ampliamente.

Cabe remarcar que cuando Einstein formuló sus ecuaciones del campo, no existía evidencia de la expansión del Universo. Cuando ésta se descubrió, Einstein llamó a la constante cosmológica (CC), “su más craso error”. Curiosamente, hoy la CC ha sido revivida para explicar la aparente aceleración de la expansión. También está íntimamente ligada a la “inflación” (cap. 11).

Chapter 4

La Expansión del Universo

4.1 La ecuación de Friedmann: Necesidad de la expansión del Universo

(Peacock, sec. 3.2; Peebles, sec. 4, pp. 62-68)

La famosa solución de Friedmann, que describe la evolución del factor de escala R del Universo como función del tiempo, se obtiene formalmente sustituyendo la métrica de RW en las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, dicha ecuación se puede obtener también a través de argumentos Newtonianos, como sigue. Consideremos una esfera de radio físico (o *propio*) Rr , donde r es el *radio comóvil*, que no depende del tiempo. Así, la separación comóvil entre dos puntos en el espacio *no* cambia a causa de la expansión del Universo.

Supongamos además que la materia está distribuida homogéneamente en el espacio, de modo que un punto sobre la superficie de la esfera está sujeto sólo a la acción gravitacional de la masa contenida dentro de ella ($M(Rr)$; el equivalente relativista de este conocido resultado Newtoniano es el *teorema de Birkhoff*). Entonces, la conservación de la energía por unidad de masa se expresa como:

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\dot{R}r)^2}_{\text{energía cinética}} - \underbrace{\frac{GM(Rr)}{Rr}}_{\text{energía potencial}} = \underbrace{E_{\text{tot.}}}_{\text{energía total}} = \text{cte.} \quad (4.1)$$

Tomando $M(Rr) = \frac{4}{3}\pi\rho(Rr)^3$, y notando que la obtención relativista formal también permite calcular E_{tot} , queda:

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_T R^2 = -kc^2 \quad \text{Ecuación de Friedmann (EF),} \quad (4.2)$$

donde k es el factor geométrico de la métrica de RW (ec. 3.40).

Notas:

1. En la ecuación (4.2), ρ_T incluye todas las posibles contribuciones a la densidad de energía del Universo: masa, radiación y Λ (también llamada “energía del vacío”):

$$\rho_T = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (4.3)$$

donde ρ_Λ se define abajo (ec. [4.6]). Alternativamente, se puede escribir la contribución del vacío explícitamente (de nuevo usando [4.6]):

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3} R^2 (\rho_m + \rho_r) - \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} = -kc^2. \quad (4.4)$$

2. Una forma alternativa de la EF frecuentemente utilizada se obtiene derivándola con respecto al tiempo (por lo que la llamaremos la “forma \ddot{R} ”):

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_T + \frac{3P_T}{c^2} \right). \quad (4.5)$$

TAREA: Obtenerla, usando que

$$\rho(t) = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3(t)},$$

con $M = cte$, y que la variación de R es adiabática, de manera que la energía interna $U = \rho c^2 V$ satisface $dU = -PdV$, en donde P_T es la presión total (mismas contribuciones que ρ_T).

De la ec. (4.5) notamos que $\ddot{R} \neq 0$ si $\rho_T + 3P_T/c^2 \neq 0$, independientemente del valor de \dot{R} . Esto ocurre para todas las formas de energía en las que la presión tiene el mismo signo que la densidad; en particular, para la materia y la radiación. Es decir, en este caso el factor de escala no puede permanecer constante aún si instantáneamente $\dot{R} = 0$. En este caso, *el Universo está acelerado*, ya sea que se esté *expandiendo* (con $\dot{R} > 0$) o *contrayendo* (con $\dot{R} < 0$), y cabe la posibilidad de que pase de uno de estos estados al otro.¹ Sin embargo, Einstein, a falta de evidencia de la expansión en su momento, introdujo el término en Λ en lugar de predecir la expansión del Universo.

3. Comparando los términos $\Lambda g_{\alpha\beta}$ y $8\pi G T_{\alpha\beta}/c^4$ de la ecuación de Einstein, se encuentra que Λ es equivalente a un sistema (en realidad, un fluido) con densidad y presión dados por:

$$\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}, \quad P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (4.6)$$

¹Puede hacerse la analogía con una piedra lanzada hacia arriba: siempre está acelerada hacia la Tierra, y está o subiendo o bajando, pero *nunca* se queda suspendida en el aire, a menos que algo la detenga (Λ). Además, como veremos abajo, el Universo puede seguir expandiéndose para siempre, o volver a contraerse, en analogía con el hecho de que la piedra puede o no regresar a la Tierra dependiendo de si la velocidad con que se lanza es mayor o menor que la velocidad de escape, v_{esc} .

4.1. LA ECUACIÓN DE FRIEDMANN: NECESIDAD DE LA EXPANSIÓN DEL UNIVERSO 35

TAREA: Demostrarlo. Sugerencias: considérese la contribución de Λ al lado derecho de la ec. de Einstein, ec. (3.47), en un marco de Minkowski en reposo, y calcúlese tanto la componente $(0,0)$ como la traza de estos términos.

En presencia del término cosmológico, es fácil ver de las ecs. (4.5) y (4.6) que en este caso sí se puede tener un Universo en equilibrio (es decir, con $\dot{R} = 0$) si

$$\Lambda_{\text{eq}} = \frac{4\pi G}{c^2}(\rho_m + 2\rho_r), \quad (4.7)$$

en donde hemos despreciado la presión de la materia. Sin embargo, este equilibrio es inestable (punto (5) abajo).

4. De la ecuación de Friedmann (4.2) se puede ver que si

$$\rho_T = \rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \equiv \frac{3}{8\pi G} H^2, \quad (4.8)$$

en donde H es el *parámetro de Hubble*, entonces, $k = 0$. Es decir, para $\rho = \rho_c$, el Universo es plano. Equivalentemente, $E_{\text{tot}} = 0$.

Por otro lado:

$$\rho_T > \rho_c \Rightarrow k = 1 \Rightarrow E_{\text{tot}} < 0 \Rightarrow \text{Universo cerrado},$$

$$\rho_T < \rho_c \Rightarrow k = -1 \Rightarrow E_{\text{tot}} > 0 \Rightarrow \text{Universo abierto}.$$

Si $E_{\text{tot}} \geq 0$, la expansión continúa para siempre (equivalente a una piedra lanzada con $v > v_{\text{esc}}$). Si $E_{\text{tot}} < 0$, la expansión finalmente acabará, y habrá un período de contracción en el futuro.

5. El equilibrio proporcionado por Λ es inestable. Para verlo, escribamos la ecuación (4.5) introduciendo el valor de equilibrio de Λ como $\Lambda_{\text{eq}} = 8\pi G\rho_\Lambda/c^2$, con $\rho_\Lambda = \rho_{m,0}/2 + \rho_{r,0}$, y tomando un valor de la densidad total $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ ligeramente diferente del valor de equilibrio $\rho_0 = \rho_{m,0} + \rho_{r,0} + \rho_\Lambda$, para estudiar la estabilidad alrededor de él. Se obtiene (de nuevo despreciando la presión de la materia):

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right), \quad (4.9)$$

en donde $\rho \propto 1/V \propto R^{-3}$, con $\rho = \rho(t)$ y $R = R(t)$. Entonces

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - 1 \right]. \quad (4.10)$$

Suponiendo que la perturbación es pequeña: $R = (1 + \epsilon)R_0$, $\epsilon \ll 1$, tenemos

$$\ddot{\epsilon} \approx 4\pi G\rho_0\epsilon, \quad (\textbf{TAREA: Verificar}) \quad (4.11)$$

con solución

$$\epsilon_{\pm} \propto e^{\pm \sqrt{4\pi G \rho} t}, \quad (4.12)$$

de manera que el modo “+” crece exponencialmente en el tiempo, demostrando la inestabilidad. Así pues, el modelo estático sigue siendo poco factible, a pesar de Λ .

6. A los modelos del Universo basados en la EF (que se obtiene sustituyendo la métrica de RW en la ecuación de Einstein) se les conoce como *modelos de Friedmann-Robertson-Walker* (FRW).
7. Una vez aceptado el hecho de que el Universo está en expansión, una extrapolación hacia el pasado sugiere que anteriormente el Universo era más denso y estaba más contraído, hasta un cierto momento en que la densidad (y también la temperatura) deberían de divergir: **El Big Bang** (una singularidad).

4.2 Los parámetros Cosmológicos

(Peacock, sec. 3.2, pp. 74-75)

Es conveniente definir varios parámetros adimensionales:

a) *El parámetro de densidad*

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho}{3} \left(\frac{R}{\dot{R}} \right)^2 \equiv \frac{8\pi G \rho}{3H^2}, \quad (4.13)$$

donde

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R}, \quad (4.14)$$

es el *Parámetro de Hubble* (recordar que $v = Hr$ en la ley de Hubble). El parámetro Ω se puede definir para cada una de las densidades que contribuyen a la densidad total del Universo: materia, radiación y Λ , denotándose sus respectivas contribuciones como Ω_m , Ω_r y Ω_Λ .

b) “*h chica*” (“little h”)

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}}, \quad (4.15)$$

donde H_0 es el valor presente del parámetro de Hubble.

En términos de estas variables, la densidad actual del Universo (ver sec. 1.3) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1.88 \times 10^{-29} \Omega h^2 \text{g cm}^{-3} \\ &= 1.125 \times 10^{-5} \Omega h^2 \text{protones cm}^{-3} \end{aligned}$$

$$= 2.78 \times 10^{11} \Omega h^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3}. \quad (4.16)$$

c) El *parámetro de desaceleración*

$$q \equiv -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \quad (4.17)$$

d) El *factor de escala normalizado* a su valor actual R_0 :

$$a \equiv \frac{R}{R_0}. \quad (4.18)$$

En términos de Ω y H , la EF (4.2) se puede reescribir como

$$\frac{kc^2}{H^2 R^2} = \Omega_T - 1, \quad (4.19)$$

en donde $\Omega_T \equiv \rho_T/\rho_c \equiv \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$ (ver ec. 4.3).

En términos de q , la forma \ddot{R} de la EF (ec. 4.5) se puede reescribir como:

$$q = \frac{4\pi G}{3H^2} \left(\rho_T + \frac{3P_T}{c^2} \right). \quad (4.20)$$

Para escribir esta ecuación explícitamente en términos de las diferentes contribuciones a ρ_T (ec. 4.3) y P_T , notamos que en la mayoría de los casos la materia es no relativista, por lo que $3P_m/c^2 \ll \rho_m$. Para la radiación, recordemos que

$$P_r = \frac{1}{3}u_r, \quad (4.21)$$

donde u_r es la densidad de energía radiativa, que satisface $u_r = \rho_r c^2$. Finalmente, usando la ec. (4.6) para P_Λ , tenemos que

$$\rho_T + \frac{3P_T}{c^2} = \rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda, \quad (4.22)$$

por lo que (4.20) se reescribe:

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_r - \Omega_\Lambda. \quad (4.23)$$

De la ec. (4.19), notamos que, *para un Universo plano* ($k = 0$), se debe tener $\Omega_T = 1$, de donde

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r, \quad (\text{Universo plano}) \quad (4.24)$$

y, por lo tanto, (4.23) también se reescribe como

$$q = \frac{3}{2}\Omega_m + 2\Omega_r - 1, \quad \text{Forma } \ddot{R} \text{ para un Universo plano.} \quad (4.25)$$

Por último, en términos de a , H se escribe como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.26)$$

4.3 Escalamientos con la expansión

(Peebles pp. 94-96.)

Según el Universo se expande, una serie de cantidades físicas varía en forma bien definida. Aquí las describiremos.

Un concepto importante en esta discusión es el de “observador comóvil” (o “fundamental”): aquél que se mueve junto con la expansión del Universo y en reposo con el promedio de la materia en sus alrededores.

4.3.1 El corrimiento cosmológico al rojo

Consideremos una señal luminosa que al tiempo t pasa junto a un observador comóvil O_1 , el cual le mide una longitud de onda $\lambda(t)$. Poco después, en $t + \Delta t$, pasa junto a otro observador O_2 , que mide $\lambda(t + \Delta t)$. Por la ley de Hubble, O_2 se mueve respecto de O_1 con velocidad

$$v = Hl = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) c\Delta t,$$

donde l es la distancia entre O_1 y O_2 . Si los dos observadores están suficientemente cercanos, $v \ll c$, y se aplica la expresión no relativista del efecto Doppler:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \Delta t,$$

por lo tanto,

$$\lambda(t + \Delta t) = (1 + \Delta\lambda)\lambda(t) = \left[1 + \frac{\dot{a}}{a}\Delta t\right] \lambda(t).$$

Expandiendo el lado izquierdo a primer orden:

$$\lambda(t) + \dot{\lambda}\Delta t = \lambda(t) + \lambda(t)\frac{\dot{a}}{a}\Delta t,$$

por lo tanto,

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.27)$$

lo que implica:

$$\lambda(t) \propto a(t), \quad (4.28)$$

y

$$\nu(t) \propto \frac{1}{a(t)}, \quad (4.29)$$

o

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a_o}{a_e} \equiv 1 + z \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{1}{1 + z}, \quad a_0 = 1, \quad (4.30)$$

donde z se definió en la ec. (3.24), y los subíndices “o” y “e” significan “en la posición del observador” y “en la posición donde el fotón es emitido”. El subíndice “0” denota el tiempo presente.

4.3.2 Escalamiento de cantidades físicas

(Peacock, pp. 75-77; Kolb & Turner sec. 2.2.)

Ya hemos mencionado que la densidad de materia escala simplemente como el inverso del volumen (por ejemplo, ver la obtención de la ec. 4.5). Entonces:

$$\rho_m(t) \propto \frac{1}{a^3(t)} \propto (1+z)^3. \quad (4.31)$$

Por otro lado, la densidad de energía radiativa escala como ν/V , por lo que

$$\rho_r(t) \propto \frac{1}{a^4(t)} \propto (1+z)^4. \quad (4.32)$$

(Nótese que esto implica que ¡no hay conservación global de energía, pues la densidad total de energía disminuye más rápidamente que el inverso del volumen del Universo! Ver, p. ejm., Peebles, p. 139.)

Finalmente, se puede demostrar que el momento tri-dimensional $p = mv$ escala como:

$$p \propto v \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (4.33)$$

TAREA: Demostrarlo en el caso de velocidades no relativistas.

Conociendo estos escalamientos, es posible reescribir de nuevo la EF (formas \dot{R} y \ddot{R}) en términos de los valores actuales de H, Ω y ρ como sigue. Nótese que en Cosmología se acostumbra mirar las cosas desde el presente hacia el pasado, tomando $z = 0$ hoy. Al tiempo medido desde el presente hacia el pasado se le llama el *lookback time*.

Denotemos los valores actuales con subíndices “0”. Notamos entonces que:

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0}[1+z(t)]^3 \Rightarrow \Omega_m = \Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \quad (4.34)$$

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0}[1+z(t)]^4 \Rightarrow \Omega_r = \Omega_{r,0}(1+z)^4 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \quad (4.35)$$

$$\rho_\Lambda = \text{cte}, \text{ (ver ec.(3.36))} \Rightarrow \Omega_\Lambda = \text{cte.} \left(\frac{H_0}{H}\right)^2, \quad (4.36)$$

en donde en las igualdades de la derecha se ha usado la definición de la densidad crítica, ec. (4.13), notando que ésta depende del tiempo.

Tomando la EF dada por la ec. (4.19) y expandiendo las contribuciones:

$$\frac{kc^2}{H^2 R^2} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1,$$

Definiendo además el *parámetro de curvatura* como

$$\Omega_R \equiv \frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2},$$

obtenemos:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_R(1+z)^2 + \Omega_\Lambda], \quad (4.37)$$

Esta es una ecuación muy importante que relaciona el valor del parámetro de Hubble en el pasado con el corrimiento al rojo z y los valores actuales de los varios parámetros de densidad.

Notando que $\Omega_R = \Omega_{T,0} - 1$, también podemos escribir

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{T,0})(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]. \quad (4.38)$$

o bien

$$\dot{a}^2(t) = H_0^2 [\Omega_{r,0}a^{-2} + \Omega_{m,0}a^{-1} + (1 - \Omega_{T,0}) + \Omega_\Lambda a^2]. \quad (4.39)$$

Esto también se puede expresar en términos de la *separación comóvil* r entre dos eventos. Esta separación se obtiene de la métrica (en su forma dada por la ec. [3.41]), notando que los fotones que viajan de un evento al otro (y que son de los que obtenemos la información de la distancia a través de su z) se mueven sobre trayectorias con $ds^2 = 0$. Renombrando $\chi \rightarrow r$ y suponiendo una trayectoria puramente radial,

$$R dr = -c dt = -c \frac{dR}{\dot{R}} = -c \frac{dR}{RH}. \quad (4.40)$$

(El signo “−” se introduce porque aquí el tiempo está medido desde el presente hacia el pasado.)

Además, combinando las ecs. (4.18) y (4.30) y diferenciando,

$$R = \frac{R_0}{1+z} \Rightarrow dR = -(1+z)^{-2} R_0 dz = -\frac{R^2}{R_0^2} R_0 dz.$$

Por lo tanto, sustituyendo en (4.40):

$$Rdr = \frac{cR}{HR_0} dz,$$

y, utilizando la ec. (4.38),

$$R_0 dr = -\frac{c}{H_0} [\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{T,0})(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz. \quad (4.41)$$

Según Peacock, ésta bien pudiera ser *la ecuación más importante de la Cosmología*, pues relaciona la distancia comóvil, r , con los parámetros de Hubble y de densidad, y con el “redshift” z .

Nótese también que, de las ecs. (4.19) y (4.38):

$$\Omega_T - 1 = \frac{kc^2}{H^2 R^2} = \frac{kc^2}{R^2 H_0^2 [\dots]} = \frac{kc^2}{a^2 R_0^2 H_0^2 [\dots]} = (\Omega_{T,0} - 1) \frac{(1+z)^2}{[\dots]},$$

lo que implica

$$\Omega_T(z) - 1 = \frac{(\Omega_{T,0} - 1)}{\Omega_{r,0}(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z) + (1 - \Omega_{T,0}) + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2}}, \quad (4.42)$$

y por lo tanto:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega_T(z) = 1. \quad (4.43)$$

Es decir, que acercándonos al Big Bang (BB), la densidad total se acerca a la crítica, y el Universo es cada vez más plano. Este resultado está a la base del llamado:

Problema de la llanura (“*flatness problem*”): si, como parece ser el caso, $\Omega_{T,0} \sim 1$ sin ser exactamente igual, entonces cerca del BB Ω_T debió estar ridículamente cercana a 1, sin igualarlo. (Si fuese exactamente igual a 1 hoy, entonces lo habría sido siempre.) Tal cercanía se dice que es un *ajuste fino* (“*fine tuning*”) de las condiciones iniciales del Universo y constituye una de las motivaciones para la *hipótesis inflacionaria*. (Cap. 11.)

Finalmente, notemos que, según miramos hacia atrás en el tiempo (i.e. según z crece), si $\Omega_r \neq 0$, necesariamente existirá una época en la cual la expansión estaba dominada por Ω_r , debido a que su contribución está multiplicada por la potencia más grande de z presente en la ec. (4.41). De regreso hacia el presente, dado que hoy en día la densidad de materia $\rho_m \sim 10^4 \rho_r$, (ver sec. 1.3, notando que allí la densidad de radiación se denotó u_r), deducimos que

$$\rho_m \approx \rho_r \quad \text{en } z = z_{\text{eq}} \sim 10^4. \quad \text{Epoca de la igualdad de materia y radiación.} \quad (4.44)$$

4.4 Modelos cosmológicos

(Peacock pp. 75-85)

Todo lo que hemos discutido hasta ahora concierne al “Universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)”², término que se refiere a los modelos en donde se aplica la métrica de RW, y que están gobernados por la EF. Dentro de estos modelos, hay varias posibilidades.

4.4.1 El modelo estático de Einstein

Ya hemos discutido este modelo (notas (2) y (3), sec. 4.1). Sólo notemos además que, de la forma \ddot{R} de la EF, ec. (4.5), la condición de cero aceleración implica

$$\rho_T + \frac{3P_T}{c^2} = 0. \quad (4.45)$$

²Peebles se refiere a él como modelo de Friedmann-Lemaître

Despreciando las contribuciones de la materia y la radiación a la presión, así como la ρ_r (lo cual es una buena aproximación para $z \lesssim 10^4$), tenemos $P_T = P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$. Entonces:

$$\rho_T = \rho_m + \rho_\Lambda = 3\rho_\Lambda, \Rightarrow \quad \rho_m = 2\rho_\Lambda. \quad (4.46)$$

Además, $\rho_T > 0$, y por lo tanto, de la EF (4.2) con $\dot{R} = 0$, tenemos

$$k > 0 \Rightarrow \text{Universo cerrado.} \quad (4.47)$$

Como ya se vio en la nota (5) de la sec. 4.1, este modelo es inestable.

4.4.2 El modelo de de Sitter

En este modelo, el Universo está vacío, y sólo tiene la contribución del vacío (Λ), que satisface $\rho_\Lambda = \text{cte.}$ (es decir, no se diluye con la expansión).

En este caso, de la EF, ec. (4.2), con $\rho_T = \rho_\Lambda = \text{cte.}$,

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda R^2 = -kc^2, \quad (4.48)$$

vemos que, según el Universo se expande, el término kc^2 se hace progresivamente menos importante con respecto a los otros dos, y asintóticamente el Universo se acerca a evolucionar de acuerdo a

$$\dot{R} = \left(\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3} \right)^{1/2} R, \quad (4.49)$$

con solución

$$R \propto \exp \left[\left(\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3} \right)^{1/2} t \right] = \exp \left[\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t \right]. \quad (4.50)$$

Es decir, la expansión se acelera exponencialmente, igual que lo que sucede al perturbar el modelo estático de Einstein (sec. 4.1, nota (5)).

Notas:

a) El caso $k = 0$, en el que (4.49) se cumple siempre, corresponde a que el parámetro de Hubble en verdad sea constante (ver ec. (4.4) con $\rho_m = \rho_r = k = 0$):

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}. \quad (4.51)$$

b) Como $k = 0$, el Universo es plano y abierto. Este caso es similar al *Universo estacionario* de Hoyle, Bondi y Gold, aunque sin materia. Dado que en el Universo la materia sí existe, para mantener su densidad constante, el modelo del Universo estacionario requería la *creación continua de materia*, al ritmo de aproximadamente 1 átomo de H por m^{-3} cada 30 Giga años (Gyr).

c) Este modelo puede haberse aplicado durante la *época inflacionaria* y también más recientemente ($z \lesssim 1$), si Λ domina la expansión hoy.

4.4.3 Modelos de rebote (“Bounce”) y deambulantes (“Loitering”)

En presencia de densidad de materia y de Λ hay varias posibilidades (fig. 4.1):

- a) $\Omega_T > 1$: Produce modelos que son cerrados, pero se que pueden expandir para siempre si $\Omega_\Lambda > 0$.
- b) $\Omega_\Lambda < 0$: produce modelos que se recolapsan siempre; también si $\Omega_\Lambda > 0$ y $\Omega_m \gg \Omega_\Lambda$.
- c) Si Ω_Λ es muy grande y Ω_m es muy pequeña, es posible tener un modelo de rebote sin Big Bang (fig. 4.2), aunque aquí la condición inicial debe ser de contracción. Sin embargo, estos modelos implican que existe una z máxima ~ 2 para $\Omega_m \sim 0.1$, mientras que hoy conocemos objetos con $z > 4$, por lo que estos modelos se han abandonado.
- d) Si $\Omega_\Lambda > 1$ y Ω_m es pequeña, sin llegar al caso sin Big Bang, es posible tener modelos de expansión eterna cercanos a las condiciones de rebote que se estancan (o “deambulan”) por tiempos largos cerca de la z de igualdad entre Ω_Λ y Ω_m , con $\dot{R} \approx 0$ (fig. 4.3). Estos fueron populares en los 70's, para explicar un aparente exceso de cuasares con $z \sim 2$. Sin embargo, hoy queda claro que se trataba tanto de efectos evolutivos como de selección. Por otro lado, trabajos recientes sugieren que el Universo pudo haber deambulado alrededor de $z = 6$ (Sahni & Shtanov 2005, PRD 71, 084018 [astro-ph/0410221]).

4.4.4 Universo plano

Caso 1: $k = 0$, $\Omega_T = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$

En este caso la EF es $\dot{R}^2 = 8\pi G \rho_T R^2/3$. Al perder el término de curvatura (en k), los dos términos restantes son cuadráticos en R , y la normalización R_0 se cancela. Es decir, no hay una escala de curvatura característica. Conviene entonces trabajar con $a(t)$. De la ec. (4.39):

$$\dot{a}^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{r,0}a^{-2}), \quad (4.52)$$

en donde hemos puesto $\Omega_\Lambda = 0$. Conviene considerar las dos contribuciones del lado derecho separadamente:

a) Si $\Omega_{r,0} = 0$ (llamado *modelo de Einstein-de Sitter*):

$$\dot{a} = H_0 a^{-1/2} \quad (\Omega_{m,0} = 1), \quad (4.53)$$

$$\Rightarrow a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0\right)^{2/3} t^{2/3}. \quad \text{Universo plano dominado por materia} \quad (4.54)$$

Notamos además que al tiempo presente, $a = 1$,

$$\Rightarrow t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \quad \text{Edad del Universo en Einstein-de Sitter.} \quad (4.55)$$

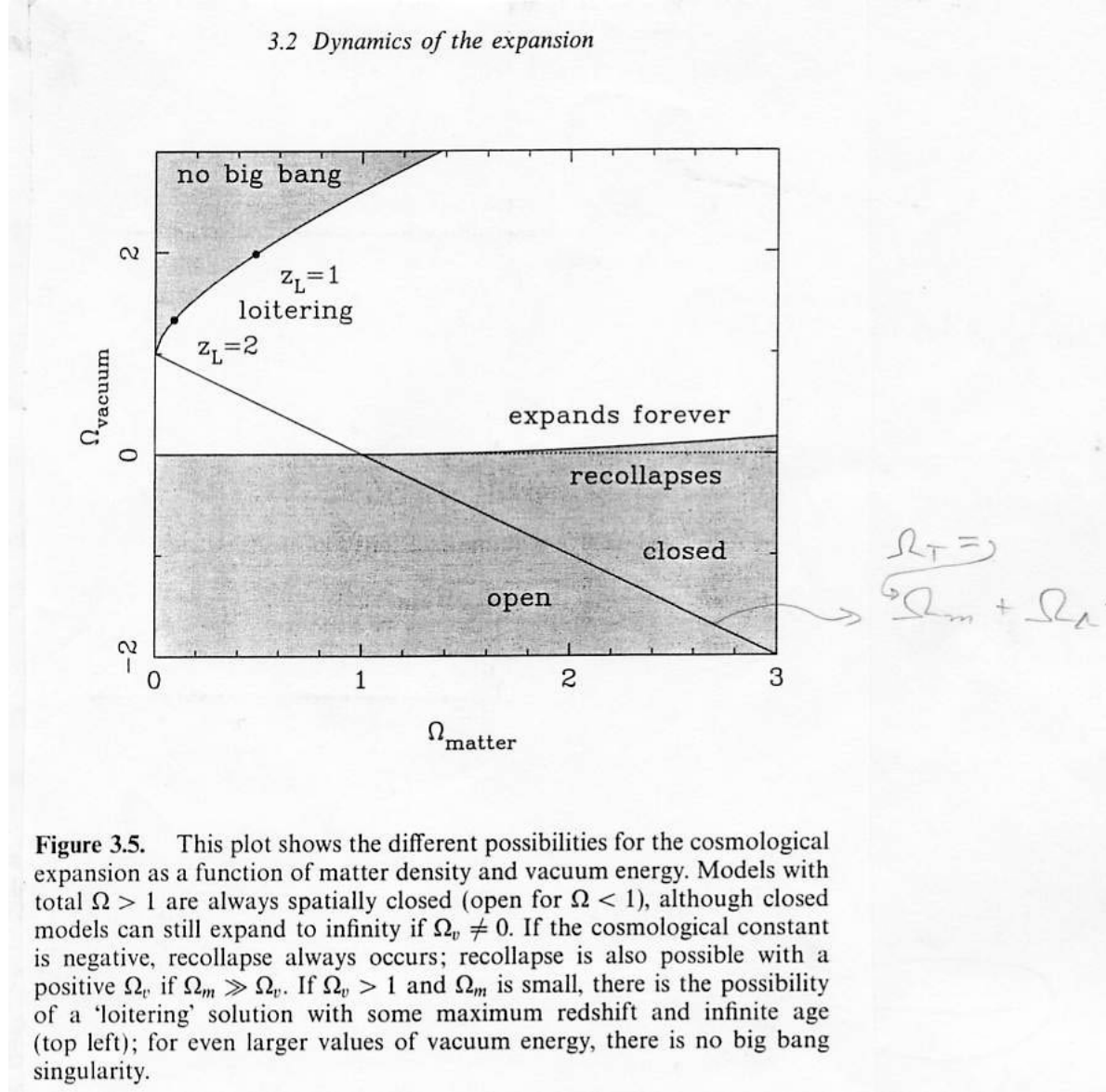


Figure 4.1: Posibilidades para la expansión del Universo como función de Ω_Λ y de $\Omega_{m,0}$ (Figura 3.5 Peacock).

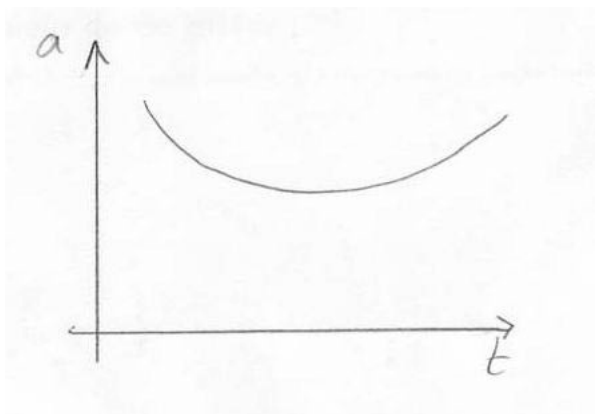


Figure 4.2: Universo de rebote.

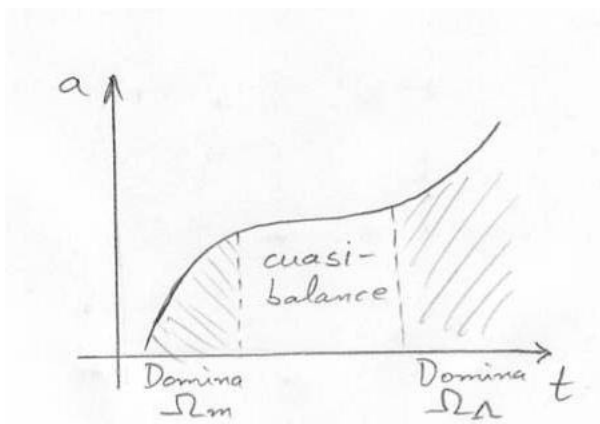


Figure 4.3: Universo deambulante.

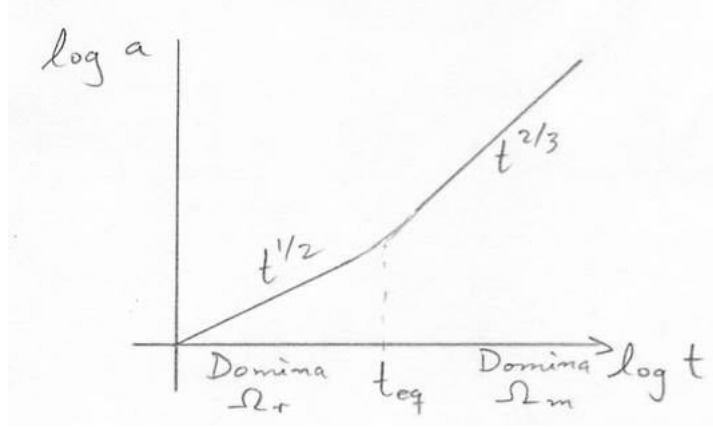


Figure 4.4: Evolución de la expansión de un universo plano con $\Lambda = 0$.

(Si la mayor parte del tiempo ha dominado la materia.)

b) Si $\Omega_{m,0} = 0 : \dot{a} = H_0 \Omega_{r,0}^{1/2} a^{-1}$

$$\Rightarrow a(t) = \sqrt{2H_0} t^{1/2} \quad \text{Universo plano dominado por radiación.} \quad (4.56)$$

Conjuntando los casos (a) y (b), vemos que, si $\Omega_T = 1$, antes de la época de la igualdad, ($z > z_{eq}$), el Universo se expandió de acuerdo a (4.56), y posteriormente de acuerdo a (4.54) (fig. 4.4).

Caso 2: Supongamos ahora $\Omega_{m,0} \neq 0 \neq \Omega_\Lambda$; $\Omega_{r,0} = 0$ (*Universo con Λ y materia*) (modelo favorecido en la actualidad). En este caso, la EF queda:

$$\dot{a}^2 = \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = H_0^2 [\Omega_{m,0} a^{-1} + (1 - \Omega_{m,0}) a^2],$$

$$\Rightarrow H_0 \int_0^{t(a)} dt = \int_0^a \frac{a da}{[\Omega_{m,0} a + (1 - \Omega_{m,0}) a^4]^{1/2}}, \quad (4.57)$$

$$\Rightarrow H_0 t(a) = \frac{2}{3} \frac{\sinh \left[\sqrt{a^3(1 - \Omega_{m,0})/\Omega_{m,0}} \right]}{\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}}, \quad \Omega_{m,0} \leq 1. \quad (4.58)$$

(Ver sec. 3.2 del Peacock para detalles de la solución de la integral.) Ahora bien, como la época actual no es especial, el lado izquierdo vale para cualquier época. Aproximando también el lado derecho, esto se puede reescribir finalmente como

$$H(a) t(a) \approx \frac{2}{3} \Omega_m^{-0.3}(a)$$

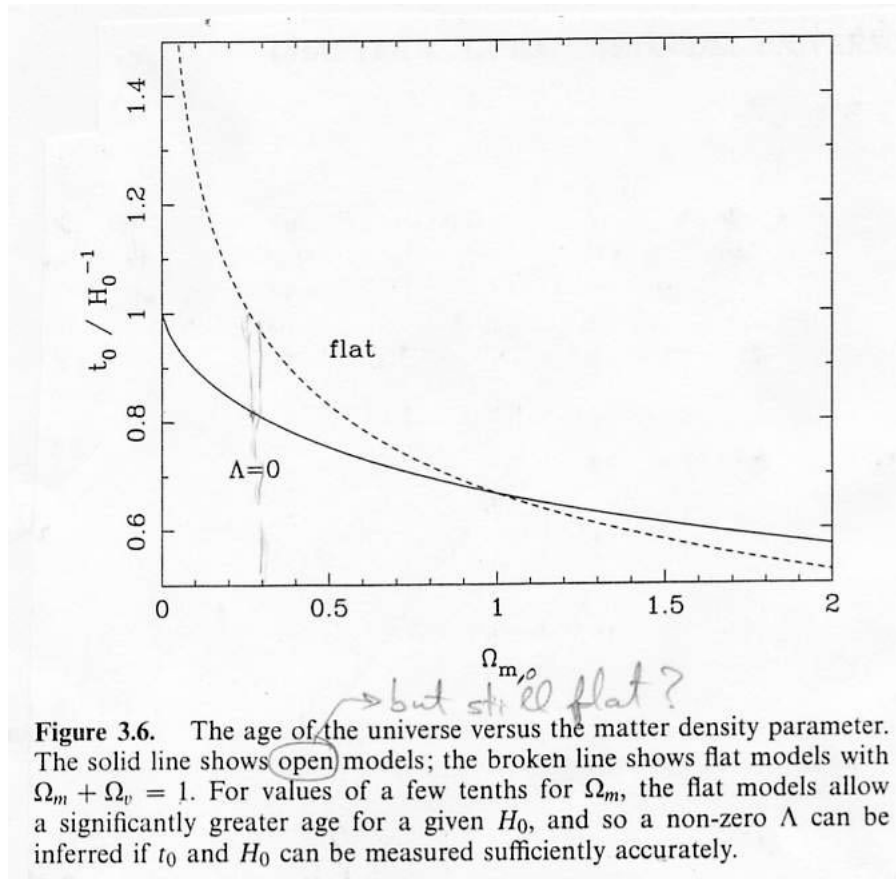


Figure 4.5: Edad del Universo como función de $\Omega_{m,0}$ para universos planos con y sin constante cosmológica. (Fig. 3.6 Peacock)

de donde

$$t_0 = \frac{2}{3} \Omega_{m,0}^{-0.3} H_0^{-1} \quad \text{Edad del Universo con } \Lambda \neq 0. \quad (4.59)$$

Este resultado se puede comparar con el correspondiente para el caso $\Omega_\Lambda = 0$. Se ve que si $\Omega_{m,0} \sim 0.1 - 0.3$, los modelos planos con $\Lambda \neq 0$ permiten una edad mayor que los modelos con $\Lambda = 0$. Esto resuelve el problema que se tenía a mediados de los años 90, de que la edad estimada del Universo sin incluir Λ parecía ser menor que la de las estrellas más viejas conocidas, lo cual claramente es imposible.

4.4.5 Horizontes

(Peebles pp. 98-99)

El concepto de “*horizonte de partículas*” (frecuentemente llamado simplemente “*horizonte*”) es de suma importancia en Cosmología: es la máxima distancia que puede haber recorrido un fotón desde el BB hasta el presente.

Para calcularlo, recordemos que para los fotones, el elemento de distancia $ds^2 = 0$. Entonces: (ver ecs. [3.33] y [3.41], de nuevo renombrando $\chi \rightarrow r$):

$$cdt = d\ell \equiv R(t)dr$$

en donde dr es la *separación comóvil*. De aquí:

$$\Delta r = \int_o^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} = \frac{c}{R_0} \int_o^{t_1} \frac{dt}{a(t)} \quad (4.60)$$

La segunda integral converge si $a(t)$ varía como t^n , con $n < 1$. En particular, esto se satisface para los Universos planos, tanto dominados por materia ($a \propto t^{2/3}$) como por radiación ($a \propto t^{1/2}$).

La convergencia de esta integral implica que $\Delta r < \infty$. Es decir, *la distancia máxima recorrida por un fotón desde el BB hasta hoy es finita*. Eventos separados por distancias mayores que Δr están *causalmente desconectados*, pues ninguna señal ha podido llegar de uno al otro desde el BB hasta hoy.

La condición $a \propto t^n$ con $n < 1 \Rightarrow \ddot{a}(t) < 0$, que en la EF \ddot{R} (ec. 4.5) implica $\rho_T + 3P_T/c^2 > 0$. En el *escenario inflacionario*, equivalente al caso dominado por Λ , se tiene

$$\rho_\Lambda + \frac{3P_\Lambda}{c^2} = -2\rho_\Lambda < 0$$

lo que implica que la segunda integral en (4.60) diverge, y cabe la posibilidad de que todo el Universo observable esté causalmente conectado. En este escenario, ésta es la explicación de que regiones del Universo aparentemente causalmente desconectadas entre sí (pero ambas causalmente conectadas con nosotros) satisfagan hoy la condición de homogeneidad. Este es el llamado *Problema del horizonte*, que es otra de las motivaciones para la hipótesis inflacionaria (cap. 11).

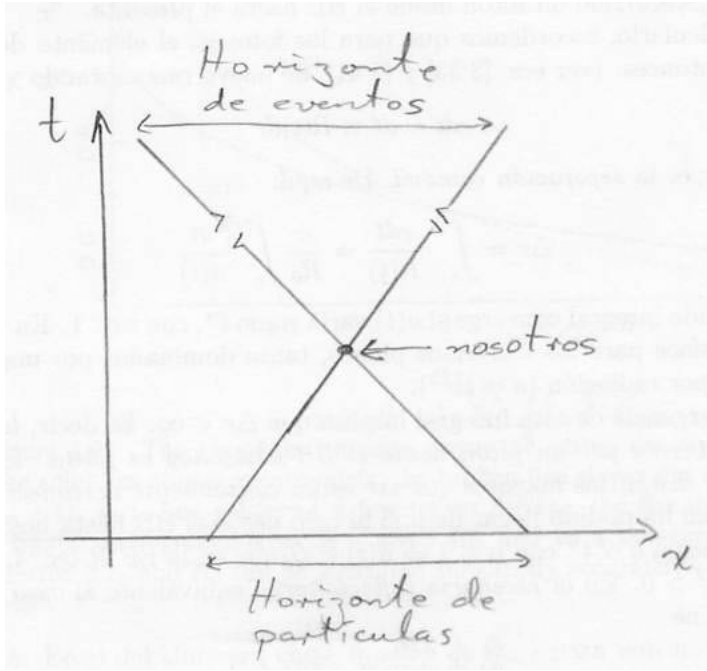


Figure 4.6: Horizontes.

Nota: No confundir el horizonte de partículas con el “*horizonte de eventos*” que se define

$$\Delta r = \frac{c}{R_0} \int_{t_1}^{\infty} \frac{dt}{a(t)}. \quad (4.61)$$

Si Δr diverge en este caso, significa que un observador lejano siempre podrá recibir señales luminosas emitidas por nosotros aquí y ahora, dado suficiente tiempo. Por el contrario, si $\Delta r < \infty$, entonces hay eventos a los cuales nuestra información nunca podrá llegar, porque se alejan “más rápido que la luz”.

Resumiendo:

Horizonte de partículas \rightarrow propagación de información desde el pasado hacia nosotros.

Horizonte de eventos \rightarrow propagación de información de nosotros hacia el futuro.

Chapter 5

Escalas de tiempo y distancia

5.1 Parámetros Cosmológicos y Cantidades Observables

(Peacock sec. 3.4 y cap. 5; Kolb & Turner sec. 2.3)

Como hemos visto en el capítulo anterior, la edad del Universo depende de la tasa de expansión H . Se define:

$$t_H \equiv H_0^{-1} \quad \text{Tiempo de Hubble.} \quad (5.1)$$

Esta sería la edad del Universo si $\ddot{R} = 0$ siempre, de manera que $\dot{R} = \text{cte.}$ (i.e., si el Universo no estuviera acelerado). En este caso, la velocidad de recesión de un objeto a una distancia comóvil fija r de nosotros es constante en el tiempo. Esto se puede comprobar como sigue. La distancia física d a un objeto se relaciona con la distancia comóvil r por $d = Rr$, de modo que su tasa de cambio es

$$v \equiv \dot{d} = \dot{R}r + R\dot{r}. \quad (5.2)$$

El primer término de la derecha corresponde a la velocidad de recesión debida a la expansión, y el segundo a la velocidad peculiar del objeto. Si la velocidad peculiar \dot{r} es cero, obtenemos que

$$v = \dot{R}r = \frac{\dot{R}}{R}Rr = Hd;$$

es decir, recuperamos la ley de Hubble. Si ahora por hipótesis suponemos que \dot{R} es constante, concluimos que $v = \text{cte.}$, pues la distancia comóvil r es fija. A su vez, la constancia de v implica que

$$\frac{v}{d} = (\Delta t)^{-1} = H,$$

donde Δt es el tiempo considerado para la expansión. Esta relación se aplica para cualquier tiempo Δt . En particular, entonces, al tiempo presente, $\Delta t = t_U$, por lo que finalmente obtenemos

$$t_U = H_0^{-1} (= 9.78 h^{-1} \text{ Gyr}).$$

En general, de un tratamiento similar al que llevó a la ec. (4.41), vemos que

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H}, \quad (5.3)$$

con $H(z)$ dada, por ejemplo, por la ec. (4.38). En particular, vimos que, *para un Universo plano* con $\Omega_\Lambda \neq 0$:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_{m,0}^{-0.3}. \quad (5.4)$$

Para el caso no plano ($k \neq 0$) con $0.1 \lesssim \Omega_{m,0} \lesssim 1$, $|\Omega_\Lambda| \lesssim 1$, se puede demostrar que

$$H_0 t_0 \approx \frac{2}{3} (0.7 \Omega_{m,0} - 0.3 \Omega_\Lambda + 0.3)^{-0.3}. \quad (5.5)$$

Es decir, si se conocen las Ω 's, entonces conocemos el producto $H_0 t_0$. Viceversa, si se conocen H_0 y t_0 , se puede estimar esta combinación de las Ω 's. Desafortunadamente, en la práctica, todas estas cantidades son muy inciertas:

- a) Para t_0 sólo se pueden estimar límites inferiores (a través de medir edades de objetos astronómicos).
- b) Para medir H_0 se necesitan mediciones precisas de las distancias a objetos de alta z . Es necesario alcanzar alta z para que las *velocidades peculiares* (*desviaciones con respecto al flujo de Hubble*) de los objetos (típicamente de varias veces 100 km s^{-1}) sean pequeñas comparadas con la velocidad de expansión. Pero entre más lejano está un objeto, más incierta es su distancia.

Para encontrar la relación entre la distancia a un objeto y su redshift, recordemos que, para los fotones que han sufrido este redshift, $ds^2 = 0$, y entonces:

$$\ell \equiv R_0 r = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (5.6)$$

Para $z \ll 1$, $H(z) \approx H_0$, y por lo tanto

$$\ell = R_0 r \approx \frac{cz}{H_0}; \quad z \ll 1. \quad \text{Relación distancia-redshift a primer orden.} \quad (5.7)$$

En general podemos escribir

$$\ell = \frac{cz}{H_0} f(z, \Omega_T), \quad (5.8)$$

con $f \sim 1$ para $z \ll 1$.

5.1. PARÁMETROS COSMOLÓGICOS Y CANTIDADES OBSERVABLES 53

A segundo orden, se puede demostrar que la relación ℓ - z involucra el *parámetro de desaceleración* q : (ec. 4.17):

$$\ell \approx \frac{c}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 \right] \quad \text{Relación } \ell\text{-}z \text{ a segundo orden} \quad (5.9)$$

TAREA: Demostrarlo, haciendo una expansión a segundo orden de $R(t)/R_0$ alrededor del tiempo presente t_0 para demostrar primero que

$$z = -H_0 \delta t + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 \delta t^2,$$

recordando que $R/R_0 = 1/(1+z)$, y las definiciones de H_0 y q_0 .

Se pueden definir otras relaciones ℓ - z , dependiendo del observable a utilizar. Aquí, usaremos la métrica en la forma de la ec. (3.41), de nuevo renombrando $\chi \rightarrow r$.

Entonces, por ejemplo, podemos saber el tamaño transversal de un objeto si conocemos su tamaño angular en el cielo $d\theta$. Su tamaño comóvil L_c (el que tendría el objeto si se hubiera expandido junto con el factor de escala del Universo desde que emitió la luz que hoy nos llega de él hasta el presente) es entonces $S_k(r)d\theta$ que, multiplicado por el factor de escala a la z del objeto, nos da el *tamaño propio* L_p (el tamaño físico real del objeto):

$$L_p = \frac{R_0}{(1+z)} S_k(r) d\theta = \frac{R_0}{(1+z)} L_c.$$

Vemos entonces que $R_0 S_k(r)/(1+z)$ juega el papel de una distancia efectiva D_A :

$$D_A \equiv \frac{R_0}{(1+z)} S_k(r) = \frac{L_p}{d\theta}. \quad \text{Distancia de diámetro angular} \quad (5.10)$$

Es decir, es la distancia que, multiplicada por el diámetro angular aparente del objeto, nos da su tamaño propio.

Otra relación es la que se obtiene de medir el flujo monocromático de una fuente a redshift z , a una distancia comóvil r_1 de nosotros, que nos permite definir la

$$D_L = (1+z) R_0 r_1, \quad \text{Distancia de luminosidad} \quad (5.11)$$

que es la distancia que satisface

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2},$$

donde L es la luminosidad intrínseca de la fuente, y F es el flujo observado. La ec. (5.11) se obtiene como sigue (fig. 5.1). Supongamos que el observador se encuentra en la posición comóvil $r = 0$ en $t = t_0$, y la fuente en $r = r_1$, habiendo

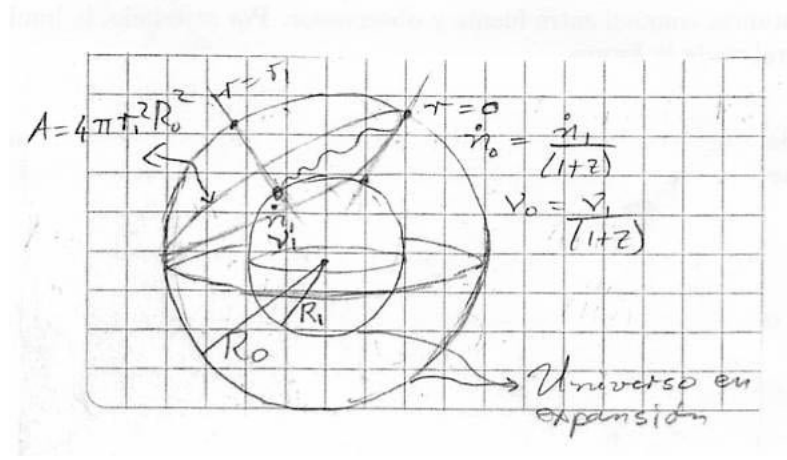


Figure 5.1: Distancia de luminosidad.

emitido la señal en $t_1 < t_0$. Entonces, r_1 es la distancia comóvil entre fuente y observador. Por otro lado, la luminosidad en general es de la forma

$$L = \dot{n} h \nu,$$

en donde \dot{n} es la tasa de emisión de fotones y ν es la frecuencia de la radiación. Entonces, cuando se emitió la señal: $L = L_1 = \dot{n}_1 h \nu_1$. Tomando en cuenta que tanto la frecuencia de emisión de los fotones como la frecuencia de los fotones mismos sufren corrimiento al rojo, la luminosidad recibida es:

$$L = L_0 = \dot{n}_0 h \nu_0 = \frac{\dot{n}_1}{(1+z)} \frac{h \nu_1}{(1+z)} = \frac{L_1}{(1+z)^2}.$$

Por otro lado, al tiempo t_0 , el área de la esfera de radio comóvil r_1 es $4\pi r_1^2 R_0^2$. Entonces:

$$F = \frac{L_1}{4\pi r_1^2 R_0^2 (1+z)^2}$$

de donde se sigue la ec. (5.11).

En teoría, la determinación de distancias a objetos de redshift conocido permitiría entonces determinar los parámetros cosmológicos, y así seleccionar el modelo adecuado del Universo. En la práctica, la situación es complicada: a fin de minimizar la incertidumbre debida a las velocidades peculiares, se necesitan típicamente objetos con $z \gtrsim 0.01$ ($v \gtrsim 3000 \text{ km s}^{-1}$), pero entonces las distancias son inciertas. En la siguiente sección discutimos su determinación.

5.2 La Escalera de las Distancias

(Peacock secs. 5.3-5.5; Bernstein, pp. 27-31; Curso de Bothum, lect.6)

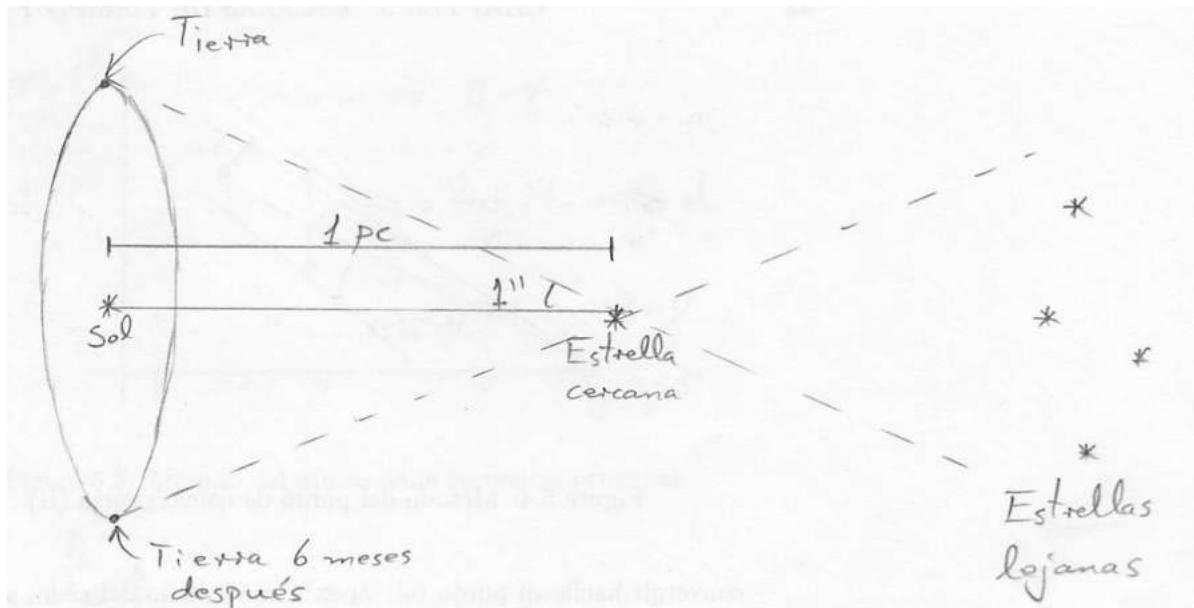


Figure 5.2: Paralaje.

Hasta hace poco tiempo (unos 10 años), la determinación de las distancias a las galaxias más lejanas involucraba una serie de muchos pasos (“peldaños”) en la que cada uno de ellos permitía la determinación de la distancia hasta cierto objeto (o clase de objetos) clave, a partir de la cual se apoyaba el siguiente paso. Hoy en día, los nuevos telescopios espaciales han permitido saltarse varios de los peldaños. Sin embargo, dada su importancia histórica, describiremos primero la secuencia tradicional, y después las determinaciones más recientes. Dicha “escalera” tenía los siguientes peldaños:

- *Paralajes*: Método consistente en medir el desplazamiento angular aparente en el cielo de una estrella cercana contra el fondo inmóvil de las estrellas lejanas, según la Tierra se mueve de un lado a otro del Sol en su órbita (fig. 5.2). Este método permite determinar distancias a estrellas hasta ~ 30 pc (ángulos de $\sim 1/30''$).
- *Método del punto de convergencia, o del cúmulo en movimiento*. (Ver también Field, Verschuur & Ponnampertuma, p. 427.) Este método aprovecha el hecho de que si las estrellas de un cúmulo se mueven todas en la misma dirección, desde nuestro punto de observación sus velocidades parecerán convergir hacia un punto (el “ápex”) en el plano del cielo, si las estrellas se alejan de nosotros, o divergir, si se acercan (fig. 5.3).

Entonces, midiendo los movimientos propios μ de las estrellas podemos determinar la posición del ápex, y la separación angular θ entre cada

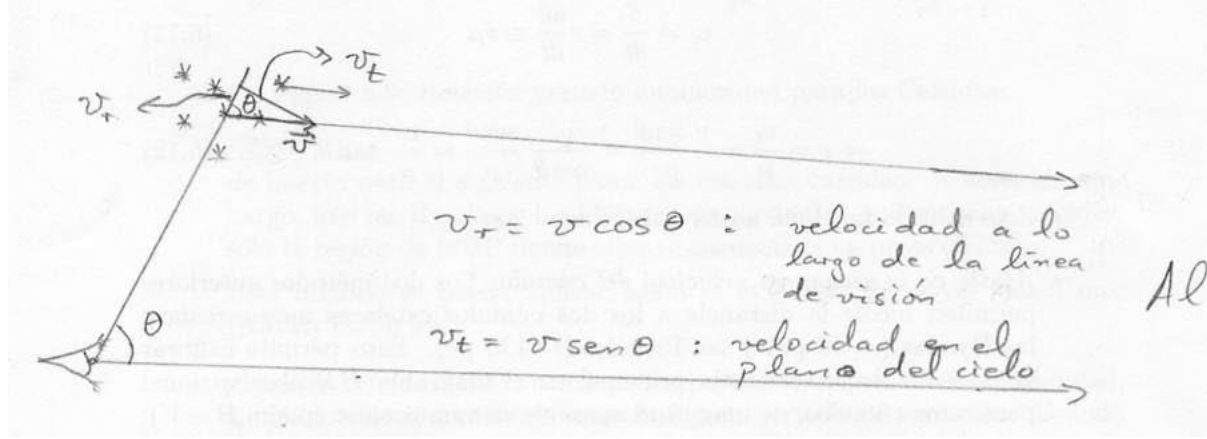


Figure 5.3: Método del punto de convergencia (I).

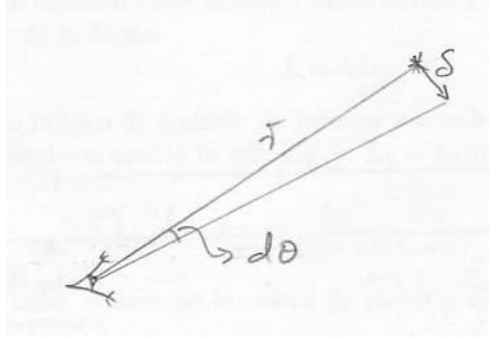


Figure 5.4: Método del punto de convergencia (II).

estrella y el ápex. Determinando además la velocidad radial v_r a través del efecto Doppler, podemos conocer la velocidad tangencial v_t (figs. 5.3 y 5.4). Podemos entonces encontrar la distancia r a la estrella:

$$v_t = \frac{\delta}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \equiv r\mu \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow r = \frac{v_t}{\mu} = \frac{v \sin\theta}{\mu} = \frac{v_r}{\cos\theta} \frac{\sin\theta}{\mu} = \frac{v_r}{\mu} \tan\theta. \quad (5.13)$$

Este método funciona hasta distancias ~ 200 pc.

- *Ajuste de la secuencia principal del cúmulo.* Los dos métodos anteriores permiten medir la distancia a los dos cúmulos estelares más cercanos: las Hyadas (~ 46 pc) y las Pléiades (~ 130 pc). Esto permite calibrar la posición de la secuencia principal en el diagrama HR observacional

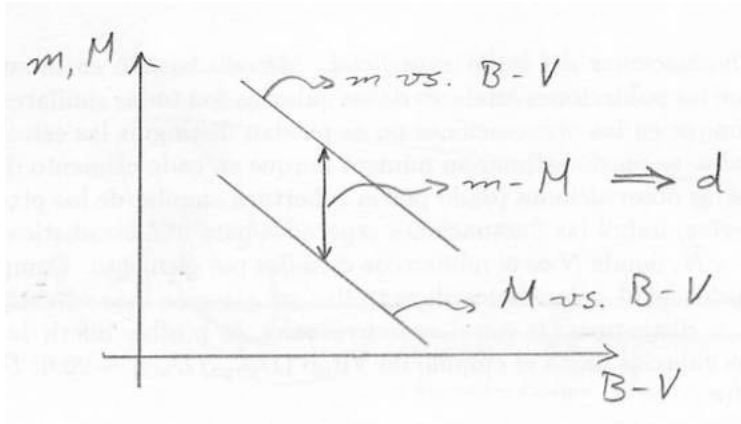


Figure 5.5: Método del ajuste de la secuencia principal.

para estos cúmulos, de magnitud aparente m versus color (p.ejm, $B - V$): conociendo m y la distancia d , es posible determinar la luminosidad real (es decir, la magnitud absoluta (ver ecs. (2.4) a (2.6))). Posteriormente, para otros cúmulos más distantes, la distancia se puede inferir midiendo la diferencia en magnitudes entre la relación m vs. $B - V$ observada y la relación M vs. $B - V$ real obtenida de los cúmulos cercanos (fig. 5.5).

En particular, y afortunadamente, las Hyadas y las Pléiades son cúmulos jóvenes que todavía contienen estrellas en la parte superior de la secuencia principal (SP), región en donde en otros cúmulos se encuentran las estrellas de interés para el siguiente paso: las estrellas cefeidas. Nótese, sin embargo, que las Hyadas y las Pléiades en particular no contienen cefeidas; sólo la región de la SP donde éstas se encuentran en otros cúmulos.

Este método se puede aplicar hasta \sim la Nube Mayor de Magallanes (NMM) (~ 50 kpc).

- *Estrellas cefeidas.* Estas son estrellas post-SP que presentan variabilidad, y una correlación entre su magnitud y su período de variación. Usando el método de ajuste de la SP para cúmulos que las contienen, se puede determinar la distancia al cúmulo midiendo los períodos de las cefeidas que contiene.

Afortunadamente, las cefeidas son muy brillantes, y se pueden detectar individualmente hasta M31 (la galaxia de Andrómeda). Se les encuentra también en la NMM, y entonces se puede encontrar el cociente de sus distancias (a la NMM y M31), que es de ~ 15.3 . Así, se encuentra la distancia a M31, de ~ 765 kpc.

- *Fluctuaciones del brillo superficial.* Método basado en la suposición de que las poblaciones estelares de las galaxias son todas similares. Entonces,

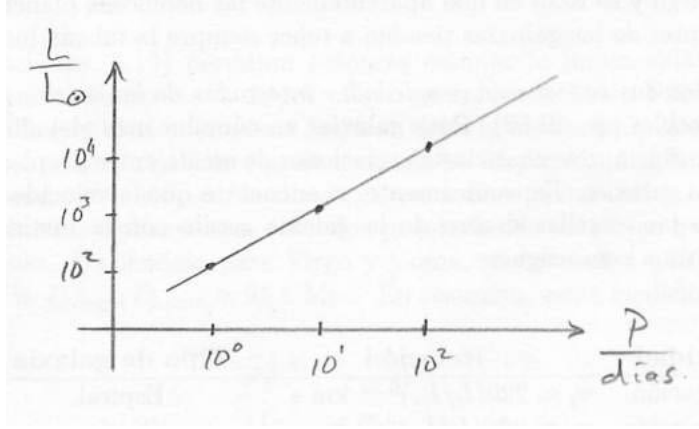


Figure 5.6: Relación período-luminosidad para las Cefeidas.

aunque en las observaciones no se puedan distinguir las estrellas individuales, se puede estimar su número porque en cada elemento de resolución de las observaciones (dado por la cobertura angular de los píxeles o por el *seeing*) habrá las fluctuaciones esperadas para una estadística de Poisson, $\sim \sqrt{N}$, donde N es el número de estrellas por elemento. Entonces, la variabilidad esperada del número de estrellas por elemento disminuirá con el número de estrellas por elemento como $\sqrt{N}/N = N^{-1/2}$. Comparando la variabilidad del brillo superficial entre galaxias lejanas en las que no se distinguen las estrellas individuales y galaxias más cercanas en las que sí se conoce la densidad volumétrica de estrellas, es posible inferir la distancia a las primeras. Esto permite conocer las distancias hasta el cúmulo de Virgo ($D_{\text{virgo}}/D_{\text{M31}} \sim 20.6$; $D_{\text{virgo}} \sim 15.8$ Mpc).

- *Nebulosas planetarias más brillantes.* Este método se aplica también hasta Virgo y se basa en que aparentemente las nebulosas planetarias más brillantes de las galaxias tienden a tener siempre la misma luminosidad.
- *Métodos basados en propiedades integradas de las galaxias* (ver también Peebles pp. 49-50). Para galaxias en cúmulos más alejados que Virgo, es posible aprovechar ciertas relaciones de escala entre propiedades físicas de las galaxias. Específicamente, se encuentra que la velocidad característica de las estrellas dentro de la galaxia escala con la luminosidad de esta última como sigue:

Velocidad	Relación	Tipo de galaxia	Nombre de la relación	
De rotación	$v_r \approx 220(L/L_*)^{0.22} \text{ km s}^{-1}$	Espiral	Tully-Fischer	(5.14)
De dispersión	$\sigma_v \approx 220(L/L_*)^{0.25} \text{ km s}^{-1}$	Elíptica	Faber-Jackson.	

En esta tabla, $L_* = 1.0 \times 10^{10} e^{\pm 0.23} h^{-2} L_{\odot}$ es una luminosidad típica, a

la que regresaremos en el cap. 9.

Se encuentra observacionalmente además que las galaxias elípticas satisfacen otra condición: en el espacio de parámetros de brillo superficial I_0 , dispersión de velocidades σ_v y luminosidad L , las galaxias se encuentran sobre el llamado “*plano fundamental*”:

$$L \propto I_0^{-0.7} \sigma_v^3, \quad (5.15)$$

a lo que también se le conoce como *relación D_n - σ* , en donde D_n es el diámetro angular de la región dentro de la cual el brillo superficial promedio de una galaxia tiene un cierto valor de referencia.

TAREA: Mostrar que la ec. (5.15) se recupera *aproximadamente*, suponiendo equilibrio virial ($\sigma^2 \propto M/r$; explicar el significado de esta relación), y que la relación masa-luminosidad varía lentamente con la masa ($M/L \propto M^a$, con $a \sim 0.2$), notando además que la luminosidad L está relacionada con el brillo superficial por $L \propto I_0 r^2$ (explicar por qué).

Las relaciones (5.14) permiten entonces estimar la luminosidad de una galaxia midiendo su curva de rotación o su ancho de línea. Para galaxias elípticas la correlación se puede mejorar todavía más usando la ec. (5.15). Sin embargo esas relaciones presentan mucha dispersión, implicando una incertidumbre $\sim 20\%$ en la distancia para una galaxia dada. Por eso es conveniente aplicar estos métodos promediando sobre las galaxias de un cúmulo. Haciéndolo para Virgo y Coma, se encuentra que $D_{\text{coma}} = 5.82 \pm 1\% D_{\text{virgo}}$; $D_{\text{coma}} \approx 91.6$ Mpc.

En resumen, de esta escalera de mediciones se encuentra

$$H_0 = 74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \pm 8\%.$$

5.3 Determinaciones directas

En años recientes, varios peldaños de esta escalera han sido saltados por observaciones con nuevos satélites, o gracias a eventos especiales.

- El satélite HIPPARCOS ha sido ya capaz de medir paralajes directamente hasta las Hyadas.
- El “eco de la luz” de la SN 1987A permitió medir en 1991 directamente la distancia a la NMM. Al explotar, esta supernova iluminó un anillo circunestelar que la rodeaba, cuya forma aparente era elíptica con alto grado de precisión, sugiriendo que el anillo era circular y la elipticidad observada se debía a su inclinación con respecto a nosotros. El grado de elipticidad permite conocer la inclinación. Debido a que la velocidad de la luz es

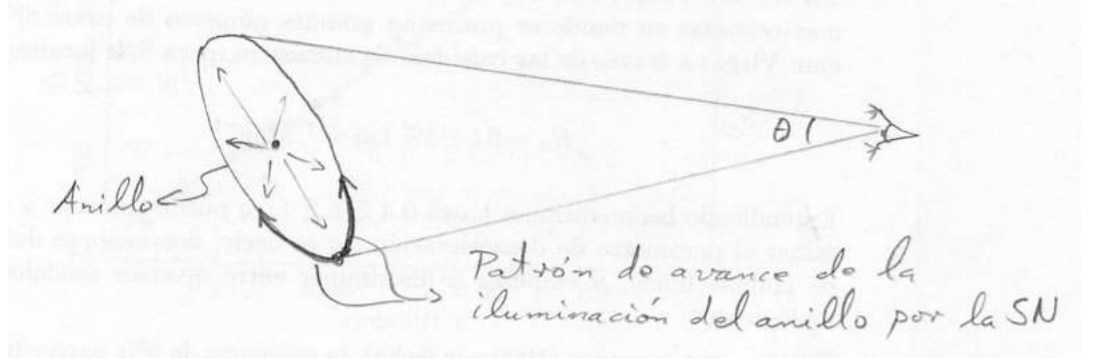


Figure 5.7: Eco de luz de la SN 1987A.

finita, las partes del anillo más lejanas de nosotros se vieron iluminadas después que las más cercanas. Conociendo este patrón temporal de iluminación, más la inclinación y el tamaño angular del anillo, fue posible determinar su distancia (fig. 5.7; Panagia et al. 1991, ApJ 380, L23).

- En general, las SNs tipo Ia tienen la particularidad de que el máximo de su curva de luz varía muy poco de una SN a otra. Esto permite usarlas como *candelas estándar*: fuentes luminosas de luminosidad conocida, que permiten conocer su distancia midiendo sólo su brillo aparente.

Sin embargo, sigue siendo necesario calibrar las distancias a las galaxias más cercanas en donde se presentan grandes números de estas SNs (p. ejm. Virgo) a través de las cefeidas. Se encuentra, para SNs locales ($z \lesssim 0.1$; fig. 5.8, panel superior):

$$H_0 = 64 \pm 5\% \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

Extendiendo las mediciones hasta $0.3 \lesssim z \lesssim 1$, se puede empezar a determinar el parámetro de desaceleración q_0 ; es decir, desviaciones del flujo de Hubble lineal, y empezar a discriminar entre diversos modelos cosmológicos (fig. 5.8, panel inferior).

En años muy recientes (1999 a la fecha), la evidencia de SNs parece indicar que la expansión del Universo se está *acelerando*.

- *Método de Baade-Wesselink*: Si se conoce la temperatura de una SN, su emisión de cuerpo negro permite conocer su tamaño angular $\Delta\theta$, comparando el flujo recibido S_ν con el brillo superficial de un cuerpo negro a la misma temperatura, como sigue:

$$\Delta\theta = \left[\frac{S_\nu}{\pi I_\nu(T)} \right]^{1/2}. \quad (5.16)$$

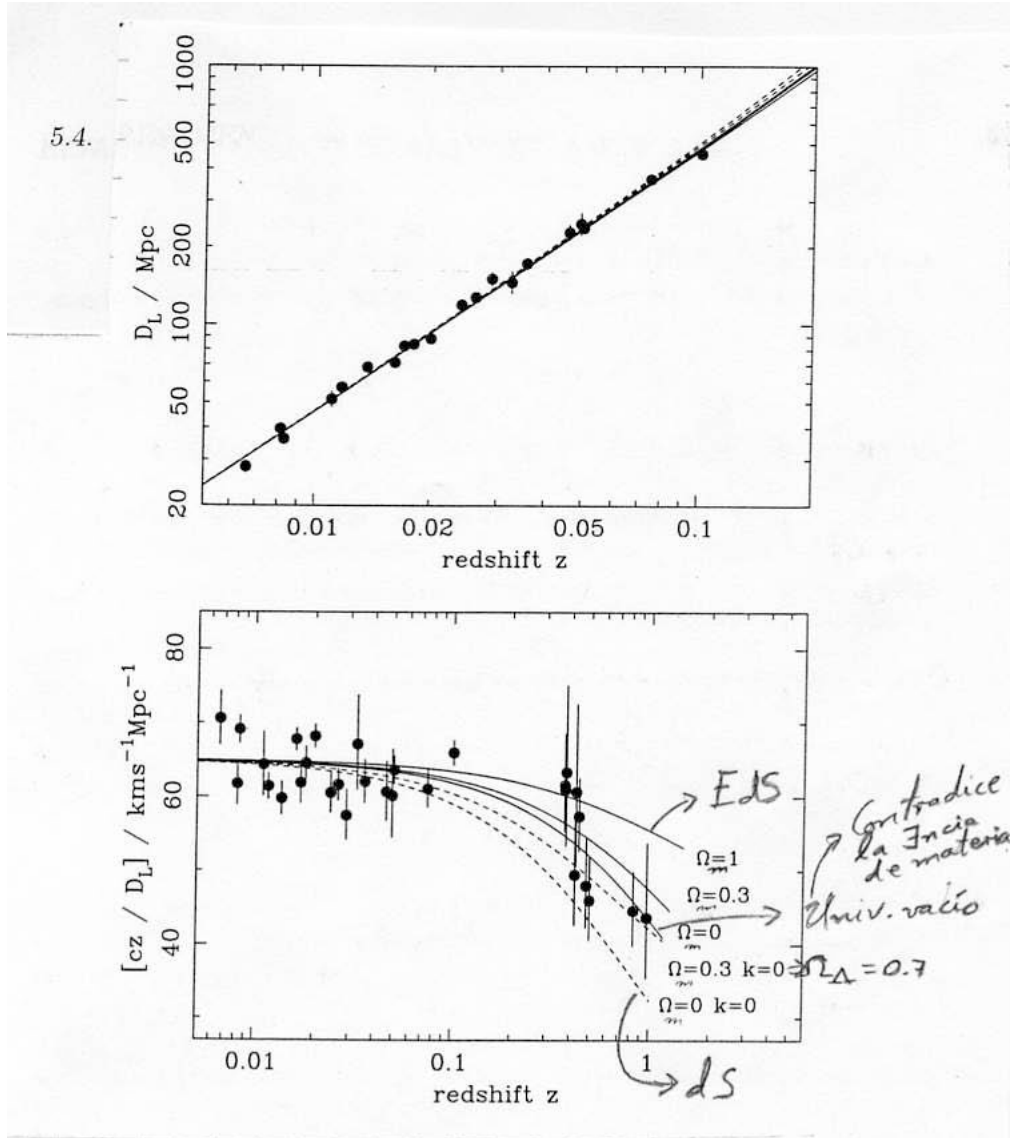


Figure 5.4. The type Ia supernova Hubble diagram. Using a measure of characteristic time as well as peak luminosity for the light curve, relative distances to individual SNe can be measured to 6% rms. Setting the absolute distance scale (D_L is luminosity distance) using local SNe in galaxies with Cepheid distances produces the upper panel (Riess, Press & Kirshner 1995, 1996). This shows that the large-scale Hubble flow is indeed linear and uniform, and gives an estimate of $H_0 = 64 \pm 3 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. The lower panel shows an expanded scale, with the linear trend divided out, and the high- z supernovae of Perlmutter *et al.* (1997a, b, c) and Garnavich *et al.* (1997) added. Comparison with the prediction of FRW models appears to favour a vacuum-dominated universe.

Figure 5.8: Relación distancia-redshift para supernovas.

Además, se puede inferir el tamaño real del material eyectado a través de la velocidad medida por efecto Doppler de líneas espectrales de la fotósfera: $r = \int v dt$. Entonces, comparando el tamaño angular con el real inferido se estima la distancia.

- *Decaimiento radiactivo*: Consistente en suponer que la luminosidad de una SN durante una buena parte de su curva de luz proviene del decaimiento radiactivo de ciertos elementos como ^{56}Ni y ^{56}Co , suposición que fue verificada en observaciones de la SN 1987A. Como el origen de las SNs Ia es bien conocido (enanas blancas que exceden el límite de Chandraselehar por acreción), las masas de estos elementos que deben estar presentes en ellas se pueden predecir teóricamente, y por lo tanto, la luminosidad. De graficar entonces m vs. z se sigue H_0 .

Los dos últimos métodos dan $H_0 = 60 \pm 10 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

- *Lentes gravitacionales*: Se puede demostrar que el retraso temporal entre diferentes imágenes de un objeto observado a través de una lente gravitacional es proporcional a H_0^{-1} , si se conocen la geometría y el potencial gravitacional del lente. Esto permite entonces estimar H_0 .
- *Aplicación del Efecto Sunyaev-Zeldovich*: Este efecto consiste en la disminución del flujo en la región de Rayleigh-Jeans de la radiación cósmica de fondo debido a la dispersión Compton causada por gas caliente en los cúmulos de galaxias. Esta disminución es proporcional a la densidad columnar de electrones del gas dispersor:

$$\frac{\Delta T}{T} \propto \int n_e dl.$$

Por otro lado, el brillo superficial en rayos X por brehmsstrahlung escala como

$$I_\nu \propto \int n_e^2 dl.$$

Dado que la temperatura se puede estimar a través de espectroscopía en rayos X, es posible entonces eliminar n_e y estimar la extensión del cúmulo a lo largo de la línea de visión. Suponiendo que el cúmulo tiene tamaño comparable en la dirección radial y en la perpendicular, la comparación entre la extensión estimada y el tamaño aparente da la distancia. Este método da $H_0 = 60 \pm 10 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, y es aplicable hasta distancias $\sim 1 \text{ Gpc}$.

5.4 Resumen

La tabla 5.1 muestra un resumen de los métodos para determinar distancias, y las distancias hasta las cuales se aplican.

Table 5.1: Resumen de determinaciones de distancias.

Distancia	Objeto	Método	Métodos Directos
4 Gpc	$z \sim 1$		SN Ia
1 Gpc			S-Z
90 Mpc	Coma	T-F, F-J, PF	B-W
15 Mpc	Virgo	NP, σ brillo sup.	
750 kpc	M31	Cefeidas	
50 kpc	NMM	Ajuste de SP	Eco de luz SN 1987a
50 pc	Hyadas	Paralaje	
< 50 pc	Vecindad solar	Paralaje	

Notas:

T-F: Tully-Fischer; F-J: Faber-Jackson; PF: Plano fundamental; NP: Nebulosas planetarias; S-P: Secuencia principal; S-Z: Sunyaev-Zeldovich; B-W: Baade-Wesselink.

Cabe notar que los métodos directos tienden a dar valores de $H_0 \sim 55\text{-}65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, mientras que la escalera tradicional da $H_0 \sim 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Peacock sugiere tomar entonces como un valor típico razonable

$$H_0 = 65 \pm 5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

Contrastando, los datos del tercer año del satélite WMAP, con base en las fluctuaciones acústicas de la CMBR (cap. 12) sugieren

$$H_0 = 73 \pm 3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (5.17)$$

5.5 Escalas de tiempo y edades

(Peebles pp. 103-106) (Peacock, sec. 5.2)

Otra de las tareas fundamentales de la cosmología observacional es determinar la edad del Universo. Además del interés que tiene por sí misma, ella nos puede dar información sobre el modelo correcto del Universo. Por ejemplo, hemos visto que en el modelo de Einstein-de Sitter, la edad del Universo es (ec. 4.55)

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}. \quad (5.18)$$

Si en cambio se llegase a demostrar que $t_0 > H_0^{-1}$ (como actualmente parece ser el caso), entonces se favorecería a modelos de expansión *acelerada* con constante cosmológica (ec. 4.59).

Observacionalmente, sólo podemos dar cotas inferiores, correspondientes a edades de objetos particulares, que claramente deben ser menores que la edad del Universo.

5.5.1 Cosmocronología nuclear

Este método se puede aplicar a meteoritos o rocas terrestres o de otros planetas, y permite estimar la edad del Sistema Solar (SS) en base a las abundancias observadas y los tiempos de vida de varios isótopos radioactivos medidos en el laboratorio. Sabemos que éstos decaen exponencialmente en el tiempo, de modo que

$$P(t) = P_0 e^{-t/\tau}, \quad (5.19)$$

donde P denota la abundancia del isótopo “padre”, con P_0 su valor inicial, y τ es el llamado tiempo de vida del isótopo, que corresponde al tiempo en el que la abundancia ha decaído por un factor de e , y que difiere por un factor de $\ln 2$ de la bien conocida “vida media”, el tiempo para decaer por un factor de 2).

Entonces la abundancia de un isótopo hijo D (“daughter”) está dada por:

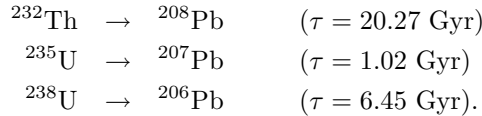
$$D(t) = D_0 + P_0[1 - e^{-t/\tau}] = D_0 + P(t)[e^{t/\tau} - 1]. \quad (5.20)$$

Aquí $D(t)$ y $P(t)$ al tiempo presente son conocidos, y también τ . Si conociéramos D_0 , podríamos encontrar la edad t . Sin embargo, en general no la conocemos. En estos casos se aprovecha que la llamada “fraccionación química”, que es la separación de las sustancias que componen una mezcla, causa variaciones espaciales en el cociente P_0/D_0 . Es decir, si pensamos que los elementos que componían inicialmente el Sistema Solar fueron producidos en una SN previa, diferentes fragmentos (meteoritos) tendrán diferentes proporciones P_0/D_0 . Sin embargo, podemos considerar un isótopo estable S de D , cuya proporción con respecto a D depende sólo del tiempo (según la concentración de D aumenta por el decaimiento de P), de modo que no varía entre muestras de la misma edad, y por lo tanto $D_0/S = \text{cte}$. Podemos entonces escribir

$$\frac{D(t)}{S} = \frac{D_0}{S} + \frac{P(t)}{S} (e^{t/\tau} - 1). \quad (5.21)$$

De esta manera, si tenemos dos o más muestras (p. ejm., meteoritos) a los cuales aplicar (5.21), podemos eliminar D_0/S y calcular t . O mejor aún, si tenemos muchas muestras, t se puede obtener a partir de la pendiente de un ajuste a los puntos de una gráfica $P(t)/S$ vs. $D(t)/S$.

Los “relojes radioactivos” más usados son:



Con este método se obtiene una edad del sistema solar (SS) de

$$t_{\text{SS}} = 4.57 \text{ Gyr}.$$

Además, también se obtienen las abundancias del material del que se formó el SS:

$$\frac{{}^{235}\text{U}}{{}^{238}\text{U}} \approx 0.33 \quad \frac{{}^{232}\text{Th}}{{}^{238}\text{U}} \approx 2.3. \quad (\text{material pre-solar})$$

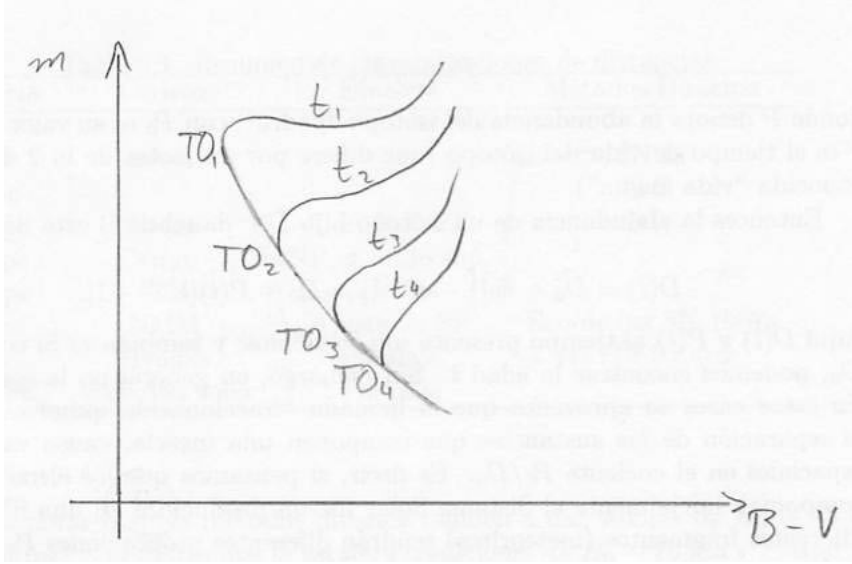


Figure 5.9: Diagrama HR de cúmulos estelares para 4 tiempos diferentes, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. “TO” denota el fin (“turnoff point”) de la secuencia principal en cada tiempo. Según el tiempo avanza, este punto se desplaza hacia estrellas menos masivas.

Por otro lado, se conocen los valores teóricos de estos cocientes para el proceso de nucleosíntesis en una SN como la progenitora del SS. Estos valores son:

$$\frac{^{235}\text{U}}{^{238}\text{U}} = 1.3 \quad \frac{^{232}\text{Th}}{^{238}\text{U}} = 1.7. \quad (\text{nucleosíntesis})$$

Suponiendo que la diferencia entre los cocientes observados en meteoritos y sus valores teóricos se debe al decaimiento radiactivo entre la explosión de la SN y la formación del SS, podemos calcular el tiempo entre estos dos eventos. Se obtiene $t_{\text{SN-SS}} \sim 5.4$ Gyr; sumando este tiempo a t_{SS} nos queda que la Galaxia (y el Universo) deben tener una edad

$$t_U \gtrsim 10.0 \pm 1.5 \text{ Gyr.}$$

5.5.2 Edades por diagrama HR de cúmulos

Como sabemos, las estrellas más masivas y luminosas evolucionan más rápidamente que las menos masivas. Por lo tanto, la distribución de las estrellas de un cúmulo en el diagrama HR es función de la edad del cúmulo (que se supone que es la edad de todas las estrellas; i.e., se supone que las estrellas de un cúmulo son “coetáneas” [“coeval”, en inglés]) (fig. 5.9).

Comparando con las trazas evolutivas teóricas de las estrellas, se puede inferir la edad del cúmulo. Los cúmulos más viejos parecen tener edades 13–

17 Gyr. Esto implica que, con un nivel de confianza del 95%, la edad del halo de nuestra galaxia es:¹

$$t_{\text{halo}} > 12 \text{ Gyr}$$

5.5.3 Enfriamiento de enanas blancas

La enanas blancas, última fase evolutiva de las estrellas de tipo solar, se enfrían radiativamente, después de haber agotado su combustible nuclear, de acuerdo a:

$$L \propto Mt^{-7/5}.$$

Se espera entonces que las luminosidades observadas sean siempre mayores a un valor mínimo, que corresponde al de las enanas blancas más viejas y menos masivas, de modo que la función de luminosidad de las enanas blancas debe exhibir un corte abrupto a una cierta luminosidad mínima, y en efecto esto es así. De aquí se encuentra una edad para el disco galáctico (incluyendo la evolución estelar vida en SP previa) de 9.3 ± 2.0 Gyr (Winget et al. 1987, ApJ 315, L77).

5.5.4 Discusión sobre las edades

Los estimadores que se basan en objetos del disco (SS, enanas blancas) dan edades 9–10 Gyr, mientras que los basados en cúmulos globulares (que en general están fuera del disco), dan $t > 12$ Gyr, implicando que probablemente estos objetos se formaron antes que el disco.

La evidencia observacional (detecciones de discos masivos de HI) sugiere que los primeros discos galácticos se formaron a $z \sim 3$. En un modelo con $\Omega_T = 1$, un redshift $z = 3$ corresponde a 1/8 de la edad del Universo. Entonces, la edad del Universo es 8/7 veces mayor que la edad del disco, o sea $t_U \sim 11 \pm 1.4$ Gyr. En contraste, si supusiéramos que los discos se formaron a $z = 1$, se encontraría $t_U = 15 \pm 1.9$ Gyr.

Por otro lado, no hay estimadores confiables de la z de la formación de cúmulos estelares. Si su formación ocurrió más o menos simultáneamente con la de las galaxias elípticas, $z \gtrsim 8$ es un estimado razonable del momento de su formación. En este caso, la formación de los cúmulos globulares habría ocurrido apenas unos cientos de millones de años después del BB.

5.5.5 Conclusiones sobre edades y distancias

De lo discutido arriba, y de la fig. 5.8, se pueden adoptar varias posiciones:

¹Nota: Peacock descarta los estimados más grandes de las edades de los cúmulos apelando a errores en los ajustes, sugiriendo que un estimado razonable es $t_{\text{cum}} \sim 15$ Gyr. Considerando además que cualquier incertidumbre en la escala de distancias es sistemática, estima un error mínimo $\sigma \sim 1.5$ Gyr. De allí que estima que con un nivel de confianza del 95% (2σ) la edad del Universo es t_{12} Gyr.

- Exigir (por “belleza del modelo”, y por simplicidad), un modelo de Einstein-de Sitter (EdS, con $\Omega_{m,0} = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$). En este caso, la edad del Universo es (ec. 4.55):

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \sim \frac{6.5 \text{ Gyr}}{h},$$

de modo que $H_0 = 65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ($h = 0.65$) $\Rightarrow t_0 \approx 10 \text{ Gyr}$, por lo que las edades de los cúmulos globulares están todas sobre-estimadas, o bien las distancias están mal medidas, y h debe ser más bien ~ 0.5 , a fin de que t_0 pueda ser $\gtrsim 12 \text{ Gyr}$.

- Aceptar que el modelo de EdS está descartado, y que $\Omega_{m,0} \approx 0.2$, pero todavía con $\Lambda = 0$. En este caso, $t_0 \approx 0.85H_0^{-1} \approx 8.1h^{-1} \text{ Gyr}$. Esto favorecería $h \approx 0.6$ y $t_0 \approx 13.5 \text{ Gyr}$.
- Promediando sobre todas las técnicas para obtener $h \approx 0.65$ y $t_0 \approx 14 \text{ Gyr}$, $\Rightarrow t_0 \approx 0.93H_0^{-1}$. Esto es consistente con un modelo plano con $\Omega_{m,0} \approx 0.3$ y $\Omega_\Lambda \approx 0.7$. Estos son los parámetros más aceptados hoy en día. Más adelante estudiaremos más evidencia que sugiere este valor de Λ .

Chapter 6

Historia Térmica del Universo

6.1 Introducción

Como hemos visto en los capítulos 1 y 2, el Universo se expande, y actualmente contiene una radiación de fondo de micro-ondas, con un espectro de cuerpo negro a $T = 2.725$ K.

Si suponemos que el Universo se expande adiabáticamente, entonces en el pasado debió haber estado más caliente y denso, teniendo una singularidad ($T, \rho \rightarrow \infty$) en un tiempo pasado finito (el BB). Como hemos mencionado en el capítulo 1, la física que conocemos probablemente no se aplica antes del tiempo de Planck ($\sim 10^{-43}$ s después del BB), pero de entonces para acá sí y, conociendo la evolución de la temperatura desde el BB hasta el presente, es posible determinar el estado de ionización y la formación “primordial” de los elementos ligeros (la “*nucleosíntesis primordial*”). Estos procesos se basan en algunos principios sencillos:

- *La expansión del Universo preserva la forma de cuerpo negro del fondo de radiación, variando sólo la temperatura que lo caracteriza.*

Esto se puede ver fácilmente recordando que los fotones siguen la estadística de Bose-Einstein, de manera que el número medio de fotones N por modo normal de oscilación está dado por (ver, p. ejm., Peebles, pp 134-135):

$$N = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (6.1)$$

Recordando que en el Universo hay $\sim 10^9$ fotones por nucleón (cap. 1), la mayoría de los fotones del Universo no han sido absorbidos, por lo que su

número por modo permanece $\sim \text{cte.}$ Sin embargo, sabemos que (§4.3.1):

$$\lambda(t) \sim a(t) \sim \frac{1}{1+z},$$

por lo tanto:

$$N \sim \text{cte.} \Rightarrow T \sim (1+z), \quad (6.2)$$

i.e.,

$$T(t) = T_0(1+z), \quad (6.3)$$

donde T_0 es la temperatura actual del Universo.

- Según t avanza y T disminuye, la energía media de los fotones disminuye. A épocas tempranas, mientras esta energía es suficientemente alta para que haya acoplamiento con partículas de un cierto tipo, el número de éstas está dado por su *equilibrio térmico con la radiación*. Una vez que T cae por debajo de esa energía, la radiación se *desacopla* de esas partículas, cuyos números empiezan a estar dadas por reacciones entre ellas.
- Cuando el tiempo característico para esas reacciones,

$$\tau = \frac{1}{n\sigma v},$$

donde n = densidad numérica (unidades de L^{-3}), σ = sección eficaz (unidades de L^2), v = velocidad de las partículas (unidades de LT^{-1}), se vuelve mayor que el tiempo de Hubble, la reacción se detiene (o “apaga”) para todo fin práctico, y los números de las partículas se fijan (“congelan”) en el valor que tenían entonces.

La evolución de la temperatura de la radiación y los principales eventos que ocurrieron a determinadas temperaturas están representados en la fig. 6.1.

6.2 Termodinámica de la Expansión

(Peacock, sec 9.1)

Ya hemos visto (§4.3.2) que las densidades de materia y radiación escalan con la expansión como¹

$$\rho_m(t) \propto R^{-3}(t) \quad \text{Energía tipo polvo (no relativista)} \quad (6.4)$$

$$\rho_r(t) \propto R^{-4}(t) \quad \text{Energía tipo radiación (relativista)} \quad (6.5)$$

Suponemos además que la *expansión es adiabática* (pequeñas fluctuaciones en la entropía de la materia son despreciables frente a la entropía de la radiación, de nuevo porque $n_\gamma/n_m \sim 10^9$).

¹**Nota:** Se generalizan las leyes (6.4) y (6.5) para decir que la primera se aplica en general a cualquier partícula no-relativista tipo polvo (i.e., con presión despreciable: $P \ll \rho c^2$) y la segunda a cualquier partícula relativista (p. ej., neutrinos).

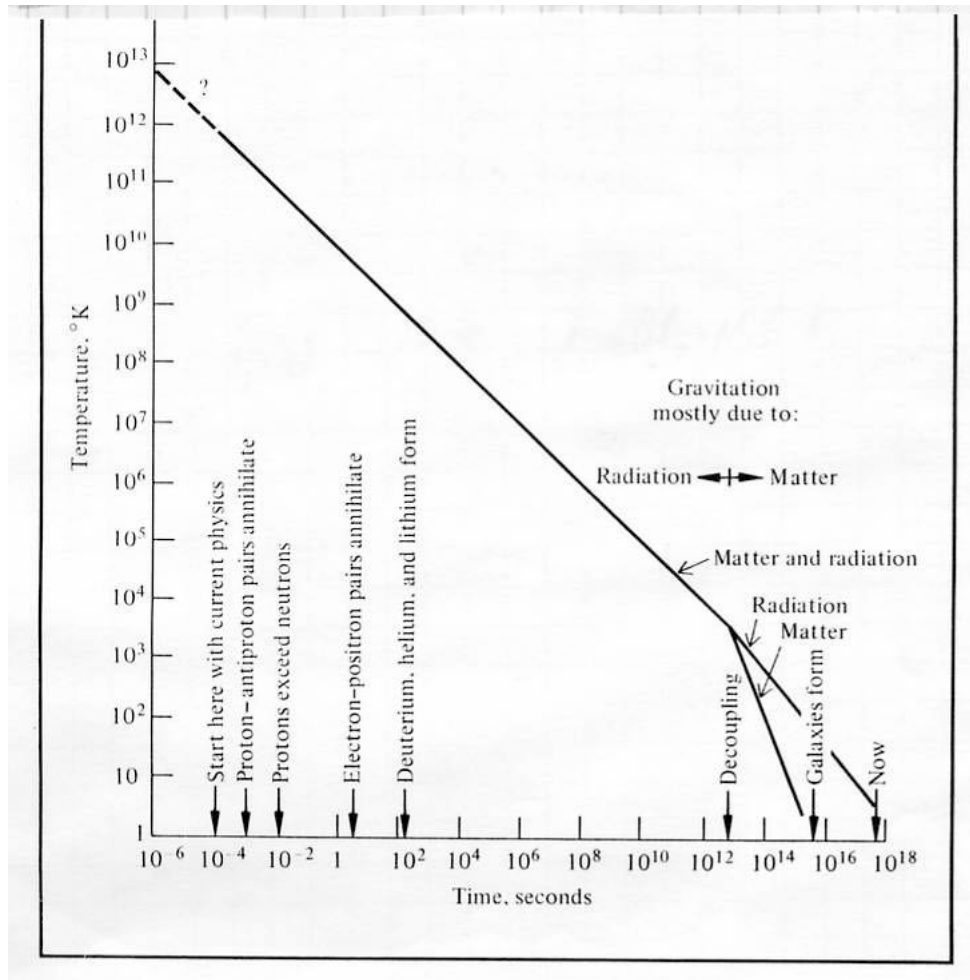


Figure 6.1: Evolución de la temperatura en el Universo.

Podemos calcular entonces el escalamiento de las temperaturas de la radiación y de la materia con el redshift. Para la radiación, sabemos que su densidad de energía es:

$$\rho_r c^2 = aT^4.$$

Por lo tanto, de la ec. (6.5),

$$\Rightarrow T \propto R^{-1} \quad \text{Temperatura de la radiación} \quad (6.6)$$

Esta ley vale también para la temperatura de la materia mientras ésta está acoplada a la radiación (es decir, mientras el Universo estaba suficientemente ionizado para que los fotones de la CMBR estuvieran en equilibrio térmico con la materia) pues, nuevamente debido al mucho mayor número de fotones que de bariones, la materia está esencialmente sumergida en el baño térmico de los fotones. Finalmente, a $z \sim 100$, la materia y la radiación finalmente terminan de desacoplarse (§6.8.2). A partir de este momento, la temperatura de la materia evoluciona independientemente de la de la radiación, y podemos aplicar la expansión adiabática para un gas ideal con $\gamma = 5/3$:

$$\begin{aligned} P &\propto \rho^\gamma \quad \text{Ley adiabática;} & P &\propto \rho T \quad \text{Gas ideal,} \\ \Rightarrow T &\propto \rho^{\gamma-1} \Rightarrow T \propto R^{3(1-\gamma)} = R^{-2} & \text{Temperatura de la materia para } z \lesssim 100 \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.3 Fondos de equilibrio no colisional

Mientras la energía de los fotones de la radiación de fondo es mayor que la energía necesaria para la creación de pares partícula-antipartícula, hay esencialmente tantas partículas como fotones, y podemos hablar de “fondos” (“océanos”) de partículas permeando el Universo. Resulta que estos fondos de partículas en el Universo temprano pueden describirse como:

- *En equilibrio térmico.* Esto se puede ver notando que el tiempo dinámico del Universo es

$$t_d \sim H^{-1} = \frac{R}{\dot{R}} \approx \left(\frac{8\pi G \rho_T}{3} \right)^{-1/2} \propto R^2$$

donde en la tercera igualdad se usó la EF con $k = 0$, y la última proporcionalidad es válida para el caso de dominación por radiación ($\rho_r \propto T^4$).

Por otro lado, los tiempos para las reacciones son del orden del tiempo entre colisiones entre las partículas:

$$t_c = (n\sigma v)^{-1} \propto \rho_m^{-1} \propto R^3$$

Es decir, $t_c/t_d \sim R$, de manera que a épocas suficientemente tempranas hay muchas colisiones por tiempo dinámico, y el equilibrio térmico es cada vez mejor suposición según $z \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$), mientras que según t aumenta, las reacciones tienden a detenerse.

- *Gas ideal sin interacciones.* Esto se debe a que, a pesar de lo anterior, resulta que sólo una pequeña fracción del total de las partículas está interaccionando a un tiempo dado.

Bajo estas suposiciones es aplicable la termodinámica de un gas perfecto posiblemente relativista. La condición de equilibrio térmico implica que se pueden usar las estadísticas de Fermi-Dirac o de Bose-Einstein, mientras que la suposición de gas no colisional permite calcular las variables físicas (p. ejm., presión, densidad, energía interna, etc.) directamente como momentos de la función de distribución, solución de la Ecuación de Boltzmann. La función de distribución es:

$$f(p) = \frac{1}{\exp \left[\frac{\epsilon - \mu}{kT} \right] \pm 1}, \quad (6.8)$$

con el signo + correspondiente a la distribución de Fermi-Dirac, y el signo - a la de Bose-Einstein. μ es el potencial químico, que, según Peacock, es cero para reacciones en equilibrio (otros autores toman $\Sigma\mu = 0$), y ϵ es la energía de las partículas, relacionada con el momento $p = \gamma m v$ por

$$\epsilon = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = \gamma m_0 c^2,$$

con m la masa en reposo de la partícula y $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

TAREA: Argumentar que $\mu = 0$ para una reacción en equilibrio, escribiendo la 1ª Ley de la Termodinámica incluyendo la dependencia con el número de partículas:

$$dE = TdS - PdV + \mu dN.$$

Si la reacción está en equilibrio, ¿Cómo debe ser el valor de E para el valor de equilibrio de N ?

La densidad numérica de partículas se obtiene integrando la función de distribución sobre todos los momentos:

$$n = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f(p) 4\pi p^2 dp, \quad (6.9)$$

en donde g es el peso estadístico del estado y $(2\pi\hbar)^3$ es el volumen de la celda unitaria en el espacio fase. Análogamente, la densidad de energía está dada por:

$$u = \rho c^2 = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f(p) \epsilon(p) 4\pi p^2 dp. \quad (6.10)$$

Para obtener la presión, recordemos que en teoría cinética ella está dada por $P = n\langle pv \rangle/3 = n\langle p^2 c^2 / \epsilon \rangle/3$, en donde en la última igualdad se usó que $p = \epsilon v / c^2$. Finalmente obtenemos

$$P = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f(p) \frac{p^2 c^2}{3\epsilon} 4\pi p^2 dp. \quad (6.11)$$

En particular, para n obtenemos:

- *Caso ultra-relativista* ($kT \gg m_0c^2$; masa de las partículas despreciable):

$$n = \left(\frac{kT}{c}\right)^3 \frac{4\pi g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{e^y \pm 1} \propto T^3 \quad (6.12)$$

- *Caso no relativista* ($kT \ll m_0c^2 \sim \epsilon$)

$$\begin{aligned} n &= \exp\left[-\frac{m_0c^2}{kT}\right] (2m_0kT)^{3/2} \frac{4\pi g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty e^{-y^2} y^2 dy \\ &= g \frac{(2\pi m_0kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[-\frac{m_0c^2}{kT}\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{m_0c^2}{kT}\right] T^{3/2} \end{aligned} \quad (6.13)$$

TAREA: Obtener las ecs. (6.12) y (6.13).

La dependencia exponencial en (6.13) muestra que la densidad de equilibrio de las partículas decae abruptamente cuando kT cae por debajo de mc^2 . A esta temperatura se le conoce como “umbral”, y es aquella a partir de la cual los fotones tienen suficiente energía para crear pares partícula-antipartícula. Nótese también que la temperatura umbral es menor para partículas de menor masa: las partículas menos masivas permanecen en equilibrio con la radiación de fondo hasta tiempos más tardíos (temperaturas más bajas). Por debajo del umbral, las partículas se *desacoplan* del fondo de radiación.

En principio, el número de partículas de cada tipo tendería a cero a través de la aniquilación de pares, pero en realidad, hay un ligero exceso de materia por sobre la antimateria (aún no explicado), de manera que al final restan sólo las partículas de materia una vez que se han aniquilado todas las de antimateria.

Nótese también que las partículas de materia se pueden todavía acoplar a la radiación a través de procesos diferentes al de la creación/aniquilación de pares. Así por ejemplo, los electrones permanecen acoplados a la radiación a través de dispersión Thomson hasta $z \sim 100$ (o $T \sim 300$ K; sec. 6.8.2).

6.4 Entropía del fondo

Una cantidad muy importante es la entropía del fondo térmico. Esta se puede calcular de la 1ª Ley de la Termodinámica con $\mu = 0$:

$$dE = TdS - PdV.$$

TAREA: de esta expresión, mostrar que

$$S = \frac{E + PV}{T} \quad (6.14)$$

tomando a T y V como las variables independientes, de modo que $S = S(T, V)$ y $E = E(T, V)$, y recordando que S y E son variables *extensivas*, i.e., $E \propto V$, $S \propto V$.

La ec. (6.14) se puede expresar usando (6.10) y (6.11), con $E = uV$:

$$S = \frac{4\pi gV}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(e^{\frac{\epsilon}{kT}} \pm 1)} \left[\frac{\epsilon}{T} + \frac{p^2 c^2}{3\epsilon T} \right], \quad (6.15)$$

que al evaluarse da:

- *Límite relativista* ($kT \gg m_0 c^2$)

$$S = \begin{cases} 3.6 Nk & \text{(bosones)} \\ 4.2 Nk & \text{(fermiones)} \end{cases} \quad (6.16)$$

- *Límite no-relativista* ($kT \ll m_0 c^2$)

$$S = \left(\frac{m_0 c^2}{kT} \right) Nk. \quad (6.17)$$

En general, vemos que en todos los casos:

$$S \propto N \quad (6.18)$$

es decir, *la entropía es proporcional al número de partículas*.

Como ya hemos visto, el número de fotones es mucho mayor que el de nucleones (o también llamados bariones). Por lo tanto, *los fotones dominan la entropía del Universo* y a n_r/n_m se le llama también la *entropía por barión*.

Calculemos la densidad de entropía en la radiación:

$$s = \frac{S}{V} = \frac{u + P}{T} = \frac{4}{3} \frac{u}{T} = \frac{4}{3} a T^3,$$

en donde utilizamos que para la radiación, $P = \frac{1}{3}u$. Dividiendo s por la densidad de materia promedio del Universo, obtenemos la entropía por unidad de masa

$$\frac{S}{M} \approx \frac{1.1 \times 10^{16}}{\Omega h^2} \text{ erg K}^{-1} \text{ g}^{-1} \quad (6.19)$$

Por comparación, para agua a 300K, $S/M \sim 1.4 \times 10^5 \text{ erg K}^{-1} \text{ g}^{-1}$. Por eso las fluctuaciones locales en la entropía debidas a la materia son completamente despreciables en comparación a la entropía total del Universo, dominada por la CMBR, y la expansión adiabática es una buena aproximación.

6.5 Resultados para el caso ultra-relativista ($kT \gg mc^2 \Rightarrow \epsilon/kT \rightarrow pc/kT$)

(Ver también Peebles pp 160-162)

Conviene ahora dar las expresiones para las densidades numérica, de energía y de entropía después de evaluar las integrales en (6.9) a (6.13), para el caso relativista, pues son de uso muy frecuente en el cálculo de las condiciones físicas del Universo muy temprano:

- *Bosones*

$$u_B = \frac{g\pi^2 kT}{30} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 = aT^4 \quad (6.20)$$

$$P_B = \frac{1}{3} u_B \quad (6.21)$$

$$s_B = \frac{2\pi^2 gk}{45} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 = \frac{4}{3} aT^3 \quad (6.22)$$

$$n_B = \frac{1}{3.6} \frac{s_B}{k} \quad (6.23)$$

(recordar que $g = 2$ para fotones, por los dos estados de la polarización).

- *Fermiones* (En particular, neutrinos)

Las integrales en este caso se pueden calcular usando la identidad

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1}$$

(de modo que un gas de fermiones se ve como una mezcla de bosones a dos temperaturas diferentes). Evaluando las integrales se encuentra:

$$n_F = \frac{3}{4} \frac{g_F}{g_B} n_B \quad (6.24)$$

$$u_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} u_B \quad (6.25)$$

$$s_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} s_B \quad (6.26)$$

6.6 Desacoplamiento de los neutrinos, aniquilación de pares e^+ y e^- , y recalentamiento de la radiación de fondo

(Peebles pp. 162-165)

6.6. DESACOPLAMIENTO DE LOS NEUTRINOS, ANIQUILACIÓN DE PARES e^+ Y e^- , Y RECALENTAMIENTO

Una primera aplicación de los resultados anteriores es el cálculo del “recalentamiento” de la radiación de fondo producido por la aniquilación de pares e^+ y e^- cuando éstos se desacoplaron de la radiación de fondo, y la energía procedente de su aniquilación fue devuelta al fondo de radiación. Este recalentamiento causa que el fondo de radiación esté actualmente a una temperatura ligeramente mayor que el equivalente fondo de neutrinos, que no sufrió recalentamiento alguno, como explicaremos a continuación.

Curiosamente, los neutrinos ν se acoplan a la radiación a través de su acoplamiento con los pares e^+ y e^- , por medio de la reacción

$$\nu + \bar{\nu} \leftrightarrow e^- + e^+, \quad (6.27)$$

A su vez, los pares e^+ y e^- están acoplados a la radiación a través de la reacción

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^- + e^+, \quad (6.28)$$

en donde γ denota a los fotones (no confundir con el factor relativista denotado por el mismo símbolo). La reacción (6.28) constituye entonces el puente entre neutrinos y radiación. Sin embargo, como veremos a continuación, la reacción (6.27) se apaga a épocas muy tempranas ($T \gtrsim 10^{10}$ K), y a partir de entonces, los neutrinos evolucionan de manera esencialmente independiente de la radiación. Por el contrario, los pares e^+ y e^- permanecen acoplados a la radiación hasta temperaturas $T \sim 6 \times 10^9$ K, de modo que cuando finalmente comienzan a aniquilarse, sólo pueden transferir su energía a los fotones, mas no a los neutrinos. Procedemos ahora a comparar la entropía en ésta con la de los neutrinos para saber el factor por el cual se recalentó la radiación.

A) Comencemos por estimar el tiempo y la temperatura del momento de desacoplamiento de los neutrinos:

1. Tomemos la EF para un Universo plano (sec. 4.1)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_T.$$

Suponiendo dominación por radiación ($\rho_T = \rho_r = U_r/c^2$), y sabiendo que $U_r \propto a^{-4}(t)$, se puede demostrar que la edad del Universo (\sim tiempo de Hubble) como función de T es:

$$t_u = \left(\frac{3c^2}{32\pi G u_r}\right)^{1/2} \approx 2 T_{10}^{-2} \text{ s} \quad (6.29)$$

con $T_{10} = T/(10^{10} \text{ K})$.

TAREA: demostrar ambas igualdades.

2. De acuerdo con la ec. (6.24), la densidad numérica de neutrinos en equilibrio es (notando que $g = 2$ para los neutrinos por sus dos posibles estados de espín; nótese que la antipartícula del neutrino es un neutrino con espín opuesto):

$$n_\nu = \frac{3}{4}n_\gamma,$$

donde n_γ es la densidad numérica de fotones. Por lo tanto, de la ec. (6.23):

$$n_\nu = \frac{3}{4}n_\gamma = \frac{1}{3.6} \frac{aT^3}{k} = 1.7 \times 10^{31} T_{10}^3 \text{ cm}^{-3}. \quad (6.30)$$

3. La sección eficaz (relacionada con la constante de acoplamiento, cap. 1) de la reacción $\nu + \bar{\nu} \rightarrow e^- + e^+$, que es la principal reacción de acoplamiento entre neutrinos y materia, es

$$\sigma \sim 4 \times 10^{-44} T_{10}^2 \text{ cm}^2. \quad (6.31)$$

4. El número promedio de veces que un neutrino sufre esa reacción en el tiempo de expansión es:

$$n\sigma c t_u \sim 4 \times 10^{-2} T_{10}^3, \quad (6.32)$$

donde $n\sigma c$ es la tasa de reacción (caso relativista: $v \sim c$). Esto significa que esta reacción es muy frecuente hasta cuando $T \gtrsim 3 \times 10^{10} \text{ K}$ ($t \sim 10 \text{ s}$). Después de este tiempo, los neutrinos se desacoplan de la materia (el número de colisiones por neutrino en el tiempo de Hubble es $\ll 1$).

Nótese que, a partir de que los neutrinos se desacoplan, su número se congela, pues la reacción por la que se aniquilarían deja de ocurrir. *Es por esto que se piensa que en la actualidad hay casi tantos neutrinos como fotones* (muchos más que bariones). *Por lo tanto, si tuvieran suficiente masa ($\sim 8 \text{ eV}$ por especie de neutrino), alcanzaría para cerrar el Universo.* Sin embargo, estudios recientes utilizando datos de WMAP, el Sloan Digital Sky Survey y las supernovas de tipo Ia sugieren que la suma de las masas de los tres tipos de neutrino es menor a 0.2–0.6 eV (Goobar et al. 2006, J. Cosmol. Astropart. Phys. 06, 19).

B) Poco después de que los neutrinos se desacoplan de los e^\pm , la temperatura de la CMBR cae por debajo del valor mínimo para producir pares e^\pm , y éstos comienzan a aniquilarse produciendo fotones, transfiriendo esta energía a la CMBR, y por lo tanto causando un aumento en la temperatura de los fotones con respecto a la de los neutrinos, que ahora calcularemos.

1. La densidad de entropía de los fotones más los pares e^\pm relativistas antes de la aniquilación, es (ecs. [6.26] y [6.22])

$$s = s_\gamma + s_{e^-} + s_{e^+} = \left(1 + 2 \times \frac{7}{8}\right) s_\gamma = \frac{11}{3} a T_\gamma^3.$$

Mientras los neutrinos están acoplados, su temperatura T_ν satisface $T_\nu = T_\gamma$.

2. Al aniquilarse los pares e^\pm , esta energía se transfiere a los fotones, *manteniendo la entropía total constante* (recordemos que la expansión del Universo es adiabática). Entonces:

$$s_{\text{antes}(\gamma+e^\pm)} = s_{\text{después}(\gamma)}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{3}aT_{\text{antes}}^3 = \frac{4}{3}aT_{\text{después}}^3,$$

en donde los subíndices “antes” y “después” se refieren al tiempo de aniquilación de los pares e^\pm . Obtenemos entonces

$$\frac{T_{\text{después}}}{T_{\text{antes}}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}.$$

Antes de la aniquilación, $T_\nu = T_\gamma = T_{\text{antes}}$, mientras que después de ella, $T_\nu = T_{\text{antes}}$ y $T_\gamma = T_{\text{después}}$. Concluimos entonces que

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\text{después}} \quad (6.33)$$

Esta relación se mantiene constante desde el desacoplamiento de los neutrinos hasta el presente, por lo que al día de hoy

$$T_\nu = 1.95 \text{ K}. \quad (6.34)$$

Un fondo de neutrinos de tan baja energía parece muy difícil de detectarse directamente, aunque, como ya mencionamos, su contribución a la gravedad es importante. Aún cuando no parecen ser suficientes para cerrar el Universo, su densidad de energía es $(7/8) \times (4/11)^{4/3}$ veces la de los fotones. Para tres especies de neutrinos, esto aumenta la densidad de energía de partículas relativistas en el Universo por un factor de 1.68.

TAREA: Demostrar que, dadas las temperaturas actuales del fondo de neutrinos y del fondo de fotones, actualmente se tiene que

$$n_\nu = \frac{3}{11}n_\gamma.$$

6.7 Otras reliquias de la Gran Explosión

El desacoplamiento de los neutrinos y el subsecuente “congelamiento” (preservación) de la última condición de equilibrio es también representativo de lo que le ocurre a otras especies, llamadas en general “reliquias” de la Gran Explosión: aquellas cuyas tasas de reacción $n\sigma v$ no son muy altas.

Recordemos, de las ecs. (6.12) y (6.13):

$$n \propto \begin{cases} T^3 & \text{caso relativista} \\ e^{-\frac{mc^2}{kT}} T^{3/2} & \text{caso no relativista,} \end{cases}$$

i.e., que en el caso no-relativista la densidad de partículas en equilibrio térmico decae exponencialmente con la temperatura a partir del momento en que $kT \sim mc^2$. Sin embargo, si la especie se desacopla antes de que la temperatura caiga por debajo de ese valor porque la tasa de reacción se hace muy lenta ($n\sigma c < H$), entonces es posible que la densidad de la especie se quede “congelada” en el último valor de equilibrio que tuvo antes de desacoplarse, en particular mayor que el valor de equilibrio a tiempos posteriores (temperaturas más bajas).

6.8 (Re)combinación (formación) de Hidrógeno y desacoplamiento de la radiación

(Peacock sec. 9.3, Peebles pp. 165-174, KT pp. 77-81)

6.8.1 Recombinación

En equilibrio térmico, las reacciones que forman cierto tipo de partículas en general proceden tanto en una dirección como en la otra, de manera que los números de las especies en ambos lados de la reacción se conservan. En particular, mientras la temperatura de la CMBR es suficientemente alta para que ésta ionice los átomos de Hidrógeno, hay tantas ionizaciones como recombinaciones. Mucho tiempo después de las épocas que hemos considerado hasta ahora, hacia $z \sim 1000$ y $T \sim 3000$ K, la energía de los fotones del fondo de radiación finalmente se hace menor que la energía de ionización, de manera que los átomos formados por recombinaciones de electrones y protones ya no son rápidamente ionizados de nuevo, y el H se empieza a acumular.

Este proceso es mal llamado “recombinación” por analogía con la física de las regiones HII, en las cuales la radiación estelar ioniza al gas neutro, y posteriormente los e^- y p se recombinan. Sin embargo, en el caso cosmológico el gas nunca ha estado previamente neutro hasta ahora, de manera que sería más apropiado llamar a este fenómeno la primera “combinación” de Hidrógeno neutro, pero el nombre “recombinación” ha permanecido. Encontraremos ahora el redshift y la temperatura a las cuales se produjo la recombinación.

En equilibrio térmico, la fracción de ionización $x \equiv n_e/n_B$ está dada por la ecuación de Saha:

$$\frac{x_{eq}^2}{1 - x_{eq}^2} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_B (2\pi\hbar)^3} e^{-E_I/kT} \quad (6.35)$$

en donde E_I es el potencial de ionización, $n_B = n_H + n_p$, y n_e , n_p , n_H y n_B son respectivamente las densidades numéricas de electrones, protones, átomos de H

(neutros) y total de nucleones (es decir, bariones). Nótese que la neutralidad del Universo implica que $n_e = n_p$. Escribiendo

$$T(z) = 2.73 (1 + z) \text{ K} \quad (6.36)$$

y

$$n_B(z) = 1.12 \times 10^{-5} \Omega_B h^2 (1 + z)^3 \text{ cm}^{-3}, \quad (6.37)$$

en donde $\Omega_B = \mu m_p n_B / \rho_{cr}$, es el parámetro de densidad de los bariones y μ es el peso molecular promedio, nos queda

$$\log \left(\frac{x_{eq}^2}{1 - x_{eq}^2} \right) = 20.99 - \log \left[\Omega_B h^2 (1 + z)^{3/2} \right] - \frac{25050}{(1 + z)}, \quad (6.38)$$

donde el $\log = \log_{10}$.

Tomando $\Omega_B h^2 = 0.013$ (el valor que arroja las abundancias correctas de los elementos ligeros en la nucleosíntesis primordial, como veremos en la sec. 8.5), se encuentra que $x_{eq} = 1/2$ a temperatura y redshift

$$T_{\text{rec}} = 3700 \text{ K}; \quad z_{\text{rec}} = 1360. \quad (6.39)$$

Si en cambio tomamos el valor $\Omega_B h^2 = 1$ (resultado del prejuicio que se tenía hasta hace algunas décadas de que el Universo es plano por efecto de la materia bariónica), se encuentra $z_{\text{rec}} = 1520$.

6.8.2 Ionización residual

Posteriormente a la época de recombinación, dada por las ecs. (6.39), podría pensarse que la fracción de ionización continúa dada por la ecuación de Saha, ec. (6.35). Sin embargo, esto no es así debido a una serie de factores que ahora discutiremos.

Comencemos por comparar la tasa de recombinaciones con la tasa de expansión del Universo (H). Podemos evaluar la tasa de reacción para las recombinaciones como

$$\Gamma = \alpha_B n_B, \quad (6.40)$$

en donde

$$\alpha_B = 3 \times 10^{-11} T^{-1/2} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

es el coeficiente de recombinación. Usando (6.37) y (6.39) obtenemos

$$\Gamma \approx 8 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}. \quad (6.41)$$

Por otro lado, la tasa de expansión a este redshift (el inverso del tiempo de Hubble a z_{rec}) es

$$H(z_{\text{rec}}) \approx t_{\text{rec}}^{-1},$$

en donde t_{rec}^{-1} es la edad del Universo en la época de recombinación, $z \sim 1360$. Suponiendo que a esa época ya domina a la materia (recordemos que la época

de igualdad materia-radiación fue $z_{eq} \sim 10^4$; sec. 4.3), podemos calcular la edad del Universo. En efecto, para el modelo de Einstein-de Sitter (sec. 4.4.4)

$$t_{\text{rec}} = t_0 \left(\frac{1}{1 + z_{\text{rec}}} \right)^{3/2} \quad (6.42)$$

$$\Rightarrow t_{\text{rec}}^{-1} \approx \left[\frac{t_0}{1360^{3/2}} \right]^{-1} \approx 10^{-13} \text{ s}^{-1}. \quad (6.43)$$

Es decir,

$$t_{\text{rec}} \approx 3.2 \times 10^5 \text{ yr}. \quad (6.44)$$

Vemos entonces que $\Gamma \gg t_{\text{rec}}^{-1}$, lo que sugeriría que la expresión de equilibrio de Saha debería de seguir valiendo hasta después de t_{rec} . Sin embargo, no es así, porque las recombinaciones, a pesar de ser muy rápidas, también producen fotones ionizantes. A diferencia del caso de los neutrinos y pares e^\pm , en este caso los fotones emitidos no se incorporan a la radiación de fondo debido a la alta sección eficaz para su re-absorción.

En particular:

- Las recombinaciones al estado base emiten fotones del continuo de Lyman, que ionizan otro átomo.
- Las recombinaciones al nivel 2 seguidas de una transición 2P-1S emiten un fotón Ly- α . Este puede excitar otro átomo al nivel 2, que después se puede ionizar por otro fotón de la serie de Lyman.

Sólo hay dos posibles salidas:

- Esperar a que la expansión corra al rojo de estos fotones (poco eficaz, pues no viajan grandes distancias antes de ser absorbidos).
- Decaimientos por dos fotones de nivel 2S al 1S. Este proceso es más eficaz que el anterior, pues estos fotones ya no alcanzan a ionizar o excitar otro átomo.

La transición 2S-1S está prohibida a primer orden. La emisión de dos fotones es un proceso de segundo orden, y es de todos modos mucho más lento que la recombinación directa al estado base. Es este cuello de botella el que causa que la fracción de ionización decaiga mucho más lentamente que el valor de equilibrio dado por (6.38).

Un modelo simplista de este proceso es como sigue: una vez que un protón y un electrón se recombinan al nivel 2S, este átomo excitado puede:

- decaer al nivel 1S por el proceso de emisión de dos fotones, con tasa $\Lambda_{2\gamma}$, o bien

6.8. (RE)COMBINACIÓN (FORMACIÓN) DE HIDRÓGENO Y DESACOPAMIENTO DE LA RADIACIÓN 83

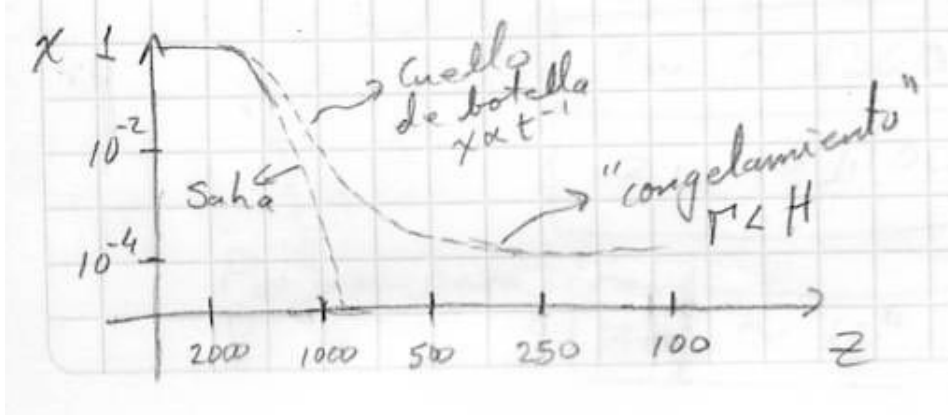


Figure 6.2: Cuello de botella para la recombinación

- ser re-excitado, sufriendo una transición hacia un nivel más alto, o siendo ionizado nuevamente, con tasa combinada $\Lambda_u(T)$ (donde el subíndice denota “upwards”).

De estos dos procesos, sólo el primero nos deja como producto final un átomo neutro en el estado base. Entonces, podemos escribir

$$\frac{d(n_B x)}{dt} = -\alpha_B (n_B x)^2 \frac{\Lambda_{2\gamma}}{\Lambda_{2\gamma} + \Lambda_u(T)} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (6.45)$$

en donde el factor $\Lambda_{2\gamma}/(\Lambda_{2\gamma} + \Lambda_u(T))$ denota la fracción de transiciones por unidad de tiempo que terminan en el estado base. El factor $(n_B x)^2$ representa el hecho de que la recombinación es un proceso de dos cuerpos (electrón y protón), y aprovecha los hechos de que $n_p = n_e$ y de que $n_p = x n_B$.

Integrando sobre tiempos cortos comparados con aquéllos sobre los que T varía significativamente, se obtiene

$$n_B x \propto t^{-1} \quad (6.46)$$

que es un proceso mucho más lento que el de decaimiento exponencial dado por la ec. de Saha (ecs. [6.35] o [6.38]).

Cuando finalmente $\Gamma < H(t)$, se produce el ya conocido “congelamiento”, pero en este caso no al valor de equilibrio, sino al del cuello de botella, de manera que la fracción de ionización final es como se muestra en la fig. 6.2 (para más detalles ver, p. ejm., la fig. 6.8 de Peebles).

Se encuentra que el valor “congelado” de x es

$$x \approx 1.2 \times 10^{-5} \frac{(\Omega_T h^2)^{1/2}}{\Omega_B h^2} \quad (6.47)$$

valor que se alcanza a $z \sim 100$.

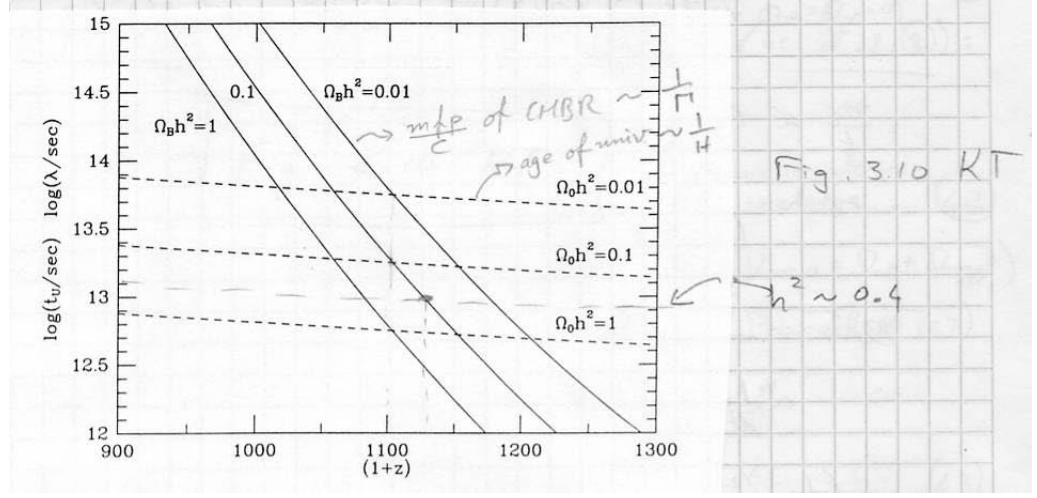


Figure 6.3: Redshift del desacoplamiento.

6.9 Desacoplamiento

(KT, pp. 80-81)

Es también de interés calcular la z del momento de desacoplamiento entre materia y radiación, z_{dec} . Esto ocurre a la z tal que $\Gamma = \alpha_B n_B \sim H$. Para hacerlo, escribimos la tasa de recombinaciones, ec. (6.40), como función de z usando (6.37), y la graficamos simultáneamente con (6.42) contra z (fig. 6.3). Encontramos

$$z_{dec} \sim 1130 \quad (6.48)$$

lo cual ocurre a

$$t_{dec} \approx 5.6 \times 10^{12} (\Omega_0 h^2)^{-1/2} s \approx 4.2 \times 10^5 \text{ yr} \quad (6.49)$$

Resumiendo, en ésta época ocurrieron dos eventos importantes: la (re)combinación de p y e^- para formar H , y el desacoplamiento radiación-materia (específicamente, fotones-electrones), a

$$z_{rec} \sim 1360$$

$$z_{dec} \sim 1100.$$

Por comparación (sec. 4.3),

$$z_{eq} \sim 10^4.$$

6.10 Escalamiento de x con los parámetros de densidad

(Peacock p. 287)

Una propiedad útil de la ecuación de tasa de recombinación (6.45) es que sus resultados se pueden escalar con los parámetros de densidad. De (6.46)

$$x \propto \frac{1}{n_B t}$$

De la definición de Ω_B (ec. 4.13):

$$n_B \propto \Omega_B h^2 \quad (6.50)$$

y, para un Universo tipo Einstein-de Sitter (tomando la ec. [4.54] y escribiendo explícitamente la dependencia en Ω_m , que se supone igual a Ω_T):

$$t \propto (\Omega_T h^2)^{-1/2}.$$

Por lo tanto,

$$x \propto \frac{(\Omega_T h^2)^{1/2}}{\Omega_B h^2}, \quad (6.51)$$

para universos dominados por materia, posiblemente incluyendo materia oscura ($\Omega_T = \Omega_{m,0} = \Omega_B + \Omega_{\text{materia oscura}}$).

6.11 Última superficie de dispersión

(Peacock, p.287)

Un cálculo detallado da, para la fracción de ionización a $z \sim 1000$:

$$x(z) = 2.4 \times 10^{-3} \frac{(\Omega_T h^2)^{1/2}}{\Omega_B h^2} \left(\frac{z}{1000} \right)^{12.75}. \quad (6.52)$$

Esto permite calcular la profundidad óptica debida a dispersión de Thomson,

$$\tau(z) = \int n_e x(z) \sigma_T dr_{\text{prop}} = 0.37 \left(\frac{z}{1000} \right)^{14.25}, \quad (6.53)$$

en donde se ha usado que $n_e = n_B$. Se ve entonces que, sorprendentemente, τ no depende de los parámetros cosmológicos.

Debido a la fuerte dependencia en z , el medio pasa rápidamente de ser opaco a ser transparente según z decrece. En promedio, los fotones de la radiación de fondo se dispersaron por última vez a

$$z_{LS} \approx 1065 \quad (6.54)$$

(“LS” por “last scattering”), con una desviación estándar $\Delta z \approx 80$. A este redshift se le conoce como la *superficie de la última dispersión* (SUD).

Los fotones de la radiación de fondo de micro-ondas que vemos hoy provienen de la SUD, pues han viajado libremente hacia nosotros desde entonces, y *constituyen una solución de la Paradoja de Olbers* sec. 3.2: después de todo, el cielo sí es brillante, sólo que por la expansión del Universo, se ha corrido al rojo desde la línea Ly α hasta las microondas ($z \sim 1100$). Además, la intensidad de brillo es finita, porque la región emisora tiene tamaño finito, $\sim ct_{LS}$. Se puede decir que la SUD es la “fotósfera” de la radiación de fondo.

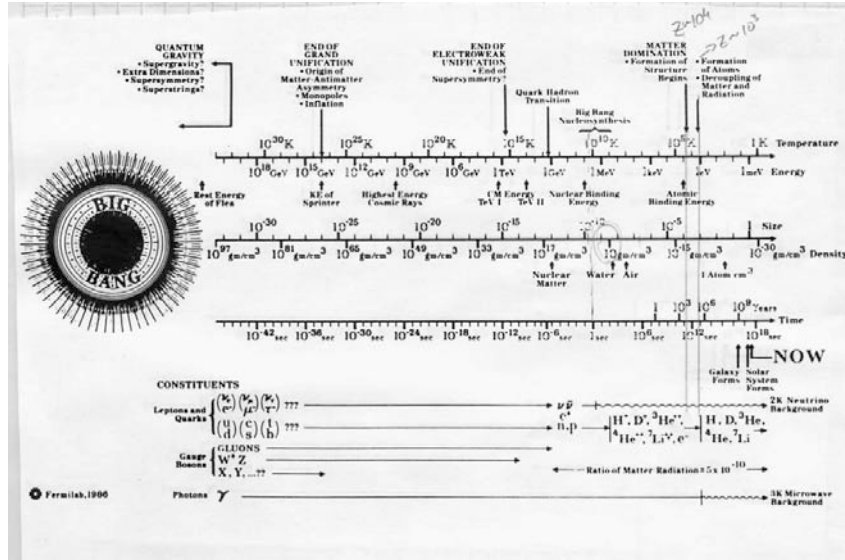


Figure 6.4: Historia térmica del Universo.

6.12 Resumen de la historia térmica del Universo

Se ilustra en la fig. 6.4.

Chapter 7

La Radiación de Fondo de Micro-ondas

(Peacock, pp.290-291; Peebles, pp.131-137)

7.1 Modelos

En las secs. anteriores ya hemos mencionado y discutido ampliamente el fondo de radiación, que hoy en día tiene una temperatura de

$$T = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}$$

y un espectro de cuerpo negro con precisión de 10^{-4} (ver fig. 1.2).

La gran precisión con la que la CMBR se ajusta a un cuerpo negro ha sido una de las principales razones por las que el modelo de la Gran Explosión (“Big Bang”, o BB) se ha establecido, mientras que otros modelos, como el del estado estacionario, han sido abandonados.

- El BB, o más bien, el modelo del Universo en expansión con un origen muy caliente, incorpora de manera natural la CMBR: es la radiación proveniente de la última superficie de dispersión, i.e., la “cáscara” $R(z = z_{\text{dec}})$, en donde z_{dec} es el redshift al cual se desacoplaron la materia y la radiación (sec. 6.9), que corresponde al último tiempo en el que el Universo fue opaco.
- En el llamado modelo de “*Estado Estacionario*”, el Universo ha sido eternamente igual, necesita ser infinito y plano, y tener *creación continua de materia* (algo así como $0.03 \text{ átomos m}^{-3} \text{ Gyr}^{-1}$). En este modelo, el parámetro de Hubble es estrictamente constante. Sin embargo, en este modelo, la CMBR no tiene cabida: el Universo es y siempre ha sido transparente, por lo que no se explica un espectro de cuerpo negro.

- Otros modelos han propuesto que la CMBR se origina del reprocesamiento (absorción y re-emisión) por polvo de la luz estelar. Pero en este modelo la CMBR debería consistir en la *superposición* de muchos cuerpos negros a diferentes temperaturas (tanto por variaciones en la temperatura del polvo como en el redshift de la emisión).
- Hay sin embargo un modelo alternativo que trata de seguir vivo: la Cosmología del Estado Cuasi-Estacionario (QSSC), que no discutiremos aquí (ver, p.ejm. <http://www.astro.ucla.edu/~wright/stdystat.htm>)

7.2 Anisotropías de la CMBR

A pesar de la gran uniformidad en el cielo de la temperatura de la CMBR, hay pequeñas fluctuaciones, debidas a nuestro movimiento con respecto al marco definido por la CMBR, y las fluctuaciones a gran escala de la distribución de materia.

Para encontrar la forma de las fluctuaciones de temperatura como función de la dirección en el cielo, recordemos la invariancia del número de ocupación de los fotones (sec. 6.1):

$$N = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \text{cte.} \quad (7.1)$$

Nótese que esto implica también la invariancia de la cantidad I_ν/ν^3 , donde $I_\nu = cu_\nu/4\pi$ es la intensidad de brillo superficial, y u_ν es la densidad de energía por unidad de frecuencia, dada por la función de Planck:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Como se vio en la sec. 6.1, un corrimiento Doppler $\nu = D\nu_0$, donde ν_0 es la frecuencia emitida y ν es la frecuencia observada, causa una variación en la temperatura aparente de la radiación observada:

$$T = DT_0. \quad (7.2)$$

Aplicando el efecto Doppler relativista para velocidades oblicuas, se puede demostrar que el factor correcto es

$$T = \frac{T_0}{\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)} = T_0 \left[1 + \frac{v}{c} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \cos 2\theta + \mathcal{O} \left(\frac{v}{c} \right)^3 \right]. \quad (7.3)$$

El segundo término corresponde a la *anisotropía dipolar*, y permite medir el movimiento de la Tierra respecto al marco de la CMBR. Las mediciones del satélite COBE dan:

$$v_T = 371 \pm 1 \text{ km s}^{-1} \text{ hacia } (l, b) = (264^\circ, 48^\circ). \quad (7.4)$$

Esto es a pesar de que la Tierra, junto con el Sistema Solar, gira alrededor del centro galáctico, con velocidad $\sim 300 \text{ km s}^{-1}$ hacia $(l, b) = (90^\circ, 0^\circ)$. El que la velocidad de la Tierra respecto a la CMBR tenga el valor dado por (7.4), implica que la Vía Láctea, junto con el grupo local, se mueve a

$$V_{\text{GL}} \approx 600 \text{ km s}^{-1} \text{ hacia } (l, b) \approx (270^\circ, 30^\circ) \quad (7.5)$$

con respecto a la CMBR. Parece deberse a la atracción gravitacional de la estructura llamada “El Gran Atractor”.

El tercer término en (7.3) corresponde a la *anistropía cuadrupolar*, pero la contribución de v_{T} a este término está por debajo de la sensibilidad actual $(\sim 10^{-6} \approx (v_{\text{T}}/c)^2)$.

Chapter 8

Nucleosíntesis Primordial

(Peacock sec. 9.5)

8.1 Introducción

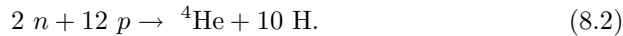
En las épocas muy tempranas del Universo ($z \sim 10^{10}$), la temperatura era suficientemente alta ($T \sim 10^{10}$ K) para que se produjeran reacciones nucleares similares a las que ocurren en el interior del Sol. Nótese, sin embargo, que esta temperatura es mucho más alta que la del centro del Sol (15×10^6 K). Esta mayor temperatura es necesaria porque la densidad era apenas de $\sim 10^{-8}$ g cm $^{-3}$, mientras que en el Sol es de ~ 100 g cm $^{-3}$.

Bajo estas condiciones, esperamos entonces la producción de He, y trazas de otros productos: D y Li. Primero hagamos un estimado a grosso modo. En equilibrio térmico, para un gas de neutrones y protones, el cociente de sus abundancias numéricas está dado por el de sus factores de Boltzmann, de modo que

$$\frac{N_n}{N_p} = \exp \left[-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT} \right] \approx \exp \left[-1.5 \left(\frac{10^{10} \text{K}}{T} \right) \right]. \quad (8.1)$$

Esta expresión implicaría valores pequeñísimos de N_n/N_p para $T \ll 10^{10}$ K, pero en este caso nuevamente ocurre el fenómeno de que las reacciones que convierten a los neutrones de nuevo en protones se “congelan” a temperaturas del mismo orden, lo que permite que los primeros se acumulen, y la fracción de neutrones acaba siendo $N_n/N_p \sim 1/6$ (i.e., hay 1 neutrón por cada 6 protones).

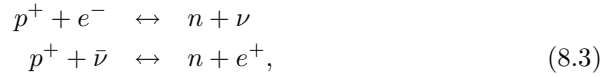
Para ver la fracción de masa en He que esto implica, notemos que $N_n/N_p = 2/12$. Si suponemos que todos los neutrones acaban en núcleos de ^4He , entonces tenemos:



En términos de masa: $4/14 \approx 28.6\%$. En realidad, la fracción observada es $\sim 22 - 25\%$, de manera que este estimado es alentador. Veamos ahora el proceso con un poco más de detalle. Este consta de varios pasos.

8.2 “Congelamiento” de los neutrones

Como mencionamos arriba, si la fracción de neutrones no se “congelara”, su número en equilibrio para $T < 10^{10} K$ sería bajísimo, y por lo tanto no habría He ni otros átomos más pesados que el H, ya que todos requieren neutrones para que sus núcleos sean estables. Para estimar el tiempo al que ocurre el congelamiento, consideremos las reacciones que convierten protones a neutrones y viceversa:



en donde ν denota a un neutrino, $\bar{\nu}$ a un antineutrino, y e^+ a un positrón. La densidad numérica de neutrones, n_n , estará entonces dada por la expresión:

$$\frac{dn_n}{dt} = (\Lambda_{pe} + \Lambda_{p\nu}) n_p - (\Lambda_{ne} + \Lambda_{n\nu}) n_n, \quad (8.4)$$

en donde las Λ s son los coeficientes de reacción para cada interacción en (8.3).

Hay que considerar además el decaimiento espontáneo de los neutrones

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}, \quad (8.5)$$

con una vida media $\tau_n = 887 \pm 2$ s, pero podemos ignorar este proceso, pues como veremos, el “congelamiento” del número de neutrones ocurre mucho antes de este tiempo.

No realizaremos aquí el cálculo de las Λ (que involucra teoría cuántica del campo; ver, p.ejm., Peacock sec. 9.5), sino sólo mencionaremos el resultado de que, para $kT \gg m_e c^2$, los cuatro coeficientes son de la misma forma, y están relacionados con τ_n :

$$\Lambda \approx 13.9 \tau_n^{-1} \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^5 \text{ s}^{-1} = \left(\frac{1.36 \times 10^{10} \text{ K}}{T} \right)^{-5} \text{ s}^{-1} \quad (8.6)$$

(Nótese que esto se puede descomponer en $n \sim T^3$ y $\sigma \sim T^2$).

Por otro lado sabemos que, para un Universo dominado por radiación (sec. 6.6), el tiempo característico de la expansión es:

$$t_{\text{exp}} = \left(\frac{3}{32\pi G \rho_r} \right)^{1/2} = \left(\frac{1.33 \times 10^{10} \text{ K}}{T} \right)^2 \text{ s}. \quad (8.7)$$

Comparando las ecuaciones (8.6) y (8.7), vemos que la escala de tiempo de la expansión va como T^{-2} , mientras que la de interacción va como T^{-5} , por lo que debe de producirse el “congelamiento” cuando $t_{\text{inter}} \sim t_{\text{exp}}$; es decir, a

$$T_{\text{cong}} \approx \left[\frac{(1.36 \times 10^{10})^5}{(1.33 \times 10^{10})^2} \right]^{1/3} \text{ K} \approx 1.39 \times 10^{10} \text{ K}, \quad (8.8)$$

y

$$t \approx 1 \text{ s.} \quad (8.9)$$

Entonces, de las ecuaciones (8.1) y (8.8) obtenemos

$$\frac{N_n}{N_p} \approx 0.34. \quad (8.10)$$

Este número tampoco es muy preciso (habíamos anticipado $\sim 1/6$). Esto se debe a que utilizamos valores de los coeficientes Λ válidos en el límite muy relativista ($kT \gg m_e c^2$), mientras que en realidad vemos que $kT_{\text{cong}} \sim m_e c^2 \sim (m_n - m_p) c^2$. Además como vimos en la sec. 6.6 a más o menos el mismo tiempo, los neutrinos se congelan, y los e^+ y e^- se aniquilan, de modo que la CMBR se está recalentando.

Así pues, integrando exactamente la ec. (8.4), incluyendo la reacción (8.5), se obtiene

$$\frac{n_n}{n_p} \approx 0.163 (\Omega_B h^2)^{0.04} \left(\frac{N_\nu}{3} \right)^{0.2}, \quad (8.11)$$

en donde N_ν es el número de especies de neutrinos. Se puede ver que el número de neutrinos depende débilmente de N_ν , y más débilmente aún de la densidad de bariones Ω_B . Veremos las implicaciones de esto más adelante.

8.3 Formación de núcleos (Deuterio)

Una vez que se ha alcanzado el valor de congelamiento de N_n/N_p , es necesario “asegurar” a los neutrones en núcleos, pues de la otra forma decaen espontáneamente con una vida media de $\tau_n = 887 \text{ s}$.

El primer núcleo que se forma es el deuterio (D), a través de la reacción

$$n + p^+ \leftrightarrow D^+ + \gamma, \quad (8.12)$$

en donde γ denota a un fotón. La energía de enlace del deuterón es $Q = 2.225 \text{ MeV}$. Uno espera entonces que los deuterones empiecen a acumularse en cuanto los fotones de fondo dejan de ser suficientemente energéticos, i.e., cuando $kT \lesssim 2 \text{ MeV}$. Sin embargo, dado el enorme número de fotones por barión ($\sim 10^9$, sec. 1.3), la cola de alta energía de la distribución de los fotones de la radiación de fondo no permite la acumulación de deuterones hasta que

$$T \sim T_D = 8 \times 10^8 \text{ K, al tiempo } t_D \sim 3 \text{ min.} \quad (8.13)$$

Esto se puede ver de la siguiente manera: La reacción (8.12) es completamente análoga a

$$p^+ + e^- \rightarrow H + \gamma,$$

de manera que es posible escribir una ecuación de Saha para ella:

$$\begin{aligned} \frac{n_D}{n_p n_n} &= \frac{3}{4} \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi kT m_p m_n / m_D)^{3/2}} \exp\left(\frac{Q}{kT}\right) \\ &= 1.12 \times 10^{-35} T_{10}^{-3/2} \exp\left(\frac{2.61}{T_{10}}\right). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Se ve entonces que es el coeficiente de la exponencial quien se encarga de mantener n_D baja hasta que $T \lesssim T_D$. Afortunadamente, t_D es todavía menor que la vida media de los neutrones.

8.4 Formación y abundancia del He

Una vez que se empiezan a formar los deuterones, se empieza también a formar He; de hecho, esperamos que, en equilibrio, el He sea dominante sobre el D, debido a su mayor energía de ligado por nucleón: 7.7 MeV , vs. $1.1 (= \frac{1}{2} \times 2.225)$ para el D, como veremos a continuación.

Para una especie dada (protones, neutrones o núcleos), la densidad numérica en equilibrio está dada por la expresión obtenida en la sec. 6.3 para el caso no relativista:

(TAREA: ¿Por qué no relativista? (comparar kT y $m_p c^2$).)

$$n = g \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mc^2}{kT} \right). \quad (8.15)$$

Además, la masa de un núcleo de número atómico Z y masa atómica A , está dada por:

$$m_N = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{Q}{c^2} \quad (8.16)$$

donde Q es la energía de ligadura. Se puede entonces demostrar que la densidad numérica del núcleo está dada por:

$$n_N = \frac{g_N}{2^A} \left(\frac{m_N}{m_p^Z m_n^{A-Z}} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} n_p^Z n_n^{A-Z} \exp \left(\frac{Q}{kT} \right). \quad (8.17)$$

TAREA: Demostrarlo.

La expresión (8.17) implica que aquellos núcleos que tienen mayor energía de ligado Q son más abundantes, como anunciamos. Sin embargo hay un factor adicional que considerar. Notamos que, como $m_p \sim m_n$, y si $n_p \sim n_n$, entonces (8.17) se reescribe como:

$$n_N = \frac{g_N}{2^A} m_N^{3/2} \left[n_p \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_p kT} \right)^{3/2} \right]^A \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right)^{-3/2} \exp \left(\frac{Q}{kT} \right), \quad (8.18)$$

pero, comparando con (8.15), vemos que, en el caso no-relativista,

$$n_p \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_p kT} \right)^{3/2} \sim \exp \left(-\frac{m_p c^2}{kT} \right) \ll 1,$$

por lo que

$$n_N \propto \left[\exp \left(-\frac{m_p c^2}{kT} \right) \right]^A \exp \left(\frac{Q}{kT} \right). \quad (8.19)$$

Esto implica que, en equilibrio, y a una Q dada, aquellos núcleos que tienen A grande son menos abundantes. Resulta que el He es el último núcleo para el que

$$\exp \left(\frac{Q}{kT} \right) > \left[\exp \left(-\frac{m_p c^2}{kT} \right) \right]^A,$$

de manera que, en equilibrio, ya no se espera la formación de núcleos más pesados, a pesar de que núcleos con A más grandes tienen mayores energías de ligado.

La expresión (8.17) implicaría que $n_{\text{He}} \approx n_p$ a $kT \sim 0.3$ MeV. Sin embargo, esto no sucede así porque para formar núcleos de He se necesita antes formar D , que sin embargo, hemos visto que no se puede formar sino hasta $kT \sim 0.08$ MeV (ec. [8.13]). Sin embargo, lo que sí nos dice la preponderancia del ^4He en equilibrio es que, una vez que se forma el D , éste se consume esencialmente todo para formar He, de manera que esencialmente todos los neutrones acaban en ^4He .

La abundancia predicha para el He se calcula entonces como sigue: si todos los neutrones acaban en ^4He , cada neutrón “consume” un protón, y la densidad de H está dada por los protones restantes, tenemos que

$$n_H = n_p - n_n,$$

donde n_p es la densidad total de protones, dentro y fuera del He. Entonces, la abundancia (por masa) del Helio es:

$$\begin{aligned} Y &= 1 - \frac{m_p n_H}{\rho_{T,B}} = 1 - \frac{m_p n_H}{m_p (n_H + 4n_{\text{He}})} \\ &= 1 - \frac{n_H}{n_H + 2n_n} = 1 - \frac{n_p - n_n}{n_p + n_n} \\ &= 2 \left(1 + \frac{n_p}{n_n} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

de manera que si $n_n/n_p \approx 0.163$ (ec. [8.11]),

$$Y \approx 0.28. \quad (8.21)$$

Este valor debe compararse con la abundancia “observada”. En realidad, Y no se observa directamente, pues no se sabe a priori qué fracción del He observado es primordial (además de que es necesario introducir un cierto modelaje para convertir intensidades de líneas de emisión a abundancias). En la práctica, se busca una correlación entre Y y la abundancia de elementos más pesados, denotada por Z , y se extrapola a $Z = 0$. Con este procedimiento, se encuentra

$$Y_{\text{obs}} \sim 0.23 \quad (8.22)$$

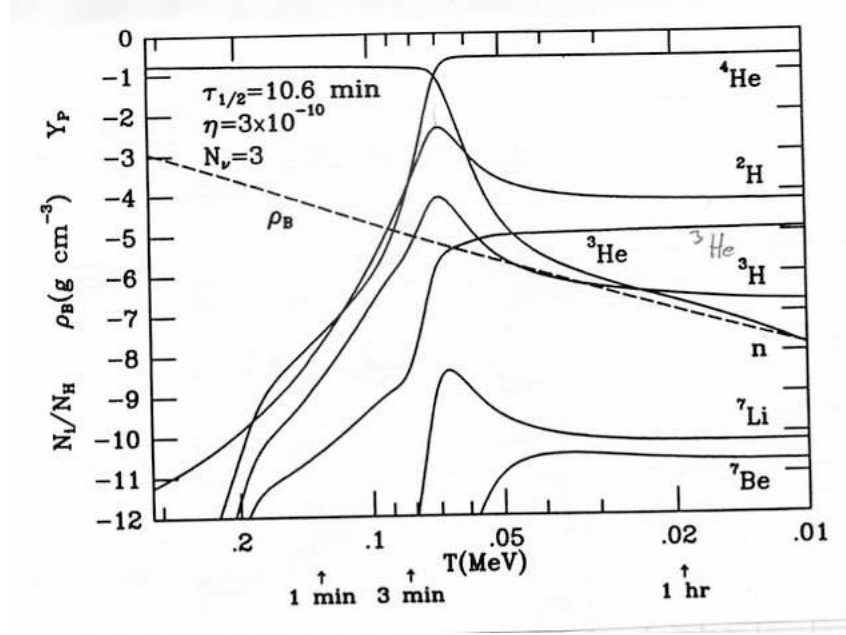


Figure 8.1: Evolución de las abundancias de los elementos ligeros.

Esto implicaría $n_n/n_p \approx 0.125$, lo que a su vez implicaría $\Omega_B h^2 \approx 10^{-3}$ para 3 especies de neutrinos (ec. [8.11]).

CHECAR: No es claro si la discrepancia entre los valores teórico y observado de Y es un problema serio con el modelo de BB. Lo que sí es bastante seguro es que un universo cerrado dominado por bariones ($\Omega_B \geq 1$) no parece ser factible, a pesar de que Y no es un buen indicador de Ω_B , dada la insensitividad de n_n/n_p a ese parámetro (ec. [8.11]).

8.5 Abundancias de otros elementos ligeros

Sin entrar en detalles, mencionaremos que, además de la producción de He, en el modelo BB se esperan también pequeñas abundancias de otros elementos ligeros: D que escapó a la producción de He, y rastros de ^3He (producido en ruta al ^4He), ^7Li ($\sim 10^{-9}$ por masa) y ^7Be ($\sim 10^{-11}$ por masa). La importancia de estos otros elementos radica en que sus abundancias sí son fuertemente sensitivas a la densidad. Uno de los grandes éxitos del modelo de BB es que puede explicar simultáneamente las abundancias observadas (fig. 8.1), aunque para ello *se requieren densidades bariónicas muy pequeñas*, como veremos ahora.

En la figura 8.2 se muestran las abundancias predichas de varios elementos

ligeros como funciones de $\Omega_B h^2$, a través del parámetro

$$\eta \equiv \frac{n_p + n_n}{n_\gamma} = 2.74 \times 10^{-8} \left(\frac{T}{2.73 \text{ K}} \right)^{-3} \Omega_B h^2, \quad (8.23)$$

que es el inverso de la entropía por barión. En esta figura se muestran también las regiones permitidas por las observaciones (rectángulos) para cada elemento, y la intersección de todas ellas (banda sombreada).

Estos datos sugieren que

$$0.010 \lesssim \Omega_B h^2 \lesssim 0.015. \quad (8.24)$$

Resultados recientes (p. ejm., Cyburt et al. 2003, Phys. Lett. B 567, 227, astro-ph/0302431) con WMAP sugieren $\eta \sim 6 \times 10^{-10}$, o

$$0.020 \lesssim \Omega_B h^2 \lesssim 0.030 \quad (8.25)$$

De cualquier manera, estos resultados sugieren que $\Omega_B \lesssim 0.05$. Dado que el estimado actual para la contribución total de la materia es $\Omega_{m,0} \sim 0.3$, se ve que la mayor parte de la materia debe ser no bariónica. Esta es una de las principales evidencias a favor de la materia oscura no bariónica.

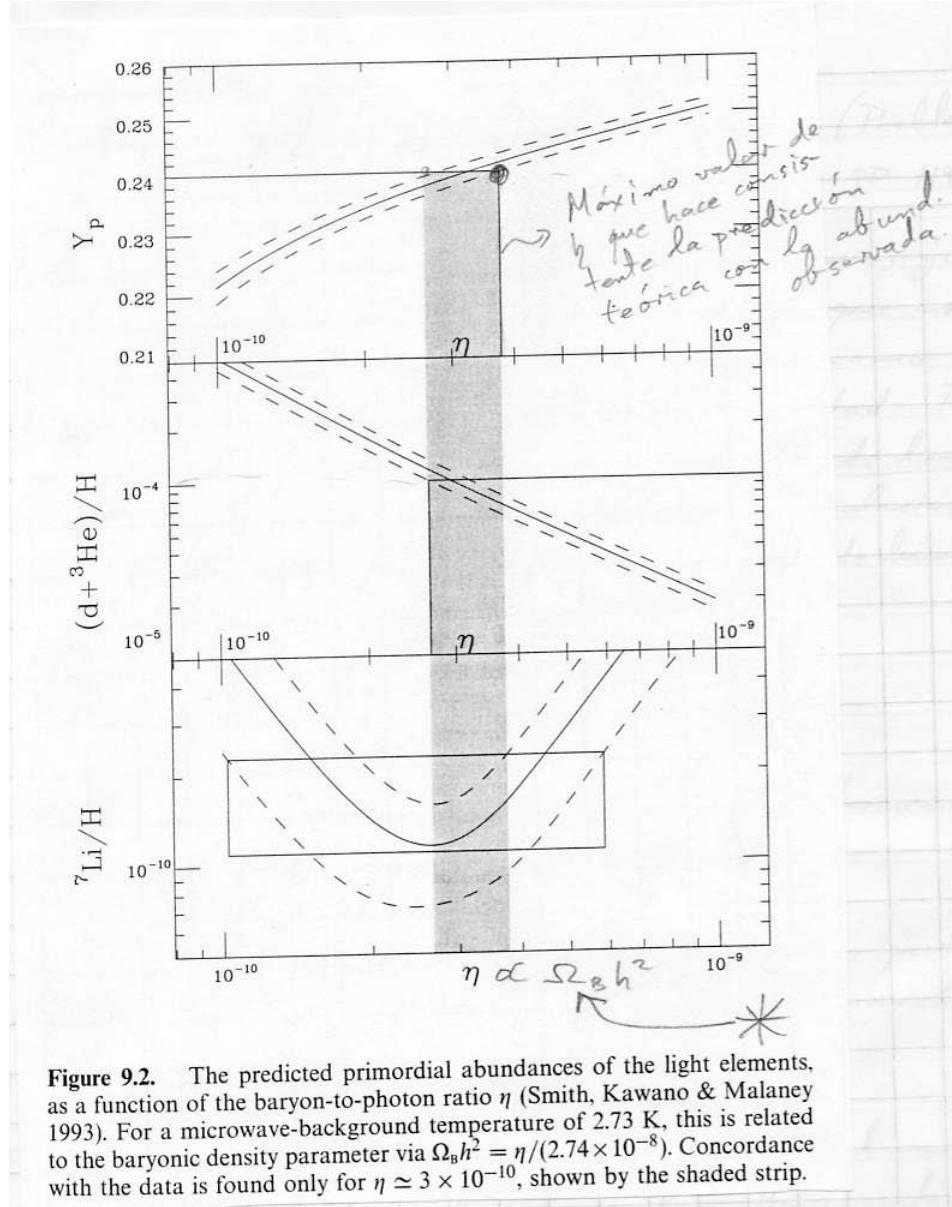


Figure 8.2: Abundancias como función del cociente de bariones a fotones.

Chapter 9

La Función de Luminosidad

(Peebles pp. 119-124)

En la cosmología observacional, las galaxias juegan un papel clave como piezas elementales que nos permiten estimar propiedades del Universo tales como las densidades promedio de masa y de luminosidad. Para este fin, es fundamental la llamada “*función de luminosidad*” ϕ , que se define como el número promedio de galaxias por unidad de volumen en el intervalo logarítmico de luminosidad $(\ln L, \ln L + d \ln L)$, de tal modo que

$$dn = \phi \left(\frac{L}{L_*} \right) \frac{dL}{L_*}, \quad (9.1)$$

en donde L_* es una luminosidad galáctica típica, que determinaremos más abajo. El problema de determinar ϕ se reduce a tres partes: determinar la forma funcional de ϕ , determinar su normalización ϕ_* , y determinar L_* .

En cuanto a la forma funcional, observacionalmente se encuentra que hay muchas galaxias de baja luminosidad (menor que la de la Vía Láctea, L_{VL}) y muy pocas de alta luminosidad ($> L_{VL}$). Empíricamente, Schechter encontró que un buen ajuste a la distribución de luminosidades es

$$\phi(y) = \phi_* y^\alpha e^{-y} \quad \text{Función de Schechter} \quad (9.2)$$

con $\alpha = -1.07 \pm 0.05$.

La función de luminosidad está involucrada en el cálculo de varias cantidades de interés. Por ejemplo:

- *La luminosidad media por unidad de volumen:*

$$j = \int_0^\infty L \phi \left(\frac{L}{L_*} \right) \frac{dL}{L_*} = L_* \int_0^\infty y \phi(y) dy \quad (9.3)$$

$$= L_* \phi_* \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y} dy = \phi_* L_* \Gamma(2 + \alpha), \quad (9.4)$$

en donde $\Gamma(x)$ es la función gama, que en particular satisface $\Gamma(n) = (n-1)!$ para n entero.

- El número de galaxias entre L y $L + dL$ en un cascarón esférico $dV = 4\pi r^2 dr$

$$dN = \phi\left(\frac{L}{L_*}\right) \frac{dL}{L_*} dV = \frac{4\pi}{L_*} \phi\left(\frac{L}{L_*}\right) dL r^2 dr. \quad (9.5)$$

- El número de galaxias por intervalo de redshift z y de flujo radiativo f , en un volumen subtendido por un ángulo sólido unitario:

$$\frac{d^2 N}{dz df} = \int_r \int_L \phi\left(\frac{L}{L_*}\right) \frac{dL}{L_*} r^2 dr \delta\left(z - \frac{H_0 r}{c}\right) \delta\left(f - \frac{L}{4\pi r^2}\right), \quad (9.6)$$

en donde $\delta(x)$ es la función δ de Dirac. Las funciones delta en este caso se usan para seleccionar la pareja (L, r) que corresponde a una pareja (z, f) dada.

TAREA: Demostrar que

$$\frac{d^2 N}{dz df} = \frac{4\pi}{L_*} \phi(\kappa z^2) \left(\frac{c}{H_0}\right)^5 z^4, \quad \text{con } \kappa = \frac{4\pi f c^2}{H_0^2 L_*}, \quad (9.7)$$

usando la propiedad de que $\delta(f(x)) = |df/dx|^{-1} \delta(x - x_0)$, donde x_0 es el cero de f (es decir, $f(x_0) = 0$).

En la expresión (9.7), el efecto del factor z^4 es el de deprimir el número de galaxias de bajo redshift, lo cual refleja el hecho de que a menor redshift el volumen disponible para muestrear las galaxias es menor (análogamente al factor r^2 en (9.5) y (9.6)). Esto causa que la distribución de galaxias seleccionadas por magnitud aparente tenga forma de campana, a pesar de que hay muchas más galaxias enanas que gigantes por unidad de volumen. Esto es una forma de *sesgo de Malmquist* para galaxias (una selección por magnitud aparente está sesgada hacia objetos más brillantes porque se pueden ver hasta distancias mayores). Si la distribución de galaxias es homogénea, y el efecto del redshift en la magnitud aparente es depreciable, este sesgo se puede evitar considerando la distribución de redshifts en bandas (“bins”) de magnitud aparente constante (ver Peebles, pp. 89-90, y referencias allí citadas).

- El redshift promedio de las galaxias con densidad de flujo f :

$$\langle z \rangle = \frac{\int z \frac{d^2 N}{dz df} dz}{\int \frac{d^2 N}{dz df} dz} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{\int y^2 \phi(y) dy}{\int y^{3/2} \phi(y) dy} = \left(\frac{H_0^2 L_*}{4\pi f c^2}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(3 + \alpha)}{\Gamma(\frac{5}{2} + \alpha)}. \quad (9.8)$$

- El número (o cuenta) total de galaxias por ángulo sólido unitario a f dado:

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{df} &= \int \frac{d^2N}{dz df} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{L_*}{4\pi} \right)^{3/2} f^{-5/2} \int y^{3/2} \phi(y) dy \\
&= \frac{\phi_*}{2} \left(\frac{L_*}{4\pi} \right)^{3/2} f^{-5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2} + \alpha\right),
\end{aligned} \tag{9.9}$$

que es la forma diferencial de la ec. (2.3).

Las expresiones anteriores se pueden escribir en términos de magnitudes. Para ello, recordemos la expresión para el módulo de distancia (sec. 2.1):

$$m - M = -2.5 \left[\log\left(\frac{f}{L}\right) + \log(4\pi r_0^2) \right], \tag{9.10}$$

con $r_0 = 10$ pc, de manera que $(m - M)_{10 \text{ pc}} = 0$. La ec. (9.10) implica, para la luminosidad característica L_* , que

$$f = \frac{L_*}{4\pi r_0^2} 10^{0.4(M_* - m)}, \tag{9.11}$$

donde M_* es la magnitud absoluta correspondiente a L_* . Introduciendo (9.11) en (9.8), se obtiene:

$$\langle z \rangle = \frac{h}{3 \times 10^8} \frac{\Gamma(3 + \alpha)}{\Gamma(\frac{5}{2} + \alpha)} 10^{0.2(m - M_*)}, \tag{9.12}$$

en donde el factor $h/(3 \times 10^8)$ es el cociente r_0/ℓ_0 , donde $\ell_0 = c/H_0$ es la longitud de Hubble.

La expresión (9.12) se puede calibrar observacionalmente. Usando la fig. 9.1, vemos que, empíricamente:

$$\langle z \rangle = 10^{0.2 m - 4.53 \pm 0.05}, \quad m \lesssim 17, \tag{9.13}$$

de donde se obtiene

$$M_* = -19.53 \pm 0.25 + 5 \log h. \tag{9.14}$$

En (9.13) y (9.14), las magnitudes son en la banda b_J (banda azul entre $\lambda\lambda$ 4000 y 5500 Å; Shanks et al. 1984, MNRAS 206, 767). Podemos entonces expresar la luminosidad típica L_* en términos de la luminosidad solar en esta banda, sabiendo que en ella $M_\odot = 5.48$, de modo que

$$L_* = 10^{0.4(M_\odot - M_*)} L_\odot = 10^{10} e^{\pm 0.23} h^{-2} L_\odot \tag{9.15}$$

que es la L_* que se usó en la sec. 5.2, tabla 5.14.

Podemos también encontrar una expresión para ϕ_* como sigue: usando (9.11) (para cambiar a magnitudes) y (9.8) (para eliminar L_*) en (9.9), encontramos:

$$\frac{1}{\langle z \rangle^3} \frac{dN}{dm} = 0.2 \ln(10) \phi_* \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 \frac{[\Gamma(\frac{5}{2} + \alpha)]^4}{[\Gamma(3 + \alpha)]^3}. \tag{9.16}$$

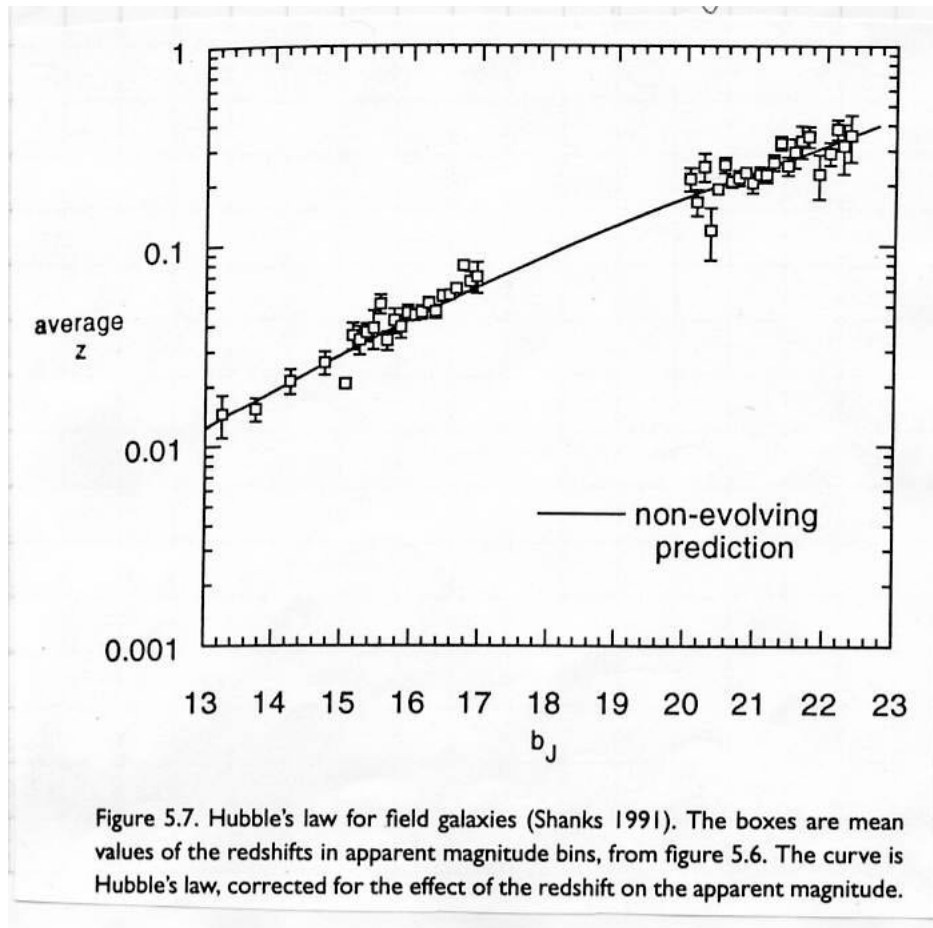


Figure 9.1: Ley de Hubble en forma de relación redshift-magnitud aparente.

Usando en esta expresión la ec. (9.13) y la relación de Hubble para conteos de galaxias, ec. (2.11), calibrada observacionalmente para dar

$$\frac{dN}{dm} = 10^{-5.70 \pm 0.1 + 0.6 m}, \quad (9.17)$$

obtenemos

$$\phi_* = 0.010 e^{\pm 0.4} h^3 \text{ Mpc}^{-3} \quad (9.18)$$

Las ecuaciones (9.15) y (9.18) completan la tarea mencionada al principio de determinar por completo la función de luminosidad. Nótese que esto ha sido una tarea esencialmente empírica, desde la forma empírica de ϕ hasta la determinación de ϕ_* y L_* , habiéndose sólo usado el hecho de que ϕ es una distribución para calcular diversos momentos.

TAREA: Obtener las ecuaciones (9.12), (9.14), (9.15), (9.16) y (9.18).

Chapter 10

Formación de Estructura a Gran Escala

(KT Cap. 9)

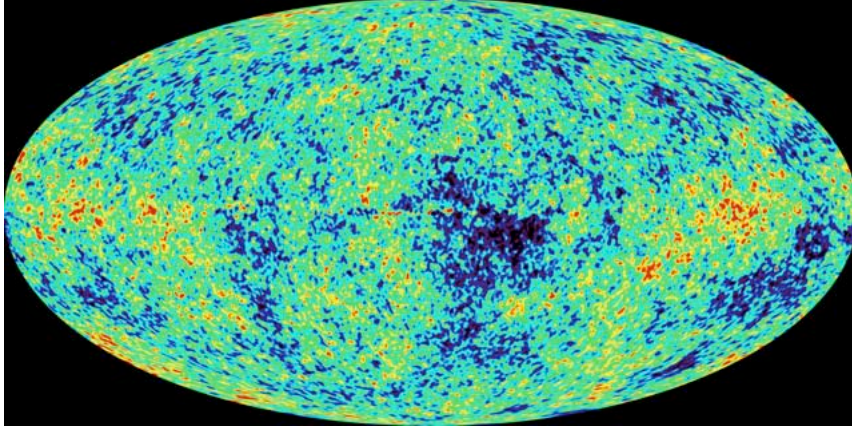
10.1 Introducción y perspectiva en general

A pesar que ya hemos mencionado que el Universo a gran escala ($\gtrsim 50$ Mpc) es homogéneo e isotrópico (sec. 1.3), es obvio que a escalas más pequeñas, el Universo es en realidad fuertemente no uniforme: hay galaxias, estrellas, planetas y presumiblemente hasta hoyos negros. En particular, la densidad promedio dentro de un cúmulo de galaxias es 10^2 - 10^3 veces la densidad promedio del Universo, y la de una galaxia, hasta 10^5 veces.

Por otro lado, la CMBR es altamente isotrópica. Restándole la anisotropía dipolar (sec. 7.2), que tiene $\delta T/T \sim v/c \sim 10^{-3}$, las fluctuaciones restantes (fig. 10.1) tienen $\delta T/T \sim 10^{-5}$. Esto implica que el Universo entre las épocas del desacoplamiento y de la recombinación era todavía muy uniforme. La gran pregunta es entonces: ¿Cómo llegó el Universo desde ese estado altamente uniforme al *no* uniforme de hoy? Ese es el tema de esta sección.

A *grosso-modo*, la respuesta a esta pregunta es: a través de la inestabilidad gravitacional. Sin embargo, nótese que la época a la cual las fluctuaciones de densidad pudieron empezar a colapsarse depende del tipo de materia que las compone:

- Materia oscura tipo WIMP comienza a contraerse a partir de la época de igualdad entre materia y radiación. Es decir, en cuanto $\rho_m > \rho_r$, la materia WIMP es suceptible a su propia gravedad.
- La materia bariónica comienza a contraerse a partir de la época de desacoplamiento, pues antes de esa época todavía está sujeta a la presión de radiación. Por ser mucho menos abundante que la materia oscura, esencialmente sólo “sigue” el potencial gravitacional de ésta última.

Figure 10.1: Mapa de fluctuaciones $\delta T/T$ por WMAP.

Una vez que la materia ha empezado a contraerse, se encuentra que las fluctuaciones de densidad crecen como:

$$\frac{\delta_\rho}{\rho} \propto \begin{cases} R & \delta_{\rho/\rho} \lesssim 1 \quad (\text{régimen } \textit{lineal}) \\ R^n \quad (n \gtrsim 3) & \delta_{\rho/\rho} \gtrsim 1 \quad (\text{régimen } \textit{no lineal}) \end{cases} \quad (10.1)$$

Por otro lado, se puede demostrar que (p. ejem., Padmanabhan, sec. 6.6)

$$\frac{\delta_\rho}{\rho} \approx \text{cte.} \times \frac{\delta T}{T}, \quad \text{cte.} \sim 10 - 100. \quad (10.2)$$

Entonces, dado que para la CMBR $\delta T/T \sim 10^{-5}$, tenemos que $\delta_\rho/\rho \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ en la SUD (superficie de última dispersión; sec. 6.11). Dado que $R(t)$ ha crecido por un factor $\sim 10^3$ desde el desacoplamiento hasta el presente, es factible que las estructuras que vemos en el Universo actual sean en efecto el producto de la inestabilidad gravitacional de las fluctuaciones de densidad en la SUD.

Una pieza de información fundamental para el estudio de la formación de estructura son las condiciones “iniciales”, es decir, las condiciones físicas en la época de igualdad materia-radiación. La información requerida es:

- La densidad total del Universo, $\Omega_{T,0}$, también denotada Ω_0 .
- La composición del Universo, cuantificada por las Ω_i de las diversas componentes (i = bariones, WIMP_s, Λ , etc.)
- El espectro y el tipo (“adiabáticas” o de “isocurvatura”) de las fluctuaciones iniciales (o “primigenias”) de densidad.

Dadas estas condiciones iniciales, se puede estudiar el crecimiento de las fluctuaciones analíticamente durante la fase lineal, y numéricamente durante la

fase no lineal. Sin embargo, no es factible revertir el estudio del crecimiento a fin de inferir las condiciones iniciales a partir de las presentes, pues en general esto no es posible para sistemas no lineales, por la llamada “sensitividad a las condiciones iniciales” que presentan: condiciones iniciales arbitrariamente cercanas entre sí pueden evolucionar a estados finales muy diferentes en tiempos finitos.

Así pues, la guía acerca de las condiciones iniciales es proporcionada por las determinaciones observacionales al día de hoy:

$\Omega_0 = 1$	por argumentos inflacionarios y observaciones
$\Omega_B \approx 0.025$	por nucleosíntesis primordial
$\Omega_{\text{WIMP}} \approx 0.28$	(materia oscura) por observaciones dinámicas
$\Omega_\Lambda \approx 0.7$	por observaciones de $H(t)$

Los valores de las tres primeras cantidades han sido determinados recientemente con alto grado de precisión por medio del satélite WMAP. La evolución de $H(t)$ se ha determinado principalmente con base en observaciones de supernovas lejanas.

10.2 Descripción de las fluctuaciones

10.2.1 Descomposición en Fourier

Se acostumbra describir el campo de densidad perturbado en términos de la fluctuación relativa

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta\rho(\mathbf{x})}{\bar{\rho}} = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (10.3)$$

en donde $\bar{\rho}$ es la densidad promedio. A fin de describir el campo de fluctuaciones en términos de estructuras a una escala de tamaño dada, se descompone δ en *modos* de Fourier, que están caracterizados por su longitud de onda λ y su correspondiente *número de onda* k :¹

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\ell, m, n=-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta_k \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{V_k} \delta_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k, \quad (10.4)$$

en donde $V = L^3$ es el volumen considerado, δ_k es la *amplitud de Fourier*, dada por

$$\delta_k = \frac{1}{V} \int_V \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x, \quad (10.5)$$

y \mathbf{k} es el *vector de onda*:

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L}(\ell, m, n), \quad (10.6)$$

¹En realidad, sería más apropiado llamar a k el *número de ondas*, pues lo que nos da es 2π veces el número de ondas (o ciclos) completos que caben en la unidad de longitud. Es decir, k es una *frecuencia espacial*, análoga a la bien conocida *frecuencia temporal* ω .

en donde k_x, k_y y k_z son los *números de onda* en las direcciones $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ y \mathbf{e}_z , y ℓ, m y n son números (enteros en el caso de la sumatoria discreta, o reales en el caso de la integral).

Notas:

- La descripción continua (integral) se aplica en el límite $V \rightarrow \infty$. En este límite, conviene redefinir $\delta_k \rightarrow V\delta_k$, a fin de eliminar los factores de V . En lo sucesivo, nos limitaremos al caso continuo.

TAREA: En la descripción discreta está implícita la suposición de condiciones a la frontera periódicas. Explicar por qué. (*Sugerencia:* Notar que los números de onda son enteros en este caso.)

- Dado que $\delta(\mathbf{x})$ es un escalar, es indistinto usar coordenadas físicas o comóviles en la expansión de Fourier. Usaremos siempre coordenadas comóviles, de modo que los números de onda k también lo serán:

$$k_{\text{fis}} = \frac{k}{R(t)} \quad (10.7)$$

- La longitud de onda del modo k es:

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k} \quad \lambda_{\text{fis}} = R(t)\lambda \quad (10.8)$$

- Se acostumbra describir a las perturbaciones en términos de la *masa* (invariante; contribuciones tanto de materia bariónica como no bariónica) M contenida en una esfera de radio $\lambda/2$:

$$M \equiv \frac{\pi}{6} \lambda_{\text{fis}}^3 \rho_m \approx 1.5 \times 10^{11} M_{\odot} \Omega_m h^2 \lambda_{\text{fis, Mpc}}^3 \quad (10.9)$$

⊙⊙: Esta asociación $M - \lambda$ sólo es posible durante el régimen lineal, en el cual el crecimiento de δ_ρ se puede considerar separadamente de la contracción gravitacional.

Por ejemplo, una perturbación con la masa típica de una galaxia ($10^{12} M_{\odot}$ incluyendo materia oscura) corresponde a $\lambda \sim 1.9 (\Omega_0 h^2)^{-1/3}$ Mpc (comóvil). En realidad, las galaxias son mucho más pequeñas (~ 30 kpc). Esto se debe a que ya pasaron por el régimen de colapso gravitacional y la fluctuación de densidad ya se encuentra en el régimen altamente no lineal. El tamaño comóvil de $1.9 (\Omega_0 h^2)^{-1/3}$ Mpc corresponde al de la perturbación *lineal* que contiene la masa de la galaxia.

10.2.2 El espectro de potencia y cantidades relacionadas

La amplitud relativa de los modos de Fourier que componen el campo de fluctuaciones de densidad se puede medir a través de su *espectro de potencia* $|\delta_k|^2$. A falta de un mejor modelo para $|\delta_k|^2$, frecuentemente se supone

$$|\delta_k|^2 = Ak^n, \quad (10.10)$$

es decir, una ley de potencias (que no tiene ninguna escala característica).

El espectro de potencia es la base para el cálculo de muchas cantidades de interés:

- *La fluctuación rms de densidad*, definida como

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) \equiv \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle^{1/2}, \quad (10.11)$$

en donde $\langle \rangle$ denota promedio sobre el espacio. Entonces (10.11) se reescribe:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{V} \int_V \delta^2(\mathbf{x}) d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3 V} \int_{V_k} |\delta_k|^2 d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3 V} \int_{k=0}^{\infty} 4\pi k^2 |\delta_k|^2 dk$$

en donde la segunda igualdad es el llamado *teorema de Parseval* de las transformadas de Fourier. Finalmente obtenemos:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{V} \int_0^{\infty} \frac{k^3 |\delta_k|^2}{2\pi^2} \frac{dk}{k} \quad (10.12)$$

Expresada en la forma (10.12), es claro que la contribución del intervalo logarítmico $d(\ln k) = dk/k \sim 1$ a la fluctuación rms es

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_k^2 \approx \frac{k^3 |\delta_k|^2}{2\pi^2 V} \equiv \Delta^2(k). \quad (10.13)$$

$\Delta^2(k)$ es frecuentemente llamada la *variancia* a escala $2\pi/k$.

- *La fluctuación rms de la masa* en regiones de tamaño r , o alrededor de una escala de masa dada (ec. [10.9])

Para hablar de la masa correspondiente a una fluctuación de densidad, es necesario especificar el volumen sobre el cual se contabilizará la masa. Es entonces necesario especificar una *función ventana* $W\left(\frac{r}{r_0}\right)$, de manera que la masa en una región esférica de radio r_0 alrededor de la posición \mathbf{x} es:

$$M_{r_0}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) W\left(\frac{r}{r_0}\right) d^3r, \quad (10.14)$$

en donde la geometría para el cálculo de la integral se muestra en la fig. 10.2. $W\left(\frac{r}{r_0}\right)$ puede ser una ventana abrupta, como una función escalón, o suave, como una gaussiana.

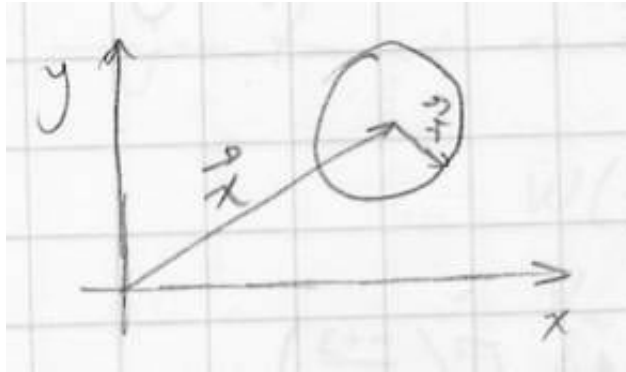


Figure 10.2: Geometría para la ec. (10.14).

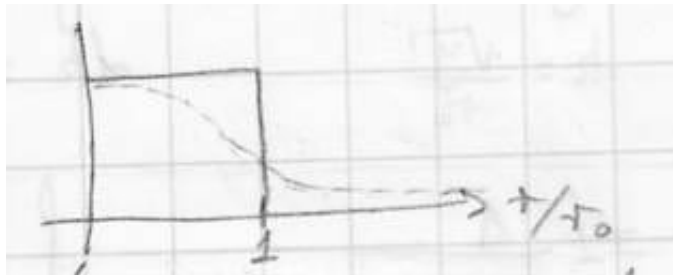


Figure 10.3: Ejemplo de funciones ventana abrupta (*línea continua*) y suave (*línea a rayas*).

La masa promedio en regiones de tamaño r_0 es

$$\bar{M}_{r_0} = \bar{\rho} \int W\left(\frac{r}{r_0}\right) d^3r = \bar{\rho} \int 4\pi r^2 W\left(\frac{r}{r_0}\right) dr \equiv \bar{\rho} V_W, \quad (10.15)$$

en donde la última igualdad define V_W . Entonces

$$\frac{(\delta M(\mathbf{x}))^2}{\bar{M}^2} = \left\{ \frac{\int [\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \bar{\rho}] W\left(\frac{r}{r_0}\right) d^3r}{\bar{\rho} V_W} \right\}^2 = \left[\frac{\int \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) W\left(\frac{r}{r_0}\right) d^3r}{V_W} \right]^2, \quad (10.16)$$

y finalmente

$$\left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \equiv \left\langle \frac{(\delta M)^2}{M^2} \right\rangle = \frac{1}{V V_W^2} \int_{\mathbf{x}} \left[\int_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) W\left(\frac{r}{r_0}\right) d^3r \right]^2 d^3x.$$

TAREA: Demostrar que

$$\left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 = \frac{1}{V_W^2} \int \Delta^2(k) |W_k|^2 \frac{dk}{k}, \quad (10.17)$$

donde W_k es la transformada de Fourier de $W\left(\frac{r}{r_0}\right)$. *Sugerencia:* calcular primero $\mathcal{F}_k\left(\int_r \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) W\left(\frac{r}{r_0}\right) d^3r\right)$, donde $\mathcal{F}_k(f)$ denota la transformada de Fourier de f .

En la práctica, tomar $W\left(\frac{r}{r_0}\right)$ como una función abrupta introduce efectos de borde (la orilla abrupta introduce potencia importante en el espectro a altas frecuencias, cuya contribución sólo es despreciable si $n < 1$ en la ec. [10.10]). Por ello es mejor tomar una ventana gaussiana:

$$W\left(\frac{r}{r_0}\right) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2},$$

de modo que

$$V_W = (2\pi)^{3/2} r_0^3 \quad (10.18)$$

y

$$W_k = V_w e^{-k^2 r_0^2 / 2}.$$

Para esta ventana, y la forma (10.10) para el espectro se encuentra:

$$\left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \Delta^2(k = r_0^{-1}). \quad (10.19)$$

TAREA: Demostrar (10.19).

Esto significa que la fluctuación de masa *rms* a escala r_0 está dada esencialmente por la variación en la densidad a esa escala.

- La función de autocorrelación de la masa $\xi(r)$, definida como

$$\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\delta(\mathbf{x}) \rangle, \quad (10.20)$$

y que da la probabilidad de que dos puntos separados por un desplazamiento \mathbf{r} tengan el mismo valor de la fluctuación de densidad δ .

TAREA: Argumentar que en efecto esto es así.

Análogamente a la demostración de (10.17), se puede demostrar que

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3 V} \int |\delta_k|^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad (10.21)$$

y

$$|\delta_k|^2 = V \int \xi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r. \quad (10.22)$$

Es decir, *la función de autocorrelación y el espectro de potencias son uno la transformada de Fourier del otro.*

Notas sobre la función de autocorrelación:

- A menudo a $\xi(\mathbf{r})$ también se le llama simplemente la *función de correlación*.
- Es claro que $\xi(\mathbf{r} = 0) = \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2$.
- Debido a la isotropía del Universo, esperamos que $\xi(\mathbf{r}) = \xi(r)$, con $r = |\mathbf{r}|$.
- CHECAR La función de autocorrelación tiene adicionalmente el significado físico de ser *el exceso de probabilidad, por encima del valor uniforme*, de encontrar el mismo valor de la densidad en posiciones separadas por una distancia r . En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \xi(r) = \langle \delta_1 \delta_2 \rangle &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \langle (\rho_1 - \bar{\rho})(\rho_2 - \bar{\rho}) \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \langle \rho_1 \rho_2 - \rho_1 \bar{\rho} - \rho_2 \bar{\rho} + \bar{\rho}^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} [\langle \rho_1 \rho_2 \rangle - \bar{\rho} \langle \rho_1 \rangle - \bar{\rho} \langle \rho_2 \rangle + \bar{\rho}^2] = \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} [\langle \rho_1 \rho_2 \rangle - 2\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^2]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, despejando $\langle \rho_1 \rho_2 \rangle$ y multiplicando por $dV_1 dV_2$,

$$\langle \rho_1 \rho_2 \rangle dV_1 dV_2 = \bar{\rho}^2 [1 + \xi(r)] dV_1 dV_2, \quad (10.23)$$

en donde $\bar{\rho}^2 dV_1 dV_2$ es la probabilidad en cuestión en el caso de densidad uniforme.

- Aunque no hay manera directa de medir la autocorrelación de la masa, sí se ha medido la de las galaxias (la función de correlación galaxia-galaxia), denotada ξ_{GG} , y definida como

$$\xi_{GG} \equiv \langle \delta n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \delta n(\mathbf{x}) \rangle = \left\langle \frac{[n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \bar{n}][n(\mathbf{x}) - \bar{n}]}{\bar{n}^2} \right\rangle, \quad (10.24)$$

donde $n(\mathbf{x})$ es la densidad numérica de galaxias en una vecindad del punto \mathbf{x} .

Se puede adoptar la *aparentemente* razonable suposición de que $n \propto \rho$, y en este caso $\xi_{GG} \equiv \xi(r)$. Dado que las galaxias emiten luz, esta suposición es equivalente a decir que “la luz sigue (o “traza”, o “rastrea”, o “sigue”, o “representa” a la masa)”.

En realidad, esta es una suposición muy fuerte, que casi seguramente no se verifica. Esto está relacionado con la hipótesis llamada “*formación sesgada* (‘*biased*’) *de galaxias*”, que propone que existe una densidad umbral necesaria para la formación de galaxias, de modo que la distribución de galaxias más bien da una representación tipo “on/off” de la distribución de masa (densidad mayor o menor que la umbral), y no una representación monotónica de la ρ .

Más recientemente, simulaciones numéricas por Cen, Ostriker et al (astro/ph-0305203) sugieren que ni siquiera la formación sesgada de galaxias es una hipótesis realista, siendo la relación entre ξ y ξ_{GG} muy compleja.

- Se encuentra observacionalmente que

$$\left(\frac{\delta M}{M} \right)_{\lambda \approx 10h^{-1} \text{Mpc}} \approx 0.9 \quad (10.25)$$

y

$$\left(\frac{\delta M}{M} \right)_{\lambda \approx 30h^{-1} \text{Mpc}} \approx 0.25, \quad (10.26)$$

implicando que escalas justo por debajo de $\lambda \approx 10h^{-1} \text{Mpc}$ están en proceso de volverse no lineales ($\delta M \sim M$) hoy en día, ya que escalas más grandes tardan más tiempo en crecer (sec. 10.5.4).

10.3 Separación de las fluctuaciones de la expansión global.

(KT sec. 9.2.1)

Consideremos una región esférica en la que el efecto acumulado de las fluctuaciones de densidad dentro de ella sea que su densidad promedio ρ_1 sea $> \bar{\rho}$,

con $\bar{\rho}$ la densidad promedio del Universo. Consideremos también que el Universo es de FRW, con $\Omega_T = 1$ ($k = 0$), dominado por materia.

La región sobredensa se comportará como un “sub-Universo” cerrado (pues su densidad es mayor que la del Universo con $k = 0$), evolucionando de acuerdo a la EF (ec. [4.2])

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2}, \quad k = 1. \quad (10.27)$$

Por otro lado, el Universo en su totalidad evoluciona de acuerdo a:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (\text{i.e., con } k = 0), \quad (10.28)$$

con

$$R_u(t) \propto t^{2/3}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (10.29)$$

en donde se ha aplicado el resultado de la ec. (4.54) y la relación entre tiempo y densidad se sigue de un tratamiento similar al de la tarea de la sec. 6.6.

Se puede demostrar (KT, sec. 3.2, p. 59) que para Universo cerrado que al tiempo t_i tiene un parámetro de densidad Ω_i y un radio R_i alcanza un radio máximo:²

$$\frac{R_{\max}}{R_i} = \frac{\Omega_i}{(\Omega_i - 1)} \quad (10.30)$$

a un tiempo

$$H_i t_{\max} = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega_i}{(\Omega_i - 1)^{3/2}} \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_{\max}}{R_i} \right)^{3/2} \quad (10.31)$$

y con densidad

$$\frac{\rho(t_{\max})}{\rho_i} = \left(\frac{R_i}{R_{\max}} \right)^3 = \frac{3\pi}{32Gt_{\max}^2 \rho_i}. \quad (10.32)$$

Es decir, después de t_{\max} , la región en cuestión deja de expandirse, y se separa de (“breaks away” o “rompe con”) la expansión global del Universo para comenzar a contraerse gravitacionalmente. De (10.29) y (10.32) se sigue que el cociente entre la densidad de la región sobredensa y la densidad media del Universo a este tiempo es

$$\frac{\rho(t_{\max})}{\bar{\rho}(t_{\max})} = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.55. \quad (10.33)$$

Después de alcanzar su máximo radio, la región sobredensa comienza a recolapsarse, hasta virializarse (si no hay disipación) por “*relajación violenta*”, alcanzando un tamaño $r_{\text{vir}} = \frac{1}{2}r_{\max}$, con densidad $\rho_{\text{vir}} = 8\rho(t_{\max})$.

²Recordar que para un universo cerrado sí es factible hablar del factor de escala como su radio; ver nota (a) de la sec. 3.4.2.

10.4 Evolución de las perturbaciones

Procederemos ahora a hacer el cálculo de la inestabilidad gravitacional, que nos dice cuáles fluctuaciones de densidad proceden al colapso gravitacional. Esencialmente, a una densidad y temperatura dadas, la estabilidad está determinada por el tamaño de las regiones, como veremos a continuación.

10.4.1 Inestabilidad gravitacional en un fluido sin expansión

Como referencia, estudiaremos, primero la (in)estabilidad gravitacional de un fluido sin expansión. Esto constituye el análisis de Jeans clásico.

Las ecuaciones de movimiento que describen a un fluido ideal sin viscosidad son las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{Ec. de continuidad}$$

$$(conservación de la masa) \quad (10.34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \varphi = 0 \quad \text{Conservación de momento} \quad (10.35)$$

adicionadas de la

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho \quad \text{Ecuación de Poisson.} \quad (10.36)$$

En ellas, ρ = densidad, \mathbf{v} = velocidad, P = presión y φ = potencial gravitacional. P y ρ están relacionadas por la *ecuación de estado*.

La solución de equilibrio es aquella con $\rho = \rho_0 = \text{cte}$, $P = P_0 = \text{cte}$, $\mathbf{v} = 0$. Nótese que aquí el subíndice “0” denota esta solución, y no valores al tiempo presente. Nótese también la famosa “*trampa*” de Jeans (*Jeans “swindle”*, en inglés): dado que $P_0 = \text{cte}$, $\nabla P_0 = 0$. Por lo tanto, la solución de equilibrio requiere $\nabla \varphi_0 = 0$, lo cual contradice la ecuación (10.36). Jeans simplemente ignoró esta inconsistencia, yendo directamente a las ecuaciones perturbadas, sin escribir la solución de equilibrio. Este problema se arregla al considerar una modificación a (10.36), en la que la fuente de potencial gravitacional es $(\rho - \rho_0)$, no ρ (sec.10.4.2).

Considerando pequeñas perturbaciones a la solución de equilibrio, escribimos:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1 & \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 \\ P &= P_0 + P_1 & \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1, \end{aligned} \quad (10.37)$$

con la velocidad del sonido adiabática definida como:

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \approx \frac{P_1}{\rho_1}. \quad (10.38)$$

A primer orden, las perturbaciones satisfacen:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (10.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{v_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 + \nabla \varphi_1 = 0 \quad (10.40)$$

$$\nabla^2 \varphi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (10.41)$$

Estas ecuaciones se pueden combinar para obtener:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 = 4\pi G \rho_0 \rho_1, \quad (10.42)$$

que es una ecuación de onda aumentada por el término del lado derecho. Introduciendo soluciones ondulatorias de la forma

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) \equiv \delta(\mathbf{r}, t) \rho_0 = A \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t] \rho_0 \quad (10.43)$$

para todas las variables, encontramos la ecuación de dispersión

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0, \quad (10.44)$$

con $k \equiv |\mathbf{k}|$.

TAREA: Obtener las ecuaciones (10.39)-(10.44).

La ec. (10.44) indica que para

$$k > \left(\frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \right)^{1/2}, \quad (10.45)$$

es decir, para

$$\ell = \frac{2\pi}{k} < \left(\frac{\pi v_s^2}{G \rho_0} \right)^{1/2} \equiv L_J \quad (\text{Longitud de Jeans}), \quad (10.46)$$

ω es real, y las soluciones siguen siendo ondulatorias, mientras que para $\ell > L_J$, ω es imaginaria, y las soluciones crecen *exponencialmente* en el tiempo.

El significado físico de la ec. (10.44) es que la evolución de una perturbación de densidad depende de la competencia entre la propagación de ondas de sonido y la tendencia al colapso gravitacional. Para perturbaciones de tamaño menor que L_J , el tiempo de cruce sónico a través de la perturbación ($\sim 1/(v_s k)$) es menor que el tiempo de caída libre ($\sim 1/\sqrt{4\pi G \rho_0}$), y por lo tanto la fluctuación tiene tiempo de re-expandirse (a la velocidad del sonido) antes de colapsarse gravitacionalmente. Lo opuesto ocurre para fluctuaciones de tamaño mayor que L_J .

Conviene definir la *masa de Jeans* como la masa contenida en una esfera de radio $L_J/2$, a la densidad uniforme ρ_0 :

$$M_J \equiv \frac{\pi^{5/2}}{6} \frac{v_s^3}{G^{3/2} \rho_0^{1/2}}, \quad (10.47)$$

que se puede usar también como indicador de la estabilidad gravitacional.

10.4.2 Crecimiento de las perturbaciones en un fluido en expansión

Añadamos ahora la expansión del Universo. En este caso, la solución sin perturbar es:

$$\rho_0 = \rho_0(t_0)a^{-3}(t) \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{r} \quad \nabla\varphi_0 = \frac{4}{3}\pi G\rho_0\mathbf{r}, \quad (10.48)$$

donde $a(t)$ está dada por la *EF*. Nótese que, a diferencia de la notación usada en los capítulos 4 y 5, en donde r denotaba la distancia comóvil, en esta sección \mathbf{r} denotará a la distancia física.

Ahora, las ecuaciones a primer orden para las perturbaciones son

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \frac{3\dot{R}}{R}\rho_1 + \frac{\dot{R}}{R}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\rho_1 + \rho_0\nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0 \\ \frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{v}_1 + \frac{\dot{R}}{R}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + \frac{v_s^2}{\rho_0}\nabla\rho_1 + \nabla\varphi_1 &= 0 \\ \nabla^2\varphi_1 &= 4\pi G\rho_1. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Definiendo $\delta(\mathbf{r}, t) \equiv \rho_1(\mathbf{r}, t)/\rho_0$ y expandiendo todas las variables en integrales de Fourier:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Psi_k(t) e^{-\frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{R(t)}} d^3k, \quad (10.50)$$

con $\Psi \equiv (\delta, \mathbf{v}, \varphi_1)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_k - \frac{i\mathbf{k}}{R} \cdot \mathbf{v}_k &= 0 \\ \frac{d(R\mathbf{v}_k)}{dt} - i\mathbf{k}v_s^2\delta_k - i\mathbf{k}\varphi_k &= 0 \\ \varphi_k &= -\frac{4\pi G\rho_0}{k^2}R^2\delta_k. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Aquí, \mathbf{k} es el número de onda comóvil, y $\mathbf{x} \equiv \mathbf{r}/R$ la coordenada comóvil.

En este momento, es conveniente separar el campo de perturbaciones de velocidad \mathbf{v}_1 , en sus partes rotacional (o “solenoidal”) \mathbf{v}_\perp e irrotacional (o “compresiva”) \mathbf{v}_\parallel , que satisfacen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_{\text{cst.}}; \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{\parallel k} + \mathbf{v}_{\perp k}, \quad (10.52)$$

con

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_\perp &= 0 & \nabla \times \mathbf{v}_\parallel &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\perp k} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\parallel k} &= |\mathbf{k}||\mathbf{v}_{\parallel k}|, \\ & & \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{\parallel k} &= 0. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Entonces, las ec. (10.51) dan:

$$\mathbf{k} \times (10.51b) \rightarrow \frac{d(R\mathbf{v}_{\perp k})}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{\perp k} = \frac{\text{cte.}}{R(t)} \hat{\mathbf{k}}_{\perp} \quad (10.54)$$

$$(10.51a) \rightarrow \mathbf{v}_{||k} = \frac{R}{ik} \dot{\delta}_k \quad (10.55)$$

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta}_k + \left(\frac{v_s^2 k^2}{R^2} - 4\pi G\rho_0\right)\delta_k = 0. \quad (10.56)$$

De la ecuación (10.55) se ve que los modos rotacionales decaen como $1/R(t)$ (por conservación de momento angular) y de la ecuación (10.56), que las perturbaciones en densidad sólo están acopladas a los modos compresibles. Por estas razones, es tradicional despreciar los modos rotacionales y considerar sólo los compresibles. Sin embargo, esto ignora el hecho de que los modos rotacionales se amplifican fuertemente en el régimen no lineal. Además, un flujo lineal en la densidad puede ser no lineal en la velocidad (p. ejm., el océano y la atmósfera terrestres).

De la ecuación (10.56) se ve que: a) si $\dot{R} = 0$, se recupera el caso de Jeans clásico, y b) de todas formas el número de onda de Jeans

$$k_J = \frac{4\pi G\rho_0 R^2}{v_s^2} \quad (10.57)$$

sigue separando los regímenes estable e inestable.

Si $k \ll k_J$, se puede despreciar el gradiente de presión en (10.56) (término $v_s^2 k^2/R^2$) frente a $4\pi G\rho_0$. Además, suponiendo un Universo plano con $\dot{R}/R = \frac{2}{3}t^{-1}$ y $\rho_0 = (6\pi Gt^2)^{-1}$, la ec. (10.56) se reescribe como

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0, \quad (k \ll k_J), \quad (10.58)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \delta_+(t) &= \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} \propto R \\ \delta_-(t) &= \delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1} \propto R^{-3/2}, \end{aligned} \quad (10.59)$$

en donde t_i es un tiempo arbitrario escogido para normalizar la solución. La solución “+” es la que domina finalmente, y demuestra el resultado que anunciamos en la ec. (10.1) para el régimen lineal.

De (10.59) se ve la diferencia fundamental entre el análisis de Jeans clásico, y el aplicado al Universo en expansión: en el primero, el colapso gravitacional (el crecimiento de las perturbaciones) procede *exponencialmente*, mientras que en el segundo procede como una ley de potencias en el tiempo (para el caso denominado por materia).

En el caso de un Universo denominado por radiación, el crecimiento de las perturbaciones está todavía más inhibido: en este caso, la contribución dominante a la presión es la de radiación, $P = \frac{1}{3}\rho_r c^2$, de modo que

$$v_s^2 = \frac{c^2}{3}, \quad (10.60)$$

es decir, *la velocidad del sonido es comparable a la de la luz.*

TAREA: Mostrar que en este caso la ec. (10.56) implica que k_J es tan pequeño que corresponde a escalas más grandes que el horizonte, para las cuales el tiempo de cruce sónico (comparable al de caída libre) es mayor que el tiempo de Hubble hasta ese momento, y por lo tanto no han tenido tiempo de contraerse gravitacionalmente.

Sin embargo, una vez que la materia se ha desacoplado de la radiación, su velocidad del sonido se calcula a partir de la ecuación de estado para un gas ideal a $T \sim 3000$ K, obteniéndose $v_s \sim 6 \text{ km s}^{-1}$. Es decir, al desacoplarse la materia de la radiación, la velocidad del sonido cae estrepitosamente, y con ella la longitud y la masa de Jeans para los bariones, encontrándose:

$$M_{J,B} \approx 1.3 \times 10^5 (\Omega_B h^2)^{-1/2} \left(\frac{z}{1100} \right)^{3/2} M_\odot. \quad (10.61)$$

Esto sugeriría que a partir de este momento se pueden formar estructuras con masas del orden de las de los cúmulos globulares (fig. 10.4).

10.5 El espectro inicial de las fluctuaciones de densidad

10.5.1 Introducción

Para perturbaciones con $k \ll k_J$, la ec. (10.58) nos dice que la tasa de crecimiento es independiente de k . Entonces, cuáles modos crecen primero depende esencialmente de sus amplitudes iniciales, información que está dada por el llamado espectro inicial. Aquí, por “inicial” entendemos el momento en que las perturbaciones pueden empezar a crecer. Es por tanto importante buscar indicaciones sobre la forma inicial del espectro.

Nótese que para materia oscura no interactuante, las perturbaciones pueden empezar a crecer gravitacionalmente a partir de la época de igualdad entre materia y radiación (a $z = z_{\text{eq}} \sim 10^4$); es decir, a partir de que la gravedad del Universo empieza a estar dominada por la materia. Por el contrario, para materia bariónica, las perturbaciones no pueden empezar a crecer sino hasta después del desacoplamiento ($z = z_{\text{dec}} \sim 1100$), pues hasta entonces han estado acopladas a la radiación y, por lo tanto, a su presión. Después de este momento, las fluctuaciones de la materia bariónica comienzan a crecer, “siguiendo” a (es

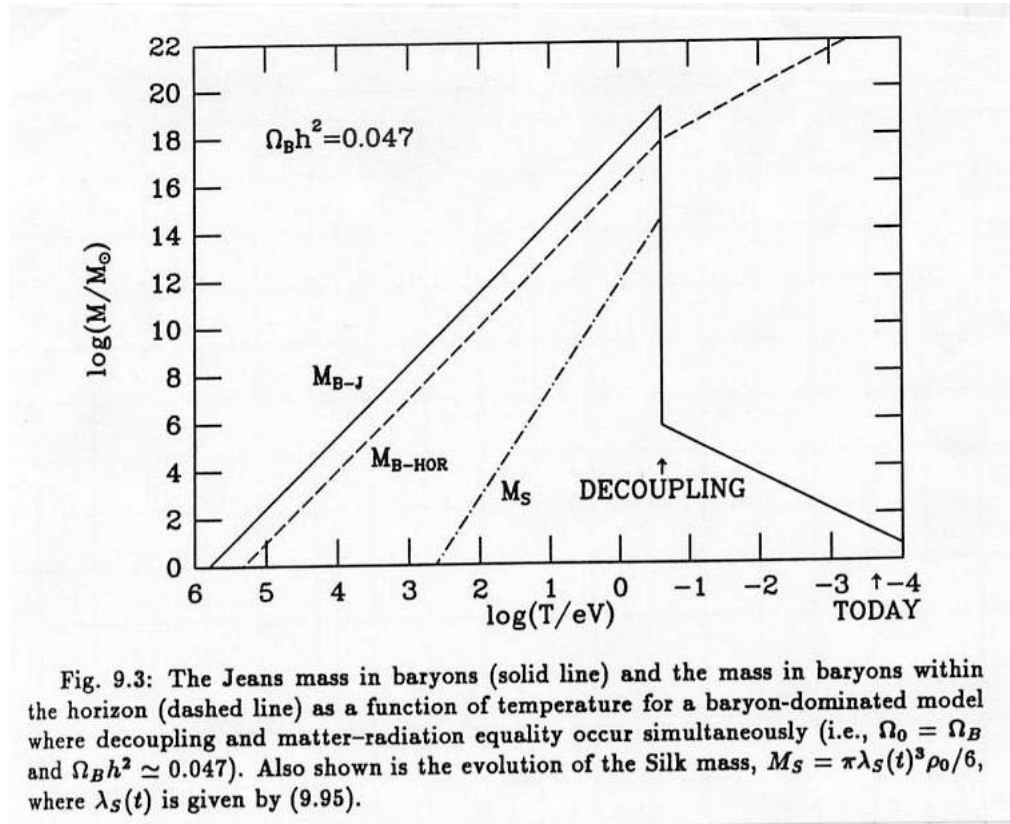


Figure 10.4: La masa de Jeans en bariones (*línea continua*) y la masa total en bariones dentro del horizonte (*línea a rayas*) como función de la temperatura para un modelo dominado por bariones.

decir, cayendo en los pozos de potencial de) las fluctuaciones de la materia oscura, la cual constituye la mayor parte de la materia en el Universo (sec. 8.5), y cuyas fluctuaciones ya han venido creciendo desde $z = z_{\text{eq}}$.

A continuación describiremos breve y cualitativamente el espectro primordial. Para más detalles, ver, p. ejm., la sec. 9.4 del KT.

10.5.2 Tipos de fluctuaciones iniciales

(KT, sec. 9.2.3)

Hay dos tipos importantes de fluctuaciones verdaderamente *iniciales* (o “primogenias”), es decir, que estaban presentes desde $t \ll t_{\text{eq}}$, cuando las escalas cosmológicas de interés estaban fuera del horizonte. Estas son:

- *Fluctuaciones adiabáticas, o “de curvatura”:*

Aquellas que corresponden a verdaderas fluctuaciones de densidad ($\delta\rho \neq 0$) de todas las especies del Universo:

$$\delta \equiv \frac{\delta n_B}{n_B} = \frac{\delta n_X}{n_X} = \frac{\delta s}{s} = 3 \frac{\delta T}{T}, \quad (10.62)$$

en donde “ B ” denota a los bariones, X a cualquier otra especie, y s la densidad de entropía.

Se llaman también “de curvatura” debido a que un incremento local en la densidad causa un incremento en la curvatura local del espacio-tiempo. Se les llama adiabáticas porque $\delta(n_x/s) = \delta n_x/s - n_x \delta s/s^2 = 0$. Es decir, para estas fluctuaciones, la entropía por partícula es constante.

- *Fluctuaciones isotérmicas, o “de isocurvatura”:*

Aquellas que corresponden a cambios locales en la ecuación de estado, mas no en la densidad total. Por ejemplo, variaciones en la densidad numérica de alguna especie X , y por lo tanto, de la presión (que depende de la composición):

$$\delta\rho = 0; \quad \frac{\delta n_X}{n_X} \neq 0.$$

Como $\delta\rho = 0$, no cambian la curvatura local del espacio-tiempo. Sin embargo, una vez que estas fluctuaciones se vuelven más pequeñas que el horizonte (según éste crece; se dice que las fluctuaciones “entran” [en el sentido de “caber”, no de “desplazarse”] al horizonte), las fluctuaciones en la presión ya pueden redistribuir la densidad de energía en la escala de la fluctuación, y la condición $\delta\rho = 0$ deja de aplicarse.

10.5.3 Procesos que borran las fluctuaciones

Las fluctuaciones de densidad primordiales (p. ejm., producidas por la inflación) de tamaños suficientemente pequeños pueden ser “borradas” (o “amortiguadas”) por dos procesos que se aplican a dos diferentes tipos de partículas:

Amortiguamiento no colisional (o “de Landau”).

También se le conoce como “mezclado de fases” (“phase mixing”) o “propagación libre” (“free streaming”). Consiste esencialmente en una “difusión” de las partículas no colisionales que tiende a revertir los gradientes de densidad. (Recordemos que en un proceso difusivo, hay un exceso de partículas moviéndose de regiones de mayor densidad a regiones de menor densidad, efecto que tiende a borrar los gradientes de la concentración de las partículas.)

Este proceso implica que fluctuaciones con escalas de tamaño menores que la distancia viajada por las partículas desde el BB (o desde la época inflacionaria) hasta $t = t_{\text{eq}}$, que es cuando las fluctuaciones empiezan a crecer gravitacionalmente, pueden ser borradas por esta difusión.

Aunque un tratamiento completo requiere resolver la ecuación de Boltzman, la escala característica de este proceso se puede calcular como sigue. La distancia comóvil recorrida por una partícula que viaja a velocidad v es:

$$\lambda_{\text{FS}}(t) = \int_0^{t_{\text{eq}}} \frac{v(t')}{R(t')} dt', \quad (10.63)$$

en donde t_{eq} = tiempo de la igualdad materia-radiación. El intervalo de $t = 0$ a $t = t_{\text{eq}}$ se puede dividir en el período “relativista” ($v \sim c$) y el “no-relativista” ($v \ll c$, denotado NR). Entonces

$$\lambda_{\text{FS}} = c \int_0^{t_{\text{NR}}} \frac{dt'}{R(t')} + \int_{t_{\text{NR}}}^{t_{\text{eq}}} \frac{v(t')}{R(t')} dt'. \quad (10.64)$$

Entre t_{NR} y t_{eq} , la velocidad de las partículas decae como R^{-1} (sec. 4.3.2). Además, durante todo el proceso, denomina la radiación, por lo que $R(t) \propto t^{1/2}$. Entonces podemos escribir

$$R(t) = R_{\text{NR}} \left(\frac{t}{t_{\text{NR}}} \right)^{1/2} \quad (10.65)$$

y

$$v(t) = c \left(\frac{R}{R_{\text{NR}}} \right)^{-1}, \quad (10.66)$$

con lo cual obtenemos

$$\lambda_{\text{FS}} = c \left(\frac{t_{\text{NR}}}{R_{\text{NR}}} \right) \left[2 + \ln \left(\frac{t_{\text{eq}}}{t_{\text{NR}}} \right) \right] \quad (10.67)$$

La época en la que cada especie se vuelve no relativista depende de la masa de las partículas de la especie. Además, para especies débilmente interactuantes, su temperatura puede ser diferente a la de la radiación (p. ejem., los neutrinos: sec. 6.6). Se puede demostrar que:

$$t_{\text{NR}} \approx 1.2 \times 10^7 \left(\frac{\text{keV}}{m_X c^2} \right)^2 \left(\frac{T_X}{T} \right)^2 \text{ s}$$

$$R_{\text{NR}} \approx 7.1 \times 10^{-7} \left(\frac{\text{keV}}{m_X c^2} \right) \left(\frac{T_X}{T} \right) R_0, \quad (10.68)$$

$$\frac{t_{\text{eq}}}{t_{\text{NR}}} \approx \left[\frac{m_X c^2}{17(\Omega_{T,0} h^2)(T_X/T)} \right]^2 \text{eV}^{-2},$$

donde T_x y m_x son la temperatura y la masa de la especie X . Se obtiene finalmente que

$$\lambda_{\text{FS}} \approx 0.2 \text{ Mpc} \left(\frac{m_X c^2}{\text{keV}} \right)^{-1} \left(\frac{T_X}{T} \right) \left[\ln \left(\frac{t_{\text{eq}}}{t_{\text{NR}}} \right) + 2 \right]. \quad (10.69)$$

En particular, para una especie ligera de neutrinos:

$$\lambda_{\text{FS}\nu} \approx 20 \text{ Mpc} \left(\frac{m_\nu c^2}{30 \text{ eV}} \right)^{-1}; \quad M_{\text{FS}\nu} \approx 4 \times 10^{14} \left(\frac{m_\nu c^2}{30 \text{ eV}} \right)^{-2} M_\odot. \quad (10.70)$$

Amortiguamiento colisional (o “de Silk”)

Los bariones, que sí son colisionales, no se difunden (ni remotamente) por distancias tan grandes como las partículas no colisionales. Sin embargo, están sujetos a un proceso similar durante la época de recombinación, ya que durante ésta época, los fotones están sólo parcialmente acoplados a la materia, y su camino libre medio comienza a aumentar. Se argumenta que esto constituye también un proceso difusivo, que es capaz de borrar las fluctuaciones con escalas de hasta el la distancia neta recorrida por los fotones durante la época de la recombinación.

Como para el amortiguamiento de Landau, un tratamiento completo requiere resolver la ecuación de Boltzman, pero de nuevo aquí sólo discutiremos su escala característica.

Para el caso no relativista, $kT \ll m_e c^2$, el camino libre medio de los fotones es

$$\lambda_\gamma = \frac{1}{X_e n_B \sigma_T} \approx 1.3 \times 10^{29} X_e^{-1} R^3 (\Omega_{B,0} h^2) \text{ cm}, \quad (10.71)$$

donde σ_T es la sección eficaz de Thomson y X_e es la fracción de ionización. Esta varía como sigue:

$$X_e \sim \begin{cases} 1 & t \ll t_{\text{dec}} \\ 0.1 & t \sim t_{\text{dec}} \\ 3 \times 10^{-5} \frac{\Omega_{T,0}^{1/2}}{\Omega_{B,0} h} & t \gg t_{\text{dec}}. \end{cases} \quad (10.72)$$

Además, a $t \sim t_{\text{dec}}$, $R \equiv 9.1 \times 10^{-4} R_0$, y λ_γ corresponde a una escala comóvil $\sim 0.03 (\Omega_{B,0} h^2)^{-1} \text{ Mpc}$.

Durante un intervalo Δt , un fotón sufre $c\Delta t/\lambda_\gamma(t)$ colisiones, que constituyen una caminata al azar con desplazamiento neto comóvil:

$$\lambda_s^2 \equiv (\Delta r^2) \approx \frac{c\Delta t}{\lambda_\gamma(t)} \left(\frac{\lambda_\gamma(t)}{R(t)} \right)^2, \quad (10.73)$$

pero dado que las cantidades involucradas varían en el tiempo, es necesario estimar el desplazamiento neto a través de una integral: CHECAR LIMITES

$$\lambda_s^2 = \int_0^{t_{\text{dec}}} \frac{c\lambda_\gamma(t')}{R^2(t')} dt'. \quad (10.74)$$

Considerando que la mayor parte del tiempo hasta $t \sim t_{\text{dec}}$ la expansión ha sido dominada por la materia, se encuentra

$$\lambda_s^2 = \frac{3}{5} c t_{\text{dec}} \frac{\lambda_\gamma(t_{\text{dec}})}{R_{\text{dec}}^2}. \quad (10.75)$$

Tomando $R_{\text{dec}}^{-1} = 1100$ y $X_e(t_{\text{dec}}) = 0.1$, se encuentra

$$\left. \begin{aligned} \lambda_s &= 3.5 \left(\frac{\Omega_{T,0}}{\Omega_{B,0}} \right)^{1/2} (\Omega_{T,0} h^2)^{-3/4} \text{Mpc}, \\ M_s &= 6.2 \times 10^{12} \left(\frac{\Omega_{T,0}}{\Omega_{B,0}} \right)^{3/2} (\Omega_{T,0} h^2)^{-5/4} M_\odot. \end{aligned} \right\} \quad (10.76)$$

Es interesante notar que M_s es parecida a la masa de un cúmulo de galaxias.

10.5.4 El espectro “procesado” y la formación de estructuras

Armados con la herramienta de las secciones anteriores, estamos en condiciones de discutir el espectro “procesado”; es decir, el espectro de fluctuaciones de densidad a $t = t_{\text{eq}}$, tomando en cuenta la “micro física” (la hidrodinámica, los procesos difusivos, etc.), que modifican las amplitudes iniciales (que se presume se originaron por la inflación).

Sin entrar en detalle, mencionaremos que la predicción inflacionaria es que perturbaciones de todas las escalas acaban teniendo la misma amplitud al momento de “cruzar el horizonte” (i.e., al tiempo en el que su escala característica λ es del tamaño del horizonte):

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right)_{\text{hor.}} = AM^{-\alpha}, \quad \alpha \approx 0. \quad (10.77)$$

Este es el llamado *espectro de Harrison-Zeldovich*. Esta forma final toma en cuenta que, mientras las perturbaciones tienen $\lambda > \lambda_{\text{hor.}}$, crecen por efectos puramente cinemáticos (que se pueden pensar como la evolución de “arrugas” en el espacio tiempo) como:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \begin{cases} R^2 \propto t & (\text{dominación por radiación}) \\ R \propto t^{2/3} & (\text{dominación por materia}) \end{cases} \quad (10.78)$$

Nótese que escalas pequeñas “entran” al horizonte antes que escalas más grandes. Dado que el espectro de HZ está especificado al tiempo de entrada al horizonte, esto corresponde a un tiempo diferente para cada escala. Estamos interesados

en especificar el espectro a un tiempo único: t_{eq} . Así pues, necesitamos saber cómo evolucionan las fluctuaciones dependiendo de si cruzan el horizonte antes o después de t_{eq} .

Consideremos primero fluctuaciones de pequeña escala, que cruzan el horizonte *antes* de t_{eq} . Como explicamos en la sec. 10.4.2, estas fluctuaciones no pueden crecer, pues la longitud de Jeans antes de t_{eq} es mayor que el horizonte. Por lo tanto, conservan la misma amplitud $(\delta\rho/\rho)_{\text{hor}}$, y $\alpha = 0$ para $\lambda < \lambda_{\text{hor}}(t_{\text{eq}})$.

Por otro lado, fluctuaciones con $\lambda > \lambda_{\text{hor}}(t_{\text{eq}})$ no han alcanzado todavía su amplitud final de HZ a $t = t_{\text{eq}}$, pues lo harán justo hasta alcanzar el horizonte. Su amplitud a este tiempo es entonces *menor* que la de HZ. Para estimarla reescribiremos (10.78) en relación a los valores al momento de cruzar el horizonte como:

$$\frac{\delta\rho}{\rho}(t) = \left[\frac{R(t)}{R(t_{\text{hor}})} \right]^n \frac{\delta\rho}{\rho}(t_{\text{hor}}), \quad n = \begin{cases} 1 & (\text{dom. mat.}) \\ 2 & (\text{dom. rad.}) \end{cases} \quad (10.79)$$

y notamos que la masa contenida dentro del horizonte al tiempo t esta dada por

$$M_{\text{hor}}(t) = M_{\text{hor}}(t_{\text{hor}}) \left[\frac{R(t)}{R(t_{\text{hor}})} \right]^m, \quad m = \begin{cases} \frac{3}{2} & (\text{dom. mat.}) \\ 3 & (\text{dom. rad.}) \end{cases} \quad (10.80)$$

TAREA: demostrar la ec. (10.80).

De (10.77), (10.79) y (10.80) se puede demostrar entonces que

$$\frac{\delta\rho}{\rho}(t_{\text{eq}}) = \left[\frac{M}{M_{\text{hor}}(t_{\text{eq}})} \right]^{-2/3} AM^{-\alpha} \propto AM^{-\frac{2}{3}-\alpha} \quad (10.81)$$

TAREA: demostrar (10.81), notando que M es fija (es la escala de la perturbación) y que $M_{\text{hor}}(t_{\text{hor}}) = M$.

De este modo, para las fluctuaciones que están todavía fuera del horizonte a t_{eq} , y con el espectro de HZ ($\alpha = 0$), obtenemos que:

$$\frac{\delta\rho}{\rho}(t_{\text{eq}}) \propto M^{-2/3}. \quad (10.82)$$

Finalmente, de la sec. (10.5.3) sabemos que las fluctuaciones con escalas menores que λ_{FS} (correspondiente a WIMPs) o λ_s (correspondiente a bariones), son borradas. Para el caso de materia oscura débilmente interactuante (WIMPs), todavía tenemos dos posibilidades:

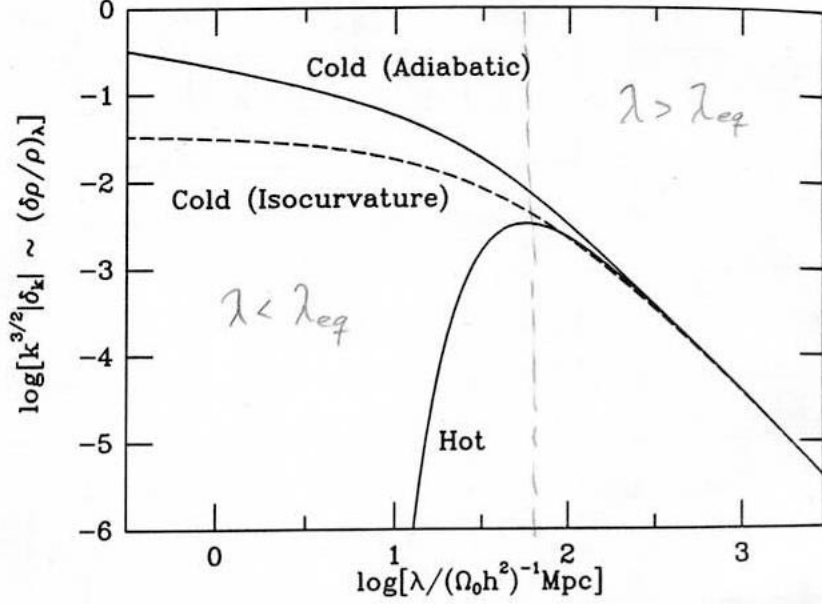


Fig. 9.4: The fully processed spectrum, $k^{3/2}|\delta_k|$, specified at some time after the epoch of matter-radiation equality, for hot and cold dark matter with constant-curvature, adiabatic fluctuations; and for cold dark matter with isocurvature, Harrison-Zel'dovich fluctuations, cf. (9.127, 9.128). For all three cases, $k^{3/2}|\delta_k| \propto k^2 \propto M^{-2/3}$ for $\lambda \gg \lambda_{EQ}$. The overall normalization is arbitrary.

Figure 10.5: Espectro procesado.

- *Materia oscura “fría”*: aquélla que se vuelve no relativista mucho antes de t_{eq} , o equivalentemente, aquélla para la cual $\lambda_{FS} \ll \lambda_{eq}$, donde $\lambda_{eq} = ct_{eq}/R_{eq} \approx 13 (\Omega_{T,0} h^2)^{-1}$ Mpc es el tamaño comóvil del horizonte a $t = t_{eq}$.

Esta materia estaría constituida por partículas masivas, con $m_X \sim 1$ keV (ver ec. [10.69]).

- *Materia oscura caliente*: aquélla que se vuelve no relativista a $t_{NR} \sim t_{eq}$, con $\lambda_{FS} \sim \lambda_{eq}$, y $m_X \sim 30$ eV (neutrinos ligeros).

El espectro procesado queda finalmente como indica la fig. 10.5.

10.5.5 Evolución no lineal de las fluctuaciones

A partir de la época de la igualdad, las fluctuaciones de densidad en la materia oscura comienzan a crecer, primero a una tasa independiente del número

de onda k (para $k \ll k_J$) durante el régimen lineal ($\frac{\delta\rho}{\rho} < 1$). Una vez que pasan el régimen no lineal, su subsecuente evolución debe seguirse a través de simulaciones numéricas. Sin embargo, es posible adelantar ciertos puntos:

- *Materia oscura caliente* (HDM): como se aprecia de la figura 10.5, la HDM se caracteriza por ausencia de fluctuaciones con

$$\lambda \lesssim 40 \left(\frac{m_\nu c^2}{30 \text{ eV}} \right)^{-1} \text{ Mpc.} \quad (10.83)$$

Esto significa que en este caso, las primeras estructuras que se forman son grandes, y entonces la estructura a pequeña escala presente hoy en día debe haberse formado por *fragmentación* de las estructuras grandes. Por eso, la formación de estructura en modelos HDM se dice en inglés que ocurre “*top-down*” (de arriba hacia abajo).

- *Materia oscura fría* (CDM): en este caso, hay potencia en el espectro hasta escalas mucho más pequeñas, y, dado que éstas tienen más potencia que las estructuras a mayor escala, crecen antes. Entonces, en modelos CDM, las primeras en crecer son las estructuras chicas, que subsecuentemente se aglomeran para producir las estructuras grandes. En estos modelos el crecimiento es entonces “de abajo hacia arriba” (“*bottom-up*” en inglés), o “*jerárquico*”. Este es el escenario preferido actualmente, adicionado de Λ , por lo cual se le denomina Λ CDM, o LCDM.
- *Formación de halos y galaxias*: Dado que la materia oscura constituida por WIMPs es no disipativa, no puede proceder a colapsarse hasta densidades arbitrariamente altas, sino que se virializa formando los llamados “*halos*” de materia oscura. Por su parte, la materia bariónica, que primero sigue el pozo de potencial de la materia oscura, puede continuar colapsándose después, ya bajo su propia autogravedad y disipando energía, hasta formar auténticas *galaxias*.

Chapter 11

Inflación

(Lineweaver, pp. 1-20 astro-ph/0305179)

11.1 Introducción

En las secciones anteriores hemos estudiado el modelo “estándar” de la gran explosión (modelos cosmológicos de FRW dominados por materia, radiación o energía del vacío, historia térmica del Universo y la CMBR, nucleosíntesis), así como su relación con las observaciones (determinación observacional de los parámetros cosmológicos) y “continuación” (formación de estructura por inestabilidad gravitacional).

Sin embargo, hay ciertos “huecos” en el modelo estándar: no son fallas ni contradicciones, sino sólo propiedades del Universo que no son *explicadas* por el modelo, sino que más bien son *datos* iniciales que se deben de insertar en él a priori. Esto causa una sensación de insatisfacción acerca del modelo estándar, que ha llevado a la introducción del llamado *escenario inflacionario* con el objeto de dar una explicación “razonable” a estos huecos, aunque en realidad esto se logra introduciendo hipótesis nuevas: específicamente, que durante una época muy temprana en el Universo la expansión procedió de manera exponencial, como en el caso dominado por Λ (sec. 4.4.2: modelo de de Sitter), por razones no completamente explicadas.

A estos “huecos” se les llama “problemas”, y los describiremos brevemente a continuación.

11.2 El problema de la llanura (“flatness” problem)

(Ver también sec. (4.3.2) y Peacock sec. 11.1)

Recordemos la ec. (4.42):

$$\Omega_T(z) - 1 = \frac{(\Omega_{T,0} - 1)}{\left[\Omega_{r,0}(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z) + (1 - \Omega_{T,0}) + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} \right]} \quad (11.1)$$

Como se discutió en la sec. 4.3.2, para un Universo en el que $\Omega_{T,0} \neq 0$, extrapolando esta relación a $z \rightarrow \infty$, encontramos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega_T(z) = 1. \quad (11.2)$$

Por otro lado, hoy sabemos que, $\Omega_{T,0} \approx 1$ (por WMAP). Específicamente, los resultados del tercer año de WMAP junto con otros datos como el Supernova Legacy Project o el HST key project indican que $\Omega_{T,0} \approx 1.015$ con precisión mejor que $^{+0.016}_{-0.021}$ (Spergel et al. 2003, ApJS, 148, 175; 2006, astro-ph/0603449). La ecuación (11.1) implica entonces que, para dominación por materia (desde t_{eq} hasta hoy):

$$\Omega_T(z) - 1 \approx \frac{\Omega_{T,0} - 1}{\Omega_{T,0}(1+z)} \quad (11.3)$$

mientras que para $t < t_{\text{eq}}$ (dominación por radiación)

$$\Omega_T(z) - 1 \approx \frac{1 + z_{\text{eq}}}{(1+z)^2} \left[\frac{\Omega_{T,0} - 1}{\Omega_{T,0}} \right], \quad (11.4)$$

en donde hemos usado que $\Omega_{r,0} \approx \Omega_{T,0}/(1+z_{\text{eq}})$. Tomando $(1+z_{\text{eq}}) \approx 10^4$ y $1+z = T/2.7 \text{ K}$, la ec. (11.4) implica que, para la época de Planck ($T \approx 10^{32} \text{ K}$)

$$|\Omega_T(z \sim 3 \times 10^{31}) - 1| \approx \frac{10^4}{10^{64}} \left(1 - \frac{1}{\Omega_{T,0}} \right) \sim 10^{-60}.$$

Es decir, hacia el final de la época de Planck $|\Omega_T - 1| \sim 10^{-60}$. Esta exagerada cercanía a 1, pero sin que se dé la igualdad exacta, es filosóficamente “incómoda”.

La inflación “resuelve” este problema suponiendo que en alguna época temprana del Universo, éste estuvo dominado por (alguna) Λ , de manera que durante ese período,

$$R(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t} \equiv e^{Ht} \quad (11.5)$$

donde $H \equiv \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} = \text{cte.}$ (ver ecs. [4.50] y [4.51]). Durante este período, la ec. (11.1) implica que en este caso (bajo la influencia sólo de Ω_Λ), Ω_T se acerca a 1 conforme z decrece (i.e., del pasado hacia el presente).

Para estimar la duración del período inflacionario, recordemos ahora la ec. (4.19), $\Omega_T - 1 = kc^2/HR^2$. Vemos que acercar Ω_T a 1 dentro de una parte en 10^{60} (i.e., $|\Omega_T - 1| \sim 10^{-60}$) partiendo de $|\Omega_T - 1| \sim \mathcal{O}(1)$ requiere incrementar R por un factor $\sim 10^{30}$ ($= \sqrt{10^{60}}$), y por lo tanto, por (11.5), incrementar t por un factor ~ 70 . Actualmente se considera que la inflación ocurrió entre $t \sim 10^{-34} \text{ s}$ (el momento de la raptura de simetría en las GUTs [teorías de gran unificación]) y $t \sim 10^{-32} \text{ s}$.

11.3 El problema del horizonte (de partículas)

(Ver también la sec. (4.4.5); Bernstein p. 157)

El “objeto” más lejano que podemos ver es la SUD. En todas direcciones la SUD parece tener la misma temperatura, salvo por las fluctuaciones $\delta T/T \sim 10^{-5}$ ya conocidos. El problema del horizonte consiste en que la SUD está tan lejana que al mirarla, digamos, en direcciones opuestas en el cielo, los puntos sobre la SUD que estamos viendo, están tan lejanos entre sí que están causalmente desconectados. No se explica entonces cómo puntos que nunca han podido interactuar se hayan podido “poner de acuerdo” para tener la misma temperatura y densidad, según las medimos nosotros.

Comencemos por confirmar que dentro de nuestro horizonte existen puntos causalmente desconectados entre sí. Para ello, comparemos el tamaño del horizonte de partículas en la SUD y comparémoslo con el tamaño del horizonte hoy en día. La distancia comóvil al horizonte es (ec. [4.60])

$$r = c \int_0^{t_i} \frac{dt}{R(t)} \quad (11.6)$$

Durante las épocas anteriores a la recombinación (época en que se produjo la SUD) podemos suponer que el Universo estuvo principalmente dominado por materia¹ (de $z = 10^4$ a $z = 10^3$). Por lo tanto, $a(t) \propto t^{2/3}$. Entonces, normalizando a la época de la recombinación, encontramos

$$r_{\text{rec}} = \frac{c t_{\text{rec}}^{2/3}}{R_{\text{rec}}} \int_0^{t_{\text{rec}}} \frac{dt}{t^{2/3}} = \frac{3ct_{\text{rec}}}{R_{\text{rec}}}, \quad (11.7)$$

por lo que el tamaño propio del horizonte a t_{rec} es

$$d_{\text{H,rec}} \equiv R_{\text{rec}} r_{\text{rec}} = 3ct_{\text{rec}}. \quad (11.8)$$

Usando que $t_{\text{rec}} \sim 10^{13}$ s (ec. [6.43]), obtenemos

$$d_{\text{H,rec}} \sim 10^{24} \text{ cm}. \quad (11.9)$$

Hoy en día, esto corresponde a un tamaño físico dado por

$$\ell_0 \equiv \frac{R_0}{R_{\text{rec}}} d_{\text{H,rec}} \approx 1100 d_{\text{H,rec}} \approx 10^{27} \text{ cm}.$$

Por comparación, el horizonte hoy en día es (usando [11.7] con $t_0 \sim 13$ Gyr como límite superior de la integral):

$$d_{\text{H},0} = 3ct_0 \approx 3.5 \times 10^{28} \text{ cm}, \quad (11.10)$$

de donde

$$\frac{d_{\text{H},0}}{\ell_0} \approx 35. \quad (11.11)$$

¹Aunque Bernstein hace el cálculo suponiendo dominación por radiación.

Es decir, el tamaño del horizonte hoy (el “Universo observable”) es ~ 35 veces mayor que el tamaño físico al día de hoy de la máxima distancia que estuvo causalmente conectada en la SUD. O dicho de otra forma, el tamaño comóvil del horizonte hoy en día es 35 veces mayor que el tamaño comóvil del horizonte en la época de recombinación.

De nuevo, la inflación resuelve este problema a través de la época de expansión exponencial, pues durante tal régimen el tamaño comóvil del horizonte de partículas *diverge*, implicando que todos los puntos del espacio pueden estar causalmente conectados.

Para mostrarlo, consideremos el tamaño comóvil del horizonte de partículas para un Universo de de Sitter (sec. 4.4.2), en el que se cumple la ec. (11.5). Nótese que en este caso, el tiempo correspondiente a $R = 0$ no es $t = 0$, como en los universos dominados por materia o radiación, sino $t = -\infty$. Por esto nos convendrá trabajar en términos del factor de escala, más que del tiempo. También nos convendrá trabajar entre dos tiempos finitos t_i y t_f , para al final dejar al primero de ellos tender a $-\infty$. Estos dos tiempos marcarán el principio y el comienzo de la época inflacionaria.

Partamos de la expresión para el horizonte de partículas, ec. (11.6), pero tomando los límites de integración como t_i y t_f :

$$r = c \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{R(t)}. \quad (11.12)$$

Esta ecuación nos da la distancia comóvil viajada por fotones entre los tiempos t_i y t_f .

Por otro lado, podemos reescribir la relación (11.5) normalizándola al tiempo $t_f \geq t$ y definiendo $R_f \equiv R(t_f)$ para obtener

$$R(t) = R_f \exp [H(t - t_f)].$$

Diferenciando e invirtiendo esta relación obtenemos

$$dt = \frac{dR}{HR},$$

que, al sustituirse en (11.12) da

$$\begin{aligned} r &= \frac{c}{H} \int_{R_i}^{R_f} \frac{dR}{R^2} \\ &= \frac{c}{R_f H} \left(\frac{R_f}{R_i} - 1 \right), \end{aligned} \quad (11.13)$$

en donde $R_i \equiv R(t_i)$. Vemos entonces que $r \rightarrow \infty$ según $R_i \rightarrow 0$. Es decir, a diferencia del caso de la expansión de ley de potencias $R(t) \propto t^n$ (correspondiente a la dominación tanto por materia como por radiación), en el caso de la expansión exponencial el horizonte de partículas no está acotado, y siempre puede elegirse un período inflacionario suficientemente largo como para que el horizonte en la SUD sea ya mayor que $d_{H,0}$ dada por la ec. (11.10). Nótese que

en este caso, estrictamente hablando, $d_{H,0}$ debe calcularse como la distancia entre nosotros y la SUD, que ciertamente es finita, y muy cercana a la dada por la ec. (11.10).

En coordenadas físicas, la expansión exponencial significa que el Universo se expande más rápidamente que el horizonte (la expansión es *superlumínica*) mientras dura la inflación. Se dice que esto no entra en conflicto con la Relatividad Especial dado que el espacio no es un objeto material.

11.4 Comentarios

A pesar de que la hipótesis inflacionaria resuelve los problemas anteriores, ella misma tiene sus problemas:

- Parece simplemente sustituir unas hipótesis (condiciones iniciales para el modelo estándar) por otras (existencia de un campo cuántico que produce la inflación, y con un potencial para este campo con una dependencia particular con la posición).
- El valor de Λ_{inf} es totalmente arbitrario, y completamente diferente (!por 120 órdenes de magnitud!) del único estimado imaginable, $\Lambda_{\text{inf}} \approx 8\pi G m_{p\ell}^4$.
- Nótese que si resultase que $\Omega_{T,0}$ fuera *exactamente* igual a 1, entonces no habría problema de la llanura, pues en ese caso $\Omega_{T,0}$ sería constante en el tiempo, siempre igual a 1. El problema era más fuerte en los 90s, cuando ya se sabía que $\Omega_{m,0} \sim 0.3$ y se creía que ésta era la principal contribución a $\Omega_{T,0}$.

Un último comentario es que la inflación predice un espectro de fluctuaciones de amplitud casi constante (independiente de la escala), debido a que el total del rango de escalas de interés (de 1 a 3000 Mpc) en el Universo post-inflación provienen de un intervalo de escalas muy pequeño (10^{30} veces menor!) antes del período inflacionario. En términos sencillos, es como si todas las escalas de interés para la formación de estructura proviniesen de una sola escala de tamaño antes de la inflación.

Chapter 12

Espectro de fluctuaciones de la CMBR

(Wayne Hu's home page,¹ secs. "Acoustic oscillations", "Angular Peaks", "First Peak" y "Second Peak"; Scott & Smoot 2004; Challinor 2004; Peacock, cap. 18; Hu & White 2004).

Las fluctuaciones espaciales de la CMBR han resultado en años recientes ser una pieza clave de información sobre la estructura e historia temprana del Universo. En particular, han permitido determinar con gran precisión varios parámetros fundamentales del Universo. En este capítulo revisaremos estos resultados de manera esencialmente cualitativa.

12.1 Variabilidad espacial de la CMBR

La CMBR es sorprendentemente uniforme en el cielo, con un espectro de frecuencias de cuerpo negro a una temperatura de 2.725 ± 0.001 K (sec. 1.3). No fue sino hasta principios de los años 90 cuando el satélite COBE, y mediciones con instrumentos en globos aerostáticos casi simultáneas a COBE, que se logró detectar fluctuaciones espaciales alrededor de este valor medio, al nivel de $\Delta T/T \sim 10^{-5}$. Estas fluctuaciones en la temperatura realmente corresponden a fluctuaciones en el *redshift* de la radiación de fondo, que pueden tener su origen en varios efectos físicos que describiremos en la §12.2.

La resolución del satélite COBE era de 7° en el cielo, que corresponde, al redshift de la SUD, a escalas de tamaño tan grandes que no han tenido tiempo de evolucionar. Por lo tanto, las fluctuaciones observadas hoy a esas escalas constituyen directamente las condiciones iniciales. Observaciones posteriores, como las realizadas con las sondas aerostáticas MAXIMA y BOOMERANG, y con el satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), han permitido mapear el cielo con resoluciones ~ 100 veces mayores.

¹<http://background.uchicago.edu/~whu/intermediate/intermediate.html>

TAREA: Calcular el tamaño comóvil de las fluctuaciones de temperatura en la SUD correspondientes a la resolución de COBE.

Es conveniente estudiar la información contenida en los mapas del cielo descomponiéndola en armónicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$:

$$T(\theta, \phi) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (12.1)$$

en donde $T(\theta, \phi)$ es la distribución angular de la temperatura de la CMBR en la esfera celeste, y ℓ es el llamado *momento multipolar*, que satisface que la escala angular $\theta \sim \pi/\ell$ (es decir, ℓ es una frecuencia angular). Es común entonces caracterizar las fluctuaciones angulares de la CMBR especificando la variancia de la temperatura como función de ℓ .

12.2 Origen de las anisotropías de la CMBR

Como ya se vio en la §7, la contribución dipolar tiene su origen en el movimiento neto de la Tierra con respecto a la CMBR. Pero en general, el resto de las fluctuaciones angulares (o “anisotropías”) de la CMBR tienen su origen en diversos procesos físicos que ocurrieron en la SUD (que producen las llamadas *anisotropías primarias*) o entre la SUD y nosotros (que producen las *anisotropías secundarias*). En general, modos con frecuencia angular ℓ son originados por procesos cuya escala de tamaño característica en la SUD corresponde al tamaño angular $\theta \sim \pi/\ell$ en la esfera celeste. Una referencia importante es que $\ell \approx 100$ corresponde al tamaño del horizonte en la SUD.

TAREA: Calcular el tamaño comóvil del horizonte a $z = 1100$ y el ángulo que subtende visto desde el día de hoy.

Las principales **anisotropías primarias** son:

1. *Anisotropías gravitacionales (efecto Sachs-Wolfe)*. La presencia de excesos locales en la densidad, y por lo tanto en el potencial gravitacional, tiene dos efectos sobre la radiación que observamos proveniente de ellos. Por un lado, causan un corrimiento al rojo gravitacional, que se manifiesta como $\delta T < 0$. Por otro lado, causan un retraso del tiempo (los relojes van más lento en el pozo de potencial; §3.4.1) dentro del pozo de potencial, por lo que vemos a la SUD en esa zona más atrás en el tiempo, y por lo tanto la vemos más caliente ($\delta T > 0$). El efecto combinado (llamado de “Sachs-Wolfe”) es que la $\delta T/T$ observada es sólo 1/3 de la fluctuación del potencial gravitacional:

$$\frac{\delta T}{T} \approx \frac{1}{3} \frac{\delta \phi}{c^2}.$$

Este efecto no es intrínseco, sino que se refiere a “distorsiones” en nuestra percepción de la radiación proveniente de la SUD.

2. *Perturbaciones intrínsecas (adiabáticas)*. En perturbaciones adiabáticas, regiones de alta densidad tienen también un exceso de temperatura,

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta n}{n}.$$

3. *Efecto Doppler*. Ya bien conocido (§3.3.4), que da

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{v_r}{c},$$

en donde v_r es la velocidad a lo largo de la línea de visión.

Por otro lado, una fuente importante de **anisotropías secundarias** son las fluctuaciones del potencial gravitacional a lo largo del camino de los fotones entre la SUD y nosotros. Esto arroja

$$\frac{\delta T}{T} = 2 \int \frac{\phi}{c^2} \frac{dl}{c}.$$

En particular, esta contribución es importante en presencia de fluctuaciones temporales del potencial gravitacional, que se pueden deber a la formación de estructuras ya en la fase no lineal (produciendo la contribución por *efecto Rees-Sciama*) o por efecto de la transición por dominación de materia a dominación por Λ en tiempos recientes (*efecto Sachs-Wolfe integrado*).

12.3 Escalas de las anisotropías

Las fluctuaciones en la CMBR a escala más grande son causadas por el efecto Sachs-Wolfe integrado, pues éste se produce en épocas/distancias relativamente cercanas a nosotros ($z \sim 1$), y por lo tanto cubren un área grande en el cielo, manifestándose para $\ell \lesssim 5$. El resto de los modos con $\ell \lesssim 100$ corresponde a fluctuaciones con escalas mayores que el tamaño del horizonte en la SUD, y que por lo tanto son las “condiciones iniciales” a esas escalas, como se mencionó arriba. Dado que estas fluctuaciones tenían amplitudes aproximadamente independientes de su escala de tamaño, se manifiestan como una “meseta” (“plateau”) en el espectro de la CMBR. A escalas menores ($100 \lesssim \ell \lesssim 1000$), encontramos las fluctuaciones que ya habían entrado al horizonte en la época de la SUD, y que ya habían tenido tiempo de evolucionar. A éstas se les llama *fluctuaciones acústicas*, y las discutiremos en detalle en la §12.4. Por último, a escalas correspondientes a $\ell > 1000$, el amortiguamiento de Silk (§10.5.3) comienza a ser importante, y por lo tanto encontramos la *cola de amortiguamiento* en el espectro de la CMBR. Estas características del espectro de anisotropías de la CMBR se muestran en la fig. 12.1.

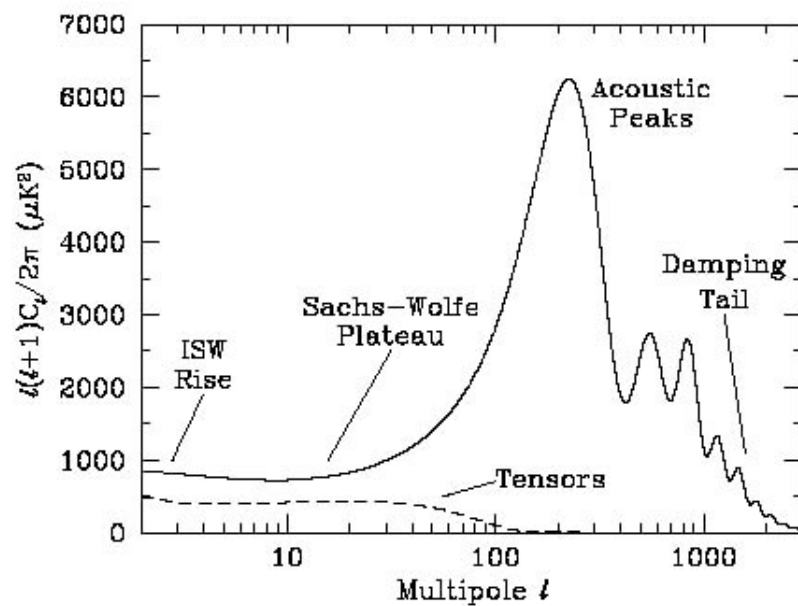


Figure 12.1: Forma teórica típica del espectro de anisotropías de la CMBR (Figura 1 de Scott & Smoot 2004.)

12.4 Las fluctuaciones acústicas

De acuerdo con la teoría inflacionaria, las semillas iniciales para la formación de estructura a gran escala en el Universo son fluctuaciones adiabáticas, que la inflación se encargó de dejar con casi igual amplitud en todas las escalas contenidas dentro del Universo observable. Siendo adiabáticas, implican fluctuaciones de densidad con la misma amplitud relativa $\delta n/n$ en todas las especies (sec. 10.5.2), en particular en la materia bariónica y la materia oscura. Sin embargo, como ya se vio en la sec. 10.5, la evolución de las perturbaciones en cada uno de estos tipos de materia es diferente. Durante el lapso comprendido entre el final de la inflación y la época de igualdad de materia y radiación, el potencial gravitacional está dominado por la radiación, y las perturbaciones en ambos tipos de materia solamente oscilan, pues la velocidad del sonido de la radiación implica que la longitud de Jeans es mayor que el horizonte. Entre la época de igualdad y la época de la recombinación, las fluctuaciones de materia oscura comienzan a crecer, pero la materia bariónica continúa acoplada a la radiación, con una escala de Jeans mayor que el horizonte, por lo que solamente continúa sufriendo oscilaciones. Sin embargo, estas oscilaciones están “reforzadas” por los pozos de potencial de la materia oscura, de manera que son asimétricas: la amplitud de la fase compresiva, reforzada por la gravedad de la materia oscura, es mayor que la de la fase expansiva, que es opuesta a dicha atracción gravitacional. Estas ondas (las llamaremos *acústicas* por simplicidad), causan que la densidad local en un punto dado del Universo fluctúe, análogamente al subir y bajar de un corcho en la superficie del mar. La frecuencia con la que sube y baja el corcho depende de la longitud de onda de las olas. De la misma manera, la densidad en un punto dado aumenta y disminuye con una frecuencia ν que satisface $c_s = \lambda\nu$, donde $c_s = c/\sqrt{3}$ es la velocidad del sonido en el fluido de bariones y fotones (ec. 10.60), y λ es la longitud de onda del modo. Esta última, proyectada en el plano del cielo, corresponde a la escala angular $\theta \sim \pi/\ell$ observada por nosotros.

En la SUD, las fluctuaciones con máxima amplitud serán aquéllas que justamente se encuentran en un máximo o mínimo de su oscilación en ese momento; es decir, aquéllas para las que el tiempo desde la inflación hasta la recombinación sea un múltiplo entero de sus semi-períodos de oscilación (de máximo a mínimo; ver fig. 12.2). Después de la recombinación, estas fluctuaciones se quedan “congeladas” en la radiación de fondo, pues el camino libre medio de los fotones se vuelve esencialmente infinito, y la información de las fluctuaciones de densidad se propaga libremente. Las frecuencias angulares ℓ en el cielo correspondientes a estos modos de máxima amplitud tendrán entonces también amplitud máxima en el espectro acústico. Los valores de ℓ a los que se presentan los máximos, así como las amplitudes relativas de éstos, nos permiten determinar con precisión varios parámetros cosmológicos fundamentales, entre ellos: la curvatura del Universo y las densidades de materia bariónica y de materia oscura, como describimos a continuación.

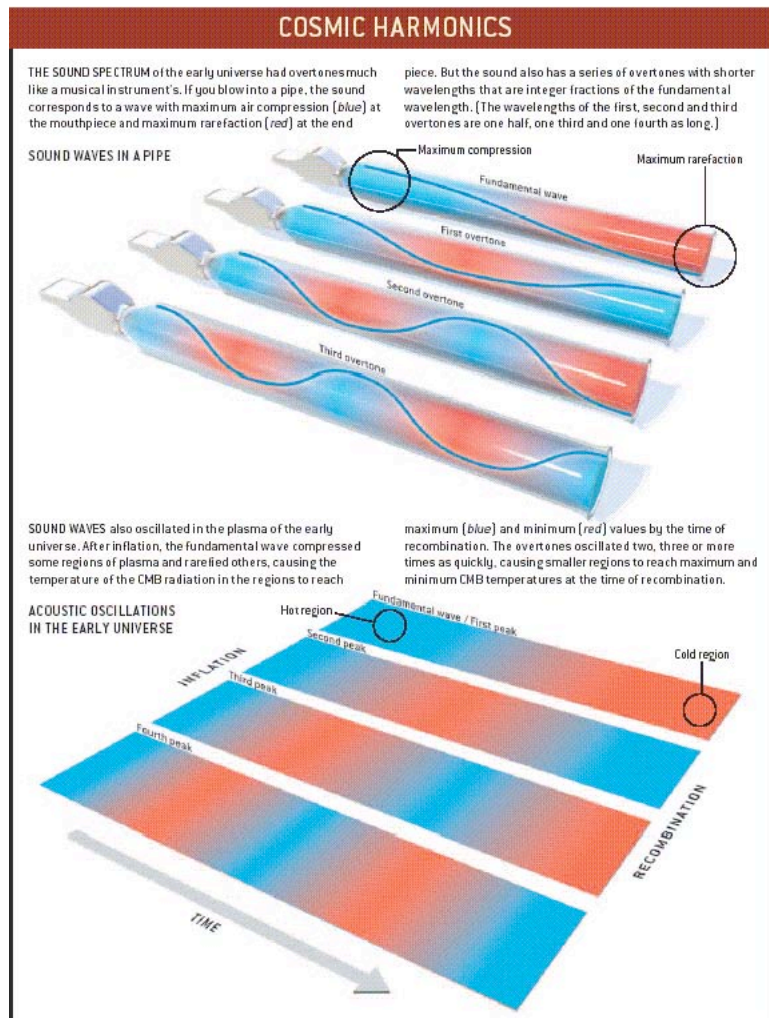


Figure 12.2: Modos acústicos en un instrumento de viento y en el Universo. En el caso del Universo, las oscilaciones pueden pensarse en un punto fijo en el espacio, según el tiempo pasa, como el subir y bajar de un corcho en las olas del mar. (Figura de la pag. 48 de Hu & White 2004.)

12.5 Determinación de la curvatura del Universo

El modo acústico de más largo período (es decir, de máxima longitud de onda) es aquél que sólo completó media oscilación desde el fin de la inflación hasta la SUD. Este modo constituye la “frecuencia fundamental” de oscilación del Universo, y corresponde al primer pico acústico en el espectro de la CMBR (es decir, al pico acústico de mínima ℓ). Dado que conocemos la edad del Universo en la época de recombinación, conocemos la frecuencia del modo fundamental, y por lo tanto su longitud de onda física. Por otro lado, observacionalmente se determina el tamaño angular subtendido por este modo (dado por la ℓ del primer pico acústico), así como el redshift z de la SUD. Esta información determina completamente la distancia de tamaño angular a la SUD que, como se vió en la sec. 5.1, depende de la curvatura del Universo a través de $S_k(r)$, por lo cual la curvatura también queda determinada.

De esta manera, el tamaño angular al que aparece el primer pico del espectro acústico ($\ell \sim 200$) es una determinación directa de $\Omega_{T,0}$. Los resultados de WMAP sugieren que $\Omega_{T,0} \approx 1.015$ con incertidumbre menor que $^{+0.016}_{-0.021}$ (Spergel et al. 2003, ApJS, 148, 175; 2006, astro-ph/0603449).

12.6 Determinación de la densidad de materia bariónica

Modos con frecuencias que son múltiplos impares de la frecuencia del modo fundamental se encuentran en estado de máxima compresión en la SUD, mientras que modos cuyas frecuencias son múltiplos pares de la del modo fundamental, se encuentran en estado de máxima expansión. Dado que la fase compresiva de las ondas acústicas tiene mayor amplitud que la expansiva (sec. 12.4), esperamos que las amplitudes de los modos impares en el espectro acústico sean mayores que las amplitudes de los modos pares. La magnitud de la asimetría se debe esencialmente al “peso” de la materia bariónica, que tiende a “caer” en el pozo de potencial de la materia oscura: a mayor “peso” de los bariones, mayor será el exceso de amplitud durante la fase compresiva, relativo a la amplitud de la fase expansiva. De esta manera, la asimetría de la oscilación, y por lo tanto el cociente de la amplitud del primer pico a la del segundo, son una medida de la intensidad relativa del “peso” de los bariones en el potencial de la materia oscura con respecto a la presión de radiación. Esto permite determinar la densidad de la materia bariónica, siendo el mejor estimado actual de $\Omega_{b,0}h^2 = 0.023 \pm 0.001$ (Scott & Smoot 2004).

12.7 Determinación de la densidad de la materia oscura

Tenemos todavía otro efecto por considerar, que afecta el cociente de las amplitudes de los picos de orden más alto, y que depende del cociente de la densidad

de energía de la materia oscura a la de la radiación. Dado que entre la inflación y la época de igualdad materia-radiación la gravedad estaba dominada por la radiación, aquellos modos de alta frecuencia que alcanzaron a completar uno o más semi-ciclos antes de la época de igualdad (es decir, que su semi-período es menor o igual que la edad del Universo a la época de igualdad) estaban sujetos a una asimetría parecida a la discutida en la sec. 12.6, aunque con una variante. Específicamente, antes de la época de igualdad, las oscilaciones también tenían asimetría entre la amplitud de compresión y la de expansión, pero en este caso, el potencial gravitacional mismo también oscilaba, puesto que estaba dado por la densidad de energía de los fotones, que son parte del fluido de fotones y bariones que sufría las oscilaciones. (Por comparación, entre la época de igualdad y la de recombinación, el potencial está dado por la materia oscura, la cual no participa de las oscilaciones, sino que se encuentra en la fase de crecimiento lineal, en respuesta a su propia gravedad). Es decir, antes de la época de igualdad, el fluido de fotones y bariones está respondiendo a su propia auto-gravedad, mientras que entre la igualdad y la recombinación, este fluido está respondiendo al potencial externo impuesto por la materia oscura.

Ahora bien, cuando el pozo de potencial oscila junto con las oscilaciones del fluido cosmológico, la amplitud de dichas oscilaciones se ve reforzada, pues en este caso el propio pozo de potencial tiene profundidad máxima en el momento de máxima compresión, y mínima en el momento de máxima expansión, de modo que esperamos una mayor amplitud de los modos de alta frecuencia (que sí alcanzaron a oscilar en este régimen) con respecto a la amplitud de los modos de baja frecuencia, que nunca oscilaron bajo el pozo de potencial de la radiación. El orden ℓ de los modos a partir del cual comienza a manifestarse este efecto de amplificación es una función de la duración del lapso entre la inflación y la época de la igualdad (pues la condición para que el efecto ocurra es que el período del modo sea menor que la edad del Universo en la época de la igualdad). A su vez, el momento preciso de la transición de dominación por radiación a dominación por materia depende obviamente de la cantidad existente de materia (que es principalmente oscura). Así pues, la variación de la amplitud de los modos como función de ℓ es una medida de Ω_m . El estimado actual de la contribución total de la materia es $\Omega_m h^2 = 0.13 \pm 0.01$ (Scott & Smoot 2004).

En resumen, el espectro de anisotropías de la CMBR contiene una gran cantidad de información sobre la naturaleza de nuestro Universo. El estado actual de las observaciones de este espectro se muestra en la fig. 12.3.

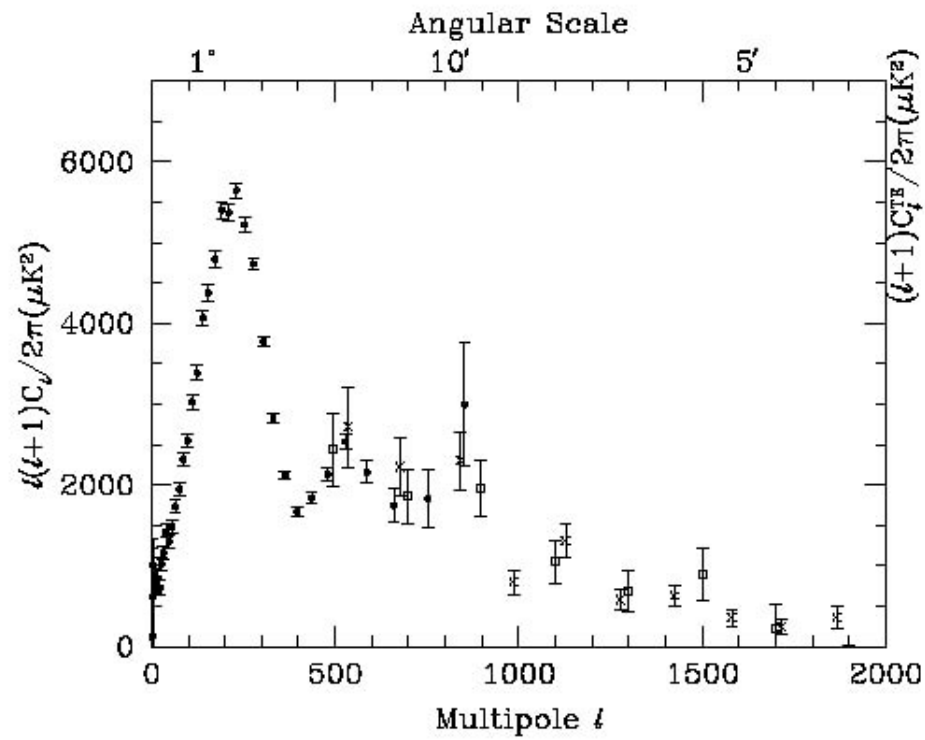


Figure 12.3: Observaciones del espectro de anisotropías de la CMBR. (Figura 2 de Scott & Smoot 2004.)

Bibliography

- [1] Bernstein, J. 1998, “An Introduction to Cosmology”, Prentice Hall.
- [2] Bothun, G. 1997, “Modern Observational Cosmology”, <http://zebu.uoregon.edu/1997/phys410.html>
- [3] Challinor, A. 2004 Proceedings of the 2nd Aegean Summer School on the Early Universe (Springer LNP), 22 (astro-ph/0403344)
- [4] Field, G.B., Verschuur, G.L. & Ponnampertuma, C.1978, “Cosmic Evolution: An Introduction to Astronomy”, Houghton Mifflin.
- [5] Hu, W., 2000, <http://background.uchicago.edu/whu/intermediate/intermediate.html>
- [6] Hu, W. & White, M. 2004, Scientific American, Feb. 2004, p. 44.
- [7] Kolb, E. W. & Turner, M. S. 1990, “The Early Universe”, Frontiers in Physics, Westview Press.
- [8] Lawden, D.F. 1982, “Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology”, 3rd edition, Wiley.
- [9] Ludvigsen, M. 1999, “General Relativity. A Geometric Approach”, Cambridge University Press
- [10] Peebles, “Principles of Physical Cosmology”, Princeton University Press
- [11] Scott, D. & Smoot, G., 2004, In ”The Review of Particle Physics”, S. Eidelman et al., Physics Letters B592, 1 (astro-ph/0406567)

Contents

1	Preliminares	1
1.1	Unidades y escalas	1
1.2	Fuerzas y partículas elementales	2
1.3	Constituyentes del Universo	4
2	Evidencia Observacional	9
2.1	Distribución espacial uniforme de la materia	9
2.2	Expansión del Universo	10
3	Elementos de Relatividad	15
3.1	El principio cosmológico	15
3.2	La paradoja de Olbers	16
3.3	Repaso de Relatividad Especial	17
3.3.1	Fundamentos	17
3.3.2	Métrica	20
3.3.3	Sincronización	20
3.3.4	Efecto Doppler	21
3.4	Elementos de Relatividad General	23
3.4.1	Efectos del campo gravitatorio	23
3.4.2	La métrica de Robertson y Walker	25
3.4.3	Notación tensorial y definiciones	28
3.4.4	Las ecuaciones del campo de Einstein	30

4	La Expansión del Universo	33
4.1	La ecuación de Friedmann: Necesidad de la expansión del Universo	33
4.2	Los parámetros Cosmológicos	36
4.3	Escalamientos con la expansión	38
4.3.1	El corrimiento cosmológico al rojo	38
4.3.2	Escalamiento de cantidades físicas	39
4.4	Modelos cosmológicos	41
4.4.1	El modelo estático de Einstein	41
4.4.2	El modelo de de Sitter	42
4.4.3	Modelos de rebote (“Bounce”) y deambulantes (“Loitering”)	43
4.4.4	Universo plano	43
4.4.5	Horizontes	48
5	Escalas de tiempo y distancia	51
5.1	Parámetros Cosmológicos y Cantidades Observables	51
5.2	La Escalera de las Distancias	54
5.3	Determinaciones directas	59
5.4	Resumen	62
5.5	Escalas de tiempo y edades	63
5.5.1	Cosmocronología nuclear	64
5.5.2	Edades por diagrama HR de cúmulos	65
5.5.3	Enfriamiento de enanas blancas	66
5.5.4	Discusión sobre las edades	66
5.5.5	Conclusiones sobre edades y distancias	66
6	Historia Térmica del Universo	69
6.1	Introducción	69
6.2	Termodinámica de la Expansión	70
6.3	Fondos de equilibrio no colisional	72
6.4	Entropía del fondo	74
6.5	Resultados para el caso ultra-relativista ($kT \gg mc^2 \Rightarrow \epsilon/kT \rightarrow pc/kT$)	76
6.6	Desacoplamiento de los neutrinos, aniquilación de pares e^+ y e^- , y recalentamiento de la radiación de fondo	76

6.7	Otras reliquias de la Gran Explosión	79
6.8	(Re)combinación (formación) de Hidrógeno y des- sacoplamiento de la radiación	80
6.8.1	Recombinación	80
6.8.2	Ionización residual	81
6.9	Desacoplamiento	84
6.10	Escalamiento de x con los parámetros de densidad	84
6.11	Última superficie de dispersión	85
6.12	Resumen de la historia térmica del Universo	86
7	La Radiación de Fondo de Micro-ondas	87
7.1	Modelos	87
7.2	Anisotropías de la CMBR	88
8	Nucleosíntesis Primordial	91
8.1	Introducción	91
8.2	“Congelamiento” de los neutrones	92
8.3	Formación de núcleos (Deuterio)	93
8.4	Formación y abundancia del He	94
8.5	Abundancias de otros elementos ligeros	96
9	La Función de Luminosidad	99
10	Formación de Estructura a Gran Escala	105
10.1	Introducción y perspectiva en general	105
10.2	Descripción de las fluctuaciones	107
10.2.1	Descomposición en Fourier	107
10.2.2	El espectro de potencia y cantidades rela- cionadas	109
10.3	Separación de las fluctuaciones de la expansión global.	113
10.4	Evolución de las perturbaciones	115
10.4.1	Inestabilidad gravitacional en un fluido sin expansión	115
10.4.2	Crecimiento de las perturbaciones en un fluido en expansión	117
10.5	El espectro inicial de las fluctuaciones de densidad	119

10.5.1	Introducción	119
10.5.2	Tipos de fluctuaciones iniciales	121
10.5.3	Procesos que borran las fluctuaciones	121
10.5.4	El espectro “procesado” y la formación de estructuras	124
10.5.5	Evolución no lineal de las fluctuaciones	126
11	Inflación	129
11.1	Introducción	129
11.2	El problema de la llanura (“flatness” problem)	129
11.3	El problema del horizonte (de partículas)	131
11.4	Comentarios	133
12	Espectro de fluctuaciones de la CMBR	135
12.1	Variabilidad espacial de la CMBR	135
12.2	Origen de las anisotropías de la CMBR	136
12.3	Escalas de las anisotropías	137
12.4	Las fluctuaciones acústicas	139
12.5	Determinación de la curvatura del Universo	141
12.6	Determinación de la densidad de materia bariónica	141
12.7	Determinación de la densidad de la materia oscura	141