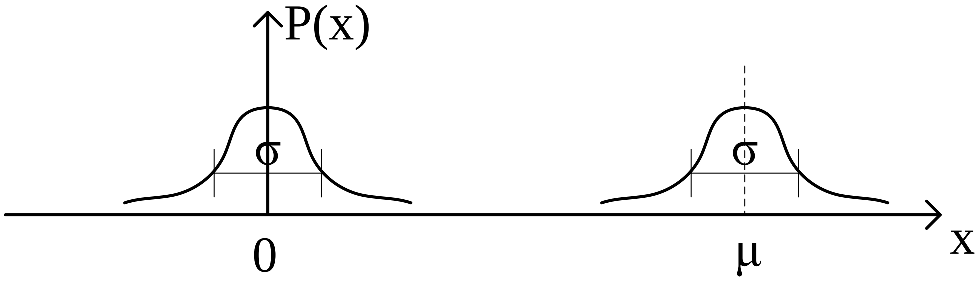
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x)dx$$




無論 $\mu$ 的值為何，均不會影響 $\sigma^2$ 的值

$$\begin{array}{ccc} \text{微} & & \text{積} \\ x & \overset{+}{\searrow} & xe^{-kx^2} \\ 1 & \xrightarrow{-} & \dfrac{-1}{2k}e^{-kx^2} \end{array}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-kx^2} dx = \frac{-1}{k} e^{-kx^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = (0-0) + \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-kx^2} dx = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{\pi}{k}} = \frac{1}{2k} = \sigma^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2\sigma^2}$$

故我們就可以將 Gaussian distribution 寫為

$$P(x \mid \mu, \sigma^2) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2\sigma^2}}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

而由於我們希望 Gaussian distribution 是沿著 mean 對稱的，故我們將上式改寫為

$$P(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

故給定 $\mu, \sigma^2$，我們可得到唯一，離 mean 距離相同就有相同機率的分佈
$x \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ //univariate Gaussian

note: Gaussian distribution 是一個很特別的函數，是一種 local 函數，若離 mean 太遠，其機率會小到幾乎可以忽略，很少函數有這種性質。

# MLE on Gaussian(期中考大熱門)

若有一組 Data D= $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$L(\theta = \mu, \sigma^2 \mid D) = P(D \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

我們要求最大值，需要使用微分，和前面一樣的方法，我們取 log，log 得到最大的$\theta$同時也是沒取 log 最大的$\theta$

$$\arg\max_{\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \arg\max_{\theta} \log(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}) = \arg\max_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} + \sum_{i=1}^{n} \log e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = n\log(2\pi\sigma^2)^{\frac{-1}{2}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$
$$= \frac{-n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

有兩個參數： $\mu, \sigma^2$ ，因為彼此為獨立的參數(需要證明，上網找有，但太複雜就沒看)，故只需要個別求最大的 log likelihood 的參數，就是整體最大 log likelihood 的參數

$\mu_{\text{MLE}}$

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{-n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{d}{d\mu}\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Rightarrow \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

和我們對 mean 的認知一樣，故若我們有一堆資料，假設其呈現高斯分佈，其最大的 mean 即為所有 data 相加後除以資料個數

$\sigma_{\mathrm{MLE}}$

為方便起見，令$\sigma^2$=s

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{-n}{2}\log(2\pi s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2s}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{-n}{2}\log 2\pi+\frac{-n}{2}\log s-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2s}\right)=\frac{-n}{2s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2s^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\frac{n}{2s}\Rightarrow s=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}=\sigma^2$$

也和我們之前認知的 variance 相同

# Conjugate prior of Gaussian

Gaussian distribution 也具有之前講過的 Conjugate 性質，即若給 Gaussian distribution 形式的 prior，其 posterior 也是 Gaussian distribution

若有一組 Data D= $x_1, x_2, \ldots, x_n$

給定 prior $\mathrm{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$

圖片來源：維基百科

| Likelihood | Model parameters | Conjugate prior distribution | Prior hyperparameters | Posterior hyperparameters |
|---|---|---|---|---|
| Normal with known variance $\sigma^2$ | $\mu$ (mean) | Normal | $\mu_0, \sigma_0^2$ | $\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2}\right)\Big/\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right),$ $\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)^{-1}$ |
| Normal with known precision $\tau$ | $\mu$ (mean) | Normal | $\mu_0, \tau_0$ | $\left(\tau_0\mu_0+\tau\sum_{i=1}^n x_i\right)\Big/(\tau_0+n\tau),\ \tau_0+n\tau$ |
| Normal with known mean $\mu$ | $\sigma^2$ (variance) | Inverse gamma | $\alpha, \beta$ [note 5] | $\alpha+\frac{n}{2}, \beta+\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2}$ |
| Normal with known mean $\mu$ | $\sigma^2$ (variance) | Scaled inverse chi-squared | $\nu, \sigma_0^2$ | $\nu+n, \frac{\nu\sigma_0^2+\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{\nu+n}$ |
| Normal with known mean $\mu$ | $\tau$ (precision) | Gamma | $\alpha, \beta$ [note 3] | $\alpha+\frac{n}{2}, \beta+\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2}$ |
| Normal [note 6] | $\mu$ and $\sigma^2$ Assuming exchangeability | Normal-inverse gamma | $\mu_0, \nu, \alpha, \beta$ | $\frac{\nu\mu_0+n\bar{x}}{\nu+n}, \nu+n, \alpha+\frac{n}{2},$ $\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2+\frac{n\nu}{\nu+n}\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{2}$ • $\bar{x}$ is the sample mean |

這張圖可知道若我們已知 data 中的 variance，我們希望找出最符合 sample space 的 mean，給定 prior 為 Gaussian distribution，可以得到 posterior 形式為 Gaussian distribution

note:但通常，我們沒辦法知道實際背景的 mean 及 variance，所以通常我們得到的 posterior 只能式 Normal-Inverse gamma function，但是這太難推導，故我們只推圖片中第一列的 posterior

$$P(\theta\,|\,D)=\frac{P(D\,|\,\theta)P(\theta)}{P(D)}$$

上課題外話：

通常我們使用 bayesian 的原因是為了避免 overfitting，在 data 不足時，很容易會產生 overfitting 現象，像是若我們擲兩次銅板，若我們使用 MLE，我們就會得到 100%正面的機率，但若是使用 bayesian，若 prior 選的好，我們可以得到正面機率較高但不是 100%的機率

$$P(D\,|\,\mu)P(\mu)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i\,|\,\mu,\sigma)\cdot N(\mu\,|\,\mu_0,\sigma_0{}^2)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_1-\mu)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_2-\mu)^2}\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_n-\mu)^2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\right)e^{\frac{-(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0{}^2}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\right)e^{\frac{-(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0{}^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\right)e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0{}^2}}$$

note: 小提醒一下，$\mu_0,\sigma_0{}^2$是 prior，$\sigma$是已知，$\mu$是我們想要得到最符合 sample space 的 mean

我們先不看常數項，現在我們要做的是這區塊

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\right)e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0{}^2}}$$

$$P(\theta\,|\,D)=\frac{P(D\,|\,\theta)P(\theta)}{P(D)}$$

因為 Gaussian distribution 的形式是 $Ae^{\frac{-(x-\mu)^2}{B}}=e^{\frac{-(x-\mu)^2}{B}+C}$，我們要先將指數項做成平方項

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0{}^2}=\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i{}^2+\mu^2-2x_i\mu)^2-\frac{1}{2\sigma_0{}^2}(\mu^2+\mu_0{}^2-2\mu\mu_0)^2$$

$$=\frac{-1}{2}\mu^2\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)+\mu\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2)}{\sigma^2}+\frac{\mu_0{}^2}{\sigma_0{}^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)\left(\mu^2-\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}\mu+\frac{\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2)}{\sigma^2}+\frac{\mu_0{}^2}{\sigma_0{}^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)\left(\mu^2-\frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}\mu+\left(\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}\right)^2\right)+\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2}{\sigma^2}+\frac{\mu_0{}^2}{\sigma_0{}^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}-\left(\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}\right)^2$$

令$\mu_n=\dfrac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0{}^2}=\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)(\mu-\mu_n)^2+\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2}{\sigma^2}+\frac{\mu_0{}^2}{\sigma_0{}^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}-\mu_n{}^2$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)(\mu-\mu_n)^2+\mathrm{D}$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)(\mu-\mu_n)^2+\mathrm{D}} = A\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)(\mu-\mu_n)^2}, \; A=e^D$$

得到$P(D\,|\,\theta)P(\theta)$後，marginal 就簡單了，也就是將所有可能的參數$\theta$值所得的機率全部加總

$$\text{marginal}: P(D)=\int_{-\infty}^{\infty} P(D\,|\,\theta')P(\theta')\,d\theta' = \int_{-\infty}^{\infty} P(D\,|\,\mu')P(\mu')\,d\mu'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} A\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)(\mu'-\mu_n)^2} d\mu' = A\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)\cdot\mu'^2} d\mu' = A\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\mu'^2} d\mu', \quad let\ k=\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)$$

$$=A\sqrt{\frac{\pi}{k}} = A\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}}$$

note:

$\int_{-\infty}^{\infty} A\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)(\mu'-\mu_n)^2} d\mu' = A\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)\cdot\mu'^2} d\mu'$，這一步可將$(\mu'-\mu_n)^2$轉為$\mu'^2$的理由和這份筆記一開始求$\sigma^2$時的地方很像，無論 mean 在哪裡，marginal 的值都不會改變

$$P(\theta\,|\,D)=\frac{P(D\,|\,\theta)P(\theta)}{P(D)} = \frac{A\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)(\mu-\mu_n)^2}}{A\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}}} \quad , let\ \sigma_n{}^2=\frac{1}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{\frac{-(\mu-\mu_n)^2}{2\sigma_n{}^2}} = N(\mu_n,\sigma_n)$$

Prior　　　　　　　　Posterior

$$N(\mu,\sigma^2) \longrightarrow N(\mu_n=\sigma_n{}^2(\frac{n}{\sigma^2}\mu_{MLE}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\mu_0), \sigma_n{}^2=\frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}})$$

而我們對$\mu_n$做些觀察

$$\mu_n=\sigma_n{}^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right) = \sigma_n{}^2\left(\frac{1}{\sigma^2}n\mu_{MSE}+\frac{1}{\sigma_0{}^2}\mu_0\right) = \sigma_n{}^2\frac{n}{\sigma^2}\mu_{MSE}+\frac{\sigma_n{}^2}{\sigma_0{}^2}\mu_0$$

由於 $\sigma_n{}^2 \dfrac{n}{\sigma^2} + \dfrac{\sigma_n{}^2}{\sigma_0{}^2} = \sigma_n{}^2 \left( \dfrac{n}{\sigma^2} + \dfrac{1}{\sigma_0{}^2} \right) = 1$

則 $\mu_n$ 必介於 $\mu_{MSE}$ 和 $\mu_0$ 之間

解釋：

若 $x_3 = ax_1 + bx_2,\ a,b > 0$ 且 $a + b = 1$

則 $x_1 \le x_3 \le x_2$ *or* $x_2 < x_3 < x_1$

證明：

其實實在是懶的證，還是證一下

if $x_1 \le x_2$

$\Rightarrow x_3 = ax_1 + bx_2 \le ax_2 + bx_2 = (a+b)x_2 = x_2$

$x_3 = ax_1 + bx_2 \ge ax_1 + bx_1 = (a+b)x_1 = x_1$

$\Rightarrow x_1 \le x_3 \le x_2$

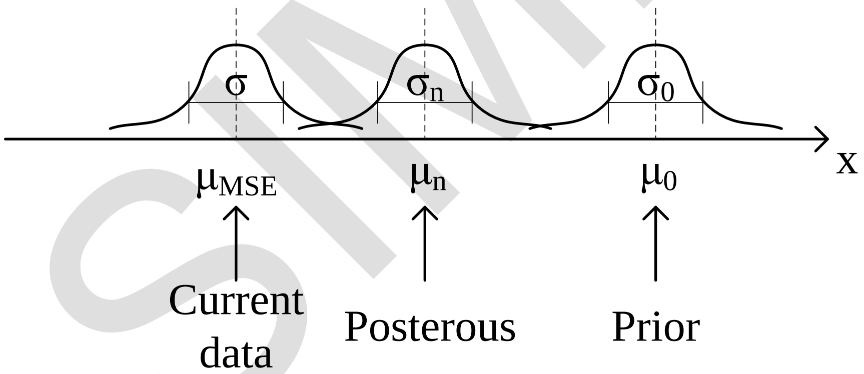
$else\ //(x_1 > x_2)$

$x_3 = ax_1 + bx_2 > ax_2 + bx_2 = (a+b)x_2 = x_2$

$x_3 = ax_1 + bx_2 < ax_1 + bx_1 = (a+b)x_1 = x_1$

$\Rightarrow x_2 < x_3 < x_1$

圖示：



當$n \to 0$

$$\Rightarrow \sigma_n{}^2 = \frac{1}{\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)} = \sigma_0{}^2$$

$$\mu_n = \sigma_n{}^2\left(\frac{n}{\sigma^2}\mu_{MLE} + \frac{1}{\sigma_0{}^2}\mu_0\right) = \sigma_0{}^2\left(\frac{n}{\sigma^2}\mu_{MLE} + \frac{1}{\sigma_0{}^2}\mu_0\right) = \mu_0$$

$$P(\theta \mid D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{\frac{-(\mu-\mu_n)^2}{2\sigma_n{}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{\frac{-(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0{}^2}} = prior$$

當沒有新的資料量時，其分佈和原本 prior 的分佈是相同的(廢話)

當$n \to \infty$

$$\Rightarrow \sigma_n{}^2 = \frac{1}{\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)} = 0$$

$$\mu_n = \sigma_n{}^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0{}^2}\right) = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

當資料量極大，甚至和 sample space 一樣大時，我們就不會有模稜兩可的灰色地帶，資料的 mean 就是 sample space 的 mean，也不會有 variance，因為已經沒有”機率”可言了，我們已經能夠百分之百準確預估現象的發生(就像統計全世界男女比例，如果我們只取樣一個小區塊 e.g.美國，我們只能大概的推測出全世界的男女比，但是若我們手中有全世界人口的資料，我們就能百分之百肯定男女比為多少)