

Problem: $(P \rightarrow Q) \vdash (P \rightarrow (A \rightarrow Q))$

1		$(P \rightarrow Q)$	Premise
2			
3			
4			
5			
6			

2		P	Assumption
3			
4			
5			
6			

3		A	Assumption
4			
5			
6			

4		Q	1,2 \rightarrow E
5		$(A \rightarrow Q)$	3,4 \rightarrow I
6		$(P \rightarrow (A \rightarrow Q))$	2,5 \rightarrow I

Problem: $(A \vee B) \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$

1		$(A \vee B)$	Premise
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

2		$(\neg A \wedge \neg B)$	Assumption
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

3		A	Assumption
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

4		$\neg A$	2 \wedge E
5		\perp	3,4 \neg E
6		B	Assumption
7			
8			
9			
10			

7		$\neg B$	2 \wedge E
8		\perp	6,7 \neg E
9		\perp	1,3,5,6,8 \vee E
10		$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	2,9 \neg I

Problem: $(A \vee (\exists x)Fx) \vdash (\exists x)(A \vee Fx)$

1	$(A \vee (\exists x)Fx)$	Premise
2	A	Assumption
3	$(A \vee Fa)$	2 \vee I
4	$(\exists x)(A \vee Fx)$	3 \exists I
5	$(\exists x)Fx$	Assumption
6	Fa	Assumption
7	$(A \vee Fa)$	6 \vee I
8	$(\exists x)(A \vee Fx)$	7 \exists I
9	$(\exists x)(A \vee Fx)$	5,6,8 \exists E
10	$(\exists x)(A \vee Fx)$	1,2,4,5,9 \vee E

Problem: $\vdash (\forall x)(\forall y)((Fx \wedge \neg Fy) \rightarrow \neg x = y)$

1	a	Flag
2	b	Flag
3	$(Fa \wedge \neg Fb)$	Assumption
4	$a = b$	Assumption
5	Fa	3 \wedge E
6	$\neg Fb$	3 \wedge E
7	Fb	4,5 $=$ E
8	\perp	6,7 \neg E
9	$\neg a = b$	4,8 \neg I
10	$((Fa \wedge \neg Fb) \rightarrow \neg a = b)$	3,9 \rightarrow I
11	$(\forall y)((Fa \wedge \neg Fy) \rightarrow \neg a = y)$	2,10 \forall I
12	$(\forall x)(\forall y)((Fx \wedge \neg Fy) \rightarrow \neg x = y)$	1,11 \forall I