TEMA 2: Redes y grafos, definiciones y conceptos

Lourdes Araujo y Juan Martinez-Romo
Dpto. Lenguajes y Sistemas Informáticos
UNED

Redes y grafos

- Una red es una colección de objetos en la que algunos pares de objetos están conectados por un enlace.
- Un grafo es una representación matemática de una red.

RED = GRAFO + DATOS

- En general utilizaremos los términos indistintamente.

Redes y grafos: Definición

Una red N = (V, L, P, W) está formada por

- Un grafo G = (V,L), siendo V con conjunto de nodos o vértices de tamaño |V| y L un conjunto de enlaces de tamaño |L|.
- P son funciones o propiedades de los vértices. $P: V \rightarrow A$.
- W son funciones o pesos de los enlaces.

$W: L \rightarrow A$.

Elección de la representación

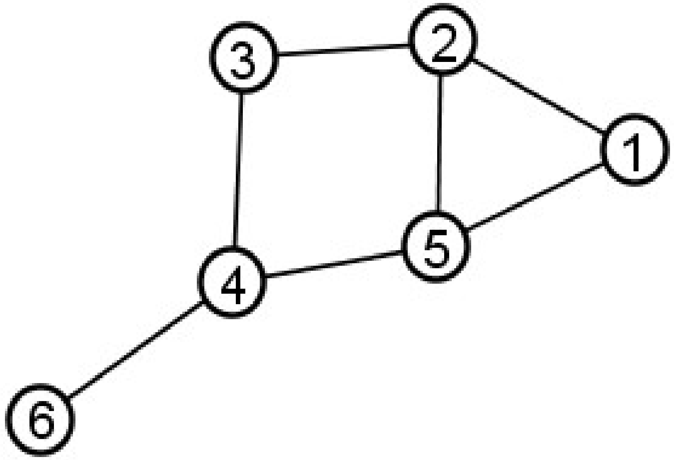
- Elegir la representación apropiada es determinante para la utilidad de las redes.
- A veces existe una única representación. Otras debemos elegir entre distintas alternativas.
- La forma en la que se asignan los enlaces determina el problema que queremos analizar.

Elección de la representación: Ejemplos

- Si conectamos personas que han hablado por teléfono construimos una red de contactos.
- Si conectamos artículos científicos que se citan construimos una red de citas.
- Si conectamos documentos con un alto número de palabras en común construimos una red temática.

Grafos no dirigidos

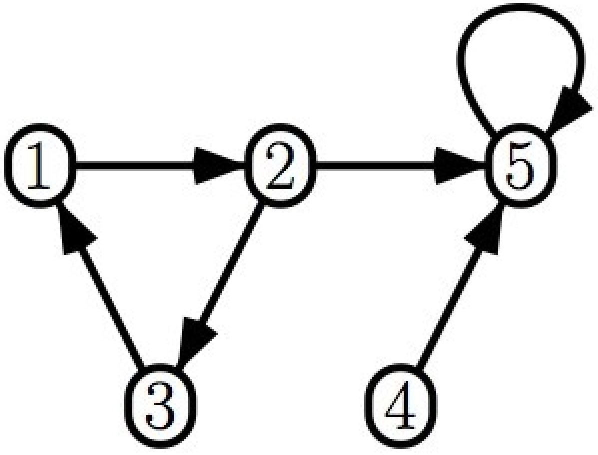
- Los grafos son no dirigidos cuando los enlaces son simétricos



- Ejemplos: amigos en Facebook, relaciones familiares.

Grafos dirigidos

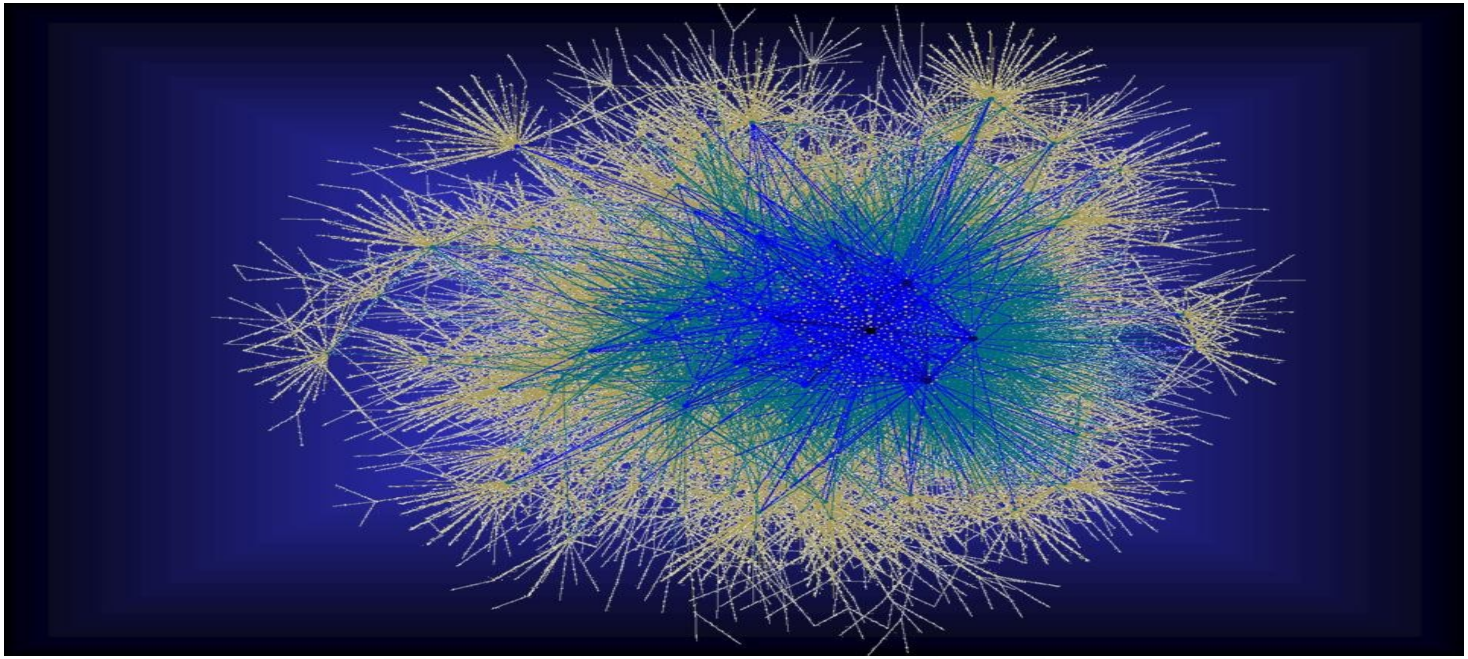
- Los grafos son dirigidos cuando los enlaces son flechas que apuntan a un nodo



- Ejemplos: llamadas de teléfono, seguidores en Twitter, la web

La web

- La web es un grafo dirigido
  - Los nodos son las páginas web
  - Los enlaces son los hiperenlaces de las páginas

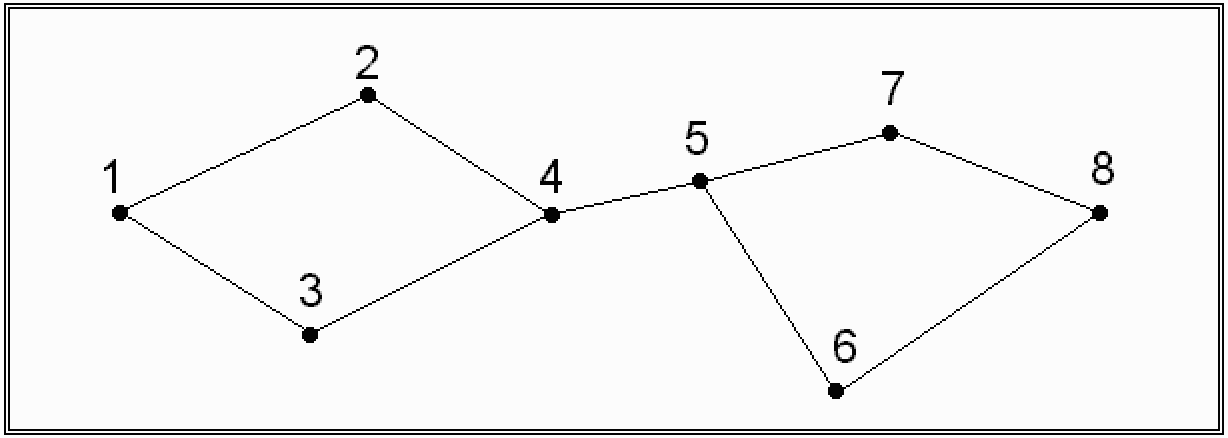


Propiedades de los nodos

- Grado (degree) de un nodo deg(v) es el número de enlaces con un extremo en v.
- Grado de entrada (indegree) de un nodo v, indeg(v), es el número de enlaces que terminan en v.
- Grado de salida (outdegree) de un nodo v, outdeg(v), es el número de enlaces que parten de v.

Grafo conexo

- Cualquier par de nodos está unido por un camino

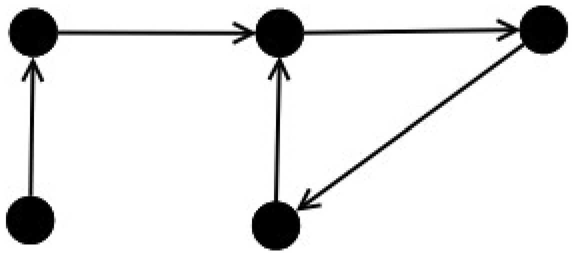


Conectividad de los grafos

- Enlace puente: si se borra el grafo pasa a ser disconexo (enlace 4-5 en el ejemplo)
- Punto de articulación: nodo que si se borra (junto con las aristas que inciden en él) el grafo pasa a ser disconexo (nodos 4 y 5 en el ejemplo)

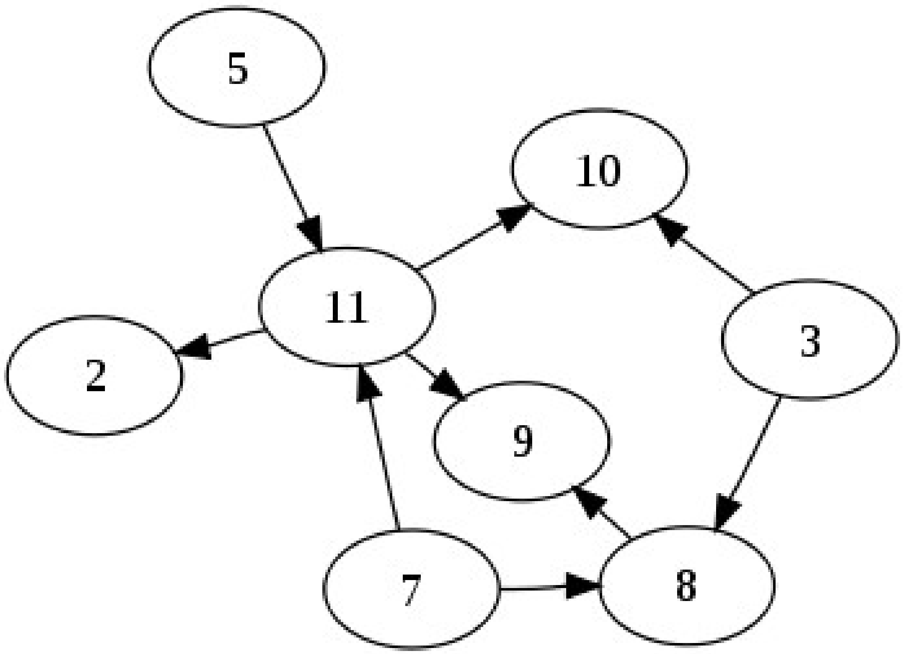
Fuerza de la conexión

- Grafos dirigidos fuertemente conexos: Existe un camino de cada nodo a cada otro nodo y viceversa (strongly connected directed graph)
- Grafos dirigidos debilmente conexos: es conexo si no tenemos en cuenta la dirección de los enlaces

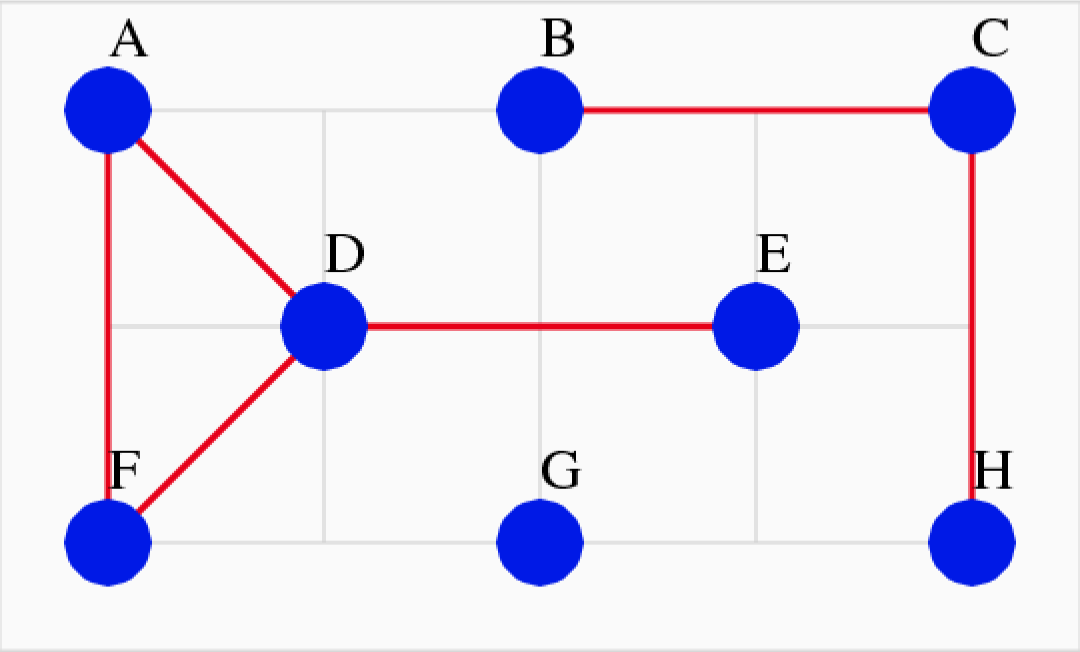


Grafos dirigidos acíclicos

- Grafo dirigido acíclico: no tiene ciclos (Directed acyclic Graph, DAG)



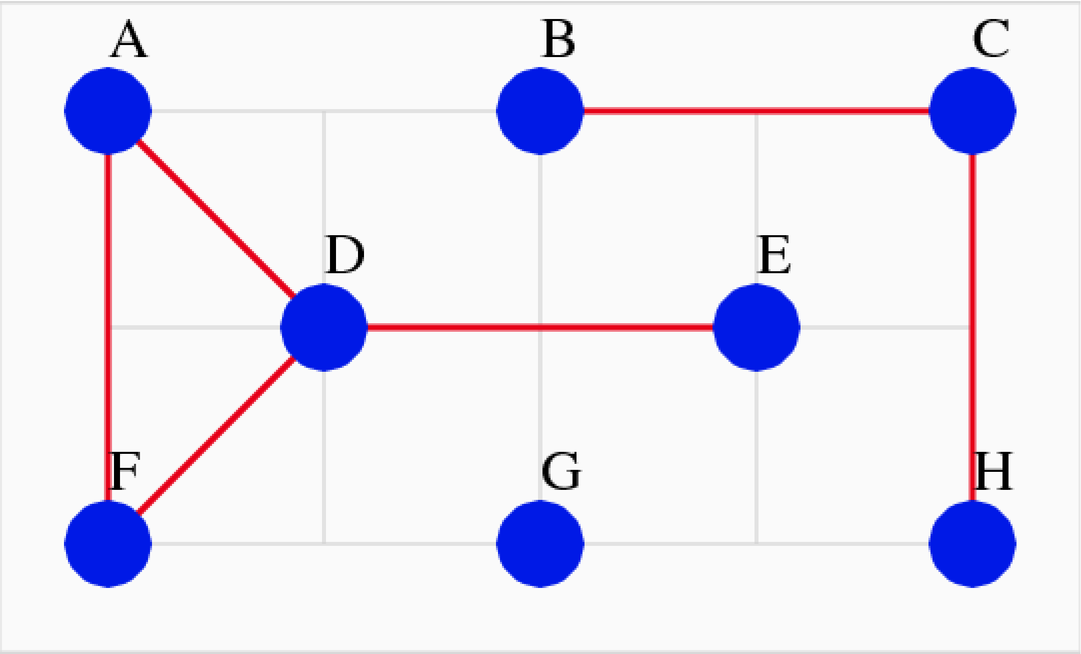
Componentes conexas



- Un grado disconexo está compuesto por dos o más componentes conexas

Componente gigante

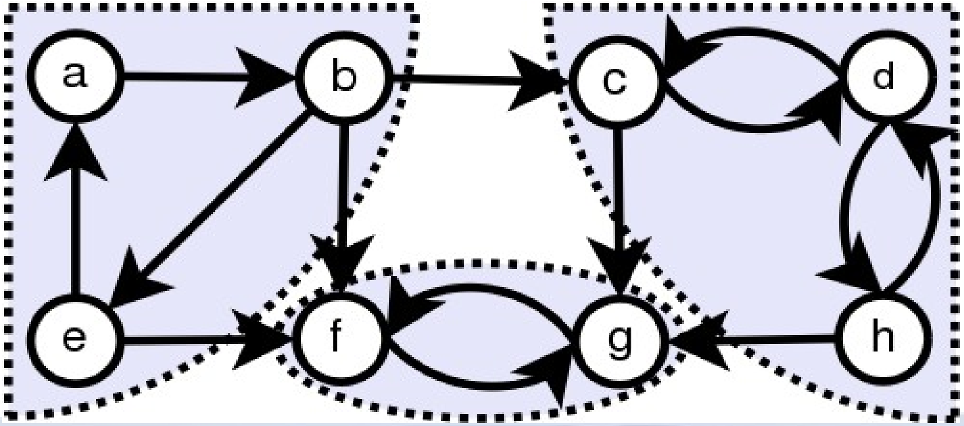
- La mayor componente se denomina componente gigante: A-F-D-E



Componente fuertemente conexa

Componente fuertemente conexa (Strongly connected component, SCC): Es un conjunto de nodos S tal que

- Cada par de nodos en S se puede alcanzar desde el otro
- No hay un conjunto mayor que contenga a S y cumpla esta propiedad.

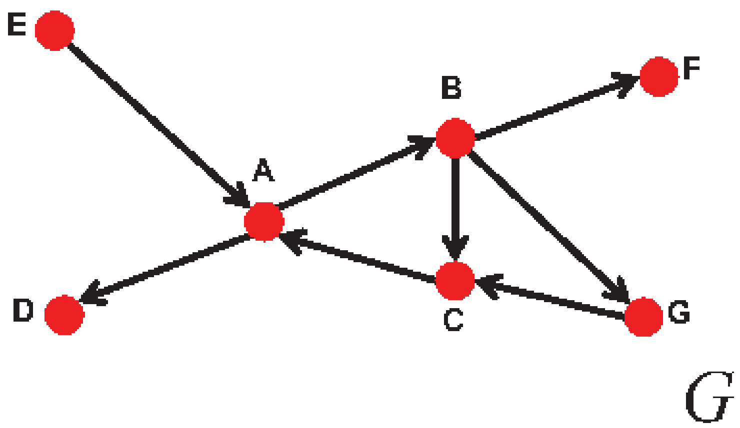


Algunos resultados(1)

- Todo grafo dirigido es un DAG (Directed acyclic) en su SCC (Strong. Connected Comp.)
  - SCCs particionan los nodos de G: cada nodo está exactamente en un SCC
  - Si construimos un grafo G' cuyos nodos son SCCs y con un enlace entre ellos si lo hay entre los correspondientes SCCs en G, entonces G' es un DAG.

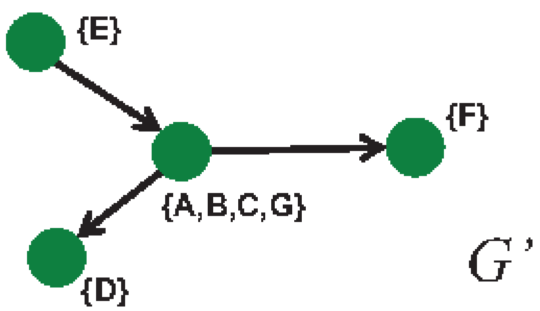
Algunos resultados (2)

- Ejemplo



(1) Strongly connected components of graph G: {A,B,C,G}, {D}, {E}, {F}

(2) G' is a DAG:



Algunos resultados (3)

- Los SCCs particionan los nodos de G: cada nodo de G pertenece exactamente a un SCC.

La web como un grafo dirigido

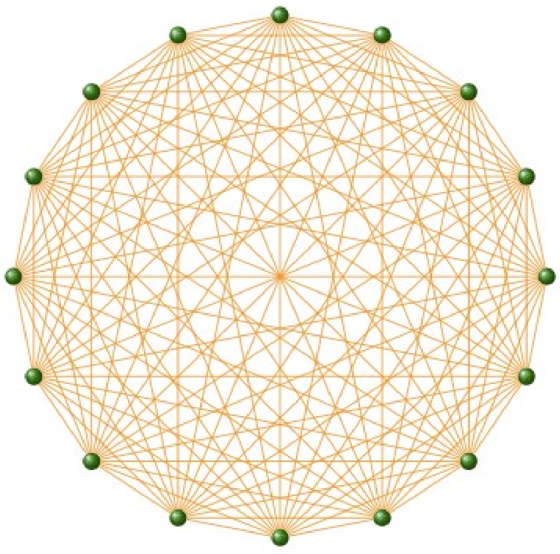
- 203 millones de páginas y 1.5 billones de enlaces [Broder et al. 2000]
- Mayor SCC: 28% de los nodos (56 millones)
- Alrededor de 44 millones de nodos con enlaces dirigidos a ese SCC
- Ardededor de 44 millones de nodos conectados a ese SCC por enlaces salientes.

Grafo completo

- El número máximo de enlaces en un grafo no dirigido de N nodos es

$$E_{max} = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

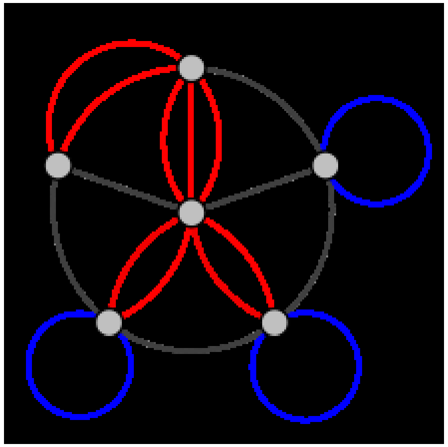
- Grafo completo: grafo con un número de enlaces E = Emax



- Su grado medio es N – 1.

Otros tipos de grafos (1)

- Multigrafo: puede tener varios enlaces entre los mismos nodos
- Grafos con autoenlaces: enlaces que salen y llegan al mismo nodo

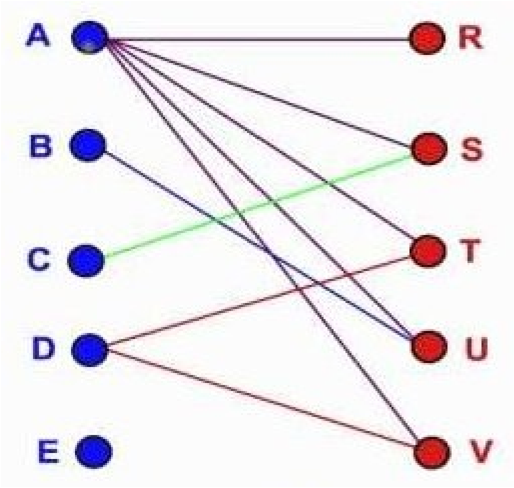


Representación de algunas redes

- WWW → multigrafo dirigido con autociclos
- Amistades de Facebook → no dirigido y sin pesos
- Redes de citas → sin pesos, dirigido, acíclico
- Llamadas a moviles → multigrafo dirigido

Otros tipos de grafos (2)

- Grafo bipartito: sus nodos pueden dividirse en dos conjuntos disjuntos U y V tales que cada enlace conecta a un nodo de U con un nodo de V (U y V son conjuntos independientes).



Otros tipos de grafos (3)

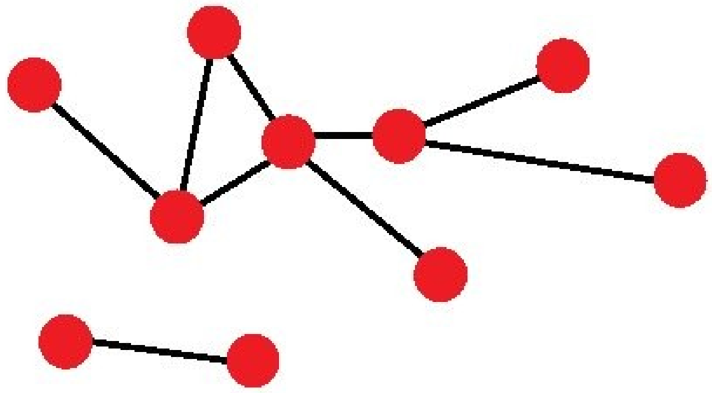
- Ejemplos de grafos bipartitos:
  - Autores-a-artículos (los escriben)
  - Actores-a-Peliculas (las protagonizan)
  - Sistemas de recomendación:
    - Usuarios-a-Peliculas (las puntuan), libros, etc.

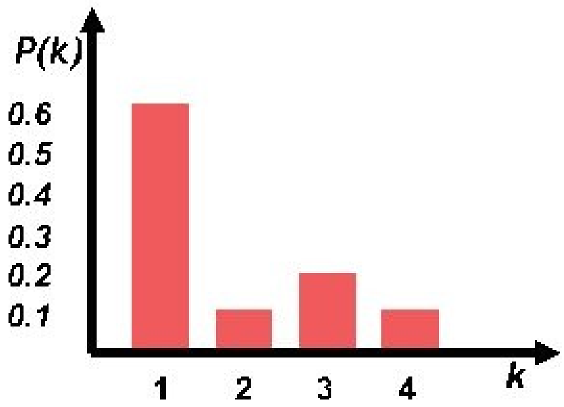
Propiedades de las redes

- ¿como caracterizamos una determinada red?
  - Distribución del grado
  - Longitud de los caminos
  - Coeficiente de clustering

Distribución del grado P(k)

- Distribución del grado P(k): Probabilidad de que un nodo tomado al azar tenga grado k
- N_k = # nodos de grado k
- Histograma normalizado $P(k) = N_k / N$



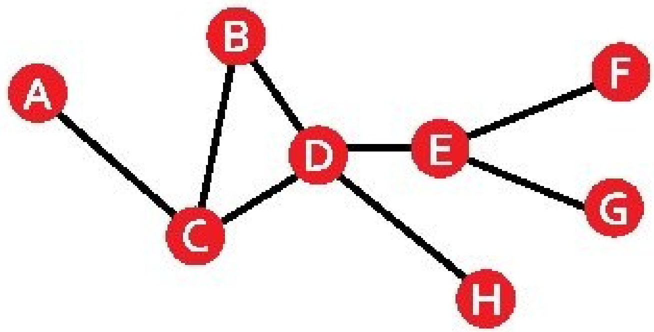


Caminos (walks)

- Camino (walk): secuencia de nodos de G en la que cada nodo está enlazado con el siguiente.
- Los caminos pueden intersecarse con ellos mismos y pasar por el mismo nodo varias veces.

Caminos (2)

- Ejemplo: ACBDCDEG



- En los grafos dirigidos un camino sólo puede seguir la dirección de las flechas.

Número de caminos entre dos nodos

- Número de caminos entre los nodos u y v: A_{uv}
- de long 1: si hay un enlace entre u y v, $A_{uv}=1$, sino $A_{uv} = 0$
- de long 2,
- ...
- La forma de calcularlos depende de la representación (Tema 3).

Distancia entre nodos h

- Distancia (camino más corto o geodésica) entre un par de nodos: número de enlaces en el camino más corto que conecta los nodos
- Si no hay camino se considera infinita
- En los grafos dirigidos la distancia no es simétrica: los caminos siguen la dirección de las flechas

Diámetro de una red

- Diámetro: distancia máxima (camino más corto) entre cualquier par de nodos en el grafo
- Longitud media del camino en un grafo (o componente) conexo o en un grafo (o componente) dirigido fuertemente conexo:

$$\bar{h} = \frac{1}{2E_{max}} \sum_{i,j \neq i} h_{ij}$$

h_{ij} es la distancia del nodo i al j

- Se suele calcular sobre los nodos conectados, ignorando los caminos infinitos.

Coeficiente de clustering C

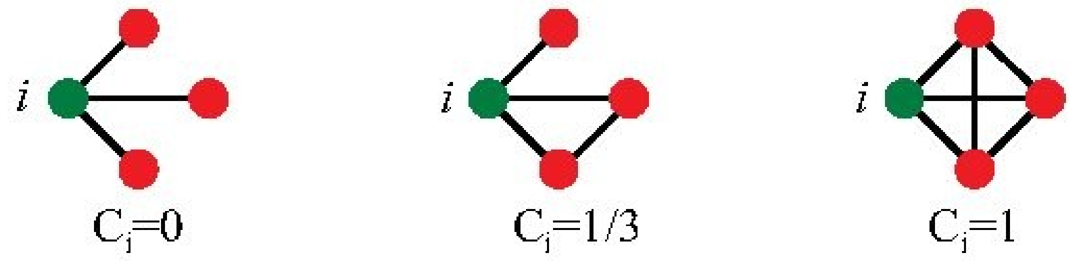
- Indica la proporción de vecinos del nodo i (con grado k_i) que están conectados.
- $C_i \in [0,1]$

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}$$

- e_i es el número de enlaces entre los vecinos de i.

Coeficiente de clustering (2)

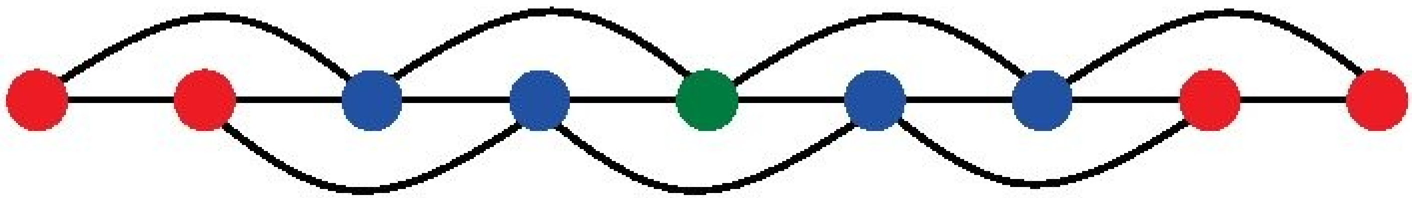
- Ejemplo:



- Coeficiente medio de clustering C:

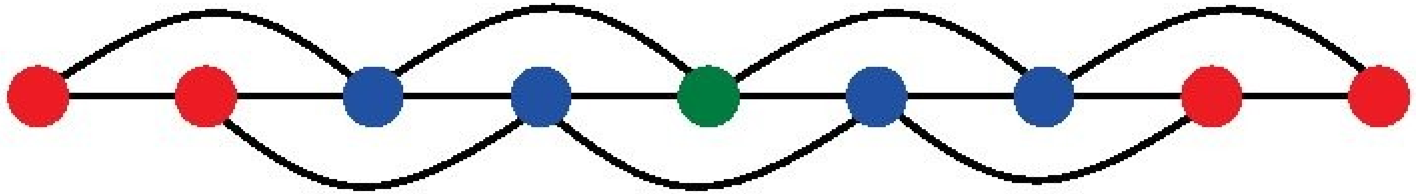
$$C = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} C_i$$

Ejemplo: reticulo 1 dimensión (1)



- Nos interesan cantidades cuando $N \to \infty$
- Usamos notación O: $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to \infty$ si $f(x) < g(x)*c$ para todo $x > x0$ y alguna constante c.
- $k_i = 4$ para todos los nodos (ignorando los extremos)
- $C = 1/2$

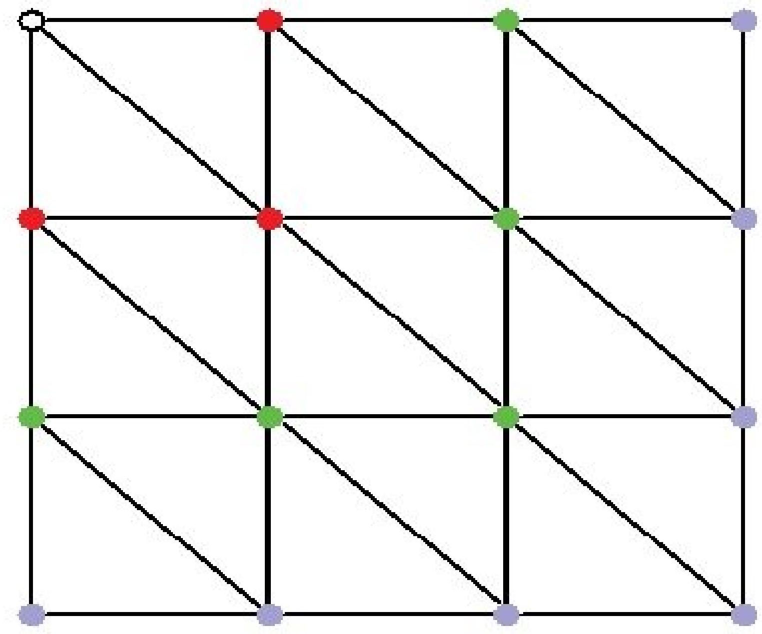
Ejemplo: reticulo 1 dimensión (2)



- P(k) = δ(k-4) (δ(x)=1 si x=0, δ(x)=0 sino, δ de Kronecker)
- Diámetro: $$h_{max} = \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil = O(N)$$
- Long. media del camino más corto $\bar{h} = O(N)$

Ejemplo: retículo 2 dimensiones

- K = 6 para cada nodo interno
- P(k) = δ(k-6)
- C = 6/ 15 para los nodos internos
- Diámetro



$$h_{max} = O(\sqrt{N})$$

Algunos modelos importantes de redes

- Aleatorio: generación aleatoria de enlaces entre nodos.
- Regular: todos los nodos tienen el mismo grado.
- Mundo pequeño: camino medio entre vértices pequeño y coeficiente de clustering alto.
- Scale-free network: la distribución de grados sigue una ley de potencias $P(k) = k^{-c}$.

Modelo de grafo aleatorio (Erdös-Renyi)

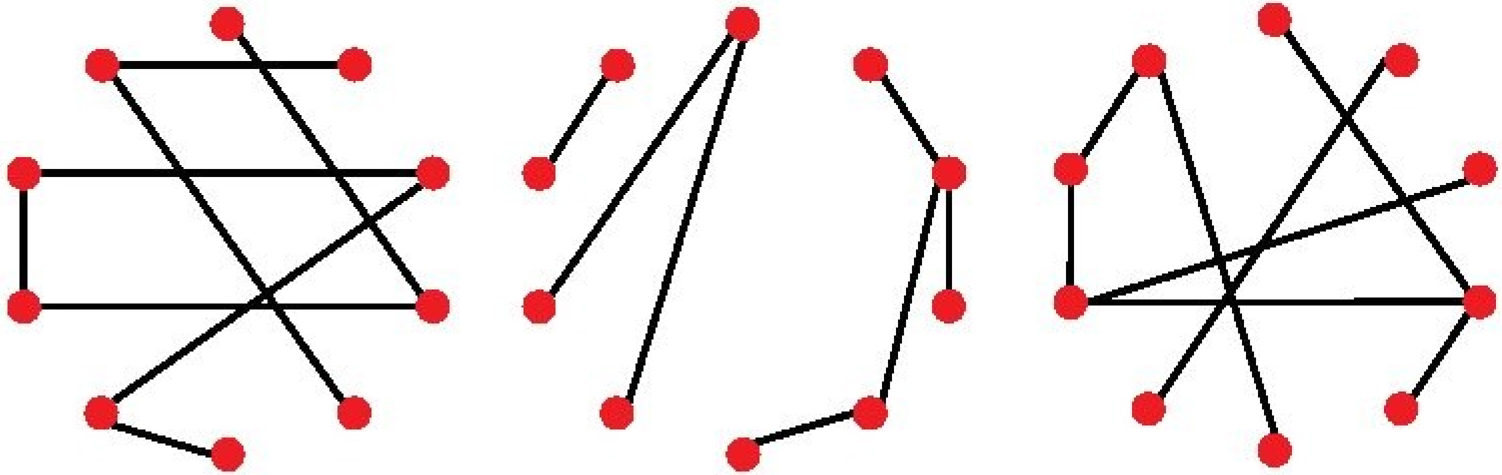
- Grafos aleatorios: se construyen generando enlaces aleatoriamente entre un conjunto de N vértices.
- Si los enlaces se generan con una determinada probabilidad p se generaría un tipo particular de grafo aleatorio conocido como modelo de Erdös-Renyi.

Modelo de Erdös-Renyi (1)

- Dos variantes:
  - $G_{n,p}$: grafo no dirigido con n nodos y cada enlace (u,v) aparece independiente e identicamente distribuido con probabilidad p
  - $G_{n,m}$: grafo no dirigido con n nodos y m enlaces tomados al azar uniformemente.

Modelo de Erdös-Renyi (2)

- ¿qué tipo de redes producen estos modelos?
- N y p no determinan el grafo de forma unívoca



n = 10
p= 1/6

Propiedades de G_{np} (1)

- La distribución de grados de G_{np} es binomial
- P(k) denota la fracción de nodos con grado k:

$$p(k)=\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$$

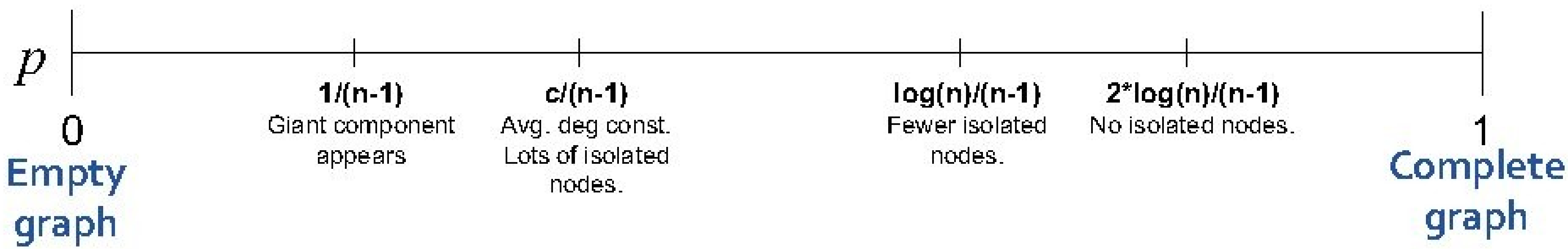
- p: prob de que un nodo tenga k enlaces
- Primer factor: formas de seleccionar k nodos de entre n – 1 (con los que se puede enlazar un nodo).
- Ultimo factor: prob de que le falten n – 1 - k enlaces

Propiedades de G_{np} (2)

- Longitud del camino O(log n)
- Coeficiente de clustering C = p

Evolución de la estructura de G_{np}

- Evolución de la estructura de G_{np} con p:



- $c = p(n-1)$

Correspondencia de Gnp con redes reales

- ¿Son las redes reales grafos aleatorios? NO!
  - Tienen un componente gigante y la longitud media de los caminos es similar pero...
  - El coeficiente de clustering y la distribución de grados son diferentes!
  - El coeficiente de clustering de las redes aleatorias es muy bajo al no tener estructura local.
- Entonces ¿porqué estudiar redes aleatorias?

Utilidad de las redes aleatorias

- Son un modelo de referencia para el resto de las clases.
- Nos ayudan a calcular muchas cantidades que podemos comparar con datos reales.
- Nos ayudan a estudiar hasta qué punto una propiedad es el resultado de un proceso aleatorio.

Modelo del mundo pequeño

- ¿Hay redes con caminos cortos y un coeficiente de clustering alto?
- Experimento de Milgram ([Milgram '67])
  - ¿cual es al camino más corto entre cualquier par de personas en una red social?

Experimento de Milgram (1)

- Se tomaron 300 personas de Omaha, Nebraska y Wichita, Kansas.
- Se les pidió que hicieran llegar una carta a un corredor de bolsa de Boston pasandola entre amigos.
- ¿cuantos pasos se necesitaron en media?

Experimento de Milgram (2)

- Se completaron 64 entregas
- Se necesitó una media de 6,2 pasos

  ¡ 6 grados de separación!
- Algunas críticas al experimento
  - El número de muestras es pequeño
  - La gente podía tener información adicional …
- Pero se ha confirmado en otros experimentos

Estudio de Columbia (2003)

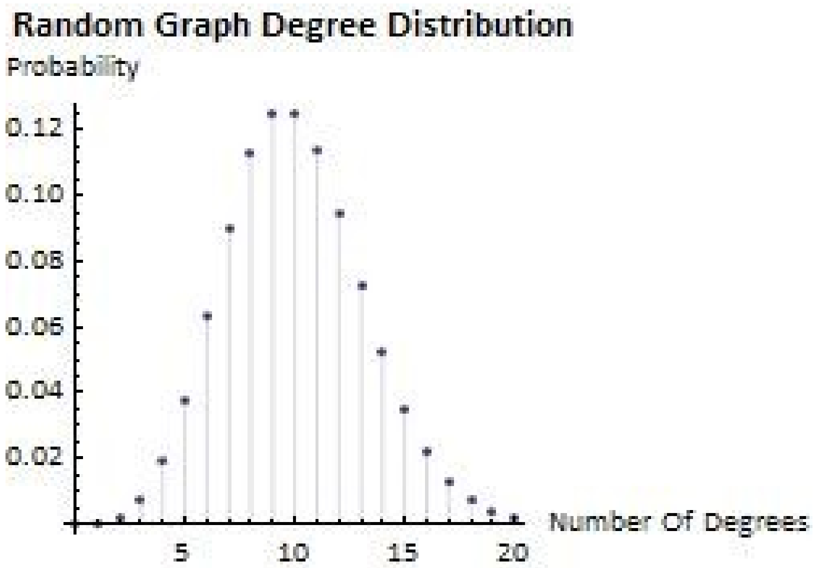
- Correo electrónico
- 18 destinos de distinto tipo
- 24000 puntos de partida
- 65% de abandono por paso
- Se completaron 384 entregas
- Longitud media de la cadena: 4.01

No tan inesperado!

- Si cada persona está conectada a otras 100:
  - 1 paso: conecta con 100 personas
  - 2 pasos: con 10000
  - 3 pasos: 1000000
  - 4 pasos: 100M
  - 5 pasos: 10 billones

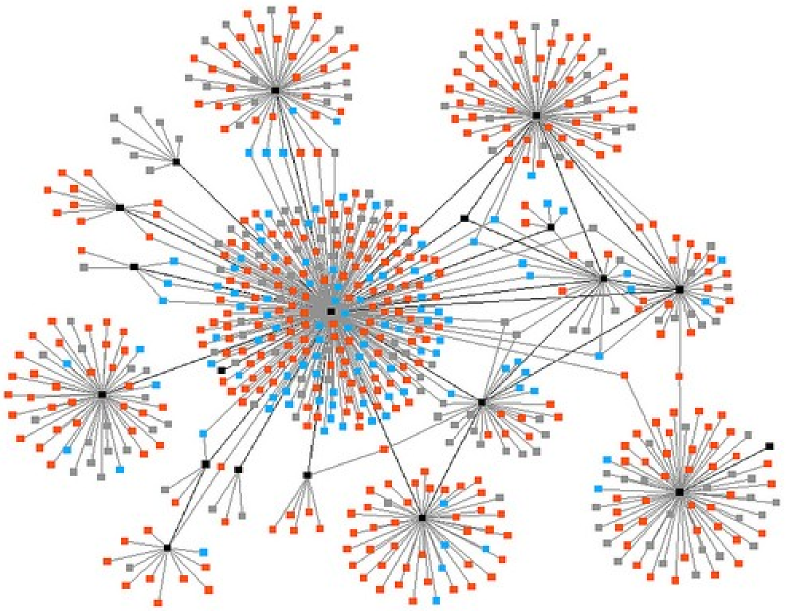
Resumen propiedades:

- Redes Aleatorias:
  - Distribución de grados binomial, Poisson
  - Distancia media entre nodos pequeña
  - Coeficiente de clustering muy pequeño (para redes grandes se anula)



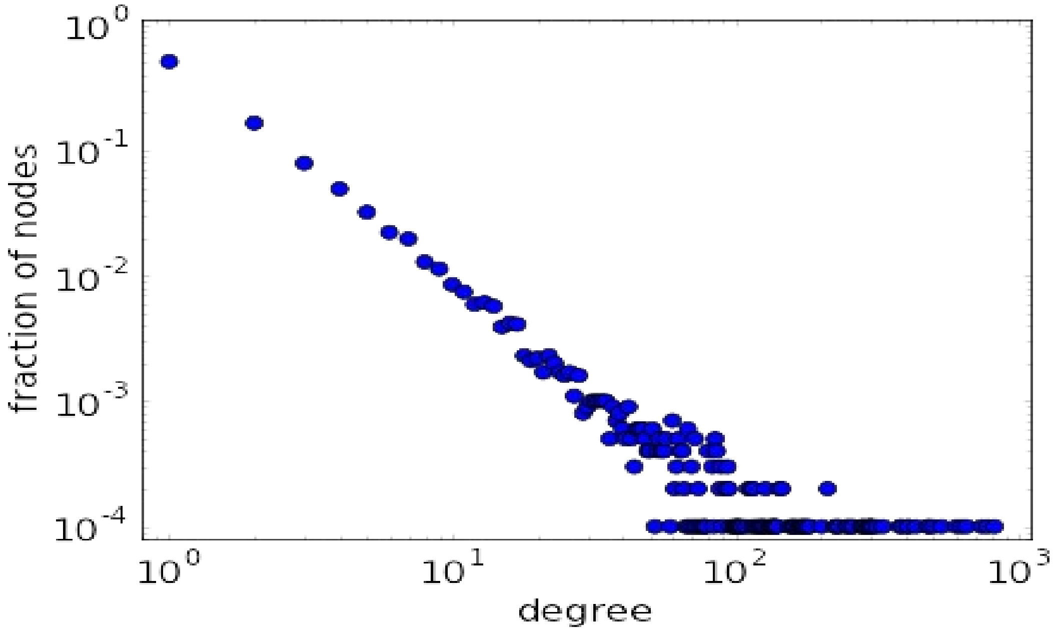
Resumen propiedades:

- Mundos pequeños:
  - Diámetro de la red pequeño
  - Distancia media entre nodos pequeña (≈ ln(N))
  - Coeficiente de clustering >> Coef. en redes aleatorias



Resumen propiedades:

- Redes libres de escala (scale-free):
  - Distribución de grados sigue ley de potencias
  - Se ve más claramente en un representación en escala log-log



Resumen propiedades:

- ¿Puede una red libre de escala ser un mundo pequeño?
  - SI, depende del exponente asociado a la red

Referencias

- Networks, Crowds, and Markets:

  Reasoning About a Highly Connected World

  David Easley and Jon Kleinberg

  http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/networks-book/

  Capítulo 2, 13, 20
- Milgram, Stanley (May 1967). "The Small World Problem". Psychology Today. Ziff-Davis Publishing Company.

Subgrafos y particiones

- Un subgrafo G'=(V',L') de un grafo G=(V,L) con $V' \subseteq V$ y $L' \subseteq L$ con V' conteniendo todos los nodos de los extremos de L'.
- Un subgrafo es un subgrafo de recubrimiento (spanning) si y solo si V' = V.