Universidad de Granada
Maestría en estadística Aplicada
Materia: Encuestas por Muestreo
Alumno: Francisco Márquez

Ejercicio tema 2. Elementos de inferencia.

Sea el diseño muestral *d* con probabilidades:

P((1,2)) = 0,1;

P((2,1)) = 0,2;

P((1,2,3)) = 0,4;

P((1,2,3,4)) = 0,1;

P((3,2,4,1)) = 0,2

y el siguiente estimador lineal del total *T(Y)*

$e(1,2) = 4Y_1$;

$e(2,1) = Y_1$;

$e(1,2,3) = Y_1 + Y_2 + Y_3$;

$e(1,2,3,4) = 4Y_2 + 4Y_3$;

$e(3,2,4,1) = Y_2 + Y_3 + 5Y_4$

Construir otro estimador lineal de *T(Y)*, *e tal que $E((e^*)^2) \leq E(e^2)$ uniformemente en *Y*. ¿Qué resultado has utilizado?**

En primer lugar, usaremos el Teorema 3.10 (Tema 2) que expresa:

"el estimador *e**, versión reducida o simetrizada del estimador *e* del parámetro θ, es como mínimo igual de preciso que *e*".

De esta forma al determinar el estimador en el espacio reducido podemos confiar que se cumple la condición: $E((e^*)^2) \leq E(e^2)$."

Siguiendo esta estrategia, debemos dar los siguientes 6 pasos:

PASO 1. Calcular el espacio muestral reducido*(e*)* de los estimadores dados.

e(1,2)

e(2,1)

e*(1,2)

e(1,2,3)

e*(1,2,3)

e(1,2,3,4)

e(3,2,4,1)

e*(1,2,3,4)

PASO 2. Realizar un diseño muestral reducido.

Para obtener la versión reducida del diseño muestral, aplicamos la Definición 3.7 (Tema 1). La cual indica:

" se llama versión simetrizada o reducida de un diseño muestral ordenado

$d^* = (S^*_d, P^*_d)$ al diseño que se obtiene definiendo $S_d = r(S^*_d)$ y

$$P_d(s) = \sum_{s^* \approx s} P_d(s^*) \qquad \forall s \in S_d$$ "

Aplicando esta defininción obtenemos:

P((1,2)) = 0,1

\+

P((2,1)) = 0,2

P(e*(1,2)) = 0,3

P((1,2,3)) = 0,4

P(e*(1,2,3)) = 0,4

P((1,2,3,4)) = 0,1

\+

P((3,2,4,1)) = 0,2

P(e*(1,2,3,4)) = 0,3

PASO 3. Calcular la versión reducida de un estimador.

Para calcular la versión reducida del estimador, usamos la Definición 2.3 (Tema 2) la cual establece:

" Se llama versión reducida o simetrizada de un estimador *e(s,* ***y****)* de un parámetro *θ(****y****)* al estimador

$$e^* = \sum_{s^* \approx s} e(s^*, \mathbf{y}) P_d(s^*) / \sum_{s^* \approx s} P_d(s^*),$$

donde la sumatoria se extiende a todas las muestras *s** del diseño muestral *d* que son equivalentes a *s*. "

Aplicando esta defínción obtenemos:

e*(1,2) = $[e\,(1,2)\ 0{,}1 + e(2,1)\ 0{,}2]/0{,}3 =$

$[4Y_1\ 0{,}1 + Y_1\ 0{,}2]/0{,}3 =$

$[0{,}4Y_1 + 0{,}2Y_1]/0{,}3 =$

$0{,}6Y_1/0{,}3 =$

$\mathbf{2Y_1}$

e*(1,2,3) = $e\,(1,2,3)\ 0{,}4/0{,}4 =$

$\mathbf{Y_1 + Y_2 + Y_3}$

e*(1,2,3,4) = $[e(1,2,3,4)\ 0{,}1 + e(3,2,4,1)\ 0{,}2]/0{,}3 =$

$[(4Y_2 + 4Y_3)0{,}1 + (Y_2 + Y_3 + 5Y_4)0{,}2]/0{,}3 =$

$[0{,}4Y_2 + 0{,}4Y_3 + 0{,}2Y_2 + 0{,}2Y_3 + Y_4]/0{,}3 =$

$[0{,}6Y_2 + 0{,}6Y_3 + Y_4]/0{,}3 =$

$\mathbf{2Y_2 + 2Y_3 + (1/0{,}3)Y_4}$

PASO 4. Calculamos la esperanza de los estimadores.

Usamos las siguientes definiciones para obtener las respectivas esperanzas de los estimadores:

$$E(e) = \sum e\, P_d \qquad y \qquad E(e^*) = \sum e^*\, P^*_d$$

E(e) =

$(4Y_1)0{,}1 + (Y_1)0{,}2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)0{,}4 + (4Y_2 + 4Y_3)0{,}1 + (Y_2 + Y_3 + 5Y_4)0{,}2 =$
$0{,}4Y_1 + 0{,}2Y_1 + 0{,}4Y_1 + 0{,}4Y_2 + 0{,}4Y_3 + 0{,}4Y_2 + 0{,}4Y_3 + 0{,}2Y_2 + 0{,}2Y_3 + Y_4 =$

$\mathbf{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$

E(e*) =

$(2Y_1)0{,}3 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)0{,}4 + (2Y_2 + 2Y_3 + (1/0{,}3)Y_4)0{,}3 =$

$0{,}6Y_1 + 0{,}4Y_1 + 0{,}4Y_2 + 0{,}4Y_3 + 0{,}6Y_2 + 0{,}6Y_3 + Y_4 =$

$\mathbf{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$

PASO 5. Calculamos la esperanza de cada los estimadores al cuadrado.

$$E((e)^2) = \sum e^2 P_d \qquad y, \qquad E((e^*)^2) = \sum (e^*)^2 P^*_d$$

E((e)²) =

$(4Y_1)^2\, 0{,}1 + (Y_1)^2\, 0{,}2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)^2\, 0{,}4 + (4Y_2 + 4Y_3)^2\, 0{,}1 + (Y_2 + Y_3 + 5Y_4)^2\, 0{,}2 =$

E((e*)²) =

$(2Y_1)^2\, 0{,}3 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)^2\, 0{,}4 + (2Y_2 + 2Y_3 + (1/0{,}3)Y_4)^2\, 0{,}3 =$

PASO 6. Comprobamos que se cumple la condición requerida.

$$E((e^*)^2) \leq E(e^2)$$

$(2Y_1)^2\, 0{,}3 + \cancel{(Y_1 + Y_2 + Y_3)^2\, 0{,}4} + (2Y_2 + 2Y_3 + (1/0{,}3)Y_4)^2\, 0{,}3 \quad \leq$

$(4Y_1)^2\, 0{,}1 + (Y_1)^2\, 0{,}2 + \cancel{(Y_1 + Y_2 + Y_3)^2\, 0{,}4} + (4Y_2 + 4Y_3)^2\, 0{,}1 + (Y_2 + Y_3 + 5Y_4)^2\, 0{,}2$

=

$1.2(Y_1)^2 + (2Y_2 + 2Y_3 + (1/0{,}3)Y_4)^2\, 0{,}3 \quad \leq$

$1.8(Y_1)^2 + (4Y_2 + 4Y_3)^2\, 0{,}1 + (Y_2 + Y_3 + 5Y_4)^2\, 0{,}2$