# PRÁCTICA 3

NÚMEROS ALEATORIOS.

**Ejercicio 1.**

Analizar y comprender el principio de funcionamiento de los generadores congruenciales lineales. Experimentar con los distintos parámetros que lo definen empleando el material disponible en el aula virtual.

**Ejercicio 2.** Se propone el siguiente juego en el cual todas las variables aleatorias que se generan son i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$: Se simula la v.a. $U$. Si $U < \frac{1}{2}$, se suman dos nuevos números aleatorios. Pero si $U \geq \frac{1}{2}$, se generan y se suman tres nuevos números aleatorios. El resultado de la suma, en cualquiera de los casos, es una variable aleatoria $X$. Se gana en el juego si $X \geq 1$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar?.

b) La probabilidad de ganar, ¿Es independiente de $U$?.

c) Implementar un algoritmo en computadora que estime la probabilidad de ganar, esto es, la fracción de veces que se gana en $n$ realizaciones del juego. Completar la siguiente tabla:

| $n$ | $P[X \geq 1]$ |
|---|---|
| 100 | |
| 1000 | |
| 10000 | |
| 100000 | |

**Ejercicio 3.** Calcule exactamente el valor de las siguientes integrales. Mediante una simulación de Monte Carlo con $n$ iteraciones, calcule a su vez un valor aproximado y compare con el valor exacto en caso de que sea posible calcularlo.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{3/2} dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty x\left(1+x^2\right)^{-2} dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2} dx\, dy$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^x e^{-(x+y)} dx dy$

**Ayuda:** Sea: $I_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < x \\ 0 & \text{si } y \geq x \end{cases}$ . Utilice esta función para igualar la integral del item **e)** a otra cuyos términos vayan de 0 a $\infty$.

Completar la siguiente tabla:

| $n$ | **(a)** | **(b)** | **(c)** | **(d)** | **(e)** | $\longleftarrow$ integral |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | | | | | | |
| 1000 | | | | | | |
| 10000 | | | | | | |
| 100000 | | | | | | |
| 1000000 | | | | | | |

**Ejercicio 4.** Para $U_1, U_2, \ldots$ variables aleatorias uniformemente distribuídas en el intervalo $(0,1)$, se define:

$$N = \text{Mínimo}\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\}$$

Es decir, $N$ es igual a la cantidad de números aleatorios que deben sumarse para exceder a 1.

a) Estimar $E[N]$ generando $n$ valores de $N$ y completar la siguiente tabla:

| $n$ | $E[N]$ |
|---|---|
| 100 | |
| 1000 | |
| 10000 | |
| 100000 | |
| 1000000 | |

b) Calcular el valor exacto de $E[N]$.

**Ejercicio 5.** Para $U_1, U_2, \ldots$ números aleatorios, se define:

$$N = \text{Máximo}\left\{n : \prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-3}\right\}$$

donde: $\prod_{i=1}^{0} U_i = 1$. Mediante $n$ simulaciones determinar:

a)

| $n$ | $E[N]$ |
|---|---|
| 100 | |
| 1000 | |
| 10000 | |
| 100000 | |
| 1000000 | |

b) $P(N = i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, usando $n = 1000000$.