

PRÁCTICA 4

GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

Ejercicio 1. Se baraja un conjunto de $n = 100$ cartas (numeradas consecutivamente del 1 al 100) y se extrae del mazo una carta por vez. Consideramos que ocurre un “éxito” si la i -ésima carta extraída es aquella cuyo número es i ($i = 1, \dots, n$).

- Escribir un programa de simulación para estimar la esperanza y la varianza del número total de éxitos.
- Determine las respuestas exactas para $n \gg 1$ y compárelas con los resultados estimados.

Ejercicio 2. Se desea construir una aproximación de:

$$\sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{k}{N}\right) \text{ donde } N = 10000.$$

- Escribir un algoritmo para estimar la cantidad deseada.
- Obtener la aproximación sorteando 100 números aleatorios.
- ¿Es buena la aproximación obtenida?

Ejercicio 3. Se lanzan simultáneamente un par de dados legales y se anota el resultado de la suma de ambos. El proceso se repite hasta que todos los resultados posibles: $2, 3, \dots, 12$ hayan aparecido al menos una vez. Estudiar mediante una simulación el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso. Cada lanzamiento implica arrojar *el par* de dados.

- Describir la estructura lógica del algoritmo que permite simular en computadora el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso.
- Mediante una implementación en computadora, calcular el valor medio y la desviación estándar del número de lanzamientos, repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000 veces.

Ejercicio 4. Desarrollar dos métodos para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = i) = \frac{\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}{\sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}} \quad (i = 0, \dots, k)$$

Ejercicio 5. Desarrollar un método para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{j-1}}}{3^j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Ejercicio 6. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $P(X = j) = p_j$ con $j = 1, 2, \dots$. Sea:

$$\lambda_n = P(X = n | X > n - 1) = \frac{p_n}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las cantidades λ_n , son las tasas discretas de riesgo. Considerando a X como el tiempo (discreto) de vida de algún artículo, λ_n representa la probabilidad de que habiendo sobrevivido hasta el tiempo $n - 1$, muera en el tiempo n .

- a) Mostrar que $p_1 = \lambda_1$ y que

$$p_n = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_{n-1})\lambda_n$$

Método de la tasa discreta de riesgo para simular variables aleatorias discretas: Se genera una sucesión de números aleatorios que termina cuando el n -ésimo número generado es menor que λ_n . El algoritmo puede escribirse como sigue:

Paso 1: $X = 1$

Paso 2: Generar U

Paso 3: Si $U < \lambda_X$, terminar.

Paso 4: $X = X + 1$

Paso 5: Ir al Paso 2

- b) Mostrar que los valores de X que genera este proceso tienen la distribución de probabilidad deseada.
c) Suponer que X es una variable aleatoria geométrica con parámetro p :

$$P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Determinar los valores de $\lambda_n, n \geq 1$. Explique cómo funciona el algoritmo anterior en este caso y por qué es evidente su validez.

Ejercicio 7. Suponiendo que $0 \leq \lambda_n \leq \lambda$, para todo $n \geq 1$; considerar el siguiente algoritmo para generar una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo $\{\lambda_n\}$:

Paso 1: $S = 0$

Paso 2: Generar U , $Y = \text{Ent} \left[\frac{\log(U)}{\log(1 - \lambda)} \right] + 1$

Paso 3: $S = S + Y$

Paso 4: Generar U

Paso 5: Si $U \leq \lambda_s/\lambda$, tomar $X = S$ y terminar. Caso Contrario, ir a Paso 2.

- a) ¿Cuál es la distribución de Y en el paso 2?
b) Explique cómo funciona el algoritmo.
c) Argumentar que X resulta una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo $\{\lambda_n\}$.