PRÁCTICA 5

GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Ejercicio 1. Desarrollar un método para generar una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{2-x/3}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \end{cases}.$$

Ejercicio 2. Desarrollar un método para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\alpha x^{\beta}\right).$$

Una variable aleatoria con esta distribución se conoce como variable aleatoria de Weibull.

Ejercicio 3. *Método de la composición:* Suponer que es relativamente fácil generar n variables aleatorias a partir de sus distribuciones de probabilidad F_i, $i = 1, \dots, n$. Implementar un método para generar una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x).$$

donde p_i, $i = 1, \dots, n$, son números no negativos cuya suma es 1.

Ejercicio 4. Desarrollar un método para generar la variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \int_0^{\infty} x^y e^{-y} dy, \ \ 0 \leq x \leq 1.$$

Pensar en el método de composición del ejercicio anterior. En particular, sea F la función de distribución de X y suponga que la distribución condicional de X dado $Y = y$ es

$$P(X \leq x | Y = y) = x^y, \ \ 0 \leq x \leq 1.$$

Ejercicio 5. Considere que es sencillo generar una variable aleatoria a partir de cualquiera de las distribuciones F_i, $i = 1, \dots, n$. Explicar cómo generar variables aleatorias a partir de las siguientes distribuciones:

a) $F(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$

b) $F(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(x))$

Sugerencia: Si X_i, $i = 1, \dots, n$, son variables aleatorias independientes, donde X_i tiene distribución F_i, ¿cuál variable aleatoria tiene como distribución a F en cada caso?

Ejercicio 6. Utilizar el método del rechazo y los resultados del ejercicio anterior para desarrollar otros dos métodos, además del método de la transformada inversa, para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = x^n, \ \ 0 \leq x \leq 1.$$

Analizar la eficiencia de los tres métodos para generar la variable a partir de F.

Ejercicio 7. Desarrollar dos métodos para generar una variable aleatoria con densidad de probabilidad $f(x) = x e^{-x}, \ \ x \geq 0$.
Comparar sus eficiencias.

Ejercicio 8. Escribir dos programas para generar un variable aleatoria normal mediante

a) la generación de variables exponenciales según el ejemplo *5f* del libro *Simulación* de S. M. Ross,

b) el método polar.

Probar los códigos calculando la media y varianza de 10000 valores generados con ambos métodos.

Ejercicio 9. Sea en par (X,Y) uniformemente distribuído en un círculo de radio 1. Mostrar que si R es la distancia del punto (X,Y) al centro del círculo, entonces R^2 está uniformemente distribuída en el intervalo $(0,1)$.

Ejercicio 10. Escribir un programa para generar las primeras T unidades de tiempo de un proceso de Poisson con parámetro λ.

Ejercicio 11. Los autobuses que llevan los aficionados a un encuentro deportivo llegan a destino de acuerdo con un proceso de Poisson a razón de cinco por hora. La capacidad de los autobuses es una variable aleatoria que toma valores en el conjunto: $\{20,21,\ldots,40\}$ con igual probabilidad. A su vez, las capacidades de dos autobuses distintos son variables independientes. Escribir un algoritmo para simular la llegada de aficionados al encuentro en el instante $t = 1$ hora.

Ejercicio 12.

a) Escribir un programa que utilice el algoritmo del adelgazamiento para generar las primeras diez unidades de tiempo de un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

$$\lambda(t) = 3 + \frac{4}{t+1}.$$

b) Indicar una forma de mejorar el algoritmo de adelgazamiento para este ejemplo particular.