

Introducción

En un contexto donde la exploración espacial se vuelve cada vez más relevante, contar con herramientas para comprender y estimar características fundamentales de otros planetas se vuelve clave. En esta oportunidad hemos sido convocados por la Agencia de Investigación Espacial para participar en un experimento crucial: medir la aceleración gravitatoria en un planeta recién descubierto, el Planeta X. La estrategia elegida para tal fin, aunque sencilla en apariencia, exige precisión: lanzar una pelota de tenis verticalmente hacia arriba y registrar detalladamente su trayectoria. Con la ayuda de una nave espacial de última generación y dispositivos tecnológicos capaces de captar con exactitud el movimiento del objeto

Antes de llegar al destino final, el entrenamiento incluyó ensayos previos en la Tierra y una parada intermedia en Marte. Estos pasos no solo sirvieron para familiarizarnos con los instrumentos y condiciones del experimento, sino también para recolectar información valiosa que luego podrá ser utilizada para enriquecer el análisis estadístico.

A lo largo del informe se presentan visualizaciones exploratorias, especificaciones de modelos, implementaciones en **Stan** y análisis de los resultados obtenidos. El objetivo central es obtener una estimación confiable de la gravedad en el Planeta X, así como evaluar el comportamiento predictivo del modelo en distintos escenarios de lanzamiento, contribuyendo así a resolver un interrogante que mantiene en vilo tanto a la comunidad científica como a la población general.

Experimento en el planeta X

Con el objetivo de comenzar a explorar los datos recolectados durante el experimento realizado en el Planeta X, a continuación se presenta la trayectoria registrada de la pelota de tenis en función del tiempo. Esta visualización permite una primera evaluación visual del comportamiento del sistema y del funcionamiento del dispositivo de registro utilizado durante la misión.

La Figura 1 muestra una secuencia de mediciones que sigue, en términos generales, la forma esperada para un lanzamiento vertical bajo aceleración constante. La pelota fue lanzada desde una altura de 10 metros y aunque la trayectoria no se ajusta perfectamente a una curva suave, las pequeñas desviaciones observadas pueden atribuirse a errores de medición, propios del instrumento o del entorno experimental. Los datos parecen haber sido recolectados de manera adecuada, por

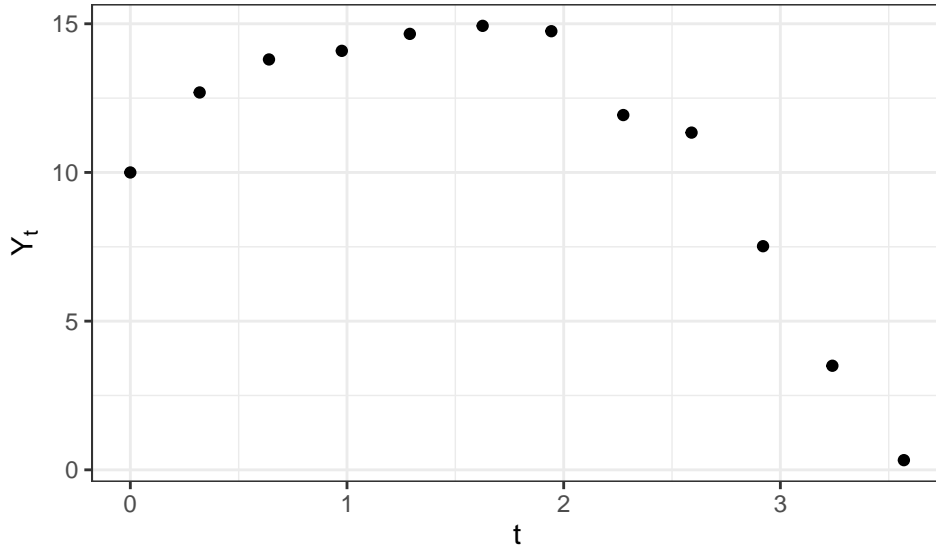


Figura 1: Trayectoria de la pelota en el planeta X

lo que se consideran válidos para avanzar hacia una modelización estadística más precisa.

Relación entre el modelo cinemático y el modelo lineal normal

En este trabajo se utilizará como base una ecuación fundamental de la cinemática que describe el movimiento de un objeto bajo aceleración constante. Esta, vincula la posición del objeto en función del tiempo con parámetros clave del movimiento: la aceleración, la velocidad inicial y la posición de partida.

Se trabajará con un modelo lineal normal, donde los coeficientes del mismo se pueden expresar en función de los parámetros de la ecuación cinemática:

$$\begin{cases} \beta_0 = x_0 \\ \beta_1 = v_0 \\ \beta_2 = \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Además, se puede establecer un vínculo entre las variables de ambos modelos que se puede plantear de la siguiente manera:

$$\begin{cases} X_1 = t \\ X_2 = t^2 \end{cases}$$

A partir de esta relación, se propondrá el modelo estadístico que servirá como base para el análisis bayesiano posterior, sin incorporar aún información a priori sobre los parámetros.

Planteo del modelo lineal

A continuación, se presenta el modelo lineal que será utilizado para analizar los datos obtenidos en el experimento realizado en el Planeta X:

$$Y_{t_i} \mid \mu_{t_i}, \sigma \sim \text{Normal}(\mu_{t_i}; \sigma^2) \quad i = 1, \dots, 12$$

$$\mu_{t_i} = \beta_0 + \beta_1 t_i + \beta_2 t_i^2$$

Modelo 1: Regresión cuadrática con distribuciones a priori uniformes

Este modelo tiene como objetivo describir la relación entre tiempo transcurrido desde el inicio de la observación (en segundos) denotada como t y posición vertical final de la pelota después de un tiempo t (en metros) denotada como y , a través de una regresión cuadrática con errores normales. La estimación se realiza bajo el enfoque bayesiano utilizando el lenguaje probabilístico **Stan**, a través del muestreo por cadenas de Markov (MCMC).

Especificación del modelo

El modelo asume que la relación entre y y t puede ser representada mediante una función cuadrática, es decir:

$$y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma), \quad \text{donde} \quad \mu_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \beta_2 t_i^2$$

donde:

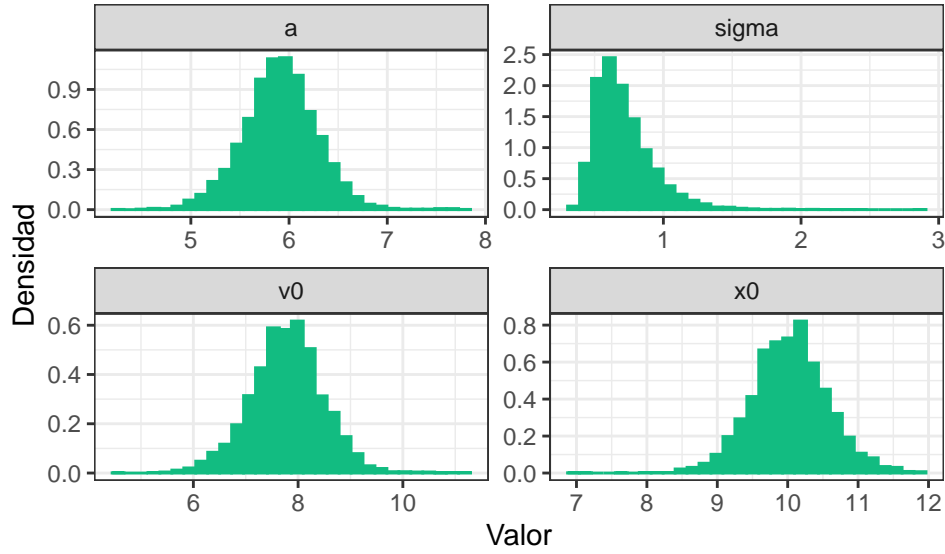
- y_i : valor observado de la posición vertical de la pelota en el tiempo t_i (en metros).
- β_0 : posición vertical inicial de la pelota en $t_i = 0$ (en metros).
- β_1 : velocidad inicial de la pelota al comienzo del intervalo de tiempo t_i (en metros por segundo).
- β_2 : el doble de la aceleración constante que experimenta la pelota (en metros por segundo al cuadrado).
- σ : desviación estándar del error.
- t_i : tiempo transcurrido desde el inicio de la observación (en segundos).

Código en Stan

En este modelo se utilizaron distribuciones *a priori* no informativas, permitiendo que los datos tengan un rol principal en la actualización de la distribución a posteriori. Por lo que, las distribuciones *a priori* utilizadas son:

- Para β_0 , β_1 y β_2 : distribuciones *a priori* uniformes, el plano se encuentra sobre los reales.
- Y para σ : un *prior* uniforme, el plano se encuentra sobre los reales positivos.

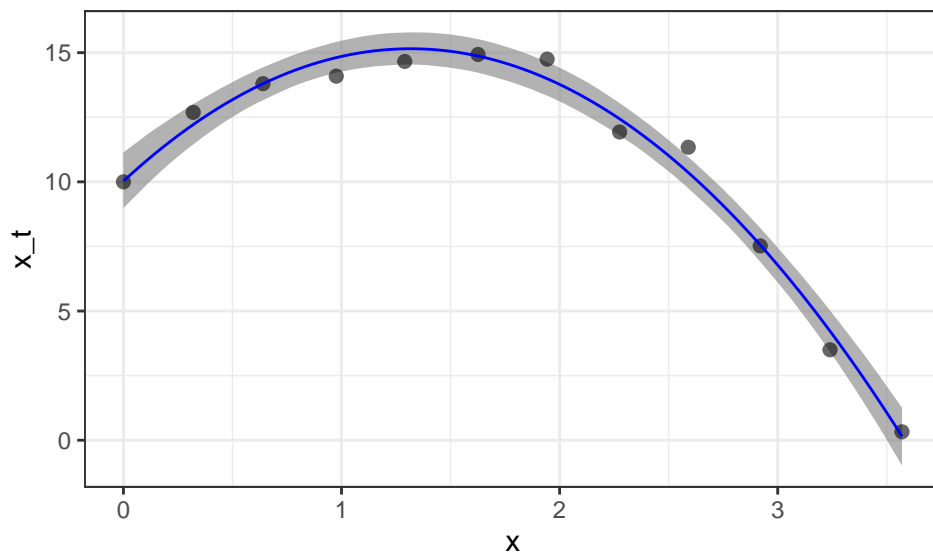
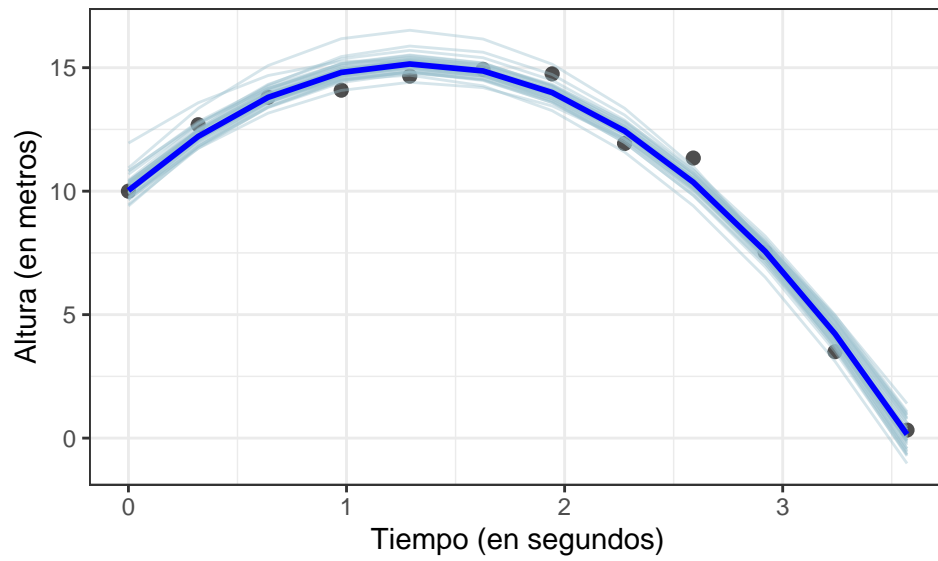
Luego de ajustar el modelo bayesiano a los datos obtenidos en el experimento del Planeta X, se generaron muestras de la distribución predictiva a posteriori de la respuesta (y_{rep}) a partir de los valores ajustados μ y el desvío estimado σ , lo cual permite realizar chequeos de ajuste (posterior predictive checks) para evaluar si el modelo reproduce adecuadamente los patrones observados en los datos, es decir se analizaron las distribuciones marginales a posteriori de los parámetros del modelo:

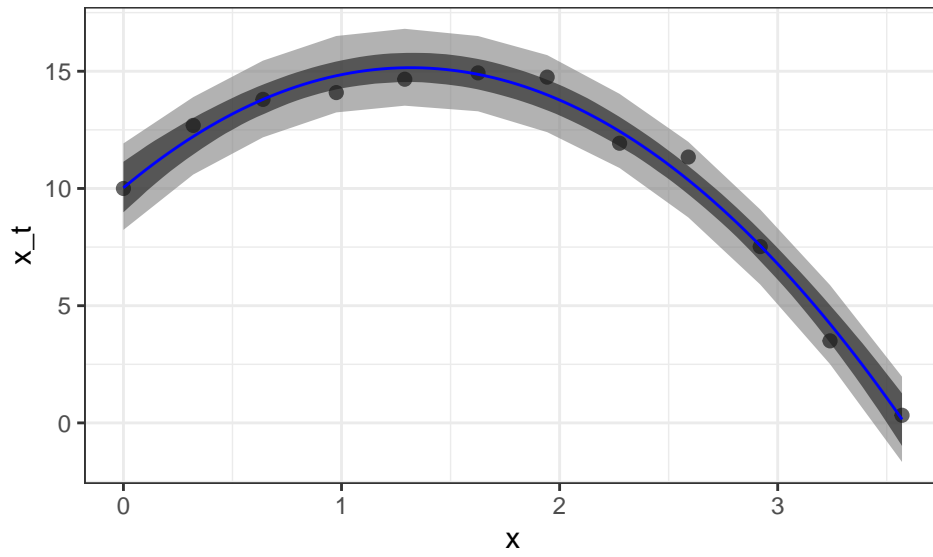


Las siguientes gráficas muestran las distribuciones a posteriori de los parámetros estimados por el modelo. En todos los casos, se observa que las cadenas convergen a distribuciones unimodales, con densidades concentradas, lo que indica buena estabilidad del muestreo y una adecuada capacidad del modelo para aprender sobre los parámetros. En particular, se observa que:

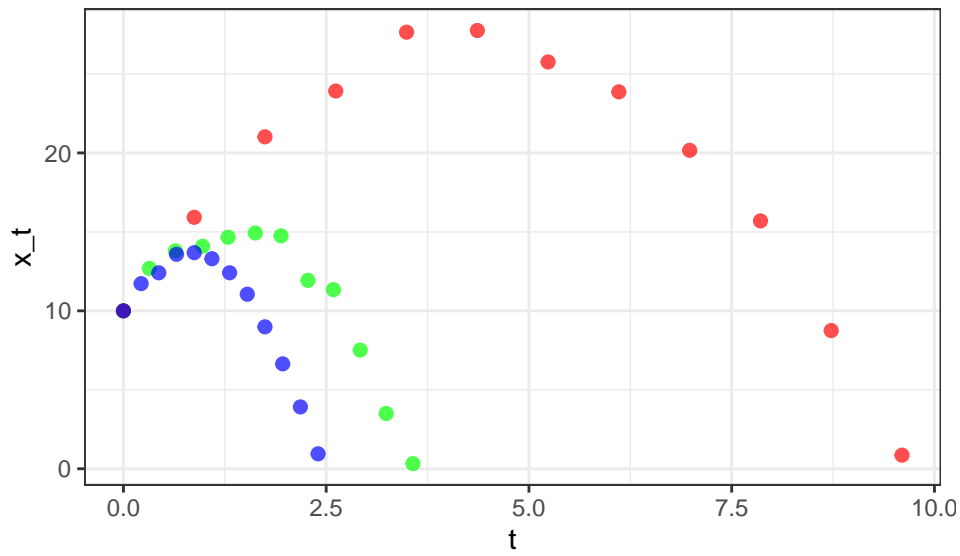
- El posterior de a presenta una forma aproximadamente simétrica, concentrada en torno a un valor cercano a 6 m/s^2 . Esto sugiere que la intensidad de la gravedad en el Planeta X es inferior a la terrestre (9.8 m/s^2), pero mayor a la de Marte (3.7 m/s^2), lo cual resulta coherente con la posible masa y tamaño del planeta.
- El posterior de la velocidad inicial estimada v_0 se concentra alrededor de 8 m/s , en línea con lo esperado según el entrenamiento previo del astronauta. La forma de la distribución es simétrica y estrecha, indicando baja incertidumbre y consistencia en el procedimiento de lanzamiento.
- El posterior del valor de x_0 se sitúa en torno a los 10 metros, que coincide con la altura de la nave espacial The Bayesian desde donde se realizó el lanzamiento. Esta estimación es coherente con las condiciones iniciales conocidas del experimento.
- A diferencia de las anteriores, el posterior de σ es asimétrico y presenta una cola larga hacia la derecha. Esto indica que, aunque la mayor parte de la variabilidad del modelo es baja, existe cierta probabilidad de errores más grandes. Aun así, la mayor concentración cerca de valores bajos sugiere que el modelo logra ajustar bastante bien los datos observados.

ITEM 5





ITEM 6



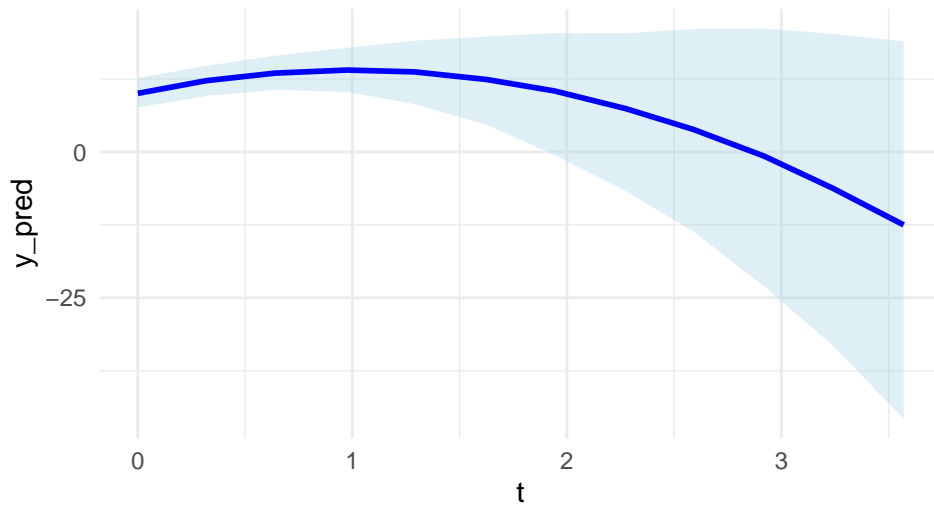
ITEM 7

$$\beta_0 \sim N(10, 0.5) \quad \beta_1 \sim N(8, 1) \quad \beta_2 \sim N(-4, 1.5) \quad \sigma \sim N^+(1.5)$$

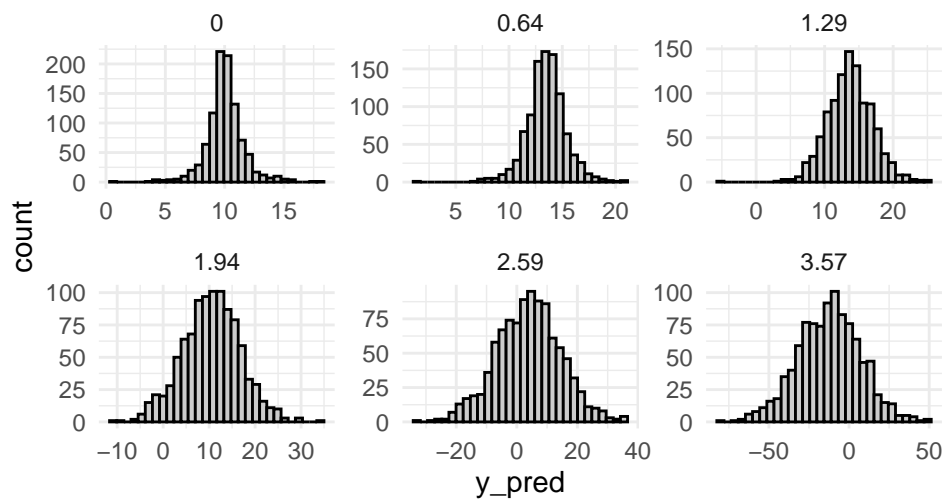
grav marte 3.73 grav tierra 9.807 media 6.7685

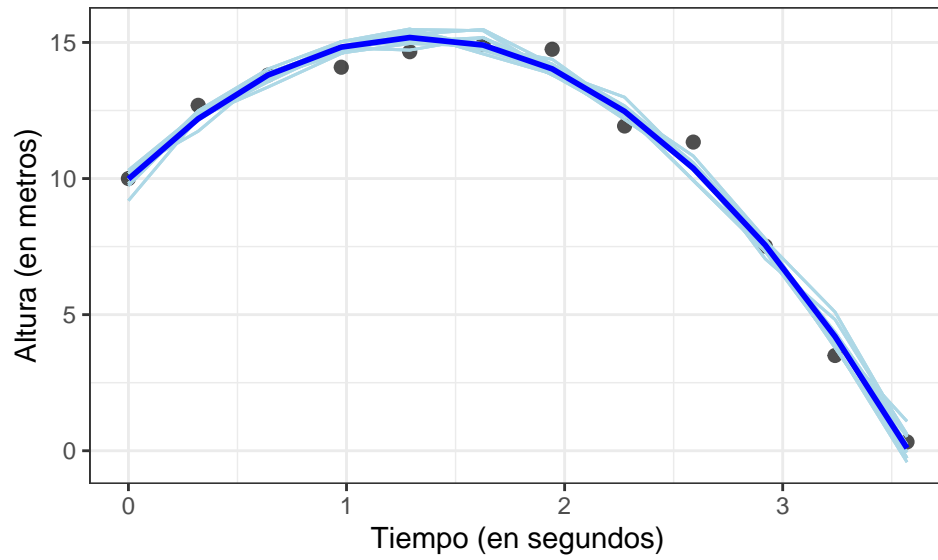
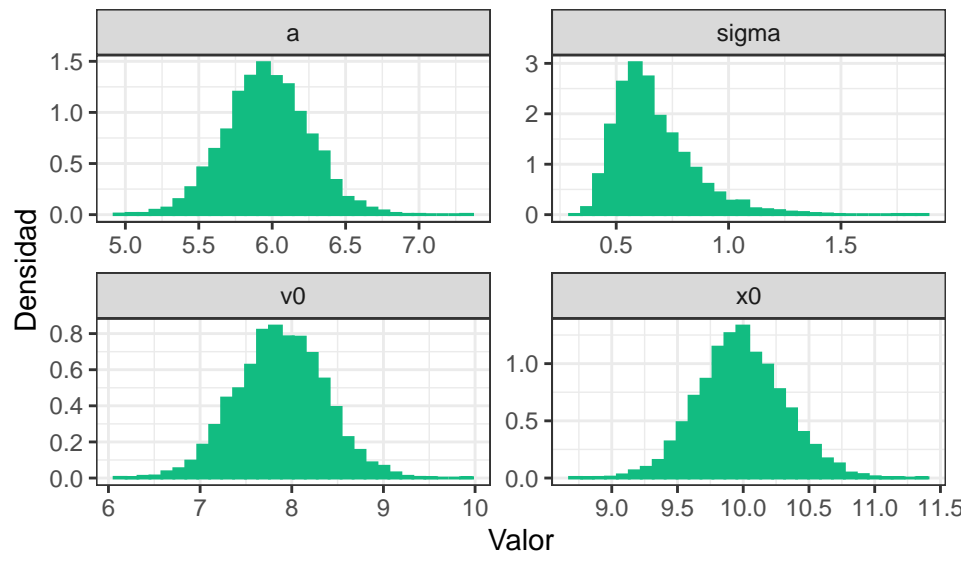
$-0.5 \cdot (6.7685)$

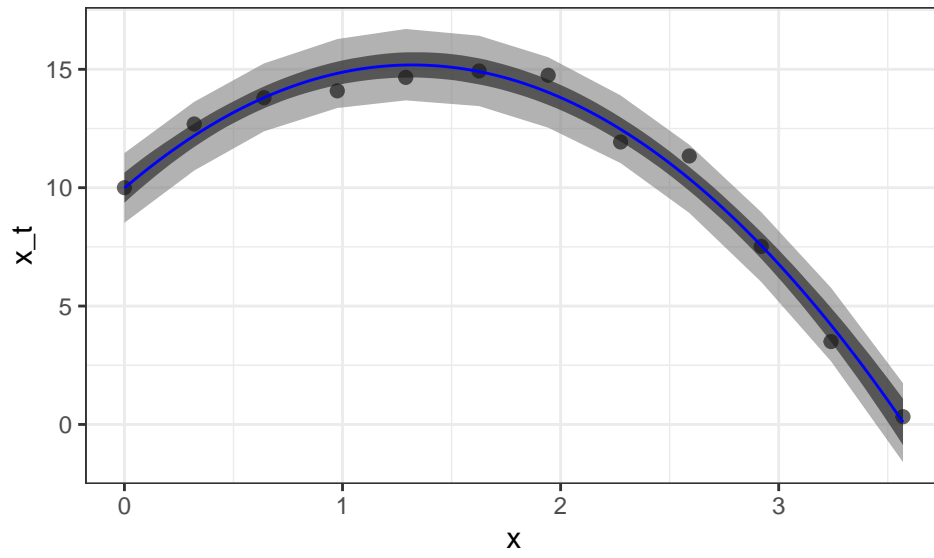
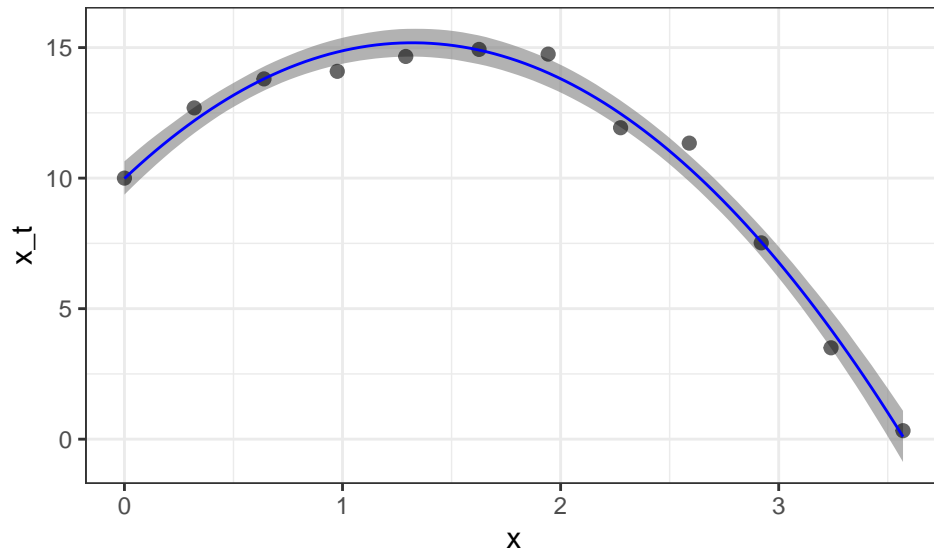
Distribución predictiva a priori de y

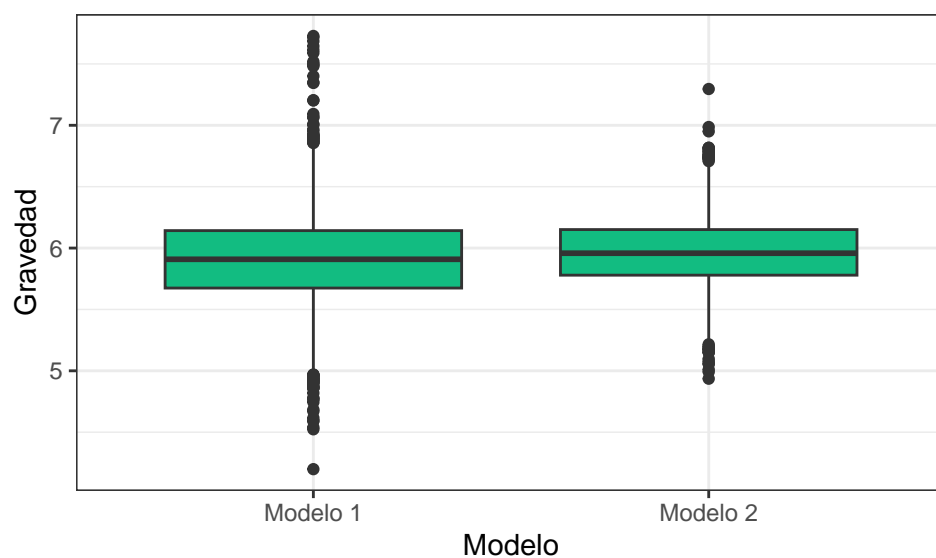
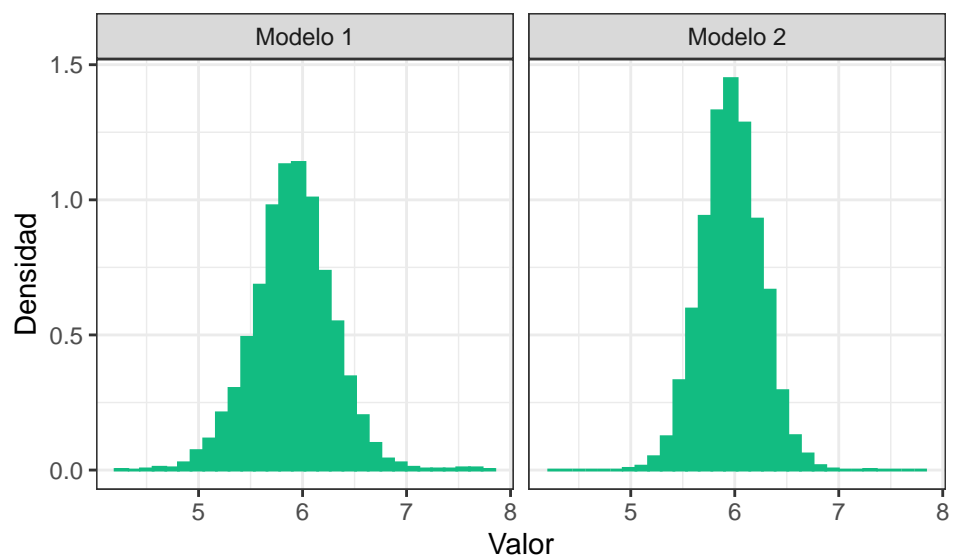


Distribución de y_{pred} en distintos valores de t









2.5%	25%	75%	97.5%
5.147896	5.674148	6.142111	6.635559

2.5%	25%	75%	97.5%
5.424308	5.779291	6.150503	6.511344

