



| **UNR** Universidad
Nacional de Rosario

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ESTADÍSTICA

TRABAJO PRÁCTICO: "El bayesiano interestelar"

ESTADÍSTICA BAYESIANA

Autores: Priscila Fenoy - María Victoria Fernandez - Francisco Ovando

Docentes: Tomás Capretto - Ignacio Evangelista

Fecha: 9 de Junio de 2025

Índice

Introducción	1
Experimento en el planeta X	1
Relación entre el modelo cinemático y el modelo lineal normal	2
Modelo lineal normal	3
Modelo con distribuciones <i>a priori</i> uniformes	3
Estructura del modelo expresada en Stan	3
Análisis gráfico del modelo	5
Modelo con distribuciones <i>a priori</i> informativas	6
Elección de distribuciones <i>a priori</i> informativas	6
Estructura del modelo expresada en Stan	8
Pruebas predictivas <i>a priori</i>	8
Análisis gráfico del modelo	10
Comparación de ambos modelos ajustados	12
Estimación del tiempo de caída con distintas velocidades iniciales	12
Conclusión final	14

Introducción

En un contexto donde la exploración espacial se vuelve cada vez más relevante, contar con herramientas para comprender y estimar características fundamentales de otros planetas se vuelve clave. En esta oportunidad el equipo ha sido convocado por la Agencia de Investigación Espacial para participar en un experimento crucial: medir la aceleración gravitatoria en un planeta recién descubierto, el Planeta X. La estrategia elegida para tal fin, aunque sencilla en apariencia, exige precisión: lanzar una pelota de tenis verticalmente hacia arriba y registrar detalladamente su trayectoria. Con la ayuda de una nave espacial de última generación y dispositivos tecnológicos capaces de captar con exactitud el movimiento del objeto

Antes de llegar al destino final, el entrenamiento incluyó ensayos previos en la Tierra y una parada intermedia en Marte. Estos pasos no solo sirvieron para familiarizarnos con los instrumentos y condiciones del experimento, sino también para recolectar información valiosa que luego podrá ser utilizada para enriquecer el análisis estadístico.

A lo largo del informe se presentan visualizaciones exploratorias, especificaciones de modelos, implementaciones en **Stan** y análisis de los resultados obtenidos. El objetivo central es obtener una estimación confiable de la gravedad en el Planeta X, así como evaluar el comportamiento predictivo del modelo en distintos escenarios de lanzamiento, contribuyendo así a resolver un interrogante que mantiene en vilo tanto a la comunidad científica como a la población general.

Experimento en el planeta X

Con el objetivo de comenzar a explorar los datos recolectados durante el experimento realizado en el Planeta X, a continuación se presenta la trayectoria registrada de la pelota de tenis en función del tiempo. Esta visualización permite una primera evaluación visual del comportamiento del sistema y del funcionamiento del dispositivo de registro utilizado durante la misión.

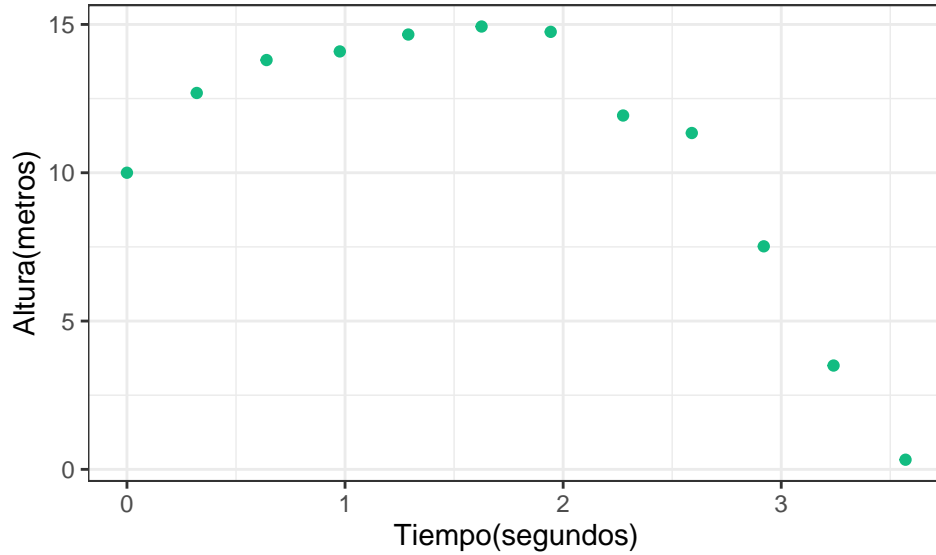


Figura 1: Posición de la pelota en el planeta X durante el experimento

La Figura 1 muestra una secuencia de mediciones que sigue, en términos generales, la forma esperada para un lanzamiento vertical bajo aceleración constante. La pelota fue lanzada desde una altura de 10 metros y aunque la trayectoria no se ajusta perfectamente a una curva suave, las pequeñas desviaciones observadas pueden atribuirse a errores de medición, propios del instrumento o del entorno experimental. Los datos parecen haber sido recolectados de manera adecuada, por lo que se consideran válidos para avanzar hacia una modelización estadística más precisa.

Relación entre el modelo cinemático y el modelo lineal normal

En este trabajo se utilizará como base una ecuación fundamental de la cinemática que describe el movimiento de un objeto bajo aceleración constante. Esta, vincula la posición del objeto en función del tiempo con parámetros clave del movimiento: la aceleración, la velocidad inicial y la posición de partida.

Se trabajará con un modelo lineal normal, donde los coeficientes del mismo se pueden expresar en función de los parámetros de la ecuación cinemática:

$$\begin{cases} \beta_0 = x_0 \\ \beta_1 = v_0 \\ \beta_2 = \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Además, se puede establecer un vínculo entre las variables de ambos modelos que se puede plantear de la siguiente manera:

$$\begin{cases} X_1 = t \\ X_2 = t^2 \end{cases}$$

A partir de esta relación, se propondrá el modelo estadístico que servirá como base para el análisis.

Modelo lineal normal

El modelo asume que la relación entre y y t puede ser representada mediante una función cuadrática, es decir:

$$Y_{t_i} | \mu_{t_i}, \sigma \sim \text{Normal}(\mu_{t_i}; \sigma^2) \quad i = 1, \dots, 12$$

$$\mu_{t_i} = \beta_0 + \beta_1 t_i + \beta_2 t_i^2$$

donde:

- y_i : valor observado de la posición vertical de la pelota en el tiempo t_i (en metros).
- β_0 : posición vertical inicial de la pelota en $t_i = 0$ (en metros).
- β_1 : velocidad inicial de la pelota al comienzo del intervalo de tiempo t_i (en metros por segundo).
- β_2 : el doble de la aceleración constante que experimenta la pelota (en metros por segundo al cuadrado).
- σ : desviación estándar del error.
- t_i : tiempo transcurrido desde el inicio de la observación (en segundos).

Este modelo tiene como objetivo describir la relación entre tiempo transcurrido desde el inicio de la observación (en segundos) denotada como t y posición vertical final de la pelota después de un tiempo t (en metros) denotada como y , a través de una regresión cuadrática con errores normales. La estimación se realiza bajo el enfoque bayesiano utilizando el lenguaje probabilístico Stan, a través del muestreo por cadenas de Markov (MCMC).

Modelo con distribuciones *a priori* uniformes

Como primer aproximación al problema, se plantea un modelo asumiendo distribuciones *a priori* uniformes para los parámetros.

Estructura del modelo expresada en Stan

```
modelo1 <- "  
data {  
  int<lower=0> N;    // Cantidad de observaciones  
  vector[N] t;      // Valores de la variable predictora  
  vector[N] y;      // Valores de la variable respuesta  
}  
parameters {  
  real beta0;        // Intercepto  
  real beta1;        // Pendiente  
  real beta2;        // Pendiente
```

```

    real<lower=0> sigma; // Desvío estándar del error
}
model {
    y ~ normal(beta0 + beta1 * t + beta2 * t^2, sigma);
}
generated quantities {
    vector[N] mu;
    vector[N] y_rep;

    // Calcular 'mu'
    mu = beta0 + beta1 * t + beta2 * t^2;

    for (i in 1:N) {
        // Muestras de la distribución predictiva a posteriori
        y_rep[i] = normal_rng(mu[i], sigma);
    }
}

```

En este modelo se utilizaron distribuciones *a priori* no informativas, permitiendo que los datos tengan un rol principal en la actualización de la distribución *a posteriori*. Por lo que, las distribuciones *a priori* utilizadas son para β_0 , β_1 y β_2 distribuciones *a priori* uniformes y para σ un *prior* uniforme, donde el plano se encuentra sobre los reales positivos.

Luego de ajustar el modelo bayesiano a los datos obtenidos del Planeta X, se generaron muestras de la distribución predictiva *a posteriori* de la respuesta (y_{rep}) a partir de los valores ajustados μ y el desvío estimado σ , lo cual permite realizar chequeos de ajuste (posterior predictive checks) para evaluar si el modelo reproduce adecuadamente los patrones observados en los datos, es decir se analizaron las distribuciones marginales *a posteriori* de los parámetros del modelo:

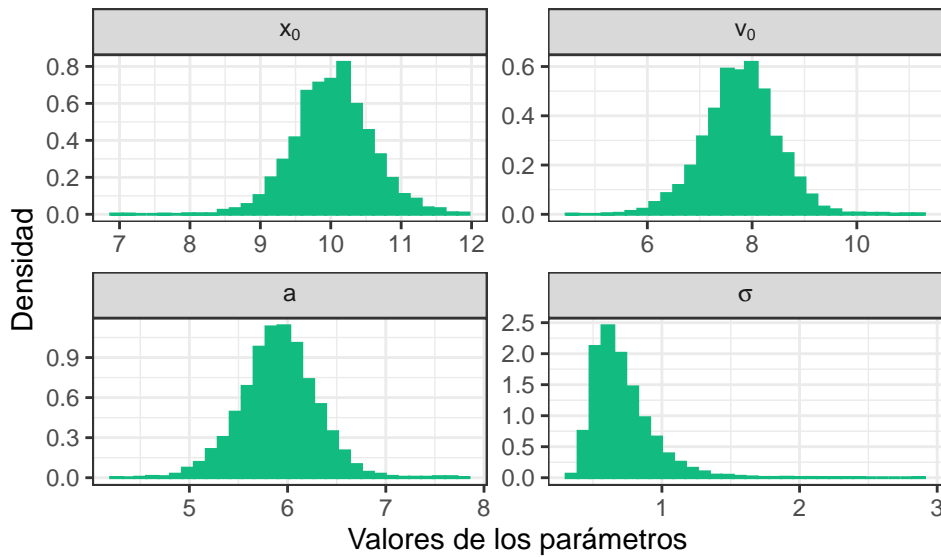


Figura 2: Distribución marginal de las constantes físicas obtenidas a partir de las muestras generadas

En la Figura 2 se muestran las distribuciones *a posteriori* de los parámetros estimados por el

modelo. En todos los casos, se observa que las cadenas convergen a distribuciones unimodales, con densidades concentradas.

Se observa que el posterior de a (la aceleración constante que experimenta la pelota) presenta una forma aproximadamente simétrica, concentrada en torno a un valor cercano a 6 m/s^2 .

Además, el posterior de la velocidad inicial estimada v_0 se concentra alrededor de 8 m/s , en línea con lo esperado según el entrenamiento previo del astronauta. La forma de la distribución es simétrica y estrecha, indicando baja incertidumbre.

Por otro lado, el posterior del valor de x_0 se sitúa en torno a los 10 metros, que coincide con la altura de la nave espacial “The Bayesian” desde donde se realizó el lanzamiento. Esto es coherente con las condiciones iniciales conocidas.

El posterior de σ es asimétrico y presenta una cola pesada hacia la derecha. Se observa que la mayor concentración cerca de valores bajos sugiere que el modelo logra ajustar bastante bien los datos observados.

Análisis gráfico del modelo

En este ítem se muestra la curva de regresión estimada para la distribución condicional de μ_i acompañada de sus bandas de credibilidad del 95%, que representan la incertidumbre asociada a la predicción del modelo ajustado.

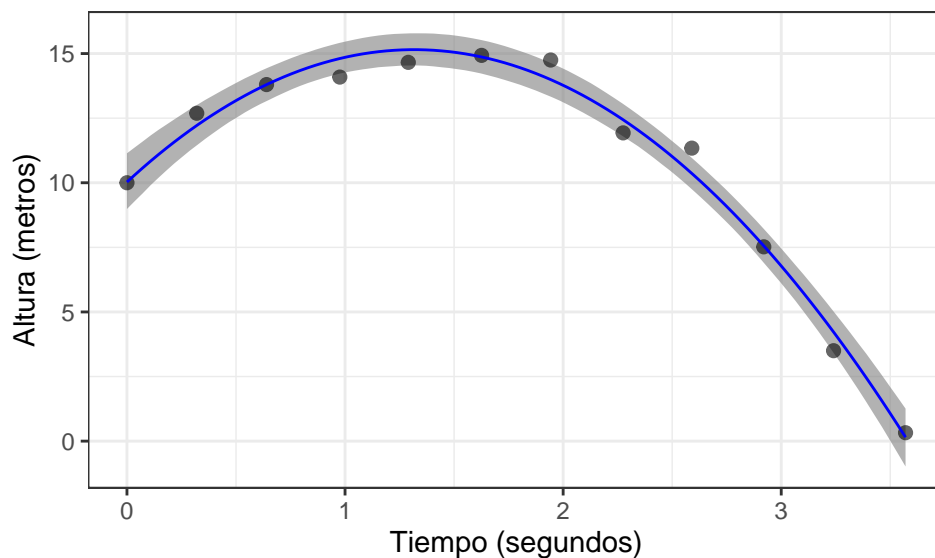


Figura 3: Altura media de la pelota a través del tiempo con bandas del 95% de credibilidad (usando *priors* uniformes)

La curva visualizada en la Figura representa la posición esperada de la pelota a lo largo del tiempo, según el modelo ajustado con los datos del Planeta X.

La curva sigue una trayectoria parabólica, lo cual es coherente con el movimiento de un objeto lanzado hacia arriba bajo la influencia de la gravedad. Se observa que la mayoría de los puntos quedan contenidos dentro de las bandas de credibilidad, lo que indica un buen ajuste del modelo a los datos, aunque con un prior mas informativo esta estimación podría mejorar.

Además, se incluyen bandas de predicción utilizando la distribución predictiva *a posteriori* para distintos valores de tiempo, lo que permite evaluar el comportamiento esperado de la pelota en futuros lanzamientos.

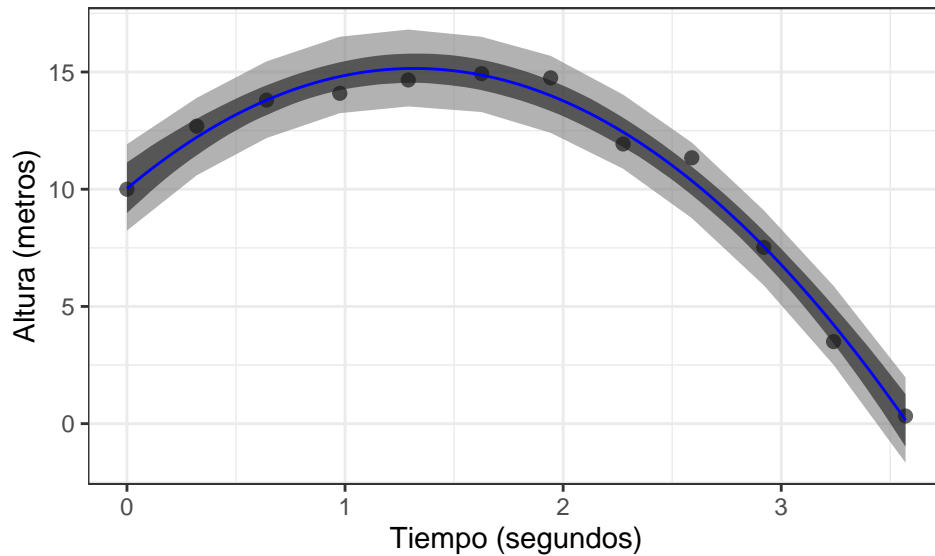


Figura 4: Altura media de la pelota a través del tiempo con bandas del 95% de credibilidad y de predicción (usando *priors* uniformes)

En la Figura 4 se observa que las bandas de credibilidad asociadas a la distribución predictiva *a posteriori* son bastantes angostas. Esto refleja que el modelo tiene una buena capacidad para predecir futuras observaciones.

Modelo con distribuciones *a priori* informativas

Elección de distribuciones *a priori* informativas

Se dispone de datos provenientes de experimentos realizados en la Tierra y Marte, cuyos valores de gravedad son conocidos. En este punto, se visualizan dichos datos junto con los del Planeta X, con el objetivo de analizar similitudes y diferencias en los comportamientos registrados. Esta comparación permite identificar patrones útiles para definir distribuciones *a priori* más informativas para los parámetros del modelo, mejorando así la calidad de las inferencias bayesianas sobre la gravedad en el Planeta X.

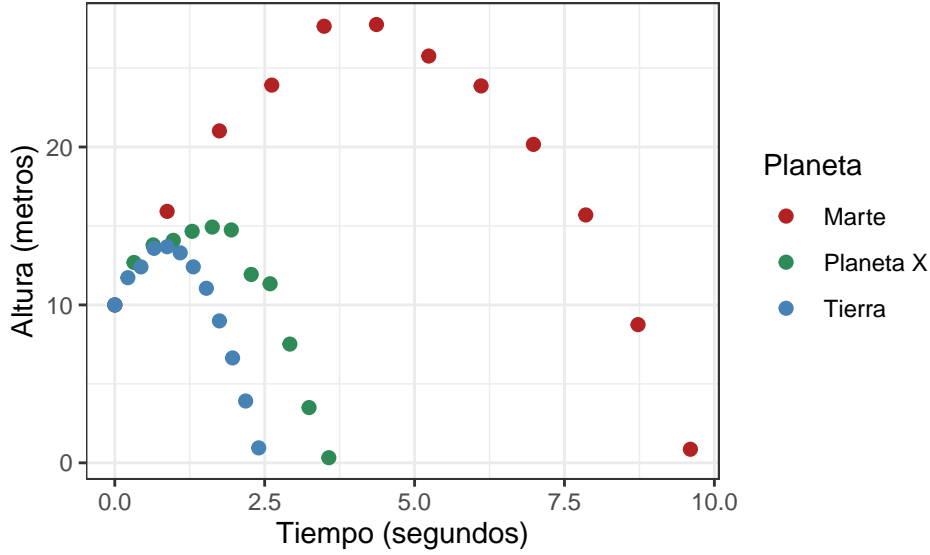


Figura 5: Altura de la pelota en función del tiempo en distintos planetas

La Figura 5 muestra la posición vertical de la pelota en función del tiempo para los tres planetas. En la Tierra, la pelota alcanza una menor altura y regresa rápidamente al suelo, lo que refleja una mayor aceleración gravitatoria. En el Planeta X, se observa una altura intermedia y un tiempo de vuelo moderado, mientras que en Marte la pelota alcanza la mayor altura y permanece más tiempo en el aire, lo que sugiere una gravedad más débil.

En conjunto, los datos sugieren que la gravedad en el Planeta X es más cercana a la de la Tierra que a la de Marte. Esta comparación proporciona una base útil para definir distribuciones *a priori* informativas sobre la gravedad en el planeta de interés, aprovechando el conocimiento disponible sobre los entornos conocidos.

Dado que la pelota se lanza siempre desde la punta de la nave, a la altura inicial de la pelota, es decir β_0 se le asigna una creencia *a priori* normal centrada en 10, que es la altura de *The Bayesian* con desvío pequeño.

El lanzamiento de la pelota fue realizado por una persona entrenada de manera exigente, que desarrolló la capacidad de lanzar la pelota siempre con la misma velocidad inicial (aproximadamente 8 metros por segundo), por lo que β_1 se asume normal centrado en 8 y se le asigna un desvío relativamente pequeño confiando en el entrenamiento realizado.

El parámetro β_2 está relacionado a la gravedad del planeta X, gracias a las pruebas realizadas en Marte ($a = 3.73$) y en la Tierra ($a = 9.807$) se plantea la fuerza gravitatoria en el planeta X como una normal centrada en el promedio de ellas, por lo que $\mu_{\beta_2} = -\frac{1}{2}(\frac{a_{tierra} + a_{marte}}{2}) = -\frac{1}{2}(6.7685) \approx 4$, con un desvío lo suficientemente grande para modelar la incertidumbre sobre este parámetro, pero asignándole probabilidades casi nulas a valores positivos del mismo.

Por último, para el error del modelo, se eligió una distribución normal positiva de desvío también grande, dado que no se conoce nada sobre este parámetro, sólo que es positivo.

De esta forma, el modelo lineal que será utilizado para analizar los datos obtenidos en el experimento realizado en el Planeta X:

$$Y_{t_i} \mid \mu_{t_i}, \sigma \sim \text{Normal}(\mu_{t_i}; \sigma^2) \quad i = 1, \dots, 12$$

$$\begin{aligned}\mu_{t_i} &= \beta_0 + \beta_1 t_i + \beta_2 t_i^2 \\ \beta_0 &\sim N(10, 0.5) \\ \beta_1 &\sim N(8, 1) \\ \beta_2 &\sim N(-4, 1.5) \\ \sigma &\sim N^+(1.5)\end{aligned}$$

Estructura del modelo expresada en Stan

```

modelo2 <- "
data {
  int<lower=0> N;    // Cantidad de observaciones
  vector[N] t;      // Valores de la variable predictora
  vector[N] y;      // Valores de la variable respuesta
}
parameters {
  real beta0;        // Intercepto
  real beta1;        // Pendiente
  real beta2;        // Pendiente
  real<lower=0> sigma; // Desvio estándar del error
}
model {
  beta0 ~ normal(10, 0.5);
  beta1 ~ normal(8, 1);
  beta2 ~ normal(-4, 1.5);
  sigma ~ normal(0, 1.5);
  y ~ normal(beta0 + beta1 * t + beta2 * t^2, sigma);
}
generated quantities {
  vector[N] mu2;
  vector[N] y_rep2;

  // Calcular 'mu'
  mu2 = beta0 + beta1 * t + beta2 * t^2;

  for (i in 1:N) {
    // Muestras de la distribución predictiva a posteriori
    y_rep2[i] = normal_rng(mu2[i], sigma);
  }
}"

```

Pruebas predictivas *a priori*

En este apartado se llevan a cabo simulaciones bajo las distribuciones *a priori* definidas en el modelo lineal normal, sin recurrir a los datos observados. El objetivo consiste en evaluar

la coherencia y plausibilidad de las elecciones previas mediante la generación de trayectorias simuladas de la posición de la pelota en función del tiempo.

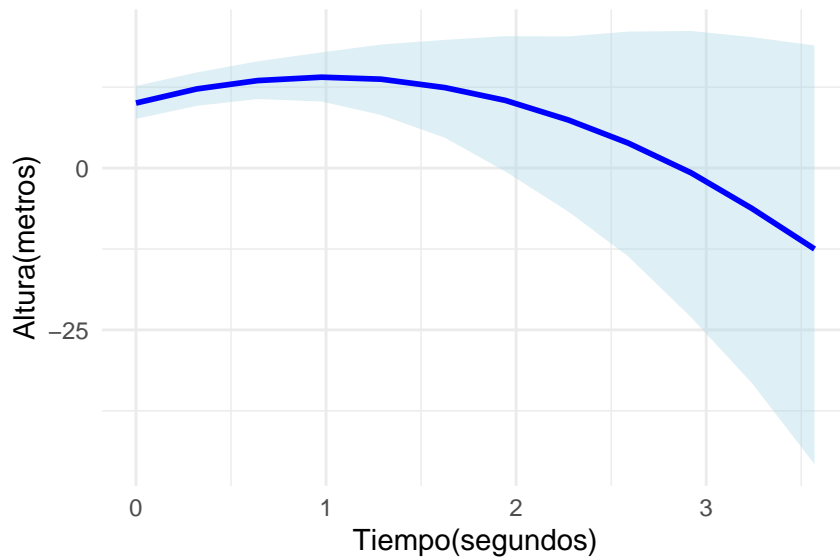


Figura 6: Altura media de la pelota *a priori* con bandas del 95% de credibilidad

En la Figura 6 se muestra una curva azul que corresponde al valor medio de la altura simulada en cada instante de tiempo, mientras que la banda sombreada indica los intervalos de incertidumbre del 95%. Se observa un comportamiento parabólico consistente con lo observado y con incertidumbre sobre la posición de la pelota a medida que aumenta el tiempo, que es razonable dado que las condiciones iniciales se modelaron con desvíos más chicos que el resto de parámetros.

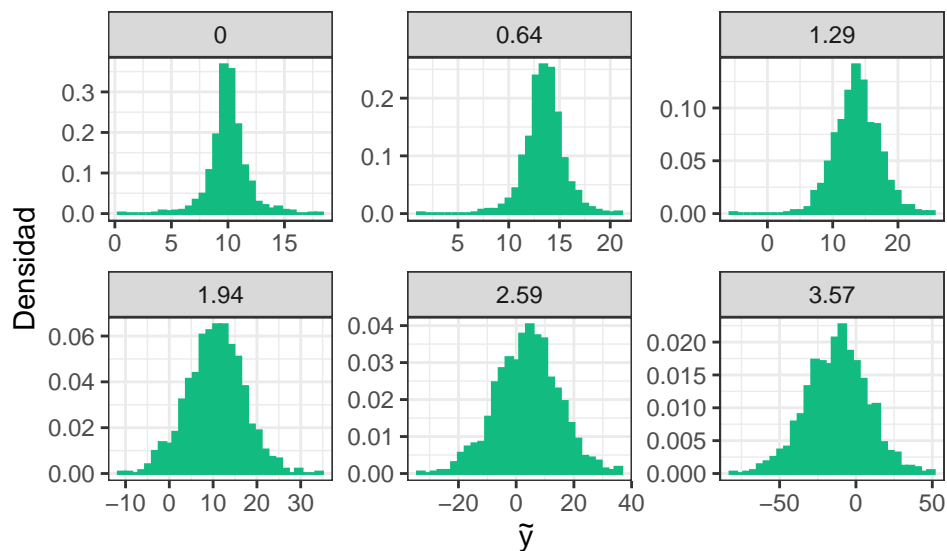


Figura 7: Distribución predictiva *a priori* en distintos valores del tiempo

Cada panel de la Figura 7 muestra el histograma de las posiciones simuladas (\tilde{y}) en seis instantes concretos. Inicialmente, las densidades se concentran alrededor de un valor próximo a la altura de lanzamiento, con distribuciones relativamente estrechas. A medida que transcurre el tiempo, los histogramas se ensanchan y se desplazan: primero hacia valores máximos

positivos (fase ascendente) y luego hacia valores negativos (fase de caída). Esta evolución ilustra cómo hay mayor dispersión en etapas avanzadas del vuelo, dado que si se observan los ejes verticales de cada gráfico se observa que la altura de las barras va disminuyendo considerablemente.

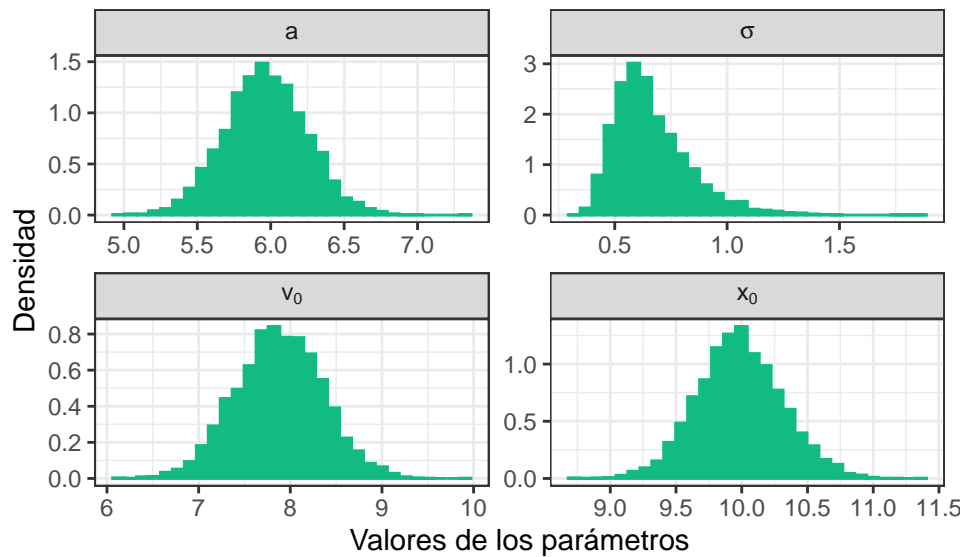


Figura 8: Distribución marginal de las constantes físicas obtenidas a partir de las muestras generadas (usando *priors* informativos)

En la Figura 8 se muestran las distribuciones *a posteriori* de los parámetros estimados por el modelo. En todos los casos, se observa que las cadenas convergen a distribuciones unimodales, con densidades concentradas.

La distribución parámetro a se encuentra centrada en torno a 6 m/s^2 . La dispersión es relativamente baja (entre 5 y 7), lo cual indica una creencia informativa pero no restrictiva.

La distribución de σ es asimétrica, con una cola hacia la derecha que admite errores de hasta aproximadamente 1.5 m . Esta forma refleja una creencia moderada en que los errores son pequeños, pero permite ocasionalmente errores mayores.

El prior para la velocidad inicial v_0 se centra alrededor de 8 m/s , con una distribución simétrica y estrecha (entre 6 y 10 m/s). Esto sugiere que se tiene una idea relativamente precisa del rango de velocidades plausibles en este tipo de lanzamiento.

La distribución de x_0 se concentra alrededor de los 10 metros, con una dispersión baja (entre 9 y 11.5 m aproximadamente). Esta variable modela la altura desde la cual se lanza la pelota, y su distribución sugiere que el modelo contempla lanzamientos con muy poca incertidumbre.

Análisis gráfico del modelo

A continuación, se presenta la curva de regresión estimada para la distribución condicional de μ_i , acompañada por los datos observados en el Planeta X y las bandas de credibilidad del 95%. Esta visualización permite evaluar la incertidumbre asociada a las predicciones realizadas por el modelo ajustado con un prior más informativo.

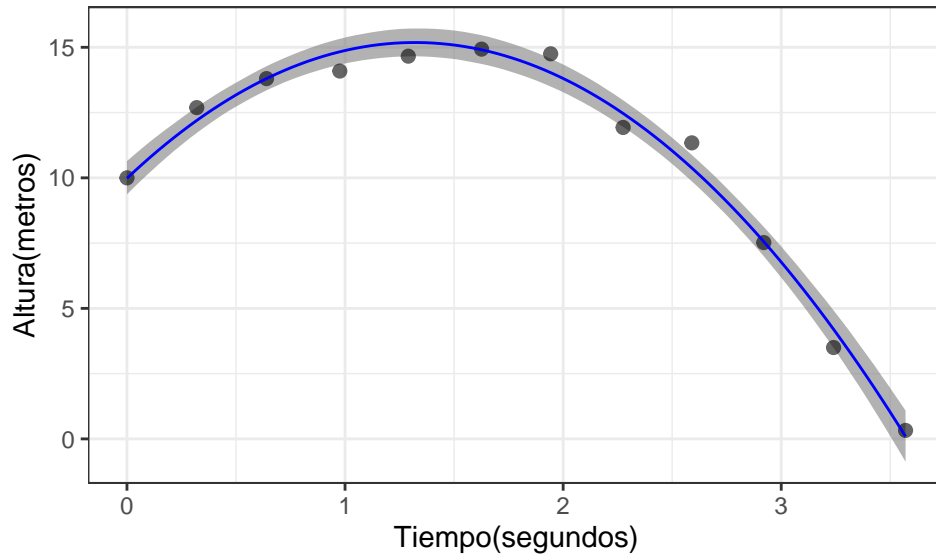


Figura 9: Altura media de la pelota *a priori* con bandas del 95% de credibilidad (usando *priors* informativos)

La curva mostrada en la Figura 9 representa la posición esperada de la pelota a lo largo del tiempo, según el modelo ajustado. Se observa que esta es decreciente, lo cual es consistente con el comportamiento físico de un objeto lanzado hacia arriba y afectado por la gravedad. Además, puede notarse que la mayoría de los puntos observados se encuentran contenidos dentro de las bandas de credibilidad del 95%, lo cual indica un buen ajuste del modelo a los datos empíricos.

Con el objetivo de evaluar el comportamiento esperado de la posición de la pelota a lo largo del tiempo en lanzamientos futuros, a continuación se presenta el gráfico correspondiente a la distribución predictiva *a posteriori* a través del tiempo.

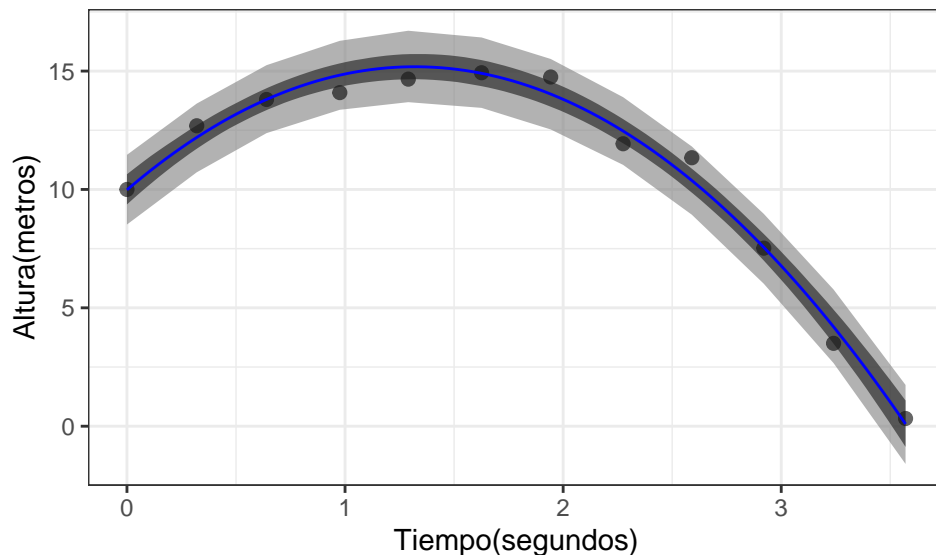


Figura 10: Altura media de la pelota *a priori* con bandas del 95% de credibilidad y de predicción (usando *priors* informativos)

La Figura 10 muestra la distribución predictiva *a posteriori* de la posición de la pelota a través del tiempo, según el modelo ajustado. En este se visualiza la media de las predicciones (en

azul), acompañada por las bandas de credibilidad del 95% para la distribución condicional de μ (en gris oscuro), y para las observaciones futuras (en gris claro).

Se observa que la mayoría de los puntos del Planeta X se encuentran dentro del intervalo de predicción del 95%, lo que indica que el modelo captura adecuadamente su variabilidad.

Además, la comparación entre la banda de credibilidad para μ y la banda de predicción deja en evidencia cómo la incertidumbre aumenta al considerar la variabilidad inherente a nuevas observaciones. En conjunto, este análisis respalda la solidez del modelo tanto en términos de ajuste como de capacidad predictiva.

Comparación de ambos modelos ajustados

Con el objetivo de analizar cómo varía la estimación del parámetro de gravedad bajo distintos supuestos previos, se comparan las distribuciones *a posteriori* obtenidas para dicho parámetro en los dos modelos.

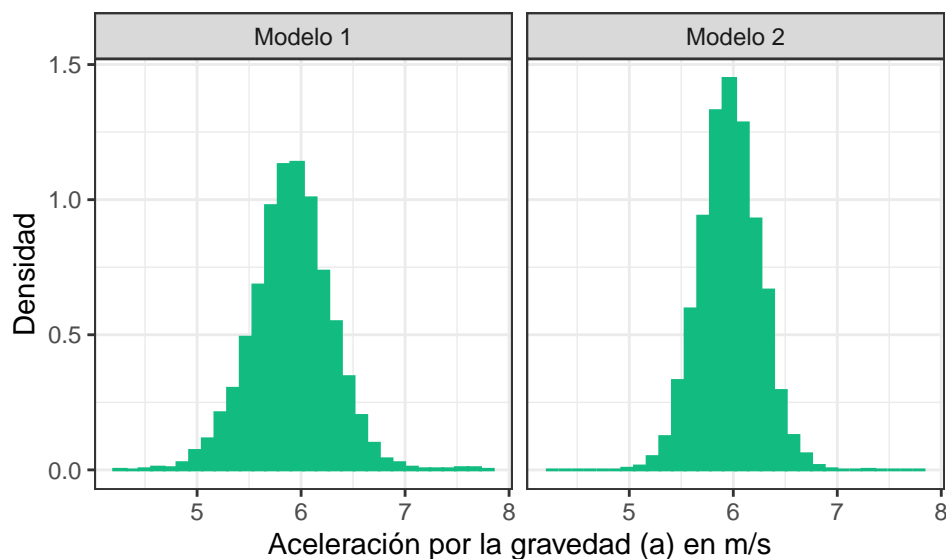


Figura 11: Distribuciones *a posteriori* de la gravedad del planeta X en ambos modelos

A partir del análisis visual provisto en la Figura 11, se observa que el Modelo 2 produce una distribución *a posteriori* más concentrada en torno al valor central, lo cual sugiere una mayor precisión en la estimación del parámetro de gravedad. En contraste, la distribución del Modelo 1 presenta una mayor dispersión, reflejando mayor incertidumbre. Esto sugiere que el prior utilizado en el modelo 2 no solo es más informativo, sino que también mejora la precisión de las estimaciones. Es decir, el uso de este prior conduce a una estimación más ajustada y confiable de la posición esperada de la pelota.

Estimación del tiempo de caída con distintas velocidades iniciales

El objetivo de esta sección es estimar, utilizando ambos modelos ajustados, el tiempo promedio que tarda en caer la pelota de tenis cuando se lanza con dos velocidades iniciales

diferentes: $6m/s$ y $12m/s$. Para ello, se plantea el problema en términos del valor esperado del modelo cuadrático:

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$

Este valor representa la posición media de la pelota en función del tiempo. Dado que queremos estimar el instante en que la pelota toca el suelo (es decir, cuando $\mu = 0$, se resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$\mu = 0 \rightarrow \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 = 0 \rightarrow t_{1,2} = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}}{2\beta_2}$$

Para incorporar las distintas velocidades iniciales en el modelo, se ajusta β_1 multiplicándola por la velocidad deseada ($6m/s$ o $12m/s$). Así, en lugar de un solo valor, se generan predicciones de μ utilizando las muestras *a posteriori* de los parámetros (β_0, β_2) y reemplazando $\beta_1 = v_0$ en la expresión, siendo v_0 la velocidad inicial correspondiente.

Se evaluó μ sobre una grilla de tiempos y se calcularon, para cada modelo y cada velocidad:

- El valor promedio de μ ,
- Los intervalos de credibilidad del 95% para μ ,
- Y el tiempo estimado en que $\mu = 0$, es decir, el tiempo de caída.

Este procedimiento fue implementado mediante simulaciones sobre muestras *a posteriori* (4000 en total), y se construyeron gráficamente las bandas de incertidumbre para cada caso. Así, se obtuvo el posterior del tiempo de caída para cada combinación de modelo y velocidad.

Finalmente, se comparan los resultados para ambas velocidades iniciales y entre los dos modelos, con el objetivo de identificar cuál proporciona estimaciones más precisas y robustas. Esto se evalúa considerando la forma y amplitud de los intervalos de credibilidad, la estabilidad del tiempo estimado, y la coherencia con el comportamiento físico esperado del sistema.

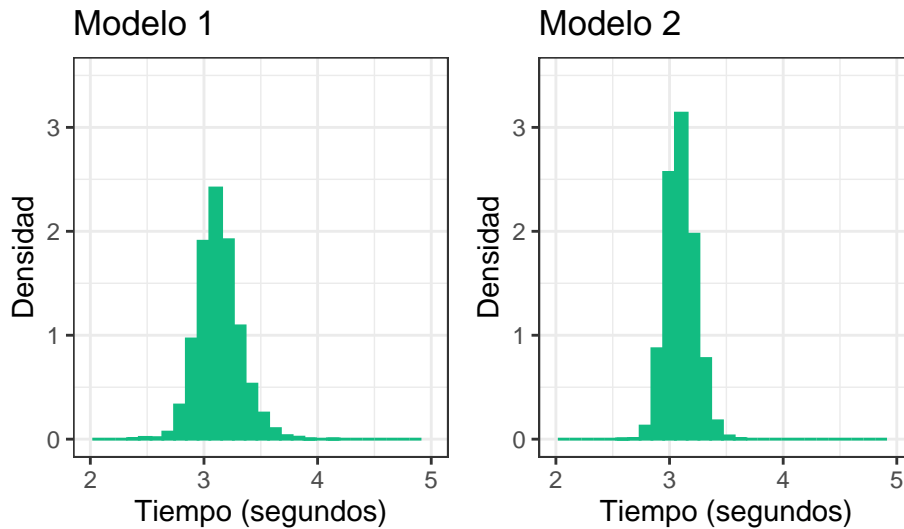


Figura 12: Distribución de la gravedad para una velocidad inicial de $6m/s$ y comparando los dos modelos

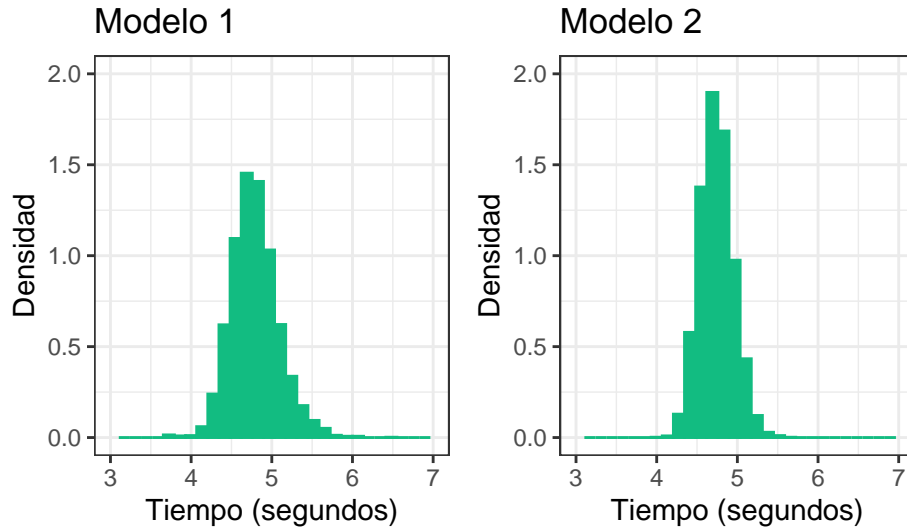


Figura 13: Distribución de la gravedad para una velocidad inicial de 12m/s y comparando los dos modelos

Al analizar las distribuciones *a posteriori* del tiempo de caída estimado para dos velocidades iniciales bajo dos modelos diferentes, tanto en la Figura 12 y en la Figura 13 se observan diferencias claras tanto en la ubicación como en la dispersión de las predicciones.

Ambos modelos representan correctamente la relación física esperada: a mayor velocidad inicial, el objeto alcanza mayor altura y, en consecuencia, el tiempo de caída también se incrementa. Esto se refleja en que las distribuciones correspondientes a la mayor velocidad presentan un mayor tiempo de caída estimado.

Sin embargo, al comparar los dos modelos, se observa que el Modelo 1 genera distribuciones más amplias, lo que indica una mayor incertidumbre en las estimaciones del tiempo de caída. Por otro lado, el Modelo 2 produce distribuciones más concentradas y con menor dispersión, lo que sugiere mayor consistencia en las predicciones.

En resumen, ambos modelos capturan adecuadamente la tendencia general esperada, pero difieren en la forma en que representan la incertidumbre asociada, debida a la creencia inicial utilizada.

Conclusión final

La selección de distribuciones *a priori* resulta fundamental en la inferencia bayesiana, pues condiciona tanto la incertidumbre sobre los parámetros como la coherencia de las predicciones. Cuando se emplean priors uniformes, la estimación depende casi exclusivamente de los datos observados, lo que suele generar distribuciones *a posteriori* amplias y de elevada incertidumbre. En cambio, la adopción de priors informados y con base física —provenientes de estudios terrestres y marcianos o de conocimiento técnico sobre la velocidad y altura de lanzamiento— restringe el espacio de parámetros a regiones plausibles y reduce notablemente la dispersión de las estimaciones.

En el caso de la gravedad del Planeta X, el modelo con priors uniformes produjo un *posterior* de mayor incertidumbre que el modelo con priors informativos, ambas concentradas alrededor

de 6 m/s^2 , con intervalos de credibilidad más estrechos y simulaciones predictivas coherentes (sin trayectorias o errores extremos). Este contraste demuestra que la definición cuidadosa de los priors mejora la confiabilidad de las estimaciones y potencia la validez de los modelos bayesianos en entornos con información limitada.