Método de la Potencia

Álgebra Lineal Computacional

6 de Mayo de 2025

Autovalores

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A si existe una solución no trivial x del sistema

$$Ax = \lambda x$$

- En este caso, x es llamado autovector asociado a λ.

Veamos un ejemplo más gráfico

Respaso: Matrices diagonales

Veamos un ejemplo de transformación diagonal con esta animación

Intuición

Siendo A la matriz de una transformación lineal:

¿Podremos hallar una base donde A se comporta como diagonal?

Spoiler: Diagonalización

En muchos casos, la presencia de autovectores-autovalores puede ser utilizada para encontrar una factorización $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Propiedades

¿Toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable? **No!**

Teorema

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable sí y solo sí A tiene n autovectores linealmente independientes (las columnas de P).

Ejemplito

Veamos una animación que nos ayude a interpretar todo esta cosa.

Más teoremas

Teorema Espectral

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal de autovectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Consecuencia: Existe P, y $P^{-1} = P^t$. Luego, $A = PDP^t$.

Obs: Vale la vuelta!

¿Qué puedo hacer si me regalan la diagonalización de una matriz?

$A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal de $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

En general

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Obs: D^k se puede computar en $O(n)$

Cálculo de autovalores y autovectores

Gugul

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/∼bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

AMS subject classifications. 15-01, 15A18, 15A51

1. Introduction. When Google went online in the late 1990's, one thing that set it apart from other search engines was that its search result listings always seemed deliver the "good stuff" up front. With other search engines you often had to wade through screen after screen of links to irrelevant web pages that just happened to match the search text. Part of the magic behind Google is its PageRank algorithm, which quantitatively rates the importance of each page on the web, allowing Google to rank the pages and thereby present to the user the more important (and typically most relevant and helpful) pages first.

Quelle surprise

$$M = (1-\alpha)C + \frac{\alpha}{N}ee^t$$

Siendo C la matriz del TP, e vector de unos
Luego, buscamos p, $||p||_1 = 1$ autovector de autovalor 1 tal que:

$$p = Mp$$

obtengo el vector de pagerank

$$p = (1-\alpha)Cp + \frac{\alpha}{N}e$$

Más motivación

Recordando tp1: Un grafo tiene asociada una matriz de conectividad.

- En el tp2 vamos a estudiar otras matrices que caracterizan a un grafo
- Algunos autovectores y autovalores nos darán información sobre la estructura del grafo

Método de la Potencia

Animación

Power Animation!

Método de la Potencia

Cuentitas

Supongamos A $\in \mathbb{R}^2$ con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ y sus autovectores asociados v_1 y v_2 que forman una base. Dado un x_0, se puede escribir como:

$$x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$Ax_0 = A(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

$$Ax_0 = \alpha A v_1 + \beta A v_2$$

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

Obs

Multiplicar por A es equivalente a estirar cada componente de w por los autovalores correspondientes

Método de la Potencia

Cuentitas

$$Ax_0 = \lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2)$$

$$A(Ax_0) = A^2x_0 = A(\lambda_1(\alpha v_1) + \lambda_2(\beta v_2))$$

$$A^2x_0 = \lambda_1\alpha(Av_1) + \lambda_2\beta(Av_2)$$

$$A^2x_0 = \lambda_1^2(\alpha v_1) + \lambda_2^2(\beta v_2)$$

$$\vdots$$

$$A^kx_0 = \lambda_1^k(\alpha v_1) + \lambda_2^k(\beta v_2)$$

Obs

Dado que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, luego de suficientes pasos la componente $v1$ irá venciendo a $v2$ obteniendo un vector cada vez más parecido a

Método de la Potencia

Cuentitas

Tenemos una sucesión:

$$x^k = A^k x_0 = \lambda_1^k(\alpha v_1) + \lambda_2^k(\beta v_2)$$

Normalizamos:

$$\frac{A^k x_0}{||A^k x_0||} = \frac{\lambda_1^k \alpha v_1 + \lambda_2^k \beta v_2}{||\lambda_1^k \alpha v_1 + \lambda_2^k \beta v_2||}$$

Factor común:

$$\frac{A^k x_0}{||A^k x_0||} = (\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|})^k \frac{(\alpha v_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k(\beta v_2)}{||(\alpha v_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k(\beta v_2)||}$$

$$\frac{A^k x_0}{||A^k x_0||} = Signo(\lambda_1)^k \frac{(\alpha v_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k(\beta v_2)}{||(\alpha v_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k(\beta v_2)||}$$

Método de la Potencia

Cuentitas

Dijimos que necesitabamos suficientes pasos...

$$\lim_{k\to\infty} Signo(\lambda_1)^k \frac{(\alpha v_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k(\beta v_2)}{||(\alpha v_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k(\beta v_2)||}$$

Observemos que

$$\lim_{k\to\infty} (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k = 0$$

pues $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

Si consideramos la sucesión de los k pares, el límite anterior tiende a $\frac{signo(\alpha)}{||v_1||} v_1$ asumiendo que $\alpha \neq 0$.

Resumen

El método converge a la dirección del autovector dominante.

Método de la Potencia

Algoritmo

Podemos considerar el Método de la Potencia para calcular λ_1 y v_1.

1. MetodoPotencia(B,x_0,niter)
2. $\quad v \leftarrow x_0$.
3. $\quad$ Para $i = 1, \ldots, niter$
4. $\quad\quad v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
5. $\quad$ Fin Para
6. $\quad \lambda \leftarrow \frac{v^t Bv}{v^t v}$
7. $\quad$ Devolver λ, v.

Pará. ¿Qué hipótesis necesitamos?

Obs: Si la multiplicidad de autovalor es mayor que uno, el método converge a un vector del autoespacio del autovalor dominante.

Método de la Potencia Inverso

- Qué relación hay entre los autovectores de A y su inversa?
  $Av = \lambda v \iff v = A^{-1}v$

- Qué relación hay entre los autovalores de A y su inversa?
  ...

Corolario: Método de la potencia inverso

Podemos obtener el autovalor más chico de A aplicando el método sobre su inversa.

Método de la Potencia Inverso (con shift)

Obs: Para tratar de mejorar la velocidad de convergencia se puede tomar la inversa de A shifteada: $(A + \mu I)^{-1}$.

Ejercicio: Demostrar que A y su inversa shifteada tienen los mismos autovectores. Encontrar la relación entre sus autovalores.

Cálculo de autovalores/autovectores

Con el método de la potencia obtenemos λ_1 y v_1, como conseguimos todos?

Deflación (de Hotelling)

Sea $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tal que:

- Sus autovalores son distintos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$
- Tiene una base ortonormal de autovectores.

Entonces, la matriz $B - \lambda_1 v_1 v_1^t$ tiene autovalores $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con autovectores asociados $v_1, \ldots, v_n$.

Ejercicio: Demostrar.