ÁLGEBRA LINEAL COMPUTACIONAL

1er Cuatrimestre 2025

Laboratorio N° 3: Transformaciones Lineales.

1 Introducción

Sean (w, z) y (x, y) dos sistemas coordenados, denominados el espacio de entrada y espacio de salida respectivamente. Una transformación geométrica de coordenadas define al mapeo desde el espacio de entrada al de salida de la forma:

$$(x,y) = T\{(w,z)\}\$$

donde $T\{\cdot\}$ se llama transformación o mapeo directo. Si $T\{\cdot\}$ posee una inversa, el mapeo inverso es aquel que traslada los puntos desde el espacio de salida al de entrada:

$$(x,y) = T^{-1}\{(w,z)\}$$

En la fig. 1 se ilustra el mapeo directo e inverso para el ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & = & T\{(w,z)\} = (w/2,z/2) \\ (w,z) & = & T^{-1}\{(x,y)\} = (2x,2y) \end{array}$$

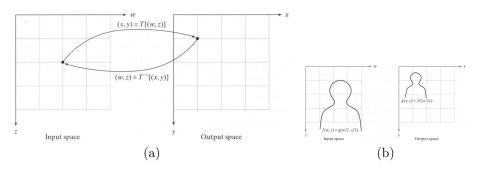


Figure 1: Transformación lineal

Las transformaciones geométricas de las imágenes se definen en términos de la transformación de coordenadas.

La fig. 1 (b) muestra el efecto de aplicar la transformación lineal definida por $(x,y)=T\{(w,z)\}=(w/2,z/2)$ que escala la figura origina encogiéndola a la mitad.

De forma matricial, la proyección (y su inversa) se puede formalizar como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1 (Reescalamiento). Si consideramos la transformación lineal

$$(x,y) = T\{(w,z)\} = (2w,3z),$$

Se pide:

- 1. Encontrar la expresión de la matriz T y T^{-1} .
- 2. Usar estas transformaciones para aplicarlas en los vectores canónicos, a un punto arbitrario y a una circunferencia. ¿Qué sucede en cada caso?

Ejercicio 2 (Deformación). En este caso se trasladan las coordenadas horizontales un factor que depende de las verticales, y las coordenadas verticales quedan sin modificación, provocando una deformación de la salida:

$$(x,y) = T\{(w,z)\} = (w + (0.4)z, z)$$

Se pide:

- (a) Encontrar la expresión de la matriz T y T^{-1} .
- (b) Desarrollar una función en Python proyectar Punto(ptos, T), donde ptos es un array de $2 \times n$ dimensiones, donde n es la cantidad de puntos a proyectar, y T tiene 2×2 dimensiones. La función devuelve la proyección de los puntos a partir de la transformación lineal definida por T. Utilizar el template de Python dado por la cátedra.

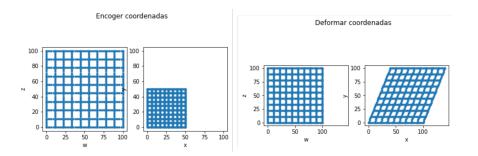


Figure 2: Salida del script de Python

Ejercicio 3. Escribir la matriz de las siguientes transformaciones lineales en base canónica. Interpretar geométricamente cada transformación.

- (a) f(x,y) = (x, -y)
- (b) $f(x,y) = (\frac{1}{2}(x-y), \frac{1}{2}(x-y))$

Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal, y compararlo con el resultado de la función proyectarPunto.

Ejercicio 4 (Rotación). Sea $R_{\theta}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota la rotación de un ángulo θ alrededor del origen, como muestra la figura 3.

$$\left(\begin{array}{c} X_{\theta} \\ Y_{\theta} \end{array}\right) = R \left(\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}\right)$$

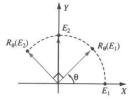


Figure 3: Transformación de rotación

Se pide:

- (a) Encontrar la expresión matemática de la matriz R, para cualquier valor de θ .
- (b) Validar R utilizando el script Python.

Ejercicio 5 (Rotación y reescalamiento). Supongamos que quiero construir la siguiente transformación. En primer lugar dado un (x, y) que lo rote 45° , luego haga un reescale de la forma T(u, v) = (2u, 3v) y vuelva a rotar en sentido contrario a la primer rotación.

- (a) Encontrar la expresión de la matriz que haga las tres transformaciones. Sugerencia: Considerar una composición de transformaciones y la matriz hallada en el ejercicio anterior.
- (b) Usar dicha transformación para una circunferencia.

2 Transformación afín

En los ejercicios precedentes se estudió el caso de matrices de transformación que encogían, dilataban o rotaban la posición de puntos iniciales, en un nuevo espacio a través del álgebra lineal.

Estas transformaciones son un caso particular de la transformación denominada afin. En general se puede formalizar las operaciones a través de:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = T \left(\begin{array}{c} w \\ z \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}\right)$$

al cual hemos agregado la posibilidad de hacer una traslación lineal de las coordenadas origen en los dos ejes utilizando los valores constantes (b_1, b_2) . A través de estas transformaciones se puede: escalar, rotar, trasladar o deformar. Como una conveniencia matemática y computacional, todas estas transformaciones pueden ser efectuadas utilizando una matriz de 3×3 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

agregarle el 1 a las coordenadas, nos permite seguir trabajando en coordenadas cartesianas (2D) con una matriz cuadrada de 3×3 .

Ejercicio 6. Se pide:

- (a) Modificar la función proyectar Pts para que sea capaz de realizar la operación de transformación afín, o sea con matrices de $3\times 3.$
- (b) Encontrar la expresión para hacer cada una de estas operaciones con las coordenadas {escalar, trasladar, rotar, deformar}, usando la matriz afín. Chequear con el script de Python.