# Teoría de Información y la Comunicación
# Clase 3

# Temas de la Unidad:

- Extensión de una fuente de memoria nula
- Fuentes con memoria: Fuentes de Markov

Consideremos una fuente de memoria nula S: {$s_1$, $s_2$, …, $s_q$}, con una distribución de probabilidades P: {$p_1$, $p_2$, …, $p_q$}. Se llama extensión de orden n de S o $S^n$, a una fuente de memoria nula con un alfabeto de $q^n$ símbolos: {$\sigma_1$,$\sigma_2$ ,...,$\sigma_{qn}$}. Donde el símbolo $\sigma_i$ se corresponde con una secuencia determinada de n símbolos de la fuente S.

Supongamos una fuente S: {$s_1$, $s_2$} con probabilidad P: {0.4, 0.6}, una fuente $S^3$ sería:

| | | |
|---|---|---|
| s1 | s1s1 | s1s1s1 |
| s1 | s1s1 | s1s1s2 |
| s1 | s1s2 | s1s2s1 |
| s1 | s1s2 | s1s2s2 |
| s2 | s2s1 | s2s1s1 |
| s2 | s2s1 | s2s1s2 |
| s2 | s2s2 | s2s2s1 |
| s2 | s2s2 | s2s2s2 |

***Los símbolos de $S^n$ resultan de obtener todas las combinaciones de los q símbolos de S tomados de a n.***

# Unidad II: La información y sus fuentes

La probabilidad de $\sigma_i$, $P(\sigma_i)$, es la probabilidad de la secuencia de símbolos $\{s_{i1}, s_{i2}, .., s_{in}\}$ entonces la $P(\sigma_i) = P_{i1} P_{i2} ... P_{in}$, ya que la aparición de cada símbolo es estadísticamente Independiente. Si volvemos al ejemplo precedente:

| | | |
|---|---|---|
| s1s1s1 | 0.4*0.4*0.4 | 0,064 |
| s1s1s2 | 0.4*0.4*0.6 | 0,096 |
| s1s2s1 | 0.4*0.6*0.4 | 0,096 |
| s1s2s2 | 0.4*0.6*0.6 | 0,144 |
| s2s1s1 | 0.6*0.4*0.4 | 0,096 |
| s2s1s2 | 0.6*0.4*0.6 | 0,144 |
| s2s2s1 | 0.6*0.6*0.4 | 0,144 |
| s2s2s2 | 0.6*0.6*0.6 | 0,216 |

3×0,096+3×0,144+0,064+0,216= 1

$$H(S^n) = \sum_{1}^{n} P(\sigma_i) * P\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)$$

$$H(S^n) = n * H(S)$$

Viendo nuestro ejemplo anterior:

$$H(S) = 0.4 * \log_2(1/0.4) + 0.6 * \log_2(1/0.6) = 0.971$$

Y la $H(S^3)$ será : $0.064 * \log_2(1/0.064) + 3 * 0.096 * \log_2(1/0.096) + 3 * 0.144 * \log_2(1/0.144) + 0.216 * \log_2(1/0.216) = 2{,}912 = 3 * 0.971$

**Recordemos que una fuente se puede clasificar por:**

**Rango de valores:**

Continúa: ***Rango continuo de valores.***

Discreta: ***Rango finito de valores.***

**Relación entre sus símbolos:**

Sin Memoria: ***el símbolo*** $s_i$ ***es estadísticamente independiente de los símbolos anteriores.***

Con Memoria de orden k: ***el símbolo*** $s_i$ ***es estadísticamente dependiente de los k símbolos anteriores.***

# Unidad II: La información y sus fuentes

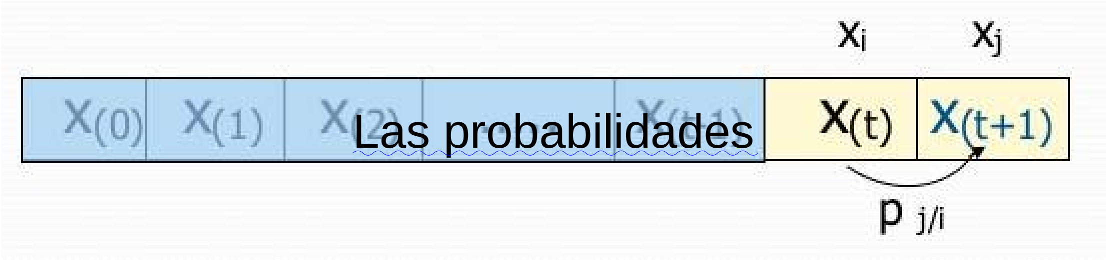
Un tipo de fuente con memoria se caracteriza porque teniendo un alfabeto de q símbolos S: $\{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$ la probabilidad que se emita el símbolo $s_i$ dependerá de los m símbolos anteriores. La fuente en cuestión se denominará una "**fuente de memoria no nula de orden m**"

Las fuentes de Markov, son fuentes de memoria no nula.

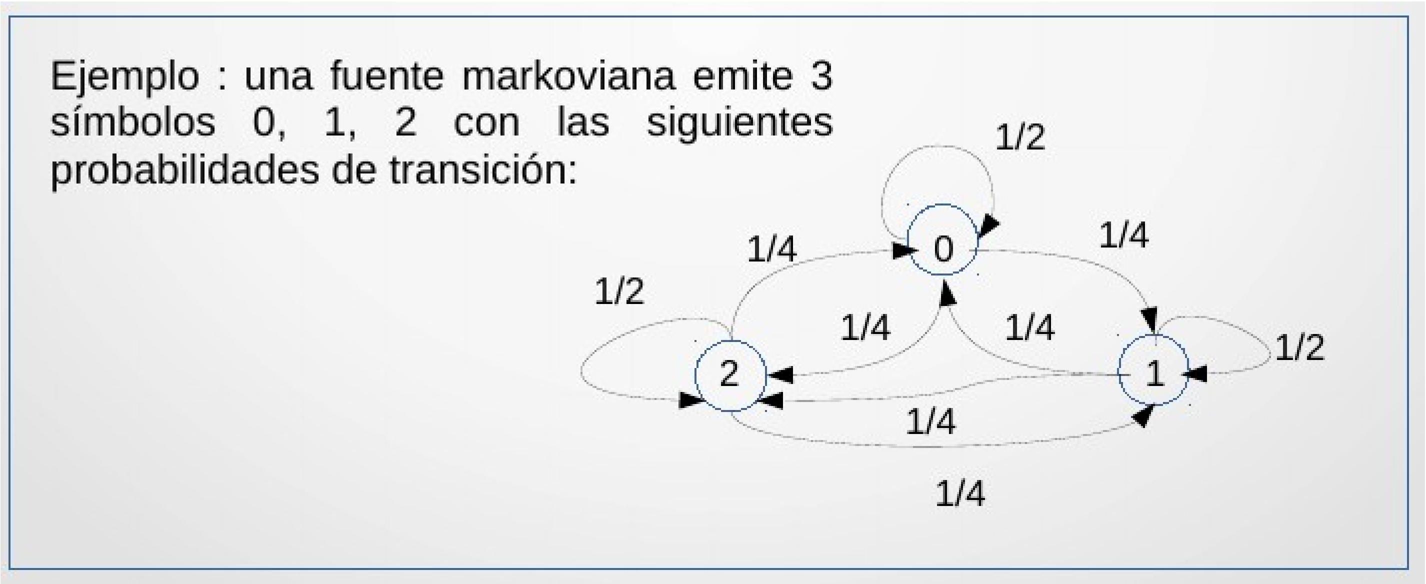
Una Fuente de Markov vendrá definida por un alfabeto $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$, el conjunto de probabilidades condicionales: $P(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \ldots s_{jm})$ para i=1, 2,. .. q , jp=1,2,. .. q. Donde $s_i$ será el símbolo a generar y $s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm}$ es la secuencia de los últimos m símbolos generados, siendo $s_{jm}$ el último de ellos, es decir, que $s_i$ iría detrás de $s_{jm}$.

# Unidad II: La información y sus fuentes

La probabilidad de emitir un símbolo depende solo del símbolo emitido en el instante anterior




Podemos graficar la fuente mediante un **diagrama de estados** donde los estados son círculos y las transiciones entre estados son arcos. Las probabilidades se colocan como etiquetas en los arcos.



También se puede representar mediante una matriz de transición

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & & s_i & \dots \end{array} \\
M_{j/i} = & \begin{pmatrix}
P_{1/1} & P_{1/2} & \cdots & P_{1/i} & \cdots \\
P_{2/1} & P_{2/2} & \cdots & P_{2/i} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
P_{j/1} & P_{j/2} & \cdots & P_{j/i} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ . \\ s_j \\ . \end{array}
\end{array}
$$

una matriz

Donde se cumple que:

$$\boxed{\sum_j \left(P\left(S(t+1)=s_j / S(t)=s_i\right)\right)=\sum_j P_{j/i}=1}$$

Por ejemplo:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
M = & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}
\end{array}
$$

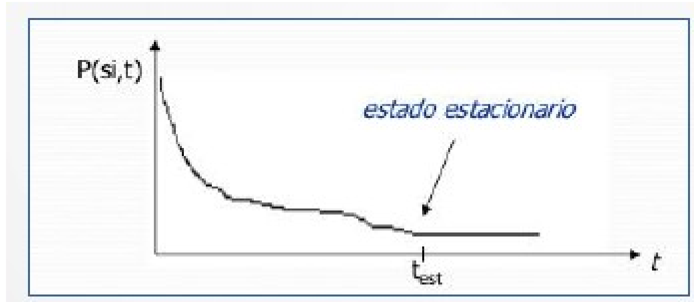
- Es aquella que, observada durante un tiempo suficientemente largo, emite (con probabilidad 1) una secuencia “típica de símbolos”.

- Si una secuencia es lo suficientemente grande, contendrá casi con toda certeza, números de símbolos y combinaciones de símbolos que son independientes de la secuencia particular.

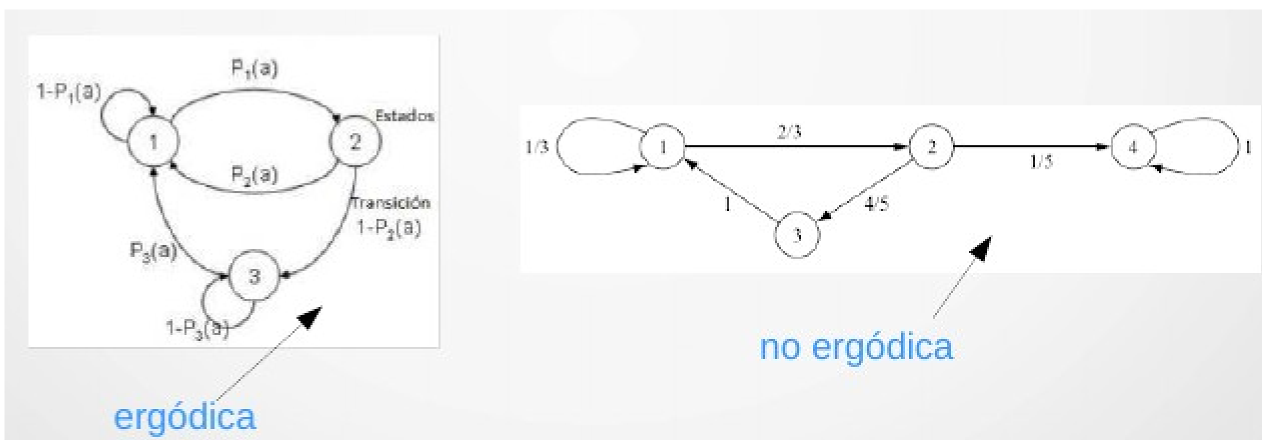
- Esta distribución única recibe el nombre de distribución estacionaria del proceso ergódico de Markov y puede calcularse directamente a partir de las probabilidades condicionales de los símbolos.

# Unidad II: La información y sus fuentes

La distribución de probabilidades en cada t (vectores de estado) va variando con la evolución del proceso de emisión de símbolos, hasta estabilizarse o estacionarse estado estacionario V*




Condiciones de existencia de V*:
– conjunto finito de estados
– fuente ergódica (todos los estados del proceso son alcanzables desde otro estado - no hay estados o clases absorbentes)



Como el estado estacionario es independiente de las condiciones iniciales, puede obtenerse a partir de las probabilidades condicionales:

V* = M . V* , luego

(M – I) V* = 0

además, ∑ v i * = 1

Si una fuente $S=\{s_1 ,s_2 ,..., s_q \}$ se modeliza como una fuente markoviana (de orden 1) mediante su matriz M de transición con probabilidades condicionales {pj/i} y posee probabilidades estacionarias $V^*=\{p_1 ^*,p_2 ^*,..., p_q^*\}$. La entropía de la fuente markoviana S es:

$$\boxed{H_1 = \sum_i p_i * \sum_j p_{j/i} \log \frac{1}{p_{j/i}}}$$

Si $s_{j1}$ ,$s_{j2}$ ,...,$s_{jm}$ es el estado y si el símbolo recibido, la cantidad de información obtenida es:

$$I(s_i / s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm}) = \log \frac{1}{P(s_i / s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm})}$$

La cantidad media de información proporcionada por símbolo es:

$$H(S / s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm}) = \sum_{i=1}^{q} P(s_i / s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm}) \log \frac{1}{P(s_i / s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm})}$$

La cantidad media de información por símbolo, de una fuente de Markov de orden m es:

$$H(S) = \sum_{S^m} P(s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm}) H(S / s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm})$$

Es decir:

$$H(S) = \sum_{S^{m+1}} P(s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm}, s_i) \log \frac{1}{P(s_i / s_{j1}, s_{j2}, \ldots. s_{jm})}$$

Problema:

La trayectoria de un coche se puede modelar como la de una pieza que se mueve a través de una retícula cuadriculada con pasos elementales, en direcciones verticales u horizontales, dando un único paso cada vez. Así, se puede representar su movimiento como una sucesión de símbolos del conjunto N, S, E, y W, que representan los sucesivos pasos en las direcciones norte, sur, este y oeste, respectivamente.

El comportamiento de este coche tiene memoria: el 50 % de las ocasiones repite el movimiento anterior y, en el resto de los casos, da un giro de 90 ◦ a la derecha (con probabilidad 30 %) o a la izquierda (con probabilidad del 20 %) respecto del paso anterior.

Se pide:

a) Modelar el proceso que describe el movimiento.
b) Calcular la probabilidad de cada uno de los símbolos.
d) Determinar la entropía.