

Evaluación interna de matemáticas

Tecnológico de Monterrey Campus Santa Fe

Francisco Huelsz Prince

002400-0028

Propiedades matemáticas de las curvas epicicloides.

Número de palabras: 1520

Contenidos

Introducción.....	3
Objetivo	4
Capítulo 1: Ecuaciones paramétricas de la epicloide	5
Ejemplo:.....	8
Capítulo 2: Cierre de la curva.....	9
Capítulo 3: Primer punto crítico	10
Capítulo 4: Longitud de arco	11
Capítulo 5: Comparación con resultados experimentales	16
Conclusión.....	18
Bibliografía	19
Anexo 1: Programa	20

Introducción

Es espirógrafo es una herramienta mecánica que se utiliza para el dibujo de curvas epitrocoides e hipotrocoide. Se basa en el principio de rotar una figura sobre otra, estas son generalmente círculos. Surge a finales del siglo 19 como una técnica para crear dibujos de gran estética.

El espirógrafo se ve popularmente como una herramienta de dibujo, incluso a mí me gusta mucho en ese ámbito, por la estética de las curvas que se producen. Esto influyó a que escogiera este tema para esta exploración, además de que aparece como un símbolo importante en un libro que estoy leyendo¹.

Su uso consiste, en su forma más simple, en rotar un engrane circular con un orificio para poner un lápiz y trazar una línea sobre el perímetro de otro engrane fijo. Se pueden combinar diferentes figuras y radios con lo que se puede crear una gran variedad de curvas:

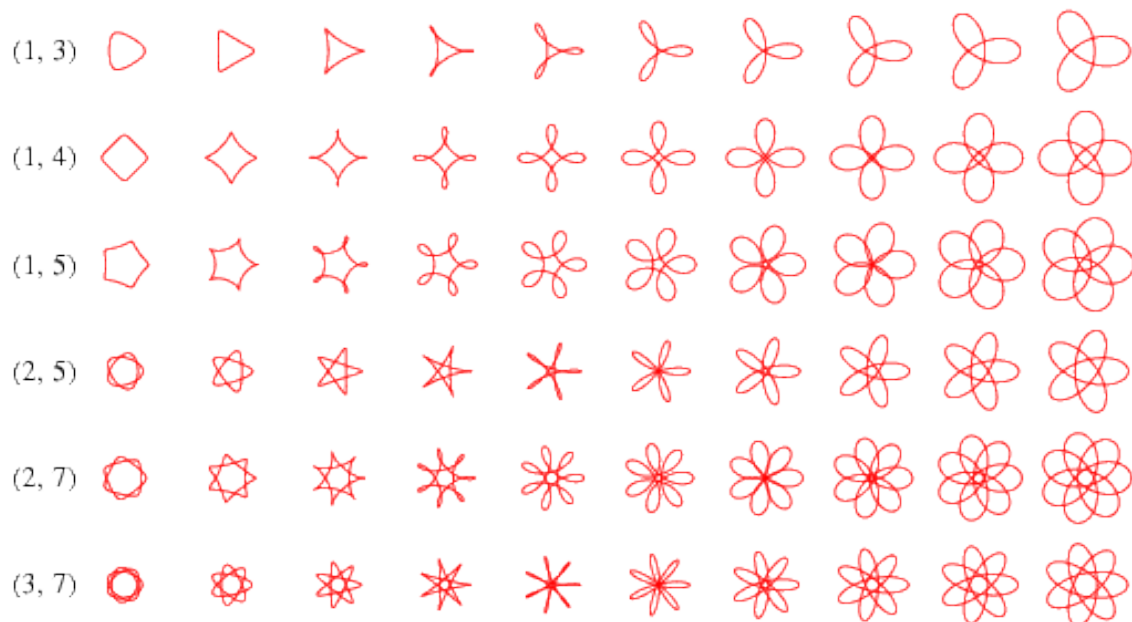


Fig. 1 Diferentes curvas que se pueden dibujar con espirógrafos. Imagen digital. mathworld.wolfram.com. Wolfram Reseach, s.f. Web. 28 nov. 2014.

¹ Homestuck. No es propiamente un libro, sería más correcto el termino publicación en línea.



Fig. 2 El espirógrafo todavía se consigue como un juguete. Spirograph Deluxe Design Set. Imagen digital. Amazon.com. Amazon.com, Inc., s.f. Web. 29 Nov. 2014.

Pese a que se ha visto como un juguete, el espirógrafo esconde un lado analizable matemáticamente muy profundo.

Objetivo

El objetivo central de esta exploración es encontrar una expresión matemática que indique la longitud de la curva o trazo de una epicicloide hasta su punto de cierre, si es que esta cierra. Luego comparar los resultados de esta expresión con datos obtenidos de forma experimental con un programa para simular el dibujo de epicicloides.

Capítulo 1: Ecuaciones paramétricas de la epicloide

Los espirógrafos pueden hacer dos tipos de curvas muy diferentes: epitrocoides e hipotrocoides.

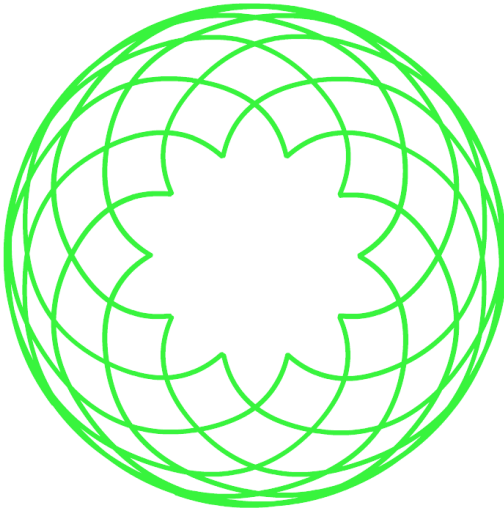


Fig. 3 Epitrocoide. Este espirógrafo es del libro que me inspiró a hacer esta investigación.

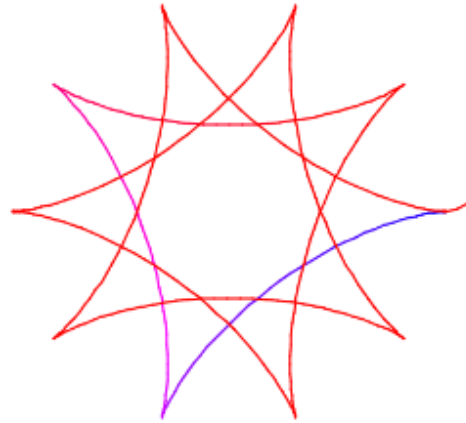


Fig. 4 Hipotrocoide

La diferencia radica principalmente en el arreglo que se use para dibujarlos:

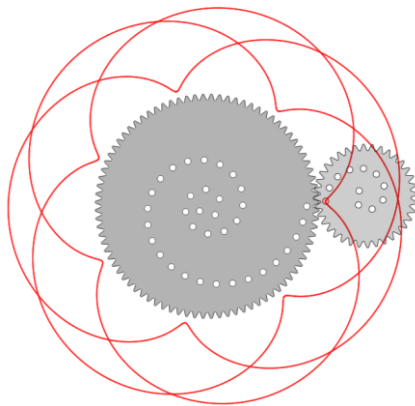


Fig. 5 Arreglo de engranes para dibujar epitrocoides

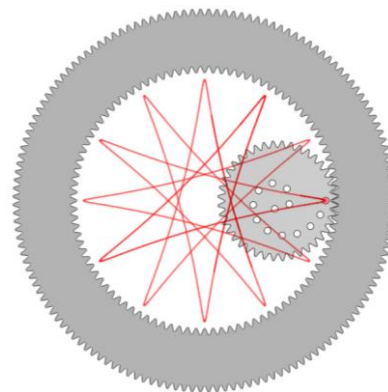


Fig. 6 Arreglo de engranes para dibujar hipotrocoides

(Friend)

Esta exploración se basa en un caso especial de la epitrocoide: la epicloide. La característica principal de esta es que el punto de dibujo se encuentra exactamente en el perímetro del círculo móvil, como se describe en la siguiente figura:

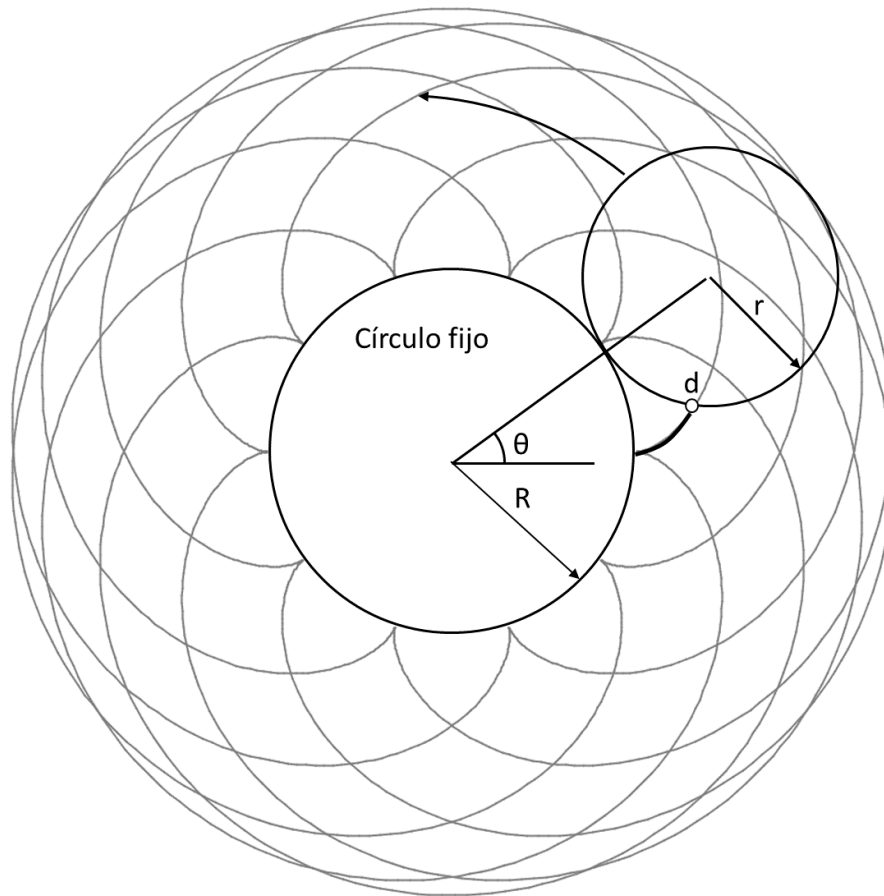


Fig. 7 Figura base para el dibujo de la epicicloide

Dónde:

R es el radio del círculo fijo (círculo A)

r es el radio del círculo móvil (círculo B)

d es el punto de dibujo

θ es el ángulo formado entre la recta horizontal y la recta que une los centros de los círculos.

La técnica más sencilla para modelar matemáticamente una epicicloide es construir una representación análoga de lo que hace el espirógrafo, que es rotar un círculo B sobre la circunferencia de un círculo A que se encuentra en un punto fijo. Al hacer esto se está trasladando el círculo B , y en consecuencia se está rotando, provocando así que el punto de dibujo d comience a describir la trayectoria del espirógrafo.

El objetivo de esta exploración es encontrar la distancia recorrida por el punto d hasta regresar a su punto de origen, que es la longitud del trazo de la epicicloide

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = (R + r) \cos(\theta) - r \cos \left[\theta \cdot \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \right] \quad (1)$$

$$y = (R + r) \sin(\theta) - r \sin \left[\theta \cdot \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \right] \quad (2)$$

(Weisstein)

Brevemente, estas se basan en obtener la posición del centro del círculo B y sumar a esta la posición relativa del punto d .

Utilizando estas fórmulas realicé un programa, en un lenguaje llamado *Processing*, que simula el proceso de dibujar epicicloides, y puede producir una imagen del resultado. Esto funciona tabulando el valor de x y y según aumenta θ , y luego unir las coordenadas con líneas. Esto significa que se puede obtener la distancia entre los puntos para obtener un aproximado de la longitud del trazo hasta el cierre. Se define:

$$x = f(\theta) \quad (3)$$

$$y = g(\theta) \quad (4)$$

Entonces:

$$L \sim \sum_{\theta=\Delta\theta}^{\theta_f} \sqrt{(f(\theta) - f(\theta - \Delta\theta))^2 + (g(\theta) - g(\theta - \Delta\theta))^2} \quad (5)$$

En incrementos de $\Delta\theta$, donde $\Delta\theta$ es una constante definida en la configuración del programa. Se busca que $\Delta\theta$ sea un valor cercano a cero. Se utiliza como:

$$\Delta\theta = \frac{1}{50} = 0.02 \quad (6)$$

El programa es de gran utilidad porque permite variar los valores de R y r , además de Δk , con lo que se puede aproximar de manera experimental a la longitud de arco de virtualmente cualquier epicloide.

Ejemplo:

$$R = 200$$

$$r = 140$$

Entonces:

$$x = 340 \cos(\theta) - 140 \cos\left[\theta \cdot \left(\frac{17}{7}\right)\right] \quad (7)$$

$$y = 340 \sin(\theta) - 140 \sin\left[\theta \cdot \left(\frac{17}{7}\right)\right] \quad (8)$$

Que producen el siguiente dibujo:

R: 200.0
r: 140.0
 θ_f : 43.9
Trazo: 19036.379
Vueltas: 7.0

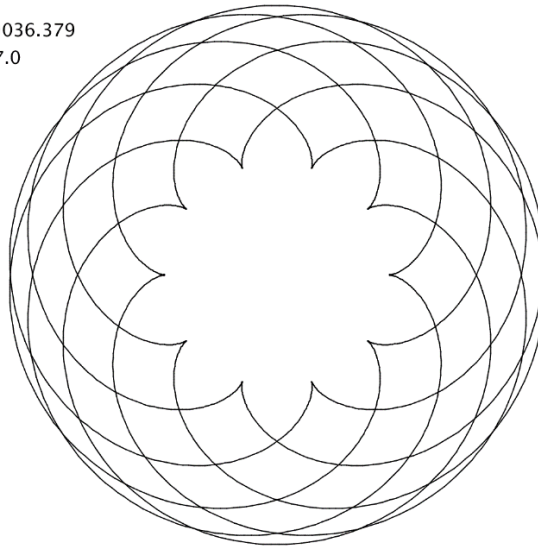


Fig. 8 Epicloide dibujada con estas fórmulas para $R = 200$ y $r = 140$. Busca imitar a la Fig. 3

Este es un ejemplo de los dibujos que se pueden producir con el programa, el cual además calcula θ_f , que es el valor de θ donde se cierra el trazo. También da un estimado de la longitud de arco para esta epicloide.

Capítulo 2: Cierre de la curva

Determinar cuando ocurre el cierre de una epicicloide es relativamente fácil, siempre y cuando ambos radios sean números racionales o tengan un factor común. Después de observar el comportamiento de estas razones que podría estar relacionado con el mínimo común múltiplo de ambos radios. Pude comprobar esta hipótesis con el programa y concluir que:

$$V_B = \frac{\text{mcm}(R, r)}{R} \quad (9)$$

Y:

$$V_d = \frac{\text{mcm}(R, r)}{r} \quad (10)$$

Donde V_B es el número de vueltas totales que da el círculo B trasladándose alrededor del círculo A . V_d es el número de vueltas totales que da el punto d trasladado alrededor del centro del círculo B , que es el número de vueltas que da este círculo sobre su centro. Y mcm representa a la función mínimo común múltiplo. El valor obtenido de V_d será utilizado posteriormente.

El uso de la función mínimo común múltiplo descubre una de las características fundamentales para el cierre de una epicicloide: tiene que existir un mínimo común múltiplo. De no existir uno el trazo de la epicicloide continuaría indefinidamente, si se lo toma como un caso teórico, o hasta que la diferencia entre los trazos sea despreciable, si se traza físicamente.

Otra implicación de usar el mínimo común múltiplo es que la función es discontinua, por lo que por ejemplo resolver para R o r se complica, sin embargo, revela que existen varias respuestas, indicando que existen varias configuraciones que producen la misma cantidad de puntos críticos.

También se puede apreciar de esto que la epicicloide se cerrará cuando $\theta = \theta_f$, que se define así:

$$\theta_f = 2\pi V_B \quad (11)$$

Capítulo 3: Primer punto crítico

Encontrar el valor de θ en el cual se da el primer punto crítico, que son los puntos cuya la distancia hasta el centro del círculo A es R , es vital para dar el límite superior de integración. Esto es para cumplir con una restricción de la fórmula de longitud de arco que se discutirá más adelante. A este valor se le llamará θ_1 .

La forma de obtener este valor es sencilla y se basa en la fórmula:

$$\frac{s}{r} = \theta \quad (12)$$

Al estar rotando un círculo sobre otro, el arco es en realidad la circunferencia del círculo B , que es igual a $2\pi r$, entonces:

$$\theta_1 = \frac{2\pi r}{R} \quad (13)$$

Capítulo 4: Longitud de arco

La longitud de arco de una función se refiere a la longitud de una función, que es exactamente lo que se quiere encontrar en este caso. El principio básico para obtenerlo es calcular la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Esta se puede obtener con el teorema de Pitágoras:

$$L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (14)$$

Donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$.

x y la y provienen de funciones distintas. Por esto, se definirá:

$$x = f(x) \quad (15)$$

$$y = g(x) \quad (16)$$

Además sea $a \leq t \leq b$.

Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. Los puntos correspondientes tienen coordenadas $(f(t_i), g(t_i))$ entonces dos puntos consecutivos están separados por la distancia:

$$L_i = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} \quad (17)$$

Luego se aplica el teorema de valor medio que indica:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)\Delta t \quad (18)$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(t_i^*)\Delta t \quad (19)$$

para una t_i^* dentro de $[t_{i-1}, t_i]$. Por lo tanto:

$$L_i = \sqrt{[f'(t_i^*)\Delta t]^2 + [g'(t_i^*)\Delta t]^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^*)]^2}\Delta t \quad (20)$$

Por consecuencia, la longitud total del arco será:

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^*)]^2} \Delta t \quad (21)$$

Que converge en la siguiente integral cuando $n \rightarrow \infty$:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \quad (22)$$

Que por simplicidad puede expresarse así:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (23)$$

Conociendo esto, es necesario aplicar esta fórmula a las ecuaciones paramétricas (1) y (2), que es:

$$L = V_d \int_0^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (24)$$

Es importante notar aquí que se está estableciendo el límite de integración como θ_1 (13) en lugar de θ_f (11) por la limitante que presenta esta fórmula: ambas derivadas no pueden ser cero simultáneamente. (Larson 722) Para evitar esto, se encuentra la longitud del arco hasta el primer mínimo, que cumple con esta limitante, y luego se multiplica por el número de mínimos, que es V_d (10).

Para comenzar es necesario encontrar la derivada de cada una:

$$\frac{dx}{d\theta} = -(R + r) \sin(\theta) + r \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \sin \left[\theta \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \right] \quad (25)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = (R + r) \left[\sin \left[\theta \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \right] - \sin \theta \right] \quad (26)$$

Ahora para la ecuación de y:

$$\frac{dy}{d\theta} = (R + r) \cos(\theta) - r \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \cos \left[\theta \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \right] \quad (27)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = (R + r) \left[\cos \theta - \cos \left[\theta \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \right] \right] \quad (28)$$

Posteriormente se encuentra el cuadrado de estas:

Para simplificar los resultados, se definirá la constante $a = R + r$.

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 = a^2 \left[\sin^2 \left(\theta \frac{a}{r} \right) - 2 \sin \theta \sin \left(\theta \frac{a}{r} \right) + \sin^2 \theta \right] \quad (29)$$

$$\left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = a^2 \left[\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \left(\theta \frac{a}{r} \right) + \cos^2 \left(\theta \frac{a}{r} \right) \right] \quad (30)$$

$$\text{Por tanto } \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 =$$

$$a^2 \left[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \left(\theta \frac{a}{r} \right) + \cos^2 \left(\theta \frac{a}{r} \right) - 2 \sin \theta \sin \left(\theta \frac{a}{r} \right) - 2 \cos \theta \cos \left(\theta \frac{a}{r} \right) \right] \quad (31)$$

Aplicando la identidad:

$$1 \equiv \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \quad (32)$$

Se determina que:

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = a^2 \left[2 - 2 \left(\sin \theta \sin \left(\theta \frac{a}{r} \right) + \cos \theta \cos \left(\theta \frac{a}{r} \right) \right) \right] \quad (33)$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = 2a^2 \left[1 - \left(\sin \theta \sin \left(\theta \frac{a}{r} \right) + \cos \theta \cos \left(\theta \frac{a}{r} \right) \right) \right] \quad (34)$$

Ahora se aplica la identidad:

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (35)$$

Entonces:

$$\sin \theta \sin \left(\theta \frac{a}{r} \right) + \cos \theta \cos \left(\theta \frac{a}{r} \right) = \cos \left(\theta \frac{a}{r} - \theta \right) \quad (36)$$

$$= \cos\left(\theta\left(\frac{a}{r} - 1\right)\right) \quad (37)$$

Por lo que:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2a^2 \left[1 - \cos\left(\theta\left(\frac{a}{r} - 1\right)\right)\right] \quad (38)$$

Se puede aplicar la identidad:

$$\cos(\alpha) \equiv 1 - 2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \quad (39)$$

Con lo que se determina:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 4a^2 \sin^2\left(\theta\left(\frac{a}{2r} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (40)$$

Ahora procede sacar la raíz cuadrada:

$$\sqrt{4a^2 \sin^2\left(\theta\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2r}\right)\right)} = 2a \sin\left(\theta\left(\frac{a}{2r} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (41)$$

Entonces, de acuerdo a (24), L es:

$$L = V_d 2a \int_0^{\theta_1} \sin\left(\theta\left(\frac{a}{2r} - \frac{1}{2}\right)\right) d\theta \quad (42)$$

$$L = V_d 2a \int_0^{\theta_1} \sin\left(\theta \frac{R}{2r}\right) d\theta \quad (43)$$

$$L = -\frac{4V_d r a}{R} \cos\left(\theta \frac{R}{2r}\right) \Big|_0^{\theta_1} \quad (44)$$

$$L = -\frac{4V_d r a}{R} \left[\cos\left(\theta_1 \frac{R}{2r}\right) - 1 \right] \quad (45)$$

$$L = -\frac{4V_d r(R+r)}{R} \left[\cos\left(\theta_1 \frac{R}{2r}\right) - 1 \right] \quad (46)$$

Ya conociendo (46) es posible obtener la longitud de arco para cualquier epicicloide. Recapitulando V_d (10) y θ_1 (13) :

$$V_d = \frac{\text{mcm}(R, r)}{r}$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi r}{R}$$

Entonces:

$$L = -\frac{4 \text{mcm}(R, r) (R+r)}{R} [\cos(\pi) - 1] \quad (47)$$

$$L = -\frac{4 \text{mcm}(R, r) (R+r)}{R} (-2) \quad (48)$$

$$L = \frac{8 \text{mcm}(R, r) (R+r)}{R} \quad (49)$$

Capítulo 5: Comparación con resultados experimentales

Integré la fórmula (49) al programa para encontrar L , y compararlo con el trazo estimado obtenido directamente del programa, primero utilicé las medidas de un ejemplo anterior $R = 200$ y $r = 140$:

R: 200.0

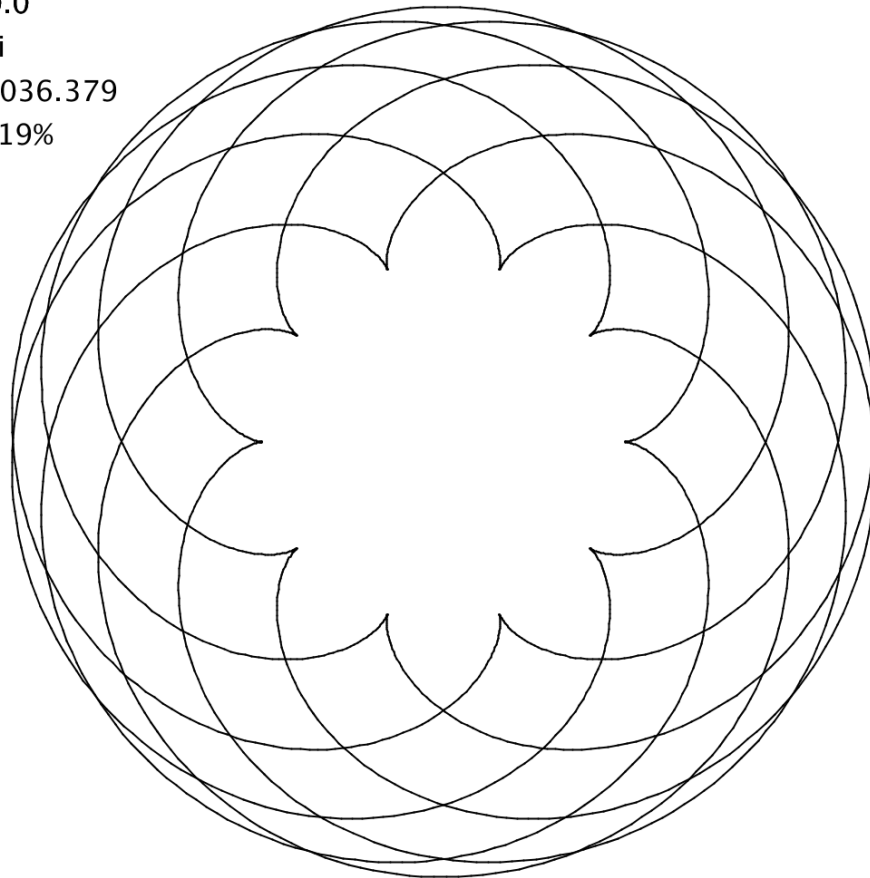
r: 140.0

L= 19040.0

$\theta_f: 7.0 * 2\pi$

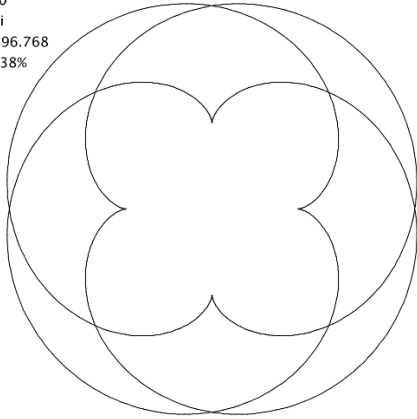
Trazo: 19036.379

Error: 0.019%

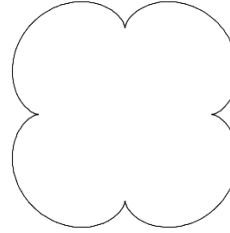


A continuación se presentan otros ejemplos:

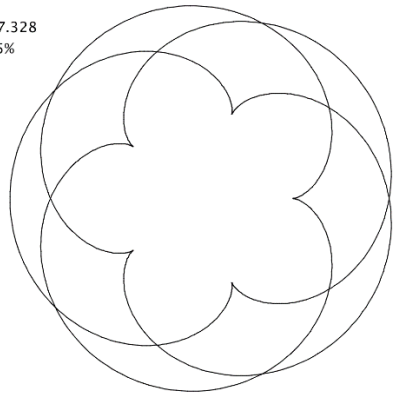
R: 200.0
r: 150.0
L= 8400.0
 $\theta_f: 3.0 \cdot 2\pi$
Trazo: 8396.768
Error: 0.038%



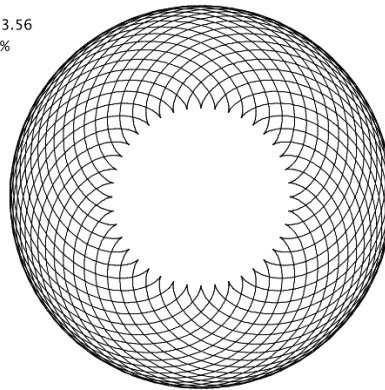
R: 200.0
r: 50.0
L= 2000.0
 $\theta_f: 1.0 \cdot 2\pi$
Trazo: 1996.103
Error: 0.195%



R: 200.0
r: 120.0
L= 7680.0
 $\theta_f: 3.0 \cdot 2\pi$
Trazo: 7677.328
Error: 0.035%



R: 200.0
r: 115.0
L= 57960.0
 $\theta_f: 23.0 \cdot 2\pi$
Trazo: 57953.56
Error: 0.011%



Con esto queda demostrado que la fórmula funciona, y es el resultado que daría la ecuación (5) cuando $\Delta\theta \rightarrow 0$.

Conclusión

Personalmente estoy bastante sorprendido por la “limpieza” y simplicidad del resultado. Siendo que el problema original consistía en rotar círculos sobre círculos, y habiendo llegado a algunas expresiones muy grandes y complejas, como (31), me sorprendió bastante que la expresión final, (49), no contenga ninguna función trigonométrica ni la constante π . También me desilusionó un poco que al tener que usar la función de mínimo común múltiplo la función no es continua, aunque era algo que esperaba que sucediera por la naturaleza de las condiciones para el cierre de una epicicloide.

Otro aspecto que considero pertinente mencionar es la importancia de las identidades trigonométricas. Este trabajo me hizo reflexionar bastante sobre su impacto en aplicaciones como esta. Sin ellas llegar a la expresión obtenida habría sido imposible.

Regresando al objetivo central de la exploración, puedo decir que este fue logrado. No solo se llegó a una expresión utilizando un método puramente matemático que además produjo una respuesta elegante y simple, sino que también se comprobó la veracidad de ésta utilizando un método experimental.

Aunque esta investigación probablemente no tenga ninguna aplicación directa, solo podría pensar que es de utilidad si se quisiese dibujar una epicicloide con hilo, personalmente fue un proceso muy intenso que requirió bastante investigación sobre los métodos y sus limitaciones para encontrar la longitud de arco, que es el caso de (24), donde tuve que hacer varias correcciones para considerar la limitación de que las derivadas de las paramétricas no pueden ser cero simultáneamente, después de hacer una extensa investigación en el tema tras ver que los resultados no eran congruentes con los experimentales.

Finalmente, quisiera agregar, que esta investigación está muy limitada, en sentido de que sus resultados están limitados únicamente a epicicloides, es decir, no funcionan con cualquier epitrocoide y menos con ninguna hipotrocoide. Todavía existe mucha investigación que se puede hacer. Desde analizar las implicaciones de la discontinuidad de la función hasta encontrar una expresión general para hipotrocoides y epicicloides.

Bibliografía

Cirrito, Fabio, y Patrick Tobin. *Mathematics: Standard Level*. Victoria: IBID, 1998. Impreso.

Friend, Nathan. "Inspirograph." *Nathan Friend*. Inspirograph, s.f. Web. 22 mar. 2015. <<http://nathanfriend.io/inspirograph/>>.

Larson, Ron, y Bruce H. Edwards. *Calculus*. 9th ed. Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009. Impreso.

Lerma, Miguel A. *Mathematics Department*. Northwestern University, s.f. Web. 6 Mar. 2015. <<http://www.math.northwestern.edu/~mlerma/courses/math214-2-04f/notes/c2-arclength.pdf>>.

Stewart, James. *Cálculo: Trascendentes Tempranas*. Australia: Thomson/Learning, 2002. Impreso.

Weisstein, Eric. "Epicycloid." *Wolfram MathWorld*. Wolfram Inc., s.f. Web. 22 Mar. 2015. <<http://mathworld.wolfram.com/Epicycloid.html>>.

Anexo 1: Programa

El programa que hice se puede encontrar en mi sitio web:

<http://franspaco.com/espiro/>

Y el código fuente se encuentra en:

<http://franspaco.com/espiro/pde/test4.pde>

Este programa muestra la configuración $R = 200$, $r = 140$.

También se pueden ver las siguientes configuraciones:

- $R = 200$, $r = 50$ <http://franspaco.com/espiro/1>
- $R = 200$, $r = 110$ <http://franspaco.com/espiro/2>
- $R = 200$, $r = 150$ <http://franspaco.com/espiro/3>