Dada una placa rectangular apoyada en sus cuatro lados, se desea calcular la flecha resultante cuando ésta se ve sometida a una carga de flexión debida a la presión hidrostática de un fluido en su mitad inferior, tal y como se observa en la figura 1.

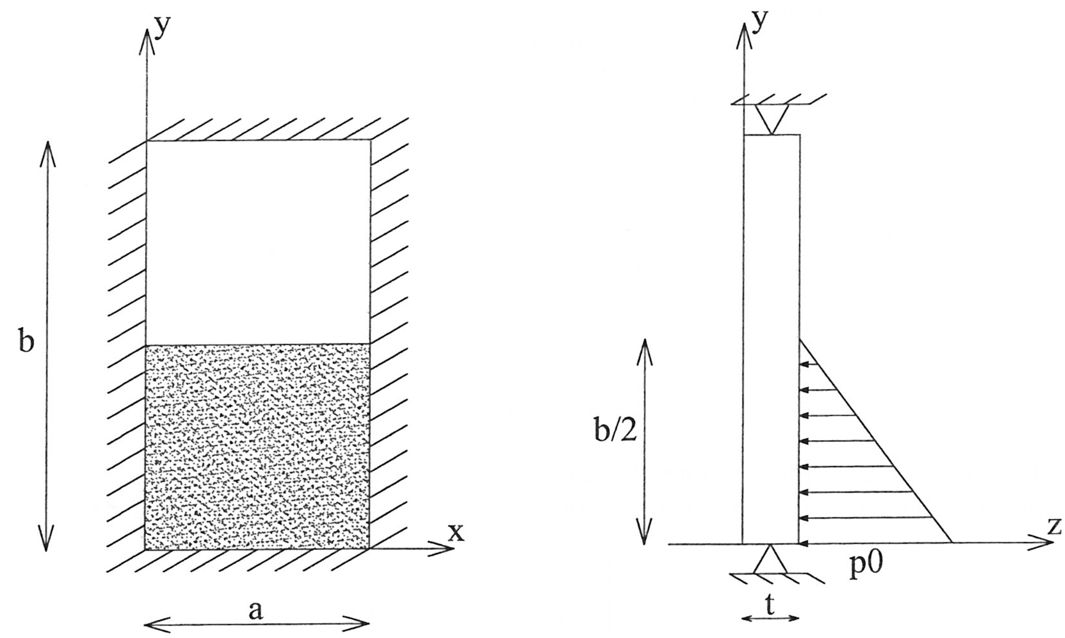

Figura 1: Placa rectangular. Sistema de referencia y presión hidrostática.

Se asumen las hipótesis de Kirchhoff para placas a flexión en análisis lineal:

1. El material es elástico, lineal e isótropo.
2. El espesor (t) es mucho más pequeño que las otras dos dimensiones de la placa (a,b).
3. No hay deformación en el plano medio de la placa, que permanece neutro durante la flexión.
4. La flecha de la placa es pequeña en comparación con el espesor. También se suponen pequeños los giros del plano medio.
5. Los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación, permanecen sobre rectas ortogonales a la deformada del plano medio tras la deformación.
6. Las tensiones normales en dirección perpendicular a la placa son despreciables.

Bajo estas condiciones, la flecha (desplazamiento en la dirección z) de la placa w se puede obtener resolviendo la ecuación en derivadas parciales

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \tag{1}$$

donde

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

y $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ siendo t el espesor de la placa, E el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson.

Para que la ecuación (1) tenga solución única, debe ser complementada con condiciones de contorno adecuadas. Estas condiciones de contorno vienen determinadas por el tipo de sujeción que se aplique en los bordes de la placa. En este trabajo se estudiará la respuesta de una placa apoyada en todo su contorno, lo que implica que tanto la flecha como el momento flector cuyo eje coincide con el borde son nulos. En consecuencia, si se utiliza la notación $f = p/D$ y $\Omega = (0,a) \times (0,b)$, el problema de contorno se puede plantear del siguiente modo:

$$\begin{cases} \nabla^4 w - f = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ w = 0, \ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{en } x = 0, \\ w = 0, \ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{en } x = a, \\ w = 0, \ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } y = 0, \\ w = 0, \ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } y = b. \end{cases} \tag{2}$$

El problema (2) se puede reformular introduciendo la variable $\phi = \nabla^2 w$. De este modo, la ecuación de cuarto orden del problema (2) se reescribe como un sistema acoplado de dos ecuaciones de segundo orden:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - f = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla^2 w - \phi = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Utilizando la definición de ϕ y las condiciones de contorno sobre w, el problema (2) se puede reformular como,

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - f = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \phi = 0 \quad \text{en } \Gamma, \\ \nabla^2 w - \phi = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ w = 0 \quad \text{en } \Gamma. \end{cases} \tag{3}$$

siendo Γ la frontera de Ω, y donde $\nabla^2 w$:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Teniendo presente todo lo anterior, se pide:

a) Obtener la forma débil del problema planteado en (3) definiendo de manera clara los espacios necesarios.

b) Obtener la flecha w mediante FreeFem resolviendo el problema definido en (3).