Un ingeniero desea conocer la distribución de temperaturas, $u(x, y, t)$, en una placa rectangular de dimensiones $a \times b$ de un determinado material, isótropo y homogéneo, sometida a las condiciones de contorno que se indican en la figura 1.

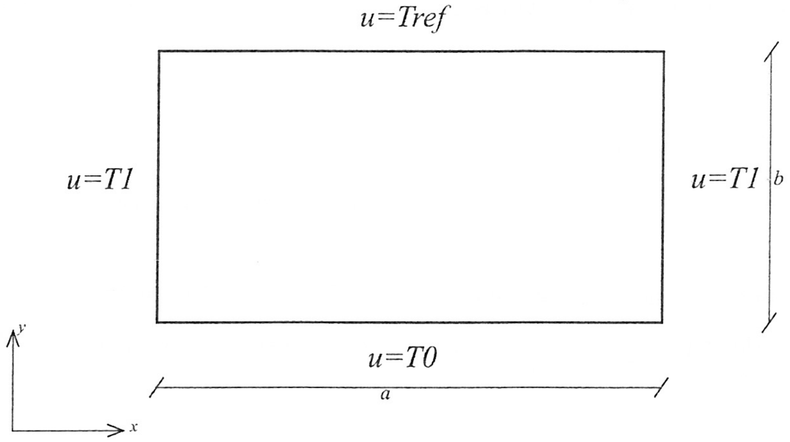

Figura 1: Dominio y condiciones de contorno del problema.

La ecuación diferencial que gobierna este problema es la ecuación del calor en dos dimensiones que se puede expresar como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot Q = 0 \tag{1}$$

donde u representa la temperatura y Q el flujo de calor, que en este problema se considera que se obtiene mediante la Ley de Fourier

$$Q = -\alpha \nabla u \tag{2}$$

donde α es el coeficiente de difusividad térmica del material. Dado que el material se considera homogéneo e isótropo, el valor de α será constante en toda la placa.

Teniendo en cuenta que el problema es simétrico respecto a $x = \frac{a}{2}$, éste se reduce a calcular una placa rectangular de dimensiones $\frac{a}{2} \times b$ (tal y como se muestra en la figura 2).

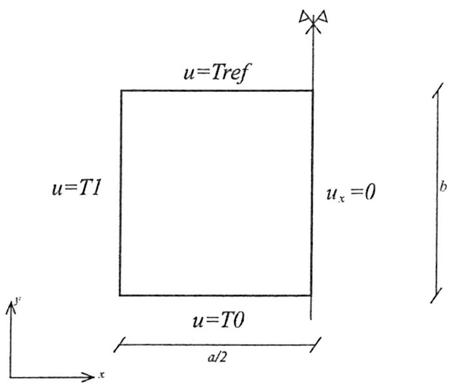

Figura 2: Dominio y condiciones de contorno del problema teniendo en cuenta la simetría del problema.

Al considerar la simetría las condiciones de contorno son:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=a/2} = 0 & u|_{x=0} = T1 \\ u|_{y=0} = T_0 & u|_{y=b} = T_{ref} \end{cases} \tag{3}$$

Asumiendo que la temperatura de referencia T_{ref} es constante e igual a 0, se pide:

1. Obtener la forma débil del problema no estacionario definiendo claramente los espacios de funciones de prueba y de peso considerando la simetría del problema.

2. Calcular la evolución temporal de la distribución de temperaturas $u(x, y, t)$ mediante FreeFem considerando:

   a) La placa completa.

   b) La simetría del problema.

3. Para ambos casos analizar el efecto de aumentar el número de discretizaciones y el tipo de elementos finitos.

4. Si en vez de tener la condición de contorno $u = T_{ref}$ en el borde superior, tenemos una ley de enfriamiento del tipo: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{h}{k}(u - T_{ref})$, ¿cómo varía la forma débil del problema y su implementación?

Nota: A efectos de cálculo en FreeFem considerar los siguiente parámetros: $a = 0{,}15$ m, $b = 0{,}1$ m, $T_0 = 100°C$, $T_1 = 20°C$ y $\alpha = 0{,}00001\ m^2/s$.