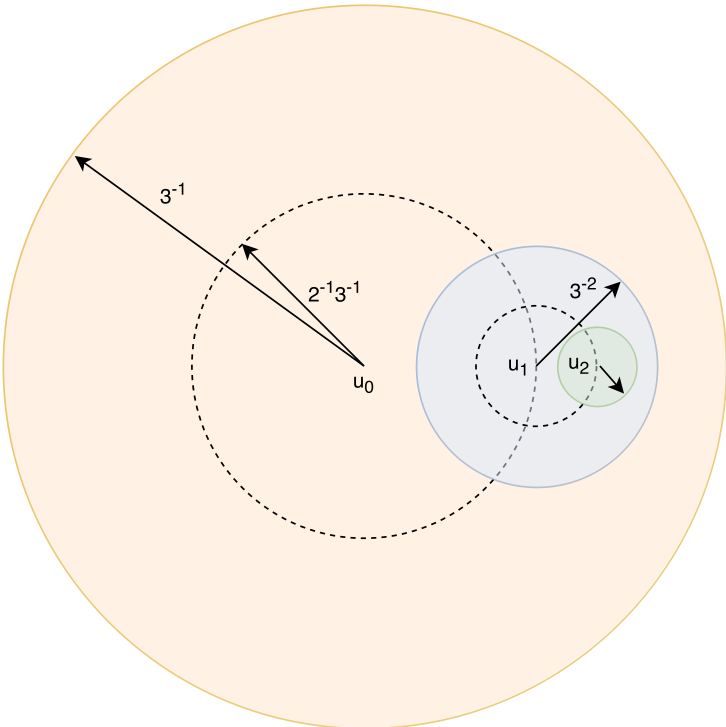
定理 7.21(一様有界性原理)

$\mathcal{X}$ を Banach 空間，$\mathcal{Y}$ をノルム空間であるとし，$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ に属する族とする．このとき

$$^\forall u \in \mathcal{X},\ \sup_{\lambda\in\Lambda}||T_\lambda u|| < \infty \implies \sup_{\lambda\in\Lambda}||T_\lambda|| < \infty$$

となる．言い換えれば，$\mathcal{X}$ の各点 u で $\{T_\lambda u\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有界ならば，$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は一様に有界である．

証明



[2] による初等的で簡潔な証明を紹介する．まず，簡単な補題を示す．$T \in B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ とする．中心 u 半径 r の閉球を $\mathcal{C}(u,r)$ と書く．$^\forall u \in \mathcal{X}$ を固定すれば

$$\max\{||T(u+u')||, ||T(u-u')||\} \geq \frac{1}{2}\left(||T(u+u')|| + ||T(u-u')||\right) \geq ||Tu'|| \quad (^\forall u' \in \mathcal{X})$$

となる．ただし，最後の不等号においては三角不等式を用いた．$^\forall r > 0$ に対して，$u' \in \mathcal{C}(0,r)$ について左辺から右辺の順に sup を取れば

$$\sup_{u''\in\mathcal{C}(u,r)}||Tu''|| \geq \sup_{u'\in\mathcal{C}(0,r)}||Tu'|| = \sup_{u'\in\mathcal{C}(0,1)}||Tu'||r = ||T||r$$

となるので，左辺で $u'' \to u'$ と文字を取り換えれば

$$\sup_{u'\in\mathcal{C}(u,r)}||Tu'|| \geq ||T||r \qquad (*)$$

が成り立つ．

以下が証明の本筋である．$\sup_{\lambda\in\Lambda}||T_\lambda|| = \infty$ と仮定して対偶を示す．$\sup_{\lambda\in\Lambda}||T_\lambda|| = \infty$ より，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $||T_n|| \geq 4^n$ となるように取ることができる．一方，$u_0 := 0 \in \mathcal{X}$ とすると，$(*)$ で $u = u_0,\ r = 2^{-1}3^{-1},\ T = T_1$ として

$$^{\exists}u_1 \in \mathcal{C}(u_0, 2^{-1}3^{-1}) \Longrightarrow ||u_1 - u_0|| \leq 2^{-1}3^{-1},\ ||T_1u_1|| \geq 2^{-1}3^{-1}||T_1||$$

が成り立つので，特に

$$\mathcal{C}(u_1, 3^{-2}) \subset \mathcal{C}(u_0, 3^{-1}), \quad ||u_1 - u_0|| < 3^{-1}, \quad ||T_1u_1|| \geq 2^{-1}3^{-1}||T_1||$$

が成り立つ．同様に，$(*)$ で $u = u_1,\ r = 2^{-1}3^{-2},\ T = T_2$ として

$$^{\exists}u_2 \in \mathcal{C}(u_1, 2^{-1}3^{-2}) \subset \mathcal{C}(u_0, 2^{-1}3^{-2}) \Longrightarrow ||u_2 - u_1|| \leq 2^{-1}3^{-2},\ ||T_2u_2|| \geq 2^{-1}3^{-2}||T_2||$$

が成り立つので，特に

$$\mathcal{C}(u_2, 3^{-3}) \subset \mathcal{C}(u_1, 3^{-2}) \subset \mathcal{C}(u_0, 3^{-1}), \quad ||u_2 - u_1|| < 3^{-2}, \quad ||T_2u_2|| \geq 2^{-1}3^{-2}||T_2||$$

が成り立つ．帰納的に，$u_k \in \mathcal{X}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を

$$\mathcal{C}(u_n, 3^{-(n+1)}) \supset \mathcal{C}(u_{n+1}, 3^{-(n+2)}) \supset \cdots \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$||u_n - u_{n-1}|| < 3^{-n}, \quad ||T_nu_n|| \geq 2^{-1}3^{-n}||T_n|| \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たすように取ることができる．$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ はコーシー列であるので，$\mathcal{X}$ が完備であることから $^{\exists}u \in \mathcal{X}$ に収束する．ここで，$^{\forall}m = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $n = m$ として固定すると，$^{\forall}n \geq m$ に対して $u_n \in \mathcal{C}(u_m, 2^{-1}3^{-(m+1)})$ であるので，$u \in \mathcal{C}(u_m, 2^{-1}3^{-(m+1)})$ となる．m は $^{\forall}m = 0, 1, 2, \cdots$ に対して成り立つので，特に

$$||u - u_n|| < 3^{-(n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．よって，ノルムの定義より

$$||T_nu - T_nu_n|| \leq ||T_n|| \cdot ||u - u_n|| < 3^{-(n+1)}||T_n|| \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となるので，上で得られた等式と不等式より

$$||T_nu|| \geq ||T_nu_n|| - ||T_nu - T_nu_n|| > 6^{-1}3^{-n}||T_n|| \geq 6^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．よって，対偶が示された． □

参考文献

[1] 黒田成俊『共立数学講座 15 関数解析』(共立出版，1980 年)

[2] Alan D. Sokal, “A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem” arXiv:1005.1585v2 [math.FA]