ПЗ-1-2. (Продолжение) Свойства числовых рядов. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$.

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{2^n n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = 2e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}} = \frac{2}{e} < 1$$

сх-ся.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{e} > 1$ - расходится

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e}{e} = 1$ - ?

Основные разложения:

I. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

II. $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

III. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

IV. $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$

$(-1 < x < 1)^{*)}$,

V. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1)$,

Признак Раабе.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, строго положителен и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

то при $p>1$ он сходится, а при $p<1$ расходится. При $p=+\infty$ ряд (1), п, 1.1, сходится, а если $p=1$, то для выяснения вопроса о его сходимости или расходимости следует применять другие признаки.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!\,e^n\,(n+1)^{n+1}}{n^n\,(n+1)!\,e^{n+1}}=\frac{\cancel{n!}\,\cancel{e^n}\,\cancel{(n+1)}(n+1)^n}{n^n\,\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}\,e^{n+1}}=$$

$$=\frac{(n+1)^n}{n^n\,e}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\;e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2\cdot 2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1}=$$

$$=e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1}=e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}<1$$ – ряд расходится

$\#$

2600. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

◀ Преобразовывая отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ к виду

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}(n+1)!e^{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}=\frac{1}{e}\exp\left\{(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-1+(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\}=\exp\left\{\frac{p-0,5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=$$

$$=1+\frac{p-0,5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty,$$

и используя признак Раабе, заключаем, что при $p>\frac{3}{2}$ ряд сходится. ▶

2603. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!\ n^q}\ \frac{(n+1)!\ (n+1)^q}{p(p+1)\dots(p+n-1)(p+n)} =$$

$$= \frac{\cancel{n!}(n+1)(n+1)^q}{\cancel{n!}\ n^q\ (p+n)} = \frac{n+1}{p+n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q =$$

$$= \left(\frac{p+n}{n+1}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q = \left(\frac{\frac{p}{n}+1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q =$$

$$= \left(1+\frac{p}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q+1} =$$

$$= \left[1+(-1)\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\cdot\left[1+\frac{(q+1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= 1+\frac{q+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{p}{n} - \frac{p(q+1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1+\frac{q+1-p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{q+1-p}{n}-1\right) = q+1-p > 1, \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad q>p \ - \ \text{сх-ся}$$

\#

2603. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

◄ Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда p — целое отрицательное или нуль, и упростим отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{p+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q = \left(1+\frac{p}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q+1} =$$
$$= \left(1-\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{q+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+\frac{q-p+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = q-p+1$, то, согласно признаку Раабе, ряд сходится, если $q>p$. ►

Признак Гаусса.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **, строго положителен и**

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \lambda,\ \mu = \mathrm{const},$$

где $\varepsilon > 0$, $|\theta_n| < c$, то при $\lambda > 1$ ряд (1), п.1.1, сходится, а при $\lambda < 1$ расходится. Если же $\lambda = 1$, то ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leqslant 1$.

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \ldots .$

◀ Рассмотрим отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n}\right)^p \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)(2n+1)}\right)^p =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

Согласно признаку Гаусса, отсюда находим: при $p > 2$ ряд сходится, а при $p \leqslant 2$ — расходится. ▶

$$2598. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \ldots$$

$$a_n = \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n}\right]^p$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^p$$

Гаусс!

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^p = \left[1 + \frac{1}{2n+1}\right]^p =$$

$$= 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2!\,(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \to \infty$$

$\lambda = 1$, $\mu = \frac{p}{2} > 1$, $\rightsquigarrow$ $p > 2$ — сх-ся

Раабе!

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{p}{2n+1} - 1\right) = \frac{p}{2} > 1, \to \quad p > 2$$

сх-ся

Теорема 4. Если при $n \to \infty$

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

то при $p > 1$ ряд (1), п. 1.1, сходится, а при $p \leqslant 1$ расходится.

2612. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$

$$a_n = \left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p = \left[e - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^p =$$

$$= e^p\left(1-e^{\left(-1+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}\right)^p =$$

$$= e^p\left(1-e^{\left(-1+n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2\cdot 2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)}\right)^p =$$

$$= e^p\left(1-e^{\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right)^p =$$

$$= e^p\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^p =$$

$$= e^p\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad p>1 \text{ — сх-ся}$$

$\neq$

2611. $a_n = \log_{b^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$, $(a>0,\ b>0)$.

$$a_n = \frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)}{\ln b^n} = \frac{\ln\left(1+n^{-1}\cdot\sqrt[n]{a}\right)}{n\ln b} =$$

$$= \frac{1}{n\ln b}\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{\ln b}\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n\to\infty \qquad 2>1, \text{ — сх-ся}$$

$(b\neq 1)$

$\neq$

Задачи для самостоятельного решения

2601. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}.$$

2602. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\ldots(q+n)} \quad (q>0).$$

2609. $$a_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n>1).$$

2610. $$a_n = \ln^p\left(\sec \frac{\pi}{n}\right).$$

Литература

Демидович Б.П.

Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.