Описание предпочтений

При принятии решений ЛПР исходит из собственной системы предпочтений. Цель математической теории принятия решений – разработать формальные методы, помогающие ЛПР сделать правильный выбор. Для осуществления этой цели необходимо правильно отразить в математической модели структуру предпочтений ЛПР.

Предпочтения ЛПР может выразить по отношению к результатам своего выбора, т.е. исходам. Таким образом структура его предпочтений может быть определена на множестве исходов G.

Поскольку для задач принятия решений в условиях определенности существует соответствие между множеством стратегий S и множеством исходов G $\psi: S \to G$, можно рассматривать структуру предпочтений ЛПР на множестве стратегий S. Обратное отображение $\psi^{-1}: G \to S$ не является в общем случае функцией – к одинаковым исходам могут вести различные стратегии .

Предпочтения ЛПР можно описать различными способами. Перечислим наиболее распространенные из них.

Математический аппарат описания предпочтений и сложных вариантов.

Оценка и сравнение вариантов в целом - гештальт

.

Пример 3.6. Варианты, представленные на рис. 3.1, *а*, имеют следующие точечные оценки: $x_4 = a$, $x_2 = x_5 = b$, $x_1 = c$, $x_3 = e$. Допустим, что значения на шкале критерия упорядоче-

32

ны от лучших к худшим как $a \succ b \succ c \succ d \succ e$. Тогда получается следующее упорядочение вариантов: $A_4 \succ A_2 \approx A_5 \succ A_1 \succ A_3$. ■

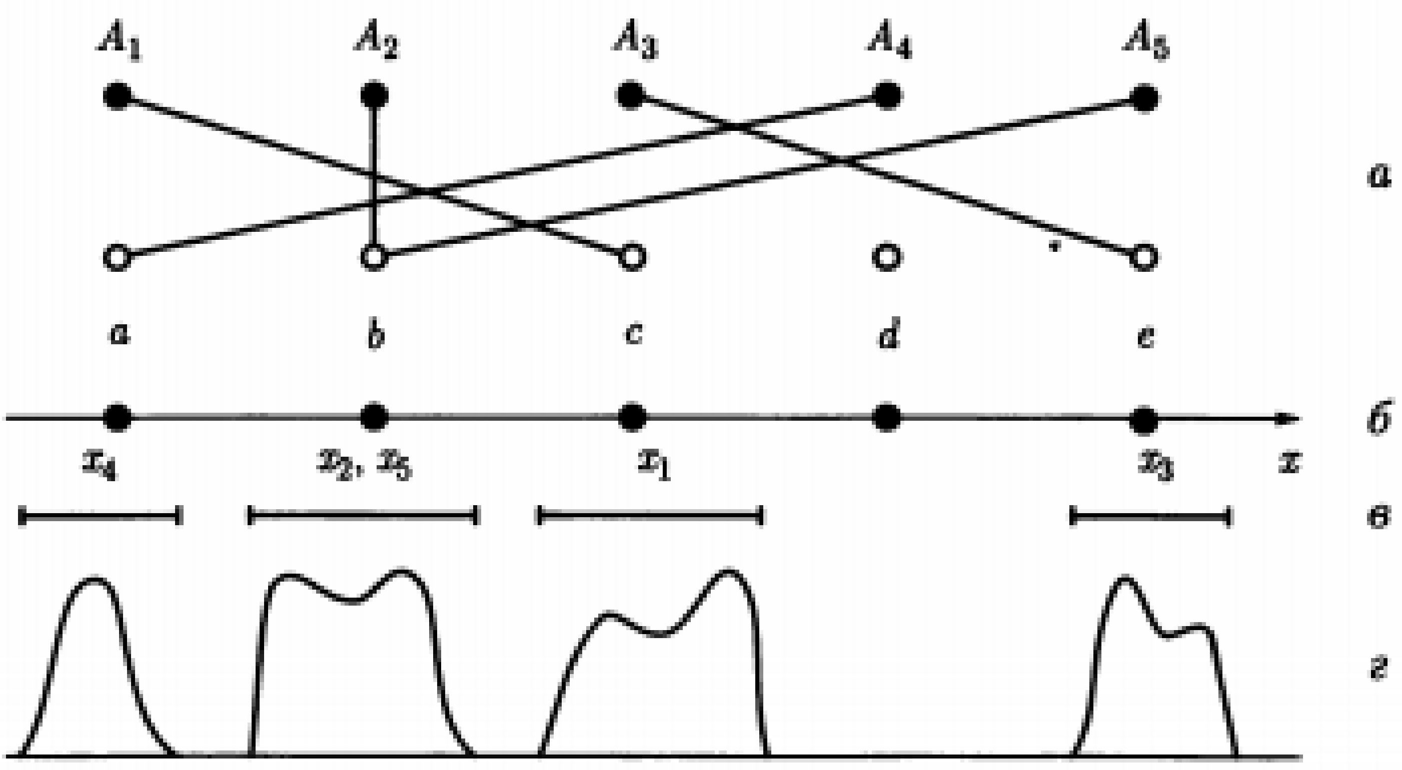


Рис. 3.1. Оценки вариантов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5:

енки по дискретной шкале; *б* — точечные оценки по непрерывной

в — интервальные оценки; *г* — вероятностные оценки

Наиболее простой для ЛПР способ сравнения вариантов это непосредственное оценивание в ранговой шкале или *ранжирование*. Восприятие варианта происходит в целом, не вдаваясь в отдельные его характеристики (гештальт). Ранжирование вариантов состоит в представлении вариантов в виде последовательности в соответствии с убыванием их предпочтительности. Если допускается указание на равноценность соседних вариантов, то ранжирование называется *нестрогим*. В противном случае говорят, что ранжирование *строгое*.

Ранговая шкала это порядковая шкала, обычно значения этой шкалы – равноотстоящие друг от друга целые числа. Это либо принятые отметки 2, 3, 4, 5 или баллы от 1 до 100.

Оценки по ранговой шкале называют *рангом* варианта

Попарное сравнение вариантов также проводится в целом и состоит в указании более предпочтительного варианта при сравнении каждой пары вариантов, либо в указании их равноценности (безразличия) или несравнимости. Предпочтительность будет обозначаться символом $\succ$, равноценность символом $\sim$.

Результаты парного сравнения вариантов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удобно представлять в виде матрицы парных сравнений $A = ||\alpha_{ij}||\ i, j = 1, \ldots\ n$, например, следующего вида или другого, когда все варианты сравнимы.

•

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \text{ предпочтительнее, чем } a_j \\ 1/2, \text{ если варианты } a_i \text{ и } a_j \text{ равноценны} \\ 0, \text{ если } a_i \text{ несравним с } a_j \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ если } a_i \text{ предпочтительнее, чем } a_j \\ 1, \text{ если варианты } a_i \text{ и } a_j \text{ равноценны} \\ 0, \text{ если } a_j \text{ предпочтительнее, чем } a_i. \end{cases}$$

В этом случае варианты можно упорядочить по значениям строчных сумм $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ элементов матрицы парных сравнений.

Это самый примитивный случай.

Пример Следующая матрица парных сравнений показывает, что вариант a_1 предпочтительнее всех остальных вариантов, варианты a_2 и a_4 равноценны, а вариант a_3 уступает в предпочтительности всем остальным вариантам. Для этой матрицы парных сравнений результатом является упорядочение $a_1 \succ a_2 \sim a_4 \succ a_3$.

	a_1	a_2	a_3	a_4	α_i
a_1	1	2	2	2	7
a_2	0	1	2	1	4
a_3	0	0	1	0	1
a_4	0	1	2	1	4

Критерии и их шкалы

- Для описания предпочтений используют понятия, называемые *критериями*. Критерий характеризует свойство исхода, важного с точки зрения поставленной цели. При оценке исходов критерию приписывается определенная шкала, а каждому исходу – значение критерия по этой шкале, характеризующего степень интенсивности свойства исхода. Критерий K задает отображение $K\colon G \to E,$ где E– *шкала* критерия, т.е. множество его допустимых значений.

- Критерии могут быть количественными и качественными. Количественные критерии имеют числовую шкалу $E \subseteq \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Шкала может быть непрерывной или дискретной.

- Качественные критерии можно превратить в количественные, например, задав биекцию $\xi\colon E \to \{1, \ldots, N\}$, отображающую шкалу качественного критерия в шкалу баллов.

- Шкалы критериев принято разделять на типы в зависимости от множества допустимых для этого критерия преобразований Φ. Преобразование η критерия K называется допустимым, если функция $\eta(K)$ выражает тот же признак, что и критерий K. Чем совершеннее шкала, тем уже множество допустимых преобразований Φ.

Для количественных критериев различают следующие типы шкал:

1. *Абсолютная* шкала. Измерения, производимые в этой шкале, имеют однозначный числовой результат. Для абсолютной шкалы множество допустимых преобразований состоит из единственного тождественного отображения $\Phi = \{\eta(x) \mid \eta(x) = x\}$.
2. Шкала *интервалов*. Результат измерений, производимых в этой шкале, зависит от выбора начала отсчета и масштаба (единицы измерения). Например, температуру можно измерять по шкалам Цельсия, Фаренгейта, Реомюра, Кельвина. Известно, что разница между соседними значениями на шкале Фаренгейта, привычной для американцев, соответствует 5/9 одного деления шкалы Цельсия, принятой в Европе. При этом 0^o градусов по шкале Фаренгейта соответствует -17.8^o градусов по шкале Цельсия.

Частными случаями шкалы интервалов являются шкала *отношений* и шкала *разностей*. Для шкалы отношений меняется только масштаб, но не меняется начало отсчета. Например, в шкале отношений можно измерять вес: отношение веса в фунтах и в килограммах для двух объектов одинаково. Для шкалы *разностей* не меняется масштаб, но меняется начало отсчета. Так, например, связаны между собой температурные шкалы Кельвина и Цельсия. Для шкалы интервалов множество допустимых преобразований состоит из всех линейных функций $\Phi = \{\eta(x) \mid \eta(x) = kx + b, k > 0\}$. При $k = 1$ это шкала разностей, при $b = 0$ – шкала отношений.

Среди шкал качественных критериев различают *номинальную* и *порядковую*.

1. Номинальная шкала служит для классификации вариантов. Оценка по такому критерию подчеркивает, что объекты различны. Значения по этой шкале не определяют превосходства одного объекта над другим. Для номинальных шкал допустимым преобразованием является любая биекция.
2. Порядковая шкала также служит для классификации вариантов, но, в отличие от номинальной шкалы, классы у таких шкал упорядочены по предпочтительности. Например, продукты делят на категории «высший сорт», «первый сорт», «второй сорт», «нестандартные», а школьные оценки – на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Для порядковых шкал допустимым преобразованием является любая монотонно возрастающая функция. Одним из видов порядковой шкалы является *ранговая* шкала.

Наименование шкалы	Множество Ф допустимых преобразований
Номинальная (классификационная)	Все взаимно-однозначные функции: $\Phi_{н} = \{\varphi \mid x \neq y \to \varphi(x) \neq \varphi(y)\}$
Порядковая	Все монотонно возрастающие функции: $\Phi_{п} = \{\varphi \mid x > y \to \varphi(x) > \varphi(y)\}$
Интервалов	Все положительные афинные преобразования: $\Phi_{и} = \{\varphi \mid \varphi(x) = kx + l,\ k > 0\}$
Отношений	Все линейные преобразования с положительным коэффициентом: $\Phi_{о} = \{\varphi \mid \varphi(x) = kx,\ k > 0\}$
Абсолютная	Тождественное преобразование: $\Phi_{а} = \{\varphi(x) \equiv x\}$

Виды шкал

Тип шкалы	Характер шкалы			
	количественная	качественная	дискретная	непрерывная
Номинальная		•	•	
Порядковая		•	•	
Интервалов	•		•	•
Отношений	•		•	•
Абсолютная	•		•	

Тип шкалы критерия необходимо учитывать при решении вопроса о том, какие действия имеет смысл производить с оценками по критериям, т.е. истинность утверждения не изменится после преобразования , допустимого типом шкалы.

Например, при ранжировании объектов а,в,с по каждому из двух критериев К и С нельзя использовать в качестве общей оценки их сумму К+С

	а	в	с			а	в	с		
К	1	3	2		К	1	7	6	(вас)	(вса)
С	3	2	1		С	4	3	2		
К+С	4	5	3		К+С	5	10	8		

Упражнение. Показать, что если оценки по критериям получены в интервальной шкале, то после допустимого преобразования сохраняется сравнение средних значений в интервальной шкале, а порядковой нет.

Построение перечня критериев осуществляется на основе информации, полученной от экспертов и ЛПР. Независимо от способа формирования набор критериев должен удовлетворять определенным требованиям

– *соответствие* - набор критериев должен соответствовать смыслу поставленной задачи;
– *полнота* – набор критериев считается полным, если каждый исход исчерпывающе характеризуется совокупностью соответствующих значений критерия. Введение дополнительных критериев в полный набор не должно приводить к изменению задачи;
– *минимальность* – набор должен содержать как можно меньше критериев. Различные критерии не должны характеризовать одно и то же свойство;
– *прозрачность* – каждый критерий должен иметь понятную для ЛПР формулировку, однозначный и ясный смысл, характеризовать вполне определенное свойство исходов;
– *декомпозируемость* – состав критериев должен обеспечивать возможность упрощения задачи путем расчленения ее на более простые подзадачи;
– *измеримость* – каждый критерий должен допускать получение оценки (количественной или хотя бы качественной) интенсивности характеризуемого им свойства.

Одновременное удовлетворение этих требований трудновыполнимо, но к нему необходимо стремиться.

Критерий может *максимизироваться* $(K(s) \rightarrow max)$ и *минимизироваться* $(K(s) \rightarrow min)$. Если критерий K максимизируется, то исход s' лучше, чем исход s'' в смысле свойства, измеряемого критерием K, тогда и только тогда, когда $K(s') > K(s'')$.

Описание предпочтений бинарными отношениями

Удобной и широко применяемой математической моделью для описания предпочтений в теории принятия решений является понятие бинарного отношения на множестве.

Пусть A - некоторое множество объектов. Как известно, *бинарным отношением* ρ, заданным на множестве A, называется любое подмножество множества $A \times A$; то есть бинарное отношение – это множество упорядоченных пар $< a, b > \in A \times A$, элементы которых связаны между собой некоторым предикатом $\Pi_\rho(a, b)$:

$$\rho = \{< a, b > | a \in A, b \in B, \Pi_\rho(a, b)\}.$$

Если $< a, b > \in \rho$, то говорят, что a находится с b в отношении ρ и пишут $a \rho b$.

В теории принятия решений нас будет интересовать множество A, являющееся либо множеством исходов G, либо множеством стратегий S, либо множеством критериев K.

НАПОМНИМ

Отношение ρ называют

рефлексивным, если для всех $a \in A$ выполнено $a\rho a$,

антирефлексивным, если для всех $a \in A$ не выполнено $a\rho a$.

Отношение ρ называют *симметричным*, если для всех $a, b \in A$ из $a\rho b$ следует $b\rho a$;

антисимметричным, если из $a\rho b$, $b\rho a$ следует $a = b$;

асимметричным, если из $a\rho b$ следует, что $b\rho a$ – не выполнено.

Отношение ρ называют *транзитивным*, если для всех $a, b, c \in A$ из $a\rho b$ и $b\rho c$ следует $a\rho c$;

отрицательно транзитивным, если из того, что $a\rho b$ неверно и $b\rho c$ неверно, следует что $a\rho c$ неверно.

Отношение ρ называют отношением *частичного порядка,* если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение ρ называют *полным*, если для всех a, b выполнено $a \rho b$ или $b \rho a$. Частичный порядок ρ называют *линейным порядком*, если ρ – полное отношение.

В теории принятия решений нас будет интересовать множество A, являющееся либо множеством исходов G, либо множеством стратегий S, либо множеством критериев K. Мы будем рассматривать не всякие бинарные отношения ρ, а только *отношения предпочтения*.

.

1. Множество $\{< 1, 2 >, < 2, 4 >, < 3, 3 >, < 2, 1 >\}$ — бинарное отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. Отношение равенства на множестве действительных чисел есть множество $\{< x, y > | x$ и y — действительные числа и x равно $y\}$. Для этого отношения существует специальное обозначение $=$. Область определения D_ρ совпадает с областью значений R_ρ и является множеством действительных чисел.

3. Отношение «меньше, чем» на множестве целых чисел есть множество $\{< x, y > |$ для целых чисел x и y найдется положительное число z такое, что $x + z = y\}$. Для этого отношения есть специальное обозначение $<$. Здесь D_ρ совпадает с R_ρ и является множеством целых чисел.

Каждое бинарное отношение ρ на множестве X есть подмножество прямого произведения $X \times X$. Каждое n-нарное отношение на X есть подмножество прямого произведения X^n.

Для бинарных отношений обычным образом определены теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т. д.

Обратным отношением для ρ называется отношение

$$\rho^{-1} = \{< x, y > | < y, x > \in \rho\}.$$

Примеры

1. Отношение равенства на множестве целых чисел рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Отношение $x<y$ на множестве действительных чисел антирефлексивно, асимметрично, но транзитивно.
3. Отношение $x \leq y$ на множестве действительных чисел рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Это отношение частичного порядка. Оно полное и, следовательно, линейный порядок.
4. Отношение « A подмножество B» - частичный порядок, но не полный.
5. Отношение из примера 1 предыдущего слайда не рефлексивно, не транзитивно (например, нет пары (1,1))

Бинарные отношения, отражающие мнения ЛПР о предпочтениях

Отметим четыре вида отношений предпочтения, различающихся предикатом $\Pi_\rho(a, b)$, который выражает мнение ЛПР о сравнительной предпочтительности для каждой пары объектов a и b:

Отношением строгого предпочтения P называют бинарное отношение, для которого предикат $\Pi_P(a, b)$ означает «объект a предпочтительнее объекта b».

Отношением нестрогого предпочтения R называют бинарное отношение, для которого предикат $\Pi_R(a, b)$ означает «объект a *не хуже* объекта b».

Отношением безразличия I называют бинарное отношение, для которого предикат $\Pi_I(a, b)$ означает «объекты a *и* b равнопредпочтительны».

Отношением несравнимости N называют бинарное отношение, для которого предикат $\Pi_N(a, b)$ означает «объекты a *и* b несравнимы».

Исходя из гипотезы рациональности поведения ЛПР, понятно, как должны быть связаны между собой отношения P, R, I и N:

$$R = P \cup I;\ P = R \backslash I;\ I = R \cap R^{-1};\ P \cap I = \emptyset;\ N = (A \times A) \backslash (RUR^{-1}).$$

Из приведенных соотношений видно, что по отношению R или по паре отношений P, I можно определить остальные отношения.

Очевидно, что отношения I и R являются рефлексивными, отношения P и N – *антирефлексивными*.

Считается, что отношения I и N являются симметричными, отношение P – асимметричным, R – в общем случае не обладает ни одним из свойств, связанных с симметрией

В большинстве методов поддержки принятия решений отношения P, I и R считают транзитивными. Однако в общем случае эти отношения, как и отношение N, транзитивными не являются. Одна из основных причин нетранзитивности отношения предпочтения – это переход от оценки объектов по одному признаку к оценке по другому. Еще один пример – пусть имеется последовательность объектов $t_1, \ldots, t_k$ такая , что объекты близки по качеству, но каждый следующий незначительно лучше предыдущего (например, вы добавляете в чашку с чаем по очень маленькому количеству сахара). Тогда мнение ЛПР для каждой пары соседних объектов будет $t_i I t_{i+1}$ (вкус примерно одинаков), но если ЛПР сравнит t_k и t_1, то окажется, что $t_k P t_1$ (если k велико, в конце процесса чай будет гораздо слаще).

Позже будет показано, что в задаче группового выбора отношение P, построенное по такому часто используемому правилу как правило большинства, может быть нетранзитивным.

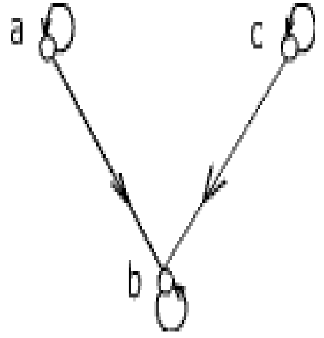
удобно свести в таб...

Обозначения	Название отношения	Тип отношения	Свойства				
			Рефлексивность	Иррефлексивность	Симметричность	Асимметричность	Транзитивность
P	Строгого предпочтения	Строгий частичный порядок	—	+	—	(+)	+
I	Безразличия	Эквивалентность	+	—	+	—	+
R	Нестрогого предпочтения	Квазипорядок	+	—	—	—	+
N	Несравнимости	—	—	+	+	—	—

Знак «+» в таблице означает, что свойство входит в определение указанного слева типа отношения; знак (+) показывает, что данное свойство есть следствие остальных (иррефлексивное транзитивное отношение обязательно асимметрично: если бы было $aPв$ и $вPa$ для некоторых объектов a и $в$, то в силу транзитивности должно было бы быть и aPa, но это противоречит иррефлексивности P).

Граф отношения предпочтения

- Отношение предпочтения удобно изображать в виде ориентированного графа, в котором вершины соответствуют сравниваемым объектам, а дуги – парам объектов, входящим в бинарное отношение.
- *Пример*. Пусть на множестве $A = \{a, b, c\}$ задано отношение нестрогого предпочтения $R = \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < c, b >\}$. Ему соответствует граф, изображенный на рисунке



Рассмотрим теперь свойства бинарных отношений в термина[х] матриц смежности соответствующих графов.

Пусть $||a_{ij}||$ — матрица смежности бинарного отношения P. Тог[да] P:

— рефлексивно, если $\forall i\ a_{ii} = 1$;

— антирефлексивно, если $\forall i\ a_{ii} = 0$;

— связно, если $\forall i, j\ i \neq j\ a_{ij} = 1$ или $a_{ji} = 1$;

— полно, если $\forall i, j\ a_{ij} = 1$ или $a_{ji} = 1$;

— симметрично, если $\forall i, j\ a_{ij} = a_{ji}$;

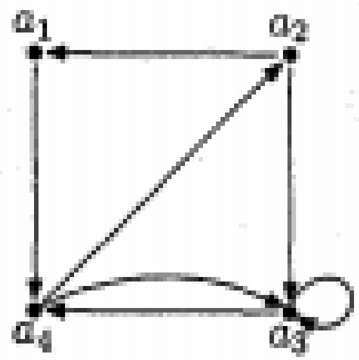
— асимметрично, если $\forall i, j\ a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ji} = 0$;

— транзитивно, если $\forall i, j, k$ из $a_{ij} = 1$ и $a_{jk} = 1$ следует, чт[о] $a_{ik} = 1$;

— отрицательно транзитивно, если $\forall i, j, k$ из $a_{ij} = 0$ и $a_{jk} =$ [0] следует, что $a_{ik} = 0$.

Пример

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	0	1
a_2	1	0	1	0
a_3	0	0	1	1
a_4	0	1	1	0



б)

— не рефлексивно, т.к. $a_{11} = 0$ (т.е. $(a_1, a_1) \notin P$);

— не антирефлексивно, т.к. $a_{33} = 1$ (т.е. $(a_3, a_3) \in P$);

— не связно, т.к. $a_{31} = a_{13} = 0$ (т.е. $(a_3, a_1) \notin P$ и $(a_1, a_3) \notin P$);

— не полно, т.к. $a_{31} = a_{13} = 0$ (т.е. $(a_3, a_1) \notin P$ и $(a_1, a_3) \notin P$);

— не симметрично, т.к. $a_{14} = 1$, но $a_{41} = 0$ (т.е. $(a_1, a_4) \in P$, но $(a_4, a_1) \notin P$);

— не асимметрично, т.к. $a_{43} = 1$, но $a_{34} = 1$ (т.е. $(a_3, a_4) \in P$ и $(a_4, a_3) \in P$);

— не транзитивно, т.к. $a_{21} = 1$ и $a_{14} = 1$, но $a_{24} = 0$ (т.е. $(a_2, a_1) \in P$, $(a_1, a_4) \in P$, но $(a_2, a_4) \notin P$);

— не отрицательно транзитивно, т.к. $a_{41} = 0$ и $a_{13} = 0$, но $a_{43} = 1$ (т.е. $(a_4, a_1) \notin P$, $(a_1, a_3) \notin P$, но $(a_4, a_3) \in P$).

Пусть R – отношение нестрогого предпочтения на множестве *A*, P – соответствующее отношение строгого предпочтения и $X \subseteq A$.

Элемент a^* называется *наилучшим (наибольшим)* во множестве X, если он не менее предпочтителен, чем любой другой элемент из *X*, т.е. выполняется $a^* R\ a$ для любого $a \in$ X.

Наилучший элемент единственен с точностью до эквивалентности I : если a и b - наилучшие элементы, то $a\ I\ b$.

Элемент a^* называется *максимальным (мажорантой, недоминируемым)* во множестве X, если нет более предпочтительного, чем a^*, элемента, т.е. нет такого элемента $a \in$ X, что $a\ Pa^*$.

. Для отношения из первого примера множество наилучших элементов пусто, максимальные элементы - a, c.

Наилучший элемент всегда является максимальным, обратное утверждение неверно

При реальном выборе из множества вариантов X выбираются наилучшие элементы, если они есть. Часто, например если отношение R не является полным, множество наилучших элементов пусто. Поскольку понятие максимального элемента более слабое, в этом случае выбор сводится к рассмотрению максимальных элементов.

Заметим, что если отношение P расширить до отношения P', т.е. $P \subseteq P'$, то множество его максимальных элементов $M(P')$ является подмножеством множества максимальных элементов $M(P)$отношения P.

Одним из способов формирования отношения предпочтения является представление его в виде числовой функции. Говорят, что отношение нестрогого предпочтения R на A представляет числовая функция f, если

$$aRb \Leftrightarrow f(a) \geq f(b).$$

Функцию $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, обладающую указанным свойством, называют ***функцией полезности* (или *функцией ценности*).** Понятно, что при этом $aIb \Leftrightarrow f(a) = f(b),\ aPb \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.

Заметим, что если функция полезности существует, то отношение несравнимости пусто. Обратная задача – нахождение функции полезности по отношению предпочтения имеет решение, если R – линейный порядок.

Если предпочтения ЛПР описываются многими критериями и известны векторные оценки всех вариантов, то по ним можно построить отношения предпочтения различными способами.

Пусть x – векторная оценка варианта a, y – векторная оценка варианта b; все критерии максимизируются.

Отношение Парето $\boldsymbol{P^0}$ определяется следующим образом: вариант a с векторной оценкой $x = (x_1, \dots, x_n)$ предпочтительнее варианта b с векторной оценкой $y = (y_1, \dots, y_n)$ по отношению Парето, если оценки варианта a по всем критериям не хуже оценок варианта b, и хотя бы по одному критерию лучше:

$$aP^0b \Leftrightarrow (x_i \geq y_i, \forall i = 1, \dots, n \text{ и } \exists j\colon x_j > y_j, j \in \{1, \dots, n\}).$$

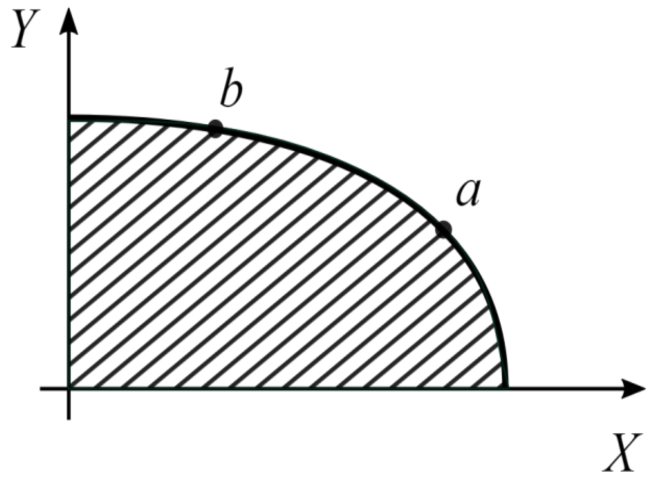
Отношение безразличия I^0 для отношения Парето является отношением равенства векторных оценок объектов: $aI^0b \Leftrightarrow x = y$. Отношение нестрогого предпочтения по Парето R^0 определяется соотношениями $aR^0b \Leftrightarrow x_i \geq y_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Отношение Слейтера S :$aS \quad b \Leftrightarrow x_i > y_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Заметим, что отношение Парето обладает свойством транзитивности, что согласуется с рациональностью поведения ЛПР при сравнении вариантов по этому отношению.

•

- Недоминируемые по отношению P^0 варианты образуют «эффективную границу» множества сравниваемых вариантов.
- Два максимизируемых критерия, X и Y - множества значений этих критериев. Недоминируемые элементы a и b этого множества не сравнимы между собой – по первому критерию a лучше b, но по второму хуже, по второму критерию b лучше a, но по первому хуже. Для сравнения этих элементов требуется дополнительная информация о предпочтениях



Отношение лексикографического порядка L определяется следующим образом: вариант a с векторной оценкой $x = (x_1, \ldots, x_n)$ предпочтительнее варианта b с векторной оценкой $y = (y_1, \ldots, y_n)$ по отношению лексикографического порядка, если он обладает лучшей, чем у варианта b, оценкой по некоторому критерию, а для всех критериев с меньшими номерами (если таковые есть) варианты a и b имеют равные оценки.

$$a\ L\ b \ \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}\colon x_j = y_j \ \text{при}\ j = 1, \ldots, i-1;\ x_i > y_i\ .$$

Рассмотрим задачу с четырьмя вариантами x, y, z, u, которые оцениваются по трем максимизируемым критериям K_1, K_2, K_3. Векторные оценки вариантов по критериям представлены в таблице

K_1,	K_2,	K_3	
5	3	5	x
3	5	4	y
5	3	1	z
2	4	4	u

Недоминируемые по Парето x и y

По отношению лексикографического порядка
x>z>y>u

Задание 1

1. Приведите примеры ситуаций, в которых предпочтения описываются шкалой отношений, шкалой разностей, порядковой шкалой.

2. Приведите примеры отношений:

а) не рефлексивного, но симметричного и транзитивного;

б) не симметричного, но рефлексивного и транзитивного;

в) не транзитивного, но рефлексивного и симметричного.

3. Пусть бинарные отношения ρ_1 и ρ_2

а) рефлексивны, б) антирефлексивны, в) симметричны, г) транзитивны.

Будет ли их объединение обладать этими же свойствами?

4. Пусть бинарные отношения ρ_1 и ρ_2

а) рефлексивны, б) антирефлексивны, в) симметричны, г) транзитивны.

Будет ли их пересечение обладать этими же свойствами?

5. Пусть бинарные отношения ρ_1 и ρ_2 заданы матрицами:

$$\rho_1\colon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_2\colon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Какими свойствами бинарных отношений они обладают? Укажите транзитивное замыкание каждого отношения. Постройте графы, изображающие эти бинарные отношения.

6. Будет ли частичным порядком а) объединение двух отношений частичного порядка; б) пересечение двух отношений частичного порядка?

7. Доказать, что всякий частичный порядок на конечном множестве может быть продолжен до линейного порядка.

8. Пусть варианты решений оцениваются по четырем минимизируемым критериям. Проведите сравнение вариантов, имеющих следующие векторные оценки по этим критериям в шкале {1, 2, 3, 4, 5}:

$a_1 = (5,3,2,1)$, $a_2 = (4,5,1,1)$, $a_3 = (3,1,5,5)$, $a_4 = (2,1,4,3)$,$a_5 = (4,2,1,1)$.

Постройте графы, изображающие а) отношение Парето на множестве этих вариантов, б) отношение лексикографического порядка. Укажите максимальные варианты и, если они есть, наилучшие.