**Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»**

## Лекция 4. Системы с распределенными параметрами.

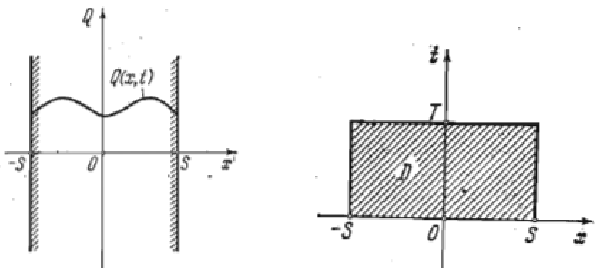
Задачи управления системами с распределенными параметрами. Классификация задач и методов управления системами с распределенными параметрами. Классификация уравнений с частными производными. Теоремы существования и методы решения линейных уравнений1-го порядка с частными производными. Линейные уравнения 2-го порядка с частными производными. Фундаментальные решения. Структурный метод исследования систем с распределенными параметрами. Численное решение уравнений в частных производных методом сеток. Программные пакеты решения уравнений с частными производными.

### Задачи управления системами с распределенными параметрами.

Особенностью многих технических систем состоит в том, что они имеют пространственную протяженность, и, их состояние невозможно характеризовать заданием изменения координат объекта лишь во времени. Состояние таких систем должно задаваться не только в каждый момент времени $t$, но и в каждой точке той геометрической области, которую занимают объект и управляющие органы системы. Состояние систем с распределенными параметрами, по меньшей мере, описывается одной функцией, но уже минимум двух независимых аргументов. Обычно этими аргументами являются время и пространственная координата (в простейшем случае одна ). Таким образом, состояние системы задается некоторой функцией $Q(x,t)$ (в общем случае векторной) как минимум двух аргументов. Движение таких систем описывается обычно дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений с частными производными.

Управляющие воздействия на объект управления с распределенными параметрами также могут носить разнообразный характер. Они могут быть сосредоточенными, а могут быть распределенного характера, то есть описываться функциями нескольких независимых переменных. Кроме того на управляющие воздействия и функции состояния системы могут накладываться дополнительные ограничивающие условия, обусловленные как временными, так и пространственными ограничениями, имеющими достаточно разнообразный характер.

*Задача 1 /Бутковский Методы с14/.* Рассмотрим типичную задачу управления объектом с распределенными параметрами - задачу управления одномерным температурным распределением (полем). Нагрев изделий, как правило, происходит в печах, и температура печи является управляющим воздействием. Разные графики нагрева металла можно реализовать путем изменения подачи топлива в печь или изменением уставки регулятора температуры. Рассмотрим, для примера, нагрев бесконечной однородной пластины, имеющей конечную ширину $2s$. Распределение температуры, по толщине пластины $x$ и во времени $t$ $(0<t<T)$, будем описывать с помощью функции $Q(x,t)$. То есть, распределение температуры $Q(x,t)$ задано в области $D$, которая, в данном случае, принадлежит плоскости $(x,t)$ и представляет собой прямоугольник. Функцию $Q(x,t)$ естественно назвать состоянием объекта.




Внутри отрезка $[-S,S]$ при моменте времени $t>0$ распределение температуры $Q(x,t)$ подчиняется линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка, называемого уравнением теплопроводности или уравнением Фурье: $\dfrac{\partial Q}{\partial t}=\alpha\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$, где величина $\alpha$ - коэффициент температуропроводности. Для того, чтобы решение этого уравнения было однозначно определено, необходимо задать граничные, или краевые, условия. Граничные условия, соответствующие начальному моменту $t_0$, называются начальными условиями. В данном случае, краевые условия имеют вид:

$$\lambda \frac{\partial Q(S,t)}{\partial x} = \alpha_1 [u_1 - Q(S,t)], t>0, \quad -\lambda \frac{\partial Q(-S,t)}{\partial x} = \alpha_2 [u_2 - Q(-S,t)], t>0,$$

где $\lambda$ - коэффициент теплопроводности, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ - коэффициенты теплообмена между греющей средой (печью) и металлом, $u_1$ и $u_2$ - температура греющей среды, соответственно, с одной и другой стороны от пластины. Величины $u_1$ и $u_2$ являются функциями времени и находятся в распоряжении оператора (регулятора) печи. Очевидно, что эти функции являются управляющими воздействиями. Физический смысл краевых условий выражает равенство тепловых потоков через поверхности пластины при значениях $x = S$ и $x = -S$, соответственно, изнутри и снаружи поверхностей. Начальное условие можно задать равенством $Q(x,t_0) = Q_0(x); -S \le x \le S$.

Одной из целей процесса нагрева является получение заданного распределения температуры тела по его массе. Это требование может быть задано в виде уравнения конечно состояния объекта: $Q(x,T) = Q^*(x); -S \le x \le S$, где $T$ - некоторый момент времени, а $Q^*(x)$ - заданное или желаемое распределение температуры.

Задача получения заданного распределения при помощи управляющих воздействий $u_1(t)$ и $u_2(t); t_0 \le t \le T$, является характерной для задач управления распределенными системами. Это, по сути дела, задача об управляемости данной системы. При этом следует учитывать такие ограничения, как допустимая температура нагрева печи, то есть $u_i < U_{np}$, исключение резкого нагревания пластины, задаваемого условием $| grad_x Q(x,t) | \le A$ и прочее.

Температура в печи регулируется скоростью подачи топлива, которая в свою очередь, определяется положением заслонки $w(t)$ на трубопроводе. Так как температура не может изменяться сразу после отклонения заслонки, то хорошее описание этой связи дает уравнение первого порядка с запаздыванием: $\theta_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i = k_i w(t - \tau_i), i = 1,2$, где $\theta_i$ - постоянные времени печи, $k_i$ - коэффициенты передачи, $\tau_i$ - запаздывание по i-му каналу управления.

**<u>Классификация задач и методов управления системами с распределенными параметрами.</u>**

Основные теоретически проблемы управления объектами с распределенными параметрами связаны с разработкой законов управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями с частными производными, а именно: решение задач управляемости, наблюдаемости, финитного управления, синтеза, оптимизации и многих других. К сожалению, только в небольшом ряде случаев, удается свести поставленные задачи к решению в рамках конечномерных пространств фазового пространства. Поэтому для нахождения решения вышеуказанных проблем приходится привлекать совершенно иной математический аппарат. Соответственно, приходится применять и совершенно другие методы моделирования систем, такие как моделирование систем с транцендентными и иррациональными передаточными функциями, разнообразные сеточные модели с активными и пассивными элементами. Технические проблемы проектирования систем с распределенными параметрами сводятся, как к разработке устройств измерения полей распределения физических величин, так и распределенных регуляторов управления параметрами среды. По математическому описанию распределенные системы можно разделить на линейные и нелинейные, детерминированные, стохастические и системы с нечетким описанием, стационарные и нестационарные, статические и динамические.

Управляемые системы с распределенным параметрами имеет смысл разделить, как и системы со сосредоточенными параметрами, на замкнутые системы, когда управления полностью определяется состоянием текущих и прошлых фазовых координат; и разомкнутые, когда управление полностью определяется априорной информацией о математической модели объекта, ее параметрами, ее начальным состоянием, информацией о возможных воздействиях внешней среды и ограничениями на фазовые координаты и управление.

**Классификации уравнений с частными производными.**

1. *По порядку уравнения* (порядком уравнения называют наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение): $u_t(t)=u_x$ - уравнение первого порядка; $u_t(t)=u_{xx}$ - уравнение второго порядка; $u_t(t)=u\cdot u_{xxx}+\sin(x)$ - уравнение третьего порядка.

2. *По числу переменных* (число независимых переменных): $u_t(t)=u_{xx}$ - уравнение с двумя переменными; $u_t(t)=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$ - уравнение с тремя переменными.

3*. По критерию «линейное/нелинейное».* Линейным уравнением в частных производных с двумя независимыми переменными называется уравнение вида:
$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$, где $A,B,C,D,E,F,G$ константы или заданные функции переменных $x,y$.

*Пример.* $u_{tt}(t)=e^{-t}u_{xx}+\sin t$ - линейное уравнение; $uu_{xx}+u_t=0$ - нелинейное уравнение;
$u_{xx}+yu_{yy}=0$ - линейное уравнение; $xu_x+yu_y+u^2=0$ - нелинейное уравнение.

4. *По критерию «однородное/неоднородное».* Уравнение
$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$ называется однородным, если правая часть $G(x,y)$ тождественно равно нулю для всех $x,y$. Если функция $G(x,y)$ не равна нулю тождественно, то уравнение называется неоднородным.

5. *По виду коэффициентов.* Если коэффициенты $A,B,C,D,E,F,G$ константы, то уравнение $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$ называется линейным уравнением с постоянными коэффициентами, в противном случае оно называется уравнением с переменными коэффициентами.

***Основные типы линейных уравнений второго порядка.***

*Параболический тип*. Уравнение параболического типа описывает процессы теплопроводности и диффузии и определяется условием: $B^2-4AC=0$

*Гиперболический тип*. Уравнения гиперболического типа описывают колебательные системы или волновые движения, и определяются условием: $B^2-4AC>0$.

*Эллиптический тип.* Уравнения эллиптического типа описывают установившиеся процессы и определяются условием: $B^2-4AC<0$.

*Пример*: $u_t(t)=u_{xx}$, $B^2-4AC=0$, - параболическое уравнение; $u_{tt}(t)=u_{xx}$, $B^2-4AC=4>0$, гиперболическое уравнение ; $u_{xx}+u_{yy}=0$, $B^2-4AC=-4<0$ - эллиптическое уравнение;
$yu_{xx}+u_{yy}=0$, $B^2-4AC=-4y$ - при: $y>0$ - эллиптическое; $y=0$ - параболическое; $y<0$ - гиперболическое.

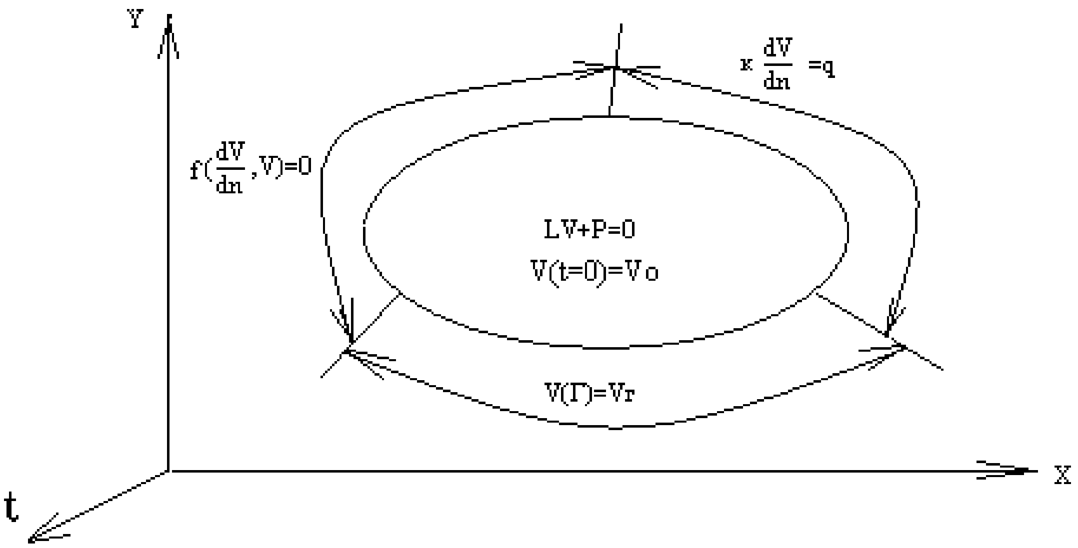
***Основные уравнения математической физики второго порядка.***

Выделяют следующие основные уравнения в частных производных второго порядка: волновое уравнение (гиперболический тип) - $u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,t)$ ; уравнение теплопроводности (параболический тип): $u_t=a^2\Delta u+f(x,t)$; уравнение Пуассона (эллиптический тип): $-\Delta u=f(x)$;

уравнение Лапласа (эллиптический тип): $\Delta u = 0$ . Здесь $u = u(x,t)$ , $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ - оператор Лапласа (часто используется также обозначение $L(D) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ ), $x \in R^n, a$ - (обычно) постоянная. Задача Коши для волнового уравнения ставится следующим образом: найти решение уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t)$, удовлетворяющего начальным условиям $u|_{t=0} = \varphi_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x)$, где $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ - заданные функции. Для уравнения теплопроводности задача Коши состоит в отыскании решения уравнения $u_t = a^2 \Delta u + f(x,t)$, удовлетворяющего начальному условию $u|_{t=0} = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - заданная функция. Если, кроме начальных условий, задаются те или иные граничные условия, то такую задачу называют смешанной. В частности, для эллиптических уравнений задаются только граничные условия.

***Постановка граничной (нестационарной) задачи.***

Если объект управления является нестационарным, то есть описывается нестационарным уравнением вида $L(t,D)u + f(x,t) = 0$, где $L(t,D) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, то необходимо задавать краевые условия – совокупность граничных и начальных условий. Различают граничные условия первого, второго и третьего рода.




*Начальные условия* — значения фазовых переменных и/или их функций внутри исследуемой области, заданные в нулевой момент времени $u|_{t=0} = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$- заданная функция.
Различают граничные условия первого, второго и третьего рода.
*Граничные условия первого рода* (условия Дирихле) включают в себя значения фазовых переменных, заданные на границе области $u|_{\Gamma} = \varphi_{\Gamma}(x)$.

*Граничные условия второго рода* (условия Неймана) включают в себя поток фазовой переменной через границу области $k\frac{du}{dn}|_{\Gamma} = q_{\Gamma}(x)$, где $n$ - вектор нормали к границе области, $q_{\Gamma}(x)$ - заданная скорость потока, через границу.

*Граничные условия третьего рода* — уравнение, связывающее фазовую переменную и ее производные $P(\frac{du}{dn}, u(x)) = 0$ , так называемые уравнения баланса. Классический пример уравнения баланса — уравнение теплового баланса, когда тепловой поток с границы объекта зависит от температуры.

**Теоремы существования и методы решения линейных уравнений первого порядка с частными производными.**

Попытка построить теорию уравнений с частными производными по образу и подобию обыкновенных дифференциальных уравнений изначально столкнулась с принципиальными затруднениями /Боос с46/. Рассмотрим аналог задачи Коши для системы уравнений:

$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t} = f_i(t, x, u, ...); i = 1:n; \sum_{i=1}^{n} n_i = n$. То есть найдем решение, принимающее при $t = 0$ начальные условия: $\frac{\partial^k u_i(x,0)}{\partial t} = v_{ik}(x); i = 1:n; k = 1:n$.

***Теорема Коши-Ковалевской.*** *Задача Коши* $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t} = f_i(t, x, u, ...); i = 1:n; \sum_{i=1}^{n} n_i = n$, $\frac{\partial^k u_i(x,0)}{\partial t} = v_{ik}(x); i = 1:n; k = 1:n$ *, в указанных допущениях и при дополнительных требованиях аналитичности всех функций* $f_i$ *и* $v_{ik}$ *, имеет единственное аналитической решение в некоторой окрестности точки* $(x_0, 0)$.

Для снятия требований аналитичности потребовалось введение понятия обобщенного решения, о которых будет рассказано далее. Только в этом случае удалось нормализовать ситуацию с поиском решения таких уравнений, как например $u_t = u_{xx}$.

***Определение.*** *Линейное однородное уравнение первого порядка с частными производными называется уравнение вида:* $a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ *, где* $x = (x_1, ..., x_n)^T$ *, а* $a_i(x), i = 1:n$ *заданные функции, определенные в некоторой области* $\Omega \in R^n; u = u(x)$ *- искомая функция /Ракин с5/.*

Будем предполагать в дальнейшем, что функции $a_i(x), i = 1:n$ являются непрерывными в области $\Omega \in R^n$. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx_i}{dt} = a_i(x); i = 1:n$ будем называть системой уравнений характеристик для уравнения с частными производными $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, а ее фазовые кривые характеристиками. Соответственно систему уравнений $\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = ... = \frac{dx_n}{a_n}$ будем называть системой уравнений характеристик уравнения $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$.

***Определение.*** *Непрерывная функция* $\psi : \Omega \to R$ *называется интегралом (первым интегралом) системы* $\frac{dx_i}{dt} = a_i(x); i = 1:n$ *, если для любого решения* $x(t)$ *этой системы имеет место тождество* $\psi(x(t)) \equiv C$. *Здесь С – некоторая постоянная.*

***Теорема.*** *Функция* $u = u(x)$ *является решением уравнения* $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ *тогда и только тогда, когда она является первым интегралом системы* $\frac{dx_i}{dt} = a_i(x); i = 1:n$ *уравнений характеристик.*

***Определение***. *Задачей Коши, для уравнения* $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$*, называется задача о нахождении решения* $u = u(x)$ *этого уравнения, удовлетворяющего условию:* $u(x)|_{x\in\Gamma} = \varphi(x)$*. Здесь* $\Gamma$ *- гладкая гиперповерхность в* $\Omega \in R^n$ *, а* $\varphi(x)$ *- заданная на этой гиперповерхности гладкая функция.*

Точку $x \in \Gamma$ будем называть нехарактеристической, если характеристика, проходящая через эту точку, трансверсальна (то есть не является касательной ) к начальной гиперповерхности $\Gamma$.

***Теорема.*** *Пусть* $x \in \Gamma$ *является нехарактеристической точкой на поверхности* $\Gamma$*. Тогда существует такая окрестность точки* $x$*, что задача Коши для уравнения* $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ *в этой окрестности имеет решение и, при этом только одно.*

Общее решение уравнения $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ определяется на основании следующей теоремы.

***Теорема.*** *Если* $\psi_1(x),...,\psi_{n-1}(x)$ *независимые первые интегралы системы уравнений характеристик* $\frac{dx_i}{dt} = a_i(x); i = 1:n$ *, то все решения уравнения* $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$*, даются формулой* $u = \Phi(\psi_1(x),...,\psi_{n-1}(x))$ *, где* $\Phi(.)$ *- произвольная непрерывно дифференцируемая функция.*

Будем соответственно называть уравнение первого порядка с частными производными неоднородным, если оно имеет вид: $a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x)$ Для линейного неоднородного уравнения существование решения задачи Коши дается условиями следующей теоремы.

***Теорема.*** *Задача Коши для уравнения* $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x)$ *в достаточно малой окрестности любой нехарактеристической точки* $x$ *начальной гиперповерхности* $\Gamma$ *имеет решение и при том единственное. Это решение определяется формулой* $u(g(x,t)) = \varphi(x) + \int_0^t b(g(x,\tau))d\tau$ *, где* $g(x,t)$ *- значение решения системы уравнений характеристик ( с начальным условием* $g(x,0) = x$ *на начальной поверхности* $\Gamma$ *) в момент времени* $t$ *.*

Имеется также следующее утверждение (метод Лагранжа).

***Теорема***. *Если* $f_i(x_1,..., x_n, u) = C_i$ *независимые решения уравнений* $\frac{dx_1}{P_1} = ... = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{R}$, *то соотношение* $\Phi(f_1,..., f_n) = 0$, *где* $\Phi$ *- произвольная дифференцируемая функция, является общим решением линейного уравнения в частных производных* $P_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + P_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = R$.

***Примечание***. *Независимость решений* $f_i$ *понимается в том смысле, что Якобиан* $\frac{\partial(f_1,.., f_n)}{\partial(x_1,...x_n)}$ *не равен тождественно нулю.*

***Метод разделения переменных.***

Метод позволяет для некоторых дифференциальных уравнений находить семейства решений, зависящие от произвольных параметров. Однако данный метод не дает возможностей нахождения всей совокупности решений. Метод заключается в том, что решение уравнения ищется в виде произведения или суммы функций, каждая из которых зависит от одной из независимых переменных, от которых в свою очередь зависит искомая функция. Если после выполнения этой процедуры произошло разделение переменных, то части уравнения, зависящие от разных переменных, приравниваются одной константе (произвольному параметру). Так, в случае двух независимых переменных, вместо одного уравнения с частными производными, возникают два уравнения в обыкновенных производных.

***Система линейных уравнений первого порядка.***

Простейшая система линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка имеет вид: $\frac{\partial u}{\partial x_k} = f_k(x); k = 1:n;$. Здесь $x = (x_1,..., x_n)^T$, $u = u(x)$ - искомая функция.

Если функции $f_k(x)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области $\Omega \in R^n$, то всякое решение $u = u(x)$ этой системы будет дважды непрерывно дифференцируемым. Поэтому должны выполняться следующие соотношения: $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}; k, i = 1:n$. Эти равенства называются условиями интегрируемости исходной системы $\frac{\partial u}{\partial x_k} = f_k(x); k = 1:n;$ . В случае конкретной системы, ее можно, на основе условий интегрируемости, решить следующим образом. Сначала найти все множество функций, удовлетворяющих первому уравнению системы, затем найти его подмножество, удовлетворяющее второму уравнению, и так далее.

**Линейные уравнения второго порядка.**

Уравнение вида: $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1},..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$ называется квазилинейным дифференциальным уравнение с частными производными второго порядка. Если функция $F$ линейна по всем своим аргументам, кроме, быть может первого, то такое уравнение называется линейным. Здесь $x = (x_1,..., x_n)^T \in R^n$, $n \geq 2; u = u(x)$ - неизвестная функция класса $C^2$, то есть дважды непрерывно дифференцируемая. Уравнение классифицируется, как уже отмечалось выше, по собственным числам матрицы $A = (a_{ik}); i, k = 1:n$, которые вещественны в силу ее симметричности. Пусть в точке $x \in \Omega \in R^n$ задания коэффициентов $A = (a_{ik}); i, k = 1:n$ уравнения имеется следующее распределение собственных чисел матрицы $A$: положительных $\alpha$, отрицательных $\beta$ и нулевых $\gamma$. Тогда, приведенную выше, классификацию уравнений для двух независимых переменных можно обобщить следующим образом. Уравнение $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + F(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$ имеет в точке $x$ эллиптический тип, если справедливы соотношения - $\alpha = n; \beta = \gamma = 0$; параболический тип, если $\alpha = n-1; \beta = 0; \gamma = 1$; гиперболический тип, если $\alpha = n-1; \beta = 1; \gamma = 0$. Фундаментальную роль в исследовании приведенного уравнения играет характеристическая квадратичная форма уравнения: $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\lambda_i\lambda_k$

***Определение.*** *Поверхность* $\varphi(x) = 0$ *называется характеристической поверхностью уравнения* $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + F(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$ *или просто характеристикой, если в каждой ее точке имеет место равенство* $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\varphi_{x_i}\varphi_{xk} = 0$.

Уравнение $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\varphi_{x_i}\varphi_{xk} = 0$ называют также уравнением характеристик исходного уравнения второго порядка.

**<u>Фундаментальные решения /Босс с125/.</u>**

Обобщенным решением уравнения $L(D)u = f(x)$, где $L(D) = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2}$ считается всякая обобщенная функция $u \in D^*$, удовлетворяющая уравнению $L(D)u = f(x)$ в смысле $\langle L(D)u, \psi\rangle = \langle f(x), \psi\rangle$. Здесь $D^*$ - определяется как совокупность n-ых финитных (обобщенных) функций, определенных над пространством переменных $x$, и непрерывно дифференцируемых любое число раз, а $\psi(x)$ - любая произвольная функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности вместе со своими первыми производными. В случае «импульсного внешнего воздействия» $f(x) = \delta(x)$ решение $\varepsilon(x)$ уравнения $L(D)\varepsilon = \delta(x)$ называется фундаментальным. Роль фундаментальных решений заключена в соотношении $u = \varepsilon * f$ с помощью свертки функций $\varepsilon$ и $f$, при условии, что такая свертка функций существует. Здесь, свертка функций определяется, как $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$. Действительно, несложно проверить, что будет справедливо соотношение $L(D)(\varepsilon * f) = L(D)\varepsilon * f = \delta(x) * f = f(x)$. Смысл равенства $u = \varepsilon * f$ заключается в представлении $f(x) = \int f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$ в виде суммы точечных источников $f(\xi)\delta(x-\xi)$, порождающих реакции системы и с последующим представлением решения в виде суперпозиции этих реакций: $u = \varepsilon * f = \int f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$. Как фундаментальные, так и обобщенные решения неоднородных уравнений $L(D)u = f(x)$, в силу принципа суперпозиции, определены с точностью для решения однородных уравнений $L(D)u = 0$. То есть, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $u=\varepsilon * f+u_0$ , где $u_0$ - решение однородного уравнения $L(D)u=0$ . Применяя к уравнению $L(D)\varepsilon=\delta(x)$ преобразование Фурье, можно получить необходимое и достаточное условие того, чтобы $\varepsilon$ было фундаментальным решением оператора $L(D)$ : $L(-i\omega)\Phi(\varepsilon)=1$ . То есть, для решения уравнения необходимо найти $\Phi(\varepsilon)=L^{-1}(-i\omega)$ .

*Имеет место следующий известный результат: когда оператор $L(D)$ имеет постоянные коэффициенты, такое решение существует всегда (**теорема Хёрмандера**).*

*Пример.* Рассмотрим уравнение теплопроводности: $\varepsilon_t-a^2\Delta\varepsilon=\delta(x,t)$ . Применив Фурье-преобразование по координате $x$ , получим следующее соотношение: $\Phi_x(\varepsilon_t)-a^2\Phi_x(\Delta\varepsilon)=\Phi_x(\delta(x,t))$ . С учетом следующих соотношений: $\Phi_x(\varepsilon_t)=\frac{\partial}{\partial t}\Phi_x(\varepsilon)$ , $\Phi_x(\Delta\varepsilon)=-\|\omega\|^2\Phi_x(\varepsilon)$ , $\Phi_X(\delta(x,t)=\Phi_X(\delta(x)\delta(t))=\delta(t)$ , получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение: $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_x(\varepsilon)+a^2\|\omega\|^2\Phi_x(\varepsilon)=\delta(t)$ .

Данное уравнение имеет следующее решение: $\Phi_x(\varepsilon)=\theta(t)e^{-a^2\|\omega\|^2 t}$ . Применяя обратное преобразование Фурье $\Phi^{-1}{}_x$ получим обобщенное решение в виде: $\varepsilon(x,t)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\exp\{-\frac{\|x\|^2}{4a^2t}\}$ .

**Структурный метод исследования систем с распределенными параметрами.**

Метод структурных схем для взаимосвязанных распределенных схем, который был разработан .Бутковским, является обобщением известного структурного метода, который применяется для изучения систем с сосредоточенными параметрами. Данный метод дает наглядное представление о функционировании системы с распределенными параметрами на основе определенных правил взаимодействия ее частей с друг другом, а также единого подхода к формированию математических моделей блоков с помощью функций Грина.

*Понятие о распределенных сигналах.*

Распределенным сигналом называется функция $f(x,t)$ , $x\in D\subset R^n$ , $t\in T\subset R$ . Переменную $x$ называют пространственной переменной, $D\subset R^n$ - пространственной областью, а переменную $t$ - временем. Если функция $f(x,t)$ принимает числовые значения, то сигнал называется скалярным распределенным сигналом. Функция $f(x,t)$ , в общем случае, может принадлежать тому или иному функциональному пространству $\Phi$ ( вообще говоря бесконечномерному), с введенным на нем заданным понятием нормы. Важным классом функций для систем с распределенными параметрами являются обобщенные функции, с помощью которых, как это уже было показано выше, можно решать многие задачи, связанные с уравнениями математической физики. Если в распределенном сигнале $f(x,t)$ , размерность пространственной области $D$ равна n, то сигнал называют n-ым распределенным сигналом. Если, в качестве функционального пространства $\Phi$ сигналов $f$ рассматриваются функции, не зависящие от пространственной переменной $x$ , а только зависящие от переменной $t$ , то сигналы $f(t)$ называют сосредоточенными сигналами.

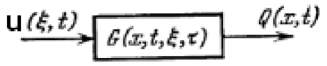
Если, в качестве функционального пространства $\Phi$ сигналов $f$ рассматриваются функции, не зависящие от переменной $t$, а только зависящие от пространственной переменной $x$, то сигналы $f(x)$ называют статическими распределенными сигналами.

***Распределенные блоки.***

Распределенным блоком называется устройство, в котором выделены вход и выход, причем на вход поступает распределенный сигнал, а на выходе, однозначным образом, появляется выходной, также распределенный сигнал, который, вообще говоря, может иметь другую размерность.

Графическое изображение распределенного блока подразумевает указание входного сигнала $u(x_1,t)$, $x_1 \in D_1$, $t \in T \subset R$ и выходного сигнала $Q(x_2,t)$, $x_2 \in D_2$, $t \in T \subset R$.


Линейные распределенные блоки (нелинейные блоки в данном разделе курса не рассматриваются) задаются с помощью линейного интегрального оператора, который каждому входному сигналу $u(x_1,t)$, $t \ge t_0$, <u>однозначно</u> ставит в соответствие выходной сигнал $Q(x_2,t)$, $x_2 \in D_2$, $t \ge t_0$: $Q(x_2,t) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{D_1} G(x_2,t,\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau$. Таким образом, распределенный блок однозначно определяется заданием ядра $G(x,t,\xi,\tau)$ интегрального оператора, который является функцией четырех аргументов ( двух пространственных $x \in D_2$, $\xi \in D_1$ и двух временных $t,\tau \ge t_0$ ). Интегральное соотношение, связывающее вход и выход распределенного блока, для краткости часто записывают в следующем виде: $Q(x_2,t) = G(x_2,t,\xi,\tau) \otimes u(x_1,t)$. Здесь символ $\otimes$ означает интегрирование двух связанным этим символом функций (ближайших в записи формулы к знаку $\otimes$ ), по области, в которой они меняются. Ядро $G(x,t,\xi,\tau)$ называют, или функцией Грина, или импульсной распределенной переходной функцией.




Например, пусть входной сигнал $u(x_1,t)$ описывает точечный импульсный источник. Тогда можно записать следующее соотношение: $u(x_1,t) = \delta(x_1 - \xi_0)\delta(t - \tau_0)$, $x_1, \xi_0 \in D_1$, $t, \tau_0 \ge t_0$. Тогда можно записать следующее соотношение:

$$Q(x_2,t) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{D_1} G(x_2,t,\xi,\tau)\delta(x_1 - \xi_0)\delta(t - \tau_0) d\xi d\tau = G(x_2,t,\xi_0,\tau_0).$$

То есть функция $G(x_2,t,\xi_0,\tau_0)$ показывает реакцию распределенного блока в точке $x_2 \in D_2$ в момент $t \ge t_0$, если на вход распределенного блока поступило единичное импульсное возмущение, приложенное в точке $x_1 = \xi_0$ в момент $t = \tau_0$.

Необходимо отметить важное свойство причинности импульсной распределенной переходной функции: $G(x,t,\xi,\tau) = 0$, $x_2 \in D_2$, $\xi \in D_1$, $\tau > t$. Данное свойство показывает, что система не может реагировать на входное воздействие раньше момента времени появления этого воздействия.

Символически связь между входным сигналом $u(x_1,t)$ линейного распределенного блока и выходным сигналом $Q(x_2,t)$ можно задать также с помощью уравнения: $L(x_2,t,Q(x_2,t))=u(x_1,t)$, где $L$ - некоторый линейный оператор. Тогда, по определению, импульсная распределенная переходная функция $G(x,t,\xi,\tau)$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$L(x_2,t,G(x,t,\xi,\tau))=\delta(x_1-\xi)\delta(t-\tau)$ или $G(x,t,\xi,\tau)=L^{-1}(x_2,t,\delta(x_1-\xi)\delta(t-\tau))$.

***Стационарные распределенные блоки.***

Если параметры распределенного объекта не зависят от времени, то соответствующий этому объекту распределенный блок называется стационарным распределенным блоком. Импульсная распределенная переходная функция стационарного блока зависит только от трех независимых аргументов и имеет вид: $G(x,t,\xi,\tau)=G(x,\xi,t-\tau)$. Динамика такого блока инвариантна относительно сдвигов во времени. Поэтому за начало отсчета времени можно принять нулевой момент времени, то есть $t\geq 0$. Интегральный оператор, в этом случае, описывается соотношением: $$Q(x_2,t)=\int_{t_0}^{t}\int_{D_1}G(x_2,\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau=G(x_2,\xi,t-\tau)\otimes u(x_1,t).$$

Стационарные распределенные блоки удобно описывать в терминах преобразования Лапласа сигнала $u(x,t)$ и функции Грина $G(x,\xi,t)$ по временной переменной $t$:

$$U(x,s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}u(x,\tau)d\tau,\quad W(x,\xi,s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}G(x,\xi,\tau)d\tau$$

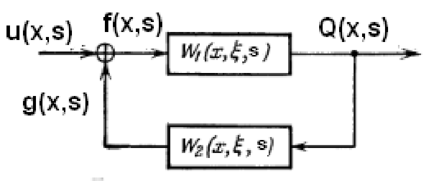
Функция $W(x,\xi,s)$ называется передаточной функцией распределенного блока с функцией Грина (импульсной распределенной переходной функцией) $G(x,\xi,s)$. Если положить $s=i\omega$, то функцию $W(x,\xi,i\omega)$ естественно назвать частотной функцией распределенного блока. В терминах преобразования Лапласа можно записать следующее равенство, связывающее изображение выхода с изображением входа:

$$Q(x_2,s)=\int_{D_1}W(x_2,\xi,s)U(\xi,s)d\xi=W(x_2,\xi,s)\otimes U(x_1,s)$$

В случае однородности процесса по пространственным переменным распределенный стационарный блок удобно описывать в терминах двустороннего преобразования Лапласа, как по временному, так и пространственному параметрам.

***Замыкание обратной связью.***

Соединение блоков, показанное на рисунке, называется замыкание обратной связью. Сигнал $U(x,s)$ называется входным сигналом замкнутой системы, а сигнал $Q(x,s)$ выходным сигналом замкнутой системы.




Блок с передаточной функцией $W_1(x,\xi,s)$ находится в канале прямой связи, а блок с передаточной функцией $W_2(x,\xi,s)$ - в канале обратной связи. На основе анализа приведенной блок-схемы, можно

записать следующие соотношения: $Q(x,s)=W_1(x,\xi,s)\otimes f(x,s)$, $g(x,s)=W_2(x,\xi,s)\otimes Q(x,s)$, $f(x,s)=u(x,s)+g(x,s)$. Отсюда получим следующее равенство:
$Q(x,s)=W_{21}(x,\xi,s)\otimes Q(x,s)+W_1(x,\xi,s)\otimes u(x,s)$, где $W_{21}(x,\xi,s)=W_1(x,\xi,s)\otimes W_2(x,\xi,s)$.

Рассмотрим случай, когда $\mathrm{u(x,s)}=\delta(\mathrm{x}-\xi)$. Тогда, по определению, имеем следующее равенство: $Q(x,s)=W(x,\xi,s)$, где $W(x,\xi,s)$ - передаточная функция замкнутой системы. Соответственно, можно переписать предыдущее соотношение в следующем виде:
$W(x,\xi,s)=W_{21}(x,\xi,s)\otimes W(x,\xi,s)+W_1(x,\xi,s)$ или в развернутом виде:
$W(x,\xi,s)=W_1(x,\xi,s)\otimes W_2(x,\xi,s)\otimes W(x,\xi,s)+W_1(x,\xi,s)$. Данное соотношение, при каждой фиксированной паре $s$ и $\xi$, представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма относительно искомой передаточной функции $W(x,\xi,s)$. В развернутом виде данное уравнение можно записать в следующем виде: $W(x,\xi,s)=\int\limits_{D_2} W_{21}(x,\eta,s)W(\eta,\xi,s)d\eta+W_1(x,\xi,s)$, где $x\in D_2$, $\xi\in D_1$, $s\in C$. В ряде вырожденных случаев, решение интегрального уравнения может быть сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим замкнутую систему, в прямой цепи которой расположен объект, который имеет передаточную функцию $W_1(x,\xi,s)$.

Управление объектом будем осуществлять с помощью регулятора с сосредоточенными параметрами, который расположен в обратной цепи и имеет передаточную функцию $W_R(s)$.

Регулятор измеряет регулируемое распределение $Q(x,s)$ в одной точке $x=a$. Обратное воздействие на объект также осуществляется в одной точке $x=b$, которая, в общем случае, отлична от точки измерения. В этом случае можно записать следующее соотношение, которое будет определять передаточную функцию замкнутой системы: $W(x,b,s)=\dfrac{Q(x,s)}{U(b,s)}=\dfrac{W_1(x,b,s)}{1-W_1(a,b,s)W_R(s)}$

Формула расчета передаточной функции замкнутой системы также значительно упрощается, если нужно получить передаточную функцию по каналу от распределенного входного воздействия $U(x,s)$ к сосредоточенному выходу $Q(a,s)$: $W(a,\xi,s)=\dfrac{Q(a,s)}{U(x,s)}=\dfrac{W_1(a,\xi,s)}{1-W_1(a,b,s)W_R(s)}$.

***Переходные блоки.***

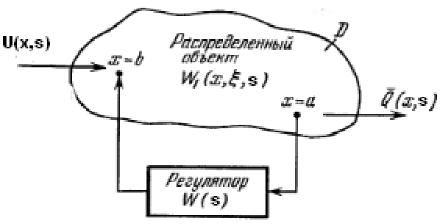
Рассмотрим математическую модель взаимодействия системы с распределенными параметрами с системой с сосредоточенными параметрами.

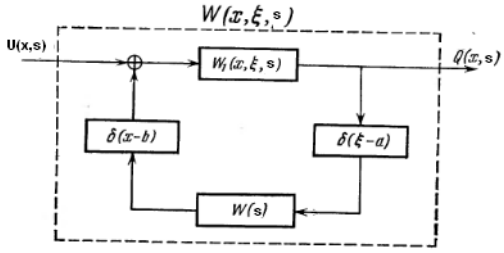
Пусть задан распределенный сигнал $U(x,s)$, который поступает на вход некоторого блока, на выходе которого появляется сосредоточенный сигнал $Q(s)$, то есть не зависящий от пространственных переменных. Математическая модель взаимодействия между этими сигналами описывается с помощью линейного интегрального оператора следующего вида:

$$Q(s)=\int\limits_D W_\xi(\eta,s)U(\eta,s)d\eta=W_\xi(\xi,s)\otimes U(x,s).$$

Очевидно, что ядро этого оператора $W_\xi(\xi,s)$ является передаточной функцией данного блока, которое зависит лишь от входной пространственной переменной $\xi$ и не зависит от значений выходной пространственной переменной $x$. Поэтому такой переходный блок называют обычно $\xi$ -

блоком. В частности, с помощью $\xi$ - блока $W_{\xi}(\xi,s)=\delta(\xi-a)$ можно получить значение входного сигнала $U(x,s)$ в некоторой фиксированной точке $x=a$.




Пусть теперь задан сосредоточенный сигнал $U(s)=U(b,s)$, который поступает на вход некоторого блока, на выходе которого появляется распределенный сигнал $Q(x,s)$. В этом случае связь между этими сигналами описывается линейным алгебраическим соотношением вида: $Q(x,s)=W_x(x,s)U(b,s)$. Функция $W_x(x,s)$ называется $x$- блоком, так как не зависит от входной пространственной переменной $\xi$, а зависит лишь от пространственной переменной выхода $x$. В частности, с помощью $x$- блока $W_x(x,s)=\delta(x-b)$ можно получить входной сигнал $Q(x=b,s)=U(s)$ для распределенного блока, поступающий с выхода блока с сосредоточенными параметрами: $Q(x,s)$, то есть $Q(x,s)=\int\limits_D \delta(x-b)U(b,s)db$. Более общий вид переходных блоков $\xi$-типа и $x$- типа можно представить в виде конечной (или бесконечной) суммы произведений функций, каждая из которых зависит лишь от одного аргумента: $W_{\xi}(\xi,s)=\sum_{i=1}^{n} V_{\xi,i}(\xi)\overline{V}_i(s)$, $W_x(\xi,s)=\sum_{i=1}^{n} V_{x,i}(\xi)\widetilde{V}_i(s)$. С помощью указанных сумм можно достаточно точно аппроксимировать довольно широкий класс передаточных функций переходных блоков.

## Численное решение уравнений в частных производных методом сеток.

### *Численное решение задачи Дирихле для эллиптических уравнений.*

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ в прямоугольной области $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$. Пусть граничные условия задаются в следующем виде $u(x,0)=g_1(y)$, $u(1,y)=g_2(y)$, $u(x,1)=g_3(y)$, $u(0,y)=g_4(y)$.

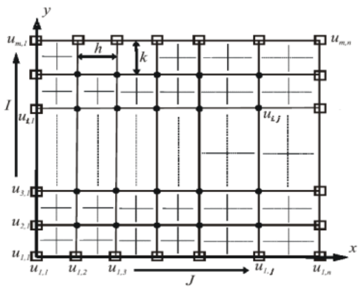
Предварительно вспомним понятие конечно – разностной аппроксимации для частных производных. Если исходить из разложения Тейлора функции двух переменных:

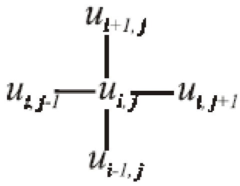
$$u(x+h,y)=u(x,y)+u_x(x,y)h+u_{xx}(x,y)\frac{h^2}{2!}+\ldots,\quad u(x-h,y)=u(x,y)-u_x(x,y)h+u_{xx}(x,y)\frac{h^2}{2!}-\ldots,$$

то можно записать следующие аппроксимации частных производных $u_x(x,y)\approx\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}$,

$$u_{xx}(x,y)\approx\frac{1}{h^2}[u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)],$$

$u_y(x,y)\approx\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}$, $u_{yy}(x,y)\approx\frac{1}{k^2}[u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)]$. Обычно при расчетах пользуются центральными аппроксимациями. Построим в плоскости $(x,y)$ равномерную сетку.






Введем следующие обозначения

$u_{i,j}=u(x_j,y_i)$, $u_{i+1,j}=u(x_j,y_i+k)$, $u_{i-1,j}=u(x_j,y_i-k)$, $u_{i,j-1}=u(x_j-h,y_i)$, $u_{i,j+1}=u(x_j+h,y_i)$;

$u_x(x_j,y_i)=\frac{1}{2h}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})$, $u_y(x_j,y_i)=\frac{1}{2k}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})$,

$u_{xx}(x_j,y_i)=\frac{1}{h^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})$, $u_{yy}(x_j,y_i)=\frac{1}{k^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})$.

Тогда конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа примет следующий вид:

$\frac{1}{h^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})+\frac{1}{k^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})=0$. Если принять условие $k=h$, то уравнение Лапласа приводится к виду: $u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=0$. Разрешив данное уравнение относительно величины $u_{i,j}$, получим следующее выражение $u_{i,j}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})$.

Отметим, что все выражения вычисляются для внутренних узлов сетки, так как значения функции на границах заданы. Таким образом, если задать начальные значения решения уравнения Лапласа в узлах сетки и затем последовательно уточнять их в соответствии с заданным шаблоном $u_{i,j}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})$, то итерационный процесс будет сходиться (релаксировать) к точному решению. Для численного решения задачи Дирихле методом релаксации можно использовать следующий алгоритм.

1. Присвоить величинам $u_{i,j}$ во внутренних узлах сетки некоторые численные значения (например, равные среднему значению всех граничных условий).
2. Пересчитать значения во всех внутренних точках сетки в соответствии с шаблоном (маской) $u_{i,j}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})$, заменяя старое значение средним значением, вычисленным по четырем соседним точкам.

Недостатком данной схемы является низкая скорость сходимости итерационного процесса. Для улучшения скорости сходимости обычно используют специальные методы, основанные на особенностях представления конечно-разностной аппроксимации уравнения Лапласа в матричной форме.

**Программные пакеты для решения уравнений в частных производных и моделирования систем с распределенными параметрами.**

***Пакет MathCad***.

Встроенная функция $pdesolve$ применяется в рамках вычислительного блока, начинающегося ключевым словом Given, и пригодна для решения различных гиперболических и параболических уравнений. Функция $pdesolve$ возвращает скалярную (для одного уравнения) или векторную (для системы уравнений) функцию двух аргументов $(x,t)$, являющуюся решением уравнения/ий в частных производных. Результирующая функция получается интерполяцией сеточной функции.

Альтернативная функция $numol$ реализует тот же алгоритм сеток, позволяющий, однако, вручную задать большинство его параметров. Решение эллиптических уравнений в частных производных реализовано в пакете MathCad только для единственного типа задач – двумерного уравнения Пуассона. Для задания нулевых граничных условий на квадратной области используется функция $multigrid$. В более сложных случаях, например, для решения краевой задачи с ненулевыми условиями на границах, следует использовать функцию $relax$.

***Пакет PDE Toolbox (Partial Differential Equations) MatLab.***

Пакет реализован в виде интегрированный среды основных инструментальных средств и функций численных методов решения уравнений с частными производными для основных задач математической физики и двумерной расчетной области. В пакете реализованы проекционные процедуры с конечными элементами на базе метода Галеркина, решение скалярных краевых задач эллиптического, параболического и гиперболического типов. Осуществляется визуальный принцип задания как стационарных, так и нестационарных краевых условий. В пакете предусмотрены развитые графические средства отображения двух и трех - трехмерных решений.

***Пакет FlexPDE.***

Программа FlexPDE предназначена для построения сценарных моделей решения дифференциальных уравнения в частных производных методом конечных элементов. По сценарию, написанному пользователем, FlexPDE производит операции, необходимые для того, чтобы преобразовать описание систему в УЧП в модель для расчета методом конечных элементов. Таким образом, пользователь имеет возможность готовить для решения начальную краевую задачу в своих обозначениях. Число решаемых уравнений в системе ограничивается только мощностью компьютера. Решаемые уравнения могут быть как линейными, так и нелинейными.

***Пакет ANSYS.***

Пакет ANSYS – это совокупность различных программных модулей, предназначенных для проведения конечно-элементного анализа в различных областях инженерной деятельности. Данный пакет имеет тесные связи с программными пакетами геометрического проектирования, например, таким как AutoCad. В состав пакета входят следующие модули:

Multiphysics – программа, обеспечивающая расчетные возможности для модулей различных инженерных дисциплин;

Mechanical – программа конструкционного (прочностного) и термического анализа;

Structural – программа прочностного анализа, включая геометрические и физически нелинейные задачи;

Emag – электромагнитные расчеты;

CFX - модуль анализа гидрогазодинамических процессов, многофазных потоков;

LS-DYNA – программа высоконелинейных расчетов, предназначенная для численного моделирования взаимодействий многих тел;

DesignSpace – расчеты статической прочности, устойчивости по Эйлеру, теплопроводность с поддержкой сборок

Rigid Dynamics – программа моделирования механических систем, соединенных шарнирными соединениями и т.д.

**Контрольные вопросы к лекции 4.**

| № | Текст контрольного вопроса | Варианты ответа |
|---|---|---|
| 1 | Линейное уравнение 2-го порядка с частными производными с постоянными коэффициентами $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=0$ относится к параболическому типу, если справедливо соотношение… | 1. … $B^2-4AC=0$<br>2. … $B^2-4AC<0$<br>3. … $B^2-4AC>0$<br>3. … $AC-B>0$ |
| 2 | К какому типу относится уравнение $(x^2+y^2)u_{xx}+u_{yy}=0$? | 1. Гиперболическому.<br>2. Параболическому.<br>3. Эллиптическому. |
| 3. | Общее решение линейного уравнения с частными уравнениями $P_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+P_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,...,x_n)$ имеет вид … | 1. … $u=\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(x_1,...,x_n)+R(x_1,...,x_n)$, где $f_i(x_1,...,x_n)$ независимые решения уравнений $\frac{dx_1}{P_1}=...=\frac{dx_n}{P_n}$<br>2. … $\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(x_1,...,x_n,u)-R(x_1,...,x_n)=0$, где $f_i(x_1,...,x_n,u)$ независимые решения уравнений $\frac{dx_1}{P_1}=...=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{R}$.<br>3. … $\Phi(f_1,...,f_n)=0$, где $f_i(x_1,...,x_n,u)=C_i$ независимые решения уравнений $\frac{dx_1}{P_1}=...=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{R}$., |
| 4 | Общее решение неоднородного уравнения $L(D)u=f(x)$, где $L(D)=\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2}$ имеет вид… | 1. … $u=\int f(y)\varepsilon(x-y)dy+\tilde{u}$, где $\varepsilon(x)$- обобщенное решение уравнения $L(D)\varepsilon=\delta(x)$, а $\tilde{u}$ - решение однородного уравнения $L(D)\tilde{u}=0$.<br>2. … $u=\int f(y)\varphi(x-y)dy$, где $\varphi(x)$ решение однородного уравнения $L(D)\varphi=0$.<br>3. … $u=\int f(y)\varepsilon(x-y)dy$, где $\varepsilon(x)$- обобщенное решение уравнения $L(D)\varepsilon=\delta(x)$. |
| 5 | Импульсная распределенная переходная функция $G(x,t,\xi,\tau)$ (функция Грина распределенного блока) имеет свойство причинности, которое можно записать в виде… | 1. … $G(x,t,\xi,t)=x$.<br>2. … $G(x,t,\xi,\tau)=0$ при $\|\xi\|>\|x\|$.<br>3. … $G(x,t,\xi,\tau)=0$ при $\tau>t$.<br>4. … $G(x,t,\xi,\tau)>0$ при $\tau<t$ |
| 6 | Передаточная функция $W_z(x,\xi,s);(x\in D_1;\xi\in D_2)$ замкнутой стационарной системы с распределенными параметрами, имеющей в прямой цепи блок с передаточной функцией $W_1(x,\xi,s)$, охваченный отрицательной обратной связью, содержащей блок с | 1. …. $W_z(x,\xi,s)=\frac{W_1(x,\xi,s)}{1+W_1(x,\xi,s)W_2(x,\xi,s)}$.<br>2. … $W_z(x,\xi,s)=\int W_1(x,\xi,s-\tau)W_2(x,\xi,\tau)d\tau+W_1(x,\xi,s)$. |

| | | |
|---|---|---|
| | передаточной функцией $W_2(x,\xi,s)$, определяется соотношением …. | 3. … $W_z(x,\xi,s) = \int\limits_{D_2} W_{21}(x,\eta,s)W_z(\eta,\xi,s)d\eta +$ $W_1(x,\xi,s)$, где $W_{21}(x,\xi,s) = \int\limits_{D_2} W_1(x,\eta,s)W_2(\eta,\xi,s)d\eta$ |
| 7 | На вход переходного $\xi$ блока с передаточной функцией $W(\xi,s)$ поступает распределенный сигнал $U(x,s)$. Выходной сигнал блока равен $U(a,s)$. Тогда передаточная функция $W(\xi,s)$ определяется соотношением… | 1. … $W(\xi,s) = \int \delta(s-\tau)U(a,\tau)d\tau$<br>2. … $W(\xi,s) = \delta(\xi - a)$<br>3. … $W(\xi,s) = \int W(\eta,s)U(\eta - a,s)d\eta$ |
| 8 | Распределенный стационарный блок описывается уравнением с частными производными вида $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0;\ \ u(0,0) = u_z$. Передаточная функция блока $W(x,s)$ имеет вид…. | 1. … $W(x,s) = \dfrac{1}{s}e^{-s^2 x}$.<br>2. … $W(x,s) = \dfrac{1}{s}e^{-\sqrt{s}x}$.<br>3. … $W(x,s) = \dfrac{x}{s^2+1}$ |
| 9 | Запишите расчетное выражение разностной схемы решения граничной задачи Дирихле для уравнения с частными производными вида $u_x + u_y = 0$. | 1. $u_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1})$<br>2. $u_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i,j+1})$<br>3. $u_{ij} = \dfrac{1}{4}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1})$ |