0

Вариант 8

1. **(7.25)** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 48 мкФ, катушки с индуктивностью L = 24 мГн и активным сопротивлением R = 20 Ом. Определить частоту свободных электромагнитных колебаний в этом контуре. На сколько изменится частота электромагнитных колебаний в контуре, если пренебречь активным сопротивлением катушки?

Дано:

$C = 48$ мкФ $= 48\cdot10^{-6}$ Ф

$L = 24$ м Гн $= 24\cdot10^{-3}$ Гн

$R = 20$ Ом

ν - ?, $\Delta\nu$ - ?

Решение:

Угловая частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\ ,$$

гдеβ - коэффициент затуханий:

Так как

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а коэффициент затуханий определяется как

$$\beta = R/(2L),$$

то имеем

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\ .$$

Угловая частота колебаний связана с частотой соотношением

$$\omega = 2\pi\nu$$

Отсюда

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Если пренебречь активным сопротивлением катушки, то частота колебаний равна

$$\nu' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}\ .$$

Изменение частоты составит

$$\Delta\nu = \nu' - \nu$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} - \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right).$$

Подставляя численные значения, находим:

$$\nu = 132 \text{ Гц};\quad \Delta\nu = 16 \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu = 132$ ***Гц;*** $\Delta\nu = 16$ ***Гц.***

2. **(7.43)** Конденсатор емкостью C = 1200 пФ, катушка индуктивностью L = 16 мкГн и активное сопротивление R = 2 Ом подключены к внешней переменной э.д.с., амплитудное значение которой $\varepsilon_m = 12$ В. Чему равна резонансная частота для тока в контуре? Определить амплитудное значение силы тока в цепи при резонансе, а также амплитудные значения напряжения на конденсаторе и катушке.

Дано:

$C = 1200$ пФ $= 1{,}2\cdot10^{-9}$ Ф

$L = 16$ мкГн $= 16\cdot10^{-6}$ Гн

$R = 2$ Ом

$\varepsilon_m = 12$ В

$\nu_{рез}$ - ?, i_m - ?, U_{mC} - ?, U_{mL} - ?

Решение:

Резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура:

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Так как $\omega_{рез} = 2\pi\nu_{рез}$, то

$$\nu_{рез} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Максимальная сила тока

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

При резонансе

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

и

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{R}.$$

Амплитудное значение напряжения на конденсаторе

$$U_{mC} = i_m/(\omega C) = \frac{\varepsilon_m}{RC\dfrac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{\varepsilon_m}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Амплитудное значение напряжения на катушке

$$U_{mL} = \omega L i_m = \frac{L}{\sqrt{LC}}\frac{\varepsilon_m}{R} = \frac{\varepsilon_m}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\ .$$

Подставляя численные значения, находим:

$$\nu_{рез} = 1{,}13 \text{ МГц};\quad i_m = 6 \text{ А};\quad U_{mC} = U_{mL} = 693 \text{ В}.$$

Ответ: $\nu_{рез} = 1{,}13$ ***МГц;*** $i_m = 6$ ***А;*** $U_{mC} = U_{mL} = 693$ ***В.***

3. **(8.13)** В слабопроводящей среде с удельной проводимостью $\gamma = 10^{-2}$ См/м и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$ распространяется плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 10$ МГц. Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

Дано:

$\gamma = 10^{-2}$ См/м

$\varepsilon = 9$

$\nu = 10$ МГц $= 10^7$ Гц

$j_{0пр}/j_{0см}$ - ?

Решение:

Пусть напряженность электрического поля в электромагнитной волне изменяется со временем по закону

$$E = E_0\cdot\cos(\omega t - kx) = E_0\cdot\cos(2\pi\nu t - kx).$$

Тогда плотность тока смещения

$$j_{см}(t) = \partial D/\partial t = \partial[\varepsilon_0\varepsilon E_0\cdot\cos(2\pi\nu t - kx)]/\partial t = -\varepsilon_0\varepsilon E_0\cdot 2\pi\nu\cdot\sin(2\pi\nu t - kx),$$

где $j_{0см} = \varepsilon_0\varepsilon E_0\cdot 2\pi\nu$.

По закону Ома:

$$j_{пр}(t) = \gamma E = \gamma E_0\cdot\cos(2\pi\nu t - kx),$$

где $j_{0пр} = \gamma E_0$.

Следовательно,

$$j_{0пр}/\,j_{0см} = \gamma E_0/[\varepsilon_0\varepsilon E_0\cdot 2\pi\nu] = \gamma/(2\pi\varepsilon\varepsilon_0\nu).$$

Подставим численные значения:

$$j_{0пр}/\,j_{0см} = 10^{-2}/(2\cdot3{,}14\cdot9\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot10^7) = 2.$$

Ответ: $j_{0пр}/\,j_{0см} = 2$.

4. **(8.35)** Индуктивность колебательного контура $L = 5\cdot10^{-4}$ Гн. Какова должна быть емкость контура C, чтобы он резонировал на длину волны $\lambda = 300$ м?

Дано:

$L = 5\cdot10^{-4}$ Гн

$\lambda = 300$ v

C - ?

Решение:

Для того, чтобы определить длину волны, необходимо вычислить собственную частоту колебаний контура, так как

$$\lambda = c/\nu,$$
где c – скорость электромагнитной волны в вакууме.
Собственная частота колебаний
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$
Тогда емкость контура, резонирующего на данную длину волны:
$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L}.$$
Подставляя численные значения, находим:
$$C = \frac{300^2}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 9\cdot 10^{16}\cdot 5\cdot 10^{-4}} = 5\cdot 10^{-11}\ \Phi.$$
Ответ: ***$C = 5\cdot 10^{-11}$ Ф.***

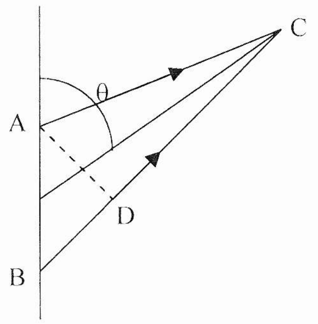
5. **(8.41)** Заданы параметры импульса, излучаемого рубиновым лазером: длительность $\tau = 0{,}1$ мс, энергия $W = 0{,}3$ Дж, диаметр пучка $d = 5$ мм. Найти максимальное значение напряженности электрического поля $E_{макс}$ и интенсивность I излучения лазера.

Дано:
$\tau = 0{,}1$ мс $= 10^{-4}$ с
$W = 0{,}3$ Дж
$d = 5$ мм $= 5\cdot 10^{-3}$ м
$E_{макс}$ - ?, I - ?

Решение:
Интенсивность излучения
$$I = W/(S\cdot\tau),$$
где $S = \pi d^2/4$ – площадь пучка:
$$I = 4W/(\pi d^2\cdot\tau),$$
$$I = 4\cdot 0{,}3/(3{,}14\cdot 25\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-4}) = 1{,}53\cdot 10^8\ \text{Вт/м}^2$$
Энергия импульса
$$W = w\cdot c\cdot\tau\cdot S,$$
где $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитной волны в вакууме; w – плотность энергии:
$$w = ½\cdot(\varepsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2).$$
Учитывая, что в вакууме для электромагнитной волны
$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0,$$
получаем
$$w = \varepsilon_0 E_0^2;$$
$$W = \varepsilon_0 E_0^2\cdot c\cdot\tau\cdot\pi d^2/4,$$
откуда
$$E_{макс} = E_0 = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{W}{\varepsilon_0 c\tau\pi}};$$
$$E_{макс} = \frac{2}{5\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{0{,}3}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^8\cdot 10^{-4}\cdot 3{,}14}} = 2{,}4\cdot 10^5\ \text{В/м}.$$
Ответ: ***$E_{макс} = 2{,}4\cdot 10^5$ В/м; $I = 1{,}53\cdot 10^8$ Вт/м².***

6. **(1.11)** Система состоит из двух одинаковых точечных источников когерентных волн. Расстояние между источниками $d = \lambda$. Источники колеблются в одинаковой фазе. Определить углы θ, которым соответствует: а) максимальное, б) минимальное излучение системы. Углы отсчитываются от линии, соединяющей источники. Расстояние от источников до точек наблюдения значительно больше λ.

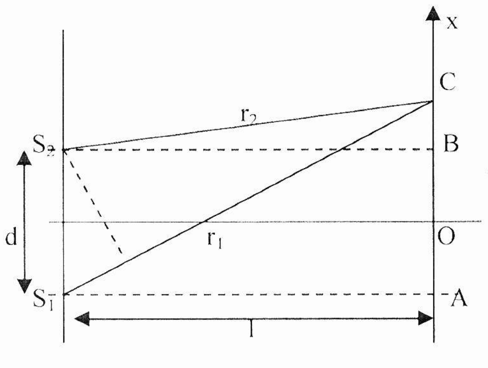
Дано:
$d = \lambda$
θ - ?

Решение:
Когда расстояние от источников до точки наблюдения значительно превышает расстояние между источниками (AC, BC >> d), лучи AC и BD оказываются практически параллельными.
Тогда разность хода интерферирующих лучей
$$BC - AC = BD = d\cdot\cos\theta.$$


В точке наблюдения волна от источника B отстает по фазе на величину
$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = (\alpha_1 - \alpha_2) + 2\pi d\cdot\cos\theta/\lambda.$$
Источники колеблются в одинаковой фазе, следовательно,
$$\alpha_2 = \alpha_1.$$
Учитывая, что $d = 2\lambda$, имеем
$$\Delta\varphi = 2\pi\cdot\cos\theta.$$
а) Из условия максимумов интенсивности получим
$$2\pi\cdot\cos\theta = 2\pi m,$$
откуда следует
$$\cos\theta = m.$$
Это соотношение может выполняться только при $m = -1, 0, 1$. Имеем:
$m = -1$, $\cos\theta = -1$, $\theta = 180°$;
$m = 0$, $\cos\theta = 0$, $\theta = 90°$;
$m = 1$, $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$.
Таким образом, максимумы интенсивности имеют место под углами: $\theta = 0$; $\theta = 90°$; $\theta = 180°$.
б) Из условия минимумов интенсивности получим
$$2\pi\cdot\cos\theta = (2m + 1)\pi,$$
откуда следует
$$\cos\theta = m + 1/2.$$
Это соотношение может выполняться только при $m = -1, 0$. Имеем:
$m = -1$, $\cos\theta = -1/2$, $\theta = 120°$;
$m = 0$, $\cos\theta = 1/2$, $\theta = 60$.
Таким образом, минимумы интенсивности имеют место под углами: $\theta = 60°$; $\theta = 120°$.
Ответ: а) $\theta = 0$; $\theta = 90°$; $\theta = 180°$;
б) $\theta = 60°$; $\theta = 120°$.

7. **(1.19)** В опыте Юнга расстояние между щелями равно $d = 1{,}5$ мм, расстояние от щелей до экрана $l = 50$ см, длина волны света $\lambda = 5{,}5\cdot 10^{-7}$ м. Во сколько раз интенсивность света на экране на расстоянии $x = 0{,}5$ мм от нулевой полосы меньше максимальной интенсивности?

Дано:
$d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5\cdot 10^{-3}$ м
$l = 50$ см $= 0{,}5$ м
$\lambda = 5{,}5\cdot 10^{-7}$ м
$x = 0{,}5$ мм $= 0{,}5\cdot 10^{-3}$ м
I/I_{max} - ?

Решение:


В каждую точку C оси x придут две волны с одинаковыми интенсивностями. Результирующая интенсивность в точке C равна

$$I = 2I_0\cdot(1 + \cos(\Delta\varphi)).$$

Разность фаз составит

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda.$$

Выразим разность хода лучей $r_1 - r_2$ через положение точки C на оси x. Из прямоугольных треугольников S_1AC и S_2BC имеем

$$r_1^2 = l^2 + (x + d/2)^2;$$
$$r_2^2 = l^2 + (x - d/2)^2;$$
$$r_1^2 - r_2^2 = 2xd;$$
$$r_1 - r_2 = 2xd/(r_1 + r_2).$$

В результате

$$r_1 - r_2 = xd/l$$

и

$$\Delta\varphi = 2\pi xd/(\lambda l),$$
$$I = 2I_0\cdot(1 + \cos(2\pi xd/(\lambda l))).$$

Очевидно, максимальная интенсивность

$$I_{max} = 4I_0,$$

Тогда отношение интенсивностей

$$I/I_{max} = ½\cdot(1 + \cos(2\pi xd/(\lambda l))),$$
$$I/I_{max} = ½\cdot(1 + \cos(2\pi\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}/(5{,}5\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}5))) = 0{,}43.$$

Ответ: ***$I/I_{max} = 0{,}43$..***

8. **(1.57)** Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин. При наблюдении интерференционных полос в отраженном свете ($\lambda = 546{,}1$ нм) оказалось, что расстояние между пятью полосами $l = 2$ см. Найти угол β клина. Свет падает на пленку по нормали. Показатель преломления пленки $n = 1{,}33$.

Дано:

$n = 1{,}33$

$\lambda = 546{,}1$ нм $= 546{,}1\cdot 10^{-9}$ м

$l = 2$ см $= 0.02$ м

$\theta = 90°$

β - ?

Решение:

Оптическая разность хода интерферирующих лучей определяется соотношением

$$\Delta = 2d\cdot n.$$

Здесь d – толщина пленки в месте падения луча.

Выразим Δ через угол падения света θ. По закону преломления

Запишем условие двух светлых полос, таких , чтобы расстояние между ними определялось как расстояние между пятью полосами:

$$2d_1n = m\lambda$$
$$2d_2n = (m + 4)\lambda$$

Вычитая первое соотношение из второго, получим

$$2(d_2 - d_1)n = 4\lambda\ .$$

С другой стороны

$$d_2 - d_1 = l\cdot tg\beta$$
$$l\cdot tg\beta\cdot n = 2\lambda$$

Угол клина

$$tg\beta = \frac{2\lambda}{\ln},$$

но так как угол клина мал, то $tg\beta \approx \beta$ и

$$\beta = \frac{2\lambda}{\ln}$$

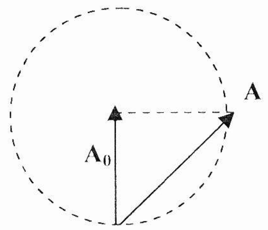
$$\beta = \frac{2\cdot 546{,}1\cdot 10^{-9}}{0{,}02\cdot 1{,}33} = 8{,}5''.$$

Ответ: ***$\beta = 8{,}5''$.***

9. **(2.14а)** Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Оценить интенсивность света за экраном в точке, для которой отверстие равно внутренней половине первой зоны Френеля.

Решение:

Колебания в точке P возникают в результате интерференции волн от вторичных источников, расположенных на открытой части волновой поверхности, проходящей через плоскость экрана.



При полностью открытой волновой поверхности мы получим в точке P колебание $\mathbf{A_0}$ (ему соответствует интенсивность I_0). Вектор $\mathbf{A}$ представляет колебание от половины одной открытой зоны Френеля. Имеем

$$A = \sqrt{2}\,A_0.$$

Тогда

$$A^2 = 2A_0^2$$
$$I = 2I_0.$$

Ответ: ***$I = 2I_0$.***

10. **(2.42)** При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка частично перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ($\lambda_1 = 0{,}4$ мкм) спектра третьего порядка?

Дано:

$\lambda_1 = 0{,}4$ мкм $= 4\cdot 10^{-7}$ м

$m_1 = 3$

$m_2 = 2$

λ_2 - ?

Решение:

Запишем условие максимумов

$$d\cdot\sin\varphi = m\lambda.$$

Учитывая, что спектры второго и третьего порядка частично перекрывают друг друга, имеем

$$m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$$

Для линии λ_2 в спектре второго порядка имеем

$$\lambda_2 = m_1\lambda_1/m_2$$
$$\lambda_2 = 3\cdot 4\cdot 10^{-7}/2 = 6\cdot 10^{-7}\text{ м} = 0{,}6\text{ мкм}.$$

Ответ: ***$\lambda_2 = 0{,}6$ мкм.***

11. **(2.70)** С помощью дифракционной решетки с периодом d = 20 мкм требуется разрешить дублет натрия ($\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм) в спектре второго порядка. При какой наименьшей длине решетки это возможно?

Дано:

$d = 20$ мкм $= 2\cdot 10^{-5}$ м

$\lambda_1 = 589{,}0$ нм $= 589\cdot 10^{-9}$ м

$\lambda_2 = 589{,}6$ нм $= 589{,}6\cdot 10^{-9}$ м

$m = 2$

l_{min} - ?

Решение:

Из критерия Рэлея

$$m\cdot(\lambda + \delta\lambda) = (m + 1/N)\lambda$$
$$m\cdot\delta\lambda = \lambda/N$$

Учитывая, что период решетки

$$d = l/N$$

имеем

$$N = l/d$$
$$m\cdot\delta\lambda = \lambda d/l,$$

откуда минимальная длина решетки

$$m\cdot(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_1 d/l_{min},$$

$$l_{min} = \frac{\lambda_1 d}{m \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$l_{min} = \frac{589 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot (589{,}6 \cdot 10^{-9} - 589 \cdot 10^{-9})} = 0{,}01 \text{ м} = 1 \text{ см}.$$

Ответ: $l_{min} = 1$ ***см.***

12. (3.5б) Поглощение света в николе таково, что максимальная интенсивность поляризованного света, прошедшего сквозь николь равна 90% интенсивности поляризованного света, падающего на него. Во сколько раз уменьшается интенсивность естественного света при прохождении через два николя, плоскости поляризации которых составляют угол 63° и третий николь, направление поляризации которого совпадает с первым николем?

Дано:

$\alpha = 63°$

$\eta = 90\% = 0{,}9$

n - ?

Решение:

Интенсивность света I_1, прошедшего через первый николь равна

$$I_1 = ½\eta\, I_0.$$

Здесь I_0 – интенсивность естественного света, падающего на первый поляризатор; коэффициент ½ учитывает то, что проходит только половина естественного света при прохождении через поляризатор.

В соответствии с законом Малюса

$$I_2 = I_1 \cdot \eta \cdot \cos^2\alpha,$$

где α - угол между плоскостями поляризации первого и второго николей.

Таким образом,

$$I_2 = ½\eta^2\, I_0 \cdot \cos^2\alpha.$$

В соответствии с законом Малюса

$$I_3 = I_2 \cdot \eta \cdot \cos^2\beta,$$

где β - угол между плоскостями поляризации второго и третьего николей. По условию задачи $\beta = \pi - \alpha$.

Таким образом,

$$I_3 = ½\eta^3\, I_0 \cdot \cos^4\alpha.$$

$$n = \frac{I_0}{I_3} = \frac{2}{\eta^3 \cos^4 \alpha},$$

$$n = \frac{2}{0{,}9^3 \cdot 0{,}454^4} = 65.$$

Ответ: в 65 раз.

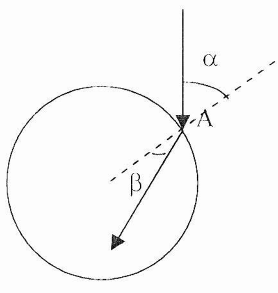
13. (3.69) Пучок естественного света падает на стеклянный шар n = 1,54. Найти угол γ между преломленным и падающим пучками в точке А.

Дано:

n = 1,54

γ - ?

Решение:



Угол γ между преломленным и падающим пучками в точке А

$$\gamma = \pi - \alpha + \beta = \pi - (\alpha - \beta)$$

Так как

$$\alpha + \beta = \pi/2,$$

то

$$\beta = \pi/2 - \alpha$$
$$\alpha - \beta = 2\alpha - \pi/2$$
$$\gamma = 3\pi/2 - 2\alpha$$

С другой стороны

$$\sin\alpha/\sin\beta = n,$$
$$\mathrm{tg}\alpha = n$$
$$\alpha = \mathrm{arctg}(n).$$

Тогда искомый угол

$$\gamma = 3\pi/2 - 2\mathrm{arctg}(n)$$
$$\gamma = 270° - 2\mathrm{arctg}(1{,}54)$$
$$\gamma = 270° - 2 \cdot 57° = 156°.$$

Ответ: $\gamma = 156°$.