Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

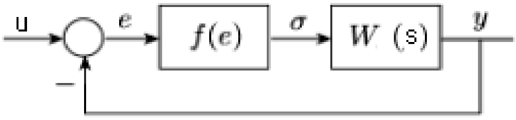
Лекция 9. Гармоническая линеаризация. Симметричные и несимметричные колебания. Вибрационная линеаризация.

Гармоническая линеаризации.

Принцип усреднения эффективно используется для анализа колебаний в одночастотных нерезонансных нелинейных системах типа Гаммерштейна-Винера (см. лекция 1, часть II курса) .

Как уже отмечалось выше, метод усреднения позволяет, при ряде допущений, перейти от анализа исходной нелинейной системы к исследованию некоторой системы сравнения в виде полиномиального приближения от параметра возмущения. Если исследуемая система обладает свойством фильтра низких частот, а именно при возникновении периодического или квазипериодического режима подавлять гармоники второго и более высокого порядка, то можно, с достаточной точностью, ограничиться рассмотрением только первого члена разложения.

Рассмотрим следующую типовую замкнутую нелинейную систему, состоящую из нелинейного звена и линейной части (система типа Гаммерштейна).



Типовая структурная схема нелинейной САУ

Примем, для предварительного рассмотрения, что управляющее воздействие $u = 0$. Тогда, уравнения системы можно записать в следующем виде: $y = W(s)\sigma$, $\sigma = f(e)$, $e = -y$. Допустим, что в системе возникает периодический режим. Тогда нелинейная функция $\sigma(t) = f(e(t))$ будет периодической функцией времени. Таким образом, как несложно заметить, исходная система является стандартной системой и, условия задачи соответствуют простейшему случаю для таких систем, как это было указано выше. В соответствии с вышеуказанной методикой, проведем разложение функции $\sigma(t)$ в ряд Фурье: $\sigma(t) = \frac{1}{2}a_0 + b_1\sin(\omega t) + a_1\cos(\omega t) + \ldots$, где a_0, b_1, a_1, ..., - коэффициенты Фурье, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T - период. Коэффициенты Фурье определяются следующим образом /Ким т2 с69/: $a_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(e(t)\cos(k\omega\tau)d\tau$, $b_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(e(t)\sin(k\omega\tau)d\tau$, $k = 1,2,\ldots$. При этом предполагается, что соотношение $(k,\omega) = 0$, то есть частоты колебаний рационально несоизмеримы с любым конечным вектором k . Если $f(e)$ - однозначная нечетная функция , то есть $f(-e) = -f(e)$, т о несложно получить следующие соотношения:

$a_k = 0, k = 0,1,2,\ldots$, $b_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(e(\tau))\sin(\omega\tau)d\tau, k = 0,1,2,\ldots$. Предположим, что линейная часть обладает свойством фильтра низких частот, то есть выполняется неравенство:

$|W(i\omega)| >> |W(ik\omega)|$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $k = 2,3,\ldots$. К сожалению, проверить это условие, пока не определена частота периодического процесса, нельзя. Поэтому данное утверждение принимается перед началом исследований, как гипотеза. Это предположение часто называют гипотезой фильтра.

При выполнении гипотезы фильтра, можно считать, что высшие гармоники не оказывают существенного влияния на выходную величину $y(t)$ линейной части. Тогда можно записать следующее уравнение системы сравнения первого приближения: $\bar{y} = W(s)\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma} = a_0 + b_1 \sin(\omega t) + a_1 \cos(\omega t)$, $e = -y$. Интегральное среднее оценки величины $\sigma(t)$ существует и равно нулю, так как $a_0 = 0$. Тогда, учитывая тождество $b_1 \sin(\omega t) + a_1 \cos(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, где $A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $\varphi_1 = \arcsin(a_1 / A_1)$, можно получить следующие соотношения: $\bar{y} = A\sin(\omega t + \varphi)$. Здесь $A = A_1 \,|\, W(i\omega) \,|$, $\varphi = \varphi_1 + \arg\{W(i\omega)\}$. При этом, как несложно убедиться, что выполняются все условия теоремы Боголюбова. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$, после некоторого промежутка времени, пропорционально ε^{-1}, будет выполняться условие $|\, y(t) - \bar{y}(t) \,| < \varepsilon$.

Выберем начало отсчета таким образом, чтобы на входе нелинейного звена оценка сигнала имела вид: $e = A\sin(\omega t)$. Отсюда получим $\sin(\omega t) = \dfrac{e}{A}$, $\cos(\omega t) = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}) = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{e}{\omega A})$. Подставив, полученные формулы, в уравнения системы сравнения первого порядка получим следующие соотношения: $\bar{y} = W(s)\breve{\sigma}$, где $\breve{\sigma} = [q(A) + \dfrac{q_1(A)}{\omega}\dfrac{d}{dt}]e$, $e = -\bar{y}$,

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\psi)\sin(\psi)d\psi\,, \quad q_1(A) = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\psi)\cos(\psi)d\psi\,.$$

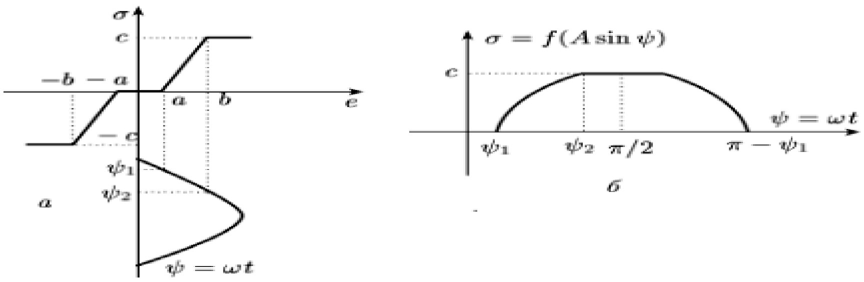
Если функция $f(e)$ - однозначная нечетная функция, то будут справедливы следующие соотношения: $q(A) = \dfrac{b_1}{A} = \dfrac{2}{\pi A}\displaystyle\int_0^{\pi} f(A\sin\psi)\sin(\psi)d\psi$, $q_1(A) = 0$. Здесь в подынтегральных выражениях принято, что $\psi = \omega t$. Система сравнения, при фиксированных параметрах: амплитуде A и частоте ω, является линейной. Указанный переход от исходной нелинейной системы к линейной системе сравнения первого приближения называется гармонической линеаризацией. Коэффициенты $q(A)$ и $q_1(A)$ называются коэффициентами гармонической линеаризации. Соответственно, оператор $W_n(A, \dfrac{d}{dt}) = q(A) + \dfrac{q_1(A)}{\omega}\dfrac{d}{dt}$ - называют приведенной передаточной функцией нелинейного звена. Соотношение: $W_n(A) = q(A) + iq_1(A)$, которое получается при подстановке в приведенную передаточную функцию соотношения $\dfrac{d}{dt} = i\omega$, будем называть приведенной частотной характеристикой нелинейного звена. Коэффициенты $q(A)$ и $q_1(A)$ представляют вещественную и мнимую части приведенной частотной характеристики. Поэтому $q(A)$ называется вещественным, а $q_1(A)$ мнимым коэффициентом гармонической линеаризации.

Гармонически линеаризованные уравнения нелинейной системы (уравнения системы сравнения первого приближения) были получены при условии, что интегральное среднее $a_0 = 0$ и задающее воздействие $u = 0$. При этом, как отмечалось, колебания на входе нелинейного звена имеют вид $e = A\sin(\omega t)$, то есть они являются симметричными. Очевидно, что это будет справедливо, если характеристика нелинейного звена будет симметричной относительно начала координат и установившаяся ошибка равна нулю, то есть тогда, когда линейная часть содержит интегрирующее звено.

Коэффициенты гармонической линеаризации при симметричных колебаниях.

Если характеристика нелинейного звена является однозначной и симметричной относительно начала координат, то функция $f(e)$ будет нечетной. В этом случае мнимый коэффициент гармонической линеаризации $q_1(A) = 0$.

1. Кусочно - линейная характеристика с зоной нечувствительности и насыщением.



Графики сигналов на входе и на выходе НЗ с кусочно линейной характеристикой с зоной нечувствительности и насыщением

График выходного сигнала нелинейного звена с такой характеристикой, когда на его вход подается симметричный гармонический сигнал $e = A\sin(\omega t)$, приведен на рисунке. Тогда вещественный коэффициент гармонической линеаризации можно рассчитать по следующей формуле:

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\psi)\sin(\psi)d\psi = \frac{2}{\pi A}[\int_{\psi 1}^{\psi 2} k(A\sin\psi - a)\sin\psi d\psi + \int_{\psi 2}^{\pi-\psi 2} c\sin\psi d\psi + \int_{\pi-\psi 2}^{\pi-\psi 1} k(A\sin\psi - a)\sin\psi d\psi]$$

.При интегрировании необходимо учесть следующие соотношения: $A\sin\psi_1 = a$, $A\sin\psi_2 = b$, где $\psi_1 = \arcsin\frac{a}{A}$, $\psi_2 = \arcsin\frac{b}{A}$, $k = \frac{c}{Ab - a}$. Проведя необходимые вычисления, получим:

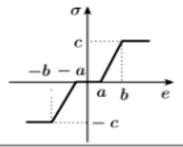
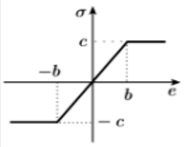
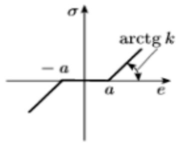
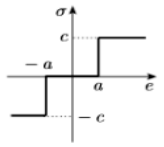
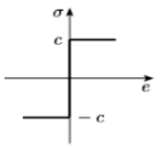
$$q(A) = \frac{2c}{\pi(b-a)}[\arcsin\frac{b}{A} - \arcsin\frac{a}{A} + \frac{b}{A}\sqrt{1-(\frac{b}{A})^2} - \frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}\,].$$

Эта формула будет справедлива и при $A \geq b$.

2. Характеристика идеального реле.

Этот элемент наиболее часто используется в нелинейных системах управления. Его коэффициент гармонической линеаризации определяется по следующей формуле: $q(A) = \dfrac{4c}{\pi A}$.

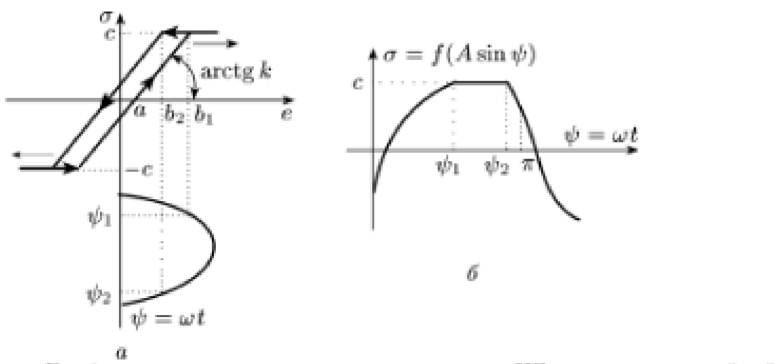
Коэффициенты гармонической линеаризации НЗ с однозначной характеристикой

№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$q(A)=\frac{2c}{\pi(b-a)}\left[\arcsin\frac{b}{A}-\arcsin\frac{a}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right],\quad A\geqslant b$
2		$q(A)=\frac{2c}{\pi b}\left[\arcsin\frac{b}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}\right],\quad A\geqslant b$
3		$q(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{A}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right],\quad A\geqslant a$
4		$q(A)=\frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2},\quad A\geqslant a$
5		$q(A)=\frac{4c}{\pi A}$

<u>Коэффициенты гармонической линеаризации при симметричных колебаниях и неоднозначных характеристиках.</u>

В случае, характеристики нелинейного звена являются симметричными, но не однозначными, мнимый коэффициент гармонической линеаризации не равен нулю.

Рассмотрим кусочно-линейную характеристику с гистерезисом и насыщением.



Графики входного и выходного сигналов НЗ с кусочно линейной характеристикой с гистеризисом и насыщением

Кривую выходного сигнала нелинейного звена на интервале $[\pi, 2\pi]$ можно получить из той же кривой на интервале $[0, \pi]$ зеркальным отображением относительно оси абсцисс и сдвигом вправо на π. Поэтому, при вычислении коэффициентов $q(A)$ и $q_1(A)$, соответствующие интегралы на указанных интервалах будут совпадать и их можно просто удвоить, заменив верхний предел интегрирования 2π на π. То есть, можно записать следующие соотношения:

$q(A)=\dfrac{2}{\pi A}\int\limits_0^{\pi} f(A\sin\psi)\sin(\psi)d\psi$, $q_1(A)=\dfrac{2}{\pi A}\int\limits_0^{\pi} f(A\sin\psi)\cos(\psi)d\psi$. Выходной сигнал нелинейного звена на интервале $[0,\psi_1]$ можно описать функцией $\sigma=k(A\sin\psi-a)$. На интервале $[\psi_1,\psi_2]$ сигнал принимает постоянное значение, равное c. И на интервале $[\psi_2,\pi]$ сигнал описывается функцией $\sigma=k(A\sin\psi+a)$. В соответствии с этим получим следующие выражения:

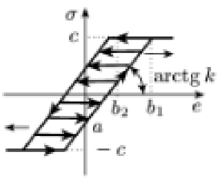
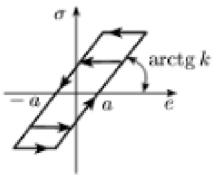
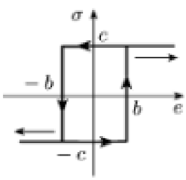
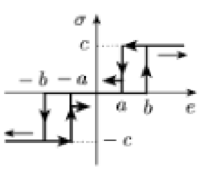
$$q(A)=\frac{2}{\pi A}[\int\limits_0^{\psi_1}k(A\sin\psi-a)\sin(\psi)d\psi+\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}c\sin(\psi)d\psi+\int\limits_{\psi_2}^{\pi}k(A\sin\psi+a)\sin(\psi)d\psi],$$

$$q_1(A)=\frac{2}{\pi A}[\int\limits_0^{\psi_1}k(A\sin\psi-a)\cos(\psi)d\psi+\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2}c\cos(\psi)d\psi+\int\limits_{\psi_2}^{\pi}k(A\sin\psi+a)\cos(\psi)d\psi]$$

Проведем интегрирование соответствующих подынтегральных функций с учетом следующих соотношений: $c=k(b_1-a)$, $b_2=b_1-2a$, $A\sin(\psi_1)=b_1$, $A\sin(\psi_2)=b_2$. Отсюда получим следующие расчетные формулы:

$$q(A)=\frac{k}{\pi}[\arcsin\frac{b_1}{A}+\arcsin\frac{b_2}{A}+\frac{b_1}{A}\sqrt{1-(\frac{b_1}{A})^2}+\frac{b_2}{A}\sqrt{1-(\frac{b_2}{A})^2}],\quad q_1(A)=\frac{k}{\pi A^2}(b_2^2-b_1^2),\ A\ge b_1.$$

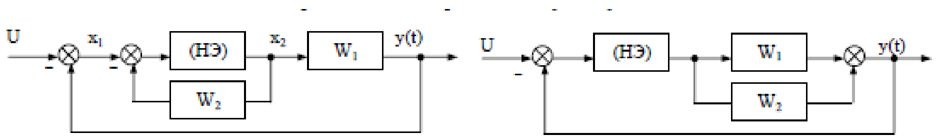
Ниже приведены коэффициенты гармонической линеаризации звеньев с неоднозначной характеристикой.

№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$q(A)=\frac{k}{\pi}\left[\arcsin\frac{b_1}{A}+\arcsin\frac{b_2}{A}+\frac{b_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b_1}{A}\right)^2}+\frac{b_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b_2}{A}\right)^2}\right],$ $q_1(A)=\frac{k(b_2^2-b_1^2)}{\pi A^2},\quad A\geqslant b_1$
2		$q(A)=\frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(1-\frac{2a}{A}\right)+2\left(1-\frac{2a}{A}\right)\sqrt{\frac{a}{A}\left(1-\frac{a}{A}\right)}\right],$ $q_1(A)=-\frac{4ka}{\pi A}\left(1-\frac{a}{A}\right),\quad A\geqslant a$
3		$q(A)=\frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2},$ $q_1(A)=-\frac{4cb}{\pi A^2},\quad A\geqslant b$
4		$q(A)=\frac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right],$ $q_1(A)=-\frac{2c(b-a)}{\pi A^2}$

<u>Исследование симметричных автоколебаний.</u>

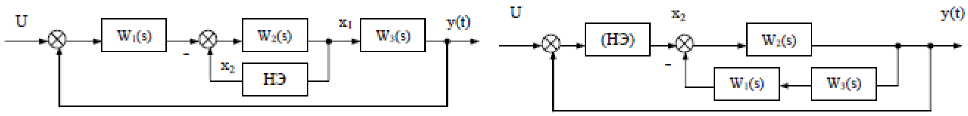
При проведении исследовании системы, содержащей в своем составе нелинейное звено, необходимо, прежде всего, привести ее структурную схему к расчетной форме, объединив все линейные звенья в единый блок.

Пример приведения структурной схемы к расчетной форме, когда нелинейное звено находится в прямой цепи.



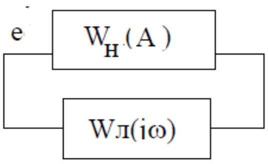
$$W_л(s) = W_1(s) + W_2(s)$$

Пример приведения структурной схемы к расчетной форме, когда нелинейный элемент находится в цепи обратной связи.



$$W_л(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)*W_2(s)*W_3(s)}$$

Таким образом, схема нелинейной системы (при u=0) приводится к следующему эквивалентному виду:



В такой линеаризованной системе, где нелинейное звено заменено линейной системой сравнения, могут возникнуть гармонические колебания, если характеристический многочлен замкнутой системы имеет чисто мнимые точки. По критерию Найквиста, это произойдет, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы будет проходить через точку $(-1, i0)$ комплексной плоскости, то есть будет выполняться соотношение: $W_н(A)W_л(i\omega) = -1$. Данное соотношение называется <u>основным условием возникновения периодических колебаний</u> в рассматриваемом классе нелинейных систем /Ким т2 с87/. Подставив выражения для $W_н(A)$ и $W_л(i\omega)$ и, осуществив, приведение к общим членам действительную и мнимую части в основном условии, можно получить следующее уравнение: $N(i\omega) = X(A,\omega) + iY(A,\omega) = 0$ или $X(A,\omega) = 0$, $Y(A,\omega) = 0$. Здесь $N(s), s = i\omega$ - характеристический многочлен замкнутой линеаризованной системы.

Если система уравнений $X(A,\omega) = 0$, $Y(A,\omega) = 0$ имеет решение A^*, ω^*, где ($A^* > 0, \omega^* > 0$), то это значит, что в линеаризованной, с помощью метода гармонической линеаризации, системе существуют периодический процесс вида: $e = A^* \sin(\omega^* t)$. Этот процесс будет существовать, если полученное решение будет асимптотически орбитально устойчивым.

Рассмотрим случай, когда нелинейное звено имеет статическую симметричную однозначную нелинейную характеристику. В этом случае $W_н(A) = q(A)$. Пусть передаточная функция приведенной линейной части системы описывается с помощью передаточной функции вида

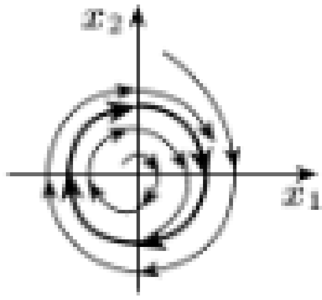
$W_л(s)=\dfrac{Q(s)}{R(s)}$. Тогда основное условие возникновения периодического процесса примет вид: $q(A)Q(i\omega)+R(i\omega)=0$. Выделяя мнимую и комплексную части правой части уравнения можно записать следующую систему уравнений: $\begin{cases} q(A)\,\mathrm{Re}(Q(i\omega)\}+\mathrm{Re}\{R(i\omega)\}=0 \\ q(A)\,\mathrm{Im}\{Q(i\omega)\}+\mathrm{Im}\{R(i\omega)\}=0 \end{cases}$. Отсюда несложно получить следующие соотношения: $q(A)=-\dfrac{\mathrm{Re}\{R(i\omega)\}}{\mathrm{Re}\{Q(i\omega)\}}$,

$-\mathrm{Re}\{R(i\omega)\}\mathrm{Im}\{Q(i\omega)\}+\mathrm{Re}\{Q(i\omega)\}\mathrm{Im}\{R(i\omega)\}=0$.

Частота автоколебаний определяется из второго соотношения и не зависит от характеристики нелинейного звена. *Следовательно, в случае нелинейного звена с однозначной характеристикой, при симметричных колебаниях частота периодического процесса зависит только от свойств линейной части системы.*

Рассмотрим теперь проблему асимптотической орбитальной устойчивости колебаний.

При однозначной характеристике нелинейного звена, периодический режим будет устойчивым, если при изменении амплитуды колебаний будут выполняться следующие условие: коэффициент гармонической линеаризации $q(A)$ изменяется таким образом, что линеаризованная замкнутая система устойчива при увеличении амплитуды и неустойчива при ее уменьшении.

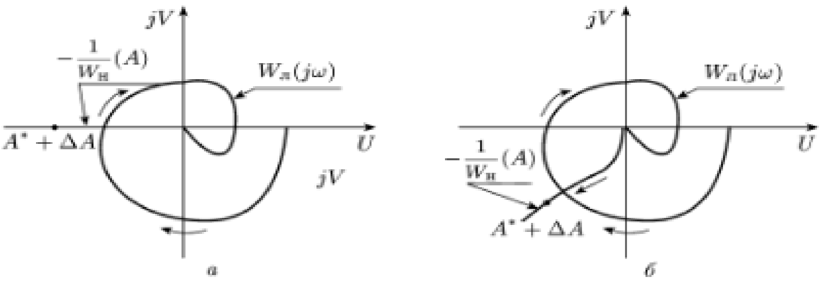


Это условие будет выполняться, если будет справедливо неравенство: $\dfrac{dq(A)}{dA}\Big|_{A=A^*}<0$. Если нелинейное звено имеет неоднозначную характеристику, условие асимптотической орбитальной устойчивости периодического режима приобретает более сложный вид:

$$[(\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial A})(\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial \omega})-(\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial \omega})(\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial A})]\Big|_{\substack{A=A^* \\ \omega=\omega^*}}>0$$

Метод Гольдфарба исследования автоколебания.

Одним из способов решения уравнения $W_н(A)W_л(i\omega)=-1$ является графический способ, дающий наглядную картину явлений происходящих в системе. Для этого строится годограф амплитудно-фазовой характеристики линейной части $W_л(i\omega)$ и годограф обратной амплитудно-фазовой характеристики линеаризованной модели нелинейного звена $-\dfrac{1}{W_н(A)}$. При построении годографа $W_л(i\omega)$ изменяется частота, при построении годографа $-\dfrac{1}{W_н(A)}$ изменяется амплитуда. Если рассматриваемое основное условие возникновения периодического режима имеет решение, то указанные кривые пересекаются. В точке пересечения по годографу $W_л(i\omega)$ можно найти частоту, а по годографу $-\dfrac{1}{W_н(A)}$ определить амплитуду периодического процесса.



К графическому методу исследования автоколебаний

Устойчивость периодического процесса устанавливается следующим образом.

Для случая нелинейного с однозначной характеристикой, это условие будет выполняться, если обратный годограф $-\dfrac{1}{W_н(A)}$ будет являться убывающей функцией. Это значит, что в окрестности точки пересечения двух характеристик амплитуда должна возрастать в направлении, указанным стрелкой на рисунке а.

Для неоднозначной нелинейной характеристики данное утверждение, в точке пересечения двух кривых, также остается в силе (см. рис.б).

Коэффициенты гармонической линеаризации при несимметричных автоколебаниях.

Колебания на входе нелинейного звена будут несимметричными, если интегральное среднее решения системы сравнения будет отлично от нуля. Это возможно, если колебания в системе будут иметь среднее (то есть среднее значение установившегося значения ошибки) отличное от нуля или характеристика нелинейного звена будет несимметричной относительно начала координат.

Ограничимся случаем, когда колебания имеют среднее, отличное от нуля. Тогда на входе нелинейного звена имеется сигнал следующего вида: $e = e_0 + A\sin(\omega t)$. Отсюда получим:

$\sin(\omega t) = \dfrac{1}{A}(e - e_0)$, $\cos(\omega t) = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{d}{dt}\sin(\omega t) = \dfrac{1}{\omega A}\dfrac{d}{dt}(e - e_0)$. Выражение для выхода нелинейного звена, после гармонической линеаризации, можно записать в следующем виде:

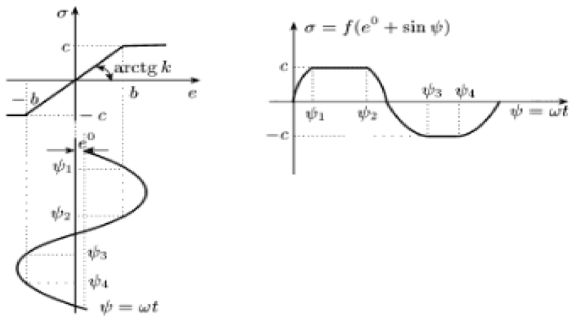
$\sigma = \dfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$ или $\sigma = \sigma_0 + [q(A,e_0) + q_1(A,e_0)\dfrac{1}{\omega}\dfrac{d}{dt}](e - e_0)$, где

$q = q(A,e_0) = \dfrac{b_1}{A}$, $q_1 = q_1(A,e_0) = \dfrac{a_1}{A}$. Введем обозначение $\psi = \omega t$. Тогда можно записать следующие соотношения для коэффициентов оператора усреднения:

$$\sigma_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e_0 + A\sin(\psi))d\psi,$$

$$q = \frac{b_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(e_0 + A\sin(\psi))\sin(\psi)d\psi, \quad q_1 = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(e_0 + A\sin(\psi))\cos(\psi)d\psi.$$

Кусочно- линейная характеристика с насыщением.



Несимметричные колебания на входе и выходе НЗ с кусочно линейной характеристикой с насыщением

Формулы для коэффициентов гармонической линеаризации принимают вид:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi}[\int_0^{\psi_1} k(e_0 + A\sin(\psi))d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c d\psi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e_0 + A\sin(\psi))d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e_0 + A\sin(\psi))d\psi],$$

$$q = \frac{1}{\pi A}[\int_0^{\psi_1} k(e_0 + A\sin(\psi))\sin(\psi)d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\sin(\psi)d\psi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e_0 + A\sin(\psi))\sin(\psi)d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c\sin(\psi)d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e_0 + A\sin(\psi)\sin(\psi)d\psi\}]$$

,

$$q_1 = \frac{1}{\pi A}[\int_0^{\psi_1} k(e_0 + A\sin(\psi))\cos(\psi)d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c\cos(\psi)d\psi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e_0 + A\sin(\psi))\cos(\psi)d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c\cos(\psi)d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e_0 + A\sin(\psi)\cos(\psi)d\psi\}]$$

Ниже приведена таблица для расчета коэффициентов гармонической линеаризации для нелинейных звеньев с однозначной характеристикой при несимметричных колебаниях.

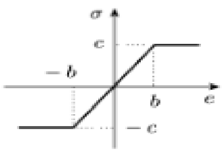
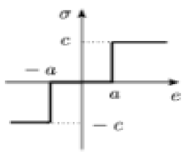
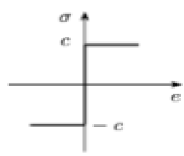
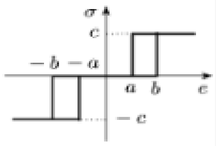
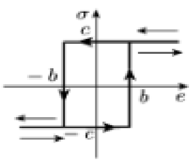
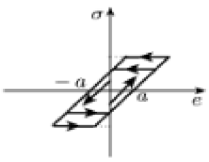
№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$\sigma^0 = \frac{k}{\pi}\left\{A\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right] + (b+e^0)\arcsin\frac{b+e^0}{A} - (b-e^0)\arcsin\frac{b-e^0}{A}\right\}$, $q = \frac{k}{\pi}\left[\arcsin\frac{b+e^0}{A} + \arcsin\frac{b-e^0}{A} + \frac{b+e^0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2} + \frac{b-e^0}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right]$, $q_1 = 0, \quad A \geqslant b + \lvert e^0 \rvert$
2		$\sigma^0 = \frac{c}{\pi}\left(\arcsin\frac{a+e^0}{A} - \arcsin\frac{a-e^0}{A}\right)$, $q = \frac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a-e^0}{A}\right)^2}\right]$, $q_1 = 0, \quad A \geqslant \lvert e^0 \rvert$
3		$\sigma^0 = \frac{2c}{\pi}\arcsin\frac{e^0}{A}$, $q = \frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{e^0}{A}\right)^2}$, $q_1 = 0, \quad A \geqslant \lvert e^0 \rvert$

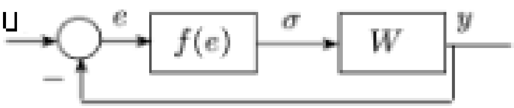
Таблица расчета коэффициентов гармонической линеаризации для нелинейных звеньев с неоднозначной характеристикой при несимметричных колебаниях.

№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$\sigma^0 = \frac{c}{2\pi}\left(\arcsin\frac{a+e^0}{A} + \arcsin\frac{b+e^0}{A} - \arcsin\frac{a-e^0}{A} - \arcsin\frac{b-e^0}{A}\right)$, $q = \frac{c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a-e^0}{A}\right)^2}\right]$, $q_1 = -\frac{2(b-a)c}{\pi A^2}, \quad A \geqslant b+\lvert e^0\rvert$
2		$\sigma^0 = \frac{c}{\pi}\left(\arcsin\frac{b+e^0}{A} - \arcsin\frac{b-e^0}{A}\right)$, $q = \frac{2c}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b+e^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{b-e^0}{A}\right)^2}\right]$, $q_1 = -\frac{4bc}{\pi A^2}, \quad A \geqslant b+\lvert e^0\rvert$
3		$\sigma^0 = ke^0$, $q(A) = \frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1-\frac{2a}{A}\right) + \left(1-\frac{2a}{A}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{A}\right)^2}\right]$, $q_1(A) = -\frac{4ka}{\pi A}\left(1-\frac{a}{A}\right), \quad A > a+\lvert e^0\rvert$

<u>Исследование несимметричных автоколебаний.</u>

Рассмотрим систему, в которой внешнее воздействие $u \neq 0, u = u_0$. Уравнения этой системы имеют вид: $y = W(s)\sigma$, $\sigma = f(e)$, $e = u - y$, где $W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$, $u(t) = u_0(t) + B_в \sin(\omega_1 t)$,

$e^* = A\sin(\omega_1 t + \varphi)\ u_0(t)$



Пусть внешнее воздействие является постоянным, то есть $\frac{du}{dt} = 0$. Тогда можно записать следующее уравнение: $Q(\frac{d}{dt})e + R(\frac{d}{dt})f(e) = Q(0)u_0$. Очевидно, что правая часть этого уравнения является константой. Таким образом в системе могут возникнуть несимметричные колебания следующего вида: $e = e_0 + e^*$, $e^* = A\sin(\omega t)$. Отсюда, проведя гармоническую линеаризацию линейного звена, получим на выходе нелинейного звена следующий сигнал:

$f(e_0 + A\sin(\omega t)) = \sigma_0 + [q(A,e_0) + q_1(A,e_0)\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}]e^*$. Отсюда получим, что для системы сравнения будет справедливо соотношение: $\{Q(\frac{d}{dt}) + R(\frac{d}{dt})[q + q_1\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}]\}e^* + Q(0)e_0 + R(0)\sigma_0 = Q(0)u_0$. Отсюда получим уравнения статики и динамики исследуемой системы: $Q(0)e_0 + R(0)\sigma_0 = Q(0)u_0$,

$\{Q(\frac{d}{dt}) + R(\frac{d}{dt})[q + q_1\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}]\}e^* = 0$. Подставим в последнее уравнение следующее значение:

$e^* = A\sin(\omega t) = \frac{A}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$. Тогда можно получить следующее (в комплексных значениях) следующее уравнение (для вещественных значений распадающееся на два уравнения): $Q(i\omega) + R(i\omega)[q(A,e_0) + iq_1(A,e_0)] = 0$.

В случае несимметричных колебаний неизвестными являются три параметра: постоянная составляющая e_0, определяемая из уравнения $Q(0)e_0 + R(0)\sigma_0 = Q(0)u_0$, частота ω и амплитуда A, определяемые из уравнения (в комплексной форме) $Q(i\omega) + R(i\omega)[q(A,e_0) + iq_1(A,e_0)] = 0$.

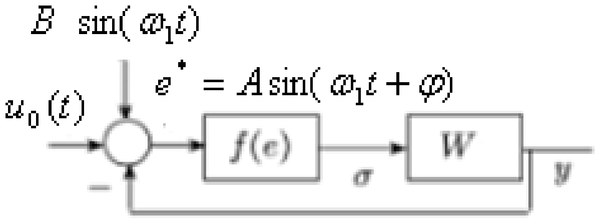
Вибрационная линеаризация.

Как видно из изложенного выше, если не принять соответствующие предосторожности, то, в общем случае, в системе с существенно нелинейным звеном, будут возникать автоколебания некоторой частоты ω_0. Если на вход системы приложить дополнительное периодическое воздействие частоты ω_1, то при превышении амплитудой этих колебаний критического значения A, автоколебания частоты ω_0 будут подавлены. Но вместо них возникнут вынужденные колебания частоты ω_1. Если эти вынужденные колебания устойчивы, то выбирая частоту $\omega_1 >> \omega_0$, можно не только устранить автоколебания, но и линеаризовать нелинейную систему. В этом случае интегральное среднее выходного сигнала будет зависеть от среднего значения управляющего входного воздействия. Частотный диапазон изменения среднего значения входного воздействия, при этом, должен быть значительно ниже частоты ω_1. Данные эффект подавления автоколебаний и линеаризации нелинейной системы называется *вибрационной линеаризацией*.

Линеаризация нелинейной системы при помощи вынужденных колебаний позволяет в широких пределах изменять частоту и амплитуду дополнительного периодического воздействия и осуществлять необходимую линеаризацию. Изменением амплитуды дополнительного периодического воздействия можно, соответственно, изменять коэффициент усиления системы. Процесс линеаризации аналогичен известному процессу модуляции. Существенный нелинейный элемент представляет собой модулятор, дополнительное периодическое воздействие соответствует несущей частоте, а внешнее воздействие (управляющий сигнал) модулированному сигналу. Такой способ линеаризации позволяет эффективно устранять влияние зазоров, люфтов эффектов сухого трения. Однако несет за собой повышенный износ исполнительных механизмов.

Для того, чтобы выходной сигнал изменялся пропорционально и непрерывно, а не скачком, одновременно с входным сигналом $u_0(t)$ на вход нелинейного звена подадим дополнительное периодическое высокочастотное воздействие $B_в \sin(\omega_1 t)$. Тогда, при входном сигнале $u(t) = u_0(t) + B\sin(\omega_1 t) = u_0 + u_в$, выходной сигнал на выходе нелинейного звена будет равен $f[u(t) + A_в \sin(\omega_1 t)]$. Примем, что задающее воздействие по сравнению с дополнительным периодическим возмущением изменяется медленно: $u_0(t)$ за период $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ почти не меняется.

Уравнение замкнутой системы в, этом случае, имеет вид: $Q(\frac{d}{dt})e + R(\frac{d}{dt})f(e) = Q(\frac{d}{dt})u$. При выполнении соотношения $\omega_1 >> \omega_0$, в системе возникают вынужденные колебания с частотой, равной частоте внешнего колебания. Тогда сигнал на входе нелинейного звена будет иметь вид: $e = e_0 + e^*$, $e^* = A\sin(\omega_1 t + \varphi)$, где A, φ - амплитуда и сдвиг фазы, которые необходимо найти.



Нелинейная функция после гармонической линеаризации примет вид:

$f[e_0 + A\sin(\omega_1 t)] = \sigma_0 + [q(A,e_0) + q_1(A,e_0)\frac{1}{\omega_1}\frac{d}{dt}]e^*$. Здесь коэффициенты $\sigma_0, q(A,e_0)$ и $q_1(A,e_0)$ - коэффициенты гармонической линеаризации, которые определяются так же, как и при рассмотрении несимметричных автоколебаний. Отсюда получим следующее соотношение:

$\{Q(p) + R(p)[q(A,e_0) + q_1(A,e_0)\frac{1}{\omega_1}p]\}e^* + Q(p)e_0 + R(p)\sigma_0 = Q(p)[u_0 + u_в)]$, где $p \equiv \frac{d}{dt}$

. Выделим отдельно уравнения для медленно меняющихся и быстро меняющихся составляющих. Тогда получим следующие уравнения:

$Q(p)e_0 + R(p)\sigma_0 = Q(p)u_0$, $\{Q(p) + R(p)[q(A,e_0) + q_1(A,e_0)\frac{p}{\omega_1}]\}e^* = Q(p)u_в$.

При рассмотрении данных соотношений необходимо учесть следующие выражения:

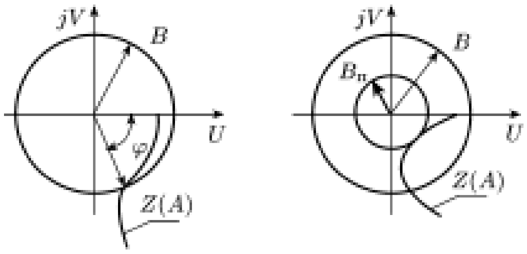
$e^* = A\sin(\omega_1 t + \varphi) = \frac{A}{2i}(e^{i(\omega_1 t+\varphi)} - e^{i(\omega_1 t+\varphi)})$, $u_в = B\sin(\omega_1 t) = \frac{B}{2i}(e^{i(\omega_1 t)} - e^{i(\omega_1 t)})$

$pe^{i(\omega_1 t+\varphi)} = i\omega_1 e^{i(\omega_1 t+\varphi)}$. Тогда, для определения параметров A,φ, достаточно решить вышеприведенные уравнения. При этом следует отметить, что при подстановке во второе уравнение выражений $e^* = \frac{A}{2i}(e^{i(\omega_1 t+\varphi)} - e^{i(\omega_1 t+\varphi)})$ и $pe^{i(\omega_1 t+\varphi)} = i\omega_1 e^{i(\omega_1 t+\varphi)}$ достаточно рассмотреть равенство множителей при $e^{i(\omega_1 t)}$, так как соотношения для множителей при $e^{-i(\omega_1 t)}$ будут эквивалентными. Пусть задающее воздействие $u_0(t)$ равно нулю. Тогда медленно изменяющаяся составляющая $e_0(t)$ (среднее интегральное) также будет равна нулю, а колебания будут симметричными. В этом случае, для амплитуды и сдвига фазы вынужденных колебаний достаточно рассмотреть только уравнение: $\{Q(p) + R(p)[q(A,e_0) + q_1(A,e_0)\frac{p}{\omega_1}]e^* = Q(p)u_в$,

которое удобно представить в виде: $A\{Q(i\omega_1) + R(i\omega_1)[q(A,e_0) + iq_1(A,e_0)]e^{i\varphi} = BQ(i\omega_1)$ или $Z(A) = Be^{-i\varphi}$.

Здесь $Z(A) = \frac{A\{Q(i\omega_1) + R(i\omega_1)[q(A,e_0) + iq_1(A,e_0)]}{Q(i\omega_1)}$. Заметим, что функция $Z(A)$ зависит только от амплитуды колебаний.

При графическом методе определения амплитуды и сдвига фазы на комплексной плоскости строится окружность радиуса B и годограф комплексной функции $Z(A)$. Годограф $Z(A)$ пересекает окружность, если радиус B превышает некоторое пороговое значение B_n. Если радиус окружности меньше порогового значения, то в системе будет происходить сложные, не одночастотные колебания.



Контрольные вопросы к лекции 9.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Метод гармонической линеаризации применим только при условии справедливости гипотезы «фильтра», которую сформулировать в виде …	1. … неравенства $\lvert W(i\omega)\rvert >> \lvert W(ik\omega)\rvert: k = 2,3,...$, где $W(i\omega)$ - амплитудно – фазовая характеристика линейной части системы типа Гаммерштейна-Винера.. 2. … все частоты ω_i периодических движений в системе рационально несоизмеримы. 3. … в системе может быть только одно периодическое движение с частотой ω_c
2	При каком типе статического нелинейного элемента коэффициент гармонической линеаризации в замкнутой системе Гаммерштейна-Винера имеет вид $W_н(A) = q(A) + iq_1(A); q_1(A) \neq 0$?	1. При статическом нелинейном элементе с однозначной характеристикой. 2. При статическом нелинейном элементе с неоднозначной характеристикой. 3. При статическом нелинейном элементе с произвольной характеристикой, но при наличии симметричных автоколебаниях в системе.
3.	Периодический режим в замкнутой системе Гаммерштейна-Винера с нелинейным элементом с однозначной характеристикой будет устойчивым, если …	1. … при увеличении амплитуды колебаний линеаризованная система будет неустойчивой, а при уменьшении – устойчивой. 2. … при увеличении амплитуды колебаний линеаризованная система будет устойчивой, а при уменьшении – неустойчивой. 3. .. При увеличении и уменьшении частоты автоколебаний амплитуда колебаний остается постоянной величиной.
4	Несимметричные колебания в замкнутой системе Гаммерштейна-Винера могут возникнуть только, если …	1. … нелинейный статический элемент имеет неоднозначную характеристику. 2. .. на вход системы подается постоянное управляющее воздействие. 3. .. на вход системы подается постоянное управляющее воздействие и, в прямой цепи системы, в линейной части, отсутствует интегрирующее звено.
5	Если на замкнутую систему Гаммерштейна-Винера, в которой отсутствую автоколебания, подается внешнее гармоническое воздействие $H\sin(\tilde{\omega}t)$, то в системе возникнут вынужденные колебания сигнала ошибки с частотой $\tilde{\omega}$ …	1. … всегда, когда $H > 0$. 2. … только тогда, когда $H > \overline{H}$, где $\overline{H}$ - зависит от характеристик линейной части и нелинейного элемента. 3. … только тогда, когда $\tilde{\omega} > \omega_p$, где ω_p - резонансная частота амплитудно-фазовой характеристики линейной части.
6	Если на замкнутую систему Гаммерштейна-Винера, в которой отсутствую автоколебания,	1. … $H\sin(\tilde{\omega}t)$.

	подается внешнее гармоническое воздействие $H\sin(\tilde{\omega}t)$, то в системе, в общем случае, возникнут вынужденные колебания сигнала ошибки вида …	2. … $e_0 + H\sin(\tilde{\omega}t+\varphi)$, где e_0 - постоянная составляющая ошибки, φ - сдвиг сигнала ошибки по фазе. 3. … $e_0 + B\sin(\tilde{\omega}t+\varphi)$, где e_0 - постоянная составляющая ошибки, φ - сдвиг сигнала ошибки по фазе, B - амплитуда колебаний сигнала ошибки ($B \neq H$, в общем случае).
7	Если на замкнутую систему Гаммерштейна-Винера, в которой имеются устойчивые автоколебания $A\sin(\omega_c t)$, подается внешнее гармоническое воздействие $H\sin(\tilde{\omega}t)$, то в системе возникнут вынужденные колебания сигнала ошибки с частотой $\tilde{\omega}$ …	1. … всегда, когда $H > 0$. 2. … только тогда, $\tilde{\omega} << \omega_c$ и $H < \overline{H}$, где $\overline{H}$ - зависит от характеристик линейной части и нелинейного элемента. 3. … когда $\tilde{\omega} > \omega_c$ и $H > \overline{H}$, где $\overline{H}$ - зависит от характеристик линейной части и нелинейного элемента.
8	Если на замкнутую систему Гаммерштейна-Винера, в которой имеются устойчивые автоколебания $A\sin(\omega_c t)$, подается внешнее гармоническое воздействие $H\sin(\tilde{\omega}t)$, то в системе могут возникнуть сложные колебания сигнала ошибки …	1. … всегда, когда $H > 0$ и $\tilde{\omega} < \omega_c$. 2. .. только тогда, $\tilde{\omega} << \omega_c$ и $H < \overline{H}$, где $\overline{H}$ - зависит от характеристик линейной части и нелинейного элемента. 3. … если $\tilde{\omega} \approx \omega_c$ и $H \in [\overline{H}_1, H_2]$, где $\overline{H}_1, \overline{H}_2$ - зависят сложным образом от характеристик линейной части и нелинейного элемента, а также от значений частот $\omega_a, \tilde{\omega}$.