

Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 16. Классификация бифуркаций. Бифуркация Андронова-Хопфа. Глобальные бифуркации.

Коразмерность и «сложность» бифуркаций. Построение диаграмм решений (бифуркационных диаграмм). Бифуркации динамических систем на плоскости. Локальные бифуркации коразмерности один и два. Типовые формы локальных бифуркаций коразмерности один и два. Бифуркация Андронова-Хопфа. Анализ устойчивости бифуркационных точек. Глобальные бифуркации.

Коразмерность и «сложность» бифуркаций.

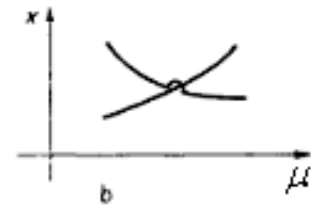
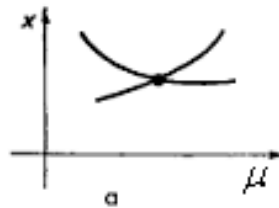
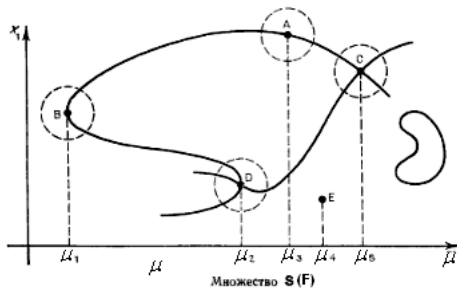
В системах с одним параметром могут встречаться, как правило, лишь самые простые бифуркации. Так, для положений равновесия являются типичными две бифуркации: слияние и исчезновение двух равновесий (или, наоборот, возникновение пары равновесий «из пустоты»); потеря устойчивости положения равновесия, сопровождающееся рождением устойчивого предельного цикла (либо исчезновением неустойчивого цикла). В системах с двумя параметрами возможны те же бифуркации, что и в однопараметрических. Однако возможны и другие, собственно двухпараметрические бифуркации, возникающие в окрестностях точек пересечения или качания различных бифуркационных поверхностей и линий. Аналогично, в системах с тремя параметрами, встречаются однопараметрические, двухпараметрические, а также трехпараметрические бифуркации. Таким образом, каждая бифуркация характеризуется некоторым, необходимым для ее реализации, числом параметров. Это число, называемое коразмерностью бифуркации, можно трактовать, несколько условно, как сложность бифуркации. Это связано с тем, что чем выше коразмерность бифуркации, тем больше ей отвечает различных фазовых портретов, и тем сложнее эти портреты. Пусть имеется система, зависящая от параметров: $\dot{x} = F(x, \mu), x \in R^n, \mu \in D \subset R^m$.

Реализации «грубой» системы заполняют область D в пространстве параметров и, во всех точках такой области, фазовые портреты системы будут топологически эквивалентными. Точки пространства параметров, где будет нарушаться «грубость» реализуемых систем будут являться бифуркационными параметрами. Говорят, что данной бифуркационной точке отвечает бифуркация коразмерности k , если в ней выполняются k бифуркационных условий (условия типа равенства) и некоторый набор условий невырожденности (условия типа неравенства). Бифуркационные условия выделяют в пространстве параметров бифуркационную поверхность (многообразие) коразмерности k . Условия невырожденности, при этом, гарантируют, что точка на бифуркационном многообразии не попадает на подмногообразие, отвечающее бифуркации более высокой коразмерности. Чтобы полностью описать бифуркацию, заданную набором бифуркационных условий и условий невырожденности, необходимо указать для нее все топологически различные бифуркационные диаграммы, описать перестройки фазовых портретов и сформулировать условия, при которых реализуется каждая из диаграмм.

Построение диаграмм решений (бифуркационных диаграмм).

Анализ стационарных решений от одного параметра μ приводит к необходимости исследования системы уравнений следующего вида: $F(x, \mu) = 0, x \in R^n, \mu \in R$. Множество всех решений такой системы обозначим через $S(F) = \{(x, \mu) \in R^n \times R, F(x, \mu) = 0\}$. Множество $S(F)$ обычно представляет собой объединение нескольких кривых в пространстве R^{n+1} , хотя может включать в себя и отдельные изолированные точки. При $n > 1$, множество $S(F)$ удобно изображать на двумерной плоскости. Такое представление обычно называют диаграммой стационарных решений. При проектировании может оказаться, что на двумерной картинке имеет место пересечение кривых, хотя на самом деле в пространстве R^{n+1} эти кривые не пересекаются.

Приведем формальную классификацию точек множества $S(F)$ для случая $n = 1$.



Точки пересечения на диаграмме решений.

1. Если точка $(x_0, \mu_0) \in S(F)$ и справедливо соотношение $\frac{dF(x_0, \mu_0)}{dx} \neq 0$, то такая точка

называется регулярной и соответствует точке ветви решения при отсутствии пересечения с другой ветвью решения. В любой окрестности такой точки можно построить, на основании теоремы об обратной функции, зависимость $x(\mu)$.

2. Пусть теперь точка $(x_0, \mu_0) \in S(F)$ и выполняется соотношение $\left| \frac{dF(x_0, \mu_0)}{dx} \right| = 0$. В данном случае нельзя воспользоваться теоремой об обратной функции и получить функцию $x(\mu)$ в

окрестности точки (x_0, μ_0) . Однако, если выполняется соотношение $\left| \frac{dF(x_0, \mu_0)}{d\mu} \right| \neq 0$, то поменяв

местами μ и x , можно построить в окрестности точки (x_0, μ_0) функциональную зависимость $\mu(x)$. При этом, будет выполняться соотношение $\mu'(x_0) = 0$. На рисунке такой точкой является точка B.

Точку $(x_0, \mu_0) \in S(F)$, в которой одновременно выполняются условия $\left| \frac{dF(x_0, \mu_0)}{dx} \right| = 0$ и

$\left| \frac{dF(x_0, \mu_0)}{d\mu} \right| \neq 0$, а производная $\mu'(x)$ меняет знак, будем называть точкой поворота ветви решения.

3. Если в точке $(x_0, \mu_0) \in S(F)$ выполняются соотношения $\left| \frac{dF(x_0, \mu_0)}{dx} \right| = 0$ и $\left| \frac{dF(x_0, \mu_0)}{d\mu} \right| = 0$,

то такая точка называется сингулярной точкой множества $S(F)$.

Обозначим через $\sigma(F)$ множество всех точек поворота и сингулярных точек множества $S(F)$ (как известно, в силу леммы Сарда, мера множества $\sigma(F)$ будет равна нулю). Очевидно, что точки множества $\sigma(F)$ разбивают множество $S(F)$ на ветви (компоненты связности множества $\sigma(F) \setminus \sigma(F)$).

Рассмотрим более подробно случаи ветвления в точках бифуркации для случая, когда $n = 1$. Пусть

выполняется условие $\frac{dF(x_0, \mu_0)}{dx} = \frac{dF(x_0, \mu_0)}{d\mu} = 0$ и, по крайней мере, одна частная

производная второго порядка от функции F в точке (x_0, μ_0) отлична от нуля. Разложим функцию F по формуле Тейлора в окрестности этой точки:

$$F(x, \mu) = \frac{1}{2} [A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(\mu - \mu_0) + C(\mu - \mu_0)^2] + o[(x - x_0)^2, (\mu - \mu_0)^2] = 0$$

. Здесь $A = \frac{\partial^2 F(x_0, \mu_0)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 F(x_0, \mu_0)}{\partial x \partial \mu}$, $C = \frac{\partial^2 F(x_0, \mu_0)}{\partial \mu^2}$. Разделим полученное соотношение

на $(\mu - \mu_0)^2$ (или $(x - x_0)^2$) и осуществим предельный переход $(x, \mu) \rightarrow (x_0, \mu_0)$. Тогда

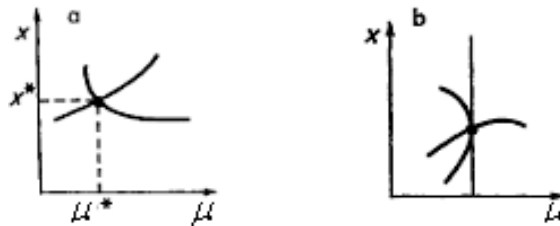
получим два уравнения: $A\left(\frac{dx}{d\mu}\right)^2 + 2B\frac{dx}{d\mu} + C = 0$, $C\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + 2B\frac{d\mu}{dx} + A = 0$

Случай 1. Пусть $A \neq 0$. Тогда первое уравнение имеет решение $\left(\frac{dx}{d\mu}\right) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$. Введем

следующее обозначение $D = B^2 - AC$. Если значение $D < 0$, то точка (x_0, μ_0) является изолированной точкой множества $S(F)$ (из нее не выходит ни одна кривая). Если же значение $D > 0$, то в этом случае в окрестности точки (x_0, μ_0) множество $S(F)$ состоит из двух пересекающихся дуг. Таким образом, в точке (x_0, μ_0) сходятся четыре ветви стационарных решений.

Случай 2. Пусть $A = 0, C \neq 0$. Тогда второе уравнение имеет два решения: $\left(\frac{d\mu}{dx}\right) = 0$ и

$\left(\frac{d\mu}{dx}\right) = -\frac{2B}{C}$. В этом случае множество $S(F)$ в окрестности точки (x_0, μ_0) также состоит из двух пересекающихся дуг. Одна из них имеет в этой точке вертикальную касательную, то есть точка (x_0, μ_0) является «точкой поворота». Такой случай соответствует, так называемой, бифуркации типа «вилка».



Бифуркации динамических систем на плоскости.

Рассмотрим динамическую систему $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \alpha) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha) \end{cases}$, $x \in R^2, \alpha \in R^m$. Правые части системы

предполагаем достаточно гладкими функциями x, α . Стационарные решения (положения

равновесия) определяются корнями системы уравнений $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \alpha) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \alpha) = 0 \end{cases}$.

Грубый случай. Пусть $x_0 = x_0(\alpha)$ - положение равновесия при некотором фиксированном

значении вектора параметров. Пусть матрица линейной части $A(\alpha) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0(\alpha), \alpha) \right\|$ имеет

собственные значения (числа) $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(\alpha)$, которые являются корнями характеристического уравнения

$\lambda^2 - SpA \cdot \lambda + \det A = 0$. Неравенство $\operatorname{Re}\{\lambda_{1,2}\} \neq 0$ выделяет грубый случай. Как известно, имеются три типа грубых положений равновесия: седло ($\lambda_1 > 0; \lambda_2 < 0$), устойчивый узел или фокус ($\operatorname{Re}\{\lambda_{1,2}\} < 0$), неустойчивый узел или фокус ($\operatorname{Re}\{\lambda_{1,2}\} > 0$).

Локальные бифуркации коразмерности один.

В системах второго порядка возможны две локальные бифуркации коразмерности один: в первом случае в нуль обращается одно из действительных собственных чисел, во втором – вещественная часть пары комплексно-сопряженных собственных чисел. Соответственно, будем называть равновесие кратным, если $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$, и нейтральным, если $SpA = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Нейтральное равновесие может быть, как седлом ($\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(\alpha)$ – действительны), так и сложным фокусом или центром ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$).

Двукратное равновесие.

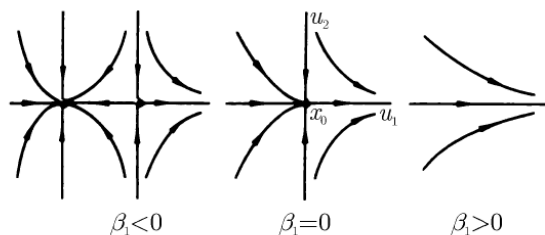
Пусть при некоторых значениях вектора параметров у данного положения равновесия $x_0 = x_0(\alpha)$ одно из собственных чисел обращается в ноль: $\lambda_1(\alpha) = 0$, то есть $\det A = 0$. Модельная система

для такой бифуркации будет зависеть от одного параметра и имеет вид
$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \beta_1 + a(\alpha)u_1^2 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\alpha)u_2 \end{cases}$$
. Для

данной бифуркации имеются два условия невырожденности: $\lambda_2(\alpha) \neq 0$ или $SpA(\alpha) \neq 0$ и $a = a(\alpha) \neq 0$. Данные условия обеспечивают двукратность положения точки равновесия. Таким образом, при наличии одного нулевого (критического) собственного числа перестройка положений

равновесия в системе $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \alpha) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha) \end{cases}$ происходит на гладко зависящей от параметров

одномерной инвариантной кривой в фазовой плоскости и описывается одним уравнением для некоторой координаты u_1 на этой кривой. Близкие к инвариантной кривой траектории экспоненциально приближаются к ней или удаляются от нее при $t \rightarrow \infty$ в зависимости от знака ненулевого собственного числа $\lambda_2(\alpha) \neq 0$. Система $\dot{u}_1 = \beta_1 + a(\alpha)u_1^2; \dot{u}_2 = \lambda_2(\alpha)u_2$ имеет, при $\beta_1 < 0$, два грубых положения равновесия – устойчивый узел и седло. Эти два положения равновесия сливаются, при $\beta_1 = 0$, образуя «седло-узел», то есть возникает структурно – неустойчивая система. При $\beta_1 > 0$ равновесия исчезают.



Бифуркационная диаграмма и фазовые портреты для бифуркации «двукратное равновесие» на плоскости (случай $a > 0, \lambda < 0$)

Нейтральное равновесие (бифуркация рождения цикла).

Пусть при некоторых значениях вектора параметров у положения равновесия $x_0 = x_0(\alpha)$ пара комплексно-сопряженных собственных чисел выходит на мнимую ось: $\operatorname{Re}\{\lambda_{1,2}(\alpha)\} = 0$, то есть $\operatorname{Sp}A(\alpha) = 0$, в то время как $\det A(\alpha) > 0$. Модельная система для данной бифуркации коразмерности один зависит от одного параметра и может быть записана в комплексном виде $\dot{z} = (\beta_1 + i\omega)z + l_1 z |z|^2$, где $l_1 = l_1(\alpha)$ - действительное число, $\omega = \omega(\alpha) = \operatorname{Im}\{\lambda_1(\alpha)\}$. Имеются два условия невырожденности: $\omega(\alpha) \neq 0$; $l_1(\alpha) \neq 0$. Величину l_1 часто называют первой ляпуновской величиной равновесия $x_0 = x_0(\alpha)$. Для данной бифуркации возможны две различные бифуркационные диаграммы, определяемые знаком l_1 .



Бифуркационные диаграммы и фазовые портреты для бифуркации «нейтральное равновесие (рождение цикла)»: а) $l_1 < 0$; б) $l_1 > 0$

Независимо от знака $l_1 = l_1(\alpha)$ положение равновесия $z = 0$ при переходе β_1 через нуль теряет устойчивость, превращаясь из устойчивого фокуса, при $\beta_1 < 0$, в неустойчивый, при $\beta_1 > 0$. Однако, характер перестройки фазовых портретов в окрестности положения равновесия существенно зависит от знака l_1 . При $l_1 < 0$ устойчивый равновесный режим в изучаемой системе сменяется устойчивыми автоколебаниями малой амплитуды. Такая потеря устойчивости называется мягкой. В случае $l_1 > 0$ после бифуркации устойчивый равновесный режим сменяется другим, сильно отличающимся от него режимом: происходит жесткая потеря устойчивости.

Локальные бифуркации коразмерности два.

Если двигаться в пространстве параметров системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \alpha) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha) \end{cases}$ по многообразию,

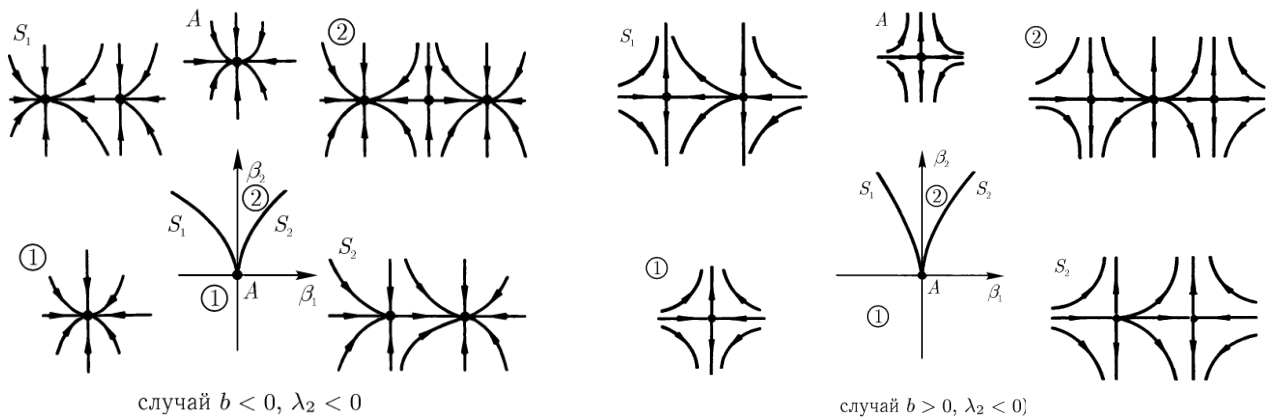
отвечающему некоторой бифуркации коразмерности один, то при некоторых значениях параметров может нарушиться одно из условий невырожденности для этой бифуркации. Тогда возникает бифуркация коразмерности два.

Трехкратное равновесие.

Пусть при некотором значении вектора параметров у положения равновесия $x_0 = x_0(\alpha)$ одно из собственных чисел обращается в нуль и одновременно нарушается условие невырожденности для бифуркации «двухкратное равновесие»: $\lambda_1(\alpha) = 0$ и $a = 0$. Модельная система для данной

бифуркации будет зависеть от двух параметров и имеет вид: $\begin{cases} \dot{u}_1 = \beta_1 + \beta_2 u_1 + b(\alpha) u_1^3 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\alpha) u_2 \end{cases}$, где

$b = b(\alpha) \neq 0$ и $\lambda_2(\alpha) \neq 0$ - условия невырожденности. Система имеет четыре различных типа бифуркационных диаграмм, отвечающих различным сочетаниям знаков b, λ_2 .



Типовые формы локальных бифуркаций коразмерности один и два.

В целом, однако, бифуркации коразмерности выше двух встречаются достаточно редко. Это связано с тем, что для большинства бифуркационных многообразий формируется некоторый базовый перечень условий трансверсальности, обеспечивающий определенную устойчивость точек, принадлежащих линиям (поверхностям) пересечения бифуркационных многообразий.

Одно из основных условий трансверсальности заключается в том, что ни одно из линейных отображений для функции $F(x, \mu)$ не обладает нулевым собственным значением кратности больше двух, а при наличии нулевого собственного значения кратности двух оно имеет

геометрическую кратность равную единице, то есть такому значению отвечает ячейка $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в

жордановой нормальной форме. Определим отображение поверхности M в пространство

квадратных матриц, ставящее в соответствие точке $(x, \mu) \in M$ матрицу Якоби $\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x}$ размера

$(n \times n)$ в этой точке. В соответствии со следствием из теоремы Сарда, образ отображения двумерной (коразмерности $(n - 2)$ или коразмерности бифуркации 2) поверхности M на многообразие таких матриц должен иметь такую же коразмерность. В пространстве квадратных матриц существуют подмногообразия, соответствующие различным комбинациям собственных значений на мнимой оси. Очевидно, что образу поверхности M будут соответствовать подмногообразия таких матриц, геометрическая размерность которых не более двух. К сожалению, список свойств трансверсальности не исчерпывается приведенным выше условием. Существует несколько альтернативных определений «качественно одинаковой динамики» при изменении бифуркационного параметра $\mu \in R^k$, каждое из которых требует дополнительного исследования конкретной системы.

Рассмотрим базовый список типовых форм бифуркаций для коразмерностей один и два для

матриц Якоби $\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x}$, вычисленных в точке бифуркации (x_0, μ_0) /Гукенхеймер с160/.

Коразмерность бифуркации один

1. Простое нулевое собственное значение:

$$\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix};$$

2. Простая пара чисто мнимых собственных значений:

$$\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Коразмерность бифуркации два

1. Двойной ноль, недиагонализируемый (геометрическая кратность равна 1):

$$\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix};$$

2. Простой ноль+чисто мнимая пара собственных значений:

$$\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix};$$

3. Две различные чисто мнимых пары собственных значений:

$$\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Во всех приведенных случаях A - матрица подходящей размерности $((n-1)*(n-1))$, $((n-2)*(n-2))$ и т.д.. Все собственные значения матрицы A имеют ненулевые вещественные части собственных значений.

Бифуркация Андронова-Хопфа.

Рассмотрим линейную систему следующего вида: $\begin{cases} \dot{x} = \mu x - \omega y \\ \dot{y} = \omega x + \mu y \end{cases}$, которая имеет собственные значения характеристического многочлена $\lambda = \mu \pm i\omega$. Фундаментальная матрица решений системы имеет вид: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Точка $\mu = 0$ является точкой изменения характера поведения траекторий, то есть точкой бифуркации.

Пусть, теперь, при значении параметра $\mu = \mu_0$ система $\dot{x} = F(x, \mu), x \in R^n, \mu \in R$ имеет положение равновесия $p(\mu_0)$, в котором $\frac{dF(x_0, \mu_0)}{dx}$ имеет пару простых мнимых собственных значений $\pm i\omega, \omega > 0$, а все остальные собственные значения имеют ненулевую вещественную часть. Теорема об обратной функции гарантирует в этом случае существование для каждого значения μ вблизи точки $\mu = \mu_0$ соответствующего положения равновесия. Однако, при пересечении собственными значениями матрицы $\frac{dF(x_0, \mu_0)}{dx}$ мнимой оси в точке $\mu = \mu_0$ будет происходить изменение размерностей устойчивого и неустойчивого многообразий для точки равновесия $p(\mu_0)$. Если провести гладкую замену координат и разложение в ряд по формуле Тейлора, то систему $\dot{x} = F(x, \mu), x \in R^2, \mu \in R$ можно привести к следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y \\ \dot{y} = (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + a(x^2 + y^2))y \end{cases}.$$

Переходя к полярным координатам,

уравнения системы тогда можно представить в виде следующих соотношений:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = (d\mu + a\rho^2)\rho \\ \dot{\theta} = (\omega + c\mu + b\rho^2) \end{cases}.$$

Отсюда видно, что существуют периодические орбиты, представляющие

собой окружности $\rho = \text{const}$, получаемые из ненулевых решений уравнения $\dot{\rho} = 0$. Если коэффициенты $a \neq 0$ и $d \neq 0$, то эти решения лежат на параболе $\mu = -a\rho^2 / d$. Таким образом, поверхность периодических орбит имеет квадратичное качание со своей касательной плоскостью $\mu = 0$ в расширенном пространстве $R^2 \times R$. В общем случае будет справедлива теорема Хопфа, которую можно сформулировать следующим образом.

Теорема (Хопф). Пусть система $\dot{x} = F(x, \mu), x \in R^n, \mu \in R$ имеет положение равновесия (x_0, μ_0) со следующими свойствами:

1. $\frac{dF(x_0, \mu_0)}{dx}$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений и не имеет других собственных значений с нулевой вещественной частью;

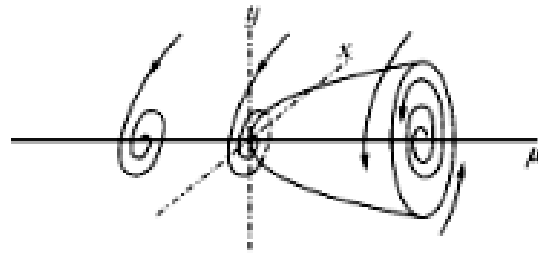
Тогда существует гладкая кривая равновесий $(x(\mu), \mu)$, где $x(\mu_0) = x_0$. Собственные значения $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ матрицы $\frac{dF(x(\mu), \mu)}{dx} \big|_{\mu=\mu_0}$, являющиеся чисто мнимыми при значении $\mu = \mu_0$, зависят от параметра μ гладким образом. Если, кроме того, выполняется условие:

2. $\frac{d}{d\mu}(\text{Re}(\lambda(\mu))) \big|_{\mu=\mu_0} = h \neq 0$,

то, существует единственное трехмерное центральное многообразие, проходящее через точку $\mu = \mu_0 \in R^n \times R$, и гладкая система переменных (сохраняющая плоскость $\mu = \text{const}$), в которой разложение Тейлора до третьей степени на центральном многообразии дается соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y \\ \dot{y} = (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + a(x^2 + y^2))y \end{cases}.$$

Если $a \neq 0$, то существует поверхность периодических решений на центральном многообразии, имеющая квадратичное касание с собственным пространством для значений $\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0)$ и совпадающее во втором порядке с параболоидом $\mu = -a(x^2 + y^2) / d$. В случае $a < 0$ эти периодические решения являются устойчивыми предельными циклами, а в случае $a > 0$ периодические решения являются репеллерами.

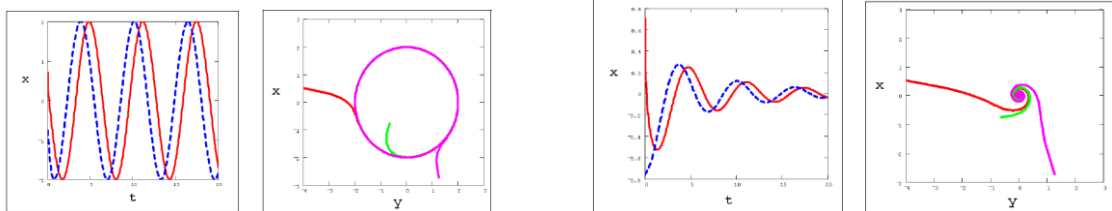


Бифуркация Хопфа

Пример. Уравнение Хопфа. Рассмотрим классическую систему Хопфа, описываемую следующими уравнениями: $\begin{cases} \dot{\rho} = \mu\rho - \rho^3 \\ \dot{\theta} = C \end{cases}$. Здесь принимается $C = \text{const}$, $\rho(0) = \rho_0$, $\theta(0) = \theta_0$. Исходные координаты

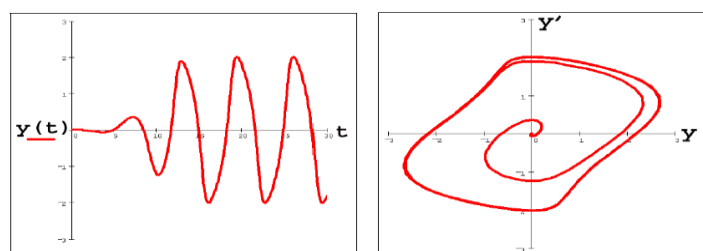
системы определяются с помощью непрерывного невырожденного преобразования: $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$. При

значении $\mu = 4$ получим следующее решение.



Таким образом, после короткого переходного процесса решение выходит на колебательный режим для любых начальных значений. То есть, на фазовой плоскости всевозможные решения приближаются при $t \rightarrow \infty$ к аттрактору, который является предельным циклом. Можно показать, что для приведенной динамической системы при значении $\mu > 0$ амплитуда колебаний в предельном цикле будет пропорциональна $\sqrt{\mu}$. Если решить ту же самую систему при значении $\mu < 0$, то предельного цикла существовать не будет, а единственная точка равновесия будет являться устойчивым фокусом. Заметим, что при малых значениях μ предельный цикл имеет очень малую амплитуду. Поэтому переход от неподвижной точки к устойчивому предельному циклу при изменении μ будет происходить плавно, с ростом параметра μ . Такое рождение автоколебаний называется «мягким» режимом.

Пример. Уравнение Ван дер Поля. Модель Ван дер Поля, описывает динамику генератора электрических колебаний и имеет следующий вид: $\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$. Решение данного уравнения, при прохождении параметра μ через бифуркационное значение, показывает жесткое возбуждение автоколебаний. То есть сразу после выполнения соотношения $\mu > \mu_0$ возникают колебания конечной амплитуды.



Анализ устойчивости бифуркационных точек.

Для анализа бифуркаций можно достаточно эффективно использовать теорему о центральном многообразии. Для этого динамическая система дополняется фиктивными уравнениями для параметров $\dot{\mu} = 0$. Тогда параметры попадают в «расширенное» центральное многообразие и можно исследовать структуру инвариантных многообразий, как параметрического семейства систем. Наиболее практически важными случаями являются бифуркации, в которых устойчивые неподвижные точки теряют устойчивость. Поэтому можно ограничиться случаями, когда в структуре потока системы присутствуют лишь многообразия W_{loc}^s и W_{loc}^c . Это позволяет понизить порядок размерности исходной системы и анализировать только проекцию исходной системы на центральное многообразие. При этом поиск такой проекции облегчается тем, что центральное многообразие касается E^c в самой особой точке. Таким образом, можно выделить координаты y, z , отвечающие направлениям $E^c(z)$ и направлениям $E^s(y)$. То есть, многообразие W_{loc}^c можно искать, как некоторую поверхность, описываемую соотношением $y = h(z)$ где $h(0) = 0, \frac{dh}{dz}|_{z=0} = 0$.

Методика такого подхода выглядит следующим образом. Записывается исходная система в виде следующих частей, зависящих от введенных выше координат /Малинецкий Потапов Нелин динамика и хаос/: $\dot{z} = B(\mu)z + f(z, y, \mu), \dot{\mu} = 0, \dot{y} = C(\mu)y + g(z, y, \mu)$. Уравнение для центрального многообразия ищется в виде $y = h(z, \mu)$, обычно представляемого в виде некоторого полиномиального разложения. Затем подставляем $y = h(z, \mu)$ в третье уравнение и определяем необходимое количество членов в разложении $\hat{h}(z, \mu)$. Полученный результат подставляем в первое уравнение $\dot{z} = B(\mu)z + f(z, \hat{h}(z, \mu), \mu)$ и находим укороченную систему, определяющую устойчивость точки бифуркации.

Пример. Рассмотрим следующую динамическую систему (уравнение Дуффинга):

$\dot{u} = v, \dot{v} = \mu u - u^2 - v$, где μ - параметр, близкий к нулю. Особыми точками являются $(u = 0, v = 0)$ и $u = \mu$. Обе они становятся негиперболическими при $\mu = 0$, когда они совпадают. Линеаризованная система

первого приближения в точке $(u = 0, v = 0), \mu = 0$ имеет вид: $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Собственными

значениями матрицы являются $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$, а соответствующие собственные вектора представляются

как столбцы матрицы преобразования $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Линейное преобразование T приводит матрицу A к

жордановой (в данном случае диагональной) форме в новых координатах. При этом, новые переменные

определяются через старые координаты с помощью следующего соотношения: $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда исходную систему в новых координатах, с учетом дополнительного уравнения по параметру, можно записать в следующем виде: $\dot{z} = \mu(z + y) - (z + y)^2, \dot{\mu} = 0, \dot{y} = -y - (z + y) + (z + y)^2$.

Будем искать центральное многообразие в виде: $y = h(z, \mu) = az^2 + bz\mu + c\mu^2 + O\{|z| + |\mu|\}^3$.

Уравнение для центрального многообразия, в силу уравнений системы в канонической форме, определяется из следующих соотношений.

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial h}{\partial \mu} \dot{\mu} = \frac{\partial h[\mu(z+h) - (z+h)^2]}{\partial z} \text{ и } \dot{y} = -y - (z+y) + (z+y)^2.$$

Отсюда получим выражение для расчета необходимого количества членов разложения $h(z, \mu)$:

$$\frac{\partial h[\mu(z+h) - (z+h)^2]}{\partial z} = -y - (z+y) + (z+y)^2. \text{ Подставляя сюда предполагаемое разложение}$$

функции $h(z, \mu)$, получим с точностью до квадратичных членов:

$$(2az + b\mu + \dots)(\mu(z + \dots) + \dots) + (az^2 + bz\mu + c\mu^2) + \mu(z + az^2 + bz\mu + c\mu^2) - (z + \dots)^2 = O\{(|z| + |\mu|)^3\}.$$

Раскрывая скобки и, приравнявая нулю коэффициенты при $z^2, z\mu, \mu^2$, можно найти, что $a = 1, b = -1, c = 0$.

Следовательно, центральное многообразие можно описать поверхностью: $y = z^2 - \mu z + O\{(|z| + |\mu|)^3\}$.

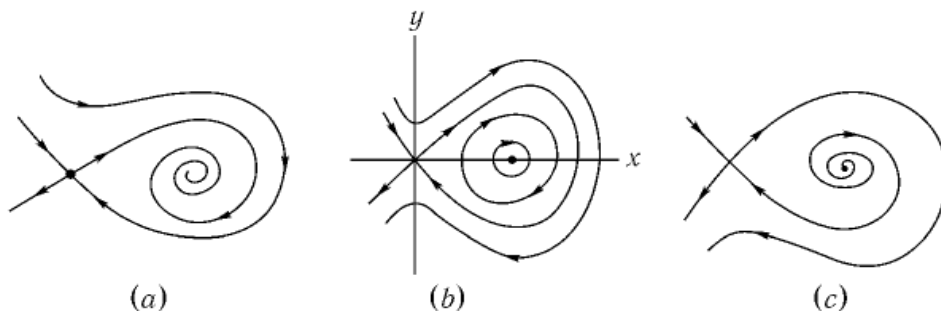
Потому искомая укороченная система, определяющая устойчивость особой точки (точки бифуркации), имеет вид: $\dot{z} = \mu(1 - \mu)z - (1 - \mu)z^2 + O\{(|z| + |\mu|)^3\}$.

Глобальные бифуркации.

Теория локальных бифуркаций опирается на преобразования координат, приводящие системы общего вида к нормальной форме, в результате чего информацию о динамике можно получить из разложения векторного поля в особой точке в ряд Тейлора. Однако, существуют такие динамические свойства системы, которые приводят к ее структурным изменениям, которые нельзя вывести из локальной информации.

Простейшие глобальные бифуркации возникают в плоских векторных полях при наличии траекторий, соединяющих две седловые точки или образующих петлю, содержащую единственную седловую точку.

Пример. Пусть задана система $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 + \mu y \end{cases}$. Фазовый портрет системы приведен на рисунке.



(a) $\mu < 0$; (b) $\mu = 0$; (c) $\mu > 0$.

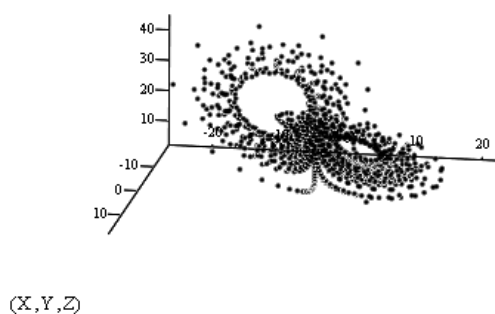
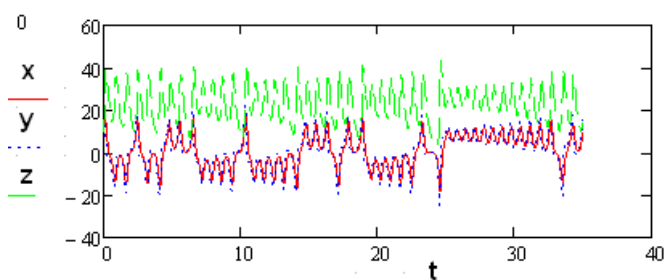
Если $\mu = 0$, то система имеет первый интеграл $I(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. Начало координат является

седловой точкой, для которой две сепаратрисы совпадают и образуют петлю. Внутренность области, ограниченной петлей, заполнена семейством замкнутых орбит. Данная ситуация структурно неустойчива.

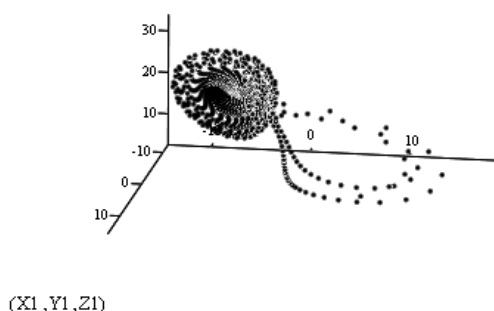
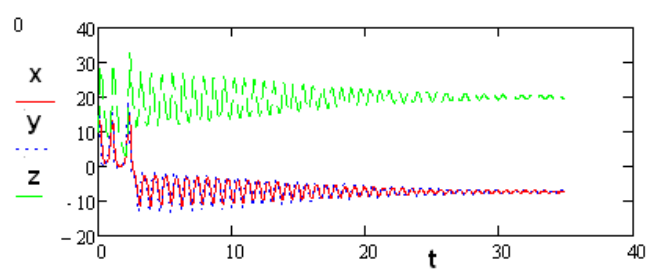
Пример. Еще одним примером глобальной бифуркации может служить бифуркация системы Лоренца.

Решением такой системы при определенном сочетании параметров является странный аттрактор – притягивающее множество, которое по виду идентично случайному процессу. Критическое сочетание параметров (в данном случае параметра r) соответствует глобальной точке бифуркации.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz, \text{ где } \sigma = 10; r = 27; b = 2.7. \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$



При значениях параметров $\sigma = 10; r = 21; b = 2.7$ у системы появляется точка равновесия типа устойчивого фокуса.



Контрольные вопросы к лекции 16.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Бифуркация динамической плоскости на плоскости коразмерности один характеризуется тем, что...	1. ... два действительных собственных значения матрицы Якоби обращаются в нуль. 2. ... действительные части одного или двух собственных значений матрицы Якоби обращаются в нуль. 3. ... мнимые части собственных значений матрицы Якоби обращаются в нуль.
2	Бифуркация динамической плоскости на плоскости коразмерности два характеризуется тем, что...	1. ... действительные части двух собственных значений матрицы Якоби обращаются в нуль. 2. ... мнимые значения собственных значений матрицы Якоби обращаются в нуль. 3. ... одно из собственных значений матрицы Якоби обращается в нуль и нарушается одно из условий вырожденности бифуркационной точки
3	Модельная система бифуркации коразмерности один динамической системы на плоскости имеет вид...	1. ... $\dot{z} = (\beta + i\omega)z + l z ^2$ 2. ... $\dot{z} = \beta z + l z ^2$ 3. ... $\dot{z} = \beta z + l z ^3$ где $\beta(\mu), \omega(\mu), l(\mu), \mu$ - бифуркационный параметр

4	<p>Модельная система бифуркации Андронова-Хопфа для динамической системы на плоскости в полярных координатах имеет вид ...</p>	<p>1. ... $\begin{cases} \dot{\rho} = d\mu\rho + a\rho^4 \\ \dot{\theta} = \omega + c\mu + b\rho^2 \end{cases}$</p> <p>2. ... $\begin{cases} \dot{\rho} = d\mu\rho + a\rho^3 \\ \dot{\theta} = \omega + c\mu + b\rho^2 \end{cases}$</p> <p>3. ... $\begin{cases} \dot{\rho} = d\mu\rho + a\rho^3 \\ \dot{\theta} = (\omega + c\mu)\rho + b\rho^2 \end{cases}$</p> <p>где μ - бифуркационный параметр</p>
5	<p>«Мягкая» бифуркация динамической системы отличается от «жесткой» тем, что при изменении бифуркационного параметра при «мягкой» бифуркации ...</p>	<p>1. ... не могут возникнуть колебания в системе. 2. ... могут сразу возникнуть колебания с достаточной амплитудой. 3. ... могут возникнуть колебания с постепенно возрастающей амплитудой по мере изменения бифуркационного параметра.</p>
6	<p>Анализ особенностей потери устойчивости динамической системой при прохождении через бифуркационную точку осуществляется путем исследования ...</p>	<p>1. ... уравнений системы в устойчивом W_{loc}^s и неустойчивом W_{loc}^u инвариантном многообразиях. 2. ... путем редукции уравнений системы проектированием на центральное W_{loc}^c инвариантное многообразие. 3. ... путем исследования только собственных значений матрицы Якоби системы в точке бифуркации.</p>