Многокритериальные методы, учитывающие предпочтения ЛПР при построении решающего правила.

В терминах классификации, приведенной во введении, мы рассматриваем задачу принятия решений в условиях определенности

Три типа методов:

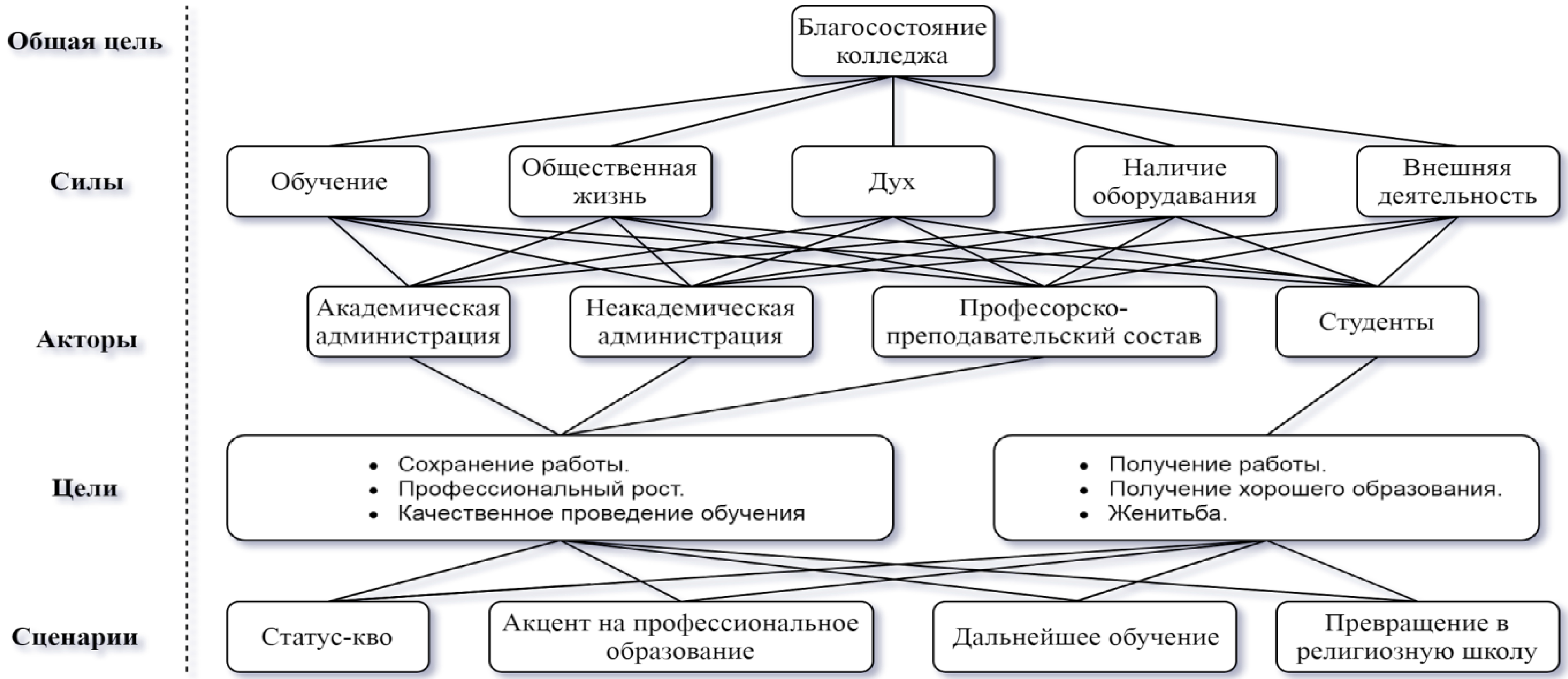
- Методы, основанные на попарном сравнении вариантов и критериев
- Методы, использующие построение функции ценности и, в том числе, формальные методы, основанные на том, что формулируются специальные предположения о свойствах предпочтения, выполнение которых гарантирует существование функции ценности конкретного вида.
- Аксиоматический метод, отражающий понятие важности критериев.

Метод анализа иерархий (AHP)

- Порядок применения метода анализа иерархий заключается в следующем:

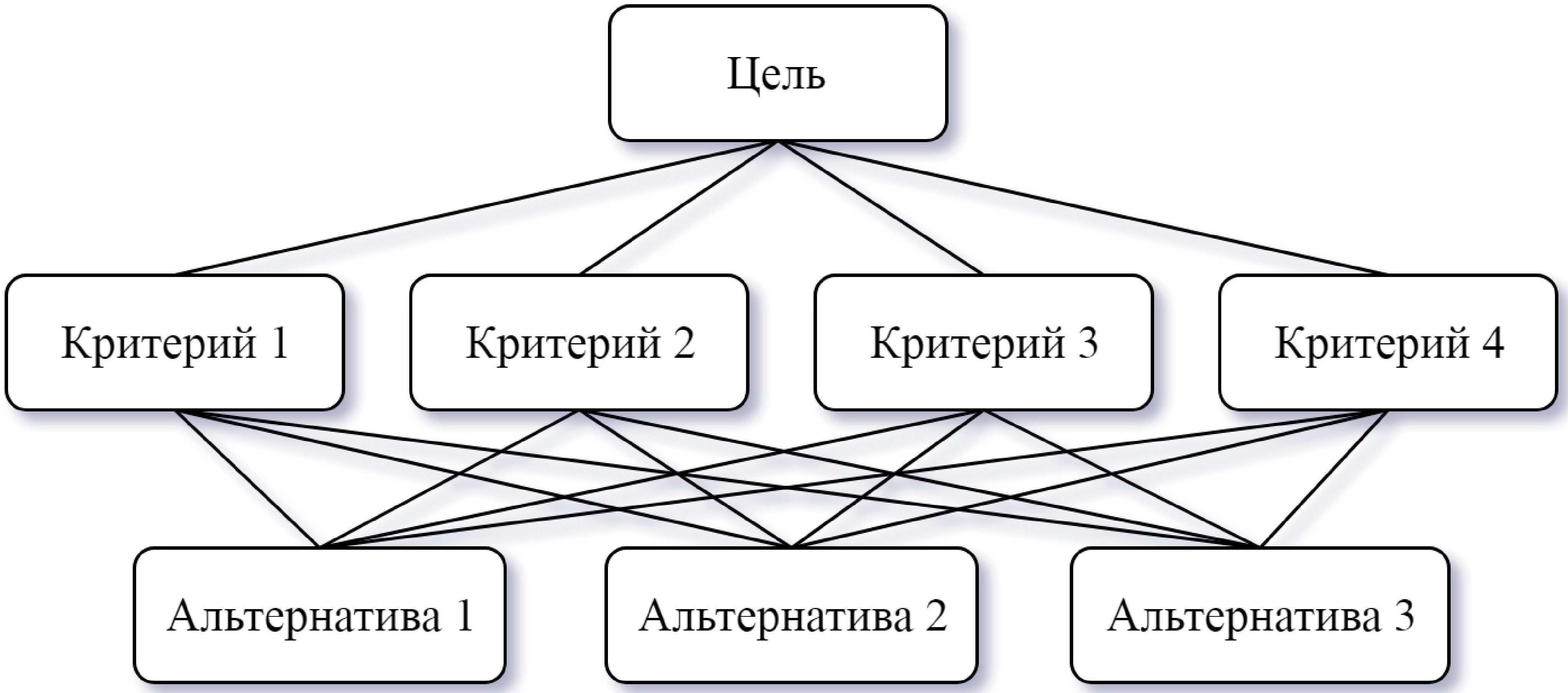
1. Построение качественной модели проблемы в виде иерархии, включающей цель, альтернативные варианты достижения цели и критерии для оценки качества альтернатив.
2. Определение приоритетов всех элементов иерархии, построенной в п.1, с использованием метода парных сравнений.
3. Синтез глобальных приоритетов альтернатив путем линейной свертки приоритетов элементов на иерархии.
4. Проверка суждений на согласованность.
5. Принятие решения на основе полученных результатов.

На следующем слайде описка в слове оборудование, но не могу исправить, это текст до правок. Есть и другие погрешности.



Общая цель
Силы
Акторы
Цели
Сценарии
Благосостояние колледжа
Обучение
Общественная жизнь
Дух
Наличие оборудавания
Внешняя деятельность
Академическая администрация
Неакадемическая администрация
Професорско-преподавательский состав
Студенты
• Сохранение работы.
• Профессиональный рост.
• Качественное проведение обучения
• Получение работы.
• Получение хорошего образования.
• Женитьба.
Статус-кво
Акцент на профессиональное образование
Дальнейшее обучение
Превращение в религиозную школу

Простейшая схема иерархии



1 этап.

Пусть $A_1, \ldots, A_k$ - альтернативы, $K_1, \ldots, K_n$ - критерии, по которым они оцениваются. Эксперту последовательно предъявляются пары альтернатив (A_i, A_j) и предлагается оценить степень d_{ij} преимущества альтернативы A_i над альтернативой A_j относительно некоторого качественного критерия K_t. При этом, если эксперту была предъявлена пара (A_i, A_j), и он определил степень превосходства d_{ij}, то пара (A_j, A_i) уже не предъявляется, а степень превосходства d_{ji} определяется из соотношения

$$d_{ji} = 1/d_{ij}. \qquad (*)$$

Таким образом, при наличии k альтернатив эксперт должен выполнить $k(k-1)/2$ сравнений. Отметим, что соотношение (*) является фундаментальным для метода Саати определения относительных весов альтернатив. Предлагается определять эти числа следующим образом: «Число d_{ij} показывает, во сколько раз альтернатива A_i превосходит альтернативу A_j относительно общего свойства или критерия. В нашем случае считаем, что все альтернативы сравнимы, то есть интенсивность больше нуля, т.е. d_{ij}>0.

Интенсивность относительной важности	*Определение*	*Объяснение*
0	Несравнимы	Эксперт затрудняется в сравнении
1	Равная важность	Равный вклад двух альтернатив в цель
3	Умеренное превосходство одного над другим	Опыт и суждения дают легкое превосходство одной альтернативы над другой
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт и суждения дают сильное превосходство одной альтернативы над другой
7	Значительное превосходство	Одной из альтернатив дается настолько сильное превосходство, что оно становится практически значительным
9	Очень сильное превосходство	Очевидность превосходства одной альтернативы над другой подтверждается наиболее сильно
2,4,6,8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяются в компромиссном случае
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одной альтернативы с другой получено одно из вышеуказанных чисел, то при сравнении второй альтернативы с первой получим обратную величину	

ника, т.е. интенсивность больше нуля.

Элементы $d_{ij}, i, j = 1, \ldots, k$ образуют положительную квадратную матрицу парных сравнений D:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} d_{12} \cdots d_{1k} \\ d_{21} d_{22} \cdots d_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{k1} d_{k2} \cdots d_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} \frac{w_1}{w_2} \cdots \frac{w_1}{w_k} \\ \frac{w_2}{w_1} \frac{w_2}{w_2} \cdots \frac{w_2}{w_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{w_k}{w_1} \frac{w_k}{w_2} \cdots \frac{w_k}{w_k} \end{pmatrix}$$

Предлагается элемент d_{ij} трактовать как отношение весов альтернатив A_i и A_j, т.е. $d_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$.

Наша задача — определить вектор $w = (w_1, \ldots, w_k)$ весов (приоритетов) альтернатив, исходя из значений матрицы D.

В предположении, что D является согласованной, то есть что при наличии основного массива данных все остальные данные могут быть логически получены из них, матрица парных сравнений удовлетворяет условию

$$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i w_h}{w_j w_h} = \frac{w_i}{w_h} \frac{w_h}{w_j} = d_{ih} d_{hj}, \ i, j = 1, \ldots, k, \qquad (**)$$

то есть D является положительной обратно симметричной матрицей ранга один.

•

*Пример***.** Пусть матрица парных сравнений альтернатив A_1, A_2, A_3 относительно некоторого фактора (критерия) задана таблицей.

Матрица удовлетворяет условиям (*) и (**) и поэтому является согласованной обратно симметричной

Альтернативы	A_1	A_2	A_3
A_1	1	5	4
A_2	1/5	1	4/5
A_3	1/4	5/4	1

Для вектора весов может быть выбран собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному значению матрицы D.

Для согласованной обратно симметричной матрицы D выполняются условия (*) и (**), тогда

$d_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i}$=1, $i, j = 1, \ldots, k$, и, следовательно,

$\sum_{j=1}^{k} d_{ij} w_j \cdot \frac{1}{w_i} = k$, $i = 1, \ldots, k$ или $\sum_{j=1}^{k} d_{ij} w_j = k w_i$, $i = 1, \ldots, k$,

то есть $Dw = kw$ и $w = (w_1, \ldots, w_k)$ – собственный вектор матрицы D, соответствующий собственному значению k.

С другой стороны, из теории матриц известно, что у положительной обратно симметричной матрицы, имеющей ранг равный 1, максимальное собственное число равно размерности этой матрицы, то есть $\lambda_{max} = k$.

В реальной ситуации вычисленное максимальное собственное число λ_{max} будет отличаться от соответствующего собственного числа для идеальной матрицы и всегда $\lambda_{max} > k$.

Для нахождения вектора весов матрицы парных сравнений D нужно найти собственный вектор w матрицы D, соответствующий максимальному собственному значению λ_{max}:

$$D \cdot w = \lambda_{max} \cdot w.$$

Для нахождения нормализованного решения заменим вектор w на $\frac{1}{\alpha} w$, где $\alpha = \sum_{i=1}^{k} w_i$, что обеспечит выполнение условия $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.

Так как малые изменения в d_{ij} вызывают малые изменения λ_{max}, отклонения последнего от k являются мерой согласованности.

Индекс согласованности

$$ИС = \frac{\lambda_{max} - k}{k-1}.$$

Для оценки достаточности степени согласованности использовать *отношение согласованности*, которое равно:

$$ОС = \frac{ИС}{ИС^*},$$

где $ИС^*$ – среднее значение $ИС$, вычисленных для большого количества случайным образом сгенерированных по шкале от 1 до 9 обратно симметричных матриц парных сравнений. Средние $ИС^*$ (вторая строка) для матриц различных порядков (первая строка) , определенные так, как описано выше:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

Результирующий вектор считается приемлемым, если $ОС$ не превышает 0.20.

Система линейных уравнений, соответствующая характеристическому уравнению матрицы, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (1-\lambda)w_1 + 5w_2 + 4w_3 = 0; \\ \dfrac{1}{5}w_1 + (1-\lambda)w_2 + \dfrac{4}{5}w_3 = 0; \\ \dfrac{1}{4}w_1 + \dfrac{4}{5}w_2 + (1-\lambda)w_3 = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2(3-\lambda)=0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$. Подставляя λ_{max} в (3.4), решаем систему, и после нормирования собственного вектора получаем $w_1 = 0{,}6897$; $w_2 = 0{,}1379$; $w_3 = 0{,}1724$. При этом ИС = ОС = 0, что подтверждает полную согласованность матрицы.

Проверьте согласованность матрицы парных сравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/5 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/5 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/5 & 1 \end{bmatrix},$$

1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первой альтернативы, второй – второй альтернативы и т. д.
2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.
3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца, то есть нормализовать столбец, затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки.
4. Перемножить n элементов каждой строки и извлечь корень n-й степени. Нормализовать полученные числа.

По первому из указанных способов результат: w_1=0.69; w_2=0.14; w_3=0.17.

2 этап.

Провести аналогичные процедуры для матриц парных сравнений критериев (факторов) $K_1, \dots, K_n$ и матриц парных сравнений альтернатив $A_1,\dots,A_k$ по отдельным критериям.

Получим вектор весов $v = (v_1, \dots, v_n)$ критериев с точки зрения достижения поставленной цели и набор векторов $w^{(j)}$ =($w_1^{(j)}$,...,$w_k^{(j)}$), $j = 1, \dots n$ весов (приоритетов) альтернатив, рассмотренный по отношению к каждому критерию. Синтез полученных результатов осуществляется путем аддитивной свертки по формуле

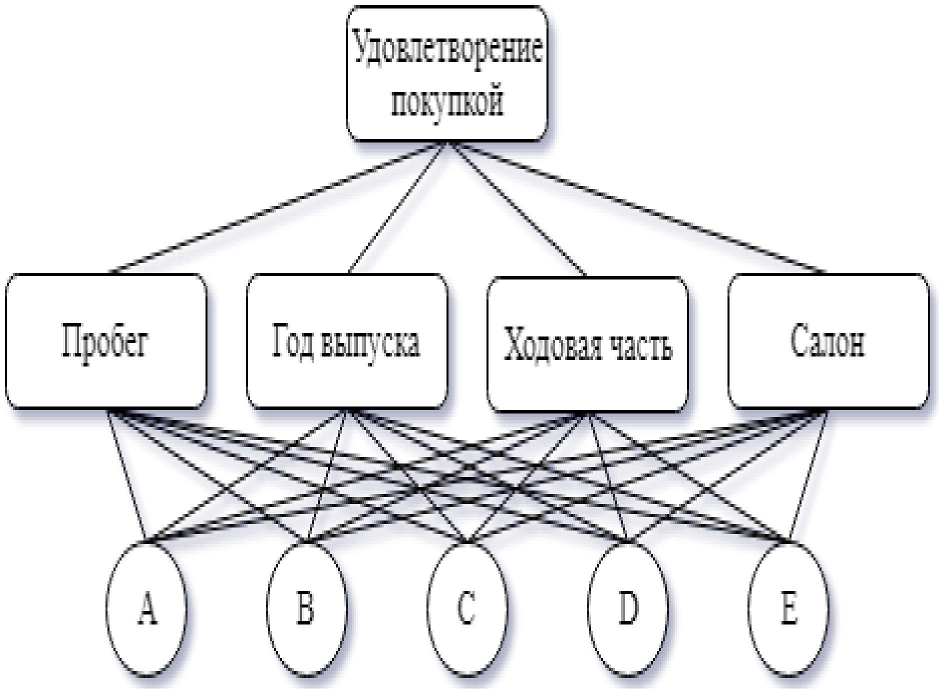
$$\boldsymbol{S_i = \sum_{j=1}^{n} w_i^{(j)} v_j,\ \ i = 1, \dots, k} \ , \tag{3}$$

(

где $\boldsymbol{S_i}$ **- глобальный приоритет $\boldsymbol{i}$-ой альтернативы , $\boldsymbol{w_i^{(j)}}$ - вес (приоритет) альтернативы $\boldsymbol{A_i}$, рассмотренный по отношению критерия $\boldsymbol{K_j}$, $\boldsymbol{v_j}$ - вес (приоритет) критерия $\boldsymbol{K_j}$ с точки зрения поставленной цели.**

- Выбор и оценка автомобиля

- В салоне подержанных автомобилей представлено пять автомобилей A, B, C, D, E одной и той же модели В этом примере проведем сравнение этих автомобилей с точки зрения привлекательности для покупки по четырем характеристикам (критериям):
- K_1 – величина пробега, K_2 – разница в годе выпуска, K_3 – состояние ходовой части, K_4 – изношенность салона. Оцениваете по девятибалльной шкале: например для автомобиля пробег в 20000 *км* и 30000 *км* равноважны, а разница в 10 месяцев в годе выпуска составляет умеренное превосходство по сравнению с более новым автомобилем.
-



•

	K_1	K_2	K_3	K_4
K_1	1	3	5	9
K_2	1 / 3	1	3	5
K_3	1/5	1/3	1	3
K_4	1/9	1/5	1/3	1

- Для определения максимального собственного значения и соответствующего собственного вектора можно воспользоваться любым вычислительным сервисом. Для этой матрицы λ_{max} =4.076, что достаточно близко от значения в случае согласованности, которое равно 4, то есть порядку матрицы; *ИС* = 0.0245; *ОС* = 0.028, то есть матрица хорошо согласована. Вектор приоритетов (весов) критериев $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ этой матрицы, соответствующий собственному значению λ_{max} , получается равным
- *v* = (0.581; 0.255; 0.114; 0.049).

•

Величина пробега	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	1	4	4	7	4
B	1/4	1	1/4	3	1
C	1/4	4	1	7	4
D	1/7	1/3	1/7	1	1/3
E	1/4	1	1/4	3	1

- λ_{max} = 5.047, вектор весов $w^{(1)}$ = (0.37; 0.11; 0.37; 0.04;0.11)

Разница в годе выпуска	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	1	5	1/5	5	5
B	1/5	1	1/9	1	1
C	5	9	1	9	9
D	1/5	1	1/9	1	1/3
E	1/5	1	1/9	3	1

- $\lambda_{max} = 5.130$, вектор весов $w^{(2)} = (0.22; 0.06; 0.60; 0.06; 0.06)$

•

Состояние ходовой части	A	B	C	D	E
A	1	5	5	1	5
B	1/5	1	1	1/5	1
C	1/5	1	1	1/5	1
D	1	5	5	1	5
E	1/5	1	1	1/5	1

- $\lambda_{max} = 5$, вектор весов $w^{(3)}$= (0.38; 0.08; 0.08; 0.38; 0.08)

•

Изношенность салона	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	1	7	5	7	7
B	1/7	1	1/3	1	1
C	1/5	3	1	3	3
D	1/7	1	1/3	1	1
E	1/7	1	1/3	1	1

- λ_{max} = 5.71, вектор весов $w^{(4)}$ =(0.59; 0.07; 0.20; 0.07; 0.07)
-

Общую оценку каждого автомобиля получим, используя формулу (3.5):

$$\begin{pmatrix} S_A \\ S_B \\ S_C \\ S_D \\ S_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}22 & 0{,}38 & 0{,}59 \\ 0{,}11 & 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}07 \\ 0{,}37 & 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}20 \\ 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}38 & 0{,}07 \\ 0{,}11 & 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}07 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}581 \\ 0{,}225 \\ 0{,}114 \\ 0{,}049 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}338 \\ 0{,}090 \\ \mathbf{0{,}370} \\ 0{,}084 \\ 0{,}090 \end{pmatrix}$$

Отсюда наиболее предпочтительным по этим характеристикам для покупки является автомобиль C, его общая оценка $S_C = 0{,}370$, автомобили B и E одинаковы по предпочтительности, их общая оценка $S_B = S_E = 0{,}090$, оценка автомобиля A $S_A = 0{,}338$.

Предположим для сокращения количества вычислений, что ранжирование критериев K_1, K_2, K_3, K_4 в виде вектора приоритетов

$$v = (0.581; 0.255; 0.114; 0.049)$$

отражает не только ваше мнение, но и совпадает с мнением экспертов-оценщиков, а приоритеты каждого автомобиля *A*, *B*, *C*, *D* и *E* определяются вектором (0.338; 0.090; 0.370; 0.084; 0.090). Салон успешно продал автомобиль *B* за 215 тыс. рублей, *C* за 405 тыс. рублей, *D* за 205 тыс. рублей и *E* за 250 тыс. рублей. Салону предложили для оценки автомобиль *A*. Какую адекватную рассмотренной структуре предпочтений стоимость надо назначить за этот автомобиль? Оценку стоимости можно рассчитать, например, по формуле

$$\frac{215000 \cdot 0.090 + 405000 \cdot 0.370 + 205000 \cdot 0.084 + 250000 \cdot 0.090}{1 - 0.338} = 316360$$

Следовательно, можно оценить автомобиль *A* в 316 тыс. рублей.