Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 6. Устойчивость по части переменных. Устойчивость на конечном интервале времени. Абсолютная устойчивость.

Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Устойчивость по части переменных. Устойчивость систем на конечном интервале времени. Постановка задачи абсолютной устойчивости нелинейных систем. Проблема Айзермана. Прямой метод Ляпунова исследования абсолютной устойчивости. Частотный критерий Попова. Круговой критерий абсолютной устойчивости. Квадратичный критерий Якубовича. Положительно вещественные передаточные функции. Линейные матричные неравенства. Многомерный критерий Попова.

Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Рассмотрим наряду с системой $\dot{x} = F(t,x)$ в области $D\times[t_0,\infty)\subseteq R^{n+1}$ возмущенную систему $\dot{x} = F(t,x)+R(t,x)$, где $R(t,x)$ неизвестная функция, характеризующая постоянно действующие возмущения. В общем случае, $R(t,0)\neq 0$ и невозмущенное движение $x(t,t_0,x_0), t\geq t_0$ системы $\dot{x} = F(t,x)$ не является решением уравнения $\dot{x} = F(t,x)+R(t,x)$.

***Определение** /Ким т2 с131/. Невозмущенное движение системы $\dot{x} = F(t,x)$ называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для любого малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные числа $\delta_0,\delta_1 > 0$, что при выполнении неравенства $|R(t,x)|<\delta_1$ при всех $\|x\|<\varepsilon$ и $t\geq t_0$ возмущенное движение $\bar{x}(t,t_0,x_0), t\geq t_0$ системы $\dot{x} = F(t,x)+R(t,x)$ подчиняется неравенству $\|\bar{x}(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ при любых $\|x_0\|<\delta_0$ и $t\geq t_0$.*

Другими словами, устойчивость при постоянно действующих возмущениях означает, что при малых возмущениях отклонения возмущенного движения от невозмущенного движения малы.

Теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях (Малкин).
Невозмущенное движение $x(t,t_0,x_0), t\geq t_0$ системы $\dot{x} = F(t,x)$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если существует такая положительно определенная функция $V(t,x)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, что ее производная по времени в силу уравнений этой системы является отрицательно определенной функцией, и ее градиент удовлетворяет неравенству: $|grad(V(t,x))| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial V}{\partial x_i})^2}\leq N$, где N - некоторая положительная константа.

Будем называть невозмущенное движение $x(t,t_0,x_0), t\geq t_0$ системы $\dot{x} = F(t,x)$ устойчивым при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, если для любой пары чисел $\varepsilon_T > 0$ и $T > 0$ можно указать два таких числа $\delta_0,\delta_1 > 0$, что при выполнении неравенства $\int_t^{t+T}\varphi(\tau)d\tau < \delta_1$, где $\varphi(t)$ непрерывная функция, удовлетворяющая условию $|R(t,x)|<\varphi(t)$ при $\|x\|<\varepsilon_T, t\geq t_0$, оценка возмущенного движения $\|\bar{x}(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ будет выполняться для всех движений возмущенной системы $\dot{x} = F(t,x)+R(t,x)$, начинающихся в области $\|x_0\|<\delta_0$.
Как было показано Н.Н. Красовским, асимптотическая устойчивость невозмущенной системы, равномерная по t_0 и x_0, будет, в этом случае, являться достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Устойчивость по части переменных.

Определение */Фурасов с40/. Невозмущенное движение $x(t,t_0,x_0), t \ge t_0$ системы $\dot{x} = F(t,x)$ в области $D \times [t_0,\infty) \subseteq R^{n+1}$ называется устойчивым по переменным $x_1, x_2,..., x_r, r \le n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что $| x_i(t,t_0,x_0) | < \varepsilon, i = 1,2,...r, t > t_0$, если $\| x_0 \| < \delta$.*

Определение *. Невозмущенное движение $x(t,t_0,x_0), t \ge t_0$ системы $\dot{x} = F(t,x)$ в области $D \times [t_0,\infty) \subseteq R^{n+1}$ называется асимптотически устойчивым по переменным $x_1, x_2,..., x_r, r \le n$, если оно устойчиво по названным переменным и может быть указано число $0 < \Delta \le \delta$, такое, что условие $x_i(t,t_0,x_0) \to 0, i = 1,2,...r, t > t_0$, выполняется при $t \to \infty$ на всех движениях системы, начинающихся в области $\| x_0 \| < \Delta$.*

Для решения вопроса, в соответствии с работами Румянцева, введем в рассмотрение понятие функции, знакопостоянной по части переменных, и понятие функции, допускающей по части переменных бесконечно малый высший предел.

Пусть $V(t,x)$ - знакопостоянная функция в области $S \times [t_0,\infty) \subseteq R^{n+1}$, где $S = \{x : | x_i | \le \rho_i < \rho, | x_j | < \infty, i = 1,2,..,r; j = r+1,...,n\}$ и $\overline{V}(x_1, x_2,..., x_r)$ функция, определенно положительная в области $\overline{S} = \{x : | x_i | \le \rho, i = 1,2,..,r\}$. То есть $\overline{V}(0,0,...,0) = 0$ и $\overline{V}(x_1, x_2,..., x_r) > 0$ при $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_r^2 \ne 0$.

Определение*. Знакопостоянная функция $V(t,x)$ называется функцией знакоопределенной по переменным $x_1, x_2,..., x_r, r \le n$ в области $S = \{x : | x_i | \le \rho_i < \rho, | x_j | < \infty, i = 1,2,..,r; j = r+1,...,n\}$, если выполняются условия: $\overline{V}(x_1, x_2,..., x_r) \le V(t,x), x \in S$ или $\overline{V}(x_1, x_2,..., x_r) \le -V(t,x), x \in S$.*

Пример. Пусть $t \ge 0$ и $a0 = const > 0$. Рассмотрим функцию $V(t,x) = a_1(t)x_1^2 + a_2(t)x_2^2 + a_3(t)x_3^2$. Функция $V(t,x)$ будет определенно положительной по координате x_1, если $a_1(t) \ge a0, a_2(t) \ge 0, a_3(t) \ge 0$; по переменным x_1, x_2, если $a_1(t) \ge a0, a_2(t) \ge a0, a_3(t) \ge 0$; по переменным x_1, x_2, x_3, если $a_1(t) \ge a0, a_2(t) \ge a0, a_3(t) \ge a0$.

Определение*. Функция $V(t,x)$ называется функцией, допускающей бесконечно малый высший предел по переменным $x_1, x_2,..., x_r, r \le n$ в области $S \times [t_0,\infty) \subseteq R^{n+1}$, $S = \{x : | x_i | \le \rho_i < \rho, | x_j | < \infty, i = 1,2,..,r; j = r+1,...,n\}$, если существует определенно положительная в области $\overline{S} = \{x : | x_i | \le \rho, i = 1,2,..,r\}$ функция $\hat{V}(x_1, x_2,..., x_r) > 0$ такая, что $| V(t,x) | \le \hat{V}(x_1, x_2,..., x_n)$.*

Теорема устойчивости по части переменных Румянцева*. Невозмущенное движение $x(t,t_0,x_0), t \ge t_0$ системы $\dot{x} = F(t,x)$ устойчиво по переменным $x_1, x_2,..., x_r, r \le n$, если существует определенно положительная по переменным $x_1, x_2,..., x_r$ в области $S \times [t_0,\infty) \subseteq R^{n+1}$ функция $V(t,x)$, производная которой, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, является функцией знакопостоянной отрицательной.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы выполняется неравенство: $V(t, x(t, t_0, x_0)) \le V(t_0, x_0), t \ge t_0$. Так как может быть указана функция $\bar{V}(x_1, x_2, ..., x_r) \le V(t, x), x \in S$, то при всех $t > t_0$ будет выполняться соотношение: $\hat{V}(x_1, x_2, ..., x_r) \le V(t_0, x_0)$. Следовательно, неравенства $| x_i(t, t_0, x_0) | < \varepsilon, i = 1,2,...r, t > t_0$ будут выполняться на всех движениях системы, начинающихся в области $\| x_0 \| < \delta$, если $\sup\{V(t_0, x) : \| x_0 \| < \delta\} < \min\{\bar{V}(x_1, x_2, ..., x_r) : | x_i | = \varepsilon, i = 1,2,...r\}$.

Теорема об асимптотической устойчивости по части переменных Румянцева.
Невозмущенное движение $x(t, t_0, x_0), t \ge t_0$ *системы* $\dot{x} = F(t, x)$ *асимптотически устойчиво по переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_r, r \le n$, *если существует определенно положительная по переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *в области* $S \times [t_0, \infty) \subseteq R^{n+1}$ *функция* $V(t, x)$, *производная которой, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, является функцией определенно отрицательной по переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *в этой области, а сама функция допускает по названным переменным бесконечно малый высший предел.*

Подчеркнем еще раз, что наличие у функции Ляпунова бесконечно малого высшего предела делает характер асимптотической устойчивости равномерным по времени t_0 и начальным возмущениям.

<u>**Устойчивость систем на конечном интервале времени.**</u>

При рассмотрении практически важных биотехнических объектов обычно представляет интерес их поведение в течении некоторого конечного промежутка времени. Поэтому естественно желать, чтобы понятие устойчивости процесса отражала динамические свойства системы на некотором конечном промежутке времени. В определении устойчивости по Ляпунову условие ограничения отклонений фазовых координат именно на бесконечном интервале времени является существенным моментом. Если перейти к ограничениям на конечном промежутке времени, даже сколь угодно большом, всякий смысл в определении устойчивости по Ляпунову теряется, так как при непрерывных правых частях уравнений возмущенного движения фазовые координаты всегда будут конечны. С другой стороны, если решения двух векторных уравнений $\dot{x} = F_1(t, x)$ и $\dot{x} = F_2(t, x)$ имеют одинаковые правые части $F_1(t, x) = F_2(t, x)$ в пределах конечного промежутка $t_0 \le t < T$, то их решения будут совпадать. Вместе с тем может случиться, что например, невозмущенное решение первого уравнения будет устойчиво по Ляпунову, а решение второго уравнения неустойчиво. Это обусловлено тем, что решение задачи устойчивости по Ляпунову определяется свойствами функций F_1, F_2 на промежутке $t_0 \le t < \infty$, и при $t > T$ эти функции могут отличаться друг от друга как угодно.

Определение устойчивости на конечном промежутке впервые было дано Н.Г. Четаевым. В настоящее время известно несколько отличающихся друг от друга постановок задачи устойчивости на конечном промежутке времени. Общим для всех постановок является введение функциональной связи между областями предельных отклонений в начальный момент времени t_0 и при $t_0 \le t < T$ в пределах наперед заданного промежутка времени. Различие же в формулировках связаны, как с характером ограничений, налагаемых на отклонение параметров процесса, так и с характером изменения во времени области предельных отклонений.

Определение технической устойчивости по Н.Д. Моисееву */Абгарян с360/. Невозмущенное движение системы* $\dot{x} = F(t, x)$, $F(t, 0) = 0$ *называется обладающим технической* *устойчивостью относительно заданных верхних пределов начальных отклонений* $\rho_{s0} > 0$ *и заданных верхних пределов последующих отклонений* $\rho_s > 0$ *на заданном промежутке* $0 \le t \le T$ *в том и только в том случае, если решение* $x = (x_1(t),\ldots,x_s(t),\ldots x_n(t))^T$ *системы* $\dot{x} = F(t,x)$*, при всяких начальных условиях* $x_s(0)$ *, удовлетворяющих условиям* $|x_s(0)| \le \rho_{s0}, s = 1,2,\ldots,n$ *будет удовлетворять условиям* $|x_s(t)| \le \rho_s, s = 1,2,\ldots,n$ *для всех моментов времени* t*, не превышающих* T*.*

В определении Н.Д. Моисеева область предельных отклонений задана в форме n-мерного параллелепипеда. В некоторых случаях область определения задают в форме n-мерного шара $\| x(t) \| \le \rho$.

Г.В. Каменков предложил другой подход к задаче устойчивости на конечном промежутке времени, сохраняя смысл понятия устойчивости , который вкладывал в него Ляпунов.

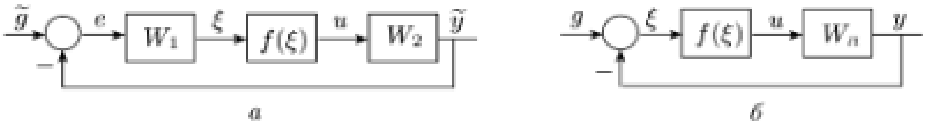
Устойчивость на конечном промежутке времени по Г.В. Каменкову. *Если уравнение возмущенного движения таково, что при достаточно малом положительном числе* C *фазовые координаты* $x_i(t)$ *удовлетворяют условию* $\sum_{s=1}^{n}(a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n)^2 \le C$ *на конечном промежутке* $t_0 \le t \le T$*, если только начальные значения этих функций* $x_{i0} = x_i(t_o)$ *удовлетворяют условию* $\sum_{s=1}^{n}(a_{s1}x_{10} + \ldots + a_{sn}x_{n0})^2 \le C$*,* $\det A \ne 0, A = (a_{ij})$*, то невозмущенное движение будет устойчиво на промежутке времени* $t_0 \le t \le T$*. В противном случае движение будет неустойчиво, то есть* $T = 0$*.*

Данное определение допускает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть в момент времени t_0 система получила некоторые малые отклонения $x_{i0} = x_i(t_o)$ и эти отклонения находятся внутри или на поверхности n-мерного эллипсоида $\sum_{s=1}^{n}(a_{s1}x_{10} + \ldots + a_{sn}x_{n0})^2 \le C$. Если затем отклонения $x_i(t)$ оставались внутри или на поверхности этого эллипсоида по крайней мере до момента времени $t_0 + T$, то движение устойчиво на промежутке $t_0 \le t \le T$. В противном случае – нет.

Для решения задачи устойчивости на конечном интервале нелинейных систем широко используется известное неравенство Важеского, которое позволяет получить верхнюю и нижнюю оценки нормы вектора решения линеаризованной системы первого приближения, и оценить область предельных отклонений исходной нелинейной системы.

<u>Постановка задачи абсолютной устойчивости нелинейных систем.</u>

Впервые задача об абсолютной устойчивости была рассмотрена А.И. Лурье. Рассмотрим систему типа Винера-Гаммерштейна с одной нелинейностью, которую всегда можно преобразовать к «расчетному» виду входном воздействии равном нулю.



Структурная схема нелинейной системы (к исследованию абсолютной устойчивости: a — исходная структурная схема; $б$ — преобразованная структурная схема

Такие системы можно описать, при $g = 0$, с помощью уравнений следующего вида: $\dot{x} = Ax + bu$, $u = f(\xi)$, $u = f(\xi)$, где $x \in R^n$, $u, \xi \in R$, нелинейная функция $f(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям: $f(0) = 0, k_m \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} \le k_M$ при $\xi \ne 0$.

Определение */Ким с148/. Система или положение равновесия системы $\dot{x} = Ax + bu$, $u = f(\xi)$, $u = f(\xi)$ называется абсолютно устойчивым в угле (секторе) $[k_m, k_M]$, если нулевое решение $x = 0$ системы устойчиво в целом при любой нелинейной функции $f(\xi)$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0, k_m \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} \le k_M$.*

<u>Проблема Айзермана.</u>

Абсолютная устойчивость характеризует устойчивость некоторого множества систем, определенных множеством нелинейных звеньев, заданного соответствующими ограничениями, которые, в общем случае, могут быть отличны от приведенных выше условий.

Передаточная функция линейной части системы находится с помощью следующего соотношения: $W(s) = c^T (Es - A)^{-1} b$. Тогда нелинейную систему можно описать с помощью следующей системы уравнений: $y = W(s)u$, $u = f(\xi)$, $\xi = -y$. Наряду с исходной нелинейной системой рассмотрим линейную систему следующего вида: $y = W(s)u$, $u = k\xi$, $\xi = -y$, где $k \in [k_m, k_M]$. Такую линейную систему назовем системой сравнения.

Если исходная нелинейная система устойчива (или асимптотически устойчива) в угле, задаваемым коэффициентами $[k_m, k_M]$, то ее система сравнения будет устойчива (асимптотически устойчива) при любом $k \in [k_m, k_M]$. Если система сравнения, при каком-либо $k \in [k_m, k_M]$, будет неустойчива, то исходная нелинейная система не может быть абсолютно устойчивой в угле, задаваемым коэффициентами $[k_m, k_M]$.

Возникает вопрос, является ли приведенное необходимое условие абсолютной устойчивости достаточным. Эту проблему впервые рассмотрел М.А. Айзерман, поэтому ее часто называют проблемой Айзермана.

Пример. Пусть линейная часть системы описывается передаточной функцией $W(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$. Исследовать, является ли система абсолютно устойчивой при $k \in [0,10]$. Проверим необходимое условие при $k = 10$. Характеристический уравнение замкнутой системы сравнения имеет вид : $s^3 + 3s^2 + 3s + 11 = 0$. Минор второго порядка определителя Гурвица $\begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ для приведенного характеристического многочлена будет отрицательным. То есть необходимое условие абсолютной устойчивости не выполняется.

<u>Прямой метод Ляпунова исследования абсолютной устойчивости.</u>

Способ Лурье.

Идея метода Лурье заключается в том, что для нелинейной системы стоится следующая функция Ляпунова: $V(x) = x^T Bx + q\int\limits_0^{x=\xi} f(\xi)d\xi$, где B - положительно определенная матрица, q - произвольное положительное число. Очевидно, что нелинейный элемент относится к классу положительных блоков (см. лекция 1 часть II данного курса), так как удовлетворяет условию $f(\xi)\xi \geq 0$. Поэтому функция $V(x)$ является положительно определенной. Поэтому задача поиска условий абсолютной устойчивости сводится к нахождению такой матрицы B и положительной константы q, при которых производная $\dot{V}(x)$ была бы отрицательно определенной, а функция $V(x)$ допускала бесконечно большой низший предел при увеличении $\| x \|$, то есть $V(x) \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ (см. теорему Барбашина-Красовского).

Пример. Пусть система описывается уравнениями: $W(s) = \dfrac{d}{s^2 + a_1 s + a_2}$, $u = f(\xi)$, $\xi = -y$, где $d > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$, $f(0) = 0, \alpha \leq \dfrac{f(\xi)}{\xi} \leq \beta$, $0 < \alpha < \beta < \infty$. Уравнения системы в нормальной форме имеют вид: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 - df(x_1)$. Функция Ляпунова будет определяться следующим соотношением: $V(x) = x_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + q\int\limits_0^{x1} f(x_1)dx_1$. Постоянные b, c по критерию Сильвестра должны удовлетворять условию $c - b^2 > 0$. Производная $\dot{V}(x)$ в силу уравнений системы будет определяться формулой: $\dot{V}(x) = 2(1 - ba_1 - ca_2)x_1x_2 - 2(ca_1 - b)x_2^2 - 2ba_2x_1^2 - 2bx_1 df(x_1) - 2cdx_2 f(x_1) + qf(x_1)x_2$. Положим, что $c = (1 - ba_1)/a_2$ и $q = 2cd$. Тогда выражение для $\dot{V}(x)$ примет вид $\dot{V}(x) = -2(ca_1 - b)x_2^2 - 2ba_2x_1^2 - 2bx_1 f(x_1)$. Производная функции Ляпунова будет отрицательно определенной, если $b > 0, ca_1 - b > 0$ или $0 < b < ca_1$. Подставив в полученное неравенство выражение для параметра c, получим следующее неравенство $0 < b < a_1/(a_1^2 + a_2)$. Тогда условие положительности $V(x)$ и отрицательности $\dot{V}(x)$ всегда можно выполнить, выбрав параметр b достаточно малым. При этом функция $V(x)$ будет неограниченно возрастать при $\| x \| \to \infty$. То есть система будет абсолютно устойчивой.

<u>Частотный критерий Попова.</u>

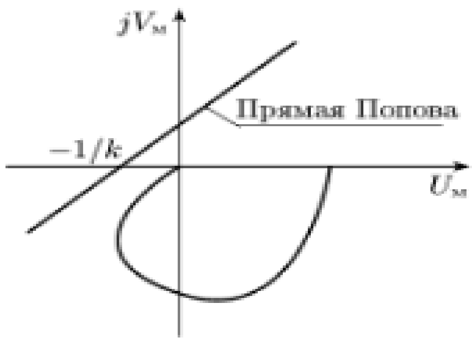
Представим частотную передаточную функцию линейной части системы в следующем виде: $W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$.

Критерий В.М. Попова (для устойчивой линейной части). *Для того, чтобы положение равновесия системы* $\dot{x} = Ax + bu$, $u = f(\xi)$, $u = f(\xi)$, *с устойчивой линейной частью было абсолютно устойчиво в угле* $[0, k]$ *достаточно, чтобы существовало такое вещественное число* q, *что при всех* $\omega \geq 0$ *выполнялось неравенство* $\mathrm{Re}(1 + iq\omega)W(i\omega) + \dfrac{1}{k} > 0$ *или*

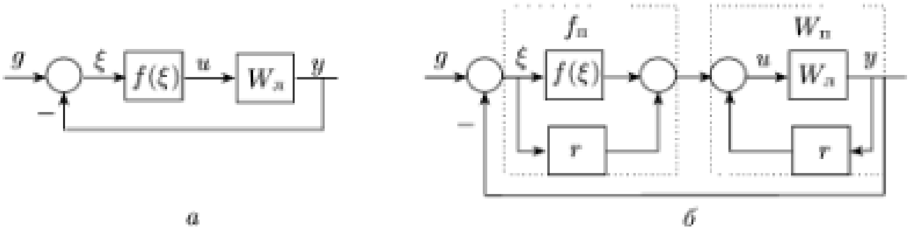
$$U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\frac{1}{k}.$$

Пример. Пусть передаточная функция линейной части имеет вид $W(s)=\dfrac{b_0}{a_0s^2+a_1s+a_2}, a_i>0, b_0>0, i=0,1,2$. Определить, при каких значениях k система будет устойчива в угле $[0,k]$. Вещественная и мнимая части частотной передаточной функции имеют вид: $U(\omega)=\dfrac{b_0(a_2-a_0\omega^2)}{(a_2-a_0\omega^2)^2+(a_1\omega)^2}$, $V(\omega)=\dfrac{-b_0a_1\omega}{(a_2-a_0\omega^2)^2+(a_1\omega)^2}$. Тогда условие Попова принимает вид: $\dfrac{b_0(a_2-a_0\omega^2)+qb_0a_1\omega^2}{(a_2-a_0\omega^2)^2+(a_1\omega)^2}+\dfrac{1}{k}>0$. Если положить $q=a_0/a_1$, то получим неравенство: $\dfrac{b_0a_2}{(a_2-a_0\omega^2)^2+(a_1\omega)^2}+\dfrac{1}{k}>0$, которое будет выполняться при любом $\omega\geq 0$ и любом значении $k>0$.

Введем в рассмотрение модифицированную частотную передаточной функции линейной части: $W_M(i\omega)=U_M(\omega)+iV_M(\omega)$, где $U_M(\omega)=U(\omega)$, $V_M(\omega)=\omega V(\omega)$. Тогда неравенство Попова можно представить в виде: $U_M(\omega)-qV_M(\omega)>-\dfrac{1}{k}$. Если построить на плоскости (U_M, V_M), так называемую прямую Попова $U_M(\omega)-qV_M(\omega)=-\dfrac{1}{k}$, то правее ее будет выполняться неравенство $U_M(\omega)-qV_M(\omega)>-\dfrac{1}{k}$. Поэтому, если построить частотную характеристику $U_M(\omega), V_M(\omega)$, то она, в случае абсолютной устойчивости системы, будет располагаться правее прямой Попова. Прямая Попова пересекает вещественную ось в точке $-\dfrac{1}{k}$ под наклоном $\dfrac{1}{q}$.



Рассмотрим теперь случай, когда линейная часть системы неустойчива. Преобразуем систему следующим образом. Охватим линейную часть отрицательной обратной связью пропорциональным звеном с коэффициентом усиления $r>0$, а к нелинейному звену подключим параллельно звено также с передаточной функцией $r>0$ (см. рисунок).



Преобразование структурной схемы с неустойчивой линейной частью: а — исходная схема; б — преобразованная схема

Преобразованная схема будет эквивалентна исходной схеме при входе $g=0$, так как на входе линейного звена будем иметь тот же сигнал $u=f(\xi)+ry-ry=f(\xi)$. В преобразованной схеме передаточная функция линейной части имеет вид $W_p(s)=\dfrac{W(s)}{1+rW(s)}$, а нелинейность описывается формулой $f_p(\xi)=f(\xi)-r\xi$. При этом получим, что при $\xi\neq 0$ будут справедливы соотношения: $\dfrac{f_p(\xi)}{\xi}=\dfrac{f(\xi)}{\xi}-r$, $0\le\dfrac{f_p(\xi)}{\xi}\le k-r$. Поэтому положение равновесия исходной нелинейной системы будет абсолютно устойчиво в угле $[r,k]$, если положение равновесия преобразованной системы будет абсолютно устойчиво в угле $[0,k-r]$.

Пусть преобразованная линейная часть устойчива. Тогда по приведенному критерию Попова будет абсолютно устойчиво в угле $[0,k-r]$, если выполняются неравенства

$\mathrm{Re}(1+iq\omega)W_p(i\omega)+\dfrac{1}{k-r}>0$ или $U_p(\omega)-q\omega V_p(\omega)>-\dfrac{1}{k-r}$, где $U_p(\omega)=\mathrm{Re}\{W_p(i\omega)\}$ и $V_p(\omega)=\mathrm{Im}\{W_p(i\omega)\}$.

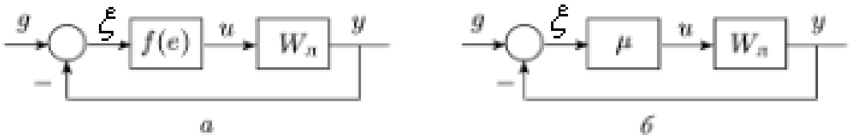
Критерий Попова (для неустойчивой линейной части). *Положение равновесия нелинейной системы $\dot{x}=Ax+bu$, $u=f(\xi)$, $u=f(\xi)$ с неустойчивой линейной частью абсолютно устойчиво в угле $[r,k]$, если все полюса преобразованной передаточной функции*

$W_p(s)=\dfrac{W(s)}{1+rW(s)}$ *имеют отрицательные вещественные части и существует такое вещественное число q, что при всех $\omega\ge 0$ выполняется неравенство*

$$U_p(\omega)-q\omega V_p(\omega)>-\frac{1}{k-r}.$$

Круговой критерий абсолютной устойчивости.

Рассмотрим задачу об абсолютной устойчивости в угле $[\alpha,\beta]$ нелинейной системы с одной нелинейностью. В этом случае класс нелинейностей может быть определен локальной связью $F(\xi,u)=(\beta\xi-u)(u-\alpha\xi)>0$ для $\forall t>0$. Наряду с данной системой рассмотрим систему сравнения, в которой нелинейное звено заменено линейным звеном с передаточной функцией $W_c(s)=\mu,\mu\in[\alpha,\beta]$.



Нелинейная система (а) и система сравнения б

Рассмотрим, как и ранее, систему $\dot{x} = Ax + b \cdot f(\xi), \ \xi = c^T \cdot x$ с непрерывной функцией $f(\xi)$, $f(0) = 0{,}0 \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} \le k$. Тогда имеет место следующий частотный критерий.

***Теорема** (частный круговой критерий). Если матрица A гурвицева, нелинейная функция $f(\xi)$ обладает свойством $f(0) = 0{,}0 \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} \le k$ и при всех $\omega \ge 0$ выполнено частотное условие $\dfrac{1}{k} + \mathrm{Re}\{W(i\omega)\} > 0$, где $W(s) = c^T (Es - A)^{-1} b$, то исходная нелинейная система будет экспоненциально устойчива в целом.*

Если секторное условие имеет вид $k_1 \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} \le k_2$, то имеет месть следующая теорема.

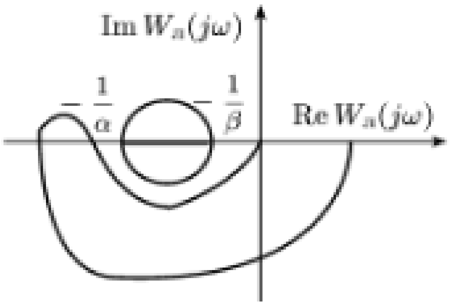
***Теорема** (круговой критерий для устойчивой линейной части). Пусть существует такое число $k_0, k_1 \le k_0 \le k_2$, что матрица $A + k_0 bc^T$ гурвицева. Пусть нелинейная функция $f(\xi)$ обладает свойством $k_1 \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} \le k_2$, и при всех $\omega \ge 0$ выполнено частотное условие $1 + (k_1 + k_2) \cdot \mathrm{Re}\{W(i\omega)\} + k_1 k_2 \cdot |W(i\omega)|^2 > 0$, где $W(s) = c^T (Es - A)^{-1} b$, то исходная нелинейная система будет экспоненциально устойчива в целом.*

Пусть передаточная функция линейной части имеет L полюсов в правой полуплоскости и не имеет полюсов на мнимой оси. Тогда по критерию Найквиста, для того, чтобы системы сравнения была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы (то есть годограф частотной передаточной функции $W(i\omega) = \mu W_л(i\omega)$ при $0 \le \omega \le \infty$) охватывала $L/2$ раз точку $(-1, i0)$ против часовой стрелки. Или, что то же самое, чтобы годограф частотной передаточной функции линейной части $W_л(i\omega)$ при $0 \le \omega \le \infty$ охватывал $L/2$ раз точку $(\dfrac{-1}{\mu}, i0)$ против часовой стрелки.

Для того, чтобы все семейство систем сравнения было устойчиво для любого $\mu \in [\alpha, \beta]$, необходимо и достаточно, чтобы годограф передаточной функции линейной части $W_л(i\omega)$ охватывал отрезок $[\dfrac{-1}{\beta}, \dfrac{-1}{\alpha}]$ на действительной оси $L/2$ раз против часовой стрелки. Если линейная часть устойчива для всех $\mu \in [\alpha, \beta]$, то тогда, очевидно, годограф линейной части $W_л(i\omega)$ должен не охватывать указанный выше отрезок.

Приведенные выше условия являются необходимыми условиями исходной нелинейной системы.

Введем понятие $[\alpha,\beta]$- окружности, которая определяется как окружность с центром на вещественной оси и пересекающая вещественную ось в точках $\frac{-1}{\beta}$ и $\frac{-1}{\alpha}$.



***Круговой критерий абсолютной устойчивости**. Пусть система сравнения устойчива при каком-либо значении $\mu \in [\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta<\infty$, а передаточная функция линейной части имеет L полюсов в правой полуплоскости и не имеет полюсов на мнимой оси.*

Тогда, для того, чтобы нелинейная система была абсолютно устойчива в угле $[\alpha,\beta]$, достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика линейной части охватывала $[\alpha,\beta]$-окружность $L/2$ раз против часовой стрелки.

Квадратичный критерий Якубовича.

Класс нелинейных звеньев можно задавать с помощью квадратичной формы. Например, класс нелинейных звеньев, определяемых соотношением $f(0)=0, \alpha \le \frac{f(\xi)}{\xi} \le \beta$, $0<\alpha<\beta<\infty$, можно задать с помощью квадратичной формы следующим образом: $F(u,\xi)=(\beta\xi-u)(u-\alpha\xi)\ge 0, u=f(\xi)$. Действительно, разделив обе части последнего неравенства на ξ^2, получим $(\beta-\frac{u}{\xi})(\frac{u}{\xi}-\alpha)\ge 0$. Вещественная квадратичная форма, вида $G(x)=\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}x_i x_k$, может быть, естественным образом, расширена до эрмитовой формы следующим образом $G(z)=\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\bar{z}_i z_k$. Очевидно, что если $z_i=x_i$, то значения формы $G(z)$ будут принимать вещественные значения.

Рассмотрим нелинейную многомерную систему следующего вида: $\dot{x}=Ax+Bu$, $u=f(\xi)$, $\xi=-y$, $y=C^T x$, где $x\in R^n, y\in R^m, u\in R^r$ или $y=W(s)u, u=f(\xi), \xi=-y$, где $W(s)=C^T(Es-A)^{-1}B$. Система содержит r-мерный нелинейный блок $f(\xi)$.

Пусть задана вещественная квадратичная форма $F(\xi,\dot{\xi},u)\ge 0, \forall t\ge 0$.

***Определение** /Ким с160/. Если выполняется условие* $F(\xi,\dot{\xi},u)\geq 0, \forall t\geq 0$*, то говорят, что функции* $\xi(t), u(t)$ *удовлетворяют локальной связи с формой* $F(\xi,\dot{\xi},u)$*.*

***Определение**. Система* $\dot{x}=Ax+Bu$*,* $u=f(\xi)$*,* $\xi=-y$*,* $y=C^T x$ *называется минимально устойчивой в заданном классе нелинейных элементов, если она асимптотически устойчива в целом при каком-либо блоке нелинейностей* $f(\xi)$ *из заданного класса.*

Пример. Рассмотрим локальную связь $F(\xi,u)=(\beta\xi-u)(u-\alpha\xi)\geq 0$ при $r=m=1$. Этому классу нелинейных звеньев принадлежат линейные звенья вида: $u=\gamma\xi, \alpha\leq\gamma\leq\beta$. Поэтому, если система $y=W(s)u, u=\gamma\xi, \xi=-y$ устойчива при любом значении $\gamma\in[\alpha,\beta]$, то нелинейная система $y=W(s)u, u=f(\xi), \xi=-y$ минимально устойчива в классе нелинейных звеньев, определяемых локальной связью $F(\xi,u)=(\beta\xi-u)(u-\alpha\xi)\geq 0$.

Нелинейность, при которой будет устанавливаться минимальная устойчивость, будем называть нелинейностью сравнения, а саму систему при этой нелинейности – системой сравнения.

Подставим в форму $F(\xi,\dot{\xi},u)$ следующие соотношения $\xi=-W(s)u$ и $\dot{\xi}=-sW(s)u$, то есть расширив ее до соответствующей эрмитовой формы: $\hat{F}(s,u)=F(-W(s)u,-sW(s)u,u)$, то есть заменим переменные их изображениями по Лапласу, найденными при нулевых начальных условиях.

***Квадратичный критерий (В.А. Якубович)**. Пусть нелинейная система* $\dot{x}=Ax+Bu$*,* $u=f(\xi)$*,* $\xi=-y$*,* $y=C^T x$ *минимально устойчива в классе нелинейных звеньев, заданных локальной связью с формой* $F(\xi,\dot{\xi},u)$*, и матрица* A *не имеет собственных значений на мнимой оси. Тогда, положение равновесия системы абсолютно устойчиво в указанном классе нелинейных звеньев , если эрмитова форма* $\hat{F}(s,u)=F(-W(s)u,-sW(s)u,u)$ *отрицательно определена при* $-\infty\leq\omega\geq\infty$*, то есть выполнено условие* $\hat{F}(i\omega,u)<0$ *при* $-\infty\leq\omega\geq\infty$ *и любом* $u\neq 0$*. При этом имеет место экспоненциальная устойчивость, то есть существуют постоянный* $C>0, \varepsilon>0$ *такие, что при любом* $t\geq t_0$ *выполняется неравенство* $\|x(t)\|\leq C\|x(t_0)\|e^{-\varepsilon(t-t0)}$*.*

Пример. Пусть система задана уравнением $\ddot{y}+4\dot{y}+(2+\cos t)y=0$. Представим данное уравнение в следующем виде $\ddot{y}+4\dot{y}+2y+u=0, u=y\cos t$. Переходя к изображениям по Лапласу, можем записать $y=-W(s)u$, где $W(s)=\dfrac{1}{s^2+4s+2}$. В качестве локальной связи примем соотношение $F(y,u)=y^2-u^2=y^2\sin^2 t\geq 0$. Система будет минимально устойчива в рассматриваемом классе, так как линейная часть устойчива и $F(y,0)\geq 0$ при любом y. Эрмитово расширение квадратичной формы локальной связи имеет вид $\hat{F}(s,u)=F(y(s),u(s))=\bar{y}(s)y(s)-\bar{u}(s)u(s)=|y(s)|^2-|u(s)|^2$. Положим $s=i\omega$. Тогда для частотного условия теоремы получим следующее соотношение $\hat{F}(s,u)=(|W(i\omega)|^2-1)|u|^2<0$. Так как предполагается, что $|u|\neq 0$, то предыдущее неравенство можно записать в виде $(|W(i\omega)|^2-1)<0$. После преобразований получим частотное условие в следующем виде: $1-(2-\omega^2)^2-16\omega^2<0$, которое выполняется для любого ω из промежутка $-\infty\leq\omega\geq\infty$. То есть положение равновесия рассматриваемой системы устойчиво в целом.

Методы построения квадратичной формы локальной связи.

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$ и $0 < \beta < \infty$. Тогда локальная связь $F(\xi,u) = (\beta\xi - u)(u - \alpha\xi) \ge 0$ принимает следующий вид $F(\xi,u) = u(\beta\xi - u) \ge 0$ или $F(\xi,u) = u(\xi - \beta^{-1}u) \ge 0$

2. Если система содержит две нелинейности вида $u_1 = \xi^2$ и $u_2 = \xi^3$ или, например $u_1 = \xi^3$, $u_2 = \xi^5$, то локальная связь задается в виде соотношения $F(\xi,u) = \xi u_2 - u_1^2 = 0$.

3. Система содержит две одинаковые нелинейности $u_i = f(\xi_i,t), i = 1,2$ и $f(\xi_i,t)$ является неубывающей функцией переменной ξ_i при всех $t \ge 0$, то есть $f(\xi_{i1},t) \le f(\xi_{i2},t)$ при $\xi_{i1} < \xi_{i2}$. В этом случае локальная связь задается в виде $F(\xi,u) = (\xi_1 - \xi_2)(u_1 - u_2) \ge 0$.

4. Система содержит две одинаковые нелинейности $u_i = f(\xi_i,t), i = 1,2$, и функция $f(\xi_i,t)$ удовлетворяет следующему условию $\alpha \le \dfrac{\partial f(\xi_i,t)}{\partial \xi_i} \le \beta$ при всех $t \ge 0$. В этом случае локальная связь задается в виде: $F(\xi,u) = [\beta(\xi_1 - \xi_2) - (u_1 - u_2)][(u_1 - u_2) - \alpha(\xi_1 - \xi_2)] \ge 0$. Можно показать, что эта локальная связь имеет место, если выполняются следующие условия: $\beta - \dfrac{\partial f}{\partial \xi_i} \ge 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_i} - \alpha \ge 0$.

5. Иногда локальная связь может быть задана несколькими соотношениями в виде равенств и неравенств: $F_i(\xi,\dot{\xi},u) = 0, i = 1,2,\ldots,r$ и $F_i(\xi,\dot{\xi},u) \ge 0, i = r+1, r+2,\ldots,p$. Такую локальную связь можно преобразовать в к виду связи, связанную с одной формой следующего вида: $F_i(\xi,\dot{\xi},u) = \sum_{s=1}^{p} \tau_s F_s(\xi,\dot{\xi},u) \ge 0$, где $\tau_s, s = 1,2,\ldots,r$ произвольные постоянные, $\tau_s, s = r+1, r+2,\ldots,p$ произвольные положительные постоянные .

Положительно вещественные передаточные функции.

Определение. *Рациональная матричная передаточная функция $W(s)$ размерности $(p \times p)$ называется положительно вещественной, если выполняются условия:*

- *Полюса всех элементов матрицы $W(s)$ расположены в области $\mathrm{Re}[s] \le 0$,*
- *Для любого вещественного значения ω, для которого $i\omega$ не является полюсом какого-либо из элементов матрицы $W(s)$, матрица $W(i\omega) + W^T(-i\omega)$ является положительно полуопределенной и*
- *Любой чисто мнимый полюс $i\omega$ любого из элементов матрицы $W(s)$ является простым полюсом и матрица вычетов $\lim_{s \to i\omega}(s - i\omega)W(s)$ является положительно полуопределенной и эрмитовой.*

Передаточная функция $W(s)$ называется строго положительно вещественной, если $W(s-\varepsilon)$ является положительно вещественной для некоторого значения $\varepsilon > 0$.

При $p=1$, второе условие определения сводится к неравенству $\operatorname{Re}[W(i\omega)]\geq 0, \forall\omega\in R$, которое выполнено, если диаграмма Найквиста для $W(i\omega)$ лежит внутри замкнутой правой полуплоскости комплексной плоскости. Очевидно, это условие будет справедливым, только если относительная степень передаточной функции равна нулю или единице (*матрицу часто называют собственной, если степени числителей ее элементов не превосходят степеней соответствующих знаменателей; при относительной степени всех ее элементов больше или равной единице такую матрицу называют строго собственной*).

Лемма */Халил с252/. Пусть $W(s)$ - рациональная собственная передаточная $(p\times p)$ матрица. Предположим, что определитель $\det[W(i\omega)+W^T(-i\omega)]$ не равен тождественно нулю (или $rank[W(i\omega)+W^T(-i\omega)]=p$ над полем рациональных функций от переменной s). Тогда $W(s)$ является строго положительно вещественной, если и только если:*

- *$W(s)$ - гурвицева матрица, то есть полюсы всех ее элементов имеют отрицательные вещественные части;*
- *$W(i\omega)+W^T(-i\omega)$ - положительно определенная матрица для всех $\forall\omega\in R$ и,*
- *$W(\infty)+W^T(\infty)$ (здесь $W(\infty)=\lim\limits_{|s|\to\infty}W(s)$) – либо положительно определена, либо положительно полуопределена и, матрица $\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega^2M^T[W(i\omega)+W^T(-i\omega)]M$ положительно определена для всех $[p\times(p-q)]$ матриц M полного ранга, таких что $M^T[W(\infty)+W^T(\infty)]M=0$, где $q=rank[W(\infty)+W^T(\infty)]$.*

Пример. Передаточная функция $W(s)=\dfrac{1}{s}$ является положительно определенной, так как не имеет полюсов в $\operatorname{Re}[s]>0$, имеет простой полюс в $s=0$, вычет которого равен 1, и $\operatorname{Re}\{W(i\omega)]=\operatorname{Re}[\dfrac{1}{i\omega}]=0,\forall\omega\neq 0$.

Однако, эта функция не является строго положительно вещественной. Функция $W(s)=\dfrac{1}{s+\alpha},\alpha>0$ является строго положительно вещественной ($\operatorname{Re}[W(i\omega)]=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}>0,\forall\omega\in R$). Передаточная функция $W(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$ не является положительно вещественной, так как ее относительная степень равна 2. Кроме того $\operatorname{Re}[W(i\omega)]=\dfrac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}<0,\forall|\omega|>1$.

Линейные матричные неравенства в абсолютной устойчивости.

В 80-х годах был также предложен иной подход к исследованию задач абсолютной устойчивости, связанный с анализом линейных матричных неравенств непосредственно в пространстве состояний.

Лемма о положительной вещественности (Калмана-Якубовича-Попова). *Пусть $W(s)=C(sE-A)^{-1}B+D$ передаточная $(p\times p)$ матрица, где пары (A,B) и (A,C) являются соответственно управляемой и наблюдаемой. Тогда $W(s)$ является строго положительной вещественной матрицей, если и только если существуют матрицы $Q=Q^T>0,L,W$, а также положительная константа ε, такие, что: $QA+A^TQ=-L^TL-\varepsilon P$, $QB=C^T-L^TW$, $W^TW=D+D^T$.*

Если положить $\varepsilon = 0$, то матричные неравенства примут вид $QA + A^T Q = -L^T L$; $QB = C^T - L^T W$; $W^T W = D + D^T$. В этом случае можно говорит только о том, что матрица $G(s)$ является положительно вещественной. Лемма Калмана-Якубовича-Попова позволяет получить для передаточных функций алгебраическое описание свойств положительной вещественности и строгой вещественности.

Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = Ax + bu; y = Cx; x \in R^n; u, y \in R$; где пара (A,b) - является управляемой, а пара (A,C) - наблюдаемой. Тогда такая система будет асимптотически устойчивой при выборе управления $u = f(y); \alpha \le \dfrac{f(y)}{y} \le \beta$, если существует такая матрица $Q = Q^T > 0$, что будут выполняться неравенства $QA + A^T Q < 0; \;\; Qb = C^T$. В этом случае передаточная функция $W(s) = C(sE - A)^{-1} b$ будет строго положительной вещественной матрицей. Или другими словами, для того, чтобы существовала такая положительно определенная симметричная матрица Q, для которой справедливы соотношения $QA + A^T Q < 0; \;\; Qb = C^T$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Re}\{W(i\omega)\} = \mathrm{Re}\{C(i\omega E - A)^{-1} b\} > 0; \;\; \forall \omega \ge 0$.

Если управление ищется в классе $u = Kx$, то для асимптотической устойчивости системы достаточно выполнения матричного неравенства Ляпунова $QA + A^T Q < 0$.

Многомерный критерий Попова.

Рассмотрим обобщение критерия Попова для следующей системы: $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, $u_i = -\psi_i(y_i), i = 1,2,\ldots p$, где $x \in R^n, u, y \in R^p$, (A,B) - управляемая пара, (A,C) - наблюдаемая пара, $\psi_i : R \to R$ - локальная липшицевая статическая нелинейность, принадлежащая сектору $[0, k_i], i = 1,2,\ldots p$. В этом случае, передаточная функция $W(s) = C(sE - A)^{-1} B$ является строго собственной и функция ψ разделена относительно выходов, то есть $\psi_i(y) = \psi_i(y_i)$. Поскольку $D = 0$, система с обратной связью имеет корректно определенную модель состояния.

Теорема (многомерный критерий Попова) */Халил с293/. Система $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, $u_i = -\psi_i(y_i), i = 1,2,\ldots p$ абсолютно устойчива, если для всех $i = 1,2,\ldots p$ выполнены условия $\psi_i \in [0, k_i], 0 < k_i \le \infty$ и существуют константы $\gamma_i \ge 0$, такие, что $(1 + \lambda_j \gamma_i) \ne 0$ для каждого собственного значения λ_j матрицы A, матрица $M + (E + s\Gamma)W(s)$ является строго положительно вещественная (где $\Gamma = diag(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ и $M = diag(\dfrac{1}{k_1}, \ldots, \dfrac{1}{k_p})$). Если секторное условие $\psi_i \in [0, k_i]$ выполнено лишь на множестве $Y \subset R^p$, вышеприведенные условия обеспечивают абсолютную устойчивость в конечной области.*

Контрольные вопросы к лекции 6.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Задана нелинейная система $\dot{x} = F(t,x); x \in R^2$; $F(0,t) = 0; F = \{f_1(x_1,x_2,t), f_2(x_1,x_2,t)\}^T$ в области $D = \|x\| \le \rho$. Для системы задана функция Ляпунова вида $V(x,t) = a_1^2(t)x_1^2 + a_2(t)x_2^2$. Тогда условия асимптотической устойчивости системы по координате x_1 имеют вид …	1. .. $a_1(t) \ne 0;\ \ x_1 f_1(x_1,x_2,t) < 0$ для $\forall t > t_0$ и $x \ne 0 \in D$. 2. … $a_1(t) \ne 0; a_2(t) > 0$, $\dfrac{a_1^2(t)}{a_2(t)} x_1 f_1(x_1,x_2,t) < -x_2 f_2(x_1,x_2,t)$ для $\forall t > t_0$ и $x \ne 0 \in D$. 3. … . $a_1(t) \ne 0; a_2(t) > 0\ \ x_1 f_1(x_1,x_2,t) < 0$; $x_2 f_2(x_1,x_2,t) < 0$ для $\forall t > t_0$ и $x \ne 0 \in D$
2	Задана нелинейная система $\dot{x} = F(x); F(0) = 0; x(t_0) = x_0$ и квадратичная форма $x_0^T B x_0 < C$, определяющая траекторный эллипсоид отклонений от точки равновесия. Условия устойчивости на конечном интервале времени $[t_0, T]$ по Каменкову имеют вид ..	1. … $V(x) = x^T(t)Bx(t) \ge 0$ и $\dot{V}(x) \le 0$ для $\forall t \in [t_0, T]$. 2. … $x^T(t)Bx(t) \le C$ для $\forall t \in [t_0, T]$ 3. … собственные значения матрицы $(\dfrac{\partial F}{\partial x})\|_{x_0}$ имеют отрицательные вещественные части.
3.	Задана система со статическим нелинейным элементом вида $\dot{x} = Ax + bu;\ \ u = f(\xi); f(0) = 0; \xi = -C^T x; 0 \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} < \infty$. Необходимые условия абсолютной устойчивости для данной системы имеют вид …	1. … корни характеристического уравнения $\det(A - kbC^T) = 0$ имеют строго отрицательные вещественные части для любого значения $k \in [0, \infty)$. 2. … $rank\{b, Ab, ..., A^{n-1}b\} = n$ и $rank\{C, A^T C, ..., (A^T)^{n-1} C\} = n$ 3. … $W(s) = C^T(sE - A)^{-1}b$ является устойчивой минимально-фазовой передаточной функцией.
4	Задана система со статическим нелинейным элементом вида $\dot{x} = Ax + bu;\ \ u = f(\xi); f(0) = 0; \xi = -C^T x; r \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} \le k$. Линейная часть системы имеет устойчивую передаточную функцию $W(s) = C^T(sE - A)^1 b$. Частотное неравенство Попова для данной системы имеет вид …	1. … $W_p(s) = \dfrac{W(s)}{1 + rW(s)};\ \ W_p(i\omega) = U_p(\omega) + iV_p(\omega)$. $\exists q > 0$, что $U_P(\omega) - q\omega V_p(\omega) > -\dfrac{1}{k - r}$. 2. … $W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$; $\exists q > 0$, что $U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\dfrac{1}{k}$. 3. … $W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$; $\exists q > 0$, что $U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\dfrac{1}{k - r}$.
5	Характеристика статического нелинейного элемента в системе Гаммерштейна-Винера удовлетворяет соотношению $0 \le \dfrac{f(\xi)}{\xi} \le \beta < \infty$, где ξ - входной сигнал, а $f(\xi)$ - выходной сигнал нелинейного элемента. Эквивалентная этому соотношению квадратичная форма имеет вид …	1. … $(\beta\xi - u)u \ge 0;\ \ u = f(\xi)$. 2. … $u^2 - \beta\xi u + \xi^2 \ge 0;\ \ u = f(\xi)$. 3. … $(\beta\xi - u)(u - \beta\xi) \ge 0$

6	Система вида $\dot{x} = Ax + bu;\ \ \xi = -y; y = -C^T x$, имеет нелинейный блок, характеризующийся локальной связью, заданной квадратичной формой $F(\xi, \dot{\xi}, u) \geq 0$, где $u = f(\xi); 0 \leq \frac{f(\xi)}{\xi} \leq \beta < \infty$. Система будет минимально устойчивой в классе систем вида …	1. … $y = sW(s)u;\ \ u = \gamma\xi;\ \ \xi = -y;$; $W(s) = C^T(sE - A)^{-1}b;\ \ \gamma \in [0, \beta]$. 2. … $y = W(s)u;\ \ u = \gamma_1 s\xi + \gamma_2 \varsigma;\ \ \xi = -y;$ $W(s) = C^T(sE - A)^{-1}b;\ 0 \leq \gamma_1 < \infty; 0 \leq \gamma_2 \leq \beta$. 3.… $y = W(s)u;\ \ u = \gamma\xi;\ \ \xi = -y;$; $W(s) = C^T(sE - A)^{-1}b;\ \ \gamma \in [0, \beta]$
7	Пусть задана система $\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx;$ $x \in R^n; u \in R^m; y \in R^p; W(s) = C(sE - A)^{-1}B$. Если $p = 1$, то передаточная функция будет положительно вещественной, если …	1. … полюса передаточной функции $W(s)$ находятся в области $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ и относительная степень передаточной функции равна нулю или единице. 2. … полюса передаточной функции $W(s)$ находятся в области $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ и относительная степень передаточной функции более единицы. 3. … степень числителя передаточной функции не превосходит степени знаменателя.
8	Задана линейная система $\dot{x} = Ax + bu; y = C^T x; x \in R^n; u, y \in R$; где пара (A, b) - является управляемой, а пара (A, C) - наблюдаемой. Тогда условия асимптотической устойчивости при выборе управления $u = f(y); \alpha \leq \frac{f(y)}{y} \leq \beta$, имеют вид ….	1. … $\exists (Q = Q^T)$, что $QA + A^T Q = -CC^T$ 2. … $\exists (Q = Q^T)$, что $QA + A^T Q < 0; Qb = C$ 3. …. $\exists (Q = Q^T)$, что $QA + A^T Q = -E; QC = b$