Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 10. Линейные оптимальные, по интегральному квадратичному критерию, системы.

Синтез линейных систем с использованием интегрального квадратичного критерия качества. Матричное уравнение Риккати. Вариационные принципы проектирования оптимальных систем. Уравнение Эйлера. Уравнение Эйлера-Пуассона. Преобразование уравнения Эйлера к каноническому виду по Гамильтону.

Синтез линейных систем с использованием квадратичного критерия качества.

Рассмотрим следующую линейную систему: $\dot{x} = A(t)x + B(t)u; y = C^T(t)x; x(t_0) = x_0$.

Квадратичный критерий качества определим с помощью следующего соотношения:

$J = \int\limits_{t_0}^{t_f} \{u^T(\tau)u(\tau) + x^T(\tau)L(\tau)x(\tau)\}d\tau + x^T(t_f)Qx(t_f)$. Задача синтеза состоит в поиске управляющей функции $u(t)$, определенной на интервале $t_0 \le t \le t_f$, которая определена на траекториях движениях системы и минимизирует функционал J. Матрицы Q, L, обычно, полагают симметричными. Данная задача является вариационной и, часто, рассматривается в разделе теории оптимального управления. Однако, если в качестве управляющих функций рассмотреть m-мерное пространство $\{C[t_0, t_f]\}^m$ непрерывных функций, то можно решить указанную задачу геометрическими способами, используемыми при исследовании линейных систем /Андреев с359/.

Можно выделить два вида решений приведенной задачи.

В первом случае оптимальное управление $u(t)$ определяется как функция от матриц A, B, Q, L, начального состояния x_0, t_0, временного параметра t и множества значений, которому должно принадлежать состояние x_1, t_f. То есть, управление рассматривается для разомкнутого контура системы, полностью определяется априори заданными параметрами задачи и не зависит от текущего состояния системы.

Во втором случае, управление ищется в виде линейной функции от текущего состояния $(x(t), t)$ при движении системы по оптимальной траектории. То есть ищется оптимальное управление в виде $u(t) = -K(t)x(t)$. В этом случае управление представлено в виде сигнала обратной связи или, говорят, управление осуществляется по замкнутому контуру.

При решении поставленных задач будем предполагать, что состояние системы, либо ее выход доступны для измерения. Рассмотрим предварительно задачу без ограничений на конечное состояние системы. Определим матричное дифференциальное уравнение, называемое уравнением Риккати, с помощью соотношения:

$$\dot{K}(t) = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)B^T(t)K(t) - L(t)$$

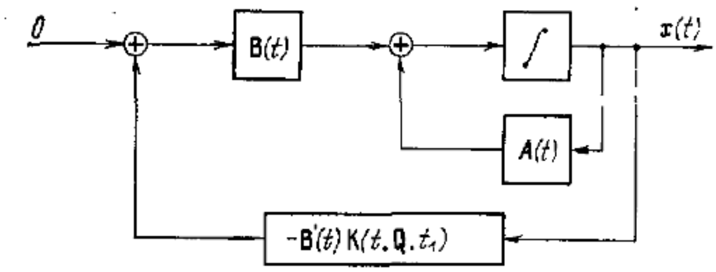
Теорема *(о существовании оптимального управления для линейной системы без ограничений на конечное состояние /Андреев с 368/). Пусть заданы матрицы $A(t), B(t), L(t), Q(t)$, где $L(t), Q(t)$ - симметричные матрицы. Предположим, что на интервале $t_0 \le t \le t_f$ существует решение $K(t)$ дифференциального уравнения Риккати*

$\dot{K}(t) = -A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)B^T(t)K(t) - L(t)$ с начальным условием $K(t_1) = Q$. Тогда существует управление $u(t)$, которое дает минимум критерию качества:

$J = \int\limits_{t_0}^{t_f} \{u^T(\tau)u(\tau) + x^T(\tau)L(\tau)x(\tau)\}d\tau + x^T(t_f)Qx(t_f)$ на траекториях системы

$\dot{x} = A(t)x + B(t)u; x(t_0) = x_0$. Минимальное значение J равно $x^T(t_0)K(t)x(t_0)$. Оптимальное управление в виде обратной связи определяется следующим соотношением:
$u(t) = -B^T(t)K(t,Q,t_f)x(t)$. Оптимальное управление по разомкнутому контуру имеет вид:
$u(t) = -B^T(t)K(t,Q,t_f)\Phi(t,t_0)x_0$, где $\Phi(t,t_0)$ - переходная матрица для уравнения:
$\dot{x} = [A(t) - B(t)B^T(t)K(t,Q,t_f)]x$.
(без доказательства).

Решение задачи в виде обратной связи называется построением регулятора нулевого состояния. Структура замкнутой системы, при этом, будет иметь следующий вид:



Пример. Пусть $x(0) = 1$. Необходимо найти $x(t)$ на интервале $0 \le t \le T$ так, чтобы критерий, задаваемый соотношением: $J = \int_{t_0}^{T}\{[\dot{x}(\tau)]^2 + x^2(\tau)\}d\tau$ достигал минимума. В этом случае, уравнение движения можно записать в следующем виде: $\dot{x}(t) = u(t)$. Тогда уравнение Риккати для этой задачи имеет вид: $\dot{k}(t) = k^2(t) - 1$. Решение, которое проходит через нуль при $t = T$, описывается функцией $k(t) = th(T-t)$. Поэтому оптимальная траектория удовлетворяет уравнению: $\dot{x}(t) = -th(T-t)x(t)$. Интегрируя это уравнение, получим следующие соотношения: $x(t) = ch(t) - (\frac{sh(T)}{ch(T)})sh(t)$,
$u(t) = -th(T-t)x(t)$. Минимальное значение квадратичной оценки качества равно:
$x^T(0)K(0,0,T)x(0) = x^2(0)th(T)$.

Достаточно часто, требуемое ограничение на управление, которое в явной форме не учитывается в постановке задачи оптимизации, может быть выбором соответствующей матричной функции $G(t)$.

***Теорема** /Ким т2 с322/. Пусть задана система*
$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + h(t); y = C^T(t)x; x(t_0) = x_0; x \in R^n; u \in R^m; y \in R^P$ и критерий оптимизации вида $J = \int_{t_0}^{t_f}\{u^T(\tau)G(\tau)u(\tau) + x^T(\tau)L(\tau)x(\tau)\}d\tau + x^T(t_f)Qx(t_f)$. Тогда решение задачи синтеза оптимального нестационарного линейного регулятора существует и единственно, а оптимальное управление имеет вид $u^* = -(G^{-1}B^TKx + \frac{1}{2}G^{-1}B^Tp)$, где симметричная $(n \times m)$

матрица K *и* n *- мерный вектор* p *определяются из уравнений*

$\dot{K} = -KA - A^T K + KBG^{-1}B^T K - L$; $\dot{p} = KBG^{-1}B^T p - A^T p - 2Kh$ *при граничных условиях* $K(t_f) = Q$; $p(t_f) = 0$. *При этом для любого* $t \in [t_0, t_f]$ *справедливо соотношение*

$$x^T(t)K(t)x(t) + p^T(t)x(t) + q(t) = x^T(t_f)Qx(t_f) + \int_t^{t_f}[(x^*)^T L(\tau)x^*(\tau) + (u^*)^T G(\tau)u^*(\tau)]d\tau,$$ *где*

$q(t)$ *- скалярная функция, которая определяется из уравнений*

$$\dot{q} = \frac{1}{4}p^T BG^{-1}B^T p - p^T h; \quad q(t_f) = 0.$$

Следствие. *При* $h(t) = 0$ *оптимальное управление имеет вид* $u^* = G^{-1}B^T Kx$, *где симметричная* $(n \times n)$ *матрица* K *определяется из уравнения*

$$\dot{K} = -KA - A^T K + KBG^{-1}B^T K - L; \quad K(t_f) = Q.$$

Рассмотрим теперь случай линейной стационарной системы вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu; y = C^T x; x(t_0) = x_0; x \in R^n; u \in R^m; y \in R^p.$$

Теорема *(о связи управляемости и идентифицируемости системы с решением алгебраического уравнения Риккати /Андреев с391/). Если система* $\{A, B, C\}$ *управляема и идентифицируема, то существует симметрическая положительно определенная матрица* V, *которая является решением алгебраического уравнения Риккати:* $A^T V + VA - VBB^T V + CC^T = 0$.
(без доказательства).

Таким образом, управляемость и идентифицируемость тройки матриц $\{A, B, C\}$ является необходимым условием существования соответствующего алгебраического уравнения Риккати.

Теорема *(об оптимальном стационарном регуляторе). Пусть стационарная система* $\{A, B, C\}$ *управляема и идентифицируема. Пусть также* V_r *- положительно определенное решение алгебраического матричного уравнения:* $A^T V + VA - VBB^T V + CC^T = 0$. *Тогда существует управление, которое минимизирует квадратичный критерий качества следующего вида:*

$J = \int_{t_0}^{\infty}\{u^T(\tau)u(\tau) + x^T(\tau)CC^T x(\tau)\}d\tau$ *для системы* $\dot{x} = Ax + Bu; y = C^T x; x(t_0) = x_0;$. *Причем минимальное значение* J *равно* $x_0^T V_r x_0$, *а оптимальное управление в виде обратной связи имеет вид:* $u(t) = -B^T V_r x(t)$, *и в разомкнутой форме:* $u(t) = -B^T V_r e^{[A - BB^T V_r]t}$.

Доказательство. Сделаем замену переменной: $v(t) = u(t) + B^T V_r x(t)$, называемую преобразованием Риккати. Уравнения движения примут вид: $\dot{x}(t) = [A - BB^T V_r]x(t) + Bv(t)$, и функционал J будет определяться соотношением: $J = \int\limits_{t_0}^{\infty} [v(\tau) - B^T V_r x(\tau)]^T \{[v(\tau) - B^T V_r, x(\tau)] + x^T(\tau) C C^T x(\tau)\} d\tau$.

Преобразуем подынтегральное выражение, применив равенство: $A^T V_r + V_r A - V_r B B^T V_r = -C C^T$.

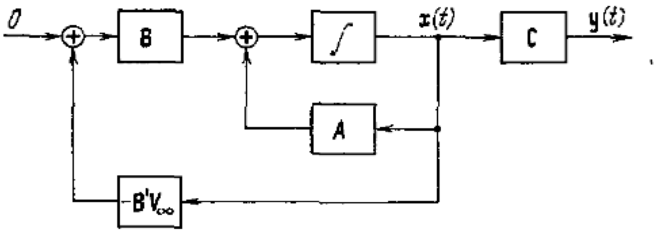
Получим, после всех преобразований, следующее соотношение:

$$J = \int\limits_{t_0}^{\infty} \{[v^T(\tau) v(\tau) - [(A - BB^T V_r) x(\tau) + B v(\tau)]^T V_r x(\tau) - x^T(\tau) V_r [(A - BB^T V_r) x(\tau) + B v(\tau)]\} d\tau$$ или

$J = -\int\limits_{t_0}^{\infty} v^T(\tau) v(\tau) d\tau - x^T(t) V_r x(t) |_{t_0}^{\infty}$. Очевидно, что минимум значения J достигается при

$v(t) = u(t) + B^T V_r x(t) = 0$. Отсюда следует доказательство утверждения теоремы.

Структурная схема стационарного оптимального регулятора приведена на рисунке.



Имеет место также и более общий результат. Пусть линейная стационарная система описывается уравнением: $\dot{x} = Ax + Bu$, а критерий оптимальности имеет вид:

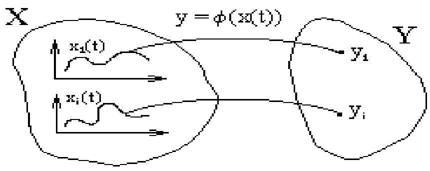
$$J = \int\limits_{0}^{\infty} \{u^T(\tau) G u(\tau) + x^T(\tau) Q x(\tau)\} d\tau \quad (*)$$

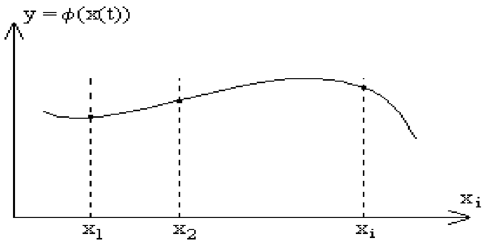
Теорема *(об оптимальном стационарном регуляторе) /Ким т2 с325/. Задача (*) имеет решение тогда и только тогда, когда стационарная система* $\{A, B\}$ *стабилизируема, а оптимальное управление имеет вид* $u(t) = -G^{-1} B^T V_r x(t)$ *, где* V_r *- положительно определенное решение алгебраического матричного уравнения:* $A^T V + VA - VBG^{-1} B^T V = -Q$. *При этом для любого* $t \geq 0$ *справедливо равенство* $x^T(t) V_r x(t) = \int\limits_{0}^{t} \{u^T(\tau) G u(\tau) + x^T(\tau) Q x(\tau)\} d\tau$.

Вариационные принципы проектирования систем.

Определение функции, функционала /Гельфанд с7/. Говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, если задано правило, в соответствии с которым произвольному элементу $x \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент y, являющийся элементом множества Y.

Функционалом называют функцию, заданную на множестве, элементами которого являются функции. Если в простейшем случае функция задает соответствие число-число, то функционал задает соответствие функция-число.

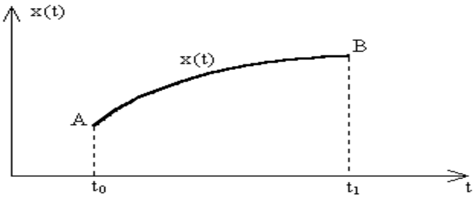




Пример. Максимальное и минимальное значение функции, заданной на некоторой области.

$$y = \max x(t), \quad x(t) \in X \qquad y = \min x(t), \quad x(t) \in X$$

Пример:

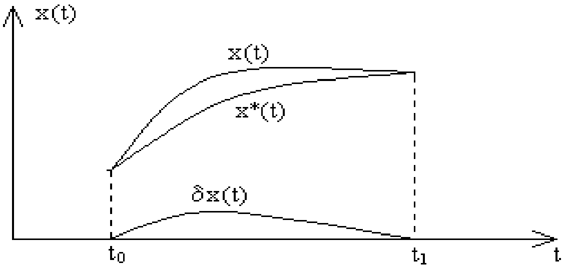


$y = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}dt = L_{AB}$ длина дуги.

Вариация функции и вариация функционала.

Вариацией функции называют разность между двумя близко расположенными функциями:

$\delta x(t) = x(t) - x^*(t); t \in (t_0, t_1)$



Следует различать вариацию функции и приращение функции. Вариация функции определяется всеми значениями аргумента, а приращение определяется при фиксированном аргументе.

В вариационном исчислении вариацию функции чаще всего записывают в виде: $\delta x(t) = \alpha \eta(t)$. Предположим, что задан функционал: $J = \varphi(x(t))$. Тогда, взяв функцию $x(t)$, получим вполне определенное значение функционала. Вычислим следующий функционал: $J^* = \varphi(x^*(t))$ и введем понятие приращения функционала: $\Delta J = J - J^* = \varphi(x(t)) - \varphi(x^*(t))$. Тогда можно записать следующее соотношение: $J = \varphi(x(t)) = \varphi(x^*(t) + \alpha \eta(t)) = J(\alpha)$. Запишем разложение правой части приведенного соотношения в окрестности точки $\alpha = 0$:

$\Delta J(\alpha) = J(\alpha) - J(0) = \dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} \alpha + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 J(\alpha)}{\partial \alpha^2}|_{\alpha=0} \alpha^2 + \ldots$. Отсюда, первая вариация функционала определяется равенством: $\delta J = \dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} \alpha$, а вторая вариация $\delta^2 J = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 J(\alpha)}{\partial \alpha^2}|_{\alpha=0} \alpha^2$.

Таким образом первая вариация функционала является аналогом первого дифференциала функции: $dy = f'(x)dx$.

Непрерывность функционала. Определение непрерывности функционала практически совпадает с соответствующим определением непрерывности функции.

Экстремум функционала. Говорят, что на функции $x^*(t)$, являющейся элементом множества X, функционал $J = \varphi(x(t))$ достигает своего минимального (максимального) значения, если значение функционала, вычисленное для всех других функций $x(t)$ из множества X больше (меньше) значения $\varphi(x^*(t))$. То есть, имеем минимум, если: $\varphi(x^*(t)) \le \varphi(x(t))$ и максимум, если: $\varphi(x^*(t)) \ge \varphi(x(t))$. Как и при анализе функций различают локальные и глобальные экстремумы функционала.

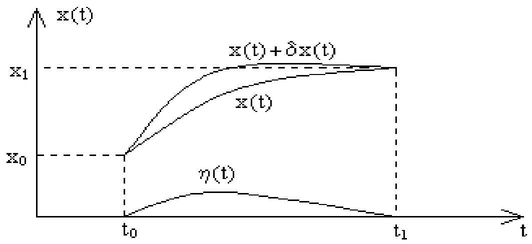
Необходимое условие существования экстремума функционала. Если на функции $x^*(t)$, являющейся внутренним элементом множества X, функционал $J = \varphi(x(t))$ достигает своего экстремального значения, то на функции $x^*(t)$ первая вариация функционала равна нулю $\delta J = 0$.

Достаточное условие существования экстремума функционала. Пусть функционал $J = \varphi(x(t))$, имеющий первую и вторую вариации, на функции $x^*(t)$ обладает следующими свойствами: $\delta J = 0$; $\delta^2 J \ge 0$; причем $x^*(t) \in X$. Тогда на функции $x^*(t)$ функционал достигает своего минимального значения. Если же $\delta J = 0$; $\delta^2 J \le 0$; то на функции $x^*(t)$ функционал достигает своего максимального значения.

***Лемма**. Пусть интеграл вида* $\int_{t_0}^{t_1} f(\tau)\eta(\tau)d\tau$*, где* $f(t)$ *- некоторая непрерывная функция, обращается в ноль, для всякой непрерывной, вместе со своей производной, функции* $\eta(t)$*, причем* $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. *Тогда* $f(t) \equiv 0$ *для всех* $t \in [t_0, t_1]$.

<u>Уравнение Эйлера</u>

Уравнение Эйлера определяет необходимое условие существования экстремума функционала следующего вида: $J = \int_{t_0}^{t_1} F(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))d\tau$, где $F(.)$ - некоторая дифференцируемая по своим аргументам функция /Гельфанд с20/.



При этом предполагается, что левая и правая точки экстремали заданы: $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$.

Предположим, что функция $x(t)$ является претендентом на экстремаль. Поварьируем эту функцию: $x(t) + \delta x(t) = x(t) + \alpha \cdot \eta(t)$, при условии $\begin{cases} \eta(t_0) = 0 \\ \eta(t_1) = 0 \end{cases}$. Тогда можно записать следующие соотношения: $J(\alpha) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau, x(\tau) + \alpha\eta(\tau), \dot{x}(\tau) + \alpha\dot{\eta}(\tau))d\tau$. При этом, имеют место следующие соотношения: $\delta J = 0 \Rightarrow \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = 0$, где $\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{\frac{\partial F}{\partial x}\eta(\tau) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(\tau)\}d\tau$. Используем формулу полного дифференциала для вычисления: $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(\tau)d\tau$. Обозначим $u = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ и $dv = \dot{\eta}(\tau)d\tau$. Тогда $du = \frac{d}{d\tau}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})d\tau$ и $v(\tau) = \eta(\tau)$. Отсюда получим следующее соотношение: $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(\tau)d\tau = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta(\tau)|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})\eta(\tau)d\tau$, где $\eta(t_0) = 0$ и $\eta(t_1) = 0$. Таким образом, можно записать равенство : $\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})\}\eta(\tau)\}d\tau = 0$. В соответствии с леммой, отсюда получим следующее уравнение, называемое уравнением Эйлера: $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 0$.

Пример. Требуется определить экстремаль функционала $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} [x^2(\tau) + T^2\dot{x}^2(\tau)]d\tau$, проходящую через точки $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$. Решение задачи : $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}T^2$; $\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 2\ddot{x}T^2$. Отсюда можно записать уравнение Эйлера: $2x - 2\ddot{x}T^2 = 0$. Решение уравнение имеет вид: $x = C_1 e^{\frac{t}{T}} + C_2 e^{-\frac{t}{T}}$. Значения постоянных в решении определяются граничными условиями, заданными в начальной и конечной точках .

<u>Уравнение Эйлера для функционала, содержащего векторную переменную.</u>

Рассмотрим функционал: $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau, \bar{x}(\tau), \dot{\bar{x}}(\tau))d\tau$, где $\bar{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$.

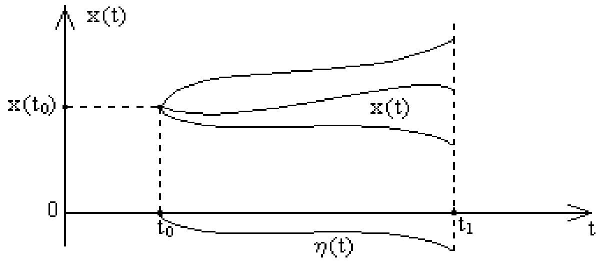
Технология решения задачи, в принципе, не отличается от ранее рассмотренного случая, то есть выполняется вариация экстремали (только векторная): $\bar{x}(t) + \delta\bar{x}(t) = \bar{x}(t) + \alpha \cdot \bar{\eta}(t)$.

Полагаем, что существуют частные производные $F(.)$ по всем компонентам $\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)$. Тогда можно записать систему уравнений Эйлера в векторной форме: $\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{\bar{x}}}) = 0$. В данном случае, это будет системой дифференциальных уравнений порядка 2n.

Естественные граничные условия.

В ряде задач рассматривается случай, когда у искомой экстремали зафиксирована лишь левая граничная точка, а для правой граничной точки указан лишь параметр t_1 .

Очевидно, что $\eta(t_0) = 0$ при любых вариациях, а $\eta(t_1) \neq 0$.



Тогда можно записать следующие соотношения : $J(\alpha) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau, x(\tau) + \alpha\eta(\tau), \dot{x}(\tau) + \alpha\dot{\eta}(\tau))d\tau$;

$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int\limits_{t_0}^{t_1}\{\frac{\partial F}{\partial x}\eta(\tau) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(\tau)\}d\tau$; $\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(\tau)d\tau = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta(\tau)|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})\eta(\tau)d\tau = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta(t_1) - \int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})\eta(\tau)d\tau$.

Отсюда получим следующее уравнение: $\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta(t_1) - \int\limits_{t_0}^{t_1}\{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})\}\eta(\tau)\}d\tau = 0$ или

$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_{t_1} = 0$. То есть, естественные граничные условия налагают дополнительные требования на поведение искомой экстремали в правой граничной точке.

Пример. Задан функционал: $J = \int\limits_{t_0}^{t_1}[x^2(\tau) + T^2\dot{x}^2(\tau)]d\tau; x(t_0) = x_0$. Решая уравнение Эйлера найдем следующее решение: $x = C_1 e^{\frac{t}{T}} + C_2 e^{-\frac{t}{T}}$. Граничное условие в правой точке имеет вид:

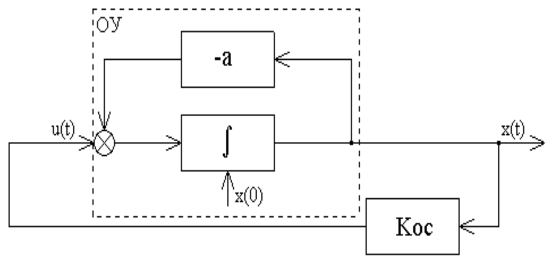
$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}T^2|_{t_1} = 0$. Отсюда получим $2T(C_1 e^{\frac{t_1}{T}} - C_2 e^{-\frac{t_1}{T}}) = 0$. Отсюда найдем постоянные:

$$\begin{cases} C_1 e^{\frac{t_1}{T}} - C_2 e^{-\frac{t_1}{T}} = 0 \\ C_1 e^{\frac{t_0}{T}} + C_2 e^{-\frac{t_0}{T}} = x_0 \end{cases}; \quad C_1 = \frac{x_0 e^{-\frac{t_0}{T}}}{e^{\frac{t_1 - t_0}{T}} + e^{\frac{t_0 - t_1}{T}}}; \quad C_2 = \frac{x_0 e^{\frac{t_1}{T}}}{e^{\frac{t_1 - t_0}{T}} + e^{\frac{t_0 - t_1}{T}}}.$$

<u>Уравнение Эйлера–Пуассона.</u>

Уравнение Эйлера–Пуассона определяет необходимые условия существования экстремали для функционала вида: $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau), ..., x^{(n)}(\tau)) d\tau$. Уравнение для случая, когда значение $n = 2$, имеет следующий вид: $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) + \frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}) = 0$. Для случая, когда значение n – произвольное, уравнение записывается в следующем виде: $\frac{\partial F}{\partial x} + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}(\frac{\partial F}{\partial x^{(k)}}) = 0$

Пример. Используя уравнение Эйлера определить стационарную обратную связь регулятора для объекта первого порядка: $\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t)$, минимизирующую функционал: $J = \int\limits_0^{\infty} [x^2(\tau) + u^2(\tau)] d\tau$ при фиксированной левой граничной точке: $x(t_0) = x_0$



Решение задачи состоит из следующих этапов:

- определим управление из уравнения объекта управление, подставим его в уравнение функционала и приведем последний к виду функционала задачи Эйлера;
- определим экстремаль, полученного функционала при условии, что: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x(\infty) = 0 \end{cases}$;
- определим оптимальное управление, используя решение $x(t)$ и его производную;
- определим связь между управлением и состоянием.

Уравнение движения системы имеет вид: $\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t)$. Отсюда можно определить функцию управления: $u(t) = \dot{x}(t) + ax(t)$. Соответственно, функционал можно записать в виде:

$J = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} [x^2(\tau) + \dot{x}^2(\tau) + 2\dot{x}(\tau) a x(\tau) + a^2 x^2(\tau)] d\tau$. Отсюда получим: $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x} + 2ax$;

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 2\ddot{x} + 2a\dot{x}$. Проведя несложные преобразования, получим следующее уравнение Эйлера:

$\ddot{x} - x(1 + a^2) = 0$. Решая его, получим следующие соотношения: $x(t) = x_0 e^{-\sqrt{1+a^2}}$;

$\dot{x}(t) = -x_0 \sqrt{1+a^2} e^{-\sqrt{1+a^2}}$; $u(t) = x_0 e^{-\sqrt{1+a^2}} (a - \sqrt{1+a^2})$. Определим теперь коэффициент обратной связи: $K_{oc} = \frac{u(t)}{x(t)} = a - \sqrt{1+a^2}$.

<u>Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду по Гамильтону</u>

Введем следующие величины: $p_i = F_{\dot{x}_i}$, $H = -F + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i p_i$. Выразив из равенств $p_i = F_{\dot{x}_i}$ величины $\dot{x}_1, \ldots \dot{x}_n$ через величины $t, x_1, \ldots x_n$ и $p_1, \ldots p_n$, можно величины $t, x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$ принять за новые переменные. Одновременно функцию $F(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$, входящую в уравнение Эйлера, выразим через новую функцию $H(t, x_i, p_i) = -F + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i p_i$. Функция $H(t, x_i, p_i)$ называется функцией Гамильтона, отвечающая функционалу $I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt$.

Переменные $t, x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$ и H называются каноническими переменными /Гельфанд с67/.. Переход от старых переменных к новым возможен, если функциональный детерминант матрицы, составленной из производных $(F_{\dot{x}_i \dot{x}_k})$, отличен от нуля. Из определения переменной H получим следующее равенство: $dH = -dF + \sum_{i=1}^{n} p_i d\dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \, dp_i$. В силу равенств $p_i = F_{\dot{x}_i}$, после преобразований можно получить следующее соотношение: $dH = -\frac{\partial F}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \, dp_i$

Таким образом, можно записать следующие равенства, вытекающие из предыдущего соотношения: $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i$. Тогда уравнения Эйлера можно переписать в виде: $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, или в векторной форме: $\frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$, $\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}$. Эта форма называется канонической системой уравнений Эйлера рассматриваемого функционала

$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dt$. Можно показать, что интегрирование канонической системы равносильно интегрированию дифференциального уравнения в частных производных: $\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, \bar{x}, \frac{\partial V}{\partial \bar{x}}) = 0$, которое называется уравнением Гамильтона-Якоби.

Контрольные вопросы к лекции 10.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Пусть задана линейная стационарная система $\dot{x} = Ax + Bu; y = C^T x; x(t_0) = x_0; x \in R^n; u \in R^m; y \in R^p$. При каком условии будет существовать решение алгебраического уравнения Риккати $A^T V + VA - VBB^T V + CC^T = 0$ в виде положительно определенной матрицы V?	1. Система $\dot{x} = Ax$ является устойчивой. 2. Система $\dot{x} = Ax + Bu$ является стабилизируемой. 3. Система $\dot{x} = Ax + Bu$ является управляемой и наблюдаемой.

2	Пусть критерий оптимальности для линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax + Bu$ имеет вид $J = \int\limits_0^{\infty} \{u^T(\tau)Gu(\tau) + x^T(\tau)Qx(\tau)\}d\tau$. В каком случае задача синтеза линейного оптимального регулятора будет иметь решение?	1. Решение уравнения Риккати $A^T V + VA - VBG^{-1}B^T V = -Q$ имеет решение. 2. Система $\dot{x} = Ax + Bu$ является стабилизируемой. 3. Система $\dot{x} = Ax + Bu$ является наблюдаемой.
3	Пусть на интервале $[t_0, t_1]$ заданы непрерывные функции $f(t), x(t)$ и $x(t_0) = x(t_1) = 0$; $\int\limits_{t_0}^{t_1} f(\tau)x(\tau)d\tau = 0$. Какие значения может принимать функция $f(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$?	1. $f(t) = \int\limits_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau; \forall t \in [t_0, t_1]$ 2. $f(t) = -x(\tau)sign[x(\tau)]; \forall t \in [t_0, t_1]$. 3. $f(t) = 0; \forall t \in [t_0, t_1]$
4	Является ли существование решение уравнения Эйлера $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 0$ достаточным для решения задачи нахождения экстремума функционала $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))d\tau$?	1. Да, достаточно найти только решение уравнения. 2. Нет, не достаточно найти только решение уравнения. 3. Надо искать экстремум функционала каким-то другим способом.
5	Какой вид имеют уравнения Эйлера для решения задачи нахождения экстремума функционала $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))d\tau$ при естественных граничных условиях?	1. $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 0$; $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\vert_{t_1} = 0$. 2. $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 0$; $x(t_1) \neq 0$ 2. $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 0$; $\dot{x}(t_1) \neq 0$
6	Уравнения Эйлера-Пуассона для решения вариационной задачи с функционалом $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau), \ddot{x}(\tau))d\tau$ имеют вид …	1. $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) - \frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}) = 0$ 2. $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}) = 0$ 3. $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) + \frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}) = 0$
7	Запишите гамильтониан для вариационной задачи нахождения экстремума функционала $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))d\tau$. Для каких случаев возможен переход к новым переменным для записи уравнений Эйлера в канонической форме?	1. $H = -F + \sum\limits_{i=1}^{n} \dot{x}_i p_i$, где $p_i = F_{\dot{x}_i}$. $\det(F_{\dot{x}_i \dot{x}_k}) \neq 0$. 2. $H = -F + \sum\limits_{i=1}^{n} \dot{x}_i p_i$, где $p_i = \dot{x}_i$. $\det(F_{\dot{x}_i \dot{x}_k}) \neq 0$ 3. $H = -F + \sum\limits_{i=1}^{n} \dot{x}_i p_i$, где $p_i = F_{\dot{x}_i}$. $\det(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) \neq 0$