Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 5. Устойчивость нелинейных систем. Второй (прямой) метод Ляпунова.

Второй (прямой) метод Ляпунова. Основные свойства функции Ляпунова. Знакоопределенные квадратичные формы. Теоремы об устойчивости. Устойчивость в целом. Устойчивость систем с запаздыванием. Устойчивость линейной стационарной системы. Уравнение Ляпунова. Теоремы о неустойчивости. Методы построения функции Ляпунова. Экспоненциальная устойчивость.

Второй (прямой) метод Ляпунова.

Пусть в области $G = D \times [0,\infty) \subseteq R^{n+1}$ задана нелинейная система $\dot{z} = Z(z,t)$. Здесь функция Z удовлетворяет условиям локальной теоремы существования и единственности решения $z(t,t_0,z_0)$ с начальным условием $z(t_0,t_0,z_0) = z_0$. Пусть $\eta(t)$ некоторое решение системы $\dot{z} = Z(z,t)$ (так называемое невозмущенное движение), устойчивость которого требуется исследовать. Причем существует некоторая окрестность $U_h(\eta(t)) \subset G$ при $t \in [t_0,\infty)$: $U_h(\eta(t)) = \{\| z - \eta(t) \| < h < \infty; t \in [t_0,\infty)\}$. Положим $x = z - \eta(t)$, то есть функция x есть отклонение решения z от решения $\eta(t)$. Так как $\dot{\eta}(t) \equiv Z(\eta(t),t)$, то для функции x получим дифференциальное уравнение $\dot{x} = F(x,t)$, где $F(x,t) = [Z(x+\eta,t) - Z(\eta,t)]; x \in U_h(\eta) \subset G$. Очевидно, что $F(0,t) \equiv 0$. Таким образом, система $\dot{x} = F(x,t)$ имеет тривиальное решение $x = 0$, и исследование устойчивости решения $\eta(t)$ в области $G = D \times [0,\infty) \subseteq R^{n+1}$ сводится к исследованию устойчивости решения (положения равновесия) $x = 0$ в области $U_h(\eta) \subseteq R^{n+1}$.

А.М. Ляпунов связал факт устойчивости или неустойчивости тривиального решения с наличием функции $V(x)$ (для автономного случая) , производная которой по времени, взятая согласно системе дифференциальных уравнений, обладает определенными свойствами. То есть анализ решений нелинейных уравнений заменяется анализом скалярного дифференциального неравенства относительно некоторой функции. Несмотря на то, что при этом теряется часть информации о виде решений, такой подход сильно упрощает анализ устойчивости. Таким образом, суть второго или прямого метода Ляпунова сводится к оценке некоторой функции координат состояния системы вдоль траекторий движения. Такую функцию обычно называют функцией Ляпунова.

Основные свойства функции Ляпунова.

В большинстве случаев функции Ляпунова являются знакоопределенными, а их производные – знакоопределенными или знакопостоянными функциями

Рассмотрим функцию $V(x), D \subseteq R^n$ и функцию $V(x,t), D \times [0,\infty) \subseteq R^{n+1}$. Причем область $0 \in D$, то есть содержит начало координат. При этом предполагается, что $V(x)$ и $V(x,t)$ имеют степень гладкости C^1.

Функция $V(x)$ называется знакоположительной или положительно полуопределенной в области D, если $V(0) = 0$ и $V(x) \geq 0$ всюду в области D. Соответственно функция $V(x)$ называется знакоотрицательной или отрицательно полуопределенной в области D, если $V(0) = 0$ и $V(x) \leq 0$ всюду в области D.

Функция $V(x,t)$ называется знакоположительной или положительно полуопределенной в области D, если при всех $t \geq t_0$ выполняются соотношения $V(0,t) = 0$ и $V(x,t) \geq 0$ всюду в области D. Соответственно функция $V(x,t)$ называется знакоотрицательной или отрицательно полуопределенной в области D, если при всех $t \geq t_0$ выполняются соотношения $V(0) = 0$ и $V(x) \leq 0$ всюду в области D.

Знакоположительные и знакоотрицательные функции называются также знакопостоянными функциями в области D.

Функция $V(x)$ называется положительно определенной в области D, если $V(0)=0$ и $V(x)>0$ всюду в области D. Соответственно функция $V(x)$ называется отрицательно определенной в области D, если $V(0)=0$ и $V(x)<0$ всюду в области D.

Функция $V(x,t)$ называется положительно определенной в области D, если при всех $t \geq t_0$ выполняются соотношения $V(0,t)=0$ и $V(x,t)>0$ всюду в области D. Соответственно функция $V(x,t)$ называется отрицательно определенной в области D, если при всех $t \geq t_0$ выполняются соотношения $V(0)=0$ и $V(x)<0$ всюду в области D.

Положительно определенные и отрицательно определенные функции называются также знакоопределенными функциями в области D.

Пример: $V(x)=x_1^2+x_2^2$ - положительно определенная функция. $V(x)=-(x_1^2+(x_2+x_3)^2)$ - знакоотрицательная функция (но не отрицательно определенная, так как обращается в нуль на многообразии $x_1=0, x_2=-x_3$).

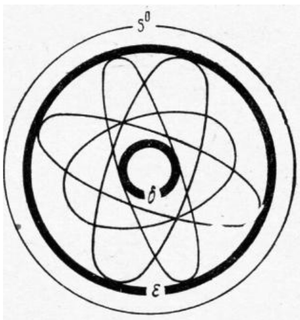
Из приведенных выше определений следует /Фурасов Устойчивость с9/, что функция $V(x,t)$ будет определенно положительной в области D, если существует определенно положительная в D функция $w(x)$, такая, что $V(x,t) \geq w(x), \forall t \geq t_0$. Если выполняется неравенство $V(x,t) \leq -w(x), \forall t \geq t_0$, то функция Ляпунова будет определенно отрицательной.

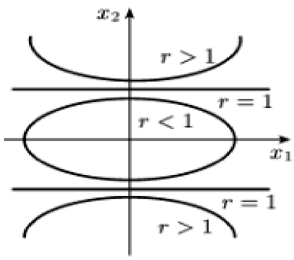
Определение. *Будем говорить, что функция $V(x,t)$ допускает бесконечно малый высший предел в области $D \times [t_0,\infty)$, если для любого числа $c>0$ может быть указано число $\delta>0$, такое, что $|V(x,t)|<c$, если $\| x \| \leq \delta, t \geq t_0$.*

Пример. $V(x,t)=\| x \|^2 \sin^2 t$ - допускает бесконечно малый высший предел. Функция $V(x,t)=e^t \| x \|^2$ не имеет бесконечно малого высшего предела.

Другими словами, функция $V(x,t)$ допускает бесконечно малый высший предел, если существует такая непрерывная функция $W(x)$, что выполняется соотношение $|V(x,t)| \leq W(x), x \in D, t \in [t_0,\infty)$ и $W(0)=0$. Таким образом, всегда можно указать положительные числа c,ε и $\delta<\varepsilon$, такие что, поверхности уровня $V(x,t)=c$ в каждый момент времени будут расположены между сферами $\| x \|=\delta$ и $\| x \|=\varepsilon$. При этом будет справедливо следующее соотношение:

$\sup\{V(x,t): \| x \|=\delta, t \geq t_0\} \leq \inf\{V(x,t): \| x \|=\varepsilon, t \geq t_0\}$.





Кривые уравнения
$(1-r^2)x_1^2+x_2^2=r^2$

В общем случае, поверхности уровня функции Ляпунова могут быть замкнуты лишь при достаточно малых значениях $c>0$.

Пример. Функция $V(x)=\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}+\dfrac{x_2^2}{1+x_2^2}$. Уравнения поверхностей уровня $V(x)=c=r^2$ имеет вид: $(1-r^2)x_1^2+x_2^2=r^2$. Кривые уровня будут замкнутыми только при $r<1$.

Определение. *Функция $V(x,t)$ допускает бесконечно большой низший предел, если для любого числа $c>0$ существует число $\Delta>0$, такое, что $|V(x,t)|>c$, $\|x\|\geq\Delta, t\geq t_0$.*

Иными словами функция $V(x,t)$ допускает бесконечно большой низший предел, если может быть указана определенно положительная функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(x)\leq|V(x,t)|, x\in D, t\in[t_0,\infty)$ и $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\varphi(x)=\infty$. Поверхности уровня $V(x,t)=c$ функции Ляпунова допускающей большой низший предел, являются замкнутыми для любого значения $c>0$.

Определение. *Функция $V(x,t)$ называется определенно положительной функцией, допускающей высший предел в целом, если существуют определенно положительные функции $\varphi(x)$ и $W(x)$, такие, что $\varphi(x)\leq V(x,t)\leq W(x), x\in D, t\in[t_0,\infty)$ и выполняется соотношение $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\varphi(x)=\infty$.*

Таким образом, для функции Ляпунова, допускающей высший предел в целом, для любого заданного числа $\alpha>0$ всегда может быть указано число $\beta>0$, такое, что будет выполняться соотношение: $\sup\{V(x,t):\|x\|=\alpha, t\geq t_0\}\leq\inf\{V(x,t):\|x\|=\beta, t\geq t_0\}$.

Знакоопределенные квадратичные формы.

При построении функций Ляпунова широко используются квадратичные формы $V(x)=x^TQx$. Симметрическая матрица Q называется положительно (отрицательно) определенной матрицей, если квадратичная форма $V(x)=x^TQx$ является положительно (отрицательно) определенной функцией, и положительно (отрицательно) полуопределенной матрицей, если квадратичная форма $V(x)=x^TQx$ является положительно (отрицательно) полуопределенной функцией.

Понятие функции Ляпунова можно расширить и для анализа дифференциальных уравнений и их решений с комплексными коэффициентами. В частности, достаточно широко используются для построения функций Ляпунова эрмитовы формы следующего вида $V(x)=x^*Qx$.

Эрмитова форма $V(x)=x^*Qx$ называется определенно положительной (определенно отрицательной), если при любом комплексном векторе $x\neq0$ выполнено условие $V(x)>0$ ($V(x)<0$). Соответственно, эрмитова форма называется знакоположительй (знакоотрицательной), если при любом комплексном векторе x выполнено условие $V(x)\geq0$ ($V(x)\leq0$).

Как известно, симметрическая матрица Q обладает следующими свойствами:

1. Все ее собственные значения, то есть корни $\lambda_i, i=1,2,...n$ ее характеристического уравнения $\det(\lambda E-Q)=0$, являются вещественными числами;

2. Если соответствующая квадратичная форма $V(x)=x^TQx$ положительно (отрицательно) определена, то все собственные значения матрицы Q являются положительными (отрицательными), то есть $\lambda_i>0, i=1,2,..n$ ($\lambda_i<0, i=1,2,..n$). Если квадратичная форма $V(x)=x^TQx$ положительно (отрицательно) полуопределена, то все собственные значения

матрицы Q являются неотрицательными (неположительными), то есть
$\lambda_i \geq 0, i = 1,2,..n$ ($\lambda_i \leq 0, i = 1,2,..n$) .

3. Определитель симметричной матрицы Q равен произведению ее собственных значений

$$\det(Q) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Лемма */Ким т2 с116/. Квадратичная форма $V(x) = x^T Qx$, где Q симметричная матрица, удовлетворяет неравенству $\lambda_{\min} \| x \|^2 \leq x^T Qx \leq \lambda_{\max} \| x \|^2$, где $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ - минимальное (максимальное) собственное значение матрицы Q.*

Доказательство. Рассмотрим задачу о нахождении минимального и максимального значений квадратичной формы $V(x) = x^T Qx$ на сфере $\| x \|^2 = r^2$. Для этого построим функцию Лагранжа: $L(x) = x^T Qx - \lambda[\| x \|^2 - r^2]$. Необходимое условие экстремума построенной функции Лагранжа имеет вид: $\frac{dL}{dx} = 2x^T Q - 2\lambda x^T = 0$. Отсюда получим следующее уравнение: $Qx - \lambda x = 0$. Данное уравнение имеет ненулевое решение, если $\det(Q - \lambda E) = 0$. То есть, если λ принимает собственные значения матрицы Q. Таким образом, для собственных значений должно выполняться соотношение $x^T Qx = \lambda \| x \|^2$ или $V(x) = \lambda r^2$. Отсюда получим, что $\lambda_{\min} \| x \|^2 \leq x^T Qx \leq \lambda_{\max} \| x \|^2$.

Критерий Сильвестра. *Для того, чтобы квадратичная форма $V(x) = x^T Qx$ ($V(x) = x^* Qx$) была положительно определенной функцией, необходимо и достаточно, чтобы все определители*

$\Delta_k = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1k} \\ . & \dots & . \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} \end{pmatrix}$, *k=1,2,…n, были положительны.*

Из критерия Сильвестра легко выводится необходимое и достаточное условие определенной отрицательности формы V. Это условие записывается в виде неравенств: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ..$. То есть определители Δ_k должны последовательно чередовать знак, причем знак Δ_1 должен быть отрицательным.

Теоремы об устойчивости.

Пусть в области $D \times [0, \infty) \subseteq R^{n+1}$ поведение системы описывается уравнением $\dot{x} = F(x,t)$, где $F(0,t) = 0, t \geq t_0$. Решение $x(t,t_0,0) = 0, t \geq t_0$ будем называть невозмущенным движением. Движение $x(t,t_0,x_0), t \geq t_0$, вызванное начальным возмущением x_0, будем называть возмущенным движением.

Определение */Фурасов Устойчивость с13/. Невозмущенное движение $x(t,t_0,0) = 0, t \geq t_0$ называется устойчивым по переменным $x = (x_1,..., x_n)^T$, или устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что при всех $t > t_0$ будут выполняться соотношения $\| x(t,t_0,x_0) \| < \varepsilon$, если $\| x_0 \| < \delta(\varepsilon, t_0)$.*

В противном случае невозмущенное движение по переменным $x = (x_1,..., x_n)^T$ неустойчиво.

Определение. *Невозмущенное движение* $x(t,t_0,0)=0, t\ge t_0$ *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует положительное число* $\Delta \le \delta(\varepsilon,t_0)$, *такое, что условие* $\| x(t,t_0,x_0)\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$ *выполняется на всех движениях системы, начинающихся в области* $\| x_0 \| < \Delta$.

Область, определенная неравенством $\| x_0 \| < \Delta$ называется областью притяжения невозмущенного движения.

Пусть теперь функция Ляпунова $V(x,t)\in C^1$ определена в области $D\times[0,\infty)\subseteq R^{n+1}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial V}{\partial x}=[\frac{\partial V}{\partial x_1},...,\frac{\partial V}{\partial x_n}]^T$, $\frac{\partial V}{\partial t}$.

Теорема. *Невозмущенное движение* $x(t,t_0,0)=0, t\ge t_0$ *устойчиво по переменным* $x=(x_1,..., x_n)^T$, *если существует определенно положительная в области* $D\times[t_0,\infty)\subseteq R^{n+1}$ *функция* $V(x,t)\in C^1$, *производная которой* $\dot V(x,t)=(\frac{\partial V}{\partial x},F)+\frac{\partial V}{\partial t}$, *вычисленная в силу уравнения возмущенного движения* $\dot x = F(x,t)$, *является в этой области знакопостоянной отрицательной.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ - некоторое малое число, и пусть $\inf\{V(x,t) : \| x\| =\varepsilon, t\ge t_0\}=c$. Тогда, выбирая $\delta>0$ из условия $\sup\{V(x,t_0) : \| x\| <\delta\}<c$, в силу неравенства $\dot V(x,t)\le 0$ получим следующее соотношение $V(x(t,t_0,x_0),t)\le V(x_0,t_0)<c$ на любом движении $x(t,t_0,x_0), t\ge t_0$, которое начинается в области $\| x_0 \| <\delta$. Следовательно, ни одно из движений $x(t,t_0,x_0), t\ge t_0$ не попадет на поверхность $\| x_0 \| =\varepsilon$, что и доказывает теорему.

Теорема. *Невозмущенное движение* $x(t,t_0,0)=0, t\ge t_0$ *устойчиво асимптотически, если существует определенно положительная в области* $D\times[t_0,\infty)\subseteq R^{n+1}$ *функция* $V(x,t)\in C^1$, *производная которой* $\dot V(x,t)=(\frac{\partial V}{\partial x},F)+\frac{\partial V}{\partial t}$, *вычисленная в силу уравнения возмущенного движения* $\dot x = F(x,t)$, *является в этой области определенно отрицательной, а сама функция* $V(x,t)$ *допускает бесконечно малый высший предел.*

Доказательство. Очевидно, что при выполнении неравенства $\sup\{V(x,t) : \| x\| <\delta, t\ge t_0\}<\inf\{V(x,t) : \| x\| =\varepsilon, t\ge t_0\}$ имеет место соотношение $\| x(t,t_0,x_0)\| <\varepsilon$ на всех движениях системы, начинающихся в области $\| x_0\| <\delta$. Так как $V(x(t,t_0,x_0),t)>0$ и $\dot V(x(t,t_0,x_0),t)<0$, то существует такое число $\gamma>0$, такое, что $V(x(t,t_0,x_0),t)>\gamma$ и $V(x(t,t_0,x_0),t)\underset{t\to\infty}{\to}\gamma$. Однако, так как функция $V(x(t,t_0,x_0),t)$ имеет бесконечно малый высший предел, то число $\gamma=0$.

Определение. *Невозмущенное движение* $x(t,t_0,0)=0, t\ge t_0$ *называется устойчивым равномерно по времени* t_0, *если для любого числа* $\varepsilon>0$ *можно указать зависящее только от* ε *число* $\delta>0$, *такое, что* $\| x(t,t_0,x_0)\| <\varepsilon$ *для всех* $t_0\ge 0$ *и, любых начальных возмущениях , которые удовлетворяют условию* $\| x_0 \| <\delta$.

Очевидно, что невозмущенное движение автономной системы $\dot{x} = F(x)$ будет устойчиво равномерно по t_0, если оно устойчиво по Ляпунову .

Определение. *Невозмущенное движение* $x(t,t_0,0)=0, t \ge t_0$ *называется устойчивым равномерно по времени* t_0 *и начальным возмущениям* x_0 *из области* $D \times [t_0,\infty) \subseteq R^{n+1}$*, если оно асимптотически устойчиво и для любого числа* $\eta > 0$ *можно указать такое положительное число* $T(\eta) > 0$*, что выполняются соотношения:* $\| x(t,t_0,x_0) \| < \eta, t \ge t_0 + T(\eta)$*, для любого начального времени* $t_0 \ge 0$ *и начального возмущения* x_0 *из области* $D \times [t_0,\infty) \subseteq R^{n+1}$*.*

Следует отметить, что если система удовлетворяет теореме об асимптотической устойчивости, то она будет устойчивой равномерно по начальному времени t_0 и начальному возмущению x_0 .

Устойчивость в целом.

Определение. *Невозмущенное движение* $x(t,t_0,0)=0, t \ge t_0$ *называется асимптотически устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и для каждого решения* $x(t,t_0,x_0), t \ge t_0$ *выполнено условие* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t,t_0,x_0) = 0$ *(то есть область притяжения представляет собой все пространство* R^n*).*

Определение. *Будем говорить, что функция* $V(x,t)$ *допускает сильный бесконечно малый высший предел в* R^n *если существует функция* $w(x) \in C \subseteq R^n$*, такая, что* $|V(x,t)| \le w(x), w(0)=0$*, при* $(x,t) \in R^n \times [t_0,\infty)$*.*

Теорема Барбашина-Красовского */Демидович с248/. Если для системы* $\dot{x} = F(x,t)$ *существует положительно определенная функция* $V(x,t) \in C^1$*, допускающая сильный бесконечно малый высший предел при* $x \to 0$ *и бесконечно большой низший предел при* $x \to \infty$*, причем производная* $\dot{V}(x,t)$ *в силу системы* $\dot{x} = F(x,t)$ *отрицательно определена в* R^n*, то невозмущенное движение* $x(t,t_0,0)=0, t \ge t_0$ *асимптотически устойчиво в целом.*

Из теоремы Барбашина-Красовского следует, что асимптотическая устойчивость в целом равномерна по x_0 на любом компакте (ограниченном множестве).

Устойчивость систем с запаздыванием.

Непосредственный перенос 2-го метода Ляпунова для исследования систем с отклоняющимся аргументом встречает определенные трудности, так как теоремы этого метода для уравнений рассматриваемого типа не допускают обращения, то есть не для всякого устойчивого решения можно построить соответствующую функцию Ляпунова. Однако, определенная модификация функций Ляпунова, позволяет сделать эффективным этот метод и для уравнений с отклоняющимся аргументом. Академик Н.Н. Красовский предложил вместо функций Ляпунова рассматривать, обладающие аналогичными свойствами функционалы.

Рассмотрим векторную функцию $x(h)$ с компонентами $\{x_1(h), x_2(h),..., x_n(h)\}$, определенными на отрезке $-\tau \le h \le 0$. При каждом $t \ge t_0$ на векторных функциях $x(h)$ определяется функционал $V[x(h),t] = V[x_1(h),..., x_n(h),t]$.

Определение. *Функционал* $V[x(h),t]$ *называется определенно-положительным, если существует непрерывная функция* $\varphi(r)$*, такая, что* $\varphi(r) > 0$ *при* $r \ne 0$ *и* $V[x(h),t] \ge \varphi(\| x(h) \|)$ *.*

Следует отметить, что норма векторной функции $x(h)$ может быть взята в различных пространствах. Введем следующие обозначения: $\| x(h) \|_{\tau} = \sup\limits_{(-\tau\le h\le 0; i=1:n)} | x_i(h) |$;

$\| x(h) \|_{\tau 2} = [\int\limits_{-\tau}^{0} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(h) dh]^{1/2}$; $\| x(h) \|_0 = \sup\limits_{1\le i\le n} | x_i |$; $\| x(h) \|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$

U_ε - ε окрестность в метрике C_0 точки покоя $x_1 \equiv x_2 \equiv ... \equiv x_n \equiv 0$, S_ε - ε - сфера (граница множества U_ε).

Определение. *Функционал $V[x(h), t]$ имеет бесконечно малый высший пределе, если существует непрерывная функция $\varphi_1(r) > 0, \varphi_1(0) = 0$ такая, что $V[x(h), t] \ge \varphi_1(\| x(h) \|_\tau)$*

Теорема Красовского Н.Н. *(об асимптотической устойчивости /Красовский Н.Н. с155/). Тривиальное решение системы $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)),..., x(t-\tau_l(t)))$ равномерно асимптотически устойчиво, если существует непрерывный определенно-положительный функционал $V[x(h), t]$ при $t \ge t_0$ и $\| x(h) \|_\tau < H; H > 0$, допускающий бесконечно малый высший предел такой, что производная от $V[x_\Phi(t+h), t]$ по параметру t является определенно отрицательной. Здесь функция $x_\Phi(t+h)$ решение системы $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)),..., x(t-\tau_l(t)))$, определяемое начальной векторной функцией $\Phi(t)$, где $\| \Phi(t_0 + h) \|_\tau) < \delta$ и $\delta > 0$ достаточно мало.*

Замечание. Теорема Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости допускает обращение, то есть, если система уравнений $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)),..., x(t-\tau_l(t)))$ имеет равномерно асимптотически устойчивое тривиальное решение, то существует функционал $V[x(h), t]$, удовлетворяющий всем условиям теоремы об асимптотической устойчивости и условиям Липшица по первому аргументу: $| V[x_1(h), t] - V[x_2(h), t] | \le K \| x_2(h) - x_1(h) \|_\tau$.

Устойчивость линейной стационарной системы. Уравнение Ляпунова.

Методы доказательства теорем существования, к сожалению, не дают конструктивных приемов построения самих функций для прикладных задач. Единственным исключением является случай, когда возмущенное движение системы описывается уравнением $\dot{x} = Ax$.

Пусть задана квадратичная форма $w(x) = x^T Cx$. Для того, чтобы эта квадратичная форма была равна производной от квадратичной формы $V(x) = x^T Bx$, матрица B должна удовлетворять матричному уравнению $A^T B + BA = C$ /Ким т2 с133/. Действительно: $\dot{V}(x) = \dot{x}^T Bx + x^T B\dot{x} = x^T A^T Bx + x^T BAx = x^T (A^T B + BA)x$. Отсюда следует, что равенство $\dot{V}(x) = w(x)$ будет выполняться в том случае, если матрицы B, C удовлетворяют уравнению Ляпунова $A^T B + BA = C$.

Теорема (о существовании решения уравнения Ляпунова). *Если среди собственных значений λ_i матрицы A нет такой пары, сумма которых равна нулю, то есть $\lambda_i + \lambda_j \ne 0, i, j = 1,2,..., n$, то при любой симметрической матрице C уравнение Ляпунова имеет единственное решение для неизвестной матрицы B.*

Следствие 1. *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то какова бы ни была отрицательно определенная матрица C, уравнение*

Ляпунова имеет единственное решение B, которое является положительно определенной матрицей.

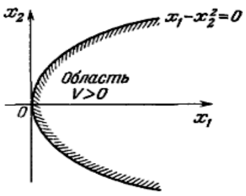
Следствие 2. *Если среди собственных значений матрицы A имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то какова бы ни была положительно определенная квадратичная форма $w(x) = x^T Cx$, всегда найдутся квадратичная форма $V(x) = x^T Bx$ и положительное число α такие, что производная $\dot{V}(x)$ в силу уравнения системы удовлетворяет соотношению $\dot{V}(x) = \alpha V(x) + w(x)$, и в любой окрестности начала координат найдется точка, в которой квадратичная форма $V(x)$ принимает положительное значение .*

Теоремы о неустойчивости.

Рассмотрим автономную систему, описываемую уравнением $\dot{x} = F(x), x \in R^n$.

Пусть вещественная непрерывная и однозначная функция $V(x)$ определена в области $x^T x \le c, c > 0$. Назовем поверхность $V(x) = 0$ границей области $V(x) > 0$. При этом будем предполагать, как и ранее, что $V(0) = 0$.

Пример. Границей области $V(x) > 0$ для функции $V(x) = x_1 - x_2^2$ будет парабола $x_1 = x_2^2$.



Теорема Ляпунова о неустойчивости движения */Меркин с51/. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения позволяют найти функцию $V(x)$, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопеределенной производной $\dot{V}(x)$ и могла бы принимать в окрестности нуля значения одного знака с $\dot{V}(x)$, то невозмущенное движение неустойчиво.*

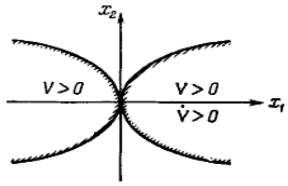
Обобщение данного утверждения было выполнено Четаевым, а именно он ослабил условия Ляпунова, налагаемые на производную $\dot{V}(x)$. В соответствии с утверждением, доказанным Четаевым, достаточно, чтобы производная $\dot{V}(x)$ была определенно-положительной не во всех точках окрестности нуля, а только в области $V(x) > 0$.

Теорема Четаева. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения позволяют найти функцию $V(x)$, для которой в сколь угодно малой окрестности нуля существует область $V(x) > 0$, и если производная $\dot{V}(x)$ функции $V(x)$, вычисленная в силу этих уравнений, положительна во всех точках области $V(x) > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Другое ослабление требований, налагаемых на производную $\dot{V}(x)$, содержится в следующей теореме.

Теорема Красовского о неустойчивости движения. *Если, для дифференциальных уравнений возмущенного движения $\dot{x} = F(x), x \in R^n$, можно найти функцию $V(x)$ такую, что ее производная $\dot{V}(x)$ удовлетворяет условиям: $\dot{V}(x) > 0$ вне K и, $\dot{V}(x) = 0$ на K, где K - многообразие точек, не содержащих целых траекторий при $t \ge 0$. И, если, при этом, можно указать точки, лежащие в* *произвольной окрестности начала координат, такие, что в них $V(x) > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Пример. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид $\dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_2^5$, $\dot{x}_2 = x_1 x_2^2$. Покажем, что невозмущенное движение неустойчиво. Построим функцию $V(x) = x_1^2 - x_2^4$. Эта функция имеет область $V(x) > 0$, состоящую из двух частей, ограниченных параболами $x_1 = x_2^2$ и $x_1 = -x_2^2$. Вычислим производную $\dot{V}(x)$ в силу уравнений возмущенного движения $\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 - 4x_2^3\dot{x}_2 = 2x_1^3$. Так как эта производная положительна при всех $x_1 > 0$ и любом x_2, то в правой части области $V(x) > 0$ выполнены все условия теоремы Четаева и, следовательно, невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво.



Заметим, что выбранная функция $V(x)$ не удовлетворяет, при этом, условиям теорем Ляпунова и Красовского, так как производная $\dot{V}(x)$ меняет знак при изменении знака x_1 .

<u>Методы построения функции Ляпунова.</u>

***Метод преобразования координат** /Меркин с53/.*

Если для данных уравнений возмущенного движения трудно найти функцию Ляпунова, то часто переходом к новым координатам уравнения удается привести к такой форме, для которой соответствующая функция находится сравнительно просто. В качестве преобразования к новым координатам, прежде всего, следует испробовать линейное преобразование с постоянными коэффициентами.

Пример. Рассмотрим уравнения возмущенного движения $\dot{x} = Ax + F(x)$, где нелинейный член содержит переменные $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в степени выше первой. Если среди собственных значений матрицы A нет равных, то, как известно, всегда существует неособенное преобразование $z_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} x_j, k = 1,2,...n$

приводящее матрицу A к диагональному виду. То есть систему можно записать в виде $\dot{z} = \Lambda z + \overline{F}(z)$, где нелинейный член содержит канонические переменные z_k в степени выше первой. Пусть среди корней имеются две пары комплексно-сопряженных собственных значений: $\lambda_1 = v_1 + i\mu_1$, $\lambda_2 = v_1 - i\mu_1$, $\lambda_3 = v_2 + i\mu_2$, $\lambda_4 = v_2 - i\mu_2$. Остальные корни $\lambda_5, \lambda_6, ..., \lambda_n$ будут вещественные. Очевидно, что комплексным значениям будут отвечать комплексно-сопряженные канонические переменные $z_1 = u_1 + iw_1$, $z_2 = u_1 - iw_1$, $z_3 = u_2 + iw_2$, $z_4 = u_2 - iw_2$. Составим функцию Ляпунова в следующем виде: $V(z) = \frac{1}{2}(z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5^2 + ... + z_n^2)$. Очевидно, что функция $V(z)$ является определенно-положительной.

Вычислим производную $\dot{V}(z) = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 z_2 + z_1 \dot{z}_2 + \dot{z}_3 z_4 + z_3 \dot{z}_4) + z_5 \dot{z}_5 + ... + z_n \dot{z}_n$. Внесем в полученное соотношение значения $\dot{z}_k$. Тогда можно записать следующее равенство:

$\dot{V}(z) = v_1(u_1^2 + w_1^2) + v_2(u_2^2 + v_2^2) + \lambda_5 z_5^2 + ... + \lambda_n z_n^2 + Z$, где Z - совокупность членов, содержащих $(z_1, z_2, ..., z_n)$ в степени выше второй. Если линеаризованная система $\dot{x} = Ax$ является устойчивой, то производная $\dot{V}(z)$ будет определенно-отрицательной функцией переменных $u_1, w_1, u_2, w_2, z_5, ..., z_n$ в достаточно малой окрестности нуля. Таким образом, выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Метод неопределенных коэффициентов.

Будем искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами $V(x) = \frac{1}{2}x^T Cx$, где $C = \{c_{ij}\}, i, j = 1,..., n, c_{ij} = c_{ji}$. Число коэффициентов матрицы C равно $\frac{n(n+1)}{2}$. Подчиним коэффициенты матрицы C условиям критерия Сильвестра (всего n условий). Тогда, после этого, останется $\frac{n(n-1)}{2}$ степеней свободы для выбора коэффициентов, при выполнении которых невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. Заметим, что, так как от умножения на постоянное положительное число свойства функции $V(x)$ не изменяются, то обычно один из коэффициентов матрицы C полагают равным единице.

Пример. Пусть заданы уравнения возмущенного движения: $\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2^2$, $\dot{x}_2 = cx_1x_2 + dx_2^3$. Требуется определить область параметров системы a, b, c, d, в которой невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ было бы асимптотически устойчиво. Будем искать функцию $V(x)$ в следующем виде: $V(x) = \frac{1}{2}(\lambda x_1^2 + 2\mu x_1x_2 + x_2^2)$, где λ, μ - искомые коэффициенты. Критерий Сильвестра позволяет записать следующие ограничения: $\Delta_1 = \lambda > 0$, $\Delta_2 = \lambda - \mu^2 > 0$. Вычислим производную $\dot{V}(x)$. Тогда можно записать следующее соотношение: $\dot{V}(x) = (\lambda x_1 + \mu x_2)(ax_1 + bx_2^2) + (\mu x_1 + x_2)(cx_1x_2 + dx_2^3)$. Данная функция при $\mu \neq 0$ является знакопеременной. Поэтому положим $\mu = 0$. Отсюда получим $\dot{V}(x) = \lambda ax_1^2 + (\lambda b + c)x_1x_2^2 + dx_2^4$. Выберем коэффициент $\lambda > 0$ так, чтобы эта квадратичная форма была определенно-отрицательной. Анализ показывает, что это будет выполняться при условиях $a < 0, d < 0, bc < ad$. При этом $\mu = 0$, а $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, где λ_1, λ_2 корни левой части неравенства $b^2\lambda^2 + 2(bc - 2ad)\lambda + c^2 < 0$.

Метод связки интегралов Четаева (энергетический подход).

Предположим, что уравнение возмущенного движения $\dot{x} = F(x), x \in R^n$ допускает интеграл $J(x) = h = const$, для которого разность $J(x) - J(0)$ является определенно-положительной функцией фазовых переменных $x \in R^n$. Тогда в качестве функции Ляпунова можно взять функцию $V(x) = J(x) - J(0)$. Действительно, производная $\dot{V}(x)$ в силу уравнения $\dot{x} = F(x)$ согласно интегралу $J(x) = h$ тождественно равна нулю и, следовательно, эта функция будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

В некоторых случаях уравнение $\dot{x} = F(x)$ допускает несколько интегралов: $J_1(x) = h_1$.., $J_m(x) = h_m$. Причем ни один из них не является определенно-положительной функцией. Для такого случая Н.Г. Четаев предложил искать функцию $V(x)$ в форме связки интегралов:

$$V(x) = \lambda_1[J_1(x) - J_1(0)\} + ... + \lambda_m[J_m(x) - J_m(0)] + \mu_1[J_1^2(x) - J_1^2(0)] + ... + \mu_m[J_m^2(x) - J_m^2(0)]$$

. Здесь величины λ_i, μ_i некоторые постоянные, которые подбирают таким образом, чтобы функция $V(x)$ была определенно-положительной. Очевидно, что в этом случае функция $V(x)$ будет удовлетворять теореме Ляпунова об устойчивости.

Часто функцию $V(x)$ удается построить, когда все величины $\mu_i = 0$. Во многих случаях интегралы уравнений можно построить из общих соображений на основе общих теорем механики.

***Метод разделения переменных** /Ким т2 с143/.*

Данный метод был предложен Е.А. Барбашиным и заключается в поиске функции Ляпунова среди функций, которые сами, как и их производные по времени, представляют сумму функций, каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной: $V(x) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x_i)$, $\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x_i)$.

Метод Лурье-Постникова.

Данный метод, в основном, используется при решении задач об устойчивости нелинейных систем, содержащих одну статическую нелинейность $\sigma = f(e)$. В качестве кандидата на функцию Ляпунова обычно рассматривается сумма из квадратичной формы и интеграла от нелинейной функции, то есть: $V(x) = x^t Bx + \int_0^e f(\tau)d\tau$. Обычно, предполагается, что $e = C^T x$.

Метод Красовского.

Этот метод заключается в поиске функции Ляпунова в виде квадратичной формы $V(x) = (F(x))^T BF(x)$ при решении задачи об устойчивости автономной системы, описываемой уравнением $\dot{x} = F(x), x \in R^n$.

Пример. Рассмотрим систему: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -ax_1 - \varphi(x_2)$, где $a > 0, \varphi(0) = 0$. Выберем следующую матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$. Тогда $V(x) = b_{11}x_2^2 + b_{22}[-ax_1 - \varphi(x_2)]^2$. Соответственно получим $\dot{V}(x) = 2[ax_1 + \varphi(x_2)](b_{22}a - b_{11})x_2 - 2b_{22}\dfrac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}[ax_1 + \varphi(x_2)]^2$. Положим, что $b_{11} = a$ и $b_{22} = 1$. Отсюда получим следующее соотношения $V(x) = ax_2^2 + [ax_1 + \varphi(x_2)]^2$, $\dot{V}(x) = -2\dfrac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}[ax_1 + \varphi(x_2)]^2$. Очевидно, что $V(x)$ является положительно определенной функцией и $V(x) \underset{\|x\|\to\infty}{\to} \infty$. Если выполняется условие $\dfrac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2} > 0$ при $x_2 \neq 0$, то $\dot{V}(x)$ является отрицательно полуопределенной и обращается в нуль на многообразии $\sigma(x) = ax_1 + \varphi(x_2) = 0$. Фазовый поток пересекается с данным многообразием трансверсально вне начала координат, так как $grad\{\sigma(x)\}F(x)|_{\sigma(x)=0} = ax_2 \neq 0$. Поэтому по теореме Барабашина-Красовского положение равновесия рассматриваемой системы будет асимптотически устойчиво в целом.

Экспоненциальная устойчивость.

Пусть система описывается уравнениями $\dot{x} = F(t,x); F = (f_1,..., f_n)^T; F(0,t) = 0; t \geq t_0; x \in R^n$, где $F(t,x)$ - является гладкой функцией, непрерывно дифференцируемой в области $\| x \| < \rho;\ 0 < t < \infty$ ($\rho = const$ или $\rho = \infty$); частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ удовлетворяют условию $|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}| < L;\ i, j = 1:n;\ L = const$. Будем обозначать решение уравнения при начальном условии $x(t_0) = x^0$ как $x(x^0, t)$.

Определение. *Положение равновесия* $x(t)\equiv 0;\forall t\geq t_0$ *системы* $\dot{x}=F(t,x)$ *называется экспоненциально устойчивым, если существуют такие положительные постоянные* α *и* M, *что при* $\|x^0\|<\rho/M$ *возмущенное движение* $x(x^0,t)$ *удовлетворяет условию* $\|x(x^0,t)\|\leq M\|x^0\|e^{-\alpha(t-t_0)};\forall t\geq t_0$.
Если данное условие выполняется при любых начальных условиях, то положение равновесия системы называется глобально экспоненциально устойчивым или экспоненциально устойчивым в целом.

Теорема об экспоненциальной устойчивости Красовского */Ким т2 с203/. Если положение равновесия системы* $\dot{x}=F(t,x)$ *экспоненциально устойчиво, то существует функция Ляпунова* $V(t,x)$ *и положительные постоянные* $C_i\,(i=1,2,3,4)$ *такие, что выполняются неравенства*

$$C_1\|x\|^2\leq V(t,x)\leq C_2\|x\|^2;\ \dot{V}(t,x)=w(t,x)\leq -C_3\|x\|^2;\ \left\|\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\|\leq C_4\|x\|.$$

Следствие. *Если линейная стационарная система* $\dot{x}=Ax$ *устойчива, а положительно определенная квадратичная форма* $V(x)=x^TBx$ *является ее функцией Ляпунова и производная от нее по времени в силу уравнения системы принимает вид* $\dot{V}(x)=w(x)=-x^TDx$, *то в качестве констант* $C_i\,(i=1,2,3,4)$ *можно принять* $C_1=\lambda_m^B;\ C_2=\lambda_M^B;\ C_3=\lambda_m^D;\ C_4=\lambda_M^D$, *где* λ_m^B, λ_M^B *- минимальное и максимальное собственные значения матрицы* B; λ_m^D, λ_M^D *- минимальное и максимальное собственные значения матрицы* D. *То есть функция Ляпунова* $V(x)$ *удовлетворяет следующим соотношениям* $\lambda_m^B\|x\|^2\leq V(x)\leq\lambda_M^B\|x\|^2$;

$$\dot{V}(x)=w(x)\leq -\lambda_m^D\|x\|^2;\ \left\|\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\|\leq 2\lambda_M^B\|x\|.$$

Контрольные вопросы к лекции 5.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Функция Ляпунова $V(x,t);t\geq t_0;x\in D;x=0\in D$ допускает бесконечно малый высший предел, если существует такая функция …	1. … $w(t)$ для любого $t\geq t_0$, что $\lvert V(x,t)\rvert\leq w(t)$ и $w(t_0)=0$. 2. … $w(x);\forall x\in D$, что $\lvert V(x,t)\rvert\leq w(x);\forall t\geq t_0$ и $w(0)=0$. 3. … $w(x,t);\forall x\in D;\forall t\geq t_0$, что $\lvert V(x,t)\rvert\leq w(x,t);\forall t\geq t_0$ и $w(x,0)=0;\forall x\in D$.
2	Квадратичная форма x^TQx, где Q - симметричная матрица, будет определенно положительной, если …	1. … все вещественные корни характеристического уравнения $\det(\lambda E-Q)=0$ строго больше нуля. 2. … все определители $\Delta_k=\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1k}\\ . & \cdots & .\\ q_{k1} & \cdots & q_{kk}\end{pmatrix};k=1,2,\ldots,n$ будут строго отрицательны. 3. … все нечетные определители

		$\Delta_k = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1k} \\ . & \dots & . \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} \end{pmatrix}; k = 1,2,\dots,n$ будут строго отрицательными, а четные – положительными . 4. … все комплексные корни характеристического уравнения $\det(\lambda E - Q) = 0$ будут иметь строго положительные вещественные части.
3.	Если существует функция Ляпунова $V(x) = x_1^2 + (x_2 - x_3)^2$, такая, что $\dot{V}(x) < 0; \forall x \in D; x = 0 \in D$ для исследуемой 3-мерной системы, то будет ли система асимптотически устойчивой в целом?	1. Да, будет. 2. Нет, не будет. 3. Будет, если многообразие $x_2 = x_3$ является интегральным многообразием исследуемой системы. 3. Будет, если многообразие $x_2 = x_3$ не является интегральным многообразием исследуемой системы.
4	Пусть $x_\varphi(t)$ решение системы $\dot{x} = F(x, x(t-\tau), t); \tau > 0; x(t) \equiv \varphi(t); t \in [t_0 - \tau, t_0]$, где непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t) \in \Phi$. Система $\dot{x} = F(x, x(t-\tau))$ будет асимптотически устойчивой, если существует…	1. … такой функционал $V(x_\varphi(t), t) > 0; t \geq t_0$, допускающий бесконечно малый высший предел, что $\dot{V}(x_\varphi(t), t) < 0; t \geq t_0$ в силу уравнений системы для $\forall \varphi \in \Phi$. 2. … такой функционал $V(\varphi(t), t) > 0; t \geq t_0 - \tau$, допускающий бесконечно малый высший предел, что $\dot{V}(\varphi(t), t) < 0; t \geq t_0 - \tau$ для $\forall \varphi \in \Phi$ 3. … такой функционал $V(x_\varphi(t), t) > 0; t \geq t_0 - \tau$, допускающий бесконечно малый высший предел, что $\dot{V}(x_\varphi(t), t) < 0; t \geq t_0 - \tau$ в силу уравнений системы для $\forall \varphi \in \Phi$.
5	Если линейная стационарная система $\dot{x} = Ax$ асимптотически устойчива, то…	1. … матрица A имеет вещественные, строго отрицательные, собственные значения. 2. … существует такая положительно определенная матрица $B > 0$, которая является решением матричного уравнения $A^T B + BA = -C$, где матрица C также является положительно определенной. 3. … существует такая положительно определенная матрица $C > 0$, что $C = -A^T BA$.
6	Если для исследуемой системы существует функция $V(x) > 0$ в сколь угодно малой окрестности нуля, такая, что $\dot{V}(x) > 0$ в силу уравнений движения системы во всех точках, где $V(x) > 0$, то такое движение системы будет …	1. … устойчивым. 2. … неустойчивым. 3. … асимптотически устойчивым. 4. … устойчивым, но не асимптотически устойчивым в целом.
7	Для системы 2 –го порядка методом неопределенных коэффициентов была построена функция Ляпунова вида $V(x) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + x_2^2$, которая в силу уравнений движений системы имеет производную $\dot{V}(x) = -b_{11}x_1^2 - b_{12}x_2 + (2b_{11} - 1)x_1x_2 - 4x_2^2$.	1. $b_{11} > 0; b_{12} > 0;$ 2. $b_{12}^2 < b_{11} < 0.5; b_{12} > 0;$ 3. $b_{11} = 0.5; b_{12} = 0;$ 4. $b_{11} > 0.5; b_{12} > 0;$

	Определить условия на коэффициенты b_{11}, b_{12}, b_{22}, при которых система будет асимптотически устойчивой.	
8	Задано скалярное дифференциальное уравнение $\dot{x} = ax + f(x);\ f(0) = 0$, где $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Условие асимптотической устойчивости для данного уравнения имеет вид …	1. … $f(x)\dot{x} < 0$. 2. … $\frac{df(x)}{dx} < 0$. 3. … $\frac{df(x)}{dx} < -a$. 4. … $\dot{x} < -\frac{f(x)}{a}$