## Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

## Лекция 11. Метод множителей Лагранжа. Принцип максимума. Динамическое программирование.

Общая постановка задачи оптимального управления. Классификация задач оптимального управления и их преобразования. Метод множителей Лагранжа. Принцип максимума Понтрягина. Задача максимального быстродействия. Теорема об n интервалах. Вырожденные и особые задачи оптимального управления. Метод динамического программирование. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана.

### Общая постановка задачи оптимального управления.

Пусть уравнение объекта задается в нормальной форме $\dot{x} = F(x,u,t)$, где $x \in R^n; u \in R^m$. На вектор управления и фазовый вектор могут быть наложены ограничения в виде конечных соотношений – равенств и неравенств: $u(t) \in U_t \subseteq R^m$ и $x(t) \in X_t \subseteq R^n$. Краевые (граничные) условия также могут быть представлены в виде соответствующих включений: $x(t_0) \in X_0, x(t_f) \in X_f$. Критерий оптимальности обычно задается в виде функционала $J = J[x(t_0), x(t_f), u(t), x(t)]$. Задача оптимального управления обычно формулируется следующим образом: при заданном уравнении объекта $\dot{x} = F(x,u,t)$, ограничениях на управление $u(t) \in U_t \subseteq R^m$ и фазовый вектор $x(t) \in X_t \subseteq R^n$, а также краевых условиях $x(t_0) \in X_0, x(t_f) \in X_f$, определить такое программное управление $u^*(t)$ или управление с обратной связью $u^*(x(t),t)$ и, найти фазовую траекторию $x^*(t)$, при которых критерий оптимальности $J = J[x(t_0), x(t_f), u(t), x(t)]$ принимает минимальное (или максимальное) значение. Управления $u^*(t)$ и $u^*(x(t),t)$ называются оптимальными управлениями, а траектория $x^*(t)$ - оптимальной траекторией.

*Пример.* Рассмотрим задачу поворота вала двигателя на заданный угол за минимальное время. Уравнения объекта (двигателя) можно записать, в приведенной форме, в виде $\dot{x} = Ax + Bu + q_c$, где $A \in R^{2*2}; B, q_c \in R^{2*1}$. Сила тока в якорной цепи двигателя ограничена. Поэтому имеет место ограничение $|u| \le u_m$. Краевые условия имеют вид $x(t_0) = \bar{x}_0$; $x(t_f) = \bar{x}_f$. Тогда задача управления сводится к поиску такого управления, при заданных на него ограничениях и заданных краевых условиях, при котором функционал $J = t_f - t_0$ примет минимальное значение.

### Классификация задач оптимального управления и их преобразования.

Задачи оптимального управления, в основном различают, по виду ограничений и краевых условий, по виду времени начала и окончания процесса управления, по типу критерия оптимальности /Ким т2 с280/.

*По виду ограничений* различают следующие задачи:

- задачи классического типа, когда ограничения задаются в виде равенств $\varphi_k(x,u,t) = 0; k = 1,2,..r$;
- задачи неклассического типа, когда среди ограничений имеются неравенства, то есть $\varphi_k(x,u,t) \le 0; k = 1,2,..r$.

К классическому типу относятся также задачи с ограничениями вида $\int_{t_0}^{t_f} f_{n+j}(x,u,t)dt = b_j; j = 1,2,..l$.

Задачи с такими ограничениями называются изопериметрическими задачами. Если ввести дополнительные переменные и краевые условия, то от таких ограничений можно избавиться:

$\dot{x}_{n+j} = f_{n+j}(x,u,t); x_{n+j}(t_0) = 0; x_{n+j}(t_f) = b_j; j = 1,2,\dots,l$ . Ограничения типа $\varphi_k(x,u,t) \le 0; k = 1,2,...r$ можно заменить ограничениями вида $\varphi_k(x,u,t) + u_{m+k}^2 = 0; k = 1,2,..r$ . Иногда задачи оптимального управления неклассического типа могут иметь ограничения вида $\int_{t_0}^{t_f} f_{n+s}(x,u,t)dt \le C_s; s = 1,2,\dots p$ . Введением дополнительных переменных эти ограничения могут быть заменены соотношениями $\dot{x}_{n+s} = f_{n+s}(x,u,t); x_{n+s}(t_0) = 0; x_{n+s}(t_f) = C_s; s = 1,2,\dots,p$ .

*По виду краевых условий* различают:

- задачи с фиксированными (закрепленными) концами, когда каждое из множеств $X_0$ и $X_f$ состоит из одной точки, то есть все фазовые координаты в начальный и конечный моменты заданы ;
- задачи с подвижным правым концом (когда $X_f$ состоит из более чем одной точки), с подвижным левым концом (когда $X_0$ состоит из более, чем одной точки), с подвижными концами (когда $X_0$ и $X_f$ состоят из более, чем одной точки каждое) .

*По времени начала и окончания процесса* различают:

- задачи с фиксированным временем, когда начальный $t_0$ и конечный $t_f$ моменты времени фиксированы;
- задачи с нефиксированным временем, когда хотя бы один из моментов времени $t_0$ или $t_f$ не фиксирован.

*По критерию оптимальности* различают: задачу Больца

$$J = q_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} g_0(x,u,t)dt \ ;$$

задачу Лагранжа - $J = \int_{t_0}^{t_f} g_0(x,u,t)dt$ ;

задачу Майера - $J = q_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f]$.

Задача Майера, в частном случае, когда функционал имеет вид: $J = q_0[x(t_f), t_f]$ , называется задачей терминального управления, а когда функционал имеет $J = t_f - t_0$ - то называется задачей максимального быстродействия. Задачи Больца, Лагранжа и Майера являются эквивалентными в том смысле, что путем преобразования переменных каждую из задач можно преобразовать в любую другую задачу.

## Метод множителей Лагранжа.

Задачу оптимального управления в смысле Лагранжа с фиксированными концами можно сформулировать следующим образом. Пусть заданы уравнения объекта с ограничениями и краевыми условиями: $\dot{x} = F(x,u,t)$ , где $x \in R^n; u \in R^m$; $\varphi_k(x,u,t) = 0; k = 1,2,..r$;

$x(t_0) = \bar{x}_0, x(t_f) = \bar{x}_f$ . Критерий оптимальности имеет вид: $J = \int_{t_0}^{t_f} g_0(x,u,t)dt \to \min$ . Пусть функции $f_i(x,u,t); F = (f_1,...f_n)^T$ и $\varphi_k(x,u,t)$ являются непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам. Управление $u(t)$ принадлежит классу кусочно - непрерывных функций, а траектории $x(t)$ - классу кусочно – гладких функций. Тогда будем называть пару $(u(t), x(t))$ допустимой, если функции $u(t)$ и $x(t)$ принадлежат к классам допустимых функций.

***Уравнение Эйлера-Лагранжа.***

Рассмотрим усложненную задачу Лагранжа классического вариационного исчисления, в которой на аргументы функционала, помимо краевых условий, наложены дополнительные ограничения (связи).

$\Phi_i(z,\dot{z},t)=0; i=1,2,\ldots,p$ ; $\varphi_k(z,t)=0; k=1,2,..l$ ; $z(t_0)=z^0$; $z(t_f)=z^f$; $J=\int\limits_{t_0}^{t_f}\Phi_0(z,\dot{z},t)dt\to extr$.

Здесь $z$ - вектор размера $s$; $\Phi_i; i=0,1,\ldots,p$; $\varphi_k; k=1,2,..l$ - дифференцируемые по всем своим аргументам функции. Составим функцию следующего вида:

$L(z,\dot{z},\psi,\lambda,t)=\sum\limits_{i=1}^{p}\psi_i\Phi_i+\sum\limits_{k=1}^{l}\lambda_k\varphi_k+\psi_0\Phi_0$, где $\psi_i; i=0,1,\ldots,p$ - функции времени; $\lambda_k; k=1,2,..l$ и $\psi_0$ - константы. Функция $L(z,\dot{z},\psi,\lambda,t)$ называется функцией Лагранжа, а функции $\psi_i; i=0,1,\ldots,p$ и константы $\lambda_k; k=1,2,..l$ и $\psi_0$ множителями Лагранжа. Применение множителей Лагранжа позволяет усложненную задачу Лагранжа привести к стандартной задаче вариационного исчисления: $\tilde{J}=\int\limits_{t_0}^{t_f}L(z,\dot{z},\psi,\lambda,t)dt\to extr$; $z(t_0)=z^0$; $z(t_f)=z^f$, где

$\psi=(\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_p)^T; \lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)^T$. Оптимизационная задача имеет смысл, если множители Лагранжа не равны тождественно одновременно нулю. Если $\psi_0\equiv 0$, то решение не зависит от исходного функционала $J$. Такой случай называют особым.

Уравнения Эйлера для преобразованной задачи примут следующий вид:

$L'_{z_i}-\frac{d}{dt}L'_{\dot{z}_i}=0; i=1,2,\ldots,s$; $L'_{\psi_j}=0; j=1,2,\ldots,p$; $L'_{\lambda_k}=0; k=1,2,\ldots,l$. Так как уравнения $L'_{\psi_j}=0; j=1,2,\ldots,p$ и $L'_{\lambda_k}=0; k=1,2,\ldots,l$ совпадают с уравнениями $\Phi_i(z,\dot{z},t)=0; i=1,2,\ldots,p$ и $\varphi_k(z,t)=0; k=1,2,..l$, то достаточно рассматривать для поиска экстремали уравнения $L'_{z_i}-\frac{d}{dt}L'_{\dot{z}_i}=0; i=1,2,\ldots,s$. Данные уравнения часто называют уравнениями Эйлера – Лагранжа.

***Правило множителей Лагранжа для задач с фиксированными концами.***

Приведем задачу Лагранжа оптимального управления с фиксированными концами к следующему виду: $f_i(x,u,t)-\dot{x}_i=0; i=1,2,\ldots,n$ ; $\varphi_k(x,u,t)=0; k=1,2,..r$; $x_i(t_0)=x_i^0, x_i(t_f)=x_i^f; i=1,2,\ldots,n$;

$J=\int\limits_{t_0}^{t_f}g_0(x,u,t)dt\to\min$. Составим функцию Лагранжа $L=\psi_0 g_0+\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_i(f_i-\dot{x}_i)+\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k\varphi_k$. То есть роль аргумента $z$ выполняет вектор $(x,u)$. Так как функционал $L$ не зависит от $\dot{u}_j$, то уравнения Эйлера – Лагранжа имеют, в этом случае, вид: $L'_{x_i}-\frac{d}{dt}L'_{\dot{x}_i}=0; i=1,2,\ldots,n$;

$L'_{u_j} = 0; j = 1,2,\ldots,m$. Уравнения Эйлера – Лагранжа можно получить также с помощью функции $H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k$; $f_0 \equiv g_0$, которая называется функцией Гамильтона или гамильтонианом. Так как гамильтониан связан с функцией Лагранжа соотношением: $L = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i$, то уравнения Эйлера – Лагранжа принимают вид: $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1,2,\ldots,n$; $\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0; j = 1,2,\ldots,m$. Полученные уравнения называют также условиями стационарности, так как они представляют собой условия экстремума гамильтониана при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_f]$.

Уравнения Эйлера – Лагранжа являются необходимым условием: любое решение задачи оптимального управления является экстремалью, то есть удовлетворяет уравнениям Эйлера – Лагранжа. Но не любая экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, является решением задачи оптимального управления. Но если решение задачи существует и экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, единственна, то такая экстремаль будет являться решением задачи оптимального управления.

***Условия Вейерштрасса-Эрдмана.***

Уравнения Эйлера – Лагранжа получены при условии, что управление $u(t)$ является непрерывной функцией, а траектория $x(t)$ гладкая на интервале $[t_0, t_f]$. Можно, однако, показать, что правило множителей Лагранжа остается справедливым и в том случае, когда управление $u(t)$ принадлежит классу кусочно - непрерывных функций, а траектории $x(t)$ - классу кусочно – гладких функций. Тогда, в точках разрыва управления, должны выполняться условия, называемые условиями <u>Вейерштрасса – Эрдмана:</u> $\psi^- = \psi^+; H^- = H^+$, где индексы - и + обозначают левый и правый пределы соответствующих функций.

Множители Лагранжа определяются с точностью до постоянного множителя. Поэтому обычно принимают множитель $\psi_0 = -1$ (для неособых задач оптимизации) для интегральной функции критерия оптимальности.

*Пример.* Решим задачу поворота вала двигателя на угол 1 рад за 10 с при минимальном расходе энергии с последующей остановкой. Моментом сопротивления $q_c$ можно пренебречь. Тогда формальная постановка задачи оптимального управления примет вид: $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = u$; $x_1(0) = x_2(0) = 0$; $x_1(10) = 1; x_2(10) = 0$; $J = \int_{t_0}^{10} u^2 dt \to \min$. Составим гамильтониан (принимая $\psi_0 = -1$): $H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Уравнения Эйлера – Лагранжа тогда имеют следующий вид: $\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$; $\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1$; $\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 = 0$.

Решение полученной системы имеет вид $\psi_1 = C_1; \psi_2 = -C_1 t + C_2; u = \frac{-C_1 t + C_2}{2}$. Подставим полученное выражение для управления в уравнения объекта и решим их: $x_2 = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_2 t}{2} + C_3; x_1 = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_2 t^2}{4} + C_3 t + C_4$.

Из краевых условиях находим $C_1 = 3/125; C_2 = 3/25; C_3 = C_4 = 0$.

***Правило множителей Лагранжа для задач с подвижными концами.***

Рассмотрим задачу оптимального управления с подвижными концами и фиксированным временем классического типа, то есть в этом случае задача оптимального управления может быть вариационной задачей, или Лагранжа, или Больца, или Майера. Однако, когда концы закреплены и время фиксировано, задача оптимального управления может быть только задачей Лагранжа.

Рассмотрим вариационную задачу с подвижными концами и фиксированным временем: $J = q_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x, \dot{x}, t)dt$. Принимается, что функции $q_0, f_0$ непрерывны и дифференцируемы по всем своим аргументам. При этом, будем предполагать, что $x(t)$ принадлежит к классу гладких функций. Пусть экстремум достигается на функции $x^*(t)$. При произвольной фиксированной функции $\tilde{x}(t)$ функционал:

$J = q_0[x^*(t_0) + \varepsilon\tilde{x}(t_0), x^*(t_f) + \varepsilon\tilde{x}(t_f)] + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x^* + \varepsilon\tilde{x}, \dot{x} + \varepsilon\dot{\tilde{x}}, t)dt = \Phi(\varepsilon)$, является функцией от числового аргумента $\varepsilon$. Отсюда можно получить следующие условия оптимальности, которые называются условиями трансверсальности: $f'_{0,\dot{x}}\,|_{t=t_0} = \frac{\partial q_0}{\partial x}\,|_{t=t_0}$; $f'_{0,\dot{x}}\,|_{t=t_f} = -\frac{\partial q_0}{\partial x}\,|_{t=t_f}$. Итак, решение вариационной задачи с подвижными концами, кроме уравнений Эйлера - Лагранжа, должно удовлетворять условиям трансверсальности.

Найдем необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления с подвижными концами: $f_i(x,u,t) - \dot{x}_i = 0; i = 1,2,\ldots,n$; $\varphi_k(x,u,t) = 0; k = 1,2,..r$. Граничные условия для решения этой системы уравнений порядка $n$, включая условия трансверсальности, представляет собой $2n$ соотношений, которые позволяют определить все постоянные интегрирования. Данные граничные условия можно записать в виде равенств $q_j[x(t_0), x(t_f)] = 0; j = 1,2,....s \le 2n$, где функции $q_j$ предполагаются непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргумента. Тогда исходную задачу можно преобразовать в простейшую задачу Больца: $\tilde{J} = Q[x(t_0), x(t_f), v] + \int\limits_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \psi, \lambda, t)dt \to \min$, где

$Q = \sum\limits_{i=0}^{s} v_i q_i; v_0 = \psi_0$; $L = \psi_0 f_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i(f_i - \dot{x}_i) + \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k = H - \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i$. Функцию $Q$ называют терминантом. Условия трансверсальности тогда можно записать в виде

$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(t_f) = \frac{\partial Q}{\partial x_i(t_f)}; i = 1,2,\ldots,n$.

*Пример.* Решим задачу поворота вала двигателя на угол 1 рад за 10 с при минимальном расходе энергии без последующей остановки. Моментом сопротивления $q_c$ можно пренебречь. Тогда формальная постановка задачи оптимального управления примет вид: $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = u$; $x_1(0) = x_2(0) = 0$; $x_1(10) = 1; x_2(10) = 0$;

$J = \int\limits_{t_0}^{10} u^2 dt \to \min$. Составим гамильтониан (принимая $\psi_0 = -1$): $H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$.

Уравнения Эйлера – Лагранжа тогда имеют следующий вид: $\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$; $\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1$;

$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 = 0$ . Решение полученной системы имеет вид $\psi_1 = C_1; \psi_2 = -C_1 t + C_2; u = \frac{-C_1 t + C_2}{2}$ . В данном случае нефиксированной является только координата $x_2(10)$ . Условие трансверсальности принимает вид $\psi_2(10) = \frac{\partial q_0}{\partial x_2}|_{t=10} = 0$ . Отсюда получим $C_2 = 10C_1$. Соответственно для управления получаем $u = C_1(10-t)/2$ . Подставляя полученное выражение в уравнения объекта и, решая их, получим $x_2 = \frac{C_1}{4}(20t - t^2) + C_3$ ; $x_1 = \frac{C_1}{4}(10t^2 - \frac{t^3}{3}) + C_3 t + C_4$ . Учитывая краевые условия получим: $C_4 = 0; C_3 = 0; C_1 = 3/500$ . Отсюда находим, что $u^*(t) = 0.003(10-t)$ ; $x_1^*(t) = 0.0005(30t^2 - t^3)$ ; $x_2^*(t) = 0.0015(20t - t^2)$ .

**Принцип максимума Понтрягина.**

В прикладных задачах на управление обычно накладываются ограничения в виде включения в некоторое допустимое множество. Такие ограничения обычно можно записать в виде неравенств. В этом случае применение метода множителей Лагранжа является неэффективным, так как с его помощью нельзя оценить число и координаты точек разрыва функции управления.

***Задача с закрепленными концами и фиксированным временем.***

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: $\dot{x}_i = f_i(x,u,t) = 0; i = 1,2,\ldots,n$ ; $u \in U \subseteq R^m$ ; $x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1,2,\ldots,n$ ; $J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt \to \min$ . Будем предполагать, что функции $f_i$ непрерывны по совокупности переменных $x,u,t$ и непрерывно дифференцируемы по переменным $x,t$ . Отличие от задачи оптимального управления классического вариационного типа состоит в том, что ограничение на управление задается в виде включения $u \in U$ . То есть не требуется гладкость функций $f_i$ по переменной $u$ . Таким образом, допустимыми управлениями считаются функции, принадлежащие к классу кусочно – непрерывных функций. В этом случае допустимые траектории системы $x(t)$ не будут непрерывны всюду на интервале $[t_0, t_f]$ , а их производные могут иметь разрывы 1-го рода в точках разрыва управления.

Построим следующую функцию Лагранжа и гамильтониан:

$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f_i - \dot{x}_i) = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i$ , где $H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i$ . В данном случае, функция Лагранжа и гамильтониан не включают в себя ограничения на управление. Примем, как и ранее, что $\psi_0 = -1$ . Тогда исходную задачу можно записать в следующем виде: $\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},u,\psi,t)dt \to \max_{u \in U}$ ; $x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1,2,\ldots,n$ . Пусть полученная задача имеет решение $x^*, u^*, \psi^*$ . Тогда для нахождения такого решения необходимо рассмотреть следующие две подзадачи:

$\widetilde{J}_1 = \int\limits_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},u^*,\psi,t)dt \to \max\limits_{x,\psi}$; $x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1,2,...,n$ и $\widetilde{J}_2 = \int\limits_{t_0}^{t_f} L(x^*,\dot{x}^*,u,\psi^*,t)dt \to \max\limits_{u\in U}$.

Или $\widetilde{J}_1 = \int\limits_{t_0}^{t_f} [H(x,u^*,\psi,t) - \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i]dt \to \max\limits_{x,\psi}$; $x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1,2,...,n$ и

$\widetilde{J}_2 = \int\limits_{t_0}^{t_f} [H(x^*,u,\psi^*,t) - \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i^* \dot{x}_i^*]dt \to \max\limits_{u\in U}$. Очевидно, что первая подзадача является типовой задачей вариационного исчисления. Уравнения Эйлера для этой подзадачи, определяющие экстремали, имеют вид: $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1,2,...,n$; $\dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}; i = 1,2,...,n$. Во второй подзадаче, интеграл будет принимать максимальное значение при таком управлении, при котором подынтегральное выражение, как функция от управления $u$ будет принимать максимальное значение. То есть, управление $u^*(t)$ должно доставлять максимум гамильтониану, или, всюду на интервале $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва $u^*(t)$, должно выполняться равенство $\max\limits_{u\in U} H(x^*,u,\psi^*,t) = H(x^*,u^*,\psi^*,t)$. Данное соотношение, рассмотренное с необходимыми условиями оптимальности в виде уравнений Эйлера, называется принципом максимума Понтрягина. Очевидно, что уравнения $\dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}; i = 1,2,...,n$ совпадают с уравнениями объекта. Уравнения $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1,2,...,n$ называют сопряженными уравнениями или сопряженной системой.

**Принцип максимума (при закрепленных концах и фиксированном времени)**. *Для того, чтобы допустимая для задачи* $\dot{x}_i = f_i(x,u,t) = 0; i = 1,2,...,n$; $u \in U \subseteq R^m$; $x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1,2,...,n$; $J = \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt \to \min$ *пара* $(x^*(t), u^*(t))$ *была ее решением, необходимо, чтобы существовали такие, не обращающиеся одновременно в нуль, константа* $\psi_0^* \le 0$ *и решение* $\psi^*(t) = (\psi_1^*,...,\psi_n^*)^T$ *сопряженной системы* $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1,2,...,n$, где $H = \sum\limits_{i=0}^{n} \psi_i f_i$, *при* $x = x^*(t)$ *и* $u = u^*(t)$, *что при любом* $t \in [t_0, t_f]$, *кроме точек разрыва* $u^*(t)$, *функция* $H(u) = H(x^*,u,\psi^*,t)$ *при* $u = u^*(t)$ *достигает максимума, то есть выполняется соотношение* $\max\limits_{u\in U} H(x^*,u,\psi^*,t) = H(x^*,u^*,\psi^*,t)$.

***Задача с подвижными концами и нефиксированным временем.***

Пусть задана задача Больца: $\dot{x}_i = f_i(x,u,t) = 0; i = 1,2,...,n$; $u \in U \subseteq R^m$;

$q_j[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] = 0; j = 1,2,....s \le 2n+2$; $J = q_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,\dot{x},t)dt \to \min$.

Используя, как и ранее, прием Лагранжа, эту задачу сведем к следующей вариационной задаче:

$\widetilde{J} = Q + \int\limits_{t_0}^{t_f} (H - \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i) dt \to \max$, где $Q = \sum\limits_{i=0}^{s} v_i q_i ; v_0 = \psi_0$, $H = \sum\limits_{i=0}^{n} \psi_i f_i$. Для такой задачи можно сформулировать следующий принцип максимума.

***Принцип максимума (при подвижных концах и нефиксированном времени)****. Для того, чтобы допустимая для задачи оптимального управления с подвижными концами пара $(x^*(t), u^*(t))$ была ее решением, необходимо:*

*- чтобы существовали такие, не обращающиеся одновременно в нуль, константа $\psi_0^* \le 0$ и решение $\psi^*(t) = (\psi_1^*, ..., \psi_n^*)^T$ сопряженной системы $\dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} ; i = 1,2,..., n$,* где $H = \sum\limits_{i=0}^{n} \psi_i f_i$, *при $x = x^*(t)$ и $u = u^*(t)$, что при любом $t \in [t_0, t_f]$, кроме точек разрыва $u^*(t)$, функция $H(u) = H(x^*, u, \psi^*, t)$ при $u = u^*(t)$ достигает максимума, то есть выполняется соотношение $\max\limits_{u \in U} H(x^*, u, \psi^*, t) = H(x^*, u^*, \psi^*, t)$;*

*- выполнялись условия трансверсальности : $\psi_i(t_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x_i(t_0)} ; \psi_i(t_f) = \dfrac{\partial Q}{\partial x_i(t_f)} ; i = 1,2,..., n$ и*

$H|_{t=t_0} = \dfrac{\partial Q}{\partial t_0}$; $H|_{t=t_f} = -\dfrac{\partial Q}{\partial t_f}$.

*Пример.* Рассмотрим снова задачу оптимального поворота вала двигателя на максимальный угол за 10 с и его остановку: $\dot{x}_1 = x_2 ; \dot{x}_2 = u$; $|u| \le a$; $x_1(0) = x_2(0) = 0$; $x_2(10) = 0$; $J = -x_1(10) \to \min$. Функция Понтрягина (гамильтониан) и сопряженные уравнения имеют вид: $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$; $\dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0$; $\dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1$. Терминант и условия трансверсальности имеют вид $Q = v_0 q_0 = x_1(10)$; $\dot{\psi}_1(10) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x_1(10)} = -1$. Отсюда найдем $\psi_1 = -1; \psi_2 = C_2 - t$. Максимум выражения $\max\limits_{|u| \le a} H = \psi_1 x_2 + \max\limits_{|u| \le a} \psi_2 u$ достигается, когда управление принимает граничные значения и его знак совпадает со знаком функции $\psi_2$. То есть оптимальным может быть управление $u = \begin{cases} a, 0 \le t < t_1 \\ -a, t_1 \le t \le 10 \end{cases}$.

Проинтегрируем уравнения объекта при полученном законе управления с учетом начальных условий: $x_2(t) = \begin{cases} at, 0 \le t < t_1 \\ a(2t_1 - t), t_1 \le t \le 10 \end{cases}$. Из краевого условия находим, что будет справедливо уравнение $x_2(10) = a(2t_1 - 10) = 0$. Отсюда получим $t_1 = 5$. Таким образом, оптимальное управление имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} a, 0 \le t < 5 \\ -a, 5 \le t \le 10 \end{cases}.$$

**Линейная задача максимального быстродействия. Теорема об n интервалах.**

Рассмотрим задачу максимального быстродействия, когда объект является линейным:

$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j ; i = 1,2,..,n$ ; $\alpha_j \le u_j \le \beta_j ; \alpha_j < 0; \beta_j > 0; j = 1,2,\dots,m$;

$x_i(t_0) = x_i^0 ; x_i(t_f) = 0; i = 1,2,\dots,n$; $J = t_f - t_0 \to \min$ . Функция Понтрягина для рассматриваемого случая имеет вид: $H = \psi^T (Ax + Bu) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j)$ .

Оптимальное управление, согласно принципу максимума будет определяться из условия:

$\max_{u \in U} H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \max_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j$ . Отсюда можно показать, что координаты $u_j^*; j = 1,2,\dots,m$ оптимального управления $u^*(t)$ кусочно – постоянные и принимают крайние значения $\alpha_j, \beta_j$: $u_j^* = \begin{cases} \alpha_j, \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \psi_i < 0 \\ \beta_j, \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \psi_i > 0 \end{cases}$ . Для линейных задач максимального быстродействия, при выполнении условия нормальности, принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Введем в рассмотрение следующие матрицы, размерности $(n*n)$ : $N[j] = \{B[j], (AB)[j], .....(A^{n-1}B)[j]\}$ , где $B[j], (AB)[j], .....(A^{n-1}B)[j]$ - $j$ - ые столбцы матриц $B, (AB), .....(A^{n-1}B)$ соответственно.

***Условие нормальности***. *Для объекта* $\dot{x} = Ax + Bu$ *выполнено условие нормальности или условие общности положения, если матрицы* $N[j]$ *невырожденные, то есть* $\det\{N[j]\} \ne 0; j = 1,2,..., m$.

Очевидно, что в случае скалярного управления, условие нормальности совпадает с условием управляемости.

***Необходимое и достаточное условие оптимальности.*** *Если в линейной задаче максимального быстродействия объект является нормальным, то для того, чтобы пара* $(u^*(t), x^*(t))$ *была ее решением, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию максимума.*

***Теорема об n интервалах.*** *Если в линейной задаче максимального быстродействия объект является нормальным и характеристическое уравнение* $\det(\lambda E - A) = 0$ *имеет только действительные корни, то компоненты оптимального управления* $u_j^*; j = 1,2,..., m$ *кусочно - постоянные, принимают только граничные значения и имеют не более n интервалов постоянства, или не более* $(n-1)$ *переключений.*

**Вырожденные и особые задачи оптимального управления.**

Методы классического вариационного исчисления и принцип максимума не всегда позволяют найти оптимальное управление. В ряде случаев, помимо одного оптимального управления, существует целое множество других управлений, среди которых могут быть как оптимальные, так и не оптимальные управления. Задачи такого типа называются вырожденными.

Кроме того, встречаются задачи, в которых оптимальным управлению и траектории соответствует значение $\psi_0 = 0$. Такие задачи называются особыми. Обычно, к особым задачам относятся некорректно сформулированные задачи оптимального управления, у которых решения не зависят от критерия оптимальности или имеется только одно возможное допустимое управление.

**<u>Метод динамического программирования.</u>**

Основная схема метода динамического программирования состоит в том, что исходную задачу включают в некоторое семейство задач оптимизации, среди которых существует некоторая задача, которая легко решается. Тогда используя соотношения, связывающие отдельные задачи семейства, можно найти и решение исходной задачи. Принцип включения решаемой задачи в семейство оптимизационных задач часто называют принципом инвариантного погружения или принципом оптимальности. В общем виде этот принцип формулируется следующим образом.

*Оптимальная стратегия (поведение) обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и решения на начальном этапе, решения на последующем этапе должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, которое получается в результате принятия решений на начальном этапе.*

В задачах оптимального управления критерий оптимальности определяется функционалом $J(u(t), x(t))$, состояние – фазовым вектором $x(t)$; стратегия – это управление на интервале $[t_0, t_f]$, решение – выбор конкретного управления. Принцип оптимальности применим для задачи оптимального управления, если она обладает *<u>марковским свойством</u>*. То есть, если после выбора управления на начальном интервале $[t_0, t_1]$, на величину критерия $J(u(t), x(t))$ на конечном интервале $[t_1, t_f]$ оказывают влияние выбор управления на этом интервале и значение фазового вектора в конце начального интервала, то есть $x(t_1)$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: $\dot{x} = f(x,u,t); u(t) \in U_t; x(t_0) = x^0; x(t_f) \in X_f$;

$$J = q_0(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt \to \min .$$

Введем следующее обозначение управления $u(t)$ на интервале $[a,b]$: $u[a,b] = \{u(t); a \le t \le b\}$.

*Тогда, для оптимальности пары $(u^*(t), x^*(t))$ необходимо, чтобы при любом $t_1 \in [t_0, t_f]$ управление $u^*[t_1, t_f]$ было оптимальным относительно состояния $x^*(t_1)$, в котором окажется объект в момент $t_1$, при выборе на начальном отрезке времени $[t_0, t_1)$ управления $u^*[t_0, t_1)$.*

Можно сформулировать и более общее утверждение.

*Если допустимая для задачи оптимального управления пара $(u^*(t), x^*(t))$ оптимальна, то, каков бы ни был интервал $[t_1, t_2] \subseteq [t_0, t_f]$, управление $u^*(t)$ на этом интервале является оптимальным относительно граничных точек $x^*(t_1)$ и $x^*(t_2)$.*

***Обратный принцип оптимальности****. Для оптимальности допустимой пары $(u^*(t), x^*(t))$ необходимо, чтобы при любом $t_1 \in [t_0, t_f]$ управление $u^*[t_0, t_1]$ было оптимальным относительно конечного для интервала $[t_0, t_1]$ состояния $x(t_1) = x^*(t_1)$.*

**Уравнение Беллмана.**

Проведем инвариантное погружение задачи оптимального управления в семейство задач, которое получается из исходной задачи путем замены начального условия $x(t_0)=x^0$ параметрическим условием $x(t_1)=x^1$, $t_1\in[t_0,t_f]$. Здесь $t_1,x^1$ рассматриваются как параметры. Введем следующую функцию $S(x(t_1),t_1)=\min\limits_{u(t)\in U;t_1\le t\le t_f}[q_0(x(t_f),t_f)+\int\limits_{t_1}^{t_f}f_0(x,u,t)dt]$. Очевидно, что $S(x(t_f),t_f)=q_0(x(t_f),t_f)$. Функцию $S(x(t_1),t_1)$ называют обычно функцией Беллмана. В силу принципа оптимальности можно записать следующее соотношение:

$S(x(t_1),t_1)=\min\limits_{u(t)\in U;t_1\le t\le t_1+\Delta t}[\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t}f_0dt+\min\limits_{u(t)\in U;t_1+\Delta t\le t\le t_f}(q_0(x(t_f),t_f)+\int\limits_{t_1}^{t_f}f_0dt)]$ или

$S(x(t_1),t_1)=\min\limits_{u(t)\in U;t_1\le t\le t_1+\Delta t}[\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t}f_0dt+S(x(t_1+\Delta t),t_1+\Delta t)]$. Функция $S(x(t_1),t_1)$ не зависит от управления на интервале $[t_1,t_1+\Delta t]$. Поэтому можно записать следующее выражение

$0=\min\limits_{u(t)\in U;t_1\le t\le t_1+\Delta t}[\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t}f_0dt+S(x(t_1+\Delta t),t_1+\Delta t)-S(x(t_1),t_1)]$. Тогда, устремляя $\Delta t$ к нулю, можно записать следующее уравнение: $\min\limits_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t)+\dfrac{dS(x(t),t)}{dt}]=0$.

Или уравнение $\min\limits_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t)+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial S}{\partial x_i}f_i(x,u,t)+\dfrac{\partial S}{\partial t}]=0$, которое называется уравнением Беллмана. Очевидно, что функция $S(x(t),t)$ не зависит от управления $u(t)$. Поэтому уравнение Беллмана в векторной форме можно записать в виде:

$$\min_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u,t)]=-\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Таким образом, если функция Беллмана дифференцируема, то для того, чтобы допустимая пара $(u(t),x(t))$ для задачи оптимального управления была ее решением, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Беллмана при граничном условии $S(x(t_f),t_f)=q_0(x(t_f),t_f)$. Если минимум $\min\limits_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t)+\dfrac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u,t)]$ левой части уравнения достигается во внутренней точке множества $U$, уравнение Беллмана можно записать в виде следующей системы уравнений с частными производными:

$$f_0(x,u,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u,t)=-\frac{\partial S}{\partial t};$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}[f_0(x,u,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u,t)]=0;k=1,2,\dots,m$$

Если правые части уравнений объекта и подынтегральное выражение в критерии оптимальности явно не зависят от времени, и, конечный момент не фиксирован, то функция Беллмана не зависит явно от времени, как от параметра. Тогда, в этом случае, можно принять, что $\frac{\partial S}{\partial t}=0$.

При выводе необходимых условий оптимальности предполагалось, что функция Беллмана является непрерывно дифференцируемой. Однако, данное условие не всегда выполняется. Поэтому часто метод динамического программирования применяют без достаточного обоснования, только используя эвристические соображения. Однако, при определенных условиях, метод Беллмана дает достаточные условия оптимальности.

***Достаточное условие оптимальности.*** *Пусть* $S(x(t),t)$ *- гладкое решение уравнения Беллмана* $\min\limits_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}]=-\frac{\partial S}{\partial t}$ *при граничном условии* $S(x(t_f),t_f)=q_0(x(t_f),t_f)$.

*Пусть также управление* $u^*(x,t)$*, найденное из условия*

$[f_0(x,u^*,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u^*,t)+\frac{\partial S}{\partial t}]=\min\limits_{u(t)\in U}(f_0+\frac{dS}{dt})$ *, является кусочно – непрерывным и порождает единственную траекторию* $x^*(t)$*, удовлетворяющую уравнениям объекта и граничным условиям задачи оптимального управления* $\dot{x}=f(x,u,t);u(t)\in U_t;x(t_0)=x^0;x(t_f)\in X_f$. *Тогда функция* $u^*(x,t)$ *является оптимальным управлением задачи оптимального управления с критерием* $J=q_0(x(t_f),t_f)+\int\limits_{t_0}^{t_f}f_0(x,u,t)dt\to\min$.

*Пример.* Найдем оптимальное управление с обратной связью для следующей задачи оптимального управления: $\dot{x}_1=x_2;\dot{x}_2=u$; $x_1(0)=x_1^0;x_2(0)=x_2^0$; $x_1(t_f)=0;x_2(t_f)=0$; $J=\int\limits_0^{t_f}(x_1^2+u^2)dt$.

Момент $t_f$ не фиксирован. Уравнения Беллмана тогда можно записать в виде:

$x_1^2+u^2+\frac{\partial S}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial S}{\partial x_2}u=0$; $2u+\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$. Из второго уравнения находим $u=-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_2}$. Подставляя, полученное выражение для управления, в первое уравнение получим: $x_1^2-\frac{1}{4}(\frac{\partial S}{\partial x_2})^2+\frac{\partial S}{\partial x_1}x_2=0$.

Граничное условие имеет вид $S(x(t_f))=0$. Из рассмотрения вида уравнения, зададим функцию Беллмана в виде: $S=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$. Так как $S(x(t))=\min\limits_{u(t);t\le\tau\le t_f}\int\limits_t^{t_f}(x_1^2+u^2)d\tau>0$, то функция Беллмана должна быть положительно определенной. Отсюда, можно найти $a_{11}=\sqrt{2};a_{12}=1;a_{22}=\sqrt{2}$.

Соответственно, функция Беллмана и оптимальное управление имеют вид: $S=\sqrt{2}x_1^2+2x_1x_2+\sqrt{2}x_2^2$;

$u^*(x)=-(x_1+\sqrt{2}x_2)$.

**Контрольные вопросы к лекции 11.**

| № | Текст контрольного вопроса | Варианты ответа |
|---|---|---|
| 1 | Как называется вариационная задача оптимального управления, имеющая критерий оптимальности вида $J = q_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} g_0(x,u,t)dt$? | 1. Задача Лагранжа.<br>2. Задача Больца.<br>3. Задача Майера. |
| 2 | Задана система с ограничениями вида $\dot{x}_i = f_i(x,u,t); i = 1:n$; $\varphi_k(x,u,t) = 0; k = 1:r$ и критерий оптимальности $J = \int_{t_0}^{t_f} g_0(z,\dot{z},t)dt \to extr$. Уравнения Эйлера-Лагранжа для задачи с фиксированными концами в канонической форме для такой системы имеют вид… | 1… $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1:n$; $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} = 0; i = 1:n$<br>2… $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} = 0; i = 1:n$; $\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0;\ j = 1:m$<br>3. ..$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1:n$; $\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0;\ j = 1:m$,<br>где $H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k; f_0 \equiv g_0$ |
| 3 | Решение вариационной задачи оптимального управления по п.2 с критерием оптимальности $J = q_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,\dot{x},t)dt$ с подвижными концами и фиксированным временем требует дополнительных условий трансверсальности, которые имеют вид… | 1. $f'_{0,\dot{x}}\,\|_{t=t_0} = \frac{\partial q_0}{\partial x}\,\|_{t=t_0}$; $f'_{0,\dot{x}}\,\|_{t=t_f} = -\frac{\partial q_0}{\partial x}\,\|_{t=t_f}$<br>2. $f'_{0,\dot{x}}\,\|_{t=t_0} = \frac{\partial q_0}{\partial u}\,\|_{t=t_0}$; $f'_{0,\dot{x}}\,\|_{t=t_f} = -\frac{\partial q_0}{\partial u}\,\|_{t=t_f}$<br>3. $f'_{0,u}\,\|_{t=t_0} = \frac{\partial q_0}{\partial x}\,\|_{t=t_0}$; $f'_{0,u}\,\|_{t=t_f} = -\frac{\partial q_0}{\partial x}\,\|_{t=t_f}$ |
| 4 | В чем отличие задачи оптимального управления, решаемой с помощью принципа максимума Понтрягина, от соответствующей классической вариационной задачи оптимального управления? | 1. В классической вариационной задаче оптимального управления оптимальная траектория движения и функция оптимального управления могут иметь точки разрыва 1 – го рода, а в задаче оптимального управления, решаемой по принципу максимума, траектория системы и управления должны быть строго непрерывными..<br>2. В классической вариационной задаче оптимального управления оптимальная траектория движения и функция оптимального управления должны быть непрерывными, а в задаче управления, решаемой по принципу максимума, управление может быть кусочно - непрерывной функцией, а траектория движения иметь точки разрыва 1-го рода.<br>3. Нет никаких отличий. Это просто разные методы решения одной задачи оптимального управления. |
| 5 | При каком ограничении, решение линейной задачи максимального быстродействия с помощью принципа максимума Понтрягина удовлетворяет условиям необходимости и достаточности? | 1. Линейная стационарная система должна быть стабилизируемой.<br>2. Линейная стационарная система должна быть наблюдаемой и управляемой.<br>3. Линейная стационарная система должна удовлетворять условию нормальности. |
| 6 | При каких условиях оптимальное управление, решающее задачу линейного оптимального быстродействия, будет иметь $n$ интервалов постоянства (то есть не более $(n-1)$ - го переключений)? | 1. При условии, что линейная система удовлетворяет условию нормальности, а характеристическое уравнение системы имеет только действительные корни.<br>2. При условии, что линейная система является управляемой, а характеристическое уравнение системы имеет $n$ корней с отрицательной |

| | | |
|---|---|---|
| | | действительной частью.<br>3. При условии, что линейная система является стабилизируемой, а характеристическое уравнение системы имеет только действительные корни. |
| 7 | При каких ограничениях можно уравнение Беллмана<br>$\min\limits_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t)+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}f_i(x,u,t)+\frac{\partial S}{\partial t}]=0$<br>можно записать в виде системы<br>$f_0(x,u,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u,t)=-\frac{\partial S}{\partial t}$;<br>$\frac{\partial}{\partial u_k}[f_0(x,u,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u,t)]=0; k=1:m$;<br>$u\in U$? | 1. Если функция Беллмана $S(x,t)$ является кусочно-непрерывной, и, если минимум левой части уравнения Беллмана достигается на некотором подмножестве множества $U$ .<br>2. Если функция Беллмана $S(x,t)$ является непрерывной, и, если имеется только одна точка минимума левой части уравнения Беллмана.<br>3. Если функция Беллмана $S(x,t)$ является дифференцируемой, и, если минимум левой части уравнения Беллмана достигается во внутренней точке множества $U$ |
| 8 | При каких условиях метод динамического программирования обеспечивает достаточные условия оптимальности найденного управления $u^*(x,t)$? | 1. Если функция Беллмана $S(x,t)$ является дифференцируемой, и, управление $u^*(x,t)$ является решением уравнения<br>$\min\limits_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u,t)]=-\frac{\partial S}{\partial t}$.<br>2. Управление $u^*(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям и уравнениям объекта, а также соотношению<br>$[f_0(x,u^*,t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}f(x,u^*,t)+\frac{\partial S}{\partial t}]=\min\limits_{u(t)\in U}(f_0+\frac{dS}{dt})$.<br>3. Управление $u^*(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям и уравнениям объекта,, а также, если минимум левой части уравнения Беллмана достигается во внутренней точке множества $U$ . |