

**Т.П. Мартыненко, Г.А. Одинцова,
В.С. Пронина, Е.Ю. Соколова**

Практический курс физики

**КВАНТОВАЯ ФИЗИКА. ЭЛЕМЕНТЫ
ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ**

**Москва
2008**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие посвящено разделу "Квантовая физика. Элементы физики твердого тела и ядерной физики" по программе курса общей физики для ВТУЗов и предназначено для самостоятельной работы студентов при решении задач по физике.

Пособие состоит из пяти глав. Каждая глава начинается с краткого теоретического введения, в котором изложены основные физические понятия и законы. Далее приводится подробное решение типовых задач с соответствующими методическими указаниями.

В конце каждой главы подобраны задачи для самостоятельного решения, ответы к которым приводятся в заключительной части пособия. По этим задачам на кафедре составлены индивидуальные домашние задания для студентов всех факультетов.

Настоящее учебное пособие написано на основе переработки учебных пособий :

1. Практический курс "Квантовая механика" ч. 1, 2 под редакцией Е.П. Ваулина, созданный коллективом авторов каф. физики МАИ: Е.П. Ваулин, З.И. Коновалова, Е.Ю. Соколова, О.Н. Третьякова, Т.П. Ющенко (Москва 2000 г.)
2. Практический курс "Твердое тело", "Ядерная физика" ч. 1, 2 под редакцией Мартыненко Т.П. Авторы пособия: Г.И. Белашова, Н.А. Ваничева, Т.П. Мартыненко, Е.Н. Нарбекова, Г.А. Одинцова, В.В. Черепанов (Москва 2001 г.)

Авторы выражают глубокую благодарность за ценные замечания профессору Томского Политехнического Университета И.П. Чернову, а также сотрудникам кафедры МАИ профессору В.С. Яргину, доценту В.И. Бабецкому, доценту Л.И. Рудаковой.

Авторы будут признательны за критические замечания и рекомендации, которые послужат улучшению качества этой работы. Пожелания направлять по адресу: 125871, Москва, Волоколамское шоссе, д.4, МАИ, кафедра физики, по электронному адресу: Spirinas@mail.ru, или по телефонам: (095) 158-42-71, 158-46-43

1. КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОПТИКЕ

Основные понятия и законы

Тепловое излучение.

При изучении проблемы теплового излучения классическая физика столкнулась с серьезными трудностями, что в результате привело к необходимости введения гипотезы квантов.

Из повседневного опыта известно, что нагретые до высоких температур тела, начинают светиться, т.е. испускать электромагнитные волны видимого диапазона.

Тепловое излучение - это электромагнитное излучение нагретых тел, испускаемое телами за счет их внутренней энергии, и зависящее только от температуры тел и их оптических свойств.

Если энергия, расходуемая телом на излучение, не восполняется за счет тепла, подводимого к телу, то его температура понижается и тепловое излучение уменьшается.

Тепловое излучение тел характеризуют энергетической светимостью (испускающей способностью). Энергетическая светимость – это энергия, испускаемая в единицу времени, единицей поверхности тела во всех направлениях:

$$M_e = \frac{dW}{dSdt}, \quad \text{или} \quad M_e = \frac{d\Phi_e}{dS}, \quad (1.1)$$

где $\Phi_e = \frac{dW}{dt}$ поток энергии излучения.

Тепловое излучение имеет непрерывный спектр. Распределение энергии излучения по спектру определяется температурой тела и его природой (материалом). Спектральными характеристиками теплового излучения служат спектральная плотность энергетической светимости тела по частоте - M_{vT} или по длине волн - $M_{\lambda T}$, которые определяются соотношениями:

$$M_{vT} = \frac{dM_e}{dv}, \quad M_{\lambda T} = \frac{dM_e}{d\lambda} \quad (1.2)$$

Длина волны λ и частота v электромагнитного излучения связаны соотношением: $c = \lambda \cdot v$ или $v = c / \lambda$ (c - скорость распространения электромагнитных волн в вакууме). Следовательно $|dv| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$.

Поэтому из определений (1.2) следует:

$$M_{\lambda T} = M_{vT} \cdot \left| \frac{dv}{d\lambda} \right| = M_{vT} \cdot \frac{c}{\lambda^2}$$

Соотношения (1.2) позволяют вычислить энергетическую светимость тела во всем спектральном интервале:

$$M_e = \int_0^{\infty} M_{vT} dv = \int_0^{\infty} M_{\lambda T} d\lambda \quad (1.3)$$

Падающее на поверхность тела излучение поглощается лишь частично. Доля всей падающей энергии в данном интервале частот, поглощенная телом и превратившаяся в тепло, называется **спектральным коэффициентом поглощения** (спектральной поглощательной способностью)

$$a_{vT} = \frac{dW^{\text{погл}}}{dW^{\text{пад}}} = \frac{d\Phi_e^{\text{погл}}}{d\Phi_e^{\text{пад}}} \quad (1.4)$$

где $d\Phi_e^{\text{пад}}$ - поток энергии излучения в узком спектральном интервале dv , падающий на поверхность тела; $d\Phi_e^{\text{погл}}$ - поглощаемый поверхностью поток энергии излучения в том же спектральном интервале. Любое реальное тело поглощает излучение различных частот по-разному в зависимости от его температуры, поэтому спектральный коэффициент поглощения изменяется при изменении температуры тела.

Для всех тел значение $a_{vT} \leq 1$. Максимальной поглощательной способностью ($a_{vT} = 1$) обладает «абсолютно черное тело». Тело называется абсолютно черным, если оно при любой температуре полностью поглощает все падающее на него излучение. Тело, у которого поглощательная способность меньше единицы, но одинакова на всех частотах, называют *серым телом*. Коэффициент поглощения серых тел зависит только от температуры, материала и состояния поверхности.

В соответствии с законом Кирхгофа отношение спектральной плотности энергетической светимости тела M_{vT} к его спектральному коэффициенту поглощения a_{vT} не зависит от природы тела, а является универсальной функцией частоты и температуры, равной спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела M_{vT}^0 :

$$\left(\frac{M_{vT}}{a_{vT}} \right)_1 = \left(\frac{M_{vT}}{a_{vT}} \right)_2 = M_{vT}^0 \quad (1.5)$$

Закон Кирхгофа позволяет вычислить энергетическую светимость любого тела, зная его спектральный коэффициент поглощения и спектральную плотность энергетической светимости абсолютно черного тела - M_{vT}^0 :

$$M_{vT} = a_{vT} \cdot M_{vT}^0 \quad (1.6)$$

и

$$M_e = \int_0^{\infty} a_{vT} \cdot M_{vT}^0 dv . \quad (1.7)$$

Для серых тел вычисление интеграла (1.7) упрощается, поскольку коэффициент $a_{vT} = a_T$ одинаков для всех частот, поэтому

$$M_e = \int_0^{\infty} a_{vT} M_{vT}^0 dv = a_T \int_0^{\infty} M_{vT}^0 dv = a_T M_e^0, \quad (1.8)$$

где

$$M_e^0 = \int_0^{\infty} M_{vT}^0 dv \quad (1.9)$$

энергетическая светимость абсолютно черного тела, a_T - коэффициент теплового излучения (коэффициент черноты).

Законы излучения абсолютно черного тела.

Формула Планка.

Для того чтобы получить формулу, описывающую излучение абсолютно черного тела, М. Планк выдвинул гипотезу о том, что обмен энергией между веществом и излучением происходит не непрерывным образом, а путем передачи дискретных и неделимых порций энергии или квантов энергии. Энергия кванта пропорциональна частоте излучения:

$$\varepsilon = h \cdot v,$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Полученная на основе этих предположений формула для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела

$$M_{vT}^0 = \frac{2\pi h v^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} \quad (1.10)$$

$$M_{\lambda T}^0 = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (1.11)$$

хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Формула Планка описывает распределение энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, вид которого представлен на рис.1.1. а), б).

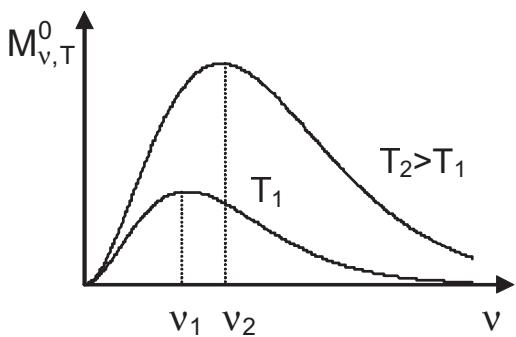


Рис. 1.1 а)

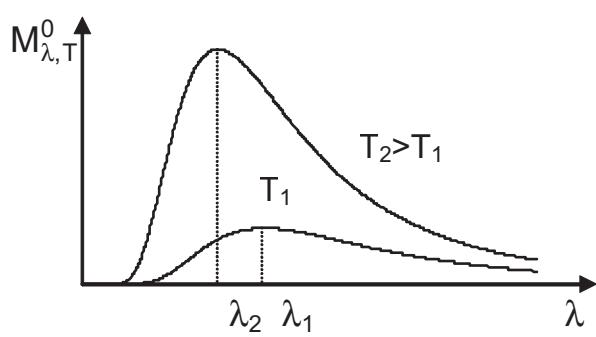


Рис. 1.1.б)

Закон Стефана-Больцмана.

Подстановка (1.10) в (1.3) и выполнение интегрирования (см. задачу 1.1) приводит к закону Стефана-Больцмана, определяющему энергетическую светимость абсолютно черного тела:

$$M_e^0 = \sigma \cdot T^4 \quad (1.12)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная Стефана-Больцмана.

В соответствии с законом Стефана-Больцмана энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры.

Для серых тел зависимость энергетической светимости от температуры более сложная:

$$M_e = a_T \cdot \sigma \cdot T^4, \quad (1.13)$$

поскольку коэффициент теплового излучения a_T является в общем случае функцией температуры.

Закон смещения Вина

Исследование формулы (1.11) на экстремум позволяет заключить, что в спектре излучения абсолютно черного тела имеется максимум, приходящийся на длину волны λ_m , определяемую температурой

тела: $\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (1.14)$

где $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Соотношение (1.14) описывает закон смещения Вина, в соответствии с которым с повышением температуры тела длина волны, на которую приходится максимум излучения, смещается в ультрафиолетовую область спектра.

Максимальная спектральная плотность энергетической светимости определяется из соотношений (1.14) и (1.11) и равна

$$M_{\lambda T}^0 = C \cdot T^5, \quad (1.15)$$

где $C = 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

Корпускулярные свойства света.

Фотоны. Энергия, импульс и масса фотона.

Развивая гипотезу М.Планка о квантах, А.Эйнштейн предположил, что квантовые свойства электромагнитного излучения проявляются не только при испускании и поглощении его веществом, но и при распространении излучения в пространстве.

В соответствии с гипотезой световых квантов электромагнитное излучение (свет) испускается, поглощается и распространяется в виде дискретных порций (квантов), называемых фотонами.

Фотон - релятивистская незаряженная частица, свойства которой могут быть описаны только с использованием основных соотношений специальной теории относительности.

Фотон является уникальной элементарной частицей, имеющей нулевую массу покоя. Это означает, что в вакууме фотон всегда движется со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с и не может существовать в состоянии покоя.

Энергия фотона (энергия кванта) зависит от частоты света и равна $\varepsilon = h \cdot v$, (1.16)

Масса фотона, согласно теории относительности Эйнштейна, определяется его энергией:

$$m = \varepsilon / c^2 = hv / c^2. \quad (1.17)$$

Как любая частица фотон обладает импульсом

$$p = \varepsilon / c = mc = hv / c. \quad (1.18)$$

Направление импульса фотона совпадает с направлением распространения световой волны, характеризуемым волновым вектором \vec{k}

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad p = \hbar k \quad (1.19)$$

где $k = |\vec{k}| = 2\pi / \lambda$ - волновое число, $\hbar = h / 2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка.

Поскольку $c / v = \lambda$, импульс фотона можно выразить через длину волны $p = \frac{h}{\lambda}$ (1.20)

Электромагнитное излучение можно представить как поток большого числа частиц – фотонов с энергией $\varepsilon = hv$. В этом случае поток энергии монохроматического излучения определяется соотношением

$$\Phi_e = \varepsilon \cdot \dot{N} = hv \cdot \dot{N}, \quad (1.21)$$

а энергетическая освещенность поверхности (энергия, падающая на единицу поверхности в единицу времени)

$$E_e = \frac{dW}{dS \cdot dt} = \frac{\varepsilon \cdot dN_\phi}{dS \cdot dt} = \varepsilon \cdot \dot{n} = hv \cdot \dot{n}. \quad (1.22)$$

Здесь $\dot{N} = \frac{dN_\phi}{dt}$ поток фотонов (число фотонов, падающих на поверхность в единицу времени) и $\dot{n} = \frac{dN_\phi}{dS \cdot dt}$ – плотность потока фотонов (число фотонов, падающих на единичную площадку в единицу времени).

Давление света.

Наличие импульса у фотона указывает на то, что свет, падающий на поверхность какого-либо тела, должен оказывать на него давление.

При поглощении фотона, поверхности передается импульс $p_\phi \cdot \cos\theta$, а при отражении - $2p_\phi \cdot \cos\theta$, где θ - угол между нормалью

к поверхности и импульсом падающего фотона. Нормальная составляющая импульса, передаваемого поверхности в единицу времени, определяется суммарным изменением импульса отраженных и поглощенных фотонов:

$$\frac{dp_n}{dt} = 2p_\phi \cdot \cos\theta \frac{dN_{\text{отр}}}{dt} + p_\phi \cdot \cos\theta \frac{dN_{\text{погл}}}{dt} = p_\phi \cos\theta \left(2\dot{N}_{\text{отр}} + \dot{N}_{\text{погл}} \right).$$

Здесь $dN_{\text{отр}}$ и $dN_{\text{погл}}$ - число фотонов отражаемых и поглощаемых поверхностью за время dt . Для непрозрачных тел

$$\dot{N}_{\text{отр}} + \dot{N}_{\text{погл}} = \dot{N}.$$

Откуда

$$\dot{N}_{\text{погл}} = \dot{N} - \dot{N}_{\text{отр}} = \dot{N}(1 - \rho),$$

где $\rho = \frac{dW_{\text{отр}}}{dW} = \frac{\varepsilon_\phi \cdot dN_{\text{отр}}}{\varepsilon_\phi \cdot dN} = \frac{dN_{\text{отр}}}{dN}$ – коэффициент отражения

поверхности, характеризующий долю энергии, отражаемой поверхностью.

Таким образом, импульс, передаваемый поверхности в единицу времени, равен:

$$\frac{dp_n}{dt} = p_\phi \cos\theta \left(2\rho \dot{N} + (1 - \rho) \dot{N} \right) = p_\phi \dot{N} (1 + \rho) \cos\theta.$$

Учитывая определение давления

$$P = F_n / S = dp_n / (S \cdot dt)$$

и формулу (1.18), световое давление, которое оказывает на поверхность тела поток монохроматического излучения, падающего перпендикулярно поверхности, можно выразить соотношениями:

$$P = \frac{(1 + \rho) \cdot p_\phi \dot{N}}{S} = (1 + \rho) \cdot \frac{\varepsilon_\phi \dot{N}}{c \cdot S} \quad (1.23)$$

$$P = (1 + \rho) \frac{E_e}{c} \quad (1.24)$$

где E_e - энергетическая освещенность поверхности (1.22).

Формула (1.23) согласуется с формулой для давления, оказываемого на поверхность электромагнитной волной

$$P = (1 + \rho)w,$$

поскольку объемная плотность энергии электромагнитного поля w может быть записана в виде

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon_\phi \cdot dN}{S \cdot c \cdot dt}.$$

Фотоэлектрический эффект (фотоэффект).

Внешним фотоэлектрическим эффектом (фотоэлектронной эмиссией) называется испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения.

Внутренний фотоэффект – это явление перераспределения электронов по энергетическим состояниям, связанное с квантовыми переходами электронов из связанных состояний в свободное без выхода их наружу.

В полупроводниках и диэлектриках внутренний фотоэффект проявляется в изменении электропроводности среды (фотопроводимость), ее диэлектрической проницаемости (фотоэлектрический эффект) или в возникновении фото – ЭДС.

Фотоэффект может наблюдаться в газах на отдельных атомах и молекулах (фотоионизация). Первичным актом здесь является поглощение фотона и ионизация с испусканием электрона. Вся энергия фотона, за вычетом энергии ионизации, передается испускаемому электрону.

Закон сохранения энергии при внешнем фотоэффекте выражается уравнением Эйнштейна

$$\varepsilon = A_{\text{вых}} + T_{\max}. \quad (1.25)$$

Для процесса фотоионизации атома или молекулы

$$\varepsilon = E_i + T_{\max}, \quad (1.26)$$

где $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$ – энергия поглощенного фотона, T_{\max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона, $A_{\text{вых}}$ – работа выхода, E_i – энергия ионизации атома или молекулы.

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ – это наименьшая энергия, необходимая для выхода электрона из металла. Работа выхода зависит от вида металла и состояния его поверхности.

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона вычисляется по формуле

$$T_{\max} = \frac{m_0 e v_{\max}^2}{2}, \quad (1.27)$$

если энергия фотона существенно меньше энергии покоя электрона $\varepsilon \ll m_0 c^2 \approx 0,5 \text{ МэВ}$. Если энергия фотона сравнима или больше энергии покоя электрона, для вычисления кинетической энергии электрона необходимо использовать релятивистское выражение

$$T_{\max} = m_0 e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right), \quad (1.28)$$

где v_{\max} – максимальная скорость фотоэлектронов; $m_0 e$ – масса электрона.

Внешний фотоэффект возможен только в том случае, когда энергия фотона больше или равна работе выхода для данного металла $\varepsilon \geq A_{\text{вых}}$. Из условия $\varepsilon = A_{\text{вых}}$ можно найти предельные

значения частоты и длины волны, при которых возможен фотоэффект. Минимальная частота v_0 или максимальная длина волны λ_0 , при которой наблюдается фотоэффект, называется *красной границей фотоэффекта*:

$$v_0 = \frac{A_{\text{вых}}}{h}, \quad \lambda_0 = \frac{hc}{A_{\text{вых}}}. \quad (1.29)$$

На рис. 1.2 представлена зависимость фототока от напряжения между катодом и анодом в установке для изучения фотоэффекта.

Максимальное значение силы тока называется фототоком насыщения и соответствует таким значениям напряжения U , при которых все электроны, вылетевшие с поверхности катода, достигают анода:

$$\dot{I}_H = e \cdot \dot{N}_e, \quad (1.30)$$

здесь \dot{N}_e - число электронов, вылетевших с поверхности катода за единицу времени под действием света, e – заряд электрона.

Фототок насыщения зависит от интенсивности света.

Ток в фотоэлементе прекращается, если все вылетающие электроны затормозятся, не долетев до анода. Это возможно, если к фотоэлементу приложить обратное (тормозящее) напряжение U_3 . Это позволяет экспериментально определить максимальную кинетическую энергию и скорость вырванных фотоэлектронов, поскольку из закона сохранения энергии

$$e \cdot U_3 = T_{\max}, \quad e \cdot U_3 = \frac{m_0 e v_{\max}^2}{2}. \quad (1.31)$$

Эффект Комптона.

Эффект Комптона – упругое рассеяние электромагнитного излучения на свободных (или слабосвязанных) электронах, сопровождающееся увеличением длины волны.

Эффект Комптона наблюдается при рассеянии монохроматического рентгеновского излучения на веществах, состоящих из легких атомов. Изменение длины волны рассеянного излучения в длинноволновую сторону спектра называется *комптоновским смещением* $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$. Комптоновское смещение $\Delta\lambda$ не зависит от длины волны падающего излучения и состава рассеивающего вещества, а является функцией угла рассеяния.

Рассеяние света на веществе сводится к столкновению между фотонами и электронами, входящими в состав атомов. В результате столкновения фотон изменяет не только направление своего

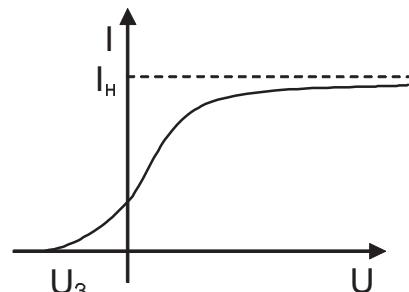


Рис. 1.2

движения, но и частоту, так как часть своей энергии он передает электрону. Следовательно, энергия фотона при столкновении уменьшается, а длина волны увеличивается.

Для случая рассеяния фотона с импульсом \vec{p}_ϕ и энергией ϵ_ϕ на покоящемся электроне законы сохранения энергии и импульса имеют вид:

$$\epsilon_\phi + \epsilon_{0e} = \epsilon'_\phi + \epsilon_e, \quad (1.32)$$

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}_e \quad (1.33)$$

где $\epsilon_{0e} = m_{0e}c^2$ – энергия покоя электрона, $\epsilon_\phi = hc/\lambda$ и $p_\phi = h/\lambda$ – энергия и импульс налетающего фотона, $\epsilon'_\phi = hc/\lambda'$ и $p'_\phi = h/\lambda'$ – энергия и импульс рассеянного фотона.

Диаграмма, иллюстрирующая закон сохранения импульса при упругом рассеянии фотонов на свободных электронах, представлена на рис. 1.3.

Из законов сохранения энергии и импульса (1.32), (1.33) следует:

$$\epsilon_e^2 = \epsilon_\phi^2 + \epsilon'^2 - 2\epsilon_\phi\epsilon'_\phi + 2(\epsilon_\phi - \epsilon'_\phi)\epsilon_{0e} + \epsilon_{0e}^2 \quad (1.34)$$

$$p_e^2 = p_\phi^2 + p'^2 - 2p_\phi p'_\phi \cos\theta. \quad (1.35)$$

Умножение равенства (1.35) на c^2 приводит к соотношению

$$p_e^2 c^2 = p_\phi^2 c^2 + p'^2 c^2 - 2p_\phi p'_\phi c^2 \cos\theta = \epsilon_\phi^2 + \epsilon'^2 - 2\epsilon_\phi\epsilon'_\phi \cos\theta \quad (1.36)$$

Здесь учтено, что энергия и импульс фотона связаны соотношением (1.18). Вычтем (1.36) из (1.34). С учетом релятивистского инварианта

$$\epsilon_e^2 - p_e^2 c^2 = m_{0e}^2 c^4 \quad (1.37)$$

после несложных преобразований получим

$$m_{0e}^2 c^4 = -2\epsilon_\phi\epsilon'_\phi(1 - \cos\theta) + \epsilon_{0e}^2 + 2(\epsilon_\phi - \epsilon'_\phi)\epsilon_{0e}$$

откуда

$$(\epsilon_\phi - \epsilon'_\phi)\epsilon_{0e} = \epsilon_\phi\epsilon'_\phi(1 - \cos\theta)$$

Или, после деления на произведение энергий ($\epsilon_\phi \cdot \epsilon'_\phi \cdot \epsilon_{0e}$),

$$\frac{1}{\epsilon'_\phi} - \frac{1}{\epsilon_\phi} = \frac{1}{\epsilon_{0e}}(1 - \cos\theta), \quad (1.38)$$

Подставляя в (1.38) выражения для энергии фотонов и электрона

$$\epsilon_\phi = \frac{hc}{\lambda}, \quad \epsilon'_\phi = \frac{hc}{\lambda'}, \quad \epsilon_{0e} = m_{0e}c^2,$$

получаем формулу комптоновского смещения

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta) \quad \text{или} \quad \Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2\theta/2 \quad (1.39)$$

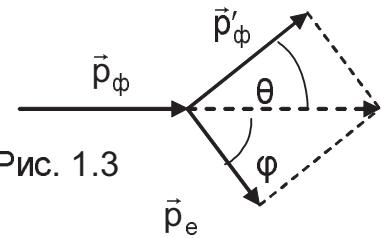


Рис. 1.3

Здесь $\lambda_C = \frac{h}{m_{0e}c} = 2,4 \cdot 10^{-12}$ м – комптоновская длина волны электрона.

Некоторая часть рассеяния происходит без изменения длины волны. Это объясняется тем, что часть фотонов рассеивается не на внешних электронах, слабо связанных с ядром, а на внутренних электронах, которые очень сильно связаны с ядром атома. Это эквивалентно столкновению фотона не со свободным электроном, а с атомом. Поскольку масса атома в несколько тысяч раз больше массы электрона, то длина волны этих фотонов практически не изменяется.

Примеры решения задач

Задача 1.1. С помощью формулы Планка (1.10) доказать закон Стефана-Больцмана и вычислить постоянную Стефана-Больцмана.

Решение

Подставим формулу (1.10) в (1.2) и выполним интегрирование, сделав замену переменной $x = hv/kT$, $dv = kTdx/h$, $v = kTx/h$:

$$M_0^e = \int_0^\infty M_{vT}^0 dv = \int_0^\infty \frac{2\pi h v^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} \cdot dv = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{k^4 T^4}{h^4} \cdot \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

Значение интеграла $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, поэтому получим:

$$M_0^e = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \cdot T^4 = \sigma \cdot T^4,$$

здесь введено обозначение:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = \frac{2 \cdot (3,14)^5 \cdot (1,38 \cdot 10^{-23})^4}{15 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (6,62 \cdot 10^{-34})^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}.$$

Таким образом, теоретическое значение постоянной Стефана-Больцмана σ совпадает с экспериментальным.

Задача 1.2. Какую мощность излучения имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца $T = 6000$ К. Радиус Солнца принять равным $r_s = 6,95 \cdot 10^8$ м.

Решение

Мощность $d\Phi_e$ излучения малого участка поверхности абсолютно черного тела dS определяется соотношением

$$d\Phi_e = M_e^0 \cdot dS$$

где энергетическая светимость абсолютно черного тела M_e^0 определяется законом Стефана–Больцмана (1.12)

$$M_e^0 = \sigma \cdot T^4, \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4\text{)}.$$

Так как температура поверхности Солнца во всех точках одинакова, мощность излучения всей поверхности Солнца площадью $S = 4\pi r_C^2$ вычисляется по формуле:

$$\Phi_e = M_e^0 \cdot S = 4\pi \cdot r_C^2 \cdot \sigma \cdot T^4 = 4,46 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$$

Задача 1.3. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источником света служит: а) спираль электрической лампочки ($T = 3000 \text{ К}$); б) поверхность Солнца ($T = 6000 \text{ К}$); в) атомная бомба, в которой температура достигает $T = 10^7 \text{ К}$ в момент взрыва? Излучение считать близким к излучению абсолютно чёрного тела.

Решение

Согласно закону смещения Вина (1.14), искомая длина волны определяется по формуле:

$$\lambda_m = b/T, \quad b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

Произведя вычисления, получим:

- а) $\lambda_m = 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$ (инфракрасная область);
- б) $\lambda_m = 0,5 \text{ мкм} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ (область видимого света);
- в) $\lambda_m = 0,3 \text{ нм} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ (рентгеновское излучение).

Задача 1.4. В спектре Солнца максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_m = 0,50 \text{ мкм}$. Приняв, что Солнце излучает как абсолютно чёрное тело, найти плотность потока излучения вблизи Земли за пределами ее атмосферы. Принять радиус Солнца равным $r_C = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$, а расстояние от Солнца до Земли $r_{C3} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$.

Решение

По определению энергетическая освещенность E_e поверхности:

$$E_e = d\Phi_e/dS$$

где $d\Phi_e$ - поток солнечной энергии, падающий на элемент сферической поверхности dS радиусом r . В силу равномерности излучения Солнца по всем направлениям величина освещенности E_{eC3} будет одинакова во всех точках сферы радиуса r_{C3} . Это позволяет определить необходимую мощность излучения Солнца, приходящуюся на всю поверхность сферы радиусом r_{C3} :

$$\Phi_{eC3} = E_{eC3} \cdot S_{C3},$$

где $S_{C3} = 4\pi r_{C3}^2$, а r_{C3} - расстояние от Солнца до Земли.

С другой стороны, эта мощность согласно закону сохранения энергии определяется мощностью теплового излучения Солнца как абсолютно черного тела, имеющего форму сферы радиусом r_C :

$$\Phi_{eC} = M_{eC}^0 \cdot S_C,$$

где $S_C = 4\pi r_C^2$, r_C - радиус Солнца.

Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$\Phi_{eC} = \Phi_{eC3}.$$

Откуда, учитывая выражение для мощности излучения, найдем искомую величину E_e :

$$E_{eC3} = M_{eC}^0 (r_C / r_{C3})^2.$$

Энергетическая светимость абсолютно черного тела определяется на основании закона Стефана-Больцмана (1.12)

$$M_{eC}^0 = \sigma \cdot T_C^4,$$

где T_C - температура поверхности Солнца, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$, а температура излучения определяется по заданной длине волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, из закона Вина (1.14):

$$T_C = b / \lambda_m, \quad b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

В итоге расчетная формула для плотности потока излучения вблизи Земли примет вид:

$$E_e = \sigma (b / \lambda_m)^4 (r_C / r_{C3})^2.$$

Проводя вычисления, получим: $E_e = 1,4 \text{ кВт}/\text{м}^2$.

Задача 1.5. Электрическая печь потребляет мощность $P = 500 \text{ Вт}$. Температура ее внутренней поверхности при открытом небольшом отверстии диаметром $d = 5 \text{ см}$ равна $T = 700^\circ\text{C}$. Какая часть α потребляемой мощности рассеивается стенками?

Решение

При установившемся тепловом режиме печи вся потребляемая ею ежесекундно электрическая энергия P излучается наружу отверстием и стенками

$$P = \Phi_{e1} + \Phi_{e2}, \quad (1)$$

где Φ_{e1} и Φ_{e2} - потоки излучения, испускаемые отверстием и стенками соответственно. В задаче требуется найти $\alpha = \Phi_{e2} / P$. С учетом (1) его можно выразить так:

$$\alpha = \frac{P - \Phi_{e1}}{P} = 1 - \frac{\Phi_{e1}}{P} \quad (2)$$

Рассмотрим излучение печи через небольшое отверстие в ней как излучение абсолютно черного тела, тогда

$$\Phi_{e_1} = M_e^0 \cdot S, \quad (3)$$

где M_e^0 - энергетическая светимость абсолютно черного тела, согласно закону Стефана-Больцмана, равная $M_e^0 = \sigma \cdot T^4$, а $S = \pi d^2 / 4$. – площадь отверстия.

С учетом (3) искомая величина α на основании (2) определяется выражением:

$$\alpha = 1 - \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\sigma T^4}{P} = 0,8.$$

Задача 1.6. Вольфрамовая нить накаливается в вакууме током силой $i_1 = 1$ А до температуры $T_1 = 1000$ К. При какой силе тока нить накаливается до температуры $T_2 = 5000$ К? Коэффициенты излучения вольфрама и его удельные сопротивления, соответствующие температурам T_1 , T_2 , равны соответственно: $a_{T1} = 0,115$; $a_{T2} = 0,334$; $\rho_1 = 25,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $\rho_2 = 96,2 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Решение

Рассмотрим излучающее тело при установившемся тепловом режиме. Согласно закону сохранения энергии

$$P = \Phi_e,$$

где P – мощность, потребляемая от источника; Φ_e – поток энергии, излучаемый нитью. Пусть r – радиус нити; L – длина нити; i – сила тока в проводнике; R – сопротивление проводника.

Тогда мощность, потребляемая нитью накаливания, на основании закона Джоуля – Ленца может быть представлена в виде

$$P = i^2 R = i^2 \rho L / \pi r^2$$

Поток энергии теплового излучения, испускаемый нитью равен

$$\Phi_e = M_e \cdot 2\pi r L$$

где M_e – энергетическая светимость вольфрама, которая может быть выражена через коэффициент теплового излучения a_T и энергетическую светимость абсолютно черного тела M_e^0 , согласно формуле (1.8) $M_e = a_T \cdot M_e^0$,

где по закону Стефана-Больцмана (1.12) $M_e^0 = \sigma \cdot T^4$

Таким образом, поток энергии теплового излучения, испускаемый нитью, записывается в виде

$$\Phi_e = a_T \cdot \sigma T^4 \cdot 2\pi r L.$$

С учетом этого выражения получаем соотношения для двух значений температуры T

$$i_1^2 \cdot \rho(T_1) = a_{T_1} \cdot \sigma T_1^4 \cdot 2\pi^2 r^3$$

$$i_2^2 \cdot \rho(T_2) = a_{T_2} \cdot \sigma T_2^4 \cdot 2\pi^2 r^3$$

Разделив их почленно и выразив i_2 , окончательно получим

$$i_2 = i_1 \left(T_2 / T_1 \right)^2 \sqrt{\frac{\rho(T_1) \cdot a_{T_2}}{\rho(T_2) \cdot a_{T_1}}} = 7,9 \text{ A}.$$

Задача 1.7. Во сколько раз надо увеличить мощность излучения абсолютно черного тела для того, чтобы максимум спектральной плотности энергетической светимости сместился от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Решение

Длина волны, соответствующая красной границе видимого спектра, приблизительно равна $\lambda_k = 0,76 \text{ мкм}$, а фиолетовой границе - $\lambda_\phi = 0,38 \text{ мкм}$.

Мощность излучения абсолютно черного тела определяется его энергетической светимостью, которая согласно закону Стефана-Больцмана равна $M_e^0 = \sigma \cdot T^4$.

Связь между температурой абсолютно черного тела и длиной волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости λ_m , определяется законом Вина (1.14)

$$T = b / \lambda_m.$$

Таким образом, энергетическая светимость абсолютно черного тела может быть выражена через величину λ_m в виде

$$M_e^0 = \sigma \cdot (b / \lambda_m)^4$$

Искомое изменение мощности излучения абсолютно черного тела при смещении максимума спектральной плотности энергетической светимости от λ_k до λ_ϕ определяется соотношением:

$$n = \frac{M_e^0(T_\phi)}{M_e^0(T_k)} = \frac{\lambda_k^4}{\lambda_\phi^4} = n^4 = 16$$

Мощность излучения необходимо увеличить в 16 раз.

Задача 1.8. Определить установившуюся температуру тонкой пластиинки, расположенной вблизи Земли за пределами ее атмосферы перпендикулярно лучам Солнца. Считать температуру пластиинки одинаковой во всех ее точках. Рассмотреть два случая, считая пластиинку телом: 1) абсолютно черным, 2) серым.

Решение

Температура пластиинки установится, когда поток излучения, испускаемый нагретой пластиинкой Φ_{e1} , станет равным потоку излучения Φ_{e2} , поглощаемого пластиинкой:

$$\Phi_{e1} = \Phi_{e2}$$

1. Абсолютно черное тело, согласно определению, поглощает весь падающий поток:

$$\Phi_{e2} = E_e \cdot S,$$

где S - площадь пластиинки, обращенная к Солнцу.

Испускаемый поток излучения Φ_{e1} найдем на основании определения, закона Стефана-Больцмана $M_e^0 = \sigma \cdot T^4$ и с учетом того, что излучают обе стороны пластиинки:

$$\Phi_{e1} = M_e^0 \cdot 2S = \sigma T^4 \cdot 2S,$$

Окончательно находим:

$$T = (\Phi_e / 2\sigma S)^{1/4} = (E_e / 2\sigma)^{1/4} = 330 \text{ К}$$

2. Серое тело, согласно определению, поглощает часть падающей энергии, которая равна

$$\Phi_{e2} = a_T \cdot E_e \cdot S.$$

Испускаемый поток излучения Φ_{e1} найдем на основании определений:

$$\Phi_{e1} = M_e \cdot 2S = a_T \cdot M_e^0 \cdot 2S = a_T \cdot \sigma T^4 \cdot 2S$$

Из полученной формулы следует, что и для серого тела установившаяся температура пластины определяется той же формулой и равна $T = 330$ К.

Задача 1.9. Определить энергетическую светимость абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий спектральный интервал длин волн $\Delta\lambda = 0,1 \text{ нм}$ вблизи максимума спектральной плотности энергетической светимости при температуре тела $T = 3000 \text{ К}$.

Решение

Энергетическая светимость тела ΔM_e , приходящая на спектральный интервал длин волн от λ_1 до λ_2 , на основании соотношения (1.2) равна

$$\Delta M_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda T} d\lambda$$

Для абсолютно черного тела в этой формуле следует подставить величину $M_{\lambda T}^0$, которая определяется по формуле Планка (1.11).

Заданная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ значительно меньше среднего значения длины волны, соответствующей середине этого интервала $\langle\lambda\rangle = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \lambda_m$, где по условию задачи λ_m соответствует длине волны, на которую приходится максимум спектральной энергетической светимости, и определяется законом Вина (1.14). При заданной температуре $T = 3000 \text{ К}$ $\langle\lambda\rangle = \lambda_m \approx 10^{-6} \text{ м}$.

Таким образом,

$$\frac{\Delta\lambda}{\langle\lambda\rangle} = \frac{10^{-9}}{10^{-6}} = 10^{-3} \ll 1$$

В этом случае расчет величины ΔM_e может быть выполнен по приближенной формуле

$$\Delta M_e \approx M_{\lambda T}^0(\lambda_m) \cdot \Delta\lambda,$$

где $M_{\lambda T}^0(\lambda_m)$ соответствует максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела и определяется соотношением (1.15). Таким образом, искомая величина ΔM_e определяется соотношением

$$\Delta M_e \approx CT^5 \cdot \Delta\lambda \approx 3,2 \text{ кВт/м}^2.$$

Задача 1.10. Медный шарик диаметром $d = 1,2 \text{ см}$ поместили в откаченный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика $T_0 = 300 \text{ К}$. Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти, через сколько времени его температура уменьшится в $n = 2,0$ раза.

Решение

В данных условиях шарик теряет свою тепловую энергию Q лишь за счет теплового излучения с поверхности. Предполагается, что теплопроводность шарика настолько велика и размер настолько мал, что температура во всех точках шарика успевает установиться приблизительно одинаковой и равной температуре его поверхности.

В таком случае, за бесконечно малый промежуток времени dt в любой момент t тепловая энергия шарика уменьшается на величину

$$dQ = -C_{yd}m \cdot dT \quad (1)$$

где dT - изменение (уменьшение) температуры шарика; C_{yd} - удельная теплоемкость материала; m – масса шарика.

Это уменьшение тепловой энергии шарика определяется энергией теплового излучения dW , испускаемой за время dt . Если Φ_e -мощность теплового излучения, то за время dt тело излучает энергию

$$dW = \Phi_e \cdot dt, \quad (2)$$

где Φ_e - поток теплового излучения для конечной поверхности излучателя S

$$\Phi_e^0 = M_e^0 \cdot S. \quad (3)$$

Здесь M_e^0 определяется по закону Стефана-Больцмана (1.12) и $S = \pi d^2$ - площадь поверхности шарика.

Уравнение баланса энергии в рассматриваемом случае записывается в виде:

$$dQ = dW. \quad (4)$$

Выражая массу шарика через его объем $V = \pi d^3 / 6$ и плотность ρ , получим

$$m = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho \quad (5)$$

Из (1) найдем $dQ = -\frac{1}{6} \pi C_{уд} \rho d^3 dT$. (6)

Из (2), с учетом (3) и (1.12) будем иметь

$$dW = \pi d^2 \sigma T^4 dT \quad (7)$$

Подставляя в (4) выражения (6) и (7), получим дифференциальное уравнение, связывающее температуру шарика T и время t . Его можно представить в виде:

$$\frac{dT}{T^4} = \frac{6 \cdot \sigma}{C_{уд} \cdot \rho \cdot d} dt \quad (8)$$

Интегрирование этого уравнения в пределах от T_0 до T_1 , где по условию задачи $T_0/T_1=n$, позволяет найти искомое время остывания t :

$$t = \frac{C_{уд} \rho \cdot d}{18 \sigma \cdot T_0^3} (n^3 - 3). \quad (9)$$

Величины ρ и $C_{уд}$ находятся из таблиц: для меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $C_{уд} = 395 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Остальные величины, входящие в (10), заданы: $d = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $T_0 = 300 \text{ К}$, $n = 2$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К}^2)$.

Производя вычисления, найдем $t = 3$ часа.

Задача 1.11. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует:

Решение

Энергия фотона: $\varepsilon_\phi = h\nu = hc/\lambda$, импульс фотона: $p_\phi = h\nu/c = \varepsilon_\phi/c$, масса фотона: $m_\phi = h\nu/c^2 = \varepsilon_\phi/c^2$.

Частота фотона определяется формулой $\nu = c/\lambda$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$;

1) для видимого света $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $\varepsilon_\phi = 2,07 \text{ эВ}$, $p_\phi = 1,1 \cdot 10^{-27} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, $m_\phi = 3,68 \cdot 10^{-36} \text{ кг}$

2) для рентгеновского излучения – $\lambda = 10^{-10} \text{ м}$
 $\varepsilon_\phi = 12,4 \text{ кэВ}$, $p_\phi = 6,62 \cdot 10^{-24} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, $m_\phi = 2,21 \cdot 10^{-32} \text{ кг}$

3) для гамма–излучения – $\lambda = 10^{-12} \text{ м}$
 $\varepsilon_\phi = 1,24 \text{ МэВ}$, $p_\phi = 6,62 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, $m_\phi = 2,21 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$

Задача 1.12. При какой длине волны энергия фотона окажется равной энергии покоя электрона?

Решение

Энергия фотона $\varepsilon_\phi = h\nu$. Энергия покоя электрона $\varepsilon_{0e} = m_{0e} \cdot c^2$, где $m_{0e} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

По условию задачи $h\nu = m_{0e} \cdot c^2$, т.к. $\nu = c/\lambda$, то $\varepsilon_\phi = hc/\lambda$.

Откуда получаем $\lambda = h/(m_{0e} \cdot c)$ и $\lambda_\phi = 2,4 \text{ пм}$.

Задача 1.13. При каком значении скорости электрона его импульс равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 1 \text{ пм}$?

Решение

Прежде всего, следует решить вопрос об использовании при заданных условиях релятивистской или классической механики. Для этого следует оценить энергию электрона и сравнить ее с энергией покоя. Энергия фотона равна $\varepsilon_\phi = hc / \lambda = 1,24 \text{ МэВ}$. Энергия покоя электрона равна $\varepsilon_{0e} = m_{0e}c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$.

Так как по условию импульс электрона равен импульсу фотона $p_e = p_\phi = hv/c$, то согласно релятивистской связи энергии покоя и

$$\varepsilon_e^2 = p_e^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4 \Rightarrow \varepsilon_e^2 = (hv)^2 + m_{0e}^2 c^4$$

Так как $hv = \varepsilon_\phi$, то $\varepsilon_e^2 = \varepsilon_\phi^2 + m_{0e}^2 c^4$. Откуда

$$\varepsilon_e / \varepsilon_{0e} = \sqrt{1 + \varepsilon_\phi^2 / \varepsilon_{0e}^2} = \sqrt{1 + 1,24 / 0,51} \approx 2,7 > 1.$$

При таком соотношении полной энергии и энергии покоя частицы необходимо пользоваться релятивистской механикой.

Используя выражение для полной энергии электрона, найдем скорость частицы из формулы Эйнштейна

$$\varepsilon_e = \frac{m_{0e}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\varepsilon_{0e}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Далее решаем уравнение:

$$\frac{1}{1-\beta^2} = 1 + \frac{\varepsilon_\phi^2}{\varepsilon_{0e}^2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_{0e}^2 / \varepsilon_\phi^2}$$

Отношение $\varepsilon_{0e}^2 / \varepsilon_\phi^2$ можно преобразовать к виду

$$\frac{\varepsilon_{0e}^2}{\varepsilon_\phi^2} = \frac{m_{0e}^2 c^4 \lambda^2}{(hc)^2} = \frac{(m_{0e} c \lambda)^2}{h^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda_C^2}$$

где $\lambda_C = h / m_{0e}c$ - комптоновская длина волны, равная $2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}$.

Таким образом, $\beta^2 = \frac{1}{1 + (\lambda / \lambda_C)^2}$

Откуда скорость электрона $v = \frac{c}{\sqrt{1 + (\lambda / \lambda_C)^2}} = 2,8 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Задача 1.14. Объяснить наличие светового давления с точки зрения квантовой теории света.

Решение

С точки зрения квантовой теории световое давление объясняется передачей импульса фотона $p_\phi = h\nu/c$ поглощающей или отражающей стенке. Световой поток монохроматического света с частотой ν , падающий нормально на стенку, приносит в единицу времени на единичную поверхность стенки энергию E_e , равную

$$E_e = \dot{n}_\phi \cdot h\nu, \quad \text{где } \dot{n}_\phi = \frac{\dot{dN}_\phi}{Sdt} - \text{число}$$

фотонов, падающих на единицу площади стенки в единицу времени.

Так как каждый фотон обладает импульсом $p_\phi = h\nu/c$, то он сообщает поглощающей стенке импульс $h\nu/c$, а отражающей - $2h\nu/c$, поскольку при отражении импульс фотона изменяется от $h\nu/c$ до $-h\nu/c$. Если коэффициент отражения ρ , то число отраженных фотонов будет $\dot{r}n_\phi$, а число поглощенных - $(1-\rho)\dot{n}_\phi$. Тогда суммарный импульс, сообщенный в единицу времени единице поверхности, будет

$$2\rho \dot{n}_\phi \frac{h\nu}{c} + (1-\rho) \dot{n}_\phi \frac{h\nu}{c} = (1+\rho) \dot{n}_\phi \frac{h\nu}{c} = \frac{E_e}{c} (1+\rho)$$

Так как импульс, сообщенный в единицу времени единице поверхности, есть давление, производимое на эту поверхность, получаем

$$P = \frac{E_e}{c} (1+\rho).$$

Учитывая, что $w_e = E_e/c$ - объемная плотность энергии излучения,

$$P = (1+\rho) \cdot w_e.$$

Задача 1.15. Пучок параллельных лучей падает нормально на зеркальную плоскую поверхность ($\rho = 1$). Мощность потока излучения $\Phi_e = 0,6 \text{ кВт}$. Определить силу давления, испытываемую этой поверхностью.

Решение

Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления P на площадь S поверхности: $F = P \cdot S$.

Давление света определяется формулой:

$$P = \frac{E_e}{c} (1+\rho),$$

где E_e - энергетическая облученность поверхности; c – скорость света в вакууме; ρ - коэффициент отражения.

Умножив обе части уравнения на S , с учетом определения - $E_e S = \Phi_e$, где Φ_e - мощность потока излучения, найдем

$$F = P \cdot S = \frac{\Phi_e}{c} (1 + \rho) = \frac{600}{3 \cdot 10^8} (1 + 1) = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

Задача 1.16. Монохроматический пучок света ($\lambda = 0,662 \text{ мкм}$) падает нормально на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,8$. Определить количество фотонов $\dot{N}_{\text{погл}}$, ежесекундно поглощаемых $S = 1 \text{ см}^2$ поверхности, если давление света на поверхность $P = 1 \text{ мкПа}$.

Решение

Пусть n_{ϕ} - число падающих на единицу поверхности в единицу времени фотонов. Если S – площадь поверхности, то число фотонов, поглощенных этой поверхностью, будет

$$\dot{N}_{\text{погл}} = n_{\phi} S (1 - \rho).$$

Плотность потока фотонов n_{ϕ} можно связать с энергетической освещенностью поверхности E_e :

$$E_e = n_{\phi} h v,$$

а энергетическую освещенность – с давлением света

$$P = \frac{E_e}{c} (1 + \rho).$$

Учитывая связь $v = c / \lambda$, найдем

$$\dot{N}_{\text{погл}} = \frac{PS\lambda}{h} \cdot \frac{(1 - \rho)}{(1 + \rho)} = 1,1 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}.$$

Задача 1.17. Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, которую оказывает световой поток с интенсивностью $J = 0,2 \text{ Вт/см}^2$ на плоскую поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,8$, если угол падения $\theta = 45^\circ$ и площадь освещаемой поверхности $S = 10 \text{ см}^2$.

Решение

С точки зрения квантовой теории световое давление объясняется передачей импульса фотона $h v / c$ поглощающей или отражающей стенке. Световой поток монохроматического света с частотой v , падающий на стенку под углом падения θ на поверхность S , приносит в единицу времени энергию Φ_e , равную

$$\Phi_e = J \cdot S \cdot \cos \theta,$$

где J – интенсивность светового потока.

Мощность светового потока, падающего на поверхность под углом θ , определяет число фотонов, падающих на поверхность \dot{N}_ϕ :

$$\Phi_e = \dot{N}_\phi \cdot \varepsilon_\phi \Rightarrow \dot{N}_\phi = \Phi_e / \varepsilon_\phi.$$

Или с учетом определения светового потока

$$\dot{N}_\phi = \frac{J \cdot S \cdot \cos \theta}{hv}.$$

Так как каждый фотон обладает импульсом hv/c , то он сообщает поглощающей стенке нормальную составляющую импульса $(hv/c)\cos\theta$ и отражающей $-2(hv/c)\cos\theta$, поскольку при отражении нормальная составляющая импульса изменяется от $(hv/c)\cos\theta$ до $-(hv/c)\cos\theta$.

Если коэффициент отражения ρ , то число отраженных фотонов будет $\rho \dot{N}_\phi$, а число поглощенных $-(1-\rho) \dot{N}_\phi$. Тогда нормальная составляющая суммарного импульса, сообщенного поверхности в единицу времени, будет

$$\frac{dp_n}{dt} = 2\rho \dot{N}_\phi \frac{hv}{c} \cos \theta + (1-\rho) \dot{N}_\phi \frac{hv}{c} \cos \theta = (1+\rho) \dot{N}_\phi \frac{hv}{c} \cos \theta$$

или $\frac{dp_n}{dt} = (1+\rho) \frac{J}{c} S \cdot \cos^2 \theta$

Полученное выражение определяет скорость изменения нормальной составляющей импульса стенки $-dp_n/dt$, т.е. силу нормального давления

$$F_n = \frac{dp_n}{dt} = (1+\rho) \cdot \frac{J}{c} S \cdot \cos^2 \theta = 6 \cdot 10^{-9} \text{Н.}$$

Задача 1.18. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 0,155 \text{ мкм}$. Работа выхода для серебра $A_{\text{вых}} = 4,7 \text{ эВ}$.

Решение

Максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна (1.25) для фотоэффекта:

$$T_{\max} = \varepsilon_\phi - A_{\text{вых}},$$

где $\varepsilon_\phi = hc/\lambda$ - энергия фотонов, падающих на поверхность металла, $A_{\text{вых}}$ - работа выхода; T_{\max} - максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Кинетическую энергию электрона можно определить либо по классической формуле (1.27), либо по релятивистской формуле (1.28), в зависимости от того, как велика скорость, сообщаемая фотоэлектрону. Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона,

вызывающего фотоэффект: если энергия фотона ϵ_ϕ много меньше энергии покоя электрона ϵ_{0e} , то может быть применена формула (1.27), а если ϵ_ϕ сравнима с ϵ_{0e} и более ее, то - по формуле (1.28)

Определим энергию фотона ультрафиолетовых лучей по формуле $\epsilon_\phi = hc/\lambda = 8 \text{ эВ}$. Полученная энергия фотона (8 эВ) много меньше энергии покоя электрона $\epsilon_{0e} = m_{0e}c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$. Следовательно, для данного случая максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона T_{\max} можно вычислить по классической формуле $T_{\max} = \frac{m_{0e}v_{\max}^2}{2}$ и уравнение Эйнштейна для фотоэффекта записать в виде:

$$\frac{m_{0e}v_{\max}^2}{2} = \epsilon_\phi - A_{\text{вых}}.$$

Откуда $v_{\max} = \sqrt{2(\epsilon_\phi - A_{\text{вых}})/m_{0e}} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$

Задача 1.19. На поверхность лития падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,31 \text{ мкм}$. Чтобы прекратить фотоэмиссионный ток, нужно приложить задерживающую разность потенциалов, равную $U_3 = 1,76 \text{ В}$. Определить работу выхода.

Решение

В соответствии с уравнением Эйнштейна (1.25)

$$\epsilon_\phi = A_{\text{вых}} + T_{\max}.$$

Работа задерживающей разности потенциалов $e \cdot U_3$ равна максимальной кинетической энергии электрона $T_{\max} = e \cdot U_3$. Тогда уравнение Эйнштейна будет иметь вид

$$\epsilon_\phi = A_{\text{вых}} + e \cdot U_3$$

откуда $A_{\text{вых}} = \epsilon_\phi - e \cdot U_3$

или, с учетом $\epsilon_\phi = hc/\lambda$,

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda} - e \cdot U_3 = 2,24 \text{ эВ}.$$

Задача 1.20. Определить красную границу фотоэффекта для цинка, работа выхода которого равна $A_{\text{вых}} = 3,74 \text{ эВ}$.

Решение

Красная граница фотоэффекта определяется соотношением (1.29)

$$\lambda_0 = \frac{h \cdot c}{A_{\text{вых}}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3,74 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,32 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,332 \text{ мкм} \quad \text{и} \quad \text{имеет}$$

физический смысл наибольшей длины волны, при которой фотоэффект еще наблюдается, причем максимальная скорость вырванных фотоэлектронов равна нулю.

Задача 1.21. Получить формулу для комптоновской длины волны, рассмотрев столкновение фотона со свободным электроном, происходящее по закону упругого удара, для которого выполняются законы сохранения энергии и импульса. Считать, что энергия фотона соизмерима с собственной энергией электрона. Найти условие применимости классической модели рассеяния света.

Решение

Для вывода комптоновского смещения надо найти длину волны рассеянного фотона λ' по заданной длине волны падающего фотона λ и углу рассеяния θ . Для этого используем законы сохранения энергии и импульса

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\phi} + \varepsilon_{0e} &= \varepsilon'_{\phi} + \varepsilon_e \\ \vec{p}_{\phi} &= \vec{p}'_{\phi} + \vec{p}_e.\end{aligned}$$

Из закона сохранения энергии выразим энергию электрона, возведем в квадрат обе части полученного равенства и учтем соотношения, связывающие энергию и импульс фотонов $p_{\phi} = \varepsilon_{\phi} / c$, $p'_{\phi} = \varepsilon'_{\phi} / c$, получим следующее уравнение

$$\varepsilon_e^2 = (\varepsilon_{\phi} - \varepsilon'_{\phi} + \varepsilon_{0e})^2 = (p_{\phi} - p'_{\phi} + \varepsilon_{0e} / c)^2 \cdot c^2.$$

Из закона сохранения импульса выразим импульс электрона, возведем в квадрат, полученное равенство умножим на c^2

$$p_e^2 \cdot c^2 = (p_{\phi}^2 + p'^2_{\phi} - 2p_{\phi}p'_{\phi} \cos\theta) \cdot c^2,$$

где θ - угол между импульсами налетающего и рассеянного фотонов.

Вычитая полученные равенства и учитывая формулу релятивистского инварианта $\varepsilon_e^2 - p_e^2 c^2 = m_{0e}^2 c^4$, после несложных преобразований приходим к выражению

$$\varepsilon_e^2 - p_e^2 c^2 = m_{0e}^2 c^4 = (p_{\phi} - p'_{\phi})^2 - 2(p_{\phi} - p'_{\phi})\varepsilon_{0e} + \varepsilon_{0e}^2$$

откуда $p_{\phi} \cdot p'_{\phi} (1 - \cos\theta) + \varepsilon_{0e} (p_{\phi} - p'_{\phi}) / c = 0$.

Разрешая это уравнение относительно p'_{ϕ} , найдем импульс фотона после рассеяния:

$$p'_{\phi} = \frac{p_{\phi} \cdot m_{0e} \cdot c}{m_{0e} \cdot c + p_{\phi} \cdot (1 - \cos\theta)} = \frac{p_{\phi} \cdot m_{0e} \cdot c}{m_{0e} \cdot c + 2 \cdot p_{\phi} \cdot \sin^2 \theta / 2}.$$

Учитывая связь энергии и импульса фотона $\varepsilon_{\phi} = p_{\phi} \cdot c$, найдем выражение для энергии рассеянного фотона:

$$\varepsilon'_{\phi} = \frac{\varepsilon_{\phi} \cdot m_{0e} \cdot c^2}{m_{0e} \cdot c^2 + \varepsilon_{\phi} \cdot (1 - \cos\theta)} = \frac{\varepsilon_{\phi} \cdot m_{0e} \cdot c^2}{m_{0e} \cdot c^2 + 2 \cdot \varepsilon_{\phi} \cdot \sin^2 \theta / 2}.$$

Далее учитывая $\varepsilon_\phi = hc/\lambda$ и $\varepsilon'_\phi = hc/\lambda'$, найдем формулу Комptonа $\lambda' - \lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\theta) = 2\lambda_C \sin^2 \theta / 2$, где $\lambda_C = \frac{h}{m_{0e}c} = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}$.

Из выражения для энергии рассеянного фотона видно, что при $\varepsilon_\phi \ll m_{0e} \cdot c^2$, энергии падающего и рассеянного фотонов равны $\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi$, следовательно $\lambda' = \lambda$, и рассеяние света описывается классической моделью взаимодействия света с веществом.

Задача 1.22. Вычислить кинетическую энергию электрона отдачи, если угол рассеяния $\theta = 90^\circ$ и энергия фотона равна энергии покоя электрона $\varepsilon_\phi = \varepsilon_{0e}$. Какова при этом скорость электрона?

Решение

Согласно определению кинетической энергии частицы в релятивистской механике $T = \varepsilon_e - \varepsilon_{0e}$.

Используя закон сохранения энергии $\varepsilon_\phi + \varepsilon_{0e} = \varepsilon'_\phi + \varepsilon_e$, находим

$$T = \varepsilon_e - \varepsilon_{0e} = \varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi$$

С учетом выражения для энергии рассеянного фотона, полученного в предыдущей задаче $\varepsilon'_\phi = \frac{\varepsilon_\phi \cdot m_{0e} \cdot c^2}{m_{0e} \cdot c^2 + 2 \cdot \varepsilon_\phi \cdot \sin^2 \theta / 2}$, найдем выражение для кинетической энергии электрона отдачи:

$$T = \frac{\varepsilon_\phi^2}{m_{0e}c^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \theta / 2}{1 + 2 \frac{\varepsilon_\phi}{m_{0e}c^2} \sin^2 \theta / 2}.$$

Так как по условию задачи $\varepsilon_\phi = \varepsilon_{0e} = m_{0e} \cdot c^2$, то, с учетом $\theta = 90^\circ$, найдем $T = 0,5 \cdot m_{0e} \cdot c^2 = 0,255 \text{ МэВ}$.

На основании релятивистского выражения для скорости электрона

$$v = c \frac{(T/\varepsilon_{0e} + 2)T/\varepsilon_{0e}}{(T/\varepsilon_{0e} + 1)^2} = \frac{c}{3} = 10^8 \text{ м/с.}$$

Задача 1.23. Определить импульс электрона отдачи для условий предыдущей задачи.

Решение

На основании релятивистского инварианта для электрона

$$(\varepsilon_e/c)^2 - p_e^2 = (\varepsilon_{0e}/c)^2$$

и определения кинетической энергии для электрона отдачи

$$T = \varepsilon_e - \varepsilon_{0e}$$

можно найти

$$p_e = \frac{T}{c} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{0e} / T}$$

В предыдущей задаче найдено, что $T = 0,5 \cdot \varepsilon_{0e}$. Окончательно получим

$$p_e = \sqrt{5 \cdot m_{0e} \cdot c / 2} = 3 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м} / \text{с}.$$

Задача 1.24. Для условий задачи 1.21 найти угол отдачи (угол между направлением импульса фотона до рассеяния и импульсом электрона).

Решение

Из векторной диаграммы (рис. 1.3), иллюстрирующей закон сохранения импульса при упругом рассеянии фотона на свободном электроне, можно найти:

$$p_\phi = p'_\phi \cdot \cos \theta + p_e \cdot \cos \varphi$$

$$p_e \cdot \sin \varphi = p'_\phi \cdot \sin \theta$$

Требуется найти связь между углами φ , θ и энергией фотона до рассеяния ε_ϕ . Из первого уравнения найдем

$$p_\phi / p'_\phi = \cos \theta + p_e / p'_\phi \cdot \cos \varphi,$$

а из второго $p_e / p'_\phi = \sin \theta / \sin \varphi$

Исключим из этих уравнений отношение p_e / p'_ϕ и учтем, что $p_\phi / p'_\phi = 1 + p_\phi / m_{0e} c = 1 + \varepsilon_\phi / \varepsilon_{0e}$ (см. задачу 1.21).

В результате ряда нesложных преобразований найдем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \theta / 2}{1 + \varepsilon_\phi / \varepsilon_{0e}}.$$

Для заданных условий $\theta = 90^\circ$, $\varepsilon_\phi = \varepsilon_{0e}$ получим $\operatorname{tg} \varphi = 1/2$, $\varphi = 25^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

1.25. Определить температуру T , при которой энергетическая светимость черного тела равна $M_e = 10 \text{ кВт}/\text{м}^2$.

1.26. Поток энергии, излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, равен $\Phi_e = 34 \text{ Вт}$. Определить температуру T печи, если площадь отверстия $S = 6 \text{ см}^2$.

1.27. Определить энергию W , излучаемую за время $t = 1 \text{ мин}$ из смотрового окошка площадью $S = 8 \text{ см}^2$ плавильной печи, если ее температура $T = 1,2 \text{ кК}$.

1.28. Температура верхних слоев звезды Сириус равна $T = 10 \text{ кК}$. Определить поток энергии Φ_e , излучаемый с поверхности площадью $S = 1 \text{ км}^2$ этой звезды.

1.29. Определить относительное увеличение $\Delta M_e/M_e$ энергетической светимости черного тела при увеличении его температуры на 1%.

1.30. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру черного тела, чтобы его энергетическая светимость M_e возросла в два раза.

1.31. Принимая, что Солнце излучает как черное тело, вычислить его энергетическую светимость M_e и температуру T его поверхности. Солнечный диск виден с земли под углом $\theta = 32''$. Солнечная постоянная $C = 1,4 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. (Солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца, равном $r_{\text{ЗС}} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$.)

1.32. Определить установившуюся температуру T зачерненной металлической пластиинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца. Значение солнечной постоянной приведено в предыдущей задаче.

1.33. Принимая коэффициент теплового излучения угля при температуре $T = 600 \text{ К}$ равным $a_T = 0,8$, определить: 1) энергетическую светимость угля; 2) энергию W , излучаемую с поверхности угля с площадью $S = 5 \text{ см}^2$ за время $t = 10 \text{ мин}$.

1.34. С поверхности сажи площадью $S = 2 \text{ см}^2$ при температуре $T = 400 \text{ К}$ за время $t = 5 \text{ мин}$ излучается энергия $W = 83 \text{ Дж}$. Определить коэффициент теплового излучения a_T сажи.

1.35. Муфельная печь потребляет мощность $P = 1 \text{ кВт}$. Температура ее внутренней поверхности при открытом отверстии площадью $S = 25 \text{ см}^2$ равна $T = 2 \text{ кК}$. Считая, что отверстие печи излучает как черное тело, определить, какая часть η мощности рассеивается стенками?

1.36. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело, находящееся при температуре $T = 280 \text{ К}$. Определить коэффициент теплового излучения a_T земли, если энергетическая светимость ее поверхности равна $M_e = 325 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч})$.

1.37. Мощность излучения шара радиусом $R = 10 \text{ см}$ при некоторой постоянной температуре T равна $P = 1 \text{ кВт}$. Найти эту температуру, считая шар серым телом с коэффициентом теплового излучения $a_T = 0,25$.

1.38. На какую длину волны λ_m приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{\max}$ черного тела при температуре $t = 0^\circ\text{C}$?

1.39. Температура верхних слоев Солнца равна $T = 5,3 \text{ кК}$. Считая Солнце абсолютно черным телом, определить длину волны λ_m , которой соответствует максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{\max}$ Солнца.

1.40. Определить температуру T черного тела, при которой максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{\max}$ приходится а) на красную границу видимого спектра ($\lambda_1 = 760 \text{ нм}$); б) на фиолетовую ($\lambda_2 = 380 \text{ нм}$).

1.41. Максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{\max}$ яркой звезды Арктур приходится на длину волны $\lambda_m = 580 \text{ нм}$. Принимая, что звезда излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T поверхности звезды.

1.42. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{\max}$ сместился с $\lambda_1 = 2,4 \text{ мкм}$ на $\lambda_2 = 0,8 \text{ мкм}$. Как во сколько раз изменилась энергетическая светимость M_e и максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{\max}$?

1.43. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{\max}$, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400 \text{ нм}$. Определить начальную T_1 и конечную T_2 температуру тела.

1.44. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела равна $(M_{\lambda,T})_{\max} = 4,16 \cdot 10^{11} \text{ Вт}/\text{м}^3$. На какую длину волны λ_m она приходится?

1.45. Температура абсолютно черного тела равна $T = 2 \text{ кК}$. Определить: 1) спектральную плотность энергетической светимости $M_{\lambda,T}$ для длины волны $\lambda = 600 \text{ нм}$; 2) энергетическую светимость M_e в интервале длин волн от $\lambda_1 = 590 \text{ нм}$ до $\lambda_2 = 610 \text{ нм}$. Принять, что средняя спектральная плотность энергетической светимости тела в этом интервале равна значению, найденному для длины волны $\lambda = 600 \text{ нм}$.

1.46. Начальная температура излучения $T = 2000 \text{ К}$. На сколько кельвинов изменилась эта температура, если длина волны, на которую приходится максимум излучения, увеличилась на $\Delta\lambda = 260 \text{ нм}$?

1.47. Какую энергию за 1 секунду излучает абсолютно черное тело, имеющее форму шара радиусом $R = 0,1 \text{ м}$, если максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 700 \text{ нм}$?

1.48. Масса Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, его радиус $R_C = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$ и эффективная температура поверхности $T = 5700 \text{ К}$. Подсчитать, пользуясь законом Стефана-Больцмана, какую массу теряет Солнце

на излучение в 1с. Оценить время, в течение которого масса Солнца уменьшилась на 1%.

1.49. Медный шар диаметром $d = 10$ см с абсолютно черной поверхностью остывает, находясь в термостате, стенки которого (также абсолютно черные) поддерживаются при температуре, близкой к абсолютному нулю. Определить, до какой температуры остынет шар через промежуток времени $\tau = 5$ ч, если его первоначальная температура $T_0 = 300$ К. Удельная теплоемкость меди $C_{уд} = 0,38$ Дж/(г·К), плотность меди $\rho = 8,93$ г/см³.

1.50. Ртутная дуга имеет мощность $P = 125$ Вт. Какое число фотонов испускается в единицу времени в излучении с длинами волн λ , равными: 612,3нм; 579,1нм; 546,1нм; 404,7нм; 365,5нм; 253,7 нм? Интенсивности этих линий составляют соответственно 2; 4; 4; 2,9; 2,5; 4% интенсивности ртутной дуги. Считать, что 80% мощности дуги идет на излучение.

1.51. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует: а) видимой части спектра $\lambda = 0,6$ мкм; б) рентгеновскому излучению с длиной волны $\lambda = 0,1$ нм, в) гаммаизлучению с длиной волны $\lambda = 1$ пм.

1.52. При какой температуре средняя тепловая энергия молекул идеального газа равна энергии фотонов, соответствующих излучению: а) человеческого тела $\lambda = 10$ мкм; б) видимого света $\lambda = 0,6$ мкм; в) рентгеновского излучения $\lambda = 0,01$ нм.

1.53. Сколько квантов излучения с длинами волн $\lambda_1 = 10$ мкм и $\lambda_2 = 2$ пм содержится в световом пучке с энергией $W = 1$ Дж?

1.54. Какое количество фотонов с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм в параллельном пучке имеет суммарный импульс, равный среднему импульсу атома гелия при температуре $T = 300$ К?

1.55. При какой температуре средний импульс нейтрона равен импульсу рентгеновского фотона с длиной волны $\lambda = 0,1$ нм?

1.56. Найти частоту монохроматического излучения, мощностью $P = 3 \cdot 10^{-2}$ Вт, что соответствует интенсивности потока 10^{14} фотон/с.

1.57. Монохроматический параллельный пучок света, проходя через диафрагму с узкой длинной прямоугольной щелью, ориентированной нормально к потоку, образует на экране дифракционную картину. Найти энергию и импульс фотонов, если известно, что первый минимум возникает в направлении угла $\phi = 6^\circ$, а ширина щели $b = 5$ мм.

1.58. Дифракционная решетка с периодом $d = 3$ мкм расположена нормально на пути монохроматического плоского светового потока. При этом углы дифракции, отвечающие двум соседним максимумам

на экране, равны $\phi_1 = 23^\circ 35'$ и $\phi_2 = 36^\circ 52'$. Вычислить энергию фотонов данного светового потока.

1.59. Пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 633$ нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии $\Phi_e = 0,6$ Вт. Определить силу давления, испытываемую этой поверхностью, а также число N фотонов, падающих на нее за время $t = 5$ с.

1.60. Параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление $P = 10$ мкПа. Определить: 1) концентрацию n фотонов в пучке; 2) число n_1 фотонов, падающих на поверхность площадью $S = 1$ м² за время $t = 1$ с.

1.61. Определить давление солнечного излучения на зачерненную пластинку, расположенную перпендикулярно солнечным лучам и находящуюся вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца (см. задачу 1.31).

1.62. Определить поверхностную плотность J потока энергии излучения, падающего на зеркальную поверхность, если световое давление при перпендикулярном падении лучей равно $P = 10$ мкПа.

1.63. Поток энергии, излучаемый электрической лампой, равен $\Phi_e = 600$ Вт. На расстоянии $r = 1$ м от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено круглое плоское зеркальце диаметром $d = 2$ см. Принимая, что излучение лампы одинаково во всех направлениях и что зеркальце полностью отражает падающий на него свет, определить силу F светового давления на зеркальце.

1.64. На зеркальце с идеально отражающей поверхностью площадью $S = 1,5$ см² падает нормально свет от электрической дуги. Определить импульс p , полученный зеркальцем, если поверхностная плотность потока излучения, падающего на зеркальце, равна $J = 0,1$ МВт/м². Продолжительность облучения $t = 1$ с.

1.65. Спутник в форме шара движется вокруг Земли на такой высоте, что поглощением солнечного света в атмосфере можно пренебречь. Диаметр спутника $d = 40$ м. Зная солнечную постоянную (см. задачу 1.31) и принимая, что поверхность спутника полностью отражает свет, определить силу давления F солнечного света на спутник.

1.66. Давление монохроматического света ($\lambda = 600$ нм) на черную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно $P = 0,1$ мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время $t = 1$ с на поверхность площадью $S = 1$ см².

1.67. Монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на

нее с силой $F = 10 \text{ нН}$. Определить число N_1 фотонов, ежесекундно падающих на эту поверхность.

1.68. Параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 662 \text{ нм}$) падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление $P = 0,3 \text{ мкПа}$. Определить концентрацию n фотонов в световом пучке.

1.69. Найти световое давление на стенки электрической 100 – ваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5 \text{ см}$. Стенки лампы отражают 4% и пропускают 96% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

1.70. На поверхность площадью $S = 0,01 \text{ м}^2$ в единицу времени падает световая энергия $E = 1,05 \text{ Дж/с}$. Найти световое давление в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на нее лучи.

1.71. При фотоэфекте с платиновой поверхности электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 0,8 \text{ В}$. Найти длину волны λ применяемого облучения и предельную длину волны λ_0 , при которой еще возможен фотоэффект. Работа выхода для платины $A = 6,3 \text{ эВ}$.

1.72. Фотоны с энергией $\varepsilon = 4,9 \text{ эВ}$ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4,5 \text{ эВ}$. Найти максимальный импульс p_{\max} , передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

1.73. Найти длину волны λ_0 света, соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития, натрия, калия и цезия. Работы выхода соответственно равны: 1,39 эВ; 2,27 эВ; 2,15 эВ; 1,89 эВ.

1.74. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275 \text{ нм}$. Найти минимальную энергию ε фотона, вызывающего фотоэффект.

1.75. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275 \text{ нм}$. Найти работу выхода электрона из металла, максимальную скорость v_{\max} электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны $\lambda = 180 \text{ нм}$, и максимальную кинетическую энергию T_{\max} электронов.

1.76. Чему равны максимальные скорости фотоэлектронов при освещении поверхности цезия и платины резонансными линиями: а) ртути ($\lambda_0 = 185 \text{ нм}$); б) кальция ($\lambda_0 = 422,7 \text{ нм}$)? Работа выхода для цезия $A_{Cs} = 1,89 \text{ эВ}$; для платины $A_{Pt} = 5,29 \text{ эВ}$.

1.77. "Красная граница" фотоэффекта для калия соответствует длине волны $\lambda_0 = 577 \text{ нм}$. Вычислить минимальное значение энергии кванта, необходимое для освобождения фотоэлектрона из данного металла.

1.78. Медный шарик, удаленный от других тел, облучают монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 0,2 \text{ мкм}$. До какого максимального потенциала зарядится шарик, теряя фотоэлектроны? Работа выхода для меди: $A = 4,47 \text{ эВ}$.

1.79. Плоскую цинковую пластинку освещают излучением со сплошным спектром, коротковолновая граница которого соответствует длине волны $\lambda = 0,3 \text{ мкм}$. Вычислить, на какое максимальное расстояние от поверхности пластиинки может удалиться фотоэлектрон, если вне пластиинки имеется задерживающее однородное электрическое поле напряженностью $E = 10 \text{ В/см}$. Работа выхода для цинка равна $A = 4,0 \text{ эВ}$.

1.80. Какова была длина волны λ рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\theta = 60^\circ$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda' = 25,4 \text{ пм}$.

1.81. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = \pi/2$. Найти энергию ϵ'_ϕ и импульс p'_ϕ рассеянного фотона.

1.82. Энергия квантов рентгеновских лучей $\epsilon = 0,6 \text{ МэВ}$. Найти энергию ϵ_e электрона отдачи, если длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

1.83. Рентгеновское излучение длиной волны $\lambda = 55,8 \text{ пм}$ рассеивается плиткой графита (Комптон – эффект). Определить длину волны λ' света, рассеянного под углом $\theta = 60^\circ$ к направлению падающего пучка света.

1.84. Определить угол θ рассеяния фотона, испытывающего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны фотона при рассеянии равно $\Delta\lambda = 3,62 \text{ пм}$.

1.85. Фотон с энергией $\epsilon = 0,4 \text{ МэВ}$ рассеялся под углом $\theta = 90^\circ$ на свободном электроне. Определить энергию ϵ' рассеянного фотона и кинетическую энергию T электрона отдачи.

1.86. Определить импульс p электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180^\circ$

1.87. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол $\theta = 180^\circ$? Энергия фотона до рассеяния равна $\epsilon = 0,255 \text{ МэВ}$.

1.88. Фотон с энергией $\epsilon = 0,25 \text{ МэВ}$ рассеялся на свободном электроне. Энергия рассеянного фотона равна $\epsilon' = 0,2 \text{ МэВ}$. Определить угол рассеяния θ .

- 1.89.** Угол рассеяния фотона равен $\theta = 90^\circ$. Угол отдачи электрона равен $\phi = 30^\circ$. Определить энергию ϵ падающего фотона.
- 1.90.** Фотон ($\lambda = 1$ пм) рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90^\circ$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону?
- 1.91.** Сравнить максимальные комптоновские изменения длины волны при рассеянии фотонов на свободных электронах и ядрах атомов водорода.
- 1.92.** Под некоторым углом θ к первоначальному пучку рентгеновских лучей длиной волны $\lambda = 10$ пм комптоновское смещение оказалось равным $\Delta\lambda = 2,4$ пм. Найти угол θ и величину энергии, переданной при этом электронам отдачи.
- 1.93.** Длина волны падающего кванта равна $\lambda = 3$ пм. Какую энергию приобретает комптоновский электрон отдачи при рассеянии кванта под углом $\theta = 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ$?
- 1.94.** В результате рассеяния кванта с первоначальной энергией $\epsilon = 0,8$ МэВ на свободном электроне длина волны рассеянного кванта оказалась равной комптоновской длине волны. Определить угол, на который рассеялся данный квант.
- 1.95.** Вычислить импульс комптоновского электрона отдачи, если известно, что фотон, первоначальная длина волны которого равна $\lambda = 5$ пм, рассеялся под углом $\theta = 90^\circ$.
- 1.96.** Определить величину комптоновского смещения и угол, под которым рассеялся фотон, если известно, что первоначальная длина волны фотона $\lambda = 3$ пм, а скорость электрона отдачи составляет $\beta = 0,6$ скорости света.
- 1.97.** Пользуясь законом сохранения импульса и формулой Комптона, найти зависимость между углом рассеяния фотона θ и углом ϕ , под которым отлетает электрон отдачи.
- 1.98.** Определить угол между направлениями движения рассеянного фотона и электрона отдачи при условии, что комптоновское смещение равно $\Delta\lambda = 1,2$ пм, а длина волны налетающего кванта $\lambda = 5$ пм.
- 1.99.** Найти длину волны падающего фотона, если известно, что энергии рассеянного фотона и электрона отдачи равны при угле 90° между направлениями их импульсов.

2. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ.

Основные понятия и законы

Волны де Бройля.

Физические явления в микромире не описываются законами классической физики. Электроны и другие микрочастицы наряду с корпускулярными свойствами проявляют и волновые свойства. Так при падении пучка электронов на кристалл наблюдается явление дифракции, аналогичное дифракции световой волны.

По гипотезе де Бройля с частицей, движущейся с импульсом \vec{p} и энергией E , может быть сопоставлена волна с частотой

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad (2.1)$$

и волновым вектором $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$, (2.2)

где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка.

Уравнение такой волны, называемой волной де Бройля, имеет вид:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(E \cdot t - \vec{p} \cdot \vec{r})}. \quad (2.3)$$

Длина волны де Бройля равна

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (2.4)$$

При скорости частицы $v \ll c$ (c - скорость света в вакууме)

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}},$$

где T – кинетическая энергия частицы.

В случае релятивистских скоростей $\lambda = \frac{h \cdot c}{\sqrt{T \cdot (T + 2 \cdot m_0 c^2)}}$.

Фазовая скорость волн де Бройля зависит от длины волны λ , что означает наличие дисперсии. Групповая скорость совпадает со скоростью движения частицы.

Физический смысл волн де Бройля раскрывается в квантовой механике (см. решение задачи 2.9). Пока отметим, что они имеют вероятностный смысл: квадрат амплитуды волны в каком-либо месте дает вероятность обнаружить частицу в этом месте пространства.

Соотношения неопределенности.

Волновые свойства частиц накладывают ограничения на точность одновременного определения координат и импульса частицы. Выражения, связывающие неопределенность координаты с

неопределенностью соответствующей проекции импульса, называются соотношениями неопределенностей Гейзенберга:

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \frac{\hbar}{2}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Более строго эти соотношения записываются в виде:

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \cdot \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (2.6)$$

И аналогично для других координат. Скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по ансамблю частиц, находящихся в одинаковом квантовом состоянии.

Соотношениями неопределенностей в квантовой теории связаны также некоторые другие пары физических величин. Например, если частица проводит в некотором состоянии конечное время Δt , то ее энергия в этом состоянии не определена точно. Неопределенность энергии ΔE связана с Δt соотношением:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.7)$$

Вследствие соотношения (2.7) возбужденные энергетические уровни атомов, имеющие ограниченное время жизни, уширены, что приводит к конечной ширине спектральных линий, излучаемых при переходах между этими уровнями.

Основные положения квантовой механики.

Волновая функция.

Состояние частицы в квантовой механике определяется комплексной функцией координат и времени $\Psi(\vec{r}, t)$, которая называется волновой функцией. Обычно волновую функцию нормируют к единице.

$$\int |\Psi|^2 dV = 1, \quad (2.8)$$

где интегрирование проводится по всему пространству, в котором может находиться частица.

Квадрат модуля нормированной волновой функции $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$, где Ψ^* - комплексно-сопряженная функция, имеет смысл плотности вероятности. Это означает, что если точку с координатами x, y, z окружить малым объемом dV , то вероятность обнаружить частицу в этом объеме равна:

$$dw = |\Psi|^2 dV \quad (2.9)$$

Вероятность обнаружить частицу в конечном объеме V равна:

$$w_V = \int_V |\Psi|^2 dV \quad (2.10)$$

Волновая функция должна удовлетворять стандартным условиям: быть однозначной, конечной и непрерывной и иметь непрерывные первые производные.

Уравнение Шредингера.

Изменение волновой функции со временем определяется уравнением Шредингера:

$$i\hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\vec{r}, t) \cdot \Psi \quad (2.11)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, в декартовых координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$U(\vec{r}, t)$ - функция, описывающая воздействие на частицу со стороны других тел.

Если известна волновая функция в начальный момент времени $\Psi(\vec{r}, 0)$, то, решив уравнение (2.11), мы получим волновую функцию в любой последующий момент времени. Можно сказать, что уравнение Шредингера (2.11) играет в квантовой механике роль второго закона Ньютона. В случае, когда U не зависит от времени, она имеет смысл потенциальной энергии частицы. В этом случае решение уравнения (2.11) можно искать в виде:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) \cdot e^{-i \frac{E \cdot t}{\hbar}} \quad (2.12)$$

Здесь E - полная энергия частицы. Решение (2.12) называется стационарным. Вид координатной части волновой функции $\Psi(\vec{r})$ определяется из стационарного уравнения Шредингера:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \cdot \Psi = 0 \quad (2.13)$$

Из (2.12) видно, что в стационарном случае $|\Psi|^2$ не зависит от времени, т.е. распределение по пространству вероятности обнаружить частицу постоянно. Можно показать, что в стационарном состоянии также оказываются постоянными и средние значения всех динамических величин (см. 2.16).

Принцип суперпозиции состояний.

Принцип суперпозиции утверждает, что если в данных условиях система может находиться в различных состояниях, которым соответствуют волновые функции $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i$, то возможно также

состояние с волновой функцией $\Psi = \sum_i C_i \Psi_i$, где C_i – произвольные комплексные числа.

Для примера рассмотрим суперпозицию волн де Броиля (2.3) с разными близкими по значению длинами волн, лежащими в интервале $\Delta\lambda$. Как показано в задаче (2.9) плоская волна де Броиля является волновой функцией частицы, движущейся с постоянным импульсом. При суперпозиции волновых функций с различными близкими по значению импульсами (а значит и длинами волн, поскольку $\lambda = h/p$) образуется волновой пакет. Ширина пакета Δx уменьшается с увеличением $\Delta\lambda$, а значит и с увеличением разброса значений импульса частицы в пределах Δp . Частица в данном случае будет локализована в области порядка Δx . Соответствующий расчет дает $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$, что согласуется с соотношением неопределенностей (2.5).

Операторы в квантовой механике и их связь с результатами измерений динамических величин.

Каждой физической величине Q ставится в соответствие определенный оператор \hat{Q} . Оператор – это некоторое математическое действие, которое производится над функцией, в результате чего получается другая функция. Действие оператора на функцию записывается как умножение $\hat{Q}\Psi$. Например, оператор координаты равен самой координате: $\hat{x} = x$. Его действие сводится к умножению на соответствующую координату. То же для любой функции координат: $\hat{\phi}(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$. Оператор проекции импульса

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat{p}_x \Psi = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Аналогично $\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}.$

Операторы связаны между собой такими же соотношениями, как соответствующие величины в классической механике. Например,

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\hbar^2 \Delta.$$

Оператор кинетической энергии $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$. Оператор полной энергии называется гамильтонианом и имеет вид:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U \quad (2.14)$$

Пусть при действии оператора на функцию получается та же функция, умноженная на число:

$$\hat{Q}\phi = q \cdot \phi \quad (2.15)$$

В этом случае ϕ называют собственной функцией, а q – собственным значением оператора \hat{Q} . Совокупность собственных значений (спектр) может быть как непрерывной, так и дискретной.

При измерении динамической величины Q могут получаться только такие значения, которые являются собственными значениями оператора \hat{Q} . Если волновая функция частицы Ψ является одной из собственных функций оператора \hat{Q} , то при измерениях физической величины Q всегда будет получаться число q , являющееся собственным значением оператора \hat{Q} , соответствующим собственной функции Ψ . В этом случае динамическая величина Q является определенной.

Если же волновая функция не является собственной функцией оператора \hat{Q} , то при измерении величины Q будут получаться разные значения q из спектра собственных значений оператора. В состоянии с такой волновой функцией величина Q оказывается неопределенной.

Среднее значение величины Q находится по формуле:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dV \quad (2.16)$$

В (2.16) волновая функция должна быть нормирована к единице; интегрирование проводится по всему пространству.

Отметим, что с учетом (2.14) уравнение Шредингера (2.13) является уравнением на собственные функции и собственные значения оператора энергии:

$$\hat{H}\Psi = E \cdot \Psi \quad (2.17)$$

Примеры решения задач

Задача 2.1. Найти длину волны де Броиля: 1) электрона, летящего со скоростью 10^6 м/с , 2) атома водорода, движущегося со скоростью, равной средней квадратичной скорости при температуре 300K , 3) шарика массой 10^{-3}кг , движущегося со скоростью $0,1 \text{ м/с}$. В каком из этих случаев необходимо учитывать волновые свойства частицы?

Решение

Для определения длины волны воспользуемся формулой де Броиля (2.4) $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$.

Оценим для электрона ($v \ll c$) $\lambda_e = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6} = 7,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Для водорода $v = v_{\text{KB}}$, значение v_{KB} найдем из формулы $v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_H}}$,

где $k=1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Получим следующую расчетную формулу:

$$\lambda_H = \frac{h}{m_H v} = \frac{h}{\sqrt{3km_H T}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 300}} = 1,45 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$\text{Для шарика } \lambda_{\text{ш}} = \frac{h}{m_{\text{ш}} v} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{10^{-3} \cdot 0,1}} = 6,62 \cdot 10^{-32} \text{ м}$$

Волновые свойства частиц можно обнаружить в опытах по дифракции. Явление дифракции наблюдается, если длина волны соизмерима с размерами препятствия. Обнаружить дифракцию волн, связанных с движением шарика, невозможно. Шарик является макрочастицей, и его движение описывается законами классической механики.

Задача 2.2. На грань кристалла никеля падает пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения изменяется. Когда этот угол становится равным 64° , наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее максимуму первого порядка. Приняв расстояние между атомными плоскостями равным 0,2 нм, определить длину волны де Броиля электронов и их скорость.

Решение

Согласно условию Вульфа–Брегга, появление дифракционных максимумов определяется соотношением $2d \cdot \sin \theta = k\lambda$.

Отсюда $\lambda = 0,36 \text{ нм}$. Скорость электронов v можно определить из формулы де Броиля $v = h/m_e \lambda = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.

Задача 2.3. Найти связь между длиной волны де Броиля для электрона и длиной круговой электронной орбиты, на которой электрон движется в атоме водорода, согласно модели атома Бора.

Решение

Из теории Бора известно, что стационарной орбите соответствует соотношение $m v_n \cdot r_n = n \hbar$ (1)

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Волна де Броиля определяется соотношением

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (2)$$

Из (2) определяем импульс частицы $mv = h/\lambda$ и его значение подставляем в (1). Получим, что $r_n = \frac{n\lambda}{2\pi}$, откуда следует, что

на длине стационарной круговой орбиты должно укладываться целое число длин волн де Броиля: $2\pi \cdot r_n = n \cdot \lambda$.

Задача 2.4. Коротковолновая граница сплошного (тормозного) рентгеновского спектра при заданном напряжении на рентгеновской трубке $\lambda_k = 10 \text{ пм}$. Найти длину волны де Броиля электронов, подлетающих к аноду.

Решение

Как известно, тормозное рентгеновское излучение возникает при бомбардировке быстрыми электронами твердых мишеней. При этом коротковолновая граница сплошного излучения определяется из соотношения:

$$T = \frac{hc}{\lambda_k} = h\nu_k,$$

где T – кинетическая энергия электронов. Оценим ее:

$$T = \frac{hc}{\lambda_k} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^{-12}} = 19,86 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 1,24 \cdot 10^5 \text{ эВ.}$$

Как видим, кинетическая энергия электрона, подлетающего к аноду, сравнима с энергией покоя электрона $m_0 c^2 = 5,1 \cdot 10^5 \text{ эВ}$, т.е. имеет место релятивистский случай движения. Длина волны де Броиля, для этого случая определяется формулой

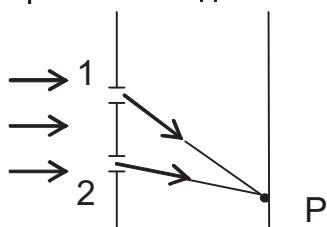
$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\sqrt{T \cdot (T + 2 \cdot m_0 c^2)}}.$$

Подставляя сюда значения констант и величин T и $m_0 c^2$, найдем для искомой длины волны де Броиля значение $\lambda = 3,3 \text{ пм}$.

Задача 2.5. Поток электронов падает на экран с двумя щелями. Пусть A_1 – амплитуда волны де Броиля, достигшей точки P , если открыта только щель 1, а A_2 – амплитуда волны в точке P , если открыта только щель 2. Отношение $A_2/A_1=3$. Если открыта только щель 1, счетчик, расположенный в точке P , регистрирует 100 электронов в секунду. Сколько электронов в секунду будет регистрировать счетчик, если: а) открыта только щель 2? б) Открыты обе щели и в точке P наблюдается интерференционный максимум? в) в точке P – интерференционный минимум?

Решение

Число частиц, регистрируемых счетчиком, пропорционально вероятности для частицы оказаться в окрестности точки P , что в свою очередь определяется квадратом амплитуды волны: $N = C \cdot A^2$, где N - число частиц, регистрируемых счетчиком за одну секунду, C - коэффициент пропорциональности, A – амплитуда волны.



Когда открыта только щель 1,

$N_1 = CA_1^2 = 100 \text{ c}^{-1}$. Когда открыта только щель 2, $N_2 = CA_2^2 = 9CA_1^2 = 900 \text{ c}^{-1}$. Когда открыты обе щели, в точке Р происходит интерференция двух волн. В случае интерференционного максимума результирующая амплитуда $A_{\max} = A_1 + A_2 = 4A_1$. $N_{\max} = CA_{\max}^2 = 16CA_1^2 = 1600 \text{ c}^{-1}$. В случае интерференционного минимума $A_{\min} = A_2 - A_1 = 2A_1$. $N_{\min} = CA_{\min}^2 = 4CA_1^2 = 400 \text{ c}^{-1}$

Задача 2.6. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Ширина ямы $l = 10^{-10} \text{ м}$. С помощью соотношения неопределенностей оценить минимально возможную энергию электрона.

Решение

Будем отсчитывать потенциальную энергию электрона от дна ямы. Тогда в пределах ямы $U=0$. Полная энергия в этом случае $E = \frac{p^2}{2m_e}$, где m_e – масса электрона. Для оценки минимальной энергии запишем соотношение неопределенностей (2.5) в виде $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar/2$. Неопределенность координаты примем порядка ширины ямы: $\Delta x \approx l$. Тогда $\Delta p_x \approx \hbar/2l$. С учетом (2.6) $(\Delta p_x)^2 = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle$. Поскольку электрон не может покинуть область ямы, $\langle p_x \rangle = 0$. Отсюда $(\Delta p_x)^2 = \langle p_x \rangle^2 = p^2$. Получаем $p^2 \approx \frac{\hbar^2}{4l^2}$ и $E \approx \frac{\hbar^2}{8l^2 m_e} \approx 10^{-19} \text{ Дж} = 1 \text{ эВ}$.

Задача 2.7. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить наименьшую энергию гармонического осциллятора.

Решение

Полная энергия гармонического осциллятора равна:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2},$$

где m – масса осциллятора, k – коэффициент квазиупругой силы.

Частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Таким образом, энергия осциллятора

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Для оценки минимальной энергии запишем соотношение (2.6) в виде $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \cdot \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle \approx \frac{\hbar^2}{4}$.

Поскольку движение осциллятора симметрично относительно положения равновесия $x = 0$, имеем $\langle x \rangle = 0$, $\langle p_x \rangle = 0$. Получаем

$$\langle x^2 \rangle \cdot \langle p_x^2 \rangle \approx \hbar^2 / 4; \quad \langle x^2 \rangle \approx \frac{\hbar^2}{4 \langle p_x^2 \rangle}.$$

Усредним энергию осциллятора и подставим туда полученное значение $\langle x^2 \rangle$:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + \frac{m\omega^2 \langle x^2 \rangle}{2} \approx \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + \frac{\omega^2 m \hbar^2}{2 \cdot 4 \langle p_x^2 \rangle}.$$

Найдем $\langle p_x^2 \rangle$, при котором $\langle E \rangle$ будет минимально

$$\frac{d\langle E \rangle}{d\langle p_x^2 \rangle} = \frac{1}{2m} - \frac{\hbar^2 m \omega^2}{8 \langle p_x^2 \rangle^2} = 0,$$

откуда

$$\langle p_x^2 \rangle = \frac{\hbar m \omega}{2} \quad \text{и} \quad \langle E_{\min} \rangle = \frac{\hbar \omega}{4} + \frac{\hbar \omega}{4} = \frac{\hbar \omega}{2}.$$

Задача 2.8. Частица с массой m и энергией E находится в поле потенциального барьера: $U = 0$ ($x \leq 0$), $U = U_0$ ($x > 0$), причем $U_0 > E$. С помощью соотношения неопределенностей оценить среднюю кинетическую энергию частицы внутри барьера ($x > 0$). Использовать значение эффективной глубины проникновения $l_{\text{эфф}}$, полученное в задаче 2.13.

Решение

Область $x > 0$ в случае $E < U_0$ недоступна для частицы, подчиняющейся классическим законам. В этой области ее кинетическая энергия $T = E - U_0$ была бы отрицательна, что лишено смысла. По квантовой механике T не является точно определенной величиной; при ее определении будут получаться различные значения.

Для оценки среднего значения кинетической энергии $\langle T \rangle$ воспользуемся соотношением неопределенностей $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \cdot \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle \geq \hbar^2 / 4$. В случае $E < U_0$ происходит полное отражение от барьера, поэтому в области $x > 0$ $\langle p_x \rangle = 0$. Примем для оценки, что неопределенность координаты порядка эффективной глубины проникновения в область $x > 0$: $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \approx l^2$. Тогда из соотношения неопределенностей получим

$$\langle p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4l^2} \quad \text{и} \quad \langle T \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8ml^2}.$$

Подставив сюда значение эффективной глубины проникновения $l_{\text{эфф}}$, полученное в задаче 2.13, $l_{\text{эфф}} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}}$, получим $\langle T \rangle \geq U_0 - E$.

Задача 2.9. Найти волновую функцию для свободной частицы, движущейся в положительном направлении оси X с импульсом p.

Решение

Положим потенциальную энергию частицы $U = 0$. Тогда уравнение Шредингера (2.13) запишется в виде:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\Psi = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx},$$

где $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar}$ – волновое число. В соответствии с (2.12) волновая функция частицы равна:

$$\Psi(x, t) = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} + B \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + px)}$$

Первое слагаемое представляет собой волну де Броиля, распространяющуюся в положительном направлении оси X, второе – в отрицательном. По условию задачи положим $B = 0$. Получим

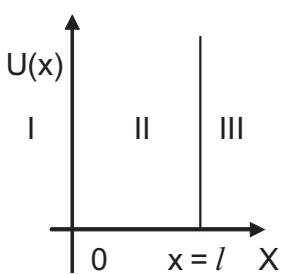
$$\Psi(x, t) = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}.$$

Плотность вероятности

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \cdot \Psi = A^2 e^{+\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} = A^2.$$

Поскольку $|\Psi|^2$ не зависит от x, частицу с равной вероятностью можно обнаружить в любой точке оси X. Таким образом, при определенном значении импульса частицы p, частица оказывается полностью нелокализованной.

Задача 2.10. Найти собственные значения энергии и собственные функции для электрона, находящегося в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками и шириной l (см. рис.). Проанализировать решение.



Решение

Определим вид потенциального поля в условиях задачи: $U(x) = 0$ при $0 < x < l$; $U(x) = \infty$ при $x \leq 0$, $x \geq l$. Таким образом, все пространство $-\infty < x < \infty$ разбито на три области: I, II, III. По условию задачи электрон находится в области II. Поскольку потенциальная яма имеет

бесконечно высокие стенки, то электрон не может выйти за ее пределы, т.е. вероятность обнаружить электрон в областях I и III равна нулю, $|\Psi_1(x)|^2 = 0$ и $|\Psi_3(x)|^2 = 0$.

Из условия непрерывности Ψ функции следует, что на границах потенциального поля в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = l$

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0; \quad \Psi_2(l) = \Psi_3(l) = 0 \quad (1)$$

Соотношения (1) называются граничными условиями. Уравнение Шредингера для движения электрона вдоль оси x в области II:

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi_2 = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) соответствует движению свободной частицы, т.к. в области $0 < x < l$ потенциальное поле $U(x) = 0$. Обозначим

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (3)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, λ - длина волны де Броиля для электрона. С учетом (3) уравнение (2) запишем в виде:

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + k^2 \cdot \Psi_2 = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) можно записать в виде:

$$\Psi_2(x) = A \sin(k \cdot x) + B \cos(k \cdot x) \quad (5)$$

где A и B – постоянные интегрирования. При $x = 0$, $\Psi_2(0) = 0$ и $B = 0$. Подставляя в (5) $x = l$, находим $A \sin(kl) = 0$. Поскольку $A \neq 0$, то $\sin(kl) = 0$. Тогда

$$k \cdot l = \pi \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Из соотношений (3) и (6) находим собственные значения энергии электрона:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot n^2 \quad (7)$$

Таким образом, граничные условия удовлетворяются лишь для дискретного ряда значений энергии $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$. Следовательно, из решения уравнения Шредингера следует, что частица, “запертая” в потенциальной яме, может иметь только дискретный спектр энергий.

Решения уравнения (6) в виде $\Psi_2(x) = A \sin(k \cdot x)$, отвечающие собственным значениям энергии частицы E_n , являются собственными функциями. Их можно записать с учётом (6) в виде:

$$\Psi_{2,n}(x) = A \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad (8)$$

Постоянную A найдём из условия нормировки Ψ -функции:

$$\int_0^l |\Psi_{2,n}(x)|^2 dx = 1.$$

Учитывая (8), будем иметь

$$\int_0^l A_n^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right) dx = \frac{1}{2} A_n^2 \int_0^l \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{l} \cdot x\right)\right] dx = \frac{1}{2} \cdot A_n^2 \cdot l = 1.$$

Следовательно, $A_n = \sqrt{2/l}$. Окончательно для $\Psi_{2,n}$ - функции получим нормированное выражение

$$\Psi_{2,n} = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right).$$

На рис. 2.1 приведены графики собственных значений энергии E_n (а), собственных функций $\Psi_n(x)$ (б) и квадратов их модулей $|\Psi_n(x)|^2$ (в).

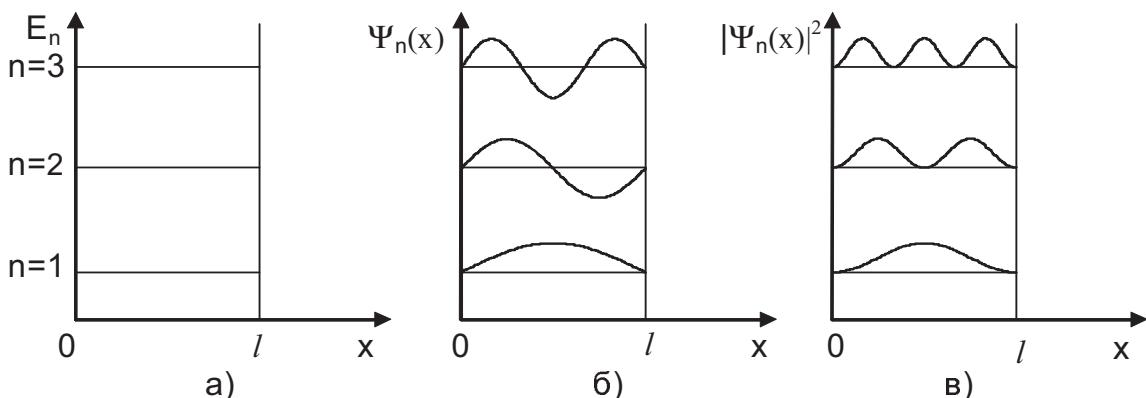


Рис. 2.1

График $|\Psi_n(x)|^2$ характеризует распределение вероятности обнаружения электрона в том или ином месте внутри ямы при различных значениях энергии электрона. Как видно из рисунка, в низшем энергетическом состоянии $n = 1$ (основное состояние) с наибольшей вероятностью можно найти электрон около середины ямы, а вероятность найти его у стенок равна нулю. Этот результат резко отличается от того, что можно ожидать для макроскопической частицы, которую с равной вероятностью можно найти в любом месте пространства.

Задача 2.11. Электрон находится в потенциальной яме шириной:
 а) $l_1 = 0,45$ нм б) $l_2 = 0,9$ см. Определить наименьшую разность энергетических уровней ΔE электрона. Ответ выразить в эВ

Решение

Значение собственной энергии электрона в потенциальной яме определяется по формуле (7) предыдущей задачи и равно

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8m_e l^2}, \quad (1)$$

где $n = 1, 2, 3\dots$ - номер энергетического уровня (состояния); $\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг - масса электрона; l - ширина потенциальной ямы: а) $l = 4,5 \cdot 10^{-10}$ м, б) $l = 9 \cdot 10^{-3}$ м.

Разность энергий соседних энергетических уровней $n+1$ и n составляет

$$E_{n+1} - E_n = \Delta E = \frac{\hbar^2}{8m_e l^2} (2n + 1) \quad (2)$$

Наименьшая величина ΔE будет при $n = 1$

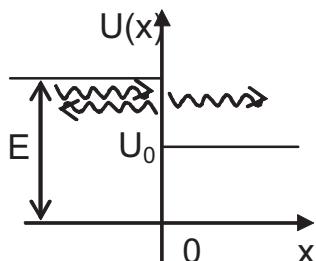
$$\Delta E_{\min} = \frac{3\hbar^2}{8m_e l^2} \quad (3)$$

Подставляя в (3) численные данные и учитывая, что $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж, найдем: а) $\Delta E_{\min} = 5,57 \text{ эВ}$ - дискретность уровней наблюдается; б) $\Delta E_{\min} = 1,39 \cdot 10^{-14} \text{ эВ}$ - дискретность уровней обнаружить нельзя.

Задача 2.12. Частица, движущаяся вдоль оси X , встречает бесконечно протяженный потенциальный барьер. Найти коэффициент отражения барьера для случая $E/U_0 = 2$, где E - энергия частицы, U_0 – высота барьера.

Решение

Возьмем начало барьера в точке $x = 0$. Тогда потенциальная энергия при $x < 0$ равна 0, при $x \geq 0$ $U = U_0$. В области $x < 0$ уравнение (2.13) имеет вид:



Общее решение такого уравнения:
 $\Psi = A \cdot e^{ik_1 x} + B \cdot e^{-ik_1 x}$, где $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$.
 Волновая функция частицы в области $x < 0$
 $\Psi(x, t) = A \cdot e^{-i(\frac{E}{\hbar}t - k_1 \cdot x)} + B \cdot e^{-i(\frac{E}{\hbar}t + k_1 \cdot x)}$

Здесь первое слагаемое представляет волну, падающую на барьер, второе – волну, отраженную от барьера.

Коэффициент отражения R определяется как $R = \left| \frac{B}{A} \right|^2$.

$$\text{В области } x \geq 0: \frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \Psi_2 = 0.$$

Решение этого уравнения: $\Psi = C \cdot e^{ik_2 x} + D \cdot e^{-ik_2 x}$, где $k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar$;
 $\Psi(x, t) = C \cdot e^{-i(\frac{E}{\hbar}t - k_2 \cdot x)} + D \cdot e^{-i(\frac{E}{\hbar}t + k_2 \cdot x)}$.

Второе слагаемое в этом решении представляет волну, бегущую в отрицательном направлении оси X. Поскольку барьер имеет бесконечную протяженность, отражения волны в области $x \geq 0$ произойти не может. Следовательно, $D = 0$. Получаем

$$\Psi(x, t) = C \cdot e^{-\left(\frac{E}{\hbar}t - k_2 \cdot x\right)},$$

что описывает проходящую в область барьера волну.

Из непрерывности волновой функции в точке $x = 0$ имеем

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0), \quad \text{что дает } A + B = C.$$

Из непрерывности первых производных $\Psi'_1(0) = \Psi'_2(0)$ получаем $Ak_1 - Bk_1 = Ck_2$.

Подставив сюда $C = A + B$, получим

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{и} \quad R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Используя выражения для k_1 и k_2 , найдем

$$R = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - U_0/E}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{1 - U_0/E}\right)^2}.$$

Численный расчет дает $R = 0,0295$. Классическая частица с энергией $E > U_0$ наверняка прошла бы в область $x > 0$, т.е. для нее $R = 0$. Квантовомеханическое рассмотрение показывает, что с вероятностью 2,95% частица отразится от барьера, а с вероятностью 97,05% пройдет в область $x > 0$.

Задача 2.13. Электрон с энергией $E = 100\text{эВ}$ падает на прямоугольный потенциальный барьер бесконечной протяженности, имеющий высоту $U_0 = 150 \text{ эВ}$. Определить эффективную глубину проникновения электрона в область барьера.

Решение

В области $x < 0$ волновая функция электрона имеет вид падающей на барьер и отраженной от него волн (см. задачу 2.12).

$$\Psi(x, t) = A \cdot e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - k_1 \cdot x\right)} + B \cdot e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t + k_1 \cdot x\right)}$$

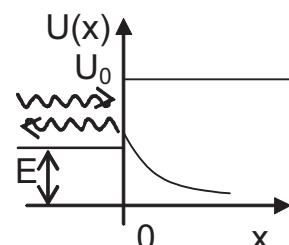
В области $x \geq 0$ уравнение Шредингера можно записать в виде:

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E) \Psi_2 = 0$$

Решение такого уравнения:

$$\Psi_2(x) = C \cdot e^{-k_2 x} + D \cdot e^{k_2 x}, \quad \text{где} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}.$$

Чтобы Ψ_2 была ограниченной при $x \rightarrow \infty$, положим $D = 0$.



$$\Psi_2(x) = C \cdot e^{-k_2 x}$$

Далее из требования непрерывности волновой функции и ее первой производной в точке $x = 0$ получим: $A + B = C$; $ik_1 A - ik_1 B = -k_2 C$. Из двух последних уравнений следует:

$$B = A \frac{ik_1 + k_2}{ik_1 - k_2} \quad \text{и} \quad R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1.$$

Итак, коэффициент отражения в случае $E < U_0$ $R = 1$. Частица наверняка отразится от барьера. Этот вывод совпадает с результатом решения подобной задачи по законам классической механики.

Однако, в отличие от классического рассмотрения, вероятность обнаружить частицу в области $x > 0$ не равна нулю, так как $|\Psi_2|^2$ экспоненциально убывает с удалением от точки $x = 0$. Расстояние l , на котором плотность вероятности обнаружить частицу уменьшается в e раз, называется эффективной глубиной проникновения. $|\Psi_2|^2 = C^2 e^{-2k_2 x}$;

$$|\Psi_2(0)|^2 = C^2; \quad |\Psi_2(l)|^2 = C^2 e^{-1};$$

Следовательно $l = \frac{1}{2k_2}$. Подставив сюда выражение для k_2 , получим $l = l_{\text{эфф}} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}}$. Проведя вычисления, найдем $l = 12$ пм.

Задача 2.14. Частица массой m находится в сферически-симметричной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками: $U(r) = 0$ при $r < r_0$ и $U(r) = \infty$ при $r \geq r_0$. Для случая, когда волновая функция зависит только от r , найти а) собственные значения энергии частицы; б) нормированные собственные функции.

Решение

В области потенциальной ямы уравнение Шредингера имеет вид:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0$$

В сферически-симметричном случае решать уравнение следует в сферической системе координат (r, θ, ϕ) . Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\phi},$$

где угловая часть оператора Лапласа $\Delta_{\theta,\phi}$ содержит только производные по углам θ и ϕ . Следовательно $\Delta_{\theta,\phi}\Psi(r) = 0$.

Таким образом, получаем уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0.$$

Сделаем подстановку $\Psi(r) = \frac{\chi(r)}{r}$; тогда $\frac{d\Psi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r^2}$ и

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} - \chi \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{d\chi}{dr} + r \frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{d\chi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2\chi}{dr^2}$$

Приходим к уравнению

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \chi = 0.$$

Общее решение такого уравнения можно записать в виде:

$$\chi = A e^{ikr} + B e^{-ikr}, \quad \text{где} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Из ограниченности $\Psi = \chi/r$ в точке $r = 0$ имеем $\chi(0) = 0$, что дает $A + B = 0$ и $B = -A$. Тогда решение приобретает вид:

$$\chi = A \cdot (e^{ikr} - e^{-ikr}) = C \cdot \sin(k \cdot r)$$

Поскольку стенки ямы непроницаемы, из условия непрерывности волновой функции следует $\chi(r_0) = 0$; $\sin(kr_0) = 0$. Последнее равенство выполняется, если

$$k \cdot r_0 = \pi \cdot n, \quad \text{где} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Значение $n = 0$ следует отбросить, так как при $n = 0$, $\chi = 0$ во всем пространстве. Из $k = \frac{\pi n}{r_0}$ находим собственные значения энергии $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mr_0^2}$ и собственные функции $\Psi = \frac{C \sin(\pi n r / r_0)}{r}$.

Нормируем функции: $\int |\Psi|^2 dV = 1$. В сферической системе координат элемент объема $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$. Нормировочный интеграл после подстановки Ψ и dV приобретает вид:

$$C^2 \int_0^{r_0} \frac{\sin^2 k \cdot r}{r^2} \cdot r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 1.$$

Здесь $\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2$; $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$. Получаем

$$\int_0^{r_0} \sin^2 kr dr = \frac{1}{2} \int_0^{r_0} (1 - \cos(2kr)) dr = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{\sin(2kr)}{2k} \right) \Big|_0^{r_0} = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{\sin(\pi nr / r_0)}{2k} \right) \Big|_0^{r_0} = \frac{r_0}{2}.$$

Подставляя, находим $\frac{C^2 \cdot 4\pi r_0}{2} = 1$; $C^2 = \frac{1}{2\pi r_0}$.

Нормированные собственные функции $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \cdot \frac{\sin(\pi nr / r_0)}{r}$

Задача 2.15. Найти среднюю кинетическую энергию частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками $0 < x < l$, если частица находится в состоянии $\Psi(x) = Ax(l - x)$.

Решение

Среднее значение динамической переменной T , согласно (2.16), равно $\langle T \rangle = \int \Psi^* \hat{T} \Psi dV$. В этом выражении волновая функция нормирована к единице, а интеграл берется по всему пространству, где находится частица. Оператор кинетической энергии

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \quad (\text{см. (2.14)}).$$

Таким образом, среднее значение кинетической энергии в данном состоянии определяется выражением

$$\langle T \rangle = A^2 \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^l x(l - x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} [x(l - x)] dx.$$

Здесь интегрирование проводится по области ямы, так как за ее пределами волновая функция равна нулю.

Входящая в подынтегральное выражение величина $\frac{d^2}{dx^2} [x(l - x)] = -2$, следовательно, среднее значение кинетической энергии $\langle T \rangle$ будет

$$\langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{m} \cdot A^2 \int_0^l x(l - x) dx = \frac{\hbar^2}{m} \cdot A^2 \cdot \frac{l^3}{6}.$$

Величину A^2 найдем из условия нормировки волновой функции (2.8):

$$A^2 \int_0^l x^2(l - x)^2 dx = 1; \quad A^2 = 30/l^2.$$

Окончательно получим $\langle T \rangle = \frac{5\hbar^2}{ml^2}$.

Заданная волновая функция не является собственной функцией оператора энергии в яме $\hat{H} = \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dx^2}$. Поэтому частица не

находится на каком–то определенном уровне и может быть обнаружена на разных уровнях.

Измеряя энергию частицы, мы с разной вероятностью будем получать различные собственные значения

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m/l^2} \cdot n^2. \quad \text{Определенное значение в}$$

заданном состоянии будет иметь только средняя энергия.

Задача 2.16. Найти собственные функции и собственные значения оператора проекции момента импульса $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$.

Решение

Запишем уравнение на собственные функции и собственные значения оператора проекции момента импульса

$$\hat{L}_z \Psi = L_z \cdot \Psi,$$

где $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ - оператор проекции момента импульса, L_z -

собственные значения оператора проекции момента импульса. С учетом вида оператора, уравнение примет вид:

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = L_z \Psi.$$

Разделяем переменные $\frac{d\Psi}{\Psi} = \frac{iL_z}{\hbar} d\phi$ и интегрируем полученное уравнение

$$\ln \Psi = \frac{iL_z}{\hbar} \phi + C,$$

C - произвольная константа. Получаем

$$\Psi = e^{\frac{iL_z \cdot \phi + C}{\hbar}} = A e^{\frac{iL_z \cdot \phi}{\hbar}}.$$

Из условия однозначности Ψ следует $\Psi(\phi) = \Psi(\phi + 2\pi)$, т.е.

$$e^{\frac{iL_z \phi}{\hbar}} = e^{\frac{iL_z (\phi + 2\pi)}{\hbar}}, \quad \text{откуда } e^{\frac{iL_z 2\pi}{\hbar}} = 1.$$

Последнему равенству удовлетворяют только значения показателя экспоненты равные $i \cdot 2\pi m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\frac{L_z \cdot 2\pi}{\hbar} = 2\pi m; \quad L_z = m\hbar.$$

Итак, собственные значения есть числа, кратные \hbar , а собственные функции: $\Psi = C e^{im\phi}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.17. Вычислить длину волны де Броиля электрона и протона, движущихся с кинетической энергией 1,0 кэВ. При каких значениях кинетической энергии их длина волны будет равна $\lambda = 100$ пм?

2.18. При увеличении энергии электрона на $\Delta E = 200$ эВ его длина волны де Броиля изменилась в $\eta = 2$ раза. Найти первоначальную длину волны электрона.

2.19. Найти длину волны де Броиля молекул водорода, движущихся с наиболее вероятной скоростью в газе при температуре $t = 0^\circ\text{C}$.

2.20. Определить кинетическую энергию протона, длина волны де Броиля которого такая же, как и у а- частицы, движущейся в магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл по окружности радиусом $R = 5$ см.

2.21. Какую дополнительную энергию необходимо сообщить электрону с импульсом $p = 8 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с, чтобы его длина волны де Броиля стала равной $\lambda = 50$ пм?

2.22. Релятивистская частица массы m движется с кинетической энергией T . Найти: а) длину волны де Броиля частицы; б) значения T , при которых погрешность в длине волны, определяемой по нерелятивистской формуле, не превышает одного процента для электрона, для протона.

2.23. Найти кинетическую энергию, при которой длина волны де Броиля электрона равна его комптоновской длине волны.

2.24. На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой m , чтобы можно было исследовать структуры с линейными размерами L ? Решить этот вопрос для электронов и протонов, если $L \sim 10^{-15}$ м.

2.25. Вычислить длину волны релятивистских электронов, подлетающих к аноду рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра равна $\lambda_k = 10$ пм.

2.26. Воспользовавшись формулой распределения Максвелла, найти функцию распределения молекул газа по длинам волн де Броиля, а также их наиболее вероятную длину волны. Масса каждой молекулы m , температура газа T . Вычислить наиболее вероятную длину волны молекул водорода при $T = 300$ К.

2.27. Поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой щелью шириной $b = 2,0$ мкм. Найти скорость электронов, если на экране, отстоящем от щели на $L = 50$ см, ширина центрального дифракционного максимума $\Delta x = 0,36$ мкм.

2.28. Найти кинетическую энергию электронов, падающих нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, если на экране, отстоящем от диафрагмы на $L = 75$ см, расстояние между соседними максимумами $\Delta x = 7,5$ мкм. Расстояние между щелями $d = 25$ мкм.

2.29. Узкий пучок моноэнергетических электронов падает под углом скольжения $\theta = 30^\circ$ на естественную грань монокристалла алюминия. Расстояние между соседними кристаллическими плоскостями, параллельными этой грани монокристалла, $d = 0,2$ нм. При некотором ускоряющем напряжении U_0 наблюдали максимум зеркального отражения. Найти U_0 , если известно, что следующий максимум зеркального отражения возникал при увеличении ускоряющего напряжения в $\eta = 2,25$ раз.

2.30. Пучок электронов с кинетической энергией $T = 180$ эВ падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол $\alpha = 55^\circ$ с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения четвертого порядка. Найти межплоскостное расстояние, соответствующее этому отражению.

2.31. Написать уравнение де Бройля для свободно движущейся частицы в параметрах v , k и E , p для двух случаев:

- а) частица движется вдоль оси x ;
- б) частица движется под произвольным углом к осям координат.

2.32. Определить длину волны де Бройля протона, кинетическая энергия которого равна энергии покоя электрона.

2.33. Найти скорости и кинетические энергии электрона и нейтрона, длина волны де Бройля которых равна $\lambda = 0,1$ нм

2.34. Вычислить длины волн де Бройля электрона и протона, если кинетическая энергия каждой частицы равна соответствующей ей энергии покоя. Массы частиц принять равными: $m_{0e} = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $m_{0p} = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

2.35. На сколько отличаются длины волн де Бройля протона и атома водорода, движущихся с одинаковой кинетической энергией $T = 1$ эВ?

2.36. Электрон движется по окружности радиусом $R = 0,5$ см в однородном магнитном поле, напряженность которого $H = 46 \cdot 10^3 / 4\pi$ А/м. Какова длина волны де Бройля электрона?

2.37. Для каких значений энергии нейтронов следует ожидать особенно резких дифракционных явлений при рассеянии их на естественных кристаллах с постоянными решетками от 0,25 нм до 0,6 нм?

2.38. Получить в общем виде формулу, выражающую зависимость длины волны де Броиля от ускоряющего потенциала для релятивистской частицы.

2.39. При каком значении кинетической энергии ошибка в определении длины волны де Броиля без учета релятивистской поправки составляет 1%: а) для электрона; б) для протона, в) для а - частицы?

2.40. Для изучения строения ядра атома в настоящее время в различных лабораториях мира строят ускорители электронов до энергий $E = 6 \text{ ГэВ}$. Какова длина волны де Броиля данных электронов?

2.41. Пользуясь условием Вульфа – Брэгга, найти первые три значения ускоряющей разности потенциалов, при которых наблюдается максимальное отражение электронов в следующем опыте: пучок электронов падает на естественную грань монокристалла под углом скольжения $\theta = 30^\circ$; отраженные электроны наблюдаются под углом равным углу падения. Постоянная кристаллической решетки $d = 0,24 \text{ нм}$. Преломлением электронных волн в кристалле для простоты пренебречь.

2.42. Поток электронов с длиной волны де Броиля $\lambda = 11 \text{ мкм}$ падает нормально на прямоугольную щель шириной $b = 0,1 \text{ мм}$. Оценить с помощью соотношения неопределенностей угловую ширину пучка за щелью (в градусах). Считать $\Delta x = b/2$.

2.43. Оценить наименьшие погрешности, с которыми можно определить скорость электрона и протона, локализованных в области размером $L = 1 \text{ мкм}$. Считать $\Delta x = L/2$.

2.44. Оценить неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома порядка $L = 0,1 \text{ нм}$. Сравнить полученное значение со скоростью электрона на первой боровской орбите. Считать $\Delta x = L/2$.

2.45. Оценить минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $L = 0,1 \text{ нм}$. Считать $\Delta x = L/2$.

2.46. Электрон с кинетической энергией $T = 10 \text{ эВ}$ локализован в области размером $L = 0,1 \text{ нм}$. Оценить относительную неопределенность скорости электрона. Считать $\Delta x = L/2$.

2.47. Частица массы m локализована в области размером L . Оценить кинетическую энергию T частицы, при которой ее относительная неопределенность будет порядка $\sim 0,01$. Считать $\Delta x = L/2$.

2.48. Атом испустил фотон с длиной волны $\lambda = 0,58 \text{ мкм}$ за время $\tau = 10^{-8} \text{ с}$. Оценить неопределенность Δx , с которой можно установить

координату фотона в направлении его движения, а также относительную неопределенность его длины волны.

2.49. С помощью соотношения неопределенностей оценить энергию связи электрона в основном состоянии атома водорода и соответствующее расстояние электрона от ядра. Принять $\Delta r \approx r$ и $\Delta v \approx v$.

2.50. Приняв, что минимальная энергия E_{\min} нуклона в атомном ядре равна 10 МэВ, оценить исходя из соотношения неопределенностей линейные размеры ядра.

2.51. Пусть моноэнергетический пучок электронов ($T = 10$ эВ) падает на щель шириной a . Можно считать, что если электрон прошел через щель, то его координата известна с неточностью $\Delta x = a/2$. Оценить получаемую при этом относительную неточность в определении импульса электрона $\Delta p/p$ в двух случаях: 1) $a = 10$ нм, 2) $a = 0,1$ нм. В каком случае существенно проявляются волновые свойства электронов?

2.52. Используя соотношение неопределенностей $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$, оценить ширину энергетического уровня в атоме водорода, находящегося: 1) в основном состоянии; 2) в возбужденном состоянии (время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-8}$ с).

2.53. Состояние частицы описывается волновой функцией $\Psi(x,0) = A \cdot \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2} + ikx\right)$, где a и k - положительные постоянные.

Найти:

- нормировочный коэффициент A ;
- среднее значение координаты частицы $\langle x \rangle$;
- среднее значение квадрата координаты частицы $\langle x^2 \rangle$.
- среднее значение импульса $\langle p_x \rangle$

2.54. Частица находится в состоянии, которое описывается волновой функцией $\Psi(x,0) = A \cdot \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2} + ikx\right)$, где A , a , k - положительные постоянные. Найти:

- распределение плотности вероятности местонахождения частицы $w(x)$;
- эффективный размер области локализации частицы. (Эффективной областью локализации считать область, на границах которой плотность вероятности $w(x)$ уменьшается в e раз).

2.55. Решение уравнения Шредингера для одномерной прямоугольной потенциальной ямы ширины L с бесконечно

высокими стенками может быть записано в виде:
 $\Psi(x,0) = A \cdot \exp(ikx) + B \cdot \exp(-ikx)$. Найти:

- а) собственные значения энергии частицы;
- б) нормированные собственные функции частицы.

2.56. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти ширину ямы, если разность энергий между уровнями с $n_1 = 2$ и $n_2 = 3$ составляет $\Delta E = 0,3$ эВ.

2.57. Электрон находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы $L = 0,1$ нм. Найти температуру, при которой средняя кинетическая энергия молекул идеального одноатомного газа равна энергии электрона в основном состоянии.

2.58. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти число энергетических уровней в интервале энергий $(E, E+dE)$, если E значительно больше энергии основного состояния.

2.59. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. На сколько процентов отличаются энергии двух соседних уровней, если а) $n=3$, б) $n = 10$, в) $n = 100$.

2.60. Определить, при какой ширине одномерной прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками дискретность энергетического спектра электрона, т.е. $E_{n+1} - E_n$ сравнима с его средней кинетической энергией при температуре T .

2.61. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L с бесконечно высокими стенками. В каких точках в интервале $0 < x < L$ плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях одинакова? Вычислить значение плотности вероятности для этих точек. Решение пояснить графически.

2.62. В одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L с бесконечно высокими стенками движется электрон. Вычислить вероятность обнаружения электрона на первом энергетическом уровне в интервале $L/4$, равноудаленном от стенок ямы

2.63. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L с бесконечно высокими стенками находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $\frac{3}{8}L < x < \frac{5}{8}L$.

2.64. Частица массой m находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Стороны ямы a и b . Найти:

- нормированные собственные функции частицы (начало координат взять в одном из углов ямы);
- собственные значения энергии частицы;
- координаты точек, в которых плотность вероятности местонахождения частицы в состоянии с квантовыми числами $n_1 = 2$ и $n_2 = 3$ максимальна.

2.65. Электрон находится в основном состоянии в двумерной квадратной бесконечно глубокой потенциальной яме со стороной l . Определить вероятность обнаружения электрона в области, ограниченной квадратом, который равноудален от стенок ямы и площадь которого составляет одну четвертую площади дна ямы

2.66. Волновая функция некоторой частицы имеет вид:

$$\Psi(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{A}\right), \text{ где } r - \text{расстояние от этой частицы до силового центра, } A \text{ и } a - \text{постоянные. Определить:}$$

- нормировочный коэффициент A ;
- среднее расстояние частицы до силового центра $\langle r \rangle$.

2.67. Электрон находится в сферически симметричной потенциальной яме радиуса r_0 с абсолютно непроницаемыми стенками. Для состояний, которые описываются волновыми функциями $\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \cdot \frac{\sin(\pi n r / r_0)}{r}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, найти:

- среднее значение координаты $\langle r \rangle$;
- среднее значение квадрата координаты $\langle r^2 \rangle$;
- среднеквадратичную флуктуацию $\sigma^2 = \langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$.

2.68. Электрон в атоме водорода находится в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(r) = A(1 + \alpha r) \exp(-\beta r)$, где A , α и β - некоторые постоянные. Найти энергию электрона в этом состоянии.

2.69. Основное состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией $\Psi(r) = A \cdot \exp(-r/r_1)$, где A - некоторая постоянная, $r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ - первый боровский радиус. Найти:

- распределение плотности вероятности местонахождения электрона;

б) вероятность нахождения электрона в области, ограниченной сферой радиуса r_1 ;

в) вероятность обнаружения электрона в области $r > 2r_1$.

2.70. Волновая функция электрона в основном состоянии атома водорода имеет вид: $\Psi(r) = A \cdot \exp(-r/r_1)$, где A - некоторая постоянная, $r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ - первый боровский радиус. Найти:

а) наиболее вероятное расстояние между электроном и ядром $r_{\text{вер}}$;

б) среднее расстояние между электроном и ядром $\langle r \rangle$;

в) среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle}$.

2.71. Волновая функция электрона в основном состоянии атома водорода: $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} \cdot \exp\left(-\frac{r}{r_1}\right)$, где r_1 - первый боровский радиус. Найти:

а) среднеквадратичное значение расстояния $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$;

б) среднее значение $1/r$ и потенциальной энергии электрона в поле ядра;

в) среднее значение $1/r^2$ и кулоновской силы, действующей на электрон;

г) вероятность обнаружить электрон в области $r > r_1$;

д) вероятность обнаружить электрон в области $r < 10^{-15} \text{ м}$ (внутри ядра).

2.72. Показать, что волновая функция $\Psi(r) = A(1+\beta r) \cdot \exp(-ar)$ описывает стационарное состояние электрона в атоме водорода. Найти значения констант β и a и энергию данного состояния. Какому уровню энергии по теории Бора соответствует данное состояние?

2.73. Электрон находится в возбужденном состоянии атома водорода с волновой функцией: $\Psi(r) = A \cdot \left(1 - \frac{r}{2r_1}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r}{2r_1}\right)$, где r_1 - радиус первой боровской орбиты. Найти: значение нормировочной постоянной A .

2.74. Показать, что волновая функция $\Psi(r) = A \cdot \left(1 - \frac{27 \cdot r}{7r_1} + \frac{2 \cdot r^2}{21 \cdot r_1^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r}{3 \cdot r_1}\right)$ является решением уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом (атом водорода). Состояние

с какой энергией она описывает? Какому квантовому числу по теории Бора соответствует это состояние?

2.75. Частица массой m находится в одномерном потенциальном поле $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ в основном состоянии, для которого волновая функция имеет вид: $\Psi(x) = A \exp(-\beta x^2)$, где A - нормировочный коэффициент; $\beta = \frac{m\omega}{2\hbar}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Найти нормированное распределение плотности вероятности местонахождения частицы.

2.76. Основное состояние частицы массой m в одномерном потенциальном поле $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ описывается волновой функцией:

$\Psi(x) = A \exp(-\beta x^2)$, где A - нормировочный коэффициент; $\beta = \frac{m\omega}{2\hbar}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Найти:

- наиболее вероятное значение координаты частицы $x_{\text{вер}}$;
- среднее значение координаты частицы $\langle x \rangle$;
- среднеквадратичную флуктуацию $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$.

2.77. Основному состоянию частицы массой m в одномерном потенциальном поле $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ отвечает волновая функция $\Psi(x) = A \exp(-\beta x^2)$, где A - нормировочный коэффициент; $\beta = \frac{m\omega}{2\hbar}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Найти среднее значение потенциальной $\langle U \rangle$ и кинетической $\langle T \rangle$ энергий частицы.

2.78. Частица с массой m и энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высоты U_0 . Для случая $E > U_0$ найти:

- коэффициент отражения барьера R .
- коэффициент прозрачности барьера D .

2.79. Электрон с энергией $E = 50$ эВ, двигаясь в положительном направлении оси x , встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высоты $U_0 = 20$ эВ. Определить:

- вероятность отражения электрона от этого барьера;

б) коэффициент преломления волн де Броиля на границе этого барьера.

2.80. Вывести формулу, связывающую коэффициент преломления n волн де Броиля на границе прямоугольного бесконечно широкого потенциального барьера и коэффициент отражения этого барьера R .

2.81. Определить показатель преломления n волн де Броиля при падении частиц на прямоугольный бесконечно широкий потенциальный барьер с коэффициентом отражения $R = 0,5$.

2.82. Найти приближенное выражение для коэффициента отражения R от очень низкого прямоугольного бесконечно широкого потенциального барьера $U_0 \ll E$.

2.83. Коэффициент отражения протонов от прямоугольного бесконечно широкого потенциального барьера равен $R = 2,5 \cdot 10^{-5}$. Определить, какой процент составляет высота барьера от кинетической энергии падающих на барьер протонов.

2.84. Определить, во сколько раз кинетическая энергия электронов превышает высоту прямоугольного бесконечно широкого потенциального барьера, если коэффициент прозрачности этого барьера D равен коэффициенту отражения R .

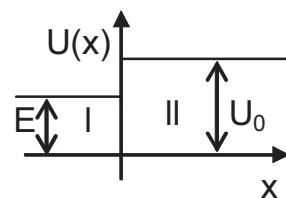
2.85. Вывести формулу, связывающую коэффициент прозрачности D прямоугольного бесконечно широкого потенциального барьера и коэффициент преломления n волн де Броиля.

2.86. Определить показатель преломления n волн де Броиля на границе прямоугольного бесконечно широкого потенциального барьера, если коэффициент прозрачности этого барьера $D = 0,8$.

2.87. Определить коэффициент прозрачности прямоугольного бесконечно широкого потенциального барьера высотой $U_0 = 99,75$ эВ для электрона с энергией $E = 100$ эВ.

2.88. Частицы с массой m и энергией E движутся в положительном направлении оси X на бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 > E$. Найти:

- коэффициент отражения этого барьера;
- плотность вероятности нахождения частиц за границей барьера ($x > 0$), если Ψ -функция нормирована так, что ее амплитуда в области $x < 0$ равна единице.



2.89. Определить коэффициент преломления волн де Броиля для протонов на границе потенциальной ступени, если кинетическая энергия протонов 16 эВ, а высота потенциальной ступени $U_0 = 9$ эВ.

2.90. На пути частиц массы m , движущихся с энергией E , находится прямоугольный бесконечно широкий потенциальный барьер высоты $U_0 > E$. Определить эффективную глубину проникновения частиц в

область $x > 0$, т.е. расстояние от границы барьера до точки, где плотность вероятности нахождения частиц уменьшается в e раз. Рассчитать $x_{\text{эфф}}$ для электронов, если $U_0 - E = 1 \text{ эВ}$.

2.91. Электрон с энергией $E = 5 \text{ эВ}$ движется в положительном направлении оси x , встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высоты $U_0 = 10 \text{ эВ}$ и ширины $l = 0,1 \text{ нм}$. Определить:

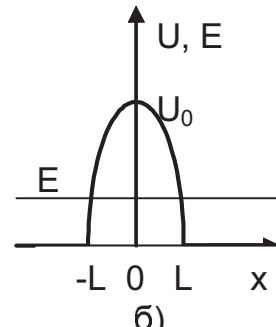
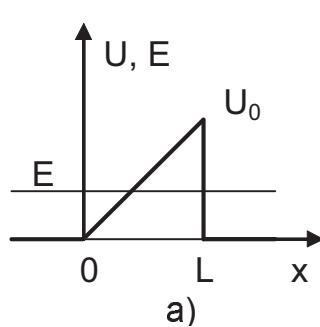
- коэффициент прозрачности этого барьера D .
- во сколько раз надо уменьшить ширину барьера, чтобы вероятность прохождения через него протона при тех же значениях E и U_0 была такой же, как для электрона.

Указание: Воспользоваться формулой для коэффициента прозрачности барьера конечной ширины $D \approx \exp\left[-\frac{2 \cdot l}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}\right]$.

2.92. Найти с помощью формулы для коэффициента прозрачности потенциального барьера $D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} \cdot dx\right]$,

где x_1 и x_2 - координаты точек, между которыми $U > E$, вероятность прохождения частицы с массой m и энергией E сквозь потенциальный барьер, если барьер имеет форму,

- показанную на рисунке а);
- показанную на рисунке б); где $U(x) = U_0(1 - x^2/L^2)$.



3. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ.

Основные понятия и законы

Водородоподобная система.

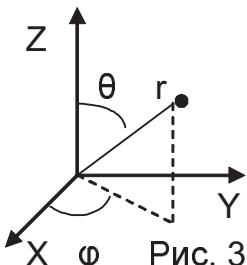
Водородоподобная система представляет собой электрон, движущийся в поле точечного положительно заряженного ядра с зарядом $+Ze$. К такой системе относятся атом водорода ($Z = 1$) и ионы элементов с порядковым номером Z , из которых удалены все электроны, кроме одного. Масса ядра значительно больше массы электрона, поэтому ядро можно считать неподвижным. В системе СИ потенциальная энергия электрона в поле ядра равна:

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.1)$$

где r – расстояние от электрона до ядра. С учетом (3.1) уравнение Шредингера (2.13) для электрона будет иметь вид:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = 0. \quad (3.2)$$

Поле, в котором движется электрон, является центрально-симметричным, поэтому при решении уравнения (3.2) используются сферические координаты (r, θ, ϕ) (рис. 3.1). Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид:



$$\Delta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \Delta_{\theta,\phi} \quad (3.3)$$

Угловая часть оператора Лапласа $\Delta_{\theta,\phi}$

содержит только производные по углам θ и ϕ и не содержит переменной r , поэтому решение уравнения (3.2) можно искать в виде произведения двух функций:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot Y(\theta, \phi). \quad (3.4)$$

Функция $R(r)$ называется радиальной частью волновой функции, а $Y(\theta, \phi)$ – угловой частью. При подстановке (3.4) в уравнение (3.2) оно распадается на два независимых уравнения для $R(r)$ и $Y(\theta, \phi)$.

Оператор $\Delta_{\theta,\phi}$ связан с оператором квадрата момента импульса \hat{L}^2 соотношением

$$\Delta_{\theta,\phi} = -\hat{L}^2 / \hbar^2. \quad (3.5)$$

Уравнение

$$\hat{L}^2 Y = L^2 \cdot Y$$

имеет решение только при значениях

$$L^2 = \hbar^2 \cdot l \cdot (l+1), \quad \text{где } l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Собственные функции оператора \hat{L}^2 - шаровые функции $Y_{l,m}(\theta, \phi)$, содержащие два целочисленных параметра l и m , причем m может принимать значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

Подставляя решение (3.4) в уравнение (3.2), с учетом (3.5) и (3.6) для радиальной части $R(r)$ получим уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \cdot R = 0 \quad (3.7)$$

Это уравнение имеет решения, удовлетворяющие стандартным условиям, при всех $E > 0$, что соответствует свободному электрону (не связанному в атоме). Для связанных состояний $E < 0$ решение имеется, если энергия принимает дискретный ряд значений:

$$E_n = -\frac{Z^2 me^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2 n^2}, \quad (3.8)$$

где $n = 1, 2, \dots$ и $n \geq l + 1$. (3.9)

Решения уравнения (3.7) зависят от двух целочисленных параметров n, l $R_{n,l}(r)$. Таким образом, волновые функции $\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi)$ зависят от трех целых чисел n, l, m . Число n называется главным квантовым числом ($n = 1, 2, 3, \dots$). В соответствии с (3.8) n определяет энергию электрона. Число l называется орбитальным квантовым числом; оно принимает в соответствии с (3.6) и (3.9) значения $l = 0, 1, 2, \dots (n - 1)$ и определяет модуль момента импульса

$$|\vec{L}| = \hbar \sqrt{l \cdot (l+1)} \quad (3.10)$$

Приняты следующие символические обозначения состояний электрона в зависимости от значения l :

значение l	0	1	2	3	...
обозначение состояния	s	p	d	f	...

Число m называется магнитным квантовым числом ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$) и определяет проекцию момента импульса на произвольное направление (ось Z).

$$L_z = \hbar \cdot m \quad (3.11)$$

Уравнение Шредингера является нерелятивистским уравнением. Релятивистская квантовая теория дает, что кроме момента импульса, связанного с орбитальным движением вокруг ядра, электрон обладает собственным моментом импульса, называемым спином. Его модуль принимает квантованные значения

$$|\vec{S}| = \hbar \cdot \sqrt{s \cdot (s+1)}, \quad (3.12)$$

определяемые спиновым квантовым числом $s = 1/2$. Проекция спина

на ось Z: $S_z = \hbar \cdot m_z$,

(3.13)

где $m_s = +1/2, -1/2$.

Полный момент импульса электрона в атоме \vec{J} определяется суммой орбитального \vec{L} и спинового моментов \vec{S} . Его модуль может принимать значения

$$|\vec{J}| = \hbar \cdot \sqrt{j \cdot (j+1)}, \quad (3.14)$$

квантовое число полного момента импульса j и может принимать два значения $j = l + s, |l - s|$

Проекция полного момента импульса J_z квантуется по правилу:

$$J_z = \hbar \cdot m_j,$$

причем $m_j = j, (j-1), (j-2) \dots -j$.

С учетом спина состояние электрона в атоме определяется четырьмя квантовыми числами: n (главное квантовое число), l (орбитальное квантовое число), m (магнитное квантовое число) и m_s (квантовое число проекции спинового момента импульса).

В квантовой механике доказывается, что момент импульса (\vec{L} , \vec{S} или \vec{J}) имеет определенный модуль и определенное значение проекции на одну из осей (например, ось Z). Другие две проекции не определены. Следовательно, определенного направления в пространстве момент импульса не имеет. При решении некоторых вопросов используется упрощенный полуклассический подход – так называемая векторная модель атома. В этой модели моменты импульсов изображаются в виде векторов и складываются друг с другом как векторы.

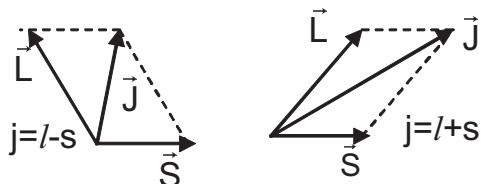


Рис. 3.2

В рамках векторной модели найдем полный механический момент атома как сумму орбитального \vec{L} и спинового \vec{S} моментов (рис. 3.2).

С наличием спина связана тонкая структура энергетических уровней и спектральных линий атомов и ионов.

Без учета тонкой структуры энергия электрона в водородоподобной системе определяется формулой (3.8). В соответствии с этой формулой на рис.3.3 показана схема энергетических уровней. Каждому значению энергии соответствует несколько различных состояний, отличающихся числами l , m , или

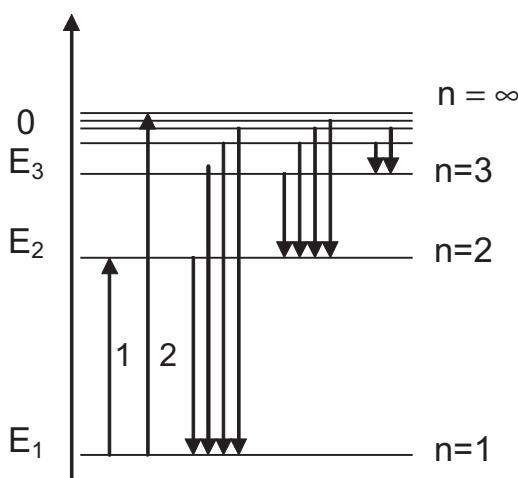


Рис. 3.3

m_s . Такие состояния называют *вырожденными*. Число различных состояний с одинаковой энергией называют *кратностью вырождения*. Состояние с наименьшей энергией ($n = 1$) – *основное состояние*.

Переходу из основного состояния на уровень с большим значением энергии соответствует процесс возбуждения атома, а необходимая для этого энергия называется энергией возбуждения. Употребляется также термин “потенциал возбуждения”. Потенциал численно равен соответствующей энергии, выраженной в электрон – вольтах.

На рис.3.3 стрелкой 1 показан переход, которому соответствует первый потенциал возбуждения. Переход $n = 1 \rightarrow n = \infty$ характеризуется потенциалом ионизации (стрелка 2 на рис.3.3). Каждому состоянию соответствует определенная “энергия связи” электрона. Это есть энергия, необходимая для ионизации из данного состояния. Очевидно, энергия связи равна энергии состояния, взятой по модулю.

При переходе из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией излучается квант света. Энергия излученного кванта равна разности энергий верхнего E_B и нижнего E_H уровней:

$$h\nu = E_B - E_H. \quad (3.16)$$

Используя (3.8) и (3.16), получаем, что водородоподобная система излучает частоты

$$\nu = \frac{Z^2 e^4 m}{8\hbar^3 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n_H^2} - \frac{1}{n_B^2} \right) \quad (3.17)$$

где n_H - главное квантовое число нижнего состояния, а n_B - главное квантовое число для верхнего состояния.

Аналогичное выражение для излучаемых длин волн имеет вид:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2 e^4 m}{8\hbar^3 \epsilon_0^2 c} \left(\frac{1}{n_H^2} - \frac{1}{n_B^2} \right). \quad (3.18)$$

Вводят постоянную Ридберга $R = \frac{e^4 m}{8\hbar^3 \epsilon_0^2 c} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$. Через

постоянную Ридберга удобно записывать энергию:

$$E_n = -\frac{Z^2 R h c}{n^2} \quad (3.19)$$

и выражение, определяющее излучаемые длины волн,

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_H^2} - \frac{1}{n_B^2} \right). \quad (3.20)$$

Переходы с различных верхних уровней на один и тот же нижний образуют серию линий (спектральную серию). На рис.3.3 показаны серии водорода и сходных с ним ионов. У водорода серия Лаймана (переход электрона на уровень $n = 1$) лежит в ультрафиолетовой

области спектра. В серии Бальмера (переходы на $n = 2$) часть линий относится к видимому диапазону, остальные – к близкой ультрафиолетовой области. Все другие серии водорода (серия Пашена, Брекета и т.д.) находятся в инфракрасном диапазоне.

Как доказывается в квантовой механике, при переходах электрона из одного состояния в другое с испусканием или поглощением кванта света, действуют так называемые правила отбора. В частности, орбитальное квантовое число при переходах может изменяться только на единицу ($\Delta l = \pm 1$).

Многоэлектронные атомы.

Каждый электрон в многоэлектронном атоме движется в поле ядра и остальных электронов, которое отличается от поля точечного заряда. Состояние электрона определяется теми же четырьмя квантовыми числами, что и в одноэлектронной системе: главным числом n , орбитальным l , магнитным m и спиновым m_s .

Однако в отличие от случая поля точечного заряда энергия электрона зависит не только от числа n , но и от l , увеличиваясь с увеличением значений n и l . Как правило, энергия в первую очередь определяется числом n , и для меньших n энергия меньше, независимо от значения числа l . В невозбужденном атоме электроны занимают состояния с возможно более низкими значениями энергии.

При распределении электронов по состояниям соблюдается принцип Паули, согласно которому в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Другими словами, в атоме не может быть двух электронов с одинаковым набором квантовых чисел n , l , m , m_s .

При заданных значениях n и l существует $2(2l + 1)$ различных состояний; при определенном n – $2n^2$ различных состояний. Все состояния с определенным значением n образуют оболочку. Оболочки принято обозначать заглавными латинскими буквами:

n	1	2	3	4	...
Обозначение оболочки	K	L	M	N	...

K – оболочка содержит только электроны в S - состоянии ($l = 0$), L – оболочка имеет s - подоболочку ($l = 0$) и p - подоболочку ($l = 1$) и т.д. В соответствии с принципом Паули s - подоболочка может содержать не более двух электронов; p - подоболочка не более 6; K – оболочка может вместить не более двух электронов; L – оболочка не более 8 и т.д.

В таблице 1 приведено распределение электронов по состояниям для ряда элементов периодической системы. В последней графе записана электронная конфигурация основного состояния.

Таблица 1

	К-оболочка	L-оболочка	M-оболочка	Электронная конфигурация
элемент	S	S p	S p d	
H	1			1S
He	2			1S ²
Li	2	1		1S ² 2S
Be	2	2		1S ² 2S ²
B	2	2	1	1S ² 2S ² 2p

Момент импульса атома складывается из моментов всех электронов электронной оболочки. Для большинства атомов из начала таблицы Менделеева характерна схема сложения моментов, называемая L-S связью. Орбитальные моменты отдельных электронов складываются в результирующий орбитальный момент атома \vec{M}_L , спиновые моменты электронов – в спиновый момент атома \vec{M}_S . Затем результирующие моменты \vec{M}_L и \vec{M}_S складываются в полный момент атома \vec{M}_J . Величины моментов атома определяются формулами:

$$M_L = |\vec{M}_L| = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \quad M_S = |\vec{M}_S| = \hbar\sqrt{S(S+1)}, \quad M_J = |\vec{M}_J| = \hbar\sqrt{J(J+1)},$$

где L - орбитальное квантовое число атома, S - спиновое квантовое число атома, J - квантовое число полного момента атома. (Для квантовых чисел атома, в отличие от отдельных электронов, употребляются заглавные буквы).

Подоболочки, полностью заполненные электронами, имеют результирующие числа L = 0, S = 0 и, следовательно, J = 0. Все моменты заполненных оболочек оказываются равными нулю. Моменты атома определяются электронами внешней, незаполненной оболочки. Эти электроны называются валентными электронами. Излучение спектральных линий происходит при переходах одного из валентных электронов. Остальные электроны при этом, как правило, не возбуждаются.

Энергия состояния атома определяется прежде всего электронной конфигурацией этого состояния, затем значением чисел L и S и в меньшей степени значением числа J.

Характеристические рентгеновские спектры.

Если один из электронов внутренней оболочки атома удален каким-нибудь внешним воздействием, например, ударом внешнего быстрого электрона, то на освободившееся место могут переходить электроны из других оболочек. При этом испускается излучение,

лежащее в рентгеновском диапазоне ($\lambda \sim 0,1$ нм). Это излучение имеет дискретный спектр и называется *характеристическим*.

Любой электрон внутренней оболочки находится в поле ядра с зарядом $+Ze$ и тех электронов, которые ближе к ядру. (Влиянием более удаленных от ядра электронов можно пренебречь, поскольку распределение отрицательного заряда близко к сферически-симметричному). Энергию электрона в таком поле можно записать в виде

$$E = -\frac{Rhc(Z-a)^2}{n^2}, \quad (3.21)$$

где поправка a учитывает экранирующее действие внутренних электронов. Поскольку строение внутренних оболочек у всех атомов одинаково, поправка a практически не зависит от Z . Для электрона в К-оболочке $a \approx 1$, в L-оболочке $-a \approx 7,5$.

При переходе электрона из одной внутренней оболочки на другую испускается излучение с длиной волны λ , определяемой соотношением

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{(Z-a_1)^2}{n_1^2} - \frac{(Z-a_2)^2}{n_2^2} \right), \quad (3.22)$$

где индекс “1” относится к конечному, а индекс “2” - к начальному состоянию электрона.

При переходах на К-оболочку излучаются так называемые К-линии ($K_{\alpha}, K_{\beta}, \dots$) (см. рис. 3.4). При переходах на L-оболочку - L-линии ($L_{\alpha}, L_{\beta}, \dots$). Величина $T = \frac{R(Z-a)^2}{n^2}$ называется рентгеновским

термом. Согласно (3.21), \sqrt{T} растет пропорционально Z . Эта зависимость носит название закона Мозли.

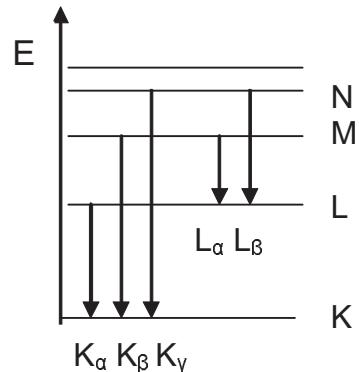


Рис. 3.4

Магнитный момент электрона.

Движение электрона вокруг ядра создает магнитный момент, называемый орбитальным магнитным моментом. Величина этого момента связана с моментом импульса $|\vec{L}|$ соотношением

$$\mu_L = \frac{e}{2m_e} \cdot |\vec{L}| \quad (3.23)$$

где e -заряд, m_e - масса электрона. Поскольку $|\vec{L}| = \hbar \cdot \sqrt{l \cdot (l+1)}$ (3.10)

$$\mu_L = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l \cdot (l+1)} = \mu_B \sqrt{l \cdot (l+1)} \quad (3.24)$$

где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж / Тл - магнетон Бора.

Со спиновым моментом импульса связан спиновый магнитный момент μ_s

$$\mu_s = \frac{e}{m_e} \cdot |\vec{S}|, \quad (3.25)$$

учитывая что

$$|\vec{S}| = \hbar \sqrt{s \cdot (s+1)} = \hbar \sqrt{1/2(1/2+1)},$$

имеем $\mu_s = \mu_B \cdot \sqrt{3}$ (3.26)

Вследствие того, что заряд электрона отрицателен, орбитальный $\vec{\mu}_L$ и спиновый $\vec{\mu}_s$ магнитные моменты направлены в сторону, противоположную соответствующим механическим моментам \vec{L} и \vec{S} .

Полный магнитный момент электрона в атоме есть сумма его орбитального и спинового магнитных моментов. На рис. 3.5 в рамках векторной модели атома показано такое сложение. Вектор $\vec{\mu}$ неколлинеарен вектору \vec{J} . Магнитное взаимодействие моментов приводит к прецессии векторов \vec{L} , \vec{S} , $\vec{\mu}_L$, $\vec{\mu}_s$ и следовательно $\vec{\mu}$, вокруг направления вектора \vec{J} . Магнитные свойства электрона определяются средним по времени значением $\langle \vec{\mu} \rangle = \vec{\mu}_J$. Поскольку практическое значение имеет именно $\langle \vec{\mu} \rangle$, его часто называют магнитным моментом электрона.

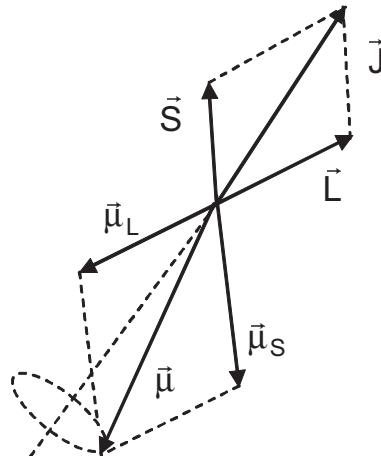


Рис. 3.5

Используя построение на рис. 3.5, можно получить

$$|\langle \vec{\mu} \rangle| = \mu_B \cdot g \cdot \sqrt{j \cdot (j+1)}, \quad (3.27)$$

где $g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$ (3.28)

величина, называемая множителем Ланде.

Если атом находится в магнитном поле с индукцией \vec{B} , то электрон приобретает добавочную энергию W , обусловленную взаимодействием его магнитного момента с внешним полем:

$$W = -(\langle \vec{\mu} \rangle \vec{B}) = -\langle \mu \rangle_Z B, \quad (3.29)$$

где $\langle \vec{\mu} \rangle_Z$ - проекция магнитного момента на ось Z , совпадающую по направлению с \vec{B} . Соотношение (3.27) можно записать в виде

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{2m_e} \cdot g \cdot \vec{J},$$

что в проекции на ось Z дает

$$\langle \mu \rangle_Z = \frac{e}{2m_e} g \cdot J_Z = \frac{e\hbar}{2m_e} g \cdot m_j = \mu_B \cdot g \cdot m_j \quad (3.30)$$

и

$$W = \mu_B \cdot g \cdot B \cdot m_j. \quad (3.31)$$

Колебательные и вращательные состояния молекул. Спектры молекул.

Энергию молекул в первом приближении можно представить в виде

$$E = E_e + E_v + E_r, \quad (3.32)$$

где E_e - энергия электронной оболочки молекулы; E_v - энергия колебания ядер атомов, составляющих молекулу, около их положения равновесия; E_r - энергия вращения молекулы как целого. Каждая из энергий в (3.32) принимает дискретный ряд значений, причем разность энергий двух соседних состояний ΔE для разных видов энергий неодинакова: $\Delta E_e >> \Delta E_v >> \Delta E_r$. На рис. 3.6 приведена схема энергетических уровней молекулы.

При изменении состояния молекулы испускается квант света с частотой

$$\omega = \frac{\Delta E_e}{\hbar} + \frac{\Delta E_v}{\hbar} + \frac{\Delta E_r}{\hbar} \quad (3.33)$$

Если меняется только вращательное состояние молекулы, испускается частота

$$\omega = \frac{\Delta E_r}{\hbar},$$

лежащая, как правило, в далекой инфракрасной области спектра.

При изменении как вращательной, так и колебательной энергии при неизменном электронном состоянии испускаются колебательно – вращательные спектры. Испускаемые частоты

$$\omega = \frac{\Delta E_v}{\hbar} + \frac{\Delta E_r}{\hbar}$$

обычно принадлежат ближней инфракрасной области.

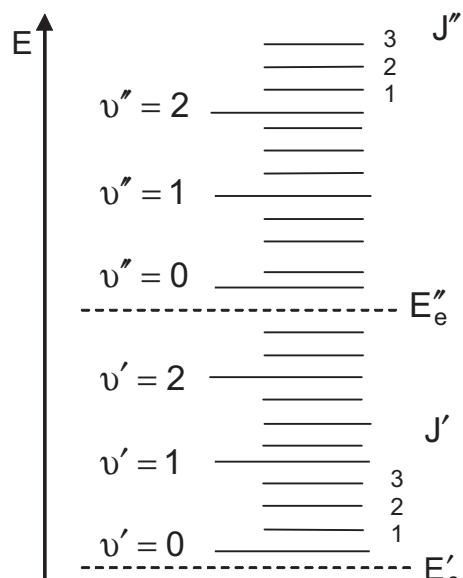


Рис. 3.6

При изменении электронного состояния испускаются электронно – колебательные спектры, в видимом и ультрафиолетовом диапазоне. В этом случае частоты определяются соотношением (3.33).

Спектр молекулы состоит из полос, представляющих собой систему близко расположенных линий. Полосы объединяются в группы. В спектре молекулы бывает несколько групп полос.



Рис. 3.7

Молекулярные спектры (рис. 3.7) называются полосатыми.

Силы, связывающие атомы в молекуле, обусловлены взаимодействием электронов внешних оболочек. Эти силы, а, следовательно, и потенциальная энергия взаимодействия, зависят от расстояния между ядрами. На рис.

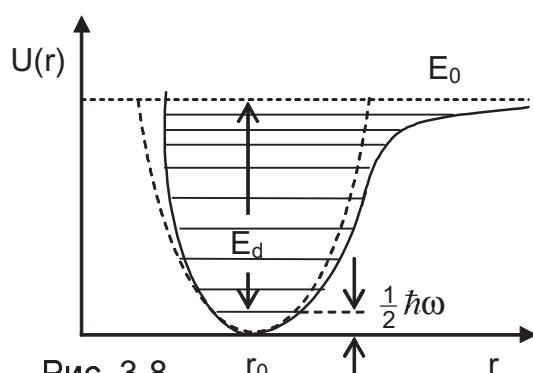


Рис. 3.8

3.8 показана зависимость потенциальной энергии от расстояния между ядрами для двухатомной молекулы. Минимуму потенциальной кривой соответствует положение равновесия, относительно которого происходят колебания ядер. При изменении электронного состояния могут измениться как форма потенциальной кривой, так и равновесное расстояние.

Вблизи минимума потенциальную кривую можно отождествить с параболой (показана пунктирной линией на рис. 3.8) и считать силы взаимодействия квазиупругими. Таким образом, при малых колебаниях двухатомную молекулу можно рассматривать как гармонический осциллятор.

Квантовая механика для энергии гармонического осциллятора дает выражение:

$$E_v = \hbar \cdot \omega_v \left(v + \frac{1}{2} \right) \quad (3.34)$$

где ω_v - классическая частота осциллятора:

$$\omega_v = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (3.35)$$

k - коэффициент квазиупругой силы, μ - приведенная масса молекулы:

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.36)$$

m_1, m_2 - массы ядер атомов, составляющих молекулу, v - колебательное квантовое число:

$$v = 0, 1, 2, \dots \quad (3.37)$$

Формула (3.34) дает ряд эквидистантных энергетических уровней. При переходах между колебательными уровнями гармонического осциллятора действует правило отбора:

$$\Delta\nu = \pm 1$$

При увеличении интенсивности колебаний проявляется негармоничность колебаний. В этом случае молекулу можно рассматривать как ангармонический осциллятор. Квантово – механическое выражение для энергии ангармонического осциллятора имеет вид:

$$E_v = \hbar \cdot \omega_v \left(v + \frac{1}{2} \right) - \kappa \cdot \hbar \cdot \omega_v \left(v + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.38)$$

κ - постоянная ангармоничности, имеющая величину $\sim 0,01$.

В соответствии с (3.38) уровни энергии ангармонического осциллятора сгущаются при увеличении квантового числа v , стремясь к пределу E_0 (см. рис. 3.8). Энергии E_0 соответствует диссоциированная молекула. Энергия диссоциации молекулы E_d равна разности энергии E_0 и энергии основного колебательного состояния.

Для вращательной энергии двухатомной молекулы квантовая механика дает выражение:

$$E_r = \frac{\hbar^2 \cdot J \cdot (J+1)}{2 \cdot I}. \quad (3.39)$$

где J - вращательное квантовое число, принимающее значения

$$J = 0, 1, 2 \dots \quad (3.40)$$

I - момент инерции молекулы относительно оси, проходящей через центр масс:

$$I = \mu \cdot d^2 \quad (3.41)$$

d - равновесное расстояние между ядрами, μ - приведенная масса

молекулы. Величина $B = \frac{\hbar^2}{2 \cdot I}$ называется вращательной

постоянной. Это позволяет вращательную энергию двухатомной молекулы записать в виде:

$$E_r = B \cdot J \cdot (J+1).$$

В соответствии с формулой (3.39) расстояние между соседними вращательными уровнями возрастает с увеличением вращательного квантового числа J . Вращательные уровни вырождены по проекциям момента импульса. Кратность вырождения вращательного уровня равна $g = 2J+1$. (3.42)

При переходах между вращательными уровнями в чисто вращательных и колебательно – вращательных спектрах действует правило отбора

$$\Delta J = \pm 1.$$

В том случае, когда изменяется также электронное состояние молекулы (электронно – колебательные спектры), правила отбора имеют вид: $\Delta J = 0, \pm 1$, кроме случая, когда квантовое число $J = 0$ одновременно в верхнем и нижнем состояниях.

Примеры решения задач

Задача 3.1. Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома водорода.

Решение

Процессу ионизации соответствует переход из основного состояния ($n = 1$) в свободное состояние ($n \rightarrow \infty$). Необходимая для этого энергия равна $E_i = E_\infty - E_1$. В соответствии с (3.19) для водорода ($Z = 1$) имеем $E_1 = -Rhc$, $E_\infty = 0$, $E_i = Rhc$. Потенциал ионизации

$$U_i = \frac{E_i}{e} = \frac{Rhc}{e}, \quad U_i = 13,6 \text{ В.}$$

Первому потенциалу возбуждения соответствует переход электрона из основного состояния ($n = 1$) в возбужденное состояние с наименьшей энергией ($n = 2$). Энергия возбуждения равна

$$E_B = E_2 - E_1 = Rhc(1 - 1/4) = \frac{3}{4}Rhc.$$

Первый потенциал возбуждения равен

$$U_1 = \frac{E_B}{e} = \frac{3Rhc}{4e}, \quad U_1 = \frac{3}{4} \cdot 13,6 \text{ В} = 10,2 \text{ В.}$$

Задача 3.2. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d = 5 \text{ мкм}$. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом $\phi = 41^\circ$?

Решение

Определим длину волны наблюдаемой линии. Из условия максимума при дифракции на решетке следует: $ds\sin\phi = m\lambda$, где $m = 5$,

откуда $\lambda = \frac{ds\sin\phi}{m} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,6561}{5} = 6,561 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

Полученная длина волны лежит в видимой области спектра, следовательно, относится к серии Бальмера. Серия Бальмера излучается при переходах на уровень $n = 2$. Воспользуемся формулой

$$(3.20), \text{ подставив } n_H = 2, \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_B^2} \right), \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{n_B^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda R}, \quad \text{и}$$

$n_B = \sqrt{\frac{4R\lambda}{R\lambda - 4}} = 3$. Наблюдаемая линия излучается при переходе с уровня $n_B = 3$ на уровень $n_H = 2$.

Задача 3.3. В спектре иона гелия He II есть линия, длина волны которой совпадает с длиной волны головной линии серии Бальмера в спектре водорода. Какому переходу электрона в ионе He II соответствует эта линия?

Решение

Для иона He $Z = 2$. Формула (3.20) для He II имеет вид:

$$\frac{1}{\lambda} = 4R \left(\frac{1}{n_H^2} - \frac{1}{n_B^2} \right).$$

Головная (наиболее длинноволновая) линия серии Бальмера излучается при переходе с $n = 3$ на $n = 2$ и для водорода ее длина волны определяется соотношением

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right).$$

По условию задачи левые части двух последних равенств одинаковы. Приравниваем правые части

$$4R \left(\frac{1}{n_H^2} - \frac{1}{n_B^2} \right) = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right), \quad \frac{1}{n_H^2} - \frac{1}{n_B^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{36}.$$

В результате получаем $n_H = 4$, $n_B = 6$.

Задача 3.4. С какой минимальной кинетической энергией должен двигаться атом водорода, чтобы при неупругом лобовом соударении с другим, покоящимся атомом водорода, один из них оказался способным испустить фотон? Предполагается, что до соударения оба атома находились в основном состоянии.

Решение

Из закона сохранения энергии $T_0 = T_1 + T_2 + E_B$, где T_0 - начальная кинетическая энергия движущегося атома; T_1 и T_2 - кинетические энергии атомов после столкновения; E_B - энергия возбуждения одного из атомов.

Поскольку в условии задачи речь идет о минимальной T_0 , то значит, E_B также минимальна. Т.е. возбуждение происходит на уровень $n = 2$. Найдем E_B :

$$E_B = E_2 - E_1 = Rhc \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} Rhc, \quad E_B = 10,2 \text{ эВ.}$$

Из минимальности T_0 следует также, что соударение абсолютно неупругое, т.к. в этом случае наибольшая доля кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию, а значит, скорости атомов после

соударения равны и $T_1 = T_2 = T$. Из закона сохранения импульса $p_0 = p_1 + p_2$, где p_0 - начальный импульс движущегося атома, а p_1 и p_2 - импульсы атомов после соударения. Как следует из вышесказанного, $p_1 = p_2 = p$; $T_0 = 2T + E_B$, $p_0 = 2p$. Откуда, используя связь импульса и кинетической энергии $p = \sqrt{2mT}$, получаем $T = T_0/4$ и

$$T_0 = 2E_B = \frac{3}{2}Rhc, \quad T_0 = 20,4 \text{ эВ.}$$

Задача 3.5. Вычислить постоянную Ридберга, если известно, что для ионов Не II разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана $\Delta\lambda = 133,7 \text{ нм}$.

Решение

Напишем соотношения, определяющие длины волн головных линий (для ионов Не II):

$$\begin{aligned} \text{серии Бальмера} \quad & \frac{1}{\lambda_1} = 4R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right), \\ \text{серии Лаймана} \quad & \frac{1}{\lambda_2} = 4R \left(1 - \frac{1}{2^2} \right), \\ \text{откуда} \quad & \frac{1}{\lambda_1} = \frac{5}{9} \cdot R, \quad \frac{1}{\lambda_2} = 3R; \\ & \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{9}{5R} - \frac{1}{3R} = \frac{22}{15R}. \end{aligned}$$

$$\text{Окончательно} \quad R = \frac{22}{15 \cdot \Delta\lambda} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}.$$

Задача 3.6. Определить кратность вырождения уровня атома водорода, для которого энергия связи электрона равна $E = 1,51 \text{ эВ}$.

Решение

Определим главное квантовое число указанного уровня. Энергия связи уровня $E = \frac{Rhc}{n^2}$ (Дж) или $E = \frac{Rhc}{n^2 \cdot e}$ (эВ). Откуда $n^2 = 9$, $n=3$.

Уровню с данной энергией соответствует несколько различных состояний, отличающихся квантовыми числами l , m , m_s . Число таких состояний и есть кратность вырождения. При заданном n квантовое число l принимает n различных значений ($l = 0, 1, \dots, n-1$). Каждому значению l соответствует $2l+1$ различных значений числа m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$). Следовательно, разных наборов чисел l и m при данном n будет $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{1+2(n-1)+1}{2} \cdot n = n^2$.

Состояниям с заданными n , l , m соответствуют два разных состояния, отличающихся числами m_s ($m_s = 1/2$, $m_s = -1/2$). Следовательно, искомая кратность вырождения $N = 2n^2$, $N = 18$.

Задача 3.7. Определить энергию электрона в атоме водорода в состоянии, с волновой функцией $\Psi(r) = A(1+ar)e^{-\alpha r}$, где A , a и α некоторые постоянные. Какому главному квантовому числу n соответствует это состояние?

Решение

Волновая функция, представляющая состояние с некоторой энергией, является решением уравнения Шредингера (3.2). Поскольку волновая функция не зависит от углов, в операторе Лапласа останутся только производные по r :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \cdot \Psi = 0.$$

Подставив сюда заданную волновую функцию и произведя дифференцирование, придем к уравнению:

$$\left(-4a\alpha + \alpha^2 + ar\alpha^2 + \frac{2a}{r} - \frac{2\alpha}{r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} + E + arE \right) = 0. \quad (1)$$

Сгруппировав члены уравнения по степеням r , получим:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(-4a\alpha + \alpha^2 \right) + \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} + E \right] + \left[\frac{\hbar^2}{2m} a\alpha^2 + aE \right] \cdot r + \left[\frac{\hbar^2}{m} (a - \alpha) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] \cdot \frac{1}{r} = 0$$

Поскольку при подстановке решения в уравнение должно получиться тождество, соотношение (1) должно обращаться в ноль при любом r . Это возможно только, если коэффициенты при всех степенях r равны нулю:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(-4a\alpha + \alpha^2 \right) + \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} + E = 0. \quad (2)$$

$$\frac{\hbar^2 \cdot a \cdot \alpha^2}{2m} + a \cdot E = 0. \quad (3)$$

$$\frac{\hbar^2}{m} (a - \alpha) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 0. \quad (4)$$

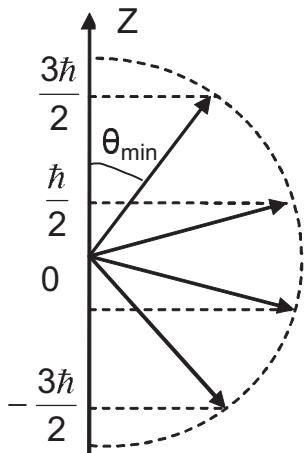
Из уравнения (3) имеем $E = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}$, подставив это соотношение в уравнение (2), получим $\alpha = \frac{me^2}{8\pi\epsilon_0 \hbar^2}$. Подставив это выражение в соотношение для энергии (предыдущее равенство), получим:

$$E = -\frac{me^4}{128\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -\frac{me^4}{32\hbar^2 \epsilon_0^2} = -\frac{me^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{2^2}.$$

Сравнивая полученный результат с соотношением (3.8), находим, что найденное значение энергии соответствует уровню с $n = 2$.

Задача 3.8. Электрон в атоме находится в p -состоянии, причем его полный момент импульса максимален. Найти наименьший угол, который полный момент импульса может составлять с осью Z .

Решение



p -состоянию соответствует значение $l = 1$.

Максимальное значение $|\vec{J}|$ будет в случае

$j = l+s = 1+1/2 = 3/2$. При этом

$$|J_{\max}| = \hbar \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right)} = \frac{\hbar \sqrt{15}}{2}. \quad \text{Проекция}$$

$$J_{\max_z} = m_j \cdot \hbar, \quad \text{где } m_j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}.$$

Следовательно, J_{\max} может составлять четыре дискретных угла с осью Z . Очевидно, наименьшему углу θ_{\min} соответствует $m_j = \frac{3}{2}$.

Из рисунка находим

$$\cos \theta_{\min} = \frac{3/2 \hbar}{\hbar \sqrt{15}/2} = \frac{3}{\sqrt{15}} = 0,7746 \quad \text{откуда}$$

$$\theta_{\min} = \arccos 0,7746 = 39,2^\circ.$$

Задача 3.9. Газ, состоящий из атомов водорода, находится при температуре $T = 3000$ К. Определить отношение числа атомов, находящихся в первом возбужденном состоянии, к числу атомов в основном состоянии.

Решение

При тепловом равновесии атомы распределены по энергиям в соответствии с формулой Больцмана:

$$N = C \cdot g \cdot e^{-\frac{E}{kT}}$$

N - число атомов с энергией E , g - число различных состояний с данной энергией, C - константа.

Для основного состояния ($n = 1$) атома водорода $g = 2$, $E_1 = -Rhc = -13,6$ эВ

Первому возбужденному состоянию ($n = 2$) соответствует $g = 2n^2 = 8$,

$$E_2 = \frac{E_1}{4} = -\frac{13,6}{4} \text{ эВ}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{8 \cdot e^{-\frac{E_1}{4kT}}}{2 \cdot e^{-\frac{E_1}{kT}}} = 4e^{\frac{3E_1}{4kT}} = 4e^{-\frac{3 \cdot 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3000}} = 4e^{-39,4} \approx 3 \cdot 10^{-17}$$

Задача 3.10. В атоме заполнены К- и Л- оболочки и S- подоболочка в М- оболочке. Записать электронную конфигурацию. Какой это атом?

Решение

К- оболочка и S- подоболочка в М- оболочке содержат по два электрона. L- оболочка содержит 8 электронов. Следовательно, порядковый номер атома $Z = 2 + 8 + 2 = 12$. Элемент Mg.

Электронная конфигурация: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$.

Задача 3.11. Определить напряжение на рентгеновской трубке с никелевым анодом, если разность длин волн между K_{α} - линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра равна $\Delta\lambda = 84 \text{ пм}$.

Решение

При бомбардировке анодата ускоренными электронами в рентгеновской трубке возникает, наряду с характеристическим, сплошной рентгеновский спектр. Коротковолновая граница сплошного спектра определяется соотношением $\frac{h \cdot c}{\lambda_{rp}} = e \cdot U$, где U - напряжение

на рентгеновской трубке. λ_{rp} найдем из условия $\Delta\lambda = \lambda_{K\alpha} - \lambda_{rp} = 84 \text{ нм}$.

По формуле (3.22) $\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = R \left((Z - a_1)^2 - \frac{(Z - a_2)^2}{4} \right)$. Подставив

$Z_{Ni} = 28$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7,4$, получим $\lambda_{K\alpha} = 1,47 \cdot 10^{-10} \text{ м}$,

$\lambda_{rp} = (1,47 - 0,84) \cdot 10^{-10} = 63 \text{ нм}$; $U = \frac{hc}{\lambda_{rp} \cdot e} = 19,7 \text{ кВ}$

Задача 3.12. Получить с помощью векторной модели атома формулу (3.28) для множителя Ланде.

Решение

Магнитные свойства электрона определяются величиной $\langle \vec{\mu} \rangle$. Из рисунка следует:

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \mu_J = |\vec{\mu}_L| \cos \alpha_1 + |\vec{\mu}_S| \cos \alpha_2, \text{ где } |\vec{\mu}_L| = \frac{e}{2m_e} |\vec{L}|, \quad |\vec{\mu}_S| = \frac{e}{m_e} |\vec{S}|.$$

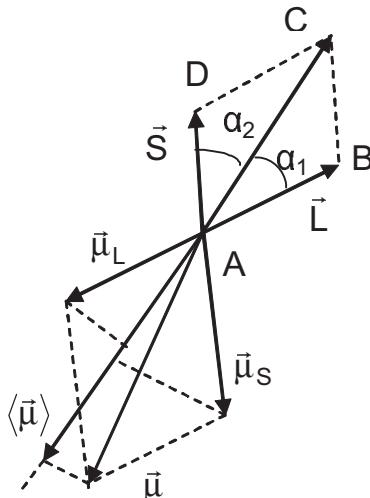
Из треугольников ABC и ADC по теореме косинусов следует:

$$|\vec{S}|^2 = |\vec{J}|^2 + |\vec{L}|^2 - 2|\vec{J}| \cdot |\vec{L}| \cos \alpha_1,$$

$$|\vec{L}|^2 = |\vec{J}|^2 + |\vec{S}|^2 - 2|\vec{J}| \cdot |\vec{S}| \cos \alpha_2, \quad \text{откуда}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{|\vec{J}|^2 + |\vec{L}|^2 - |\vec{S}|^2}{2|\vec{J}| \cdot |\vec{L}|},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{|\vec{J}|^2 + |\vec{S}|^2 - |\vec{L}|^2}{2|\vec{J}| \cdot |\vec{S}|}. \quad \text{Подставим эти соотношения в выражение для } \langle \vec{\mu} \rangle$$



$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e\hbar}{2m_e} \left(\frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{j(j+1)}} + \frac{2(j(j+1) + s(s+1) - l(l+1))}{2\sqrt{j(j+1)}} \right)$$

$$\text{откуда } \langle \vec{\mu} \rangle = \mu_B \cdot \sqrt{j \cdot (j+1)} \left(1 + \frac{j \cdot (j+1) + s \cdot (s+1) - l \cdot (l+1)}{2j \cdot (j+1)} \right).$$

Сравнивая это выражение с (3.27), находим

$$g = 1 + \frac{j \cdot (j+1) + s \cdot (s+1) - l \cdot (l+1)}{2j \cdot (j+1)}.$$

Задача 3.13. Атом водорода в основном состоянии находится на расстоянии $r = 2,5\text{ см}$ от длинного прямого проводника с током $i = 10\text{ А}$. Найти силу, действующую на атом.

Решение

В неоднородном магнитном поле на атом будет действовать радиальная сила $\vec{F} = \frac{dB}{dr} \cdot \mu_z \cdot \vec{e}_r$, где μ_z - проекция магнитного момента атома на ось Z, совпадающую по направлению с \vec{B} , \vec{e}_r - единичный вектор в направлении \vec{r} . Найдем μ_z . Основному состоянию атома водорода соответствует $l=0$, $J=1/2$. Орбитальный момент $|\vec{L}|=0$ и магнитный момент атома обусловлен спином:

$$\mu_z = -\frac{e}{m_0} \cdot S_z = -\frac{e\hbar}{m_0} \cdot m_s \quad \left(m_s = \pm \frac{1}{2} \right). \quad \text{Получаем } \mu_z = \pm \mu_B.$$

Найдем $\frac{dB}{dr}$. Индукция от прямого провода $B = \frac{i \cdot \mu_0}{2\pi r}$, откуда

$$\frac{dB}{dr} = -\frac{i \cdot \mu_0}{2\pi r^2}, \quad i - \text{сила тока.} \quad \text{Получаем:} \quad \vec{F} = \mp \frac{i \cdot \mu_0}{2\pi r^2} \cdot \mu_B \cdot \vec{e}_r,$$

$$F \approx 3 \cdot 10^{-26} \text{Н.}$$

Знак (-) соответствует положительной проекции μ_z ($m_s = -1/2$). В этом случае сила притягивает атом к проводу.

В противном случае (отрицательной проекции μ_z) ($m_s = 1/2$) атом отталкивается от провода.

Задача 3.14. Определить угловую скорость вращения молекулы S_2 , находящейся на первом возбуждённом вращательном уровне. Расстояние между ядрами в молекуле S_2 равно $d = 1,89 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение

Первому возбуждённому вращательному состоянию соответствует $J = 1$. Энергия вращения, согласно (3.39), равна

$$E_r = \frac{\hbar^2 \cdot 2}{2 \cdot I} = \frac{\hbar^2}{I}$$

Выразим энергию через угловую скорость вращения

$$E_r = \frac{I \cdot \omega_r^2}{2},$$

тогда получим $\omega_r = \frac{\hbar}{I} \sqrt{2}$. Момент инерции I , согласно

(3.41) и (3.36), равен $I = \frac{m_s}{2} \cdot d^2$, где m_s - масса ядра атома S , $m_s = 1 \text{ а.е.м.} \cdot 32 = 32 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$

Расчёт даёт $I = 9,45 \cdot 10^{-46} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\omega_r = 1,56 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.

Задача 3.15. Определить амплитуду колебаний по классической теории для молекулы водорода H_2 , находящейся в основном колебательном состоянии. Частота колебаний молекулы H_2 равна $\omega_v = 8,28 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

Решение

Колебательная энергия в основном состоянии ($v = 0$), согласно (3.34), равна $E_v = \frac{\hbar \cdot \omega_v}{2}$. По классической физике $E_v = \frac{\mu \cdot \omega_v^2 \cdot A^2}{2}$, где A - амплитуда колебаний. Из этих двух равенств имеем $A = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu \cdot \omega_v}}$. Приведённая масса $\mu = \frac{m_H}{2}$, где m_H - масса протона, $m_H = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Получаем $A = 0,12 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Задача 3.16. Определить отношение количества молекул водорода в состояниях с квантовыми числами $v' = 1$, $J=0$ и $v = 0$, $J = 5$ при $T = 1500$ К. Расстояние между ядрами в молекуле $d = 0,741 \cdot 10^{-10}$ м, частота колебаний $\omega_v = 8,28 \cdot 10^{14}$ с⁻¹.

Решение

При тепловом равновесии молекулы распределены по энергетическим уровням в соответствии с формулой Больцмана

$$N = C \cdot g \cdot e^{-\frac{E}{kT}}.$$

В состоянии с квантовыми числами $v' = 1$, $J' = 0$ энергия равна (см. формулу (3.34)) $E' = \hbar \cdot \omega_v \cdot \frac{3}{2}$; $E' = 13,04 \cdot 10^{-20}$ Дж. Кратность вырождения этого состояния $g' = 1$. В состоянии с квантовыми числами $v = 0$, $J = 5$ энергия равна ((3.34) и (3.39))

$$E = \frac{\hbar \cdot \omega_v}{2} + \frac{\hbar^2 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 1}$$

Кратность вырождения этого состояния $g = 2 \cdot 5 + 1 = 11$. Отношение населенностей уровней будет равно

$$\frac{N'}{N} = \frac{\exp\left[-\frac{3 \hbar \cdot \omega_v}{2 kT}\right]}{11 \cdot \exp\left[-\left(\frac{\hbar \cdot \omega_v}{2 kT} + \frac{\hbar^2 \cdot 15}{1 \cdot kT}\right)\right]} = \frac{1}{11} \cdot \exp\left[-\frac{\hbar \cdot \omega_v}{kT} + \frac{\hbar^2 \cdot 15}{1 \cdot kT}\right].$$

Момент инерции молекулы I равен

$$I = \frac{m_H}{2} \cdot d^2 = \frac{1,66 \cdot 10^{-27}}{2} (0,741 \cdot 10^{-10})^2 = 0,456 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда $\frac{N'}{N} = \frac{1}{11} \cdot e^{-2,44} = 7,92 \cdot 10^{-3}$.

Задача 3.17. Газ, состоящий из молекул NO, находится при температуре $T = 1000$ К. Определить квантовое число вращательного уровня, которому соответствует максимальная населенность. Расстояние между ядрами в молекуле NO равно $d = 1,15 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение

В соответствии с распределением Больцмана населенность вращательного уровня равна $N = C \cdot g \cdot \exp(-E_r / kT)$. Подставляя в

это соотношение $E_r = \frac{\hbar^2 \cdot J(J+1)}{2 \cdot I}$, $g = 2J+1$, получим

$$N = C \cdot (2J + 1) \cdot \exp\left[-\frac{\hbar^2 \cdot J(J+1)}{2 \cdot I \cdot kT}\right].$$

В максимуме функции $N(J)$ $\frac{dN}{dJ} = 0$. Тогда

$$(2J+1) \cdot \left[-\frac{\hbar^2 \cdot (2J+1)}{2 \cdot I \cdot kT} \cdot \exp\left(-\frac{\hbar^2 \cdot J(J+1)}{2 \cdot I \cdot kT}\right) \right] + 2 \exp\left(-\frac{\hbar^2 \cdot J(J+1)}{2 \cdot I \cdot kT}\right) = 0,$$

$$\frac{(2J+1)^2 \cdot \hbar^2}{2 \cdot I \cdot kT} = 2; \quad 2J+1 = \sqrt{\frac{4 \cdot I \cdot kT}{\hbar^2}}, \quad \text{откуда получаем}$$

вращательное квантовое число, которому соответствует максимальная населенность

$$J_{\max} = \frac{\sqrt{I \cdot kT}}{\hbar} - \frac{1}{2}.$$

Момент инерции $I = \mu \cdot d^2$, где $\mu = \frac{m_N \cdot m_O}{m_N + m_O}$ (см. (3.36)).

Подставив сюда $m_N = 14 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг = $2,32 \cdot 10^{-26}$ кг,

$m_O = 16 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг = $2,66 \cdot 10^{-26}$ кг, получим $\mu = 1,237 \cdot 10^{-26}$ кг, $I = 1,636 \cdot 10^{-46}$ кг · м². Окончательно получим $J_{\max} = 13,8$, или, округлив до ближайшего целого числа, получим $J_{\max} = 14$.

Задача 3.18. В середине колебательно – вращательной полосы спектра испускания молекулы HCl , где отсутствует “нулевая линия”, запрещенная правилами отбора, интервал между соседними линиями $\Delta\omega = 0,79 \cdot 10^{13}$ с⁻¹. Вычислить расстояние между ядрами молекулы HCl .

Решение

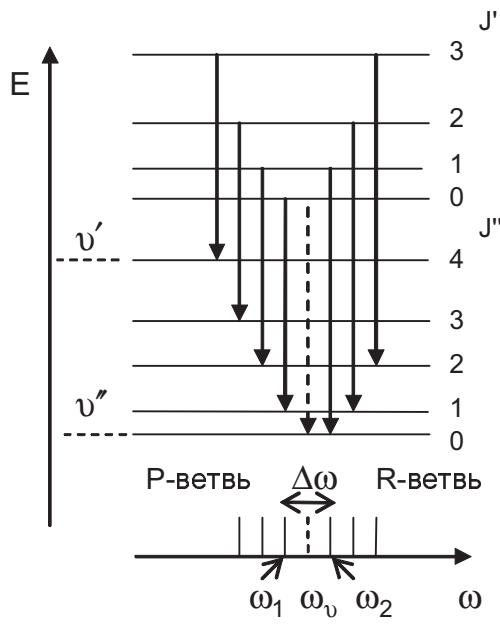
Колебательно–вращательная полоса излучается при переходах между системами вращательных уровней, принадлежащих двум различным колебательным состояниям (см. рис.).

Частота, излучаемая при колебательно – вращательном переходе равна

$$\omega = \frac{E'_v - E''_v}{\hbar} + \frac{E'_r - E''_r}{\hbar}.$$

Используя выражение (3.39) для вращательной энергии, получим

$$\omega = \omega_v + \frac{\hbar}{2 \cdot I} [J'(J'+1) - J''(J''+1)].$$



По правилам отбора $\Delta J = \pm 1$.

Поскольку $J' \neq J''$, “нулевая” частота $\omega = \omega_v$ излучаться не будет (она изображена на рисунке пунктирной линией).

Переходам $\Delta J = 1$ и $\Delta J = -1$ соответствуют две ветви в колебательно – вращательной полосе (они называются Р - и R - ветвями).

Для Р - ветви $\Delta J = 1$

$$\omega_P = \omega_v + \frac{\hbar}{2 \cdot I} [J'(J+1) - (J'+1)(J'+2)] = \omega_v - \frac{\hbar}{I} (J'+1).$$

Для R - ветви $\Delta J = -1$

$$\omega_R = \omega_v + \frac{\hbar}{2 \cdot I} [J'(J+1) - (J'-1)J'] = \omega_v + \frac{\hbar}{I} \cdot J'.$$

Линии, ближайшие к “нулевой” линии, имеют частоты:

$$\omega_1 = \omega_P \text{ (при } J' = 0 \text{)} \quad \omega_1 = \omega_v - \frac{\hbar}{I};$$

$$\omega_2 = \omega_R \text{ (при } J' = 1 \text{)} \quad \omega_2 = \omega_v + \frac{\hbar}{I};$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2\hbar}{I} \quad \text{откуда} \quad I = \frac{2\hbar}{\Delta\omega}.$$

$$\text{Используя } I = \mu \cdot d^2, \text{ получим } d = \sqrt{\frac{2\hbar}{\Delta\omega \cdot \mu}}$$

Подсчитаем приведенную массу $\mu = \frac{m_H \cdot m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}}$, где

$$m_H = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \quad m_{Cl} = 35 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \quad \mu = 1,61 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Тогда $d = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$

Задачи для самостоятельного решения

3.19. Какие квантовые числа соответствуют линиям серии Бальмера? а) Найти длинноволновую и коротковолновую границы серии Бальмера. б) Какие и сколько линий серии Бальмера расположены в видимой части спектра? Интервал видимой части спектра считать равным 0,4 мкм – 0,76 мкм.

3.20. Определить энергию фотона и длину волны, соответствующие второй линии в первой инфракрасной серии (серии Пацена $n_h = 3$) атома водорода.

3.21. Найти первый потенциал возбуждения: а) однократно ионизованного гелия; б) двукратно ионизованного лития.

3.22. Найти длину волны фотона, соответствующего переходу электрона из второго квантового состояния в основное: а) в однократно ионизованном атоме гелия; б) в двукратно ионизованном атоме лития.

3.23. Электрон, пройдя разность потенциалов $U = 4,9$ В, сталкивается с атомом ртути и переводит его в первое возбужденное состояние. Какую длину волны имеет фотон, соответствующий переходу атома ртути в основное состояние?

3.24. Длина волны гамма–излучения равна $\lambda = 1,6$ пм. Какую разность потенциалов надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить рентгеновские лучи с этой длиной волны?

3.25. Вычислить потенциалы ионизации ионов гелия He^+ и лития Li^{++} . ($Z_{\text{He}} = 2$, $Z_{\text{Li}} = 3$).

3.26. Определить квантовое число n для возбужденного состояния атома водорода, если известно, что при последовательном переходе в основное состояние атом излучил два фотона с длинами волн $\lambda_1 = 0,6563$ мкм и $\lambda_2 = 0,1216$ мкм.

3.27. Газ, состоящий из атомов водорода, может испустить только три спектральные линии. Определить квантовое число энергетического уровня, на который возбуждены атомы, а также длины волн испускаемых линий.

3.28. Сколько спектральных линий испускает газ, который состоит из атомов водорода, возбуждаемых некоторым источником на n -й энергетический уровень ($n = 10$)?

3.29. Сколько линий наблюдается в спектре поглощения атомарного водорода в диапазоне длин волн от $\lambda_1 = 94,5$ нм до $\lambda_2 = 110$ нм?

3.30. Найти квантовое число, определяющее возбужденное состояние атома водорода, если известно, что при переходе в нормальное состояние он испустил всего один фотон с длиной волны $\lambda = 97,25 \text{ нм}$.

3.31. Возбужденный атом водорода при переходе в основное состояние испустил последовательно два кванта с длинами волн $\lambda_1 = 1281,8 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 102,57 \text{ нм}$. Вычислить энергию первоначального состояния данного атома и соответствующее ему квантовое число.

3.32. Определить величину первого потенциала возбуждения атома водорода и потенциала его ионизации. Вычислить длины волн, частоты и волновые числа соответствующих квантов.

3.33. Электрон, имеющий вдали от покоящегося протона энергию 10 эВ, захватывается в основное состояние (рекомбинирует). Определить длину волны излучаемого фотона.

3.34. Определить длину волны λ и частоту v , соответствующую 5-й спектральной линии серии Бальмера атомарного водорода.

3.35. В спектре атомарного водорода разница в волновых числах между первыми двумя линиями, принадлежащими серии Бальмера, составляет 5326 см^{-1} . Определить численное значение постоянной Ридберга.

3.36. Длина волны головной линии серии Лаймана в спектре атомарного водорода равна $\lambda_1 = 121,5 \text{ нм}$. Считая известными значения скорости света и постоянной Планка, вычислить энергию ионизации атома водорода.

3.37. Вычислить в волновых числах и длинах волн спектральные диапазоны Δv и $\Delta\lambda$, принадлежащие сериям: а) Лаймана, б) Бальмера, в) Пацена, г) Бреккета.

3.38. Каким сериям принадлежат следующие спектральные линии атомарного водорода: 397 нм, 656,3 нм и 901,5 нм? Каким переходам они отвечают?

3.39. Разница в длинах волн между головными линиями серии Лаймана и Бальмера в спектре атомарного водорода составляет $\Delta\lambda = 534,7 \text{ нм}$. Вычислить значение постоянной Планка, считая массу электрона, его заряд и скорость света известными.

3.40. При наблюдении полученного с помощью дифракционной решетки с периодом $d = 2 \text{ мкм}$ спектра атомарного водорода обнаружено, что одна из спектральных линий серии Бальмера во 2-м порядке соответствует углу дифракции $\phi = 29^{\circ}05'$. Определить квантовое число энергетического уровня атома, переходу с которого отвечает данная линия.

3.41. При каком минимальном числе штрихов дифракционная решетка может разрешить во 2-м порядке первые 30 спектральных линий, принадлежащих серии Бальмера атомарного водорода?

3.42. Электрон, имеющий вдали от покоящегося протона скорость $v = 1,875 \cdot 10^8 \text{ см/с}$, захватывается протоном, в результате чего образуется возбужденный атом водорода. Определить длину волны фотона, который испускается при переходе такого атома в основное состояние. Чем объясняется тот факт, что иногда к границам серий примыкает непрерывный спектр?

3.43. Квант света с энергией $\epsilon = 15 \text{ эВ}$ выбивает фотоэлектрон из атома водорода, находящегося в основном состоянии. С какой скоростью движется электрон вдали от ядра?

3.44. Вычислить изменение длины волны фотона, которое возникает вследствие отдачи атома водорода при излучении. Какую скорость приобретает атом водорода при переходе электрона из состояния с $n = 2$ в состояние с $n = 1$?

3.45. Газ, состоящий из атомов водорода, находится при температуре $T = 3000 \text{ К}$. Определить отношение числа атомов в состоянии с $n = 3$ к числу атомов в состоянии с $n = 2$.

3.46. Определить квантовые числа энергетических уровней водородоподобных ионов, переходы между которыми соответствуют тем же спектральным линиям, что и линии серии Лаймана атомарного водорода.

3.47. Однократно ионизированный атом гелия находится в основном состоянии. Может ли квант света, соответствующий переходу между первыми двумя энергетическими уровнями в двукратно ионизированном атоме лития, вырвать электрон из данного иона гелия? Ответ обосновать.

3.48. Квант света, возникающий при переходе между первыми двумя энергетическими уровнями в однократно ионизированном атоме гелия, вырывает фотоэлектрон из атома водорода, который находится в основном состоянии. Найти скорость этого электрона вдали от ядра атома водорода.

3.49. Систему, состоящую из электрона и позитрона, движущихся вокруг общего центра инерции, называют позитронием. Вычислить расстояние между электроном и позитроном в состоянии с наименьшей энергией, а также ионизационный потенциал позитрония. Позитрон имеет массу, равную массе электрона, но равный по величине и противоположный по знаку заряд.

3.50. Мезоатом водорода отличается от обычного атома водорода тем, что вместо электрона в нем движется мезон, имеющий тот же заряд, но массу в 210 раз большую. Вычислить для мезоатома

водорода расстояние между мезоном и ядром для основного состояния и длину волны, соответствующую резонансному переходу. Сравнить полученные значения с аналогичными величинами для обычного атома водорода.

3.51. Вычислить для мезоатома водорода постоянную Ридберга, потенциал резонансного возбуждения и ионизационный потенциал, имея в виду, что масса мезона в 210 раз больше массы электрона.

3.52. Определить возможные значения изменения орбитального момента импульса электрона в атоме водорода при испускании им спектральной линии с длиной волны $\lambda = 1281,8$ нм. Известно, что данная линия принадлежит серии Пашена ($n = 3$)

3.53. Электрон в атоме находится в f -состоянии. Найти орбитальный момент импульса L электрона и максимальное значение проекции момента импульса $L_{z\max}$ на направление внешнего магнитного поля.

3.54. Вычислить полную энергию E , орбитальный момент импульса L и орбитальный магнитный момент μ электрона, находящегося в $2p$ -состоянии в атоме водорода.

3.55. Атом водорода перешел из возбужденного состояния в основное, испустив квант света. Найти возможные значения полного момента импульса электрона в исходном состоянии.

3.56. Электрон в атоме находится в состоянии с $n = 3$. В рамках векторной модели атома определить наименьший возможный угол между орбитальным и спиновым моментами импульса электрона.

3.57. Электрон в атоме находится в p -состоянии. Используя векторную модель атома определить возможные углы между орбитальным и спиновым моментами импульса электрона.

3.58. Электрон в атоме находится в состоянии с $n = 4$, причем момент импульса электрона имеет наибольшее возможное значение. Определить наименьший угол, который может составить момент импульса с осью Z .

3.59. Узкий пучок атомов водорода пропускается в опыте Штерна и Герлаха через поперечное неоднородное ($dB/dz = 2$ кТл/м) магнитное поле протяженностью $l = 8$ см. Скорость атомов водорода $v = 4$ км/с. Найти расстояние между компонентами расщепленного пучка на выходе его из магнитного поля. Атомы водорода в пучке находятся в основном состоянии.

3.60. Орбитальный магнитный момент электрона в атоме равен $\mu_e = 0,413 \cdot 10^{-22}$ Дж/Тл. Определить орбитальное квантовое число l электрона.

3.61. Атом водорода, находясь в основном состоянии, поглотил квант света с энергией $\epsilon = 10,2\text{эВ}$. Определить изменение орбитального момента импульса электрона. Записать электронную конфигурацию атома в конечном состоянии.

3.62. Используя векторную модель атома, определить наименьший угол, который может составлять орбитальный момент импульса электрона с направлением внешнего магнитного поля. Электрон находится в d - состоянии.

3.63. Электрон в атоме находится в состоянии с $n = 4$, причем полный момент импульса электрона максимальен. Используя векторную модель, определить угол между орбитальным и полным моментами импульса.

3.64.. Атом водорода перешел в основное состояние, испустив квант света с длиной волны $\lambda = 97,2 \text{ нм}$. Определить: а) кратность вырождения исходного энергетического уровня; б) возможные значения момента импульса электрона в исходном состоянии.

3.65. Атом водорода в основном состоянии помещен в магнитное поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$. Определить потенциальную энергию атома в магнитном поле.

3.66. Электрон в атоме находится в p - состоянии. Вычислить возможные значения среднего по времени магнитного момента электрона (в магнетонах Бора).

3.67. Определить возможные значения проекции момента импульса L орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля (в d - состоянии).

3.68.. Вычислить момент импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме: 1) в S - состоянии; 2) в P-состоянии.

3.69. Используя принцип Паули, указать, какое максимальное число электронов в атоме могут иметь одинаковые следующие квантовые числа: 1) n, l, m, m_s 2) n, l, m 3) n, l 4) n.

3.70. Определить число возможных состояний электрона в атоме водорода при $n = 4$. Перечислить эти состояния.

3.71. Электрон в атоме находится в p-состоянии. Используя векторную модель атома, определить углы, которые может составлять вектор \vec{L} с осью Z.

3.72. Указать число электронов в M- оболочке, которые имеют одинаковые квантовые числа: а) $m_s = +1/2$; б) $m_l = -2$; в) $m_s = -1/2$ и $m_l = 0$; г) $m_s = +1/2$ и $l = 2$.

3.73. Найти число электронов в атоме, у которого заполнены K и L оболочки, 3s- подоболочка и наполовину 3p- подоболочка. Написать электронную конфигурацию атома.

3.74. Найти число электронов в атоме, у которого заполнены K -, L -, M - оболочки, 4s-, 4p- и 4d- подоболочки.

3.75. Сколько электронов в атоме натрия имеют одинаковые квантовые числа: а) $m_l = 0$, б) $l = 1$, $m_s = +1/2$. Атом находится в основном состоянии..

3.76. Какая относительная часть атомов водорода находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 2$ при $T = 3000$ К?

3.77. Определить отношение числа атомов газообразного натрия в состоянии 3P к числу атомов в основном состоянии при температуре $T = 2400$ К. Переходу 3P \rightarrow 3S соответствует длина волны $\lambda = 589$ нм.

3.78. Определить отношение населенности двух уровней рабочего вещества лазера при температуре $t = 27^\circ\text{C}$, если переходу между этими уровнями соответствует длина волны $\lambda = 694$ нм. Кратность вырождения уровня принять равной единице.

3.79. Определить отношение числа атомов газообразного лития в состоянии 2P к числу атомов в основном состоянии при $T = 3000$ К. Длина волны резонансной линии (2P \rightarrow 2S) $\lambda = 670,8$ нм.

3.80. Определить разность энергий связи электрона в K и L оболочках в атоме ванадия. Поправки для K и L оболочек принять равными $a_1 = 1$ и $a_2 = 7,4$ соответственно.

3.81. С каких элементов периодической системы следует ожидать появления K- и L- серий характеристического рентгеновского спектра?

3.82. Вычислить минимальное напряжение на рентгеновской трубке с анодом из вольфрама, при котором появится K-серия.

3.83. При облучении криптона рентгеновским излучением с длиной волны $\lambda = 65$ пм вырывается электрон из K- оболочки. Определить кинетическую энергию вырванного электрона.

3.84. Вычислить магнитный момент атома с одним валентным электроном в S - состоянии (в магнетонах Бора).

3.85. Вычислить множитель Ланде для атома с одним валентным электроном в P - и D – состояниях.

3.86. Определить возможные значения магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения равна $E = 12,09$ эВ.

3.87. Найти момент инерции молекулы CH и расстояние между ее ядрами, если частотные интервалы между соседними линиями чисто вращательного спектра $\Delta\omega = 5,50 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$.

3.88. Найти для молекулы HCl вращательные квантовые числа двух соседних уровней, разность энергий которых $\Delta E = 7,86 \text{ мэВ}$. Расстояние между ядрами в молекуле HCl равно $d = 1,275 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

3.89. При переходе между двумя соседними вращательными уровнями молекулы CH испустился квант с частотой $\omega = 1,64 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Найти угловую скорость вращения молекулы на исходном вращательном уровне. Расстояние между ядрами в молекуле CH равно $d = 1,12 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

3.90. Найти момент импульса молекулы кислорода, вращательная энергия которой $E = 2,16 \text{ мэВ}$. Расстояние между ядрами в молекуле O_2 равно $d = 1,207 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

3.91. Расстояние между ядрами в молекуле CO равно $d = 1,128 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Найти интервал частот между соседними линиями чисто вращательного спектра молекулы CO .

3.92. Для молекулы N_2 найти изменение вращательной энергии при переходе с третьего вращательного уровня на второй. Расстояние между ядрами в молекуле N_2 равно $d = 1,10 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

3.93. Для молекулы NO найти температуру T , при которой средняя энергия поступательного движения молекулы равна энергии, необходимой для возбуждения ее на первый возбужденный вращательный уровень. Расстояние между ядрами в молекуле NO равно $d = 1,15 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

3.94. Найти изменение момента импульса молекулы азота при испускании спектральной линии с длиной волны $\lambda = 1250 \text{ мкм}$, принадлежащей чисто вращательному спектру. Расстояние между ядрами в молекуле N_2 равно $d = 1,10 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

3.95. Длины волн двух соседних спектральных линий в чисто вращательном спектре молекулы HCl равны $\lambda_1 = 117 \text{ мкм}$ и $\lambda_2 = 156 \text{ мкм}$. Вычислить момент инерции молекулы HCl .

3.96. Найти вращательное квантовое число J наиболее заселенного вращательного уровня молекулы O_2 при температуре $T = 300 \text{ К}$. Расстояние между ядрами в молекуле O_2 равно $d = 1,207 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

3.97. В газе, состоящем из молекул I_2 , максимальная населенность соответствует вращательному уровню $J = 60$. Расстояние между

ядрами в молекуле йода I_2 равно $d = 2,667 \cdot 10^{-10}$ м. Определить температуру газа.

3.98. Некоторый газ, состоящий из двухатомных молекул, находится при температуре $T = 384,5$ К. При этом максимальная населенность приходится на вращательный уровень $J = 4$. Определить для этого газа разность частот соседних линий вращательного спектра.

3.99. При какой температуре газа, состоящего из молекул NO , населенности вращательных уровней $J_1 = 5$ и $J_2 = 12$ одинаковы? Расстояние между ядрами в молекуле NO равно $d = 1,15 \cdot 10^{-10}$ м.

3.100. Найти для молекулы HF число вращательных уровней, расположенных между основным и первым возбужденным колебательными уровнями. Расстояние между ядрами в молекуле HF равно $d = 0,917 \cdot 10^{-10}$ м, собственная частота колебаний $\omega_v = 7,796 \cdot 10^{14}$ с⁻¹. Молекулу считать гармоническим осциллятором.

3.101. Оценить, сколько линий содержит чисто вращательный спектр молекулы CO . Расстояние между ядрами в молекуле CO равно $d = 1,128 \cdot 10^{-10}$ м, собственная частота колебаний $\omega_v = 4,088 \cdot 10^{14}$ с⁻¹.

3.102. Найти для молекулы H_2 отношение энергий, которые необходимо затратить для возбуждения на первый колебательный и первый вращательный уровни. Собственная частота колебаний молекулы H_2 $\omega_v = 8,279 \cdot 10^{14}$ с⁻¹, расстояние между ядрами $d = 0,741 \cdot 10^{-10}$ м. Ангармоничностью колебаний пренебречь.

3.103. Найти отношение энергий, которые необходимо затратить для возбуждения молекулы Hl на первый колебательный и первый вращательный уровни. Собственная частота колебаний молекулы Hl $\omega_v = 4,350 \cdot 10^{14}$ с⁻¹, расстояние между ядрами в молекуле $d = 1,604 \cdot 10^{-10}$ м. Ангармоничностью колебаний пренебречь.

3.104. Вычислить отношение заселенностей вращательного уровня $J = 1$ и основного вращательного состояния для молекулы водорода при температуре $T = 300$ К. Расстояние между ядрами в молекуле H_2 равно $d = 0,741 \cdot 10^{-10}$ м.

3.105. Найти отношение числа молекул водорода на первом возбужденном колебательном уровне $v = 1, J = 0$, к числу молекул на первом возбужденном вращательном уровне $v = 0, J = 1$ при температуре $T = 880$ К. Расстояние между ядрами в молекуле H_2

равно $d = 0,741 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, собственная частота колебаний $\omega_v = 8,279 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

3.106. Найти амплитуду классических колебаний и коэффициент квазиупругой силы для молекулы CO, находящейся на первом возбужденном колебательном уровне. Колебания считать гармоническими. Собственная частота колебаний $\omega_v = 4,08 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

3.107. В середине колебательно – вращательной полосы молекулы CH, где отсутствует линия, соответствующая запрещенному переходу $\Delta J = 0$, интервал между соседними линиями $\Delta\omega = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Вычислить расстояние между ядрами молекулы CH. Нарисовать схему энергетических уровней и указать на ней соответствующие переходы.

3.108. Используя формулу для средней энергии квантового гармонического осциллятора: $\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar \cdot \omega}{2} + \frac{\hbar \cdot \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \cdot \omega}{k \cdot T}\right) - 1}$, вычислить

температуру, при которой средняя колебательная энергия молекулы хлора вдвое превышает ее нулевую колебательную энергию. Для молекулы хлора частота колебания $\omega_v = 1,064 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

3.109. Используя формулу для средней энергии квантового гармонического осциллятора, найти температуру, при которой средняя колебательная энергия молекулы кислорода совпадает с энергией уровня $v=0$, $J=5$. Частота колебаний молекулы кислорода $\omega_v = 2,977 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, расстояние между ядрами $d = 1,207 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

4. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Зонная теория твердых тел.
Элементы квантовой статистики.

Образование энергетических зон в твердом теле

К твердым телам относятся вещества, состоящие из близко расположенных и сильно взаимодействующих между собой атомов, ионов или молекул. Эти атомы, ионы или молекулы образуют кристаллическую решетку, ячейки которой повторяются в пространстве. Расстояние между двумя соседними атомами в ячейке определяет период решетки d .

В твердом теле в 1 см^3 находится $10^{22} - 10^{23}$ взаимодействующих атомов, расположенных на расстояниях $d \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Рассмотрим, как качественно влияет такое сближение на характер энергетического спектра твердого тела.

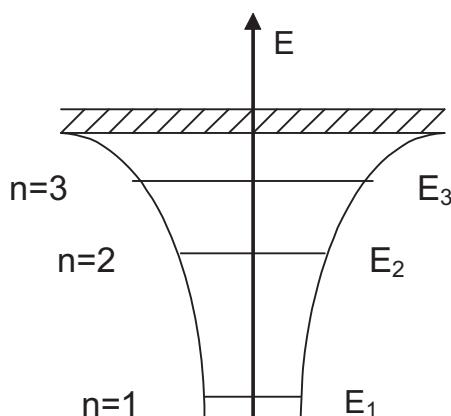


Рис. 4.1

Изолированный атом можно представить в виде потенциальной ямы с разрешенными уровнями энергии $E_1, E_2, E_3 \dots$, которым отвечают квантовые числа n_1, n_2, n_3 , (рис. 4.1). Эта яма образована кулоновским полем ядра и экранирующих его электронов.

При наличии нескольких атомов потенциал в пространстве между атомами в первом приближении можно

считать равным сумме потенциалов отдельных атомов. Поэтому, когда атомы сближаются на расстояния характерные для межатомного расстояния d в твердом теле ($\sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$), высота потенциального барьера, отделяющего потенциальные ямы соседних атомов, снижается и становится на несколько электрон-вольт ниже нулевого уровня энергии. Возникает перекрытие потенциальных ям отдельных атомов и образуется периодическое потенциальное поле кристаллической решетки.

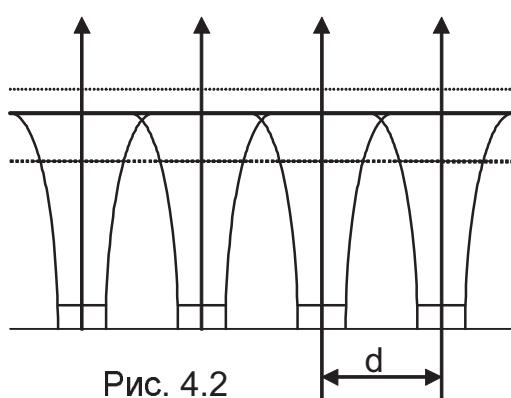


Рис. 4.2

Это поле представляет собой совокупность потенциальных ям, разделенных барьерами конечной ширины (рис. 4.2). Электроны отдельных атомов вследствие туннельного эффекта могут просачиваться через этот барьер. Чем дальше электрон расположен от ядра (n велико), тем больше для него коэффициент прозрачности барьера D .

Рассмотрим вопрос о времени жизни электрона в атоме τ . В изолированном атоме электрон не покидает "свой" атом, поэтому для изолированного атома $\tau = \infty$. В твердом теле электроны валентных уровней могут в силу туннельного эффекта переходить от одного атома к другому, и время жизни электрона в атоме определяется выражением $\tau = 1/\omega \cdot D$, где ω - частота столкновений электрона со стенками потенциального барьера, D - коэффициент прозрачности барьера. Чем ближе электрон к ядру, тем сильнее он связан с ядром, и тем меньше вероятность просачиваться через потенциальный барьер, коэффициент D уменьшается, время жизни τ возрастает.

Если воспользоваться соотношением неопределенности для энергии $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ ($\hbar = h/2\pi$ - приведенная постоянная Планка, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с) и подставить в него вместо Δt соответствующее τ , то для изолированного атома $\Delta E \rightarrow 0$, т.е. уровни энергии изолированного атома бесконечно узкие. Для твердого тела время жизни валентных электронов $\tau \approx 10^{-15}$ с, а ширина валентного уровня

$$E = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{10^{-15} \text{ с} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эВ}} \approx 1 \text{ эВ}$$

Таким образом, при образовании твердого тела каждый уровень энергии изолированного атома превращается в энергетическую полосу шириной ΔE (рис. 4.3). Эта полоса называется энергетической зоной. Чем выше энергетический уровень электрона в атоме, тем шире полоса, которая образуется из этого уровня. Если ширина соседних зон ΔE_1 и ΔE_2 меньше расстояния между уровнями изолированного атома $E_2 - E_1$, то между зонами существует щель, называемая запрещенной зоной и характеризуемая шириной запрещенной зоны ΔE_3 .

Каждая зона разрешенных энергий состоит из N - дискретных уровней (число дискретных уровней равно числу сближающихся атомов). Расстояние между уровнями в зоне приблизительно может быть оценено по формуле $\Delta E_i = \Delta E/N$, где ΔE - ширина энергетической зоны. Так, для валентной зоны $\Delta E_i = 1 \text{ эВ}/10^{22} = 10^{-22} \text{ эВ}$. Эта величина ничтожно мала по сравнению с тепловой энергией электрона $E = kT$ ($k=1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$), которая при комнатной температуре ($T=300 \text{ К}$) составляет 0,025 эВ.

Более точно расстояние между уровнями энергии в зоне определяется выражением

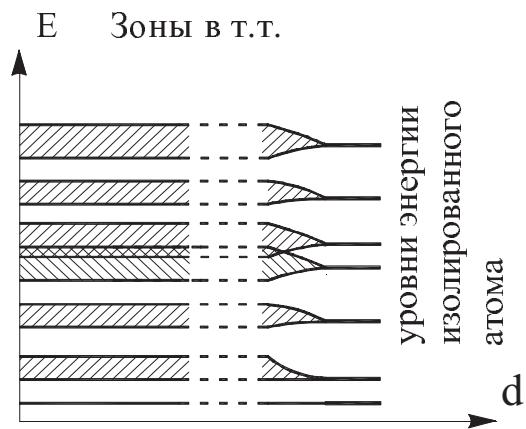


Рис.4.3

$$\Delta E_i = \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi V(2m)^{2/3}\sqrt{E}}, \quad (4.1)$$

где m - масса электрона, V - объем кристалла, E - энергия уровня.

Рассмотрим, как происходит заполнение разрешенных зон электронами. Число электронов в разрешенной зоне в точности равно суммарному числу электронов, имеющихся у всех объединяющихся атомов. Например, если для электронной оболочки с главным квантовым числом $n = 2$, на которой находятся 8 электронов ($2n^2$), а число атомов, из которых составлено твердое тело, N , то в зоне, соответствующей $n = 2$ содержится $8N$ электронов.

Заполнение электронами уровней зоны происходит на основе принципов квантовой статистики: 1) Электроны неразличимы. 2) Квантовые состояния электронов описываются четырьмя квантовыми числами. Изменение квантового состояния электрона связано с изменением одного из 4-х квантовых чисел. Распределение электронов внутри зоны подчиняется принципу Паули. Принцип Паули для твердого тела гласит: "В твердом теле на каждом энергетическом уровне в зоне разрешенных энергий может находиться не более 2-х электронов, отличающихся направлением спина".

Так как внутренние оболочки атомов заполнены полностью, то и внутренние зоны, которые из них образуются, также будут заполнены полностью. Уровни, на которых располагаются внешние (валентные) электроны, образуют валентную зону. В зависимости от конкретной ситуации эта зона может быть либо полностью заполнена электронами, либо частично.

Следующая за ней более высокая зона образована из свободных уровней энергии изолированных атомов и называется зоной проводимости. Для объяснения электропроводности твердых тел достаточно использовать валентную зону, зону проводимости и лежащую между ними запрещенную зону (рис. 4.4).

В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ее расстояния до следующей более высокой зоны - зоны и проводимости - все твердые тела делятся на три класса: диэлектрики, проводники и полупроводники.

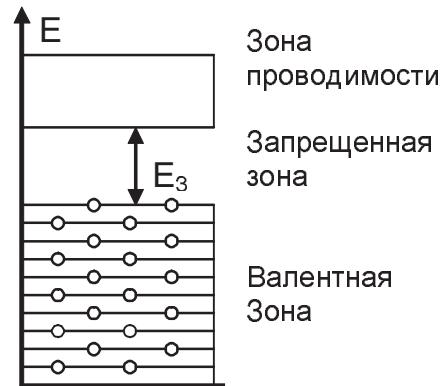


Рис. 4.4

Квантовая модель свободных электронов в твердом теле.

Уровень Ферми. Плотность электронных состояний

Чтобы получить сведения о таких важных понятиях, как энергия электрона проводимости в твердом теле, энергия уровня, отделяющего заполненные электронами уровни от свободных, плотность электронных состояний, приходящихся на интервал энергии dE , рассмотрим твердое тело с помощью квантовой модели свободных электронов.

Согласно этой модели валентные электроны атомов металла могут почти свободно перемещаться по кристаллу. Кристалл является для электронов трехмерной потенциальной ямой.

Запишем уравнение Шредингера для свободного электрона в трехмерной потенциальной яме

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0, \quad (4.2)$$

где Ψ - волновая функция, m - масса электрона, E - энергия электрона.

Ψ - функция должна удовлетворять граничным условиям, которые заключаются в требовании, чтобы Ψ -функция была периодической по x, y, z с периодом L (L - длина кристалла).

Периодические граничные условия:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) &= \Psi(x + L, y, z); \\ \Psi(x, y, z) &= \Psi(x, y + L, z) \\ \Psi(x, y, z) &= \Psi(x, y, z + L) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Решать уравнение (4.2) будем методом разделения переменных. Решение ищем в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной переменной x, y, z . Для простоты обозначим $\Psi(x) = \Psi_x, \Psi(y) = \Psi_y, \Psi(z) = \Psi_z$.

$$\Psi = \Psi(x) \cdot \Psi(y) \cdot \Psi(z) = \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y) \cdot \Psi_z(z) \quad (4.4)$$

Найдя соответствующие частные производные

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi_y \cdot \Psi_z \cdot \frac{d^2 \Psi_x}{dx^2}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Psi_x \cdot \Psi_z \cdot \frac{d^2 \Psi_y}{dy^2}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \Psi_x \cdot \Psi_y \cdot \frac{d^2 \Psi_z}{dz^2}$$

и подставив их в уравнение (4.2) получим

$$\Psi_y \cdot \Psi_z \cdot \frac{d^2 \Psi_x}{dx^2} + \Psi_x \cdot \Psi_z \cdot \frac{d^2 \Psi_y}{dy^2} + \Psi_x \cdot \Psi_y \cdot \frac{d^2 \Psi_z}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \cdot \Psi_x \cdot \Psi_y \cdot \Psi_z = 0.$$

Умножая это уравнение на $\frac{1}{\Psi_x \Psi_y \Psi_z}$, имеем

$$\frac{1}{\Psi_x} \cdot \frac{d^2 \Psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\Psi_y} \cdot \frac{d^2 \Psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\Psi_z} \cdot \frac{d^2 \Psi_z}{dz^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E, \quad (4.5)$$

Обозначим $\frac{2m}{\hbar^2}E = k^2$, k - волновой вектор $= \frac{2\pi}{\lambda}$ - есть постоянная величина.

Каждое слагаемое уравнения (4.5) есть постоянная величина и, таким образом, уравнение (4.2) разделено на три уравнения, каждое из которых зависит только от одной переменной:

$$\frac{1}{\Psi_x} \cdot \frac{d^2\Psi_x}{dx^2} = -k_x^2 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\Psi_x}{dx^2} + k_x^2 \cdot \Psi_x = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\Psi_y} \cdot \frac{d^2\Psi_y}{dy^2} = -k_y^2 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\Psi_y}{dy^2} + k_y^2 \cdot \Psi_y = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{\Psi_z} \cdot \frac{d^2\Psi_z}{dz^2} = -k_z^2 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\Psi_z}{dz^2} + k_z^2 \cdot \Psi_z = 0 \quad (4.8)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$,

Решение уравнений (4.6 ÷ 4.8) ищем в виде

$\Psi_x = A \cdot e^{ik_xx}$, $\Psi_y = B \cdot e^{ik_yy}$, $\Psi_z = C \cdot e^{ik_zz}$, где A, B, C - константы.

В силу периодичности граничных условий (4.3)

$$e^{ik_xx} = e^{ik_x(x+L)}, \quad e^{ik_xL} = 1, \quad k_x \cdot L = 2\pi n_x, \quad (n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$e^{ik_yy} = e^{ik_y(y+L)}, \quad e^{ik_yL} = 1, \quad k_y \cdot L = 2\pi n_y, \quad (n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$e^{ik_zz} = e^{ik_z(z+L)}, \quad e^{ik_zL} = 1, \quad k_z \cdot L = 2\pi n_z, \quad (n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где n_x, n_y, n_z - квантовые числа, характеризующие энергию электрона.

Учтем, что $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$. Подставляя это соотношение в формулу $\frac{2m}{\hbar^2}E = k^2$ и, полагая, что $(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = n^2$, получим выражение для энергии электрона проводимости в металле:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cdot n^2 \quad (4.9)$$

Вводя объем кристалла $V = L^3$, последнее соотношение можно переписать в виде $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 (2\pi)^2}{2m V^{2/3}}$. (4.10)

Отметим, что четвертым квантовым числом, характеризующим электрон в твердом теле (в добавлении к n_x, n_y, n_z), является спиновое квантовое число m_s ($m_s = \pm 1/2$). Таким образом, на каждом энергетическом уровне твердого тела могут находиться только два электрона с противоположно направленными спинами. Каждый

уровень твердого тела двукратно вырожден $g_n = 2$ (фактор вырождения).

При заполнении зоны электроны в твердом теле стремятся занять нижние уровни энергии. При абсолютном нуле температуры все уровни ниже некоторого оказываются заполненными электронами, а выше – свободными. Максимальный уровень, заполненный электронами, называется уровнем Ферми, а максимальная энергия, которую могут иметь электроны при $T = 0$ К, называется энергией Ферми – $E_F(0)$.

Найдем энергию уровня Ферми в зависимости от концентрации электронов n_0 . Если полагать, что на каждый атом твердого тела приходится один свободный электрон, то

$$n_0 = \frac{\rho}{M} \cdot N_A \quad (4.11)$$

где ρ – плотность вещества, M – молярная масса, N_A – число Авогадро.

Для нахождения уровня Ферми введем пространство квантовых чисел n_x , n_y , n_z , (рис. 4.5), каждая точка которого соответствует двум состояниям электронов ($g_n = 2$). Число квантовых состояний, имеющих квантовое

число n , меньшее некоторого n_F , равно $\frac{4}{3}\pi n_F^3 g_n$.

При абсолютном нуле все эти состояния заняты электронами, число которых равно $n_0 L^3$, следовательно, $\frac{4}{3}\pi n_F^3 g_n = n_0 L^3$. Находя

отсюда $n_F = \left(\frac{3n_0}{4\pi g_n}\right)^{1/3} L$, подставляя в (4.9) и

учитывая, что $g_n=2$, находим энергию уровня Ферми

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_0)^{2/3}. \quad (4.12)$$

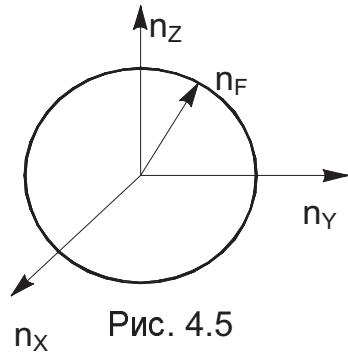


Рис. 4.5

Квантовая модель свободных электронов позволяет также получить выражение для плотности электронных состояний $g(E)$.

Плотностью электронных состояний $g(E)$ называется число состояний, приходящихся на единичный интервал энергии. На интервал энергии dE приходится число состояний $g(E)dE$, а полное число состояний с энергией $E \leq E_n$ равно $\int_0^{E_n} g(E)dE$. С другой стороны,

согласно сказанному выше, это число состояний равно $4/3\pi n^3 g_n$, поэтому можно записать

$$\int_0^{E_n} g(E)dE = 4/3\pi n^3 g_n.$$

Используя зависимость энергии E_n от квантового числа n (формула (4.10)), будем иметь

$$\int_0^{E_n} g(E)dE = 4/3\pi g_n \left(\frac{2mE_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} V;$$

отсюда, дифференцируя по E_n и полагая $g_n = 2$, получим

$$g(E_n) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot E^{1/2}. \quad (4.13)$$

Это выражение определяет плотность электронных состояний в интервале энергий вблизи E_n , приходящихся на объем V . Поскольку E_n - произвольно взятый уровень, то индекс n может быть опущен. Плотность состояний в единице объема

$$g_1(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{E}. \quad (4.14)$$

Элементы квантовой статистики.

Распределение Ферми-Дирака

Число электронов в зоне, приходящееся на интервал энергий dE , по определению

$$dn(E) = g(E) \cdot f(E, T) dE, \quad (4.15)$$

а полное число электронов в интервале энергий от 0 до E равно

$$N = \int_0^E g(E) \cdot f(E, T) dE \quad (4.16)$$

где $g(E)$ - плотность квантовых состояний электронов в зоне (4.13).

$f(E, T)$ - функция распределения Ферми-Дирака, которая характеризует вероятность заполнения электроном уровня с энергией E при температуре T . Для частиц с полуцелым спином, подчиняющихся принципу Паули, эта функция имеет вид

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}, \quad (4.17)$$

где E - энергия уровня, на котором находится электрон, E_F - энергия уровня Ферми, k - постоянная Больцмана, T - температура.

Частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны, а также легкие элементы типа ${}_1^1H^+$, ${}_2^3He$, ${}_2^4He^+$) называются *фермионами*.

Частицы с целым или нулевым спином (фотоны, фононы, атомы с четным числом электронов, такие, как ${}_2^4He$) подчиняются распределению Бозе-Эйнштейна, которое имеет вид

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} - 1}, \quad (4.18)$$

Эти частицы называются *бозонами*, они не подчиняются принципу Паули, и при $T = 0$ К могут одновременно находиться на самом низком энергетическом уровне.

Остановимся на рассмотрении свойств функции Ферми-Дирака при различных температурах.

1). Температура твердого тела $T = 0 \text{ К}$.

Классическая статистика не накладывает ограничений на число электронов, занимающих данный энергетический уровень, так что при $T = 0 \text{ К}$ все электроны могут занимать нижний уровень. В твердом теле на каждом уровне зоны может находиться не более двух электронов. Распределение электронов при $T = 0 \text{ К}$ приведено на рис. 4.6. Уровни, начиная от $E = 0$ до $E = E_{\max}$ оказываются полностью заполненными.

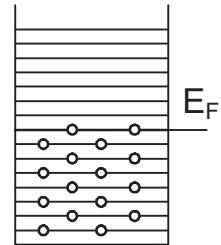


Рис. 4.6

При $T = 0$ и $E > E_F$ из формулы (4.17) получаем, что $\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) \rightarrow \infty$ и $f(E, T) = 0$. Это значит, что энергетические уровни в зоне дозволенных энергий, расположенные выше уровня Ферми, оказываются полностью свободными.

Если энергия электронов $E < E_F$, то при $T = 0 \text{ К}$ $\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) \rightarrow 0$ и $f(E, T) = 1$. В этом случае энергетические уровни, расположенные ниже уровня Ферми, заполнены электронами. Вид функции распределения Ферми при $T = 0 \text{ К}$ представлен на рис. 4.7.

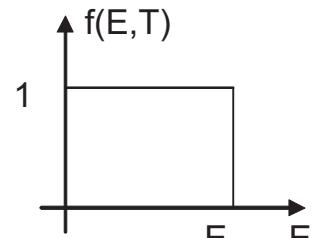


Рис 4.7

2). Температура твердого тела $T > 0 \text{ К}$.

Для электронов с энергией $E = E_F$, подставляя значения E и T в формулу (1.17), получаем $\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) = 1$, $f(E, T) = 1/2$. Это значит, что вероятность заполнения уровня Ферми составляет 50 %. При $T > 0$ начинают заполняться энергетические уровни, лежащие выше уровня Ферми. Наоборот, уровни энергии, лежащие ниже уровня Ферми обедняются электронами. Вид функции распределения Ферми в этом случае показан на рис. 4.8.

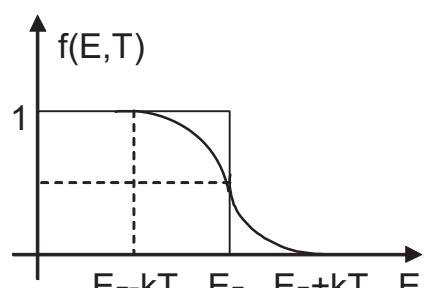


Рис. 4.8

Следует обратить внимание, что заметное изменение графика $f(E, T)$ по сравнению с графиком при $T = 0$ (рис. 4.7) имеет место в пределах $\pm kT$ вблизи уровня Ферми.

Электронный газ, подчиняющийся квантовой статистике Ферми-Дирака, является *вырожденным*. Основным признаком вырождения является независимость энергии частиц от температуры. Условие вырождения $T \ll T_F$, а температура Ферми T_F определяется формулой

$$E_F(0) = kT_F \quad (4.19)$$

Поскольку температуры вырождения высоки ($T_F > 10^4$ К) и превышают температуры плавления всех твердых тел, то основная часть электронов в твердых телах оказывается вырожденной.

Особый интерес представляет случай, когда энергия электронов значительно превышает энергию Ферми $E - E_F \gg kT$.

В этом случае в формуле (4.17) $\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right) \gg 1$, тогда

$$f(E, T) \approx e^{-\frac{E-E_F}{kT}} = e^{\frac{E_F}{kT}} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (4.20)$$

Полученное выражение $f(E, T) = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ есть функция

распределения частиц по энергиям Максвелла-Больцмана. Таким образом, квантовая статистика Ферми-Дирака переходит в классическую статистику Максвелла-Больцмана. Электронный газ, подчиняющийся статистике Максвелла-Больцмана, невырожден.

Задачи, решаемые на основе статистики Ферми-Дирака

1. Нахождение числа частиц в зоне в заданном интервале энергий, скоростей, импульсов.

Число частиц в зоне, приходящееся на интервал энергии dE , находим по формуле (4.15), подставляя выражение (4.17) для функции Ферми-Дирака и плотности электронных состояний (4.13), т.е.

$$dN(E, T) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot V \frac{E^{1/2}}{\exp(E-E_F)/kT + 1} \cdot dE. \quad (4.21)$$

Полное число частиц в зоне в интервале энергий от 0 до E определяется как

$$\Delta N = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot V \int_0^E \frac{E^{1/2} \cdot dE}{\exp(E-E_F)/kT + 1}. \quad (4.22)$$

При температуре твердого тела $T = 0$ К в интервале энергий от 0 до E_F формула (4.21) принимает вид

$$dN(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot V \cdot E^{1/2} \cdot dE. \quad (4.23)$$

а число частиц ΔN в заданном интервале энергий E_1, E_2

$$\Delta N = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot V \int_{E_1}^{E_2} E^{1/2} \cdot dE \quad (4.24)$$

Зная распределение частиц по энергиям, можно перейти к распределению частиц по скоростям и импульсам.

Для этого воспользуемся выражением для кинетической энергии $E = \frac{mv^2}{2}$, откуда $E^{1/2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot v$ (а), $dE = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv \cdot dv$ (б). Подставляя эти значения (а) и (б) в формулу (4.21) и подсчитывая для частиц в единице объема, получим распределение частиц по скоростям:

$$dN(v) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{m^3}{\hbar^2} \cdot v^2 \frac{1}{\exp(mv^2/2 - E_F)/kT + 1} dv. \quad (4.25)$$

Аналогичным образом, используя связь энергии и импульса, можно найти распределение частиц по импульсам:

$$dN(p) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{p^2}{\hbar^3} \cdot \frac{1}{\exp(p^2/2m - E_F)/kT + 1} dp. \quad (4.26)$$

2. Нахождение средних значений скорости, энергии, импульса. Среднее значение физической величины А определяется формулой

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^\infty A \cdot g(E)f(E,T) \cdot dE}{\int_0^\infty g(E)f(E,T) \cdot dE}. \quad (4.27)$$

Так, среднее значение энергии электрона в зоне при любой температуре вычисляется по формуле

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E \cdot g(E)f(E,T) \cdot dE}{N}. \quad (4.28)$$

где N - полное число частиц в зоне.

При $T = 0$ и $E < E_F$ $f(E,T) = 1$ и $f(E,T) = 0$ при $E > E_F$, поэтому формула (4.28) упрощается и имеет вид:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E \cdot g(E)dE}{\int_0^{E_F} g(E)dE}. \quad (4.29)$$

Средние значения скорости могут быть рассчитаны по формуле (4.27), полагая, что $A = v$:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^\infty v \cdot g(v)f(v,T) \cdot dv}{\int_0^\infty g(v)f(v,T) \cdot dv}. \quad (4.30)$$

где $g(v)$ - плотность электронных состояний в интервале скоростей.

При $T = 0$

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_{\max}} v \cdot g(v) dv}{\int_0^{v_{\max}} g(v) dv}, \quad (4.31)$$

где v_{\max} - определяется энергией Ферми:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = E_F(0). \quad (4.32)$$

Электрические и тепловые свойства твердых тел

Электрическая проводимость твердых тел.

Металлы. Диэлектрики

Основной электрической характеристикой твердого тела является удельная электрическая проводимость σ - величина, обратная удельному сопротивлению ρ ($\sigma = 1/\rho$). Единицей удельной электропроводности служит Сименс/м (См/м).

По величине проводимости электрического тока все твердые тела делятся на металлы, полупроводники и диэлектрики. В таблице 1 приведены значения удельного электрического сопротивления ρ для твердых тел, концентрация свободных электронов в зоне p и ширина запрещенной зоны.

Таблица 1.

Материал	Удельное сопротивление при $T=300$ К (Ом·м)	Концентрация (см^{-3})	$\Delta E_{\text{запр.}}$ (эВ)
Металлы	10^{-8}	$10^{22} - 10^{23}$	0
Полупроводники	$10^{-4} - 10^7$	$10^{14} - 10^{15}$	0,3-3
Диэлектрики	$10^{12} - 10^{20}$	$10^9 - 10^{11}$	свыше 3 эВ до 10 эВ

Из таблицы видно, что наименьшим удельным сопротивлением обладают металлы, а наибольшим - диэлектрики, которые являются хорошими изоляторами.

Рассмотрим, как можно объяснить высокую электропроводность металлов и низкую электропроводность диэлектриков с точки зрения зонной структуры этих твердых тел.

К металлам относятся элементы 1 и 2 групп таблицы Менделеева. У элементов 1-й группы (например, литий, натрий, медь, золото) на внешней оболочке атома находится один валентный электрон. Поэтому, при образовании твердого тела валентная зона, которая возникла из валентных энергетических уровней N - сблизившихся атомов, оказывается заполненной наполовину. Это объясняется тем,

что на каждом энергетическом уровне в зоне, состоящей из N - уровней, согласно принципу Паули может располагаться не более двух электронов, а всего валентных электронов в зоне - N .

Таким образом, в валентной зоне имеется $N/2$ - свободных уровней. У элементов 2-ой группы таблицы Менделеева (например, бериллий, магний, цинк, кадмий) на внешней оболочке атома находятся два валентных электрона. Поэтому при образовании твердого тела из этих элементов, валентная зона, состоящая из N -валентных уровней (N - атомов) оказывается заполненной полностью. Однако, для металлов 2-ой группы (так же, как для щелочных металлов 1-ой группы) валентная зона перекрывается со следующей за ней зоной разрешенных энергий.

Уровень Ферми в элементах 2-ой группы находится внутри той части зоны проводимости, которая образована из двух зон. Упрощенная энергетическая схема металлов приведена на рис. 4.9.

В отсутствие внешнего электрического поля электроны могут переходить на свободные уровни и возвращаться обратно (направленного движения электронов не возникает, электрического тока нет). При наличии электрического поля электроны переходят на более высокие свободные уровни, возникает направленное движение (ток). В металлах свободные уровни лежат непосредственно над уровнем Ферми, расстояния между уровнями малы, поэтому электрический ток возникает под действием очень слабых полей.

Высокая проводимость металлов обусловлена большой концентрацией свободных электронов и большим числом свободных энергетических уровней в зоне разрешенных энергий. Таким образом, металлы, представляющие из себя кристаллы с частично заполненной валентной зоной, являются хорошими проводниками.

Если в кристаллах валентная зона полностью заполнена электронами, то эти материалы в зависимости от ширины запрещенной зоны являются либо полупроводниками, либо диэлектриками (табл. 1). Упрощенная энергетическая схема этих материалов представлена на рис. 4.10. Для чистых полупроводников и диэлектриков уровень Ферми расположен в середине запрещенной зоны $E_F = \Delta E_3 / 2$.

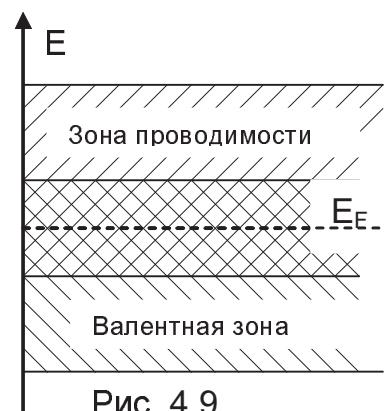


Рис. 4.9

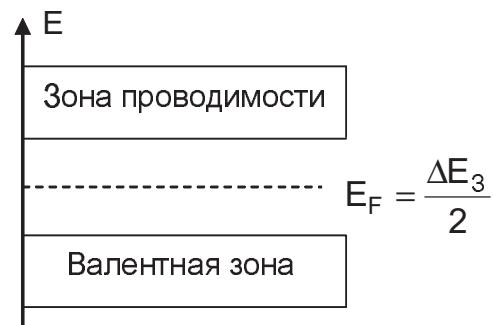


Рис. 4.10

Для того чтобы в полупроводниках или диэлектриках возникло направленное движение электронов, необходимо, чтобы электроны из полностью заполненной валентной зоны перешли в зону проводимости. Энергия возбуждения электронов, необходимая для перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости, определяется шириной запрещенной зоны ΔE_3 . Поскольку для диэлектриков ширина запрещенной зоны велика ($\Delta E_3 \sim 4\text{--}6$ эВ), то такое возбуждение электронов возможно только в достаточно сильных электрических полях (напряженность поля $\sim 10^7\text{--}10^8$ В/м).

При таких значениях напряженности электрических полей практически всегда наступает пробой материала (твёрдого тела). Таким образом, при напряжениях электрических полей, меньших пробивного напряжения, кристаллы с "широкой" запрещенной зоной являются хорошими изоляторами.

Собственная проводимость полупроводников.

Кристаллы с более узкой запрещенной зоной (ΔE_3 до 3 эВ) относятся к классу полупроводников. К чистым полупроводникам относятся германий, кремний, а также соединения элементов III и V (GaAs, InSb) или II и VI групп (CdSe). Поскольку для большинства чистых полупроводников ширина запрещенной зоны ($\Delta E_3 = 1\text{--}2$ эВ), то уже при комнатных температурах значительная часть электронов за счет теплового возбуждения переходит из валентной зоны в зону проводимости, концентрация при этих температурах составляет $10^{14}\text{--}10^{15}$ см⁻³.

При наложении внешнего электрического поля электроны в зоне проводимости чистого полупроводника могут перемещаться в направлении внешнего электрического поля - возникает так называемая электронная проводимость. С другой стороны, в результате перехода электрона в зону проводимости в валентной зоне возникает положительный заряд, свободное место, которое называется "дыркой". На это место в "дырку" может перейти электрон внутри валентной зоны, образуется вновь "дырка" и т.п. Под действием внешнего электрического поля в валентной зоне чистого полупроводника возникает направленное движение "дырок" - так называемая дырочная проводимость.

Таким образом, в чистом полупроводнике без примесей и дефектов собственная проводимость обусловлена движением электронов в зоне проводимости и движением "дырок" в валентной зоне. Такая проводимость называется электронно-дырочной и определяется выражением

$$\sigma_{n,p} = e \cdot n_{n,p} (\mu_n + \mu_p), \quad (4.33)$$

где $n_{n,p}$ - концентрация собственных носителей зарядов (электронов и дырок), μ_n , μ_p - подвижность электронов и дырок. Подвижностью называется физическая величина, измеряемая скоростью

направленного движения (скорость дрейфа), которую приобретает заряженная частица в поле напряженностью $E = 1 \text{ В/м}$, $\mu = v/E$.

В теории электропроводности доказано, что подвижность электронов и дырок определяется соотношением

$$\mu_{n,p} = \frac{e\langle\lambda\rangle}{2m\langle v_T \rangle} \quad (4.34)$$

где $\langle\lambda\rangle$ - средняя длина свободного пробега, $\langle v_T \rangle$ - средняя скорость теплового движения электронов или дырок, m - масса электрона или дырки.

Во всех предыдущих формулах в качестве массы электрона рассматривалась масса свободного электрона. Однако, если электрон находится в кристалле, он абсолютно свободным не является, на него действует периодическое поле решетки, и, как было показано выше, чем ближе электрон к ядру, тем сильнее воздействие поля. Т.е. электрону в твердом теле необходимо присвоить другое значение массы по сравнению с абсолютно свободным электроном. Эта масса имеет вполне определенное значение для каждого данного материала и называется "эффективной массой" m^* . Эффективная масса различна для различных зон. Чем шире зона, тем меньше эффективная масса. В общем случае $m^* \neq m_e$, она может быть отрицательной и может стремиться к бесконечности. Значения m^* для некоторых веществ приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Металл	Be	Li	Na	Cu	K	Ca	Al	Zn
m^*/m_e	1,6	1,2	1,2	1,0	1,1	1,4	0,57	0,85

При решении задач обычно принимается в качестве эффективной массы масса свободного электрона ($m^* = m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$).

Концентрацию и знак носителей заряда можно определить с помощью эффекта Холла. Эффект Холла состоит в наведении разности потенциалов в прямоугольном твердотельном образце, по которому течет ток плотностью j , если этот образец помещен в магнитное поле индукцией \vec{B} , направленное перпендикулярно к боковой грани образца (рис. 4.11).

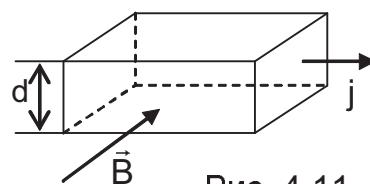


Рис. 4.11

В этом случае на движущийся заряд в магнитном поле действует сила Лоренца $F_L = q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$ (v - скорость дрейфа). Под действием этой силы заряды будут смещаться, заряжая верхнюю и нижнюю плоскости образца зарядами противоположного знака, что приводит к возникновению электрического поля напряженностью $E = U/d$ (U - разность потенциалов, d - высота образца). Условие баланса сил,

действующих на заряд $q \cdot v \cdot B = q \cdot E$. Учитывая, что плотность тока $j = q \cdot n \cdot v$ (n - концентрация носителей заряда), найдем выражение для разности потенциалов $U = U_X$:

$$U_X = \frac{j}{qn} \cdot B \cdot d, \quad (4.35)$$

где $R_X = 1/(q \cdot n)$ называется постоянной Холла, и формула (4.35) примет вид

$$U_X = R_X \cdot j \cdot B \cdot d, \quad (4.36)$$

в этом виде формула справедлива для любого образца, однако постоянная Холла может принимать различные значения. Для металлического проводника

$$R_X = \frac{1}{q_e \cdot n}. \quad (4.37)$$

Для полупроводника с зарядами одного знака

$$R_X = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{q_e \cdot n}. \quad (4.38)$$

Для полупроводника с электронной и дырочной проводимостью

$$R_X = \frac{3\pi}{8q} \frac{(n_p \mu_p^2 - n_n \mu_n^2)}{(n_p \mu_p + n_n \mu_n)^2}. \quad (4.39)$$

где n_n , n_p - концентрации электронов и дырок, μ_n , μ_p - подвижности электронов и дырок.

Плотность электрического тока связана с напряженностью внешнего электрического поля E законом Ома:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}. \quad (4.40)$$

Концентрация электронов и дырок зависит от температуры кристалла по закону

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta E_3}{2kT}}, \quad (4.41)$$

где n_0 - концентрация электронов в валентной зоне, ΔE_3 - ширина запрещенной зоны, k - постоянная Больцмана, T - температура твердого тела.

Концентрация носителей заряда в полупроводниках может быть увеличена не только за счет тепловой энергии kT , но и под действием света. Проводимость, возникающая в полупроводниках под действием светового излучения, называется *фотопроводимостью*.

Если энергия светового кванта больше ширины запрещенной зоны ($h\nu > \Delta E_3$), то поглотивший такой квант электрон переходит из валентной зоны в зону проводимости. Это явление называется явлением *внутреннего фотозеффекта*. Если энергия падающего кванта меньше ширины запрещенной зоны ($h\nu < \Delta E_3$), то в этом случае проводимость не увеличится. Энергия этого кванта

электронами не поглощается, и вещество "прозрачно" для этого кванта.

Для внутреннего фотоэффекта справедливы следующие положения:

Количество электронов фотопроводимости пропорционально интенсивности падающего света.

Для каждого полупроводника и диэлектрика существует определенная длина волны λ_{KP} , при которой начинается переход электронов из валентной зоны в зону проводимости. Эта длина волны называется "красной границей" фотоэффекта и определяется выражением

$$\lambda_{KP} = \frac{hc}{\Delta E_3}, \quad (4.42)$$

где c - скорость света в вакууме.

Примесная проводимость.

Полупроводники, содержащие помимо основных атомов примесные атомы с другой валентностью, называются *примесными полупроводниками*. Добавление примесей путем внедрения атомов чужеродных элементов в кристаллическую решетку основного полупроводника приводит к изменению характера проводимости.

Если ввести в решетку основного элемента атомы примеси, валентность которых на единицу больше, чем валентность основного атома, то атом примеси отдаст свой лишний электрон, который делается свободным. Примесный атом, отдающий свой электрон, называется донором, а соответствующий полупроводник называется донорным полупроводником или полупроводником *n*-типа.

Энергетические уровни электронов примесей располагаются в запрещенной зоне и называются донорными энергетическими уровнями. Особый интерес представляет случай, когда они располагаются вблизи дна зоны проводимости (рис. 4.12а).

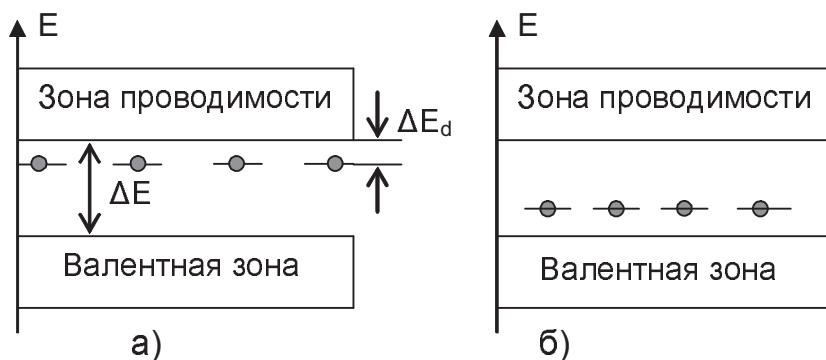


Рис. 4.12

В этом случае электрон, находящийся на донорном уровне, уже при незначительном увеличении температуры за счет малой энергии активации переходит в зону проводимости. Для полупроводников *n*-типа энергия активации ΔE_d определяется разностью энергий

донорного уровня и энергией дна зоны проводимости. Таким образом, в полупроводниках n -типа проводимость определяется преимущественно электронами и ее значение

$$\sigma_n = e \cdot n_n \cdot \mu_n, \quad (4.43)$$

где n_n - концентрация электронов в зоне проводимости, μ_n - проводимость электронов.

Если в решетку основного вещества ввести атом примеси, валентность которых на единицу меньше, чем валентность основного атома, то он отбирает электрон у основного атома, и в валентной зоне образуются дырки (рис.4.12б). Примесный атом, захватывающий электрон и образующий дырку в валентной зоне, называется акцептором, а соответствующий полупроводник акцепторным полупроводником или полупроводником p -типа. Акцепторные уровни располагаются в запрещенной зоне вблизи потолка валентной зоны. В полупроводнике p -типа за счет перехода электронов валентной зоны на акцепторный уровень образуется избыточное число "дырок", так что проводимость осуществляется в основном за счет дырок в валентной зоне (дырочная проводимость).

Проводимость p -полупроводников определяется выражением

$$\sigma_p = e \cdot n_p \cdot \mu_p, \quad (4.44)$$

где n_p - концентрация дырок в валентной зоне, равная концентрации акцепторов; μ_p - подвижность дырок, которая определяется аналогично подвижности электронов.

Необходимо отметить, что в примесных полупроводниках из-за изменения концентрации основных носителей понижение уровня Ферми смещается. Так, для полупроводников n -типа он располагается ближе ко дну зоны проводимости, а для p -типа - ближе к потолку валентной зоны.

Зависимость проводимости твердых тел от температуры

Экспериментально установлено, что для металлов с увеличением температуры проводимость уменьшается, а сопротивление растет по линейному закону

$$\rho = \rho_0 \alpha T, \quad (4.45)$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad (4.46)$$

где α - температурный коэффициент, ρ_0 - удельное сопротивление при $T = 300$ К, T - температура в К.

Следует отметить, что формула (4.45) справедлива для достаточно высоких температур.

Для полупроводников и диэлектриков проводимость увеличивается с ростом температуры по закону

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-\Delta E_3 / 2kT), \quad (4.47)$$

а сопротивление падает

$$\rho = \rho_0 \exp(\Delta E_3 / 2kT), \quad (4.48)$$

Здесь ρ_0 - удельное сопротивление при $T \rightarrow \infty$, ΔE_3 - ширина запрещенной зоны и kT - тепловая энергия электронов при данной температуре.

На рис. 4.13 соответственно представлены зависимости $\rho(T)$ для металлов (рис. 4.13а) и для полупроводников (рис. 4.13б).

Для объяснения полученных экспериментальных зависимостей сопротивления от температуры необходимо учитывать два основных фактора, определяющих сопротивление материалов: 1) концентрацию электронов в зоне проводимости, 2) подвижность носителей зарядов.

Для металлов концентрация электронов в зоне проводимости

практически не зависит от температуры. Подвижность электронов в металлах в зоне проводимости с повышением температуры уменьшается. В идеальной кристаллической решетке с неподвижными атомами электроны могут двигаться в электрическом поле, не рассеиваясь. Они просто регулярным образом переходят из одной потенциальной ямы в другую под действием электрического поля, наложенного на периодический потенциал решетки. Однако, если регулярность решетки нарушена, например, атом смешен из положения равновесия в результате тепловых колебаний, то электрон может рассеяться на этом атоме или, точнее, на этой нерегулярности периодического потенциала. Это приводит к уменьшению средней длины свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ и подвижности электронов μ_n металла (4.34) при увеличении температуры T и, следовательно, к уменьшению проводимости.

Необходимо отметить, что при $T \rightarrow 0$ для некоторых металлов возникает состояние *сверхпроводимости*, при котором его электрическое сопротивление равно нулю. В этом случае проводник называется *сверхпроводником*. Переход вещества в сверхпроводящее состояние происходит скачком в очень узком интервале температур, и поэтому температура перехода называется критической температурой. Электрический ток в сверхпроводниках течет в тонком поверхностном слое $\sim 10^{-5}$ см.

Для полупроводников и диэлектриков с увеличением температуры концентрация $n_{n,p}$ электронов в зоне проводимости и "дырок" в валентной зоне возрастает по закону

$$n_{n,p} = n_0 e^{-\frac{\Delta E_3}{2kT}}, \quad (4.49)$$

где ΔE_3 - ширина запрещенной зоны.

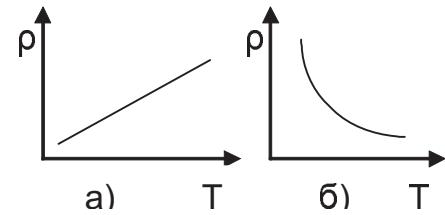


Рис.4.13

Концентрацию носителей зарядов в зависимости от температуры полупроводника можно рассчитать:

$$n(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2mk}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \cdot T^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta E_3}{2kT}}, \quad (4.50)$$

где m - масса носителей заряда.

Подвижность носителей зарядов в полупроводниках и диэлектриках с ростом температуры так же, как и для металлов, уменьшается из-за увеличения вероятности соударения с атомами в узлах кристаллической решетки.

Однако уменьшение подвижности электронов и дырок оказывается на сопротивлении полупроводников и диэлектриков значительно слабее, чем возрастание концентрации носителей. Поэтому, в целом зависимость сопротивления полупроводников и диэлектриков от температуры обусловлена зависимостью концентрации носителей от температуры. Таким образом, с ростом температуры сопротивление этих материалов уменьшается.

Теплоемкость твердых тел. Фононы

Основной характеристикой тепловых свойств твердых тел является теплоемкость. Молярная теплоемкость C_m характеризует изменение внутренней энергии одного моля при изменении температуры на один градус

$$C_m = \frac{\partial U_m}{\partial T}, \quad (4.51)$$

где U_m - внутренняя энергия одного моля твердого тела.

Внутренняя энергия твердых тел складывается из энергии кристаллической решетки, которая, в свою очередь, определяется энергией колебаний атомов в узлах кристаллической решетки U_1 и энергии взаимодействия атомов между собой U_2 . Для металлов необходимо еще учитывать энергию электронного "газа" - свободных электронов в зоне проводимости U_3 .

При различных температурах твердого тела вклад каждой из перечисленных энергий U_1 , U_2 , U_3 в общую энергию различен. На рис.

4.14 представлен общий ход зависимости молярной теплоемкости твердого тела от температуры.

Кривая 1 представляет сложный характер зависимости теплоемкости кристаллической решетки твердых тел от температуры. Кривая 2 описывает линейный характер зависимости теплоемкости электронного "газа" в металлах от температуры.

При достаточно высоких температурах $T >> \theta$ энергия колебаний атомов в узлах

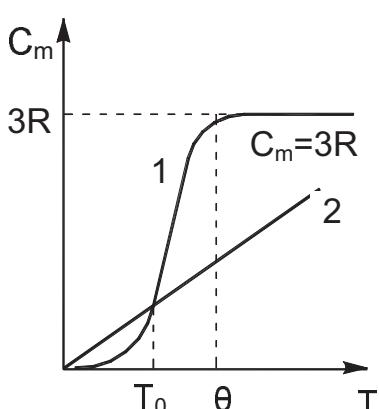


Рис. 4.14

кристаллической решетки U_1 значительно больше энергии U_2 и энергии электронного газа U_3 . В этом случае внутренняя энергия твердого тела U определяется только энергией колебаний атомов в узлах кристаллической решетки $U \approx U_1$. Само твердое тело можно представить как совокупность независимых осцилляторов, внутренняя энергия моля которых по классической физике равна

$$U_m = 3RT \quad (4.52)$$

Подставляя (4.52) в (4.51), находим

$$C_m = 3R \quad (4.53)$$

Это соотношение известно в физике как экспериментальный закон Дюлонга и Пти. Из закона Дюлонга и Пти следует, что величина теплоемкости не зависит ни от природы твердого тела, ни от температуры. По мере уменьшения температуры твердого тела энергия колебаний атомов в узлах кристаллической решетки уменьшается и становится сравнима или меньше значения энергии взаимодействия. При температуре T , меньше некоторого значения температуры, характерного для каждого твердого тела, закон Дюлонга и Пти нарушается, теплоемкость C_m начинает зависеть от природы материала твердого тела (кривая 1). Температура, ниже которой не выполняется закон Дюлонга и Пти, называется характеристической температурой и обозначается θ . Значения характеристических температур приведены в таблице 3.

В области низких температур ($T \ll \theta$) теплоемкость кристаллической решетки полупроводников, металлов, диэлектриков пропорциональна кубу абсолютной температуры (кривая 1 рис. 4.14) и зависит от природы твердых тел. Эта зависимость ($C_m \sim T^3$) называется законом кубов Дебая.

Для металлов вблизи абсолютного нуля Кельвина при температуре T , меньше некоторого значения T_0 (порядка нескольких градусов Кельвина), теплоемкость электронного "газа" становится больше теплоемкости кристаллической решетки (кривая 1). Теплоемкость металла вблизи 0 К линейно зависит от температуры $C_m \sim T$, что подтверждается экспериментами. Для полупроводников и диэлектриков закон Дебая ($C_m \sim T^3$) выполняется вплоть до 0 К.

При температуре твердого тела, меньше характеристической, между атомами в узлах кристаллической решетки имеются настолько сильные взаимодействия, что все N частиц тела образуют связанную систему, обладающую $3N - 6$ степенями свободы. Причем колебания всех атомов могут происходить с различными частотами, как с низкими, так и с высокими. Низким частотам соответствуют упругие колебания кристалла звукового или ультразвукового диапазона. Энергия колебаний атомов U_1 становится соизмеримой с потенциальной энергией связи U_2 . Твердое тело в этом случае подобно упругой среде, в которой распространяются волны

различной частоты, включая звуковые. Частоты волн v или ω связаны с длиной волны соотношением

$$\lambda = \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi \cdot v}{\omega}, \quad (4.54)$$

где v - скорость распространения волны.

В результате наложения прямой и отраженной волн в кристалле возникают стоячие волны. Число стоячих волн, т.е. число нормальных колебаний, частоты которых заключены в интервале от ω до $\omega + d\omega$ для единицы объема, определяется формулой

$$dN_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v_{3B}^3}, \quad (4.55)$$

где v_{3B} - скорость упругой волны в кристалле.

В твердой среде вдоль некоторого направления могут распространяться три разные волны с одним и тем же значением частоты ω . Одна волна - продольная - связана с распространением деформации растяжения или сжатия. Две волны - поперечные - связаны с распространением деформации сдвига в твердом теле.

Скорость распространения продольной волны $v_{||} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, скорость распространения поперечной волны $v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, где E и G - соответственно модули продольной и поперечной деформации, называемые модулем Юнга и модулем сдвига, ρ - плотность материала твердого тела. В соответствии с этим формула (4.55) принимает вид

$$dN_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2} \left(\frac{1}{v_{||}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right). \quad (4.55a)$$

Проинтегрировав выражение (4.55a) в пределах от 0 до ω_{max} , можно найти максимальную частоту нормальных колебаний решетки:

$$\int_0^{N} dN_\omega = \int_0^{\omega_{max}} \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{v_{||}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right) = \frac{\omega_{max}^3}{6\pi^2} \left(\frac{1}{v_{||}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right).$$

Учитывая, что полное число колебаний $N = \int dN_\omega$ (для единицы объема кристалла) равно числу степеней свободы, равному $3n$, где n - число атомов единице объема (4.11), окончательно получаем выражение для максимальной частоты колебаний:

$$\omega_{max} = \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{(v_{||}^{-3} + 2v_{\perp}^{-3})}}. \quad (4.56)$$

Часто в задачах для оценки скорости распространения акустических колебаний в кристаллах полагают равенство

продольной и поперечной скоростей: $v_{||} = v_{\perp}$, тогда число полных колебаний $dN_{\omega} = \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}$, а соответственно максимальная частота определяется из (4.56) как

$$\omega_{\max} = v \cdot \sqrt[3]{6\pi^2 \cdot n}, \quad (4.56a)$$

где v - оценочная скорость распространения колебаний.

Для оценки минимальной длины упругих волн в кристалле используется выражение

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi v}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{6\pi^2 n}} \cong \frac{2}{\sqrt[3]{n}}. \quad (4.57)$$

Поскольку величина $1/\sqrt[3]{n}$ соответствует минимальному расстоянию между атомами в узлах кристаллической решетки d , то минимальную длину λ_{\min} упругих волн в кристалле можно определять как $\lambda_{\min} \cong 2d$. Максимальная длина тепловых упругих волн, возбуждаемых в кристалле, соответствует размеру твердого тела.

В квантовой теории Дебая показано, что энергия тепловых упругих волн квантована. Квант тепловой энергии назван *фононом*. Энергия фона

$$E = hv = \hbar\omega \quad (4.58)$$

его импульс

$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k} \quad (4.59)$$

где \vec{k} - волновой вектор, $k = 2\pi/\lambda$ (λ - длина упругой волны в твердом теле). Импульс фона можно представить также в виде

$$p = \frac{\hbar\omega}{v_{\text{зв}}} \quad (4.59a)$$

где ω - частота собственных колебаний атомов решетки (частота нормальных колебаний), $v_{\text{зв}}$ - скорость распространения упругих волн в твердом теле.

Следует отметить, что в отличие от обычных частиц: фотонов, электронов, протонов, которые существуют как в вакууме, так и в среде, фонон может существовать только в упругой среде, и поэтому он является квазичастицей.

Спин фона равен нулю, поэтому фононы подчиняются *квантовой статистике Бозе-Эйнштейна*. Число фононов dn в объеме V в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ согласно квантовой статистике определяется формулой

$$dn = \frac{3V\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3 [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]}$$

или в терминах v

$$dn = \frac{12\pi V v^2 dv}{v^3 [\exp(hv/kT) - 1]}. \quad (4.60)$$

Среднее число фононов в состоянии с энергией ϵ_i , определяется

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(hv_i/kT) - 1}. \quad (4.61)$$

Максимальная энергия фонаона соответствует характеристической температуре твердого тела θ и определяется соотношением

$$\hbar \omega_{\max} = k\theta \quad (4.62)$$

где k - постоянная Больцмана, ω_{\max} - максимальная частота фонаона или максимальная частота колебаний атомов в узлах кристаллической решетки (4.56а). Характеристическая температура θ указывает для каждого твердого тела температурную область, где становится существенным квантование энергии тепловых упругих волн. Значение характеристической температуры θ (температура Дебая), а также значение постоянной кристаллической решетки d для некоторых элементов приведены в таблице 3.

В теории Дебая получена формула для расчета молярной внутренней энергии твердого тела в диапазоне температур от 0 до θ .

$$U_m = U_{m0} + 3RT \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta} \right)^{3\theta/T} \int_0^{x^3} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \quad (4.63)$$

где $x = \hbar \omega / kT$ (ω - частота фононов), T - температура твердого тела, θ - характеристическая температура тела, R – универсальная газовая постоянная ($R = 8,31$ Дж/(моль·К)), U_{m0} - молярная нулевая энергия кристалла, которая рассчитывается по формуле

$$U_{m0} = \frac{9}{8} R \theta. \quad (4.64)$$

Таблица 3

Мате-риал	Mg	Fe	Au	Ar	Cu	Al	РЬ	Ве	Ge	Si	Ал-маз
$\theta, [K]$	406	467	165	210	339	418	76	1160	366	668	2000
$d, [\text{\AA}]$	-	2,86	3,52	4,078	3,61	4,05	4,95	2,55	5,66	5,43	-

(В таблице приведены значения d только для элементов с кубической решеткой). $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ м.}$

Молярная теплоемкость твердого тела определяется выражением

$$C_m = \frac{dU_m}{dT} = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\theta} \right)^{3\theta/T} \int_0^{x^3} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3(\theta/T)}{e^{\theta/T} - 1} \right]. \quad (4.65)$$

В теории Дебая интересно рассмотреть два предельных случая:

- 1) Область высоких температур $T \geq \theta$;
- 2) Область низких температур $T \ll \theta$.

1) $T \geq \theta$. В этом случае в формуле (4.63) $(e^x - 1) \approx x$ и для расчета молярной энергии кристалла имеем следующее выражение:

$$U_m = U_{m0} + 3RT \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta} \right)^{3\theta/T} \int_0^{x^2} dx = U_{m0} + 3RT. \quad (4.66)$$

а молярная теплоемкость определяется по формуле

$$C_m = \frac{dU_m}{dT} = \frac{d(U_{m0} + 3RT)}{dT} = 3R. \quad (4.67)$$

Таким образом, при $T \geq \theta$ выполняется закон Дюлонга и Пти (рис. 4.14). Для решения задач будем считать $T/\theta \gg 2$. Полученный результат означает, что в области высоких температур существуют фононы любой частоты, вплоть до $\omega_{max} = \frac{k\theta}{\hbar}$. Причем при $T \gg \theta$ основной вклад в энергию кристалла дают фононы максимальной энергии (т.е. минимальной длины волны $\lambda_{min} \sim 2d$). Это означает, что атомы колеблются как независимые осцилляторы.

2) $T \ll \theta$. В этом случае $\theta/T \gg 1$, можно считать, что $\theta/T \rightarrow \infty$, тогда в формуле (4.63), заменяя верхний предел интегрирования на ∞ , получим выражение для молярной энергии кристалла

$$U_m = U_{m0} + 3RT \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = U_{m0} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\pi^4 T^4 R}{\theta^3}, \quad (4.64)$$

а молярная теплоемкость в этой области определяется формулой

$$C_m = \frac{dU_m}{dT} = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3. \quad (4.69)$$

Это соотношение называется законом Дебая.

Из закона Дебая следует, что теплоемкость тела при $T \ll \theta$ изменяется пропорционально кубу температуры ($C \sim T^3$) и зависит от природы твердого тела. Эти выводы теории Дебая хорошо подтверждаются на опыте (рис. 4.14). При $T \ll \theta$ существуют в основном фононы с частотой $\omega \ll k\theta/\hbar$ и $\lambda > \lambda_{min}$. Длинноволновые колебания - это колебания связанных атомов, а это означает, что энергия твердого тела определяется как энергией колебаний атомов U_1 , так и энергией взаимодействия атомов U_2 .

Необходимо отметить, что для полупроводников и диэлектриков закон Дебая выполняется вплоть до абсолютного нуля. Для металлов при температуре $T \leq \theta$ закон Дебая не выполняется: в области температур от 0 К до T_0 теплоемкость металлов прямо пропорциональна температуре (рис. 4.14).

У металлов при температуре, близкой к нулю, внутренняя энергия в основном определяется энергией электронов U_3 , расположенных в зоне проводимости. Причем, согласно распределению Ферми-Дирака, энергия электронов, находящихся на уровнях ниже уровня Ферми на величину kT , практически не зависит от температуры. Вклад в

теплоемкость дают электроны в узком слое шириной kT вблизи уровня Ферми (E_F).

Точный расчет средней энергии электронов для одного моля $U_3 = \langle E \rangle \cdot N_A$, приводит к результату

$$U_{3m} = N_A \cdot \frac{3}{5} E_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]. \quad (4.70)$$

Продифференцировав выражение (4.70) по T , получим формулу для определения электронной теплоемкости металлов вблизи абсолютного нуля

$$C_{Me} = \frac{\partial U_{3m}}{\partial T} = \frac{3}{5} E_F \cdot N_A \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi^2 k^2 T}{E_F^2} = \frac{\pi^2 R}{2} \cdot \frac{kT}{E_F} = \frac{\pi^2 RT}{2T_F}, \quad (4.71)$$

где $R = kN_A$ - универсальная газовая постоянная, $T_F = E_F/k$ (4.19).

Формула (4.71) получена в квантовой теории теплоемкости для случая, когда в металле на каждый атом приходится один свободный электрон; если же на каждый атом приходится Z свободных электронов, то молярная теплоемкость электронного газа рассчитывается по формуле

$$C_{MeZ} = Z \cdot C_{Me} = \frac{\pi^2 R Z}{2} \cdot \frac{kT}{E_F} = \frac{\pi^2 R Z}{2} \cdot \frac{T}{T_F}. \quad (4.71a)$$

Поскольку теплоемкость решетки при $T \ll \theta$ пропорциональна T^3 , то она убывает быстрее, чем теплоемкость электронов ($C_e \sim T$), поэтому теплоемкость металлов вблизи 0 К пропорциональна температуре.

Температура T_0 , при которой теплоемкость кристаллической решетки начинает превышать теплоемкость электронного "газа", определяется выражением

$$T_0 = 0,145 \sqrt{\frac{Z\theta}{T_F}} \cdot \theta$$

и составляет несколько градусов Кельвина.

Для полупроводников и диэлектриков при температуре, близкой к абсолютному нулю, в зоне проводимости практически нет электронов, поэтому нет смысла говорить об электронной теплоемкости.

При решении задач на определение количества тепла, подводимого к твердому телу, используем выражение

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} m \cdot c(T) dT, \quad (4.72)$$

где m - масса кристалла, $c(T)$ - удельная теплоемкость твердого тела, которая связана с молярной теплоемкостью соотношением $c(T) = C_m(T)/M$.

Примеры решения задач.

Задача 4.1. Определить максимальную энергию и максимальную скорость электронов в медном проводнике при $T = 0$ К, полагая, что на каждый атом меди приходится по одному свободному электрону.

Решение

Максимальная энергия, которую может иметь электрон при $T = 0$ К, - это энергия Ферми (4.12):

$$E_{\max} = E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_0)^{2/3}.$$

По условию задачи на каждый атом меди приходится один электрон, следовательно, концентрация электронов согласно (4.11)

$n_0 = \frac{\rho}{M} N_A$, где плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, молярная масса меди $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$n_0 = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} = 0,83 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

$$E_{\max} = \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2 (3 \cdot 3,14^2 \cdot 0,83 \cdot 10^{29})^{2/3}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 9,9 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 6,2 \text{ эВ.}$$

Электроны, имеющие максимальную энергию, имеют максимальную скорость. Для определения максимальной скорости запишем равенство $\frac{mv_{\max}^2}{2} = E_F(0)$,

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,9 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 4,7 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

Задача 4.2. Определить вероятность того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся на $\Delta E = 0,05$ эВ ниже уровня Ферми и выше уровня Ферми в двух случаях: 1) температура металла $T_1 = 290$ К; 2) температура металла $T_2 = 50$ К.

Решение

Вероятность заселения электронами различных уровней энергии зоны определяется функцией распределения Ферми-Дирака (4.17)

$$f(E, T) = \frac{1}{\exp(E - E_F)/kT + 1}.$$

По условию задачи разность между энергетическим уровнем E , расположенным ниже уровня Ферми, и уровнем Ферми $\Delta E = -0,05$ эВ. Подсчитаем величину $f(E, T)$ для заданных температур, предварительно выразив kT_1 и kT_2 в электрон-вольтах:

$$kT_1 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ эВ,}$$

$$kT_2 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 50 \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ эВ},$$

$$f(E, T_1) = \frac{1}{1/\exp(0,05/0,025)+1} = 0,881,$$

$$f(E, T_2) = \frac{1}{1/\exp(0,05/0,0043)+1} = 0,99991.$$

Для электрона, расположенного выше уровня Ферми на $\Delta E = +0,05$ эВ, вероятности нахождения на заданных уровнях окажутся соответственно равными:

$$f(E, T_1) = \frac{1}{\exp(0,05/0,025)+1} = 0,119,$$

$$f(E, T_2) = \frac{1}{\exp(0,05/0,0043)+1} = 8,8 \cdot 10^{-6}.$$

Задача 4.3. Оценить критическую температуру для меди T_F , при которой снимается вырождение электронного газа в проводнике.

Решение

При температуре тела $T \ll T_F$, поведение электронного газа описывается статистикой Ферми-Дирака, а при $T \geq T_F$ - статистикой Максвелла-Больцмана. Найдем критическую температуру T_F для меди, полагая $E_F = 6,2$ эВ (из решения задачи 4.1). Из формулы (4.19)

$$T_F = \frac{6,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}} = 7 \cdot 10^4 \text{ К};$$

отсюда видно, что медь и другие металлы в виде кристаллического вещества обычно находятся при $T \ll T_F$ и, следовательно, электронный газ в металлах подчиняется статистике Ферми-Дирака.

Задача 4.4. Используя квантовую статистику, найти число электронов в зоне в интервале энергий от 0 до E_F при $T = 0$ К и концентрацию n_0 .

Решение

Число электронов N в интервале энергий от 0 до E_F определится выражением (4.16)

$$N = \int_0^{E_F} g(E) \cdot f(E, T) dE \quad (1)$$

Из (4.13)

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2} \cdot E^{1/2} \cdot V}{2\pi^2 \hbar^3}. \quad (2)$$

Так как при $T = 0$ К функция распределения по энергиям $f(E, T) = 1$, то подставив (2) в (1), найдем

$$N = \int_0^{E_F} \frac{2^{3/2} \cdot m^{3/2} \cdot E^{1/2} \cdot V \cdot dE}{2\pi^2 \hbar^3} = \frac{(2m)^{3/2} \cdot V}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} \cdot dE;$$

$$N = \frac{2(2m)^{3/2} \cdot V \cdot E^{1/2}}{2\pi^2 \hbar^3 \cdot 3} \Big|_0^{E_F} = \frac{(2mE_F)^{3/2} \cdot V}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Концентрацию электронов $n_0(E)$ можно определить из выражения

$$n_0(E) = \frac{N(E)}{V} = \frac{(2mE_F)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Задача 4.5. Зная распределение электронов в металле $dN(E)$ по энергиям, установить распределение $dN(p)$ электронов по импульсам. Найти частный случай распределения при $T = 0$ К.

Решение

Распределение электронов по энергиям в единичном объеме в соответствии с (4.21) имеет вид:

$$dN(E, T) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{E^{1/2}}{\exp(E - E_F)/kT + 1} \cdot dE. \quad (1)$$

Используя связь импульса с энергией $E = \frac{p^2}{2m}$ (2), найдем

$$dE = d\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{1}{2m} \cdot 2p \cdot dp. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$dN(p) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{p}{(2m)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{2p \cdot dp}{\exp(p^2/2m - E_F)/kT + 1};$$

$$dN(p) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{p^2}{\hbar^3} \cdot \frac{1}{\exp(p^2/2m - E_F)/kT + 1} dp.$$

При $T = 0$ К функция распределения Ферми

$$\frac{1}{\exp((p^2/2m - E_F)/kT) + 1} = 1; \quad \text{и} \quad dN(p) = \frac{p^2}{\pi^2 \hbar^3} \cdot dp.$$

Задача 4.6. Определить число свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального импульса P_{max} не более чем на 0,1 P_{max} для медного проводника объемом 40 см³ при абсолютном нуле $T = 0$ К. Энергию Ферми для меди принять равной $E_F = 6,2$ эВ.

Решение

Используя решение предыдущей задачи, запишем распределение свободных электронов в металле по импульсам при $T = 0$ К.

$$dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 \cdot dp. \quad (1)$$

Число электронов Δn в единице объема, импульсы которых заключены в интервале от $(p_{\max} - 0,1p_{\max})$ до p_{\max} , найдем интегрированием (1) в соответствующих пределах:

$$\Delta n(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_{0,9p_{\max}}^{p_{\max}} p^2 dp = \frac{p^3}{3\pi^2 \hbar^3} \Big|_{0,9p_{\max}}^{p_{\max}},$$

$$\Delta n(p) = \frac{p_{\max}^3}{3\pi^2 \hbar^3} (1 - 0,9^3) = \frac{0,271 p_{\max}^3}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Искомое число свободных электронов ΔN в единице объема V найдем из соотношения

$$\Delta N = n \cdot V = \frac{0,271 p_{\max}^3}{3\pi^2 \hbar^3} V. \quad (2)$$

Учитывая, что максимальный импульс p_{\max} связан с энергией Ферми при $T = 0$ соотношением $p_{\max}^2 = 2mE_F$ или $p_{\max} = (2mE_F)^{1/2}$, из (2) определяем искомое число электронов:

$$\Delta N = \frac{0,271 (2mE_F)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} V. \quad (3)$$

Поставляя в (3) численные значения $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $E_F = 6,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж, $V = 4 \cdot 10^{-5}$ м³, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, находим

$$\Delta N = \frac{0,271 \cdot (2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})^{3/2}}{3 \cdot 3,14^2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^3} \cdot 4 \cdot 10^{-5},$$

$$\Delta N = 1,4 \cdot 10^{-35} \text{ электронов.}$$

Задача 4.7. Сколько процентов свободных электронов в металле при $T = 0$ имеет кинетическую энергию, превышающую половину максимальной?

Решение

Число электронов dN в единице объема металла энергии которых заключены в интервале от E до $E + dE$ при $T = 0$ К определяется согласно (4.23) соотношением

$$dN(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E^{1/2} \cdot dE. \quad (1)$$

Тогда число свободных электронов Δn_1 при $T = 0$ К, энергии которых больше половины максимальной, т.е. $E > E_{\max}/2 = E_F/2$, найдем интегрированием (1) в пределах от $E_F/2$ до E_F :

$$\Delta n_1 = \int_{E_F/2}^{E_F} dN = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_{E_F/2}^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2E_F^{3/2}}{3} \Big|_{E_F/2}^{E_F},$$

$$\Delta n_1 = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E_F^{3/2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2} \right]. \quad (2)$$

При $T = 0$ К число свободных электронов Δn_2 , обладающих энергиями от 0 до $E_{max} = E_F$ равно

$$\Delta n_2 = \int_0^{E_F} dn = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E_F^{3/2}. \quad (3)$$

Найдем отношение Δn_1 к Δn_2 из (2) и (3) и выразим его в процентах:

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{E_F^{3/2} (1 - 0.5^{3/2})}{E_F^{3/2}} \cdot 100\% = (1 - 0.5^{3/2}) \cdot 100\% \approx 65\%.$$

Задача 4.8. Найти суммарную кинетическую энергию свободных электронов в 1 см³ меди при 0 К, полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Решение

Суммарная кинетическая энергия свободных электронов определяется соотношением $E = \sum_{i=1}^n E_i = n\langle E \rangle$ (1), где n - число свободных электронов в 1 см³, $\langle E \rangle$ - средняя кинетическая энергия свободного электрона. Средняя энергия при $T = 0$ К в соответствии с (4.29) равна

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E \cdot g(E) dE}{\int_0^{E_F} g(E) dE}. \quad (2)$$

Подставляя в (2) $g(E)$, равное согласно (4.13)

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E^{1/2},$$

и проведя сокращения, получим

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_F.$$

Для меди $E_F = 6,2$ эВ (см. задачу 4.1) и, следовательно, средняя энергия $\langle E \rangle = 3,7$ эВ. Концентрацию n найдем согласно (4.11): $n = \rho N_A / M$. Для меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $M_{Cu} = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$$n = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} = 0,8 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3} = 0,8 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}.$$

Полную кинетическую энергию всех электронов в 1 см³ определим из (1), подставляя найденные значения $\langle E \rangle$ и n :

$$E = 3,7 \cdot 0,8 \cdot 10^{23} = 3 \cdot 10^{23} \text{ эВ} = 3 \cdot 10^{14} \text{ ГэВ} = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Задача 4.9. Вычислить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле лития при абсолютном нуле через максимальную скорость v_{\max} , полагая, что на каждый атом лития приходится один свободный электрон.

Решение

Средняя скорость при $T = 0$ К в соответствии с (4.30) равна

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_{\max}} v \cdot g(v) \cdot dv}{\int_0^{v_{\max}} g(v) \cdot dv}. \quad (1)$$

Максимальная скорость находится по (4.32) с использованием (4.12)

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \sqrt{\frac{2\hbar^2(3\pi^2n)^{2/3}}{2m^2}} = \frac{\hbar}{m} \sqrt[3]{3\pi^2n}. \quad (2)$$

Плотность состояний в единице объема, приходящаяся на единичный интервал энергии, в соответствии с (4.14), определяется выражением:

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E^{1/2},$$

а плотность состояний, приходящихся на интервал энергии dE , будет равна

$$g(E)dE = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E^{1/2} \cdot dE, \quad (3)$$

Перейдем от плотности состояний по энергиям $g(E)dE$ к плотности состояний по скоростям $g(v)dv$. Для этого используем формулу кинетической энергии $E = \frac{mv^2}{2}$, находя $dE = m \cdot v \cdot dv$ и $\sqrt{E} = v \sqrt{\frac{m}{2}}$, подставляя все в (3), получим

$$g(v)dv = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{v \cdot \sqrt{m} \cdot m \cdot v \cdot dv}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \cdot m^3 \cdot v^2 dv.$$

Подставляя в формулу (1) и произведя сокращения, получим

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_{\max}} v^3 dv}{\int_0^{v_{\max}} v^2 dv} = \frac{3}{4} v_{\max}.$$

Учитывая (2) и подставляя в соответствии с (4.11) $n = \frac{\rho}{M} N_A$,

окончательно имеем $\langle v \rangle = \frac{3}{4} \cdot \frac{\hbar}{m} \sqrt[3]{3\pi^2 \rho N_A / M}$,

$$\langle v \rangle = \frac{3}{4} \cdot \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3,14^2 \cdot 534 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{6,94 \cdot 10^{-3}}} = 9,2 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Задача 4.10. Найти интервал ΔE_i (в эВ) между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле объемом 1 см^3 для энергий E , равных 0,1 эВ и 5 эВ при $T = 0 \text{ К}$.

Решение

Согласно формуле (4.1) искомый интервал между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле заданного объема V для любых значений энергии E определяется

$$\Delta E = \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi V(2m)^{3/2}\sqrt{E_i}}. \quad (1)$$

Подставляя в (1) численные значения $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$, $V = 10^{-6} \text{ м}^3$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, энергию $E_1 = 0,1 \text{ эВ}$, $E_2 = 5 \text{ эВ}$ ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$), находим

$$\Delta E_1 = \frac{(2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34})^3}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6} (2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31})^{3/2} \sqrt{0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}},$$

$$\Delta E_2 = \frac{(2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34})^3}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6} (2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31})^{3/2} \sqrt{5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}},$$

$$\Delta E_1 = 4,7 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}, \quad \Delta E_2 = 6,6 \cdot 10^{-23} \text{ эВ}.$$

Задача 4.11. Чистый кристаллический германий содержит $4,5 \cdot 10^{28}$ атомов/ м^3 . При температуре 300 К один атом из каждого $2 \cdot 10^9$ атомов ионизован. Подвижности электронов и дырок при этой температуре соответственно равны $0,4$ и $0,2 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$). Определить проводимость чистого германия.

Решение

Концентрация собственных носителей

$$n_{n,p} = \frac{4,5 \cdot 10^{28}}{2 \cdot 10^9} = 2,25 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Электропроводность (4.33)

$$\sigma = \sigma_{n,p} = n_{n,p} \cdot e(\mu_n + \mu_p) = 2,25 \cdot 10^{19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} (0,4 + 0,2) = 2,16 \text{ См}/\text{м}.$$

Задача 4.12. Для полупроводникового образца, имеющего форму куба со стороной L измерено сопротивление при отсутствии освещения R_0 и при наличии освещения R . Найти изменение концентраций электронов Δn_n и дырок Δn_p , обусловленных освещением, если их подвижность μ_n и μ_p . Считать $\Delta n_n = \Delta n_p$.

Решение

Так как $\Delta n_n = \Delta n_p$, то фотопроводимость $\sigma_\phi = e(\mu_n + \mu_p)\Delta n$, и, в то же время, $\sigma_\phi = \sigma - \sigma_0$ (1), где σ - коэффициент электропроводности при наличии освещения, σ_0 - коэффициент электропроводности при отсутствии освещения.

В условии задачи задано сопротивление $R = \rho \frac{L}{S}$, поэтому, выражая σ через $1/\rho$ и σ_0 - через $1/\rho_0$, получаем соотношение

$$\sigma_{\phi} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{R_0 - R}{R_0 R}.$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), для Δn получим

$$e(\mu_n + \mu_p) \Delta n = \frac{1}{L} \cdot \frac{R_0 - R}{R_0 R} \Rightarrow \Delta n = \frac{R_0 - R}{e(\mu_n + \mu_p) R_0 R L}.$$

Задача 4.13. Ширина запрещенной зоны чистого полупроводника равна 1 эВ. Вычислить вероятность заполнения электронами уровня вблизи дна зоны проводимости при $T = 290$ К. Будет ли увеличиваться эта вероятность, если на полупроводник действует излучение: 1) $\lambda_1 = 1$ мкм и 2) $\lambda_2 = 2$ мкм?

Решение

Уровень Ферми в чистом полупроводнике лежит посередине запрещенной зоны; согласно условию задачи $E_F = 1$ эВ/2 = 0,5 эВ. Вероятность заполнения электронами уровней определяется функцией распределения Ферми-Дираха (4.17):

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

Отсчет энергии в этом случае удобно вести от потолка валентной зоны. В этом случае $E - E_F = 1$ эВ - 0,5 эВ = 0,5 эВ. Вероятность заполнения энергетических уровней зоны проводимости подсчитаем по формуле:

$$f(E, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290}\right) + 1} = \frac{1}{\exp(20) + 1} = 2,06 \cdot 10^{-9}.$$

При облучении светом полупроводника возникает внутренний фотоэффект, и проводимость полупроводника увеличивается. Внутренний фотоэффект имеет место только, если энергия кванта падающего света $E = h\nu = hc/\lambda$ равна или больше ΔE_3 ширины запрещенной зоны.

1) $\lambda_1 = 1 \cdot 10^{-6}$ м, то энергия падающего кванта

$$E_1 = h \frac{c}{\lambda_1} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{10^{-6} \text{ м} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эВ}} = 1,24 \text{ эВ};$$

т.к. $E > 1$ эВ, то вероятность нахождения электронов в зоне проводимости увеличивается.

2) $\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ м

$$E_2 = h \frac{c}{\lambda_2} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эВ}} = 0,62 \text{ эВ};$$

т.к. $E_2 = 0,62$ эВ < 1 эВ, то вероятность нахождения электронов в зоне проводимости не изменится.

Задача 4.14. Красная граница фотопроводимости чистого беспримесного германия при низких температурах соответствует длине волны $\lambda_{kp} = 1,76 \cdot 10^{-6}$ м. Вычислить температурный коэффициент сопротивления этого полупроводника ρ_0 при $T = 300$ К.

Решение

Согласно соотношениям (4.46) и (4.48) имеем,

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \rho_0 e^{\frac{\Delta E_3}{2kT}} \cdot \left(\frac{\Delta E_3}{2kT^2} \right), \quad \alpha = \frac{1}{\rho_0 e^{\frac{\Delta E_3}{2kT}}} \cdot \rho_0 e^{\frac{\Delta E_3}{2kT}} \cdot \left(-\frac{\Delta E_3}{2kT^2} \right),$$

откуда $\alpha = -\Delta E_3 / 2kT^2$.

Красная граница фотопроводимости

$$\lambda_{kp} = \frac{hc}{\Delta E_3}, \quad \Delta E_3 = \frac{hc}{\lambda_{kp}}.$$

$$\text{И, окончательно, имеем } \alpha = -\frac{hc}{2kT^2 \lambda_{kp}},$$

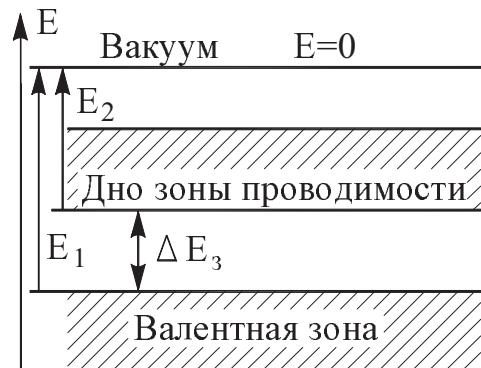
$$\alpha = -\frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 9 \cdot 10^4 \cdot 1,76 \cdot 10^{-6}} = -0,047 \text{ K}^{-1}.$$

Задача 4.15. Красная граница фотоэффекта сурьмяно-цезиевого фотокатода (при очень низкой температуре) соответствует длине волны $\lambda_1 = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м, а красная граница фотопроводимости соответствует длине волны $\lambda_2 = 2,07 \cdot 10^{-6}$ м. Определить в эВ положение дна зоны проводимости данного полупроводника относительно вакуума.

Решение

Красная граница фотоэффекта определяется наименьшей энергией, которую необходимо передать электрону, чтобы вызвать переход последнего на уровень с энергией $E=0$ (в вакуум). Ясно, что наименьшая энергия потребуется для перевода электрона, расположенного на верхнем уровне валентной зоны,

$$E_1 = h \frac{c}{\lambda_1}.$$



Ширина запрещенной зоны ΔE_3 определяет наименьшую энергию, которую необходимо сообщить электрону, расположенному на верхнем уровне валентной зоны чтобы перевести его в зону

проводимости $\Delta E_3 = h \frac{c}{\lambda_2}$. Согласно представлениям зонной теории проводимости энергия, соответствующая дну зоны проводимости, определяется разностью

$$E_2 = E_1 - \Delta E_3, \quad E_2 = h \frac{c}{\lambda_1} - h \frac{c}{\lambda_2} = hc \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2},$$

$$E_2 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 (2,07 - 0,65) \cdot 10^{-6}}{2,07 \cdot 10^{-6} \cdot 0,65 \cdot 10^{-6}} = 2,05 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

В выбранной системе отсчета энергия должна иметь знак минус. Поэтому ответ должны дать в виде $E_2 = -2,05 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -1,31 \text{ эВ.}$

Задача 4.16. Вычислить концентрацию собственных и примесных носителей в германии, содержащем 0,001% мышьяка, при комнатной температуре. Ширина запрещенной зоны $\Delta E_3 = 0,75 \text{ эВ}$, энергия активации $\Delta E_a = 0,015 \text{ эВ}$ ($m_e = m_p$).

Решение

Так как валентность атомов германия (Ge) равна четырем, а мышьяка (As) - пяти, следовательно, мы имеем дело с донорным полупроводником (рис. 4.12а). При комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$ тепловая энергия

$$kT = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,025 \text{ эВ,}$$

т.е. $kT > E_a$ и, следовательно, все атомы примеси активированы. Концентрация примесей, которые составляют 0,001% от основных носителей, может быть рассчитана по (4.11):

$$n_{As} = \frac{\rho_{Ge} \cdot N_A \cdot 0,001\%}{M_{Ge}},$$

где $\rho_{Ge} = 5,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $M_{Ge} = 73 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$,

$$n_{As} = \frac{5,3 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{73 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{-5} = 4,4 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Концентрация собственных носителей, которая зависит от температуры, определяется по (4.50):

$$n_{Ge}(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_e kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta E_3}{2kT}},$$

$$n_{Ge}(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,025 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3,14 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-68}} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{0,75}{0,05}} = 7,4 \cdot 10^{-18} \text{ моль}^{-1}.$$

Задача 4.17. Приняв в чистом германии ширину запрещенной зоны равной 0,72 эВ, найти, на сколько надо повысить температуру германия, чтобы число электронов проводимости увеличилось в два раза по сравнению с начальной температурой, равной 300 К?

Решение

В соотношении (4.50) постоянные величины для данного полупроводника выразим через величину $C = \frac{1}{4} \left(\frac{2mk}{\pi h^2} \right)^{3/2}$, и концентрация электронов определяется формулой

$$n_1 = C \cdot T_1^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta E_3}{2kT_1}} \quad (1)$$

при начальной температуре $T = 300$ К.

Концентрацию электронов с увеличением температуры до $T_2 = T_1 + \Delta T$, выразим соответственно через

$$n_2 = C(T_1 + \Delta T)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta E_3}{2k(T_1 + \Delta T)}}.$$

По условию

$$\frac{n_2}{n_1} = 2 = \left(\frac{T_1 + \Delta T}{T_1} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\Delta E_3}{2kT_1} \cdot \frac{\Delta T}{(T_1 + \Delta T)} \right)$$

или

$$2 = \left(1 + \frac{\Delta T}{T_1} \right)^{3/2} \exp \left[\left(\frac{\Delta E_3}{2kT_1} \right) \cdot \frac{1}{\frac{T_1}{\Delta T} + 1} \right]. \quad (2)$$

При комнатной температуре изменение концентрации электронов определяется в основном экспоненциальным законом. Следовательно, в первом приближении можно считать, что удвоение концентрации электронов происходит при нагревании кристалла на $\Delta T \ll T_1$. Точное решение задачи получим, введя новую переменную $\Delta T/T_1 = \alpha$.

Теперь (2) примет вид :

$$2 = (1 + \alpha)^{3/2} \exp \left(\frac{\Delta E_3}{2kT_1} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right). \quad (3)$$

Логарифмируем (3):

$$\ln 2 = \frac{3}{2} \ln(1 + \alpha) + \frac{\Delta E_3}{2kT_1} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

так как $\alpha \ll 1$, то $\ln(1 + \alpha) \approx \frac{\alpha}{1 + \alpha}$, и теперь

$$\ln 2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\Delta E_3}{2kT_1} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) \Rightarrow \Rightarrow \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{\ln 2}{3/2 + \Delta E_3 / 2kT_1};$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{0,693}{1,5 + \frac{0,72 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 0,045; \quad (4)$$

Решая (4) относительно α , получим $\alpha = 0,047$, откуда $\Delta T = 0,047 \cdot 300 = 14,1$ К

Таким образом мы убедились, что при очень малом изменении температуры всего на 14,1 К концентрация электронов увеличилась в два раза.

Задача 4.18. Образец из германия n - типа в виде пластины длиной $L = 10$ см и высотой $d = 6$ мм помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции. При напряжении $U = 250$ В, приложенном к концам пластины, возникает холловская разность потенциалов $U_x = 8,8$ мВ. Определить: 1) постоянную Холла R_x , 2) концентрацию n_n носителей тока. Удельную проводимость германия принять равной $\sigma = 80$ См/м.

Решение

При помещении полупроводника с током в поперечное магнитное поле в полупроводнике возникает холловская разность потенциалов U_x , которая определяется выражением (4.36): $U_x = R_x B j d$.

Отсюда можно найти постоянную Холла

$$R_x = \frac{U_x}{B \cdot j \cdot d} \quad (1).$$

Плотность тока j найдем, воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме $j = \sigma \cdot E$, где E - напряженность электрического поля в образце. Считая это поле однородным, можно записать $E = U/L$, и тогда

$$j = \sigma \frac{U}{L}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), находим постоянную Холла

$$R_x = \frac{U_x \cdot L}{B \cdot U \cdot \sigma \cdot d}. \quad (3)$$

Учитывая численные значения $U_x = 8,8 \cdot 10^{-3}$ В, $L = 0,1$ м, $d = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $B = 0,1$ Тл, $\sigma = 80$ См/м, $U = 250$ В, рассчитываем

$$R_x = \frac{8,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{0,1 \cdot 250 \cdot 80 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 7,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{Кл.}$$

Согласно формуле (4.38) для полупроводника одного типа (n - типа по условию задачи) постоянная Холла

$$R_x = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{e \cdot n_n}, \quad (4)$$

где e - заряд электрона ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл), n_n - концентрация электронов.

Из (4) выражаем $n = \frac{3\pi}{8R_x \cdot e}$, подставляя численные значения e , R_x , π ,

определяем концентрацию электронов

$$n_n = \frac{3 \cdot 3,14}{8 \cdot 7,33 \cdot 10^{-5} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 4.19. На нагревание металлического предмета массой 100 г от 20 до 50°C затрачено 8300 Дж. Определить, из какого материала изготовлен предмет, если указанный интервал температур выше характеристической температуры.

Решение

Количество тепла, подводимого к телу для нагрева от 20 до 50°C, можно найти исходя из формулы (4.72)

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} m \cdot C_m(T) dT \quad (1)$$

Поскольку нагрев неизвестного материала производят в интервале температур ΔT больше характеристической температуры, то значение удельной теплоемкости $C_m = \frac{C_V}{M}$ находим, пользуясь законом Дюлонга и Пти, согласно которому

$$C_V = 3R, \quad (2)$$

тогда $Q = m \frac{C_m}{M} \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_m (T_2 - T_1).$ (3)

Из (3), зная Q и ΔT , C_m можно найти молярную массу M неизвестного материала $M = \frac{m \cdot C_m \Delta T}{Q}.$

Подставляя численные значения, находим

$$M = \frac{0,1 \cdot 3 \cdot 8,31 \cdot 30}{8,3 \cdot 10^3} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль},$$

$M = 9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль соответствует бериллию (${}_4Be^9$).

Задача 4.20. Вычислить характеристическую температуру кристалла, если известна его теплоемкость при двух значениях температур: $C_1 = 0,054$ кал/(моль·К) при $T_1 = 20$ К и $C_2 = 0,18$ кал/(моль·К) при $T_2 = 30$ К.

Решение

При температуре $T \ll \theta$ теплоемкость определяется из закона Дебая (4.69). Проверим это соотношение:

$$C_m = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3, \quad (1)$$

где T - температура тела, θ - характеристическая температура.

$$\text{Из (1) следует } \frac{C_{m1}}{C_{m2}} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^3. \quad \text{Отсюда } \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^3 = \frac{8}{27} = 0,296 \approx 0,3;$$

$$\frac{C_{m1}}{C_{m2}} = \frac{0,054}{0,18} \approx 0,3; \quad C_m \sim T^3, \quad \text{т.е. в указанном интервале температур}$$

$20K \leq T \leq 30K$ выполняется закон Дебая, следовательно из (1) находим характеристическую температуру кристалла

$$\theta = \left(\frac{12\pi^4 R}{5C_m} \right)^{1/3} \cdot T_1 = \left(\frac{12 \cdot 3,14^4 \cdot 8,31}{5 \cdot 0,054 \cdot 4,19} \right)^{1/3} \cdot 20 = 408,5K.$$

Задача 4.21. При нагревании 15 г серебра от $T_1 = 10$ до $T_2 = 20$ К было подведено $Q = 1,065$ Дж теплоты. Определить характеристическую температуру серебра, считая, что T_1 и T_2 много меньше θ . Молярная масса серебра – $M = 107,86 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

Если вещество находится при температуре ниже характеристической, то его молярная теплоемкость согласно закону Дебая (4.69) равна

$$C_m = \frac{12}{5} \frac{\pi^4 R}{\theta^3} T^3, \quad (1)$$

т.е. является функцией температуры, и поэтому количество поглощенного тепла будем определять соотношением (4.72):

$$Q = \int dQ = \frac{m}{M} \int C_m(T) dT. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и интегрируя, получим

$$Q = \frac{12}{5} \cdot \frac{\pi^4 R}{\theta^3} \cdot \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT = \frac{12\pi^4 R m (T_2^4 - T_1^4)}{5\theta^3 M \cdot 4}. \quad (3)$$

Из (3) находим

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{0,6 \cdot \pi^4 R m (T_2^4 - T_1^4)}{M Q}},$$

$$\theta = 3,143 \sqrt[3]{\frac{0,6 \cdot 3,14 \cdot 8,31 \cdot 15 \cdot 10^{-3} (20^4 - 10^4)}{107,86 \cdot 10^{-3} \cdot 1,065}} = 212K.$$

Задача 4.22. Определить теплоту, необходимую для нагревания кристалла NaCl массой 50 г на $\Delta T = 2$ К: 1) нагревание происходит от температуры $T_1 = \theta$, 2) нагревание происходит от температуры $T_2 = 2$ К. Характеристическая температура NaCl $\theta = 320$ К, молярная масса равна $M = 58,5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

Нагревание и в первом и во втором случаях происходит при температурах, в области которых не имеет места закон Дюлонга и Пти (4.53). Теплоемкость кристалла в области заданных температур является функцией температуры, и поэтому согласно (4.72).

$$Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m(T) dT. \quad (1)$$

Температура нагреваемого тела близка к характеристической, теплоемкость определяется соотношением (4.65)

$$C_m = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \cdot \int_0^{\theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3 \left(\frac{\theta}{T} \right)}{e^{\theta/T} - 1} \right]. \quad (2)$$

В соотношении (2) $x = \frac{hv}{kT}$, v - частота собственных согласованных колебаний атомов решетки; $\theta = \frac{hv_{max}}{k}$, v_{max} - максимальная частота собственных согласованных колебаний атомов решетки.

По условию задачи в первом случае: $T_1 = \theta$; $\frac{\theta}{T_1} = 1$; учтем, что

$$\int_0^{\theta/T_1} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0,225. \quad (3)$$

Определим теплоемкость по формуле (2) с учетом $T_1 = \theta$ и (3):

$$C_m = 3R \left[12 \cdot 1 \cdot 0,225 - \frac{3}{2,7 - 1} \right] = 2,805R. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), находим Q_1 :

$$Q_1 = \frac{m}{M} \int_{\theta}^{\theta + \Delta T} C_m(T) dT = \frac{m}{M} 2,805R \int_{\theta}^{\theta + \Delta T} dT = \frac{m}{M} 2,805R \cdot \Delta T,$$

$$Q_1 = \frac{0,05}{58,5 \cdot 10^{-3}} \cdot 2,805 \cdot 8,31 \cdot 2 = 39,85 \text{ Дж.}$$

Во втором случае $T_2 = 2K \ll \theta$, поэтому пользуемся соотношением (4.69), подставляя его в формулу (1), найдем искомое количество тепла Q_2 :

$$Q_2 = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} \frac{12\pi^4 R T^3 dT}{5\theta^3} = \frac{m}{M} \cdot \frac{12\pi^4 R (T_2^4 - T_1^4)}{5\theta^3 \cdot 4},$$

$$Q_2 = \frac{0,05}{58,5 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{12 \cdot 3,14^4 \cdot 8,31 (4^4 - 2^4)}{5 \cdot 320^3 \cdot 4} = 3,025 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Задача 4.23. Средняя энергия свободных электронов в металле при температуре T равна $\langle E \rangle = \frac{3}{5}E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]$. Найти отношение теплоемкостей электронного газа и кристаллической решетки при $T = 300$ К для серебра с концентрацией свободных электронов $n = 6 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

Решение

Так как $T > 9$ (см. табл.4), то согласно закону Дюлонга и Пти (4.53) теплоемкость решетки $C_{\text{реш.м}} = 3R$. Теплоемкость электронного газа $C_e = \frac{dU_e}{dT}$ где U_e - внутренняя энергия электронов $U_e = \langle E \rangle N_A$:

$$U_e = \left(\frac{3}{5}E_F + \frac{3}{5}E_F \frac{5\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{E_F^2} \right) N_A = \frac{3}{5}E_F N_A + \frac{\pi^2 kR}{4 E_F} T^2;$$

$$C_e = \frac{dU_e}{dT} = \frac{\pi^2}{2} \cdot R \cdot \frac{kT}{E_F}, \frac{C_e}{C_{\text{реш.м}}} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{kT \cdot 2m}{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}};$$

$$\frac{C_e}{C_{\text{реш.м}}} = \frac{3,14^2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{6 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2 (3 \cdot 3,14^2 \cdot 6 \cdot 10^{-28})^{2/3}} = 7,6 \cdot 10^{-3}.$$

Задача 4.24. Найти для меди, характеристическая температура которой $\theta = 339$ К, а энергия Ферми - 6,2 эВ отношение теплоемкости электронного газа к теплоемкости решетки при 600 К.

Решение

Согласно квантовой теории теплоемкости металлов молярная теплоемкость электронного газа определяется формулой (4.71а), т.е.

$$C_{\text{Me},Z} = \frac{\pi^2 R}{2} \cdot \frac{Z \cdot kT}{E_F}, \text{ где } Z - \text{число свободных электронов, приходящихся}$$

на каждый атом металла, для меди $Z = 1$ (первая группа таблицы Менделеева), поэтому

$$C_{\text{Me},Z} = \frac{\pi^2 R k T}{2 E_F}. \quad (1)$$

По условию задачи медь находится при температуре $T = 600$ К, что превышает характеристическую температуру $\theta_{\text{Cu}} = 339$ К. Поэтому для определения молярной теплоемкости решетки меди воспользуемся законом Дюлонга и Пти (4.53), согласно которому

$$C_{\text{реш.м}} = 3R. \quad (2)$$

Из полученных выражений (1) и (2) найдем искомое отношение теплоемкостей

$$\frac{C_{\text{Me},Z}}{C_{\text{реш.м}}} = \frac{\pi^2 R k T}{2 E_F \cdot 3R} = \frac{\pi^2 k T}{6 E_F}.$$

Подставляя численные значения $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $T = 600$ К, $E_F = 6,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж, определяем

$$\frac{C_{Me,Z}}{C_{\text{реш.м}}} = \frac{3,14^2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 600}{6,62 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,077.$$

Задача 4.25. Определить максимальную частоту колебаний атомов в решетке кристалла, характеристическая температура которого равна 374 К. Оценить максимальные значения энергии и импульса фона на возбуждаемого в кристалле, если расстояние между атомами $3 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение

Максимальную частоту колебаний атомов в решетке кристалла находим из формулы (4.62):

$$\hbar v_{\max} = k\theta. \quad (1)$$

Из (1) определяем максимальную частоту упругих волн

$$v_{\max} = \frac{k\theta}{\hbar} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 374}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 7,8 \cdot 10^{12} \text{ Гц}. \quad (2)$$

Тогда максимальная энергия фона равна

$$E_{\max} = \hbar \cdot v_{\max} = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 7,8 \cdot 10^{12} = 5,6 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}. \quad (3)$$

Максимальный импульс фона определяется согласно формуле (4.59а):

$$p_{\max} = \frac{\hbar v_{\max}}{v_{\text{зв}}}; \quad (4)$$

где $v_{\text{зв}}$ - скорость распространения упругих звуковых волн в кристалле, которая равна $v_{\text{зв}} = \lambda \cdot v$. Максимальной частоте v_{\max} упругих волн в кристалле соответствует минимальная длина волны $\lambda_{\min} = 2d$, где d - расстояние между атомами в решетке. Тогда

$$v_{\text{зв}} \approx 2d v_{\max} \quad (5).$$

Из (2), (3), (4) и (5) определяем $p_{\max} = \frac{E_{\max}}{2d v_{\max}}$. Подставляя численные значения $E_{\max} = 5,6 \cdot 10^{-21}$ Дж, $v_{\max} = 7,8 \cdot 10^{12}$ Гц, $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м, находим

$$p_{\max} = \frac{5,6 \cdot 10^{-21}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-10} \cdot 7,8 \cdot 10^{12}} = 1,1 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 4.26. Найти отношение изменения ΔU внутренней энергии кристалла при его нагревании от 0 до $0,08\theta$ к нулевой энергии. Считать $T \ll \theta$.

Решение

Изменение внутренней энергии кристалла при нагревании от 0 до $0,08\theta$ найдем из соотношения (4.72):

$$\Delta U = \frac{m}{M} \int_0^T C_m(T) dT = \frac{m}{M} \int_0^{0,08\theta} C_m(T) dT. \quad (1)$$

Поскольку по условию задачи $T \ll \theta$, то молярная теплоемкость кристалла определяется законом Дебая (4.69)

$$C_m = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{m}{M} \int_0^{0,08\theta} \frac{12\pi^4 R T^3 dT}{5 \cdot \theta^3} = \frac{m}{M} \frac{12}{5} \frac{\pi^4 R}{\theta^3} \frac{T^4}{4} \Big|_0^{0,08\theta} = \\ &= \frac{m}{M} \frac{3}{5} \frac{\pi^4 R}{\theta^3} (0,08)^4 \theta^4 = \frac{m}{M} \frac{3}{5} \pi^4 R (0,08)^4 \cdot \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Нулевая энергия одного моля кристалла определяется в теории Дебая формулой (4.64) $U_{m_0} = \frac{9}{8} R \theta$, для произвольного числа молей

$$U_{m_0} = \frac{9}{8} R \theta \frac{m}{M}. \quad (4)$$

Разделив (3) на (4), найдем искомое отношение энергий:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\frac{3}{M} \frac{m}{5} \pi^4 R \cdot (0,08)^4 \cdot \theta \cdot 8}{\frac{9}{8} R \theta \frac{m}{M}} = \frac{8}{15} \pi^4 (0,08)^4 = 2,17 \cdot 10^{-3}.$$

Задача 4.27. При комнатной температуре средняя длина свободного пробега фонона в кристалле хлористого натрия в четыре раза больше постоянной его решетки. Вычислить коэффициент теплопроводности такого кристалла, если $d = 5,64 \cdot 10^{-10}$ м и скорость звука в нем $5 \cdot 10^3$ м/с, плотность $\rho = 2,17 \cdot 10^3$ кг/м³, $M = 58,5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

По теории Дебая передача тепла в кристаллах осуществляется фононами, т.е. фононы обеспечивают теплопроводность кристаллов. Согласно теории Дебая возбужденное состояние решетки можно представить как идеальный газ фононов, свободно движущихся в объеме кристалла. Фононный газ в определенном интервале температур ведет себя подобно идеальному газу, а поскольку фононы являются главными переносчиками тепла в твердом теле (строго, это справедливо для диэлектриков), то коэффициент теплопроводности можно выразить той же формулой, что коэффициент теплопроводности идеального газа:

$$\kappa = \frac{1}{3} C_m \langle l \rangle v_{zv}, \quad (1)$$

где $C'_m = \rho \cdot c$ - теплоемкость единицы объема фононного газа, $\langle l \rangle$ - средняя длина свободного пробега, $v_{\text{зв}}$ - скорость звука в данном теле. $C_m = 50, 58 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ - молярная теплоемкость хлористого натрия.

Найдем теплоемкость единицы объема фононного газа:

$$C'_m = \rho \cdot c = \frac{\rho \cdot C_m}{M} = \frac{2,17 \cdot 10^3 \cdot 50,58}{58,5 \cdot 10^{-3}} = 1,88 \cdot 10^6 \text{ Дж/m}^3 \cdot \text{К.}$$

Подставляя в (1) значения $\langle l \rangle$, $v_{\text{зв}}$, C'_m находим коэффициент теплопроводности

$$\kappa = \frac{1}{3} \cdot 1,88 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 5,64 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^3 = 7,06 \text{ Дж/(м}\cdot\text{К}\cdot\text{с).}$$

Задача 4.28. Для меди модуль Юнга $E=129,8 \text{ ГПа}$, модуль сдвига $G = 48,33 \text{ МПа}$, плотность $\rho = 8,90 \text{ г/см}^3$. Определить температуру Дебая для меди.

Решение

Температуру Дебая или характеристическую температуру для меди находим из выражения (4.62):

$$k \cdot \theta = \hbar \cdot \omega_{\max} \quad (1)$$

Максимальная частота нормальных колебаний атомов меди в кристаллической решетке определяется (4.56):

$$\omega_{\max} = \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{v_{\parallel}^3 + 2v_{\perp}^3}}, \quad (2)$$

где n - число атомов в единице объема меди $n = \rho N_a / M$,

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (3)$$

- скорость распространения поперечной волны и

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4)$$

- скорость продольной волны в кристалле меди. Подставляя (2), (3) и (4) в (1), находим.

$$\omega = \frac{\hbar \cdot \omega_{\max}}{k} = \frac{\hbar}{k} \cdot \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 \rho N_A}{M(v_{\parallel}^{-3} + v_{\perp}^{-3})}} = \frac{\hbar}{k} \cdot \left[\frac{18\pi^2 \rho N_A}{M \left(\frac{E}{\rho} \right)^{-3/2} + 2M \left(\frac{G}{\rho} \right)^{-3/2}} \right]^{1/3}. \quad (5)$$

Учитывая, что $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$, $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$, $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, $G = 48,33 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $E = 129,8 \cdot 10^9 \text{ Па}$ из (5) рассчитываем значение характеристической температуры $\theta = 334 \text{ К}$.

Задача 4.29. Какое количество $\langle n_{\max} \rangle$ фононов максимальной частоты возбуждается в среднем при температуре $T = 400$ К в кристалле, дебаевская температура которого $\theta = 200$ К?

Решение

Среднее число фононов в условиях теплового равновесия определяется формулой (4.61)

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar v_i / kT) - 1}. \quad (1)$$

где v_i - частота фононов, возбуждаемых в кристалле.

По условию задачи $v_i = v_{\max}$, а максимальную частоту фононов найдем из условия (4.62) $\hbar \omega_{\max} = k\theta$ (2), где θ - характеристическая температура кристалла.

Определив $\hbar v_{\max}$ из (2), подставляя в (1), находим среднее число фононов:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{k\theta/kT} - 1} = \frac{1}{e^{\theta/T} - 1}.$$

Согласно условию задачи $\theta/T = 200/400 = 0,5$ и окончательно

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{0,5} - 1} = 1,54.$$

Задачи для самостоятельного решения

Элементы квантовой статистики.

4.30. Определить максимальную энергию и максимальную скорость электронов в золоте при $T = 0$ К, принимая, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность золота $\rho = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса золота $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.31. Вычислить энергию Ферми и максимальную скорость электронов в алюминии при $T = 0$ К, считая, что на каждый атом алюминия приходится по три свободных электрона. Плотность алюминия $\rho = 2,69 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.32. Определить отношение концентраций n_1/n_2 свободных электронов в меди и литии при $T = 0$ К, если известно, что максимальные энергии электронов в этих металлах соответственно равны $E_{\max 1} = 7$ эВ, $E_{\max 2} = 4,72$ эВ.

4.33. Определить отношение числа свободных электронов N_1/N_2 в серебре объемом 5 см³ и в меди объемом 2 см³ при $T = 0$ К, если известно, что энергии Ферми в этих металлах соответственно равны $E_{F_{Ag}} = 5,5$ эВ, $E_{F_{Cu}} = 7$ эВ.

4.34. Определить число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия при температуре $T = 0$ К. Уровень Ферми для натрия $E_F = 3,12$ эВ, плотность $\rho = 970$ кг/м³, молярная масса $M = 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.35. При какой концентрации свободных электронов в кристалле температура вырождения электронного газа равна 0°C?

4.36. Определить граничную энергию E_{\max} для свободных электронов в литии при температуре $T = 0$ К, полагая, что на каждый атом лития приходится по одному свободному электрону. Найти температуру вырождения электронного газа в литии. Плотность лития $\rho = 540$ кг/м³, молярная масса $M = 7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.37. До какой температуры надо было бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии свободных электронов в серебре при $T = 0$ К? Считать, что на каждый атом серебра приходится один свободный электрон. Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.38. Какова вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, расположенного на $\Delta E = 0,01$ эВ ниже уровня Ферми, при температуре $t = +18^\circ\text{C}$?

4.39. Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, если уровень расположен на 0,01 эВ ниже уровня Ферми и температура изменяется от $T_1 = 200$ до $T_2 = 300$ К?

4.40. Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, если этот уровень расположен на $\Delta E = 0,1$ эВ выше уровня Ферми и температура изменяется от $T_1 = 1000$ К до $T_2 = 300$ К?

4.41. Определить температуру, при которой в твердом проводнике вероятность нахождения электрона с энергией 0,5 эВ над уровнем Ферми равна 2%?

4.42. Найти разницу энергий (в единицах kT) между электроном, находящимся на уровне Ферми, и электронами, находящимися на уровнях, вероятности заполнения которых равны 0,2 и 0,8.

4.43. Определить вероятность того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся в интервале энергий $\Delta E = 0,05$ эВ ниже уровня и выше уровня Ферми для двух температур 1) $T_1 = 300$ К, 2) $T_2 = 60$ К.

4.44. Во сколько раз вероятность заполнения электроном энергетического уровня, находящегося на $\Delta E = 0,01$ эВ выше уровня Ферми при температуре $T_1 = 1000$ К, больше вероятности заполнения этого же энергетического уровня при температуре $T_2 = 500$ К?

4.45. Найти величину энергетических интервалов (в единицах kT) между уровнем Ферми и уровнями, вероятность заполнения которых равна соответственно 0,1 и 0,9. Дать графическую интерпретацию на графике $f(E, T)$.

4.46. Определить во сколько раз отличаются вероятности того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся

в интервале энергий $\Delta E = 0,05$ эВ ниже уровня Ферми и выше уровня Ферми, при температурах $T_1 = 290$ К, $T_2 = 50$ К.

4.47. При какой температуре металла вероятность того, что электрон займет энергетическое состояние, находящееся в интервале $\Delta E = 0,02$ эВ выше уровня Ферми, равна 0,4? При какой температуре вероятность того, что электрон в металле будет иметь энергию, равную энергии Ферми, равна 0,5?

4.48. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ электронов в металле при температуре $T = 0$ К, если энергия Ферми $E_F = 8$ эВ.

4.49. Вычислить максимальную и среднюю кинетические энергии электронов в металле при температуре $T = 0$ К, полагая, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность металла $\rho = 860$ кг/м³, молярная масса $M = 39 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.50. Найти максимальную энергию электронов в металле при абсолютном нуле, если средняя кинетическая энергия электронов при $T = 0$ К равна $\langle E \rangle = 4,2$ эВ.

4.51. Определить температуру, при которой в твердом проводнике вероятность нахождения электрона с энергией 0,1 эВ над уровнем Ферми равна 5%.

4.52. Вычислить суммарную кинетическую энергию электронов проводимости в 1 см³ цезия при $T = 0$ К. Плотность цезия $\rho = 1,959 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 133 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.53. Зависит ли средняя энергия $\langle E \rangle$ свободных электронов в кристалле от числа атомов, образующих кристалл? Найти среднюю энергию свободных электронов в кристалле при $T = 0$ К, энергия Ферми которого равна 5 эВ.

4.54. Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, определить температуру T , при которой средняя кинетическая энергия электронов классического электронного газа равнялась бы средней энергии свободных электронов в меди при $T = 0$ К. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.55. Определить число свободных состояний, приходящихся на единичный интервал энергий при $T = 0$ К (плотность электронных состояний).

4.56. Найти число электронов в зоне в интервале энергий от 0 до E_F при $T = 0$ К для металла объемом 5 см³, энергия Ферми которого равна $E_F = 5,5$ эВ.

4.57. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую половину максимальной?

4.58. Кристаллический образец содержит 0,5 моля некоторого химически простого вещества. Ширина разрешенной зоны энергий $\Delta E = 6$ эВ. Чему равно среднее значение интервала между соседними

энергетическими уровнями $\langle\Delta E_i\rangle$? Что происходит с интервалом между соседними уровнями при увеличении объема кристалла в η раз?

4.59. Написать выражение для интервала ΔE_i между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле. Положив объем образца равным 1см^3 , вычислить интервал ΔE_i (в эВ) между соседними уровнями энергии свободных электронов для значений энергии E , равных а) 1 эВ, б) 3 эВ.

4.60. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую среднюю энергию?

4.61. Половина всех свободных электронов в металле обладает кинетическими энергиями, большими чем некоторая энергия E . Вычислить величину этой энергии E (в долях энергии Ферми E_F).

4.62. Пятьдесят четыре процента всех свободных электронов в литии превышают некоторое значение энергии в литиевом проводнике при $T = 0$ К. Вычислить величину этой энергии, полагая, что на каждый атом лития приходится один свободный электрон. Плотность лития $\rho = 0,54 \text{ г}/\text{см}^3$, молярная масса $M = 7 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

4.63. Половина всех свободных электронов в серебре при $T = 0$ К обладает кинетическими энергиями, большими, чем некоторая энергия E . Вычислить величину этой энергии, полагая, что на каждый атом серебра приходится один свободный электрон. Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, молярная масса $M = 108 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

4.64. Металл находится при температуре $T = 0$ К. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от $E_F/4$ до $E_F/2$ отличается от числа электронов с энергией от 0 до $E_F/2$.

4.65. Электроны в металле находятся при $T = 0$ К. Найти относительное число свободных электронов $\Delta N/N$, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 4%.

4.66. Определить отношение концентрации электронов n_1 в металле при $T = 0$ К, энергия которых отличается от максимальной не более чем на $0,02 E_F$, к концентрации электронов n_2 , энергия которых не превышает значения $0,5 E_F$.

4.67. Найти отношение концентрации электронов n_1 в металле при $T = 0$ К, энергия которых отличается от максимальной не более чем на $\Delta E = 0,04 E_F$, к концентрации электронов n_2 , энергия которых не превышает значения $E = 0,04 E_F$.

4.68. Найти относительное число свободных электронов в металле, энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на $\eta = 2\%$, если температура металла $T = 0$ К.

4.69. Сколько процентов свободных электронов в металле при $T = 0$ К имеют кинетическую энергию, превышающую среднюю энергию электронов?

4.70. До какой температуры надо было бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии свободных электронов в золоте при $T = 0 \text{ К}$? Считать, что на каждый атом золота приходится один свободный электрон. Плотность золота $\rho = 19,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 197 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

4.71. Вычислить интервал (в электронвольтах) между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$ вблизи уровня Ферми, если концентрация свободных электронов $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$, объем металла $V = 5 \text{ см}^3$.

4.72. Найти среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в меди при $T = 0 \text{ К}$, полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

4.73. Выразить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$ через максимальную скорость v_{\max} . Вычислить $\langle v \rangle$ для серебра, полагая энергию Ферми равной $E_F = 5,5 \text{ эВ}$.

4.74. Используя квантовую статистику показать, что в металлах при $T = 0 \text{ К}$ средняя арифметическая скорость электронов проводимости равна $0,75v_{\max}$. Найти среднюю арифметическую скорость для бериллия, полагая, что на каждый атом бериллия приходится два свободных электрона. Плотность бериллия $\rho = 1,84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

4.75. Найти среднюю арифметическую скорость свободных электронов в алюминии при $T = 0 \text{ К}$, полагая, что на каждый атом алюминия приходится три свободных электрона. Плотность алюминия $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 27 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

4.76. Найти суммарный средний импульс всех свободных электронов в литии, объемом 1 см^3 при $T = 0 \text{ К}$, полагая, что на каждый атом лития приходится один свободный электрон. Плотность лития $\rho = 0,54 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

4.77. Используя квантовую статистику, показать, что средняя квадратичная скорость свободных электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$ равна $0,7775 \cdot v_{\max}$. Найти среднюю квадратичную скорость электронов для металла, энергия Ферми которого равна 6 эВ.

4.78. Определить максимальную и среднюю квадратичную скорости электронов кальция при $T = 0 \text{ К}$. Считать, что на каждый атом кальция приходится два свободных электрона. Плотность кальция $\rho = 1,53 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 40 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

4.79. Используя квантовую статистику, получить выражения для $\langle 1/v \rangle$ через максимальную скорость v_{\max} электронов в металле при абсолютном нуле. Сравнить величину $\langle 1/v \rangle$ с обратной величиной средней скорости свободных электронов в металле.

4.80. Зная распределение электронов в металле по импульсам $dn(p)$, установить распределение электронов по скоростям $dn(v)$ при любой температуре T , а также при $T = 0$ К. Определить число электронов, имеющих скорости в пределах от $v_{max}/2$ до v_{max} при $T = 0$ К, если уровень Ферми $E_F = 5$ эВ.

4.81. Зная распределение электронов в металле по энергиям $dn(E)$, найти распределение электронов по скоростям $dn(v)$ при любой температуре T , а также при $T = 0$ К. Найти относительное число свободных электронов, скорости которых при $T = 0$ К отличаются от максимальной скорости не более чем на $\eta = 1,0\%$.

4.82. Определить, во сколько раз число свободных электронов со скоростями, лежащими в интервале от $v_{max}/4$ до $v_{max}/2$, отличается от числа электронов, скорости которых лежат в интервале от 0 до $v_{max}/4$. Температуру металла принять равной 0 К.

4.83. Найти среднюю квадратичную, среднюю арифметическую скорости, а также среднее значение обратной скорости свободных электронов в золоте при $T = 0$ К, полагая, что на каждый атом золота приходится один свободный электрон. Плотность золота $\rho = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.84. Определить число свободных электронов в единице объема бериллия, скорости которых отличаются от максимальной не более чем на 25% при $T=0$ К. Считать, что на каждый атом бериллия приходится два свободных электрона. Плотность бериллия $\rho = 1,84 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.85. Найти относительное число свободных электронов, скорости которых при $T = 0$ К отличаются от средней квадратичной не более чем на $\eta=2\%$.

4.86. Выразить среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ электронов в металле через максимальную скорость v_{max} . Найти число свободных электронов в 1 см³, скорости которых лежат в интервале от 0 до $\langle v_{kb} \rangle$ при $T = 0$ К. Энергия Ферми металла $E_F = 6$ эВ.

4.87. Зная закон распределения электронов по энергиям $dn(E)$, получить распределение электронов по скоростям $dn(v)$. Определить во сколько раз число электронов со скоростями от $v_{kb}/2$ до v_{kb} больше числа электронов со скоростями от 0 до $v_{kb}/2$.

Электрические свойства твердых тел.

4.88. Определить проводимость чистого германия, если известно, что при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ один атом из каждого $1,8 \cdot 10^9$ ионизован. Подвижность электронов и дырок при этой температуре соответственно равны 3900 см²/(В·с) и 1900 см²/(В·с). Плотность германия $\rho = 5,33 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса германия $M = 73 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.89. Определить удельное сопротивление чистого кремния, если известно, что при температуре $T = 323$ К один атом из каждого $3 \cdot 10^{11}$ ионизован. Подвижность электронов и дырок при этой температуре соответственно равны $1340 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ и $460 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Плотность кремния $\rho = 2,33 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, молярная масса $M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

4.90. Собственный полупроводник имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0,48 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Определить концентрацию n -носителей тока, если подвижность электронов $\mu_n = 0,36 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, подвижность дырок $\mu_p = 0,16 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.91. Определить подвижность дырок в полупроводнике p -типа, удельное сопротивление которого $\rho = 0,3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ при концентрации дырок $n_p = 4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

4.92. Удельное сопротивление чистого германия при комнатной температуре равно $0,48 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Известно, что если через этот образец проходит ток, то электронами обусловлена $\eta = 0,67$ часть этого тока. Определив из этого условия подвижность дырок, найти концентрацию носителей тока. Подвижность электронов равна $\mu_n = 0,39 \cdot 10^2 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.93. Образец германия n -типа имеет удельное сопротивление $1,5 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ и значение постоянной Холла $R_x = 5,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{Кл}$. Определить концентрацию основных носителей и подвижность.

4.94. Определить подвижность электронов в германии n -типа, для которого при некоторых условиях удельное сопротивление $\rho = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ и коэффициент Холла $7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{Кл}$.

4.95. Удельная проводимость кремния с примесями $\sigma = 112 \text{ См}/\text{м}$. Определить подвижность дырок и их концентрацию, если постоянная Холла $R_x = 3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.

4.96. Вычислить удельную проводимость кристалла Si, если коэффициент Холла для него $R_x = -2,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$, а подвижность носителей (дырок) $\mu_p = 0,16 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.97. Вывести выражение для концентрации дырок n_p в донорном полупроводнике через концентрацию доноров N_d , и собственных носителей n_i . Вычислить концентрацию дырок n_p , если концентрация собственных носителей n_i для германия при температуре $T=300$ К равна $4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, а концентрация электронов $n_e = 1,005N_d$.

4.98. Удельная проводимость металла $10 \text{ МСм}/\text{м}$. Вычислить среднюю длину свободного пробега электронов в металле, если концентрация свободных электронов 10^{28} м^{-3} . Среднюю скорость хаотического движения принять равной $1 \text{ Мм}/\text{с}$.

4.99. При комнатной температуре электропроводность образца собственного кремния равна $4,3 \cdot 10^{-4} \text{ См}/\text{м}$. Какова концентрация собственных носителей тока? Если через образец проходит ток, то какая часть этого тока обусловлена электронами? Подвижность

электронов и дырок кремния соответственно равны $\mu_n = 0,135$ и $\mu_p = 0,048 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.100. Определить суммарную подвижность электронов и дырок в кремниевом полупроводнике, если известно, что при освещении кремния его сопротивление уменьшилось в $\eta = 1,565$ раз и оказалось равным 178 Ом. Освещение вызвало появление равного числа электронов и дырок в количестве $8,8 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$. Образец кремния имеет форму куба с гранью $l = 8 \text{ см}$.

4.101. Полупроводник в виде тонкой пластины высотой $d = 1 \text{ см}$ и длиной $L = 10 \text{ см}$ помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2 \text{ Тл}$. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины вдоль L приложено постоянное напряжение $U = 300 \text{ В}$. Определить холловскую разность потенциалов, если постоянная Холла $R_x = 0,1 \text{ м}^3/\text{Кл}$, а удельное сопротивление $\rho = 0,5 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

4.102. К концам пластины из p-полупроводника (высота $d = 10 \text{ мм}$, длина $L = 100 \text{ мм}$) приложили разность потенциалов $U = 10 \text{ В}$ и поместили ее в перпендикулярное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$. При этом возникает холловская разность потенциалов $\Delta\phi_x = 0,1 \text{ В}$. Найти концентрацию и подвижность дырок, если удельное сопротивление полупроводника равно $\rho = 2 \text{ Ом}\cdot\text{мм}$.

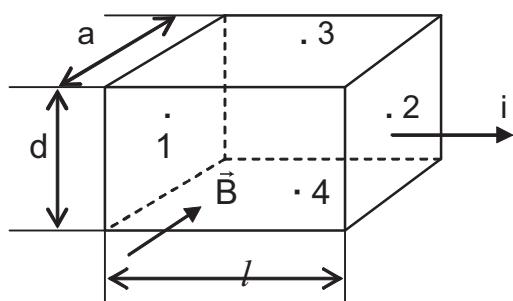
4.103. К торцам металлического образца длиной 1 см (по оси X), высотой 9,0 мм (по оси Y) и толщиной 0,2 мм (по оси Z) прикладывается разность потенциалов $U = 1,4 \text{ В}$ и в положительном направлении оси X наблюдается ток 10 мА. При наличии вдоль оси Z магнитного поля $B = 0,1 \text{ Тл}$ на образце вдоль оси Y появляется холловское напряжение $U_x = 10 \text{ мВ}$. Найти: постоянную Холла, знак носителей заряда, концентрацию и подвижность носителей.

4.104. При измерении постоянной Холла пластинку из металла высотой $d = 10 \text{ мм}$ и длиной $l = 50 \text{ мм}$ поместили в магнитное поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$. К концам пластины приложили разность потенциалов $U = 10 \text{ В}$. При этом холловская разность потенциалов $\Delta\phi_x = 50 \text{ мВ}$ и удельное сопротивление $\rho = 2,5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$. Найти концентрацию электронов и их подвижность.

4.105. Тонкая пластинка из кремния высотой $d = 2 \text{ см}$ помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. При плотности тока $j = 2 \cdot 10^{-6} \text{ А}/\text{мм}^2$, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов оказалась равной $\Delta\phi_x = 2,8 \text{ В}$. Определить концентрацию носителей заряда. Индукция магнитного поля равна $B = 0,5 \text{ Тл}$.

4.106. Образец из кремния с примесями p-типа в виде пластины длиной $l = 12 \text{ см}$ и высотой $d = 8 \text{ мм}$ помещен в однородное магнитное поле ($B = 0,12 \text{ Тл}$) перпендикулярно линиям магнитной индукции. При некотором напряжении, приложенном к концам

пластины, возникает холловская разность потенциалов $\Delta\phi_x = 1,83 \cdot 10^{-2}$ В. Определить приложенное к пластине напряжение, если постоянная Холла $R_x = 3,66 \cdot 10^{-4}$ м³/Кл. Удельное сопротивление этого образца $\rho = 0,009$ Ом·м.



Если, не включая тока, создать перпендикулярное к пластине однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, то между точками 3 и 4 возникает разность потенциалов $U_{3,4} = 55$ мкВ. Воспользовавшись этими данными, определить для меди концентрацию свободных электронов n_e и их подвижность μ_n .

4.108. Сопротивление кристалла PbS при температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$ равно $R = 10^4$ Ом. Определить его сопротивление при температуре $t_2 = +80^\circ\text{C}$. Ширина запрещенной зоны равна $\Delta E_3 = 0,6$ эВ.

4.109. Удельное сопротивление чистого германия при температуре 593 К равно $7 \cdot 10^{-4}$ Ом·м. Найти удельное сопротивление этого материала при температуре $t = 1000^\circ\text{C}$. Энергию Ферми принять равной $E_F = 0,4$ эВ.

4.110. Во сколько раз изменится электропроводность чистого полупроводника при нагревании его от $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_2 = 300^\circ\text{C}$? Энергия запрещенной зоны полупроводника равна $\Delta E = 0,5$ эВ.

4.111. Найти минимальную энергию необходимую для образования пары электрон-дырка в кристалле германия, если его электропроводность при нагревании от $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_2 = 74^\circ\text{C}$ изменяется в 10 раз.

4.112. Во сколько раз изменится концентрация носителей тока в беспримесном полупроводнике (индии) при нагревании его от $t_1 = 27^\circ\text{C}$ до $t_2 = 127^\circ\text{C}$, если ширина запрещенной зоны данного полупроводника равна 1,4 эВ? Найти концентрацию носителей тока в этом полупроводнике при температуре 127°C.

4.113. Найти минимальную энергию образования пары электрон-дырка в чистом полупроводнике, проводимость которого возрастает в $\eta = 5$ раз при увеличении температуры кристалла от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К.

4.114. Ширина запрещенной зоны чистого кремния равна $\Delta E_3 = 1,11$ эВ. Образец был взят при температуре $T_1 = 300$ К, впоследствии его дополнительно нагрели до $T_2 = 316,5$ К. Во сколько

4.107. Медная пластинка имеет длину $l = 60$ мм, высоту $d = 20$ мм и ширину $a = 1$ мм. При пропускании вдоль пластинки тока $i = 10$ А между точками 1 и 2 наблюдается разность потенциалов $U_{1,2} = 0,51$ мВ, разность потенциалов между точками 3 и 4 равна нулю. Если, не включая тока, создать перпендикулярное к пластине однородное магнитное

раз изменится число электронов проводимости при таком изменении температуры?

4.115. Для полупроводника, обладающего собственной проводимостью, измерены сопротивления R_1 и R_2 при температурах T_1 и T_2 соответственно, причем $T_1 > T_2$. Найти "ширину" запрещенной зоны данного материала.

4.116. При нагревании чистого полупроводника от температуры 27°C до некоторой температуры T_2 его сопротивление уменьшилось в два раза. Найти эту температуру, если "ширина" запрещенной зоны данного полупроводника равна $\Delta E_3 = 1,4$ эВ.

4.117. Получить формулу температурного коэффициента сопротивления чистого полупроводника через значение "ширины" запрещенной зоны. Рассчитать этот коэффициент для чистого кремния при температуре $T = 1000$ К, приняв значение "ширины" запрещенной зоны этого материала равным $\Delta E_3 = 1,11$ эВ.

4.118. Вычислить температурный коэффициент сопротивления беспримесного германия при температуре $T = 300$ К, если "ширина" запрещенной зоны равна $\Delta E_3 = 1,2 \cdot 10^{-19}$ Дж.

4.119. Найти ширину зоны проводимости полупроводника, если известно, что свет поглощается в этом полупроводнике, начиная с длины волны $\lambda_1 < 0,7$ мкм, а фотоэмиссия электронов данного материала начинается с длины волны $\lambda_2 < 0,65$ мкм.

4.120. "Ширина" запрещенной зоны в германии равна $\Delta E_3 = 0,75$ эВ. При какой длине световой волны этот материал начнет интенсивно поглощать свет? Найти температурный коэффициент сопротивления германия при температуре $T = 300$ К.

4.121. Кристалл имеет "ширину" запрещенной зоны $\Delta E_3 = 5$ эВ. Донорные уровни лежат ниже дна зоны проводимости на величину $\Delta E_d = 0,065$ эВ. Найти граничные длины волн полос поглощения электромагнитного излучения в этом кристалле.

4.122. Вычислить максимальную длину световой волны, для которой антимонид индия, имеющий "ширину" запрещенной зоны $\Delta E_3 = 0,2$ эВ, является прозрачным. Определить температурный коэффициент сопротивления данного кристалла при температуре $t = 100^\circ$ С.

4.123. "Ширина" запрещенной зоны некоторого кристалла равна $\Delta E_3 = 6,5$ эВ. Вычислить частоту и длину волны излучения, начиная с которых кристалл становится прозрачным. Каков температурный коэффициент сопротивления этого кристалла при температуре 200 К?

4.124. Температурный коэффициент сопротивления беспримесного кремния при комнатной температуре имеет величину $\alpha = -0,071$ К⁻¹. Используя эту величину, найдите частоту кванта света соответствующего красной границе фотопроводимости. Температуру считать равной $T = 294$ К.

4.125. Вычислить температурный коэффициент сопротивления кремния, имеющего температуру $T = 300$ К, если известно, что красная граница фотопроводимости для кремния равна $\lambda_{\text{кр}} = 1,14 \cdot 10^{-6}$ м.

4.126. При облучении некоторого полупроводника светом в последнем образовалось дополнительное количество электронов и дырок $\Delta n_n = \Delta n_p = 0,92 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$, в результате чего сопротивление этого полупроводника оказалось равным $R=184$ Ом. Полупроводник имеет форму куба с гранью $l = 0,1$ м. Подвижность электронов и дырок соответственно равна: $\mu_n = 0,132 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $\mu_p = 0,048 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Определить начальное сопротивление полупроводника R_0 .

4.127. Для полупроводникового образца, имеющего форму куба со стороной l , измерено сопротивление. Известно, что при отсутствии освещения полупроводника оно равно R_0 , а при наличии освещения сопротивление равно R . Найти концентрацию электронов Δn_n и концентрацию дырок Δn_p , обусловленных освещением, если подвижности электронов и дырок соответственно равны μ_n и μ_p . Считать, что $\Delta n_n \approx \Delta n_p$.

4.128. Красная граница фотоэффекта для некоторого полупроводника равна $6500 \cdot 10^{-10}$ м. Оцените красную границу фотопроводимости и "ширину" запрещенной зоны, если известно, что дно зоны проводимости относительно вакуума отстоит на 1,3 эВ.

4.129. Изобразить энергетическую схему кислородно-цезиевого фотокатода, если известно, что энергия активации донорных примесей $\Delta E_a = 0,7$ эВ, а красная граница фотоэффекта при очень низких температурах соответствует длине волны $\lambda_1 = 1,2 \cdot 10^{-6}$ м, причем начало возрастания фототока наблюдается вблизи $\lambda_2 = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м и $\lambda_3 = 0,3 \cdot 10^{-6}$ м.

4.130. Удельное сопротивление некоторого чистого беспримесного полупроводника при комнатной температуре $\rho = 50$ Ом·см. После включения источника света оно стало $\rho_0 = 40$ Ом·см, а через $t = 9$ нс после выключения источника света удельное сопротивление оказалось $\rho_2 = 45$ Ом·см. Найти среднее время жизни электронов проводимости и дырок τ , считая, что концентрация носителей тока изменяется со временем по закону $n = n_0 \cdot e^{-t/\tau}$.

Тепловые свойства твердых тел. Фононы.

4.131. Вычислить удельные теплоемкости кристаллов железа и никеля при температуре $t = 400^\circ\text{C}$.

4.132. Найти удельную теплоемкость кристалла золота при температуре $T = 20$ К. Молярная масса золота $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.133. Сравнить значения удельных теплоемкостей меди при температурах $T_1 = 20$ К и $T_2 = 600$ К. Молярная масса меди $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.134. Найти удельную теплоемкость бериллия при температуре $T = 2$ К. Считать, что на каждый атом бериллия приходятся два свободных электрона. Плотность бериллия равна $\rho = 1,84 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.135. Во сколько раз отличается удельная теплоемкость алюминия от удельной теплоемкости серебра при температурах $t_1 = 200^\circ\text{C}$ и $T_2 = 2$ К? В расчетах принять, что на каждый атом алюминия приходятся по три свободных электрона, а на каждый атом серебра по одному свободному электрону. Плотность алюминия $\rho_{\text{Al}} = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, серебра $\rho_{\text{Ag}} = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м³, молярные массы соответственно равны $M_{\text{Al}} = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_{\text{Ag}} = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.136. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, из какого материала сделан металлический шарик массы $m = 0,025$ кг, если известно, что для его нагревания от температуры $t_1 = 10^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 30^\circ\text{C}$ ему было сообщено тепло в количестве $Q = 117$ Дж.

4.137. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v = 400$ м/с, ударяется о стенку и входит в нее. На сколько градусов повысилась температура пули, если 10% ее кинетической энергии превратилось во внутреннюю энергию? Удельную теплоемкость свинца найти по закону Дюлонга и Пти. Молярная масса свинца $M_{\text{Pb}} = 207 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.138. Можно ли считать температуры $T_1 = 20$ К и $T_2 = 30$ К низкими для кристалла, теплоемкость которого при этих температурах равна соответственно $C_1 = 0,226$ Дж/(моль·К) и $C_2 = 0,760$ Дж/(моль·К)? Если заданные температуры ниже характеристической, то найдите ее значение.

4.139. Используя теорию Дебая, найти изменение внутренней энергии серебра массой $m = 25$ г при нагревании его от температуры $T_1 = 5$ К до $T_2 = 20$ К. Определить молярную нулевую энергию кристалла серебра. Молярная масса серебра $M = 0,108$ кг/моль.

4.140. Вычислить характеристическую температуру и максимальную частоту собственных колебаний атомов железа, если скорости распространения продольных и поперечных упругих волн соответственно равны $v_{||} = 5,85$ км/с и $v_{\perp} = 3,23$ км/с. Плотность железа $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.141. Определить температуру Дебая и максимальный квазимпульс фона на в бериллии, если известно, что скорость поперечных волн $v_{\perp} = 8830$ м/с, а скорость продольных волн $v_{||} = 12,55$ км/с. Число атомов в единице объема считать равным $n = 1,23 \cdot 10^{29}$ м⁻³.

4.142. Найти максимальную энергию фона на в серебре и характеристическую температуру серебра, если скорости распространения акустических волн в серебре соответственно равны $v_{\perp} = 1590$ м/с и $v_{||} = 3600$ м/с. Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м³,

молярная масса $M = 0,108 \text{ кг/моль}$. Фотон какой длины волны обладает такой же энергией?

4.143. Оценить скорость распространения звуковых колебаний в кристалле никеля, дебаевская температура которого $\theta = 456 \text{ К}$. Определить максимальную частоту колебаний и максимальный импульс фона на в кристалле. Плотность никеля $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 59 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

4.144. Оценить скорость распространения упругих волн в кристалле меди, а также минимальную длину волны фона на, если характеристическая температура меди $\theta \approx 340 \text{ К}$. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

4.145. Для некоторого кристалла, постоянная кристаллической решетки которого $d = 5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, определить скорость распространения фона наов и их максимальный импульс. Характеристическая температура $\theta = 400 \text{ К}$. Фотон какой длины волны λ обладает таким же импульсом?

4.146. Найти максимальные энергию и импульс фона на, который может возбуждаться в кристалле, характеризуемом температурой Дебая $\theta = 165 \text{ К}$, постоянной кристаллической решетки $d = 4 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Считать, что скорости распространения продольных и поперечных волн одинаковы.

4.147. Вычислить энергию нулевых колебаний приходящихся, на один грамм серебра с дебаевской температурой $\theta = 210 \text{ К}$.

4.148. Оценить среднее значение энергии нулевых колебаний 1 моля алюминия, если межатомное расстояние $d = 0,3 \text{ нм}$ и скорость акустических колебаний $v = 4 \text{ км/с}$.

4.149. Определить максимальные значения энергии и импульса фона на в железе. Плотность железа $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса $M = 56 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Фотон какой длины волны обладает такой энергией?

4.150. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, а также квантовой теорией теплоемкости металлов вблизи 0 К, найти изменение внутренней энергии 0,5 моля серебра при нагревании от $T_1 = 0 \text{ К}$ до $T_2 = 20 \text{ К}$. Энергия Ферми серебра $E_F = 5,5 \text{ эВ}$, характеристическая температура $\theta = 210 \text{ К}$.

4.151. Используя теорию Дебая, вычислить изменение внутренней энергии кристаллического никеля массой $m = 50 \text{ г}$ при его нагревании на $\Delta T = 2 \text{ К}$ от температуры $T_1 = \theta/2$, где θ - характеристическая температура.

4.152. Найти отношение изменения внутренней энергии кристалла меди при нагревании его от $T_1 = 0 \text{ К}$ до $T_2 = 30 \text{ К}$ к нулевой энергии меди. Энергия Ферми для меди $E_F = 7 \text{ эВ}$, характеристическая температура $\theta \approx 330 \text{ К}$.

4.153. Определить максимальную частоту колебаний для меди при $T = 125$ К, составляющей $0,4 \cdot \theta$ - характеристической температуры.

4.154. Найти максимальную частоту собственных колебаний и оценить скорость распространения этих колебаний в кристалле, если при температуре $T = 20$ К его удельная теплоемкость $c = 2,7 \cdot \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$. Плотность кристалла $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, молярная масса - $M = 56 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

4.155. При нагревании $m = 25$ г золота от $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К ему было сообщено количество тепла $Q = 2,08$ Дж. Найти дебаевскую температуру θ кристалла золота, если $\theta \gg T_1$ и T_2 . Молярная масса золота $M = 197 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

4.156. Используя квантовую теорию теплоемкости, вычислить изменение внутренней энергии $m = 50$ г кристалла магния при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T_1 = \theta$. Молярная масса магния $M = 24 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

4.157. Найти изменение внутренней энергии кристалла свинца массой $m = 100$ г при нагревании на $\Delta T = 5$ К от температуры $T_1 = 0,5 \theta$. Молярная масса свинца $M = 207 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$.

4.158. При нагревании 0,4 моля медного кристалла от $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К ему было сообщено количество тепла $Q = 0,80$ Дж. Найти характеристическую температуру меди θ , если T_1 и $T_2 \ll \theta$.

4.159. Найти отношение тепла Q_1 , пошедшего на нагревание кристалла меди от $T_1 = 0$ К до $T_2 = 5$ К к теплу, которое необходимо подвести к тому же кристаллу, чтобы нагреть его от $T_3 = 10$ К до $T_4 = 15$ К. Энергия Ферми меди $E_F = 7$ эВ, температура Дебая меди $\theta = 340$ К.

4.160. Определить отношение изменения внутренней энергии ΔU_1 германия при нагревании от $T_1 = 0$ К до $T_2 = 30$ К к изменению внутренней энергии ΔU_2 при его нагревании от $T_3 = 500$ К до $T_4 = 600$ К. Температура Дебая германия $\theta = 366$ К.

4.161. Сравнить количество тепла Q_1 , которое необходимо подвести к кристаллу кремния, чтобы изменить его температуру на $\Delta T = 100$ К при нагревании его от первоначальной температуры $T_1 = 10$ К, с теплом Q_2 , необходимым для нагревания этого кристалла от $t_2 = 500^\circ\text{C}$ до $t_3 = 600^\circ\text{C}$. Характеристическая температура кремния $\theta = 658$ К.

4.162. Оценить отношение изменения внутренней энергии ΔU_1 кристалла алмаза при нагревании его от $T_1 = 0$ К до $T_2 = 200$ К к его нулевой энергии U_0 . Температура Дебая алмаза $\theta = 2000$ К.

4.163. Длина волны фонона, соответствующего частоте $\omega = 0,01\omega_{\max}$ равна $\lambda = 52$ нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру Дебая θ_D , если усредненная скорость звука в кристалле равна $v = 4,8$ км/с.

4.164. Определить максимальное значение энергии фонона и постоянную кристаллической решетки золота, если его температура

Дебая $\theta = 165$ К. Найти среднее число $\langle n_{\max} \rangle$ фононов с максимальной энергией при температуре $T = 300$ К. Плотность золота $\rho = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса золота $M = 0,197$ кг/моль.

4.165. Вычислить среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега фононов в кварце SiO_2 при некоторой температуре, если при той же температуре теплопроводность $\kappa = 13$ Вт/(м·К), молярная теплоемкость $C_m = 44$ Дж/(моль·К) и усредненная скорость звука равна 5 км/с. Плотность кварца $\rho = 2,65 \cdot 10^3$ кг/м³.

4.166. Найти отношение среднего числа фононов $\langle n_i \rangle$ с частотой $v_i = 5 \cdot 10^{12}$ с⁻¹, возбуждаемых в кристалле при температуре $T_1 = 300$ К к среднему числу фононов $\langle n_{\max} \rangle$ максимальной частоты, возбуждаемых в том же кристалле при той же температуре, если температура Дебая данного кристалла $\theta = 400$ К.

4.167. Найти отношение среднего числа $\langle n_{\max 1} \rangle$ фононов максимальной частоты, возбуждаемых в кристаллическом никеле при $T_1 = 50$ К к среднему числу $\langle n_{\max 2} \rangle$ фононов максимальной частоты, возбуждаемых в том же образце при $T_2 = 600$ К. Характеристическая температура никеля $\theta = 460$ К.

4.168. Вычислить среднюю длину свободного пробега фона на в кристалле серебра при 300 К, если коэффициент теплопроводности серебра $\kappa = 418$ Вт/(м·К), скорость распространения звука $v = 3700$ м/с, характеристическая температура $\theta = 210$ К. Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса серебра $M = 0,108$ кг/моль.

4.169. Найти молярную теплоемкость кварца SiO_2 при некоторой температуре, если при той же температуре теплопроводность кварца $\kappa = 13$ Вт/(м·К), средняя длина свободного пробега фононов $\langle \lambda \rangle = 4$ нм, усредненное значение скорости звука принять равным $v = 5$ км/с. Плотность кварца $\rho = 2,65 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 60 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.170. Учитывая, что внутренняя энергия кристалла U (с точностью до нулевой энергии) определяется выражением $U = \int_0^{n_{\max}} h \cdot v \cdot dn$, где dn -

число фононов с частотами в интервале от v до dv , получить формулы для расчета молярной внутренней энергии кристалла для двух предельных случаев: а) высокие температуры $T >> \theta$ (θ - характеристическая температура кристалла); б) низкие температуры $T \ll \theta$.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

Состав атомного ядра. Энергия связи. Ядерные силы.

Согласно современным представлениям атомное ядро состоит из протонов и нейтронов, называемых нуклонами. Массы ядер принято выражать в атомных единицах массы (а.е.м.).

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,6604 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Учитывая связь массы и энергии $E = mc^2$, можно выразить массу в энергетических единицах:

$$1 \text{ а.е.м.} = 931,5 \text{ МэВ.}$$

Протон (${}_1^1p$) - это стабильная частица, имеющая положительный заряд, равный заряду электрона; масса протона $m_p = 1,67265 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,00728 \text{ а.е.м.}$ Спин протона $\hbar/2$.

Нейтрон (${}_0^1n$) - нестабильная частица, заряд которой равен нулю; масса нейтрона $m_n = 1,67495 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$ Спин нейтрона $\hbar/2$.

Заряд ядра определяется числом протонов Z и равен $+Ze$. Z определяет атомный номер элемента в периодической таблице Менделеева. Суммарное число протонов и нейтронов в ядре называется массовым числом и обозначается символом A .

Число нейтронов в ядре равно $N = A - Z$. Ядра обозначаются следующим образом: ${}_Z^A X$ или ${}^A_Z X$, где X - химический символ элемента. По такому же принципу построена символика обозначения элементарных частиц: ${}_0^1n$ - нейтрон, ${}_1^-e$ - электрон.

В природе встречаются элементы от $Z = 1$ (водород) до $Z = 92$ (уран). Остальные элементы, называемые заурановыми, получены искусственным путем. Атомные ядра, имеющие одинаковое число протонов и разное число нейтронов, называются изотопами. Например, водород имеет три изотопа: собственно водород ${}_1^1H$, ядро которого состоит из одного протона, масса $m_{^1H} = 1,00783 \text{ а.е.м.}$; тяжелый водород, дейтерий ${}_1^2D$, ядро которого состоит из одного протона и одного нейтрона, $m_{^1D} = 2,01410 \text{ а.е.м.}$ и тритий ${}_1^3T$, ядро которого содержит один протон и два нейтрона, масса $m_{^3T} = 3,01605 \text{ а.е.м.}$

Ядра атомов не имеют четко выраженной границы. Эмпирическая формула для расчета радиуса ядра имеет вид

$$r_y \cong 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} = 1,3 \cdot A^{1/3} \text{ Ферми}, \quad (5.1)$$

где A - массовое число, а в качестве единицы длины в ядерной физике часто используется "Ферми":

$$1 \text{ Фм} = 1 \text{ Ферми} = 10^{-15} \text{ м},$$

коэффициент 1,3 может принимать и большее значение вплоть до 1,7.

Из соотношения (5.1) следует, что объем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре (A).

Для устойчивых ядер характерно определенное отношение числа нейтронов N к числу протонов Z . У легких элементов это число близко к единице. По мере увеличения числа нуклонов в ядре отношение N/Z растет, достигая для ядра урана значения 1,6.

Атомное ядро помимо заряда и массы обладает собственным механическим моментом - спином. Спин ядра определяется как геометрическая сумма спинов нуклонов, входящих в ядро:

$$\vec{S}_{\text{ядра}} = \sum_{i=1}^A \vec{S}_i. \quad (5.2)$$

Значение спина может быть четным, нечетным, а также равным нулю, в зависимости от взаимной ориентации спинов отдельных нуклонов (\vec{S}_i) в ядре.

Атомное ядро чрезвычайно плотная система, $\rho_{\text{ядра}} \sim 10^{17} \text{ кг/м}^3$. Масса ядра определяется массой входящих в него нуклонов, а также энергией связи этих нуклонов.

Общую массу нуклонов, входящих в состав атомного ядра, легко рассчитать по формуле:

$$\sum_{i=1}^A m_i = Z \cdot m_p + N \cdot m_n, \quad (5.3)$$

где m_n - масса нейтрона, m_p - масса протона.

Из опыта установлено, что масса связанного атомного ядра $m_{\text{ядра}}$ всегда меньше суммы масс отдельных нуклонов, входящих в состав ядра. Разность между массой исходных частиц и массой ядра называется дефектом массы:

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{ядра}}. \quad (5.4)$$

Наличие дефекта масс у ядер обусловлено тем, что при объединении нуклонов в ядро выделяется энергия связи нуклонов. Энергия связи в ядре $E_{\text{св}}$ численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы разъединить образующие ядро нуклоны и удалить их друг от друга на такие расстояния, на которых они практически не взаимодействуют.

Энергия связи связана соотношением:

$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2. \quad (5.5)$$

Зная дефект массы, можно найти энергию связи:

$$E_{\text{св}} = c^2 \cdot [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{ядра}}]. \quad (5.6)$$

Это соотношение не изменится, если заменить массу протона массой атома водорода, а массу ядра массой атома, тогда:

$$E_{\text{св}} = 931,5 \cdot [Z \cdot m_H + (A - Z) \cdot m_n - m_a] [\text{МэВ}] \quad (5.6a)$$

(массы выражены в а.е.м.).

Наибольший интерес представляет энергия связи, приходящаяся на один нуклон. Такая энергия называется удельной энергией связи:

$$E_{\text{св.уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A}. \quad (5.7)$$

Удельная энергия связи позволяет судить об устойчивости ядер. На рис. 5.1 изображена зависимость удельной энергии связи от массового числа A.

Как видно из рисунка, наибольшей устойчивостью обладают ядра химических элементов с массовым числом от 50 до 60. Удельная энергия связи этих ядер

достигает величины порядка 8,75 МэВ/нуклон. С ростом A удельная энергия постепенно уменьшается и для тяжелого элемента урана составляет 7,5 МэВ/нуклон. Такая зависимость удельной энергии связи от массового числа делает возможными два способа выделения ядерной энергии:

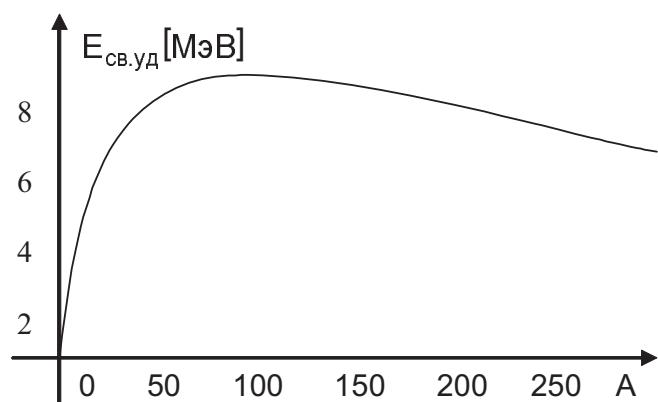


Рис. 5.1

1) Путем деления тяжелых ядер на несколько более легких ядер (реакция деления).

2) Путем слияния легких ядер в одно ядро - реакция синтеза (термоядерная реакция).

Сам факт существования устойчивых ядер указывает на то, что между нуклонами действуют силы притяжения, которыедерживают их на расстоянии 10^{-15} м, несмотря на то, что между протонами действуют силы электростатического отталкивания. Силы взаимодействия нуклонов в ядре называются ядерными силами.

Основные свойства ядерных сил.

1. Ядерные силы - силы неэлектрического происхождения. Для них характерно свойство зарядовой независимости: силы действующие между p-p, p-n, n-n равны между собой.

2. Ядерные силы обладают свойством насыщения. Каждый нуклон взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов.

3. Ядерные силы - короткодействующие силы притяжения.

4. Ядерные силы зависят от ориентации спинов нуклонов. Так, в тяжелом водороде (дейтериии) ${}_1D^2$ протон и нейтрон удерживаются вместе, если их спины параллельны друг другу.

5. Ядерные силы носят обменный характер. Переносчиком ядерного взаимодействия являются частицы π - мезоны. Существование мезонов было предсказано в 1935 г японским физиком Юкавой. И только в 1947 г мезоны были открыты в космическом излучении. Основные характеристики π - мезонов:

π^+ ($+e$, $m_{\pi^+} = 273m_e$, время жизни $\tau_{\pi^+} = 10^{-8}$ с, спин $S = 0$),

π^- ($-e$, $m_{\pi^-} = 273m_e$, время жизни $\tau_{\pi^-} = 2,55 \cdot 10^{-8}$ с, спин $S = 0$),

π^0 (0 , $m_{\pi^0} = 264m_e$, время жизни $\tau_{\pi^0} = 2,1 \cdot 10^{-16}$ с, спин $S = 0$).

Ядерное взаимодействие между нуклонами сводится к тому, что они обмениваются друг с другом π - мезонами и это объясняет короткодействующий характер ядерных сил. Время, в течение которого нуклоны обмениваются π - мезонами, можно оценить из соотношения неопределенности Гейзенberга $\Delta t \geq \frac{\hbar}{\Delta E}$. Считая, что

мезон имеет массу m_π , и что он удаляется от нуклона со скоростью, близкой к скорости света c , можно оценить расстояние R , которое он пройдет за время Δt (радиус действия ядерных сил):

$$R_\pi = c \cdot \Delta t = \frac{c \cdot \hbar}{\Delta E} = \frac{c \cdot \hbar}{m_\pi \cdot c^2} = \frac{\hbar}{m_\pi \cdot c}. \quad (5.8)$$

Расчет показывает, что это расстояние равно радиусу действия ядерных сил $R \approx 1,5 \cdot 10^{-15}$ м. Это расстояние сравнимо с радиусом ядра.

Естественная радиоактивность.

Явление естественной радиоактивности состоит в самопроизвольном превращении ядер одних элементов в другие. Эти превращения сопровождаются α , β , и γ - излучением.

Закон радиоактивного распада для нераспавшихся ядер имеет вид

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (5.9)$$

где N - число нераспавшихся ядер к моменту времени t , N_0 - первоначальное число ядер, λ - постоянная распада, определяющая вероятность распада в единицу времени.

Зависимость числа нераспавшихся ядер от времени $N(t)$ представлена на рис. 5.2.

Постоянная распада λ связана с периодом полураспада T - временем, за которое распадается половина из первоначального количества атомов. Эта связь дается соотношением: $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$.

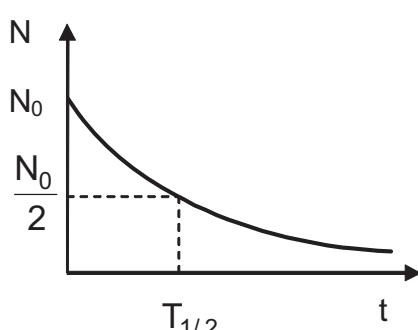


Рис. 5.2

Важной характеристикой распада является среднее время жизни радиоактивного вещества τ , которое связано с λ :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.10a)$$

Число атомов, распавшихся за время Δt , определяется выражением:

$$N - N_0 = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (5.11)$$

Если время наблюдения Δt значительно меньше периода полураспада, то число распавшихся ядер можно рассчитать по формуле:

$$N - N_0 = \Delta N = N_0 \cdot \lambda \cdot \Delta t, \quad (5.12)$$

где ΔN - число ядер, распавшихся за время Δt . Число частиц N , не распавшихся к моменту времени t , в оставшейся массе m :

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где N_A - число Авогадро, а M - молярная масса.

Скорость радиоактивного распада ядер характеризуется активностью вещества A . Если N - число ядер, находящихся в веществе в определенный момент времени, то его активность:

$$A = -\frac{dN}{dt}. \quad (5.13)$$

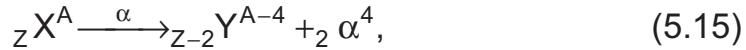
Знак минус введен для того, чтобы A была положительной величиной, поскольку ясно, что в принципе величина $\frac{dN}{dt}$ отрицательная. Активность измеряется в единицах "Кюри" (Ки): 1 Кюри = 1 Ки = $3,7 \cdot 10^{10}$ распадов/с, или в "Беккерелях" (Бк): 1 Ки = $3,7 \cdot 10^7$ Бк.

Отношение активности радиоактивного источника к его массе называется удельной активностью $a_{уд}$:

$$a_{уд} = \frac{A}{m}. \quad (5.14)$$

Существует три основных вида распада ядер: α - распад, β - распад и γ - распад. При всех видах распада выполняются законы сохранения заряда, массового числа, спина, импульса и энергии.

α - распад самопроизвольное испускание ядром α -частиц, которые представляют собой ядра атомов гелия (${}_2He^4$) и обозначаются ${}_2\alpha^4$. α -распад характерен для тяжелых элементов, массовые числа которых $A > 200$. Ядра, содержащие больше 200 нуклонов, настолько велики, что короткодействующие ядерные силы не компенсируют кулоновские силы. Такие ядра испытывают α - распад, приводящий к повышению их стабильности за счет уменьшения размеров ядра. α -распад происходит по схеме



где ${}_z X^A$ - материнское ядро, ${}_{z-2} Y^{A-4}$ - дочернее ядро. Энергия α -частиц имеет строго определенное значение (квантована).

β -распад - самопроизвольное превращение ядерных нуклонов друг в друга.

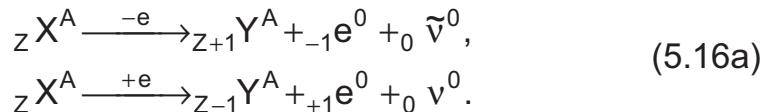
Существует три вида β -распада: распад ядра с испусканием электрона (${}_{-1} e^0$), распад ядра с испусканием позитрона (${}_{+1} e^0$) и так называемый К-захват, когда ядро захватывает электрон с ближайшей К-оболочки.

Электронный и позитронный β -распады являются следствием взаимного превращения протонов и нейтронов в ядре и сопровождаются испусканием нейтрино ${}_0 \nu^0$ и антинейтрино ${}_0 \tilde{\nu}^0$ которые представляют собой незаряженную частицу с массой покоя, близкой к нулю, и со спином $\hbar/2$.

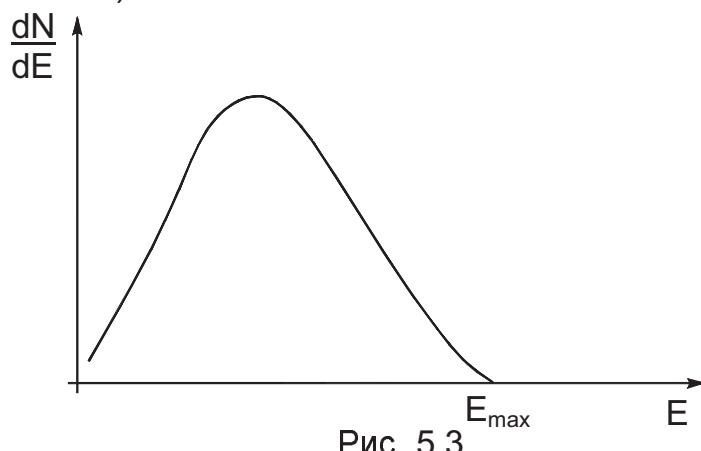
Превращения нуклонов в ядре протекают по схеме:



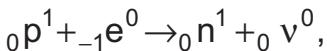
А соответствующее превращение для ядер имеет вид:



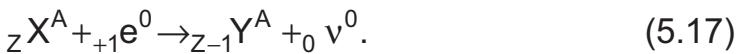
β -излучение относится к классу сильно проникающих излучений. При прохождении через вещество оно вызывает ионизацию, возбуждение атомов вещества. Торможение β -частиц приводит к возникновению рентгеновского излучения. Энергия β -частиц носит непрерывный характер (рис. 5.3).



При К-захвате ядро атома поглощает один из внутренних орбитальных электронов, при этом один из протонов ядра превращается в нейтрон с испусканием нейтрино:



а превращение ядер протекает по схеме



Дочернее ядро $_{z-1}Y^A$, образующееся при К-захвате, находится в возбужденном энергетическом состоянии. Возвращаясь в основное состояние, оно испускает γ -квант, энергия которого равна разности энергий в начальном и конечном состоянии атомного ядра. Фотоны, испускаемые ядрами, называются γ -квантами.

γ -излучение представляет собой электромагнитное излучение с частотой $v \geq 10^{19}$ Гц, обладающее большой проникающей способностью. Оно вызывает ионизацию, возбуждение атомов, а также фотоэффект. Энергия γ -квантов, испускаемых отдельными ядрами, имеет строго определенное значение (т.е. она квантована).

При прохождении излучения через вещество происходит ослабление интенсивности излучения по закону

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}, \quad (5.18)$$

где J_0 - интенсивность падающего излучения, J - интенсивность излучения после прохождения вещества, x - толщина слоя вещества, μ - линейный коэффициент ослабления.

Ядерные реакции.

Ядерными реакциями называются превращения одних ядер в другие в результате взаимодействия их с элементарными частицами или другими ядрами.

Ядерные реакции могут происходить при сближении реагирующих частиц до расстояния $r \leq 10^{-13}$ см, когда ядерные силы взаимодействия становятся значительными.

Чаще всего осуществляется реакция, когда частица a взаимодействует с ядром X и в результате этого взаимодействия возникает новое ядро Y и новая частица b :



В сокращенном виде эта реакция может быть записана так:



В скобках сначала указывается исходная частица a , а затем конечная частица b .

В качестве частиц a и b могут быть: нейтрон $_0n^1$, протон $_1p^1$, дейтон $_1d^2$, α -частица $_2\alpha^4$, фотон $_0\nu^0$.

При любой ядерной реакции выполняются законы сохранения:

1. Заряда: $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$.
2. Массового числа: $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$.
3. Релятивистской полной энергии $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$, причем

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = T + m_0c^2,$$

где p - импульс, T - кинетическая энергия, m_0c^2 - энергия покоя частиц, участвующих в реакции.

4. Импульса: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$.

5. Спина.

Если общее число ядер и частиц больше двух, то запись соответственно дополняется.

Ядерные реакции могут сопровождаться поглощением или выделением энергии. Энергия ядерной реакции определяется выражением:

$$\Delta E = c^2(\Sigma m_i - \Sigma m_k), \quad (5.20)$$

где Σm_i - сумма масс частиц, вступающих в реакцию; Σm_k - сумма масс частиц, образующихся в результате реакции, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света. Количество выделяющейся при реакции энергии называется тепловым или энергетическим эффектом реакции Q :

$$Q = \Delta E = \Delta m \cdot c^2, \quad (5.20a)$$

где $\Delta m = \Sigma m_i - \Sigma m_k$. Если $\Delta m > 0$, то реакция идет с выделением энергии и называется экзотермической, а если $\Delta m < 0$, то ядерная реакция идет с поглощением тепла и называется эндотермической. Эта ядерная реакция может происходить только тогда, когда кинетическая энергия частиц, вступающих в реакцию, превышает некоторое значение, называемое порогом реакции. Порог реакции рассчитывается по формуле:

$$E_{\text{пор}} = \frac{m_a + m_X}{m_X} |Q|, \quad (5.21)$$

где m_a - масса налетающей частицы a , m_X - масса ядра X , $|Q|$ - энергетический выход реакции.

Энергия ядерной реакции может быть также записана в виде:

$$Q = (T_a + T_X) - (T_b + T_Y), \quad (5.22)$$

где T_a и T_X - кинетические энергии частиц, вступающих в реакцию; T_b и T_Y - кинетические энергии частиц, возникающих в результате реакции.

Если энергия налетающей частицы a не слишком велика, то ядерная реакция проходит в два этапа: сначала налетающая частица захватывается ядром, ее энергия распределяется между нуклонами ядра, образуется так называемое составное ядро Π , которое находится в возбужденном состоянии. Затем оно переходит в невозбужденное устойчивое состояние с испусканием новой частицы b и образованием нового ядра Y . Схема такой реакции:



Если же энергия налетающей частицы a велика, то реакция проходит в один этап:



Примеры решения задач.

Задача 5.1. Каково строение ядра изотопа молибдена $^{42}\text{Mo}^{90}$? Чем различаются ядра изотопов $^{42}\text{Mo}^{90}$ и $^{42}\text{Mo}^{95}$? Вычислить дефект массы изотопа $^{42}\text{Mo}^{95}$. Найти энергию связи $^{42}\text{Mo}^{95}$. Масса ядра $^{42}\text{Mo}^{95}$ равна 94,9769 а.е.м.

Решение

$^{42}\text{Mo}^{90}$ - число протонов $Z = 42$, число нейтронов $N = A - Z = 48$

Ядра изотопов $^{42}\text{Mo}^{90}$ и $^{42}\text{Mo}^{95}$ имеют одинаковое число протонов $Z = 42$ и разное число нейтронов: 48 и 53 соответственно.

Дефект массы (5.4):

$$\Delta m = [42 \cdot 1,0072765 + 53 \cdot 1,0086650 - 94,9769] = 0,7879 \text{ а.е.м.} = 1,30846 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Энергия связи (5.5):

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2 = 1,30846 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 11,7761 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 733,93 \text{ МэВ.}$$

Удельная энергия связи (5.7):

$$E_{\text{уд.}} = \frac{E_{\text{св}}}{A} = \frac{733,93}{95} = 7,726 \text{ МэВ / нуклон.}$$

Задача 5.2. Дефект массы $^{7}\text{N}^{15}$ равен $\Delta m = 0,12396$ а.е.м.
Определить массу атома.

Решение

Дефект массы определяется выражением (5.4):

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{ядра}} \quad (1)$$

Но так как в справочной литературе задано значение массы атома, равной сумме массы ядра и массы Z электронов, образующих электронную оболочку атома, то расчет массы разумно производить по формуле:

$$\Delta m = [Z \cdot m_{^{1}\text{H}^1} + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{атома}}], \quad (2)$$

где $^{1}\text{H}^1$ - масса атома водорода, $m_{\text{атома}}$ - масса образованного атома.

Из (2) получаем:

$$\Delta m = [Z \cdot m_{^{1}\text{H}^1} + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{ядра}}],$$

Учитывая, что $m_{^{1}\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м., $m_n = 1,00867$ а.е.м., будем иметь: $m_{\text{атома}} = 7 \cdot 1,00783 + 8 \cdot 1,00867 - 0,12396 = 15,000$ а.е.м.

Задача 5.3. Считая радиус ядра $R = 1,3 \cdot A^{1/3}$ Фм, где A - его массовое число, оценить плотность ядер, а также число нуклонов в единице объема ядра.

Решение

Ядерная плотность: $\rho = \frac{m}{V}$, где m - масса ядра, $m = A \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг;

V - объем ядра, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

$$\rho = \frac{m}{4/3\pi R^3} = \frac{A \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 3[\text{кг}]}{4 \cdot 3,14 \cdot (1,3)^3 A(10^{-15})^3 [\text{м}^3]} \cong 2 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3.$$

Обратим внимание, что плотность ядерного вещества не зависит от массового числа A и одинакова для всех ядер.

В ядре объемом $\frac{4}{3}\pi R^3$ число нуклонов в единице объема

$$n = \frac{A}{4/3\pi R^3} = \frac{3A}{4 \cdot 3,14 \cdot (1,3)^3 A(10^{-15})^3 [\text{м}^3]} \cong 1,2 \cdot 10^{44} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 5.4. Оценить массу π -мезона, находящегося в ядре радиусом $R = 1,5$ Фм. Как соотносится масса π -мезона с массой покоя электрона?

Решение

Так как радиус действия ядерных сил сравним с радиусом ядра, то согласно (5.8) масса π -мезона:

$$m_\pi = \frac{\hbar}{Rc} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{1,5 \cdot 10^{-15} \text{ м} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 0,233 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

$$\frac{m_\pi}{m_e} = \frac{0,233 \cdot 10^{-27}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cong 260. \quad m_\pi = 260m_e.$$

Задача 5.5. Сколько процентов от массы нейтрального атома урана $_{92}\text{U}^{238}$ составляет масса его электронной оболочки? Относительную атомную массу урана принять равной его массовому числу.

Решение

Относительная атомная масса урана по условию задачи равна массовому числу $A = 238$. Число электронов нейтрального атома определяется числом протонов в ядре, которое равно атомному номеру $Z = 92$ в таблице Менделеева.

Масса атома урана $m_{\text{атома}} = 238 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг.

Масса электронной оболочки $m_{\text{эл}} = 92 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг.

$$\text{Искомая величина } \frac{m_{\text{эл}}}{m_{\text{атома}}} = \frac{92 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}{238 \cdot 9611 \cdot 10^{-27}} \cdot 100\% = 0,02\%.$$

Таким образом, масса электронной оболочки составляет всего 0,02 % от общей массы атома урана.

Задача 5.6. Определить отношение сечений σ_1/σ_2 ядер висмута $_{83}\text{Bi}^{209}$ и алюминия $_{13}\text{Al}^{27}$.

Решение

Рассматривая ядро как шар радиусом r , найдем площадь его поперечного сечения (сечения ядра) по формуле:

$$\sigma = \pi r^2. \quad (1)$$

Учитывая, что радиус ядра зависит от числа нуклонов в ядре (массового числа A) согласно формуле (5.1), запишем выражение (1) в виде:

$$\sigma = \pi r_0^2 A^{2/3}. \quad (2)$$

Для висмута сечение ядра $\sigma_1 = \pi r_0^2 A_1^{2/3}$, для алюминия - $\sigma_2 = \pi r_0^2 A_2^{2/3}$. Разделив их друг на друга, найдем:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{2/3}.$$

Подставив значения $A_1 = 209$ и $A_2 = 27$, найдем:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{209}{27} \right)^{2/3} \approx 3,91.$$

Задача 5.7. Первоначальное количество радиоактивного вещества N_0 распадается с постоянной распада λ_1 , при этом образуется новое радиоактивное вещество N_2 (продукт распада) с постоянной распада λ_2 . Получить закон радиоактивного распада для продукта распада, учитывая, что в начальный момент времени $N_2 = 0$.

Решение

Закон радиоактивного распада для первого вещества (5.9)

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t}.$$

Число распадов за время dt определяется соотношением

$$dN = -\lambda N dt, \text{ а } \frac{dN}{dt} = -\lambda N \text{ - есть скорость распада.}$$

Для продукта распада:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2.$$

Это неоднородное уравнение, общее решение которого равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $C_1 e^{-\lambda_2 t}$. Частное решение будем искать в виде $C_2 e^{-\lambda_1 t}$. Подставляя это частное решение в уравнение, находим постоянную C_2 :

$$\lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_1 t} = -\lambda_1 C_2 e^{-\lambda_1 t},$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Для общего решения получим:

$$N_2 = C_1 e^{-\lambda_2 t} + C_2 e^{-\lambda_1 t} = C_1 e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}.$$

Учитывая, что при $t = 0$ $N_2 = 0$, находим

$$C_1 = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Окончательно получаем закон радиоактивного распада для продукта распада:

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Задача 5.8. За какое время распадется $1/4$ начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада равен 24 часам?

Решение

По закону радиоактивного распада (5.9):

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

N - число оставшихся радиоактивных ядер. Число распавшихся ядер равно

$$\frac{1}{4} N_0 = N_0 - N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}, \quad \frac{3}{4} N_0 = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}, \quad \ln \frac{3}{4} = -\frac{\ln 2}{T} t,$$

$$t = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 2} \cdot T = \frac{1,386 - 1,098}{0,693} \cdot 24 = 9,97 \text{ ч.}$$

Задача 5.9. Определить, через сколько лет активность изотопа стронция ^{80}Sr уменьшится в 10 раз, в 100 раз.

Решение

Активность A изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется по (5.13):

$$A = -\frac{dN}{dt}.$$

Знак "−" показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает. Из закона радиоактивного распада найдем

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t},$$

здесь $\lambda N_0 e^{-\lambda t}$ - активность препарата в момент времени t , A_0 - начальная активность препарата при $t = 0$:

$$A_0 = \lambda \cdot N_0.$$

Из таблицы 3 находим период полураспада изотопа $^{38}\text{Sr}^{80}$. Он равен 28 годам или $8,83 \cdot 10^8$ с. Найдя Т, определяем Δt_1 и Δt_2 .

$$A_1 = \lambda N_0 e^{-\lambda t},$$

$$A_2 = \lambda N_0 e^{-\lambda(\Delta t)},$$

$$\frac{A_1}{A_2} = 10 = e^{-\lambda \Delta t_1}. \quad \ln 10 = \lambda \Delta t_1 = \frac{\ln 2}{T} \Delta t_1; \quad \Delta t_1 = \frac{\ln 10 \cdot T}{\ln 2};$$

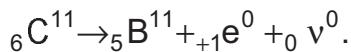
$$\Delta t_1 = \frac{2,3 \cdot 8,83 \cdot 10^8}{0,693} = 29,31 \cdot 10^8 \text{ с} = 93 \text{ года.}$$

Соответственно: $\frac{A_1}{A_3} = 100, \quad \Delta t_2 = \frac{\ln 100 \cdot T}{\ln 2}, \quad \Delta t_2 = 2\Delta t_1 = 186 \text{ лет.}$

Задача 5.10. Найти энергию β -распада ядра углерода ^{11}C .

Решение

Запишем схему β_+ - распада (5.16а):



В результате β_+ - распада возникает новый элемент с порядковым номером $Z - 1$ и испускается позитрон и нейтрино. Напомним, что позитрон $+e^0$ имеет массу покоя, равную массе покоя электрона. Электрон и позитрон являются соответственно частицей и античастицей. При их столкновении происходит двухфотонная аннигиляция материи, возникает два γ - кванта:



Энергия β_+ - распада может быть определена из выражения $\Delta E = m \cdot c^2$, где Δm - дефект масс:

$$\Delta m = m_C - m_B - m_e;$$

$$E = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} (m_C - m_B - m_e).$$

Из таблицы находим:

$$m_{^{11}\text{C}} = 11,0114 \text{ а.е.м.} \quad m_{^{11}\text{B}} = 11,0093 \text{ а.е.м.} \quad m_e = 0,00055 \text{ а.е.м.}$$

Подставляя значения масс, рассчитываем энергию β_+ - распада:

$$E = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} (11,0114 - 11,0093 - 0,00055) = 1,44 \text{ МэВ.}$$

Задача 5.11. Определить массу атома, ядро которого, испуская а-частицу с энергией 5,46 МэВ, превращается в ядро изотопа ^{218}Po . Масса полония $m_{\text{Po}} = 218,07676$ а.е.м.

Решение

Запишем схему а-распада для ядра (5.15):



Закон сохранения энергии для данного случая имеет вид:

$$m_x c^2 = m_{Po} c^2 + m_{\alpha} c^2 + \frac{m_{Po} v_{Po}^2}{2} + \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2}.$$

Перепишем выражение:

$$(m_x - m_{Po} - m_{\alpha}) c^2 = \frac{m_{Po} v_{Po}^2}{2} + \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2}.$$

Запишем закон сохранения количества движения:

$$0 = m_{Po} v_{Po} + m_{\alpha} v_{\alpha}.$$

$$\text{Откуда: } v_{Po} = \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}}{m_{Po}},$$

$$(m_x - m_{Po} - m_{\alpha}) c^2 = \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2} + \frac{m_{Po} m_{\alpha}^2 v_{\alpha}^2}{2 m_{Po}^2} = E_{\alpha} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{Po}} \right),$$

$$m_x = m_{Po} + m_{\alpha} + \frac{E_{\alpha}}{931,5} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{Po}} \right) = (m_{Po} + m_{\alpha}) \left(1 + \frac{E_{\alpha}}{m_{Po} \cdot 931,5} \right),$$

$$m_x = (218,07676 + 4,00149) \left(1 + \frac{5,46}{218,07676 \cdot 931,5} \right) = 222,08424 \text{ а.е.м.}$$

Задача 5.12. В настоящее время в руде содержится одинаковое количество атомов ${}_{82}^{206} Pb$ и ${}_{92}^{238} U$. Определить, каким было содержание руды 10^9 лет назад.

Решение

Руда образовалась t_1 лет назад. В начальный момент руда содержала только уран - N_0 атомов. К моменту времени t_1 по условию задачи в руде содержалось одинаковое количество атомов урана и свинца, следовательно время t_1 по определению равно периоду полураспада урана $t_1 = T_U = 4,5 \cdot 10^9$ лет. К моменту времени $t = 10^9$ лет (отсчет ведется от настоящего момента времени) согласно закону радиоактивного распада (5.9) осталось не распавшимися число атомов урана

$$N_U = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}(t_1-t)}.$$

Число распавшихся атомов урана определится:

$$\Delta N_U = N_0 - N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}(t_1-t)} = N_0 \left[1 - e^{-\frac{\ln 2}{T}(t_1-t)} \right].$$

Столько же атомов свинца образовалось в результате распада урана:

$$N_{Pb} = \Delta N_U.$$

Содержание руды к моменту времени t определим соотношением

$$\frac{N_{Pb}}{N_U} = \frac{(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T}(t_1 - t)})}{e^{-\frac{\ln 2}{T}(t_1 - t)}} = e^{\frac{\ln 2}{T}(t_1 - t)} - 1.$$

Окончательно

$$\frac{N_{Pb}}{N_U} = \frac{\Delta N_U}{N_U} = e^{\frac{0,693}{4,5 \cdot 10^9} (4,5 \cdot 10^9 - 10^9)} - 1 = 0,72.$$

Задача 5.13. Известно, что при нормальных условиях из 2,5 г радиоактивного полония за 32,86 дня за счет его распада образуется 40,54 см³ гелия. По этим данным определить период полураспада радиоактивного ⁸⁴Po²¹⁰.

Решение

Гелий есть конечный продукт распада ⁸⁴Po²¹⁰. Если найдем число атомов образованного гелия, то будем знать число распавшихся атомов полония. Для определения числа атомов, содержащихся в объеме гелия V при нормальных условиях ($p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, $T_0 = 273 \text{ К}$), воспользуемся соотношением $p_0 = n_0 k T$, $\Delta N = n_0 V$, $p_0 V = \Delta N k T$. Здесь $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ - постоянная Больцмана.

Теперь имеем

$$\Delta N = \frac{p_0 V}{k T_0}.$$

Эта же величина может быть определена из закона радиоактивного распада (см. формулу (5.9))

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} t}; \quad \Delta N = N_0 - N = N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t}\right).$$

Подставив величину N_0 - число атомов полония в начальный момент ($N_0 = \frac{m}{M} N_A$), получаем:

$$\Delta N = \frac{m}{M} N_A \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t}\right).$$

Решая совместно эти уравнения, найдем период полураспада полония:

$$\frac{p_0 V}{k T_0} = \frac{m}{M} N_A \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t}\right);$$

$$1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = \frac{p_0 V M}{m k N_A T_0} = \frac{p_0 V M}{m R T_0}; \quad k N_A = R = 8,31 \text{ Дж/(моль·К)};$$

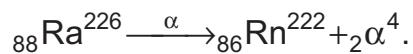
$$1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = 1 - \frac{p_0 V M}{m R T_0}; \quad -\frac{\ln 2}{T} t = \ln \left(1 - \frac{p_0 V M}{m R T_0}\right); \quad T = -\frac{\ln 2 \cdot t}{\ln \left(1 - \frac{p_0 V M}{m R T_0}\right)};$$

$$T = -\frac{0,693 \cdot 32,86}{\ln \left(1 - \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 40,54 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 273} \right)} = 138 \text{ суток.}$$

Задача 5.14. Определить количество тепла, которое выделяет 1 мг препарата $^{88}\text{Ra}^{226}$ за период, равный среднему времени жизни этих ядер, если известно, что испускаемые а-частицы имеют кинетическую энергию 5,3 МэВ и практически все дочерние ядра образуются в основном состоянии.

Решение

Запишем схему а-распада (5.15)



В результате единичного а-распада энергию E получают а-частица и дочернее ядро ${}_{86}\text{Rn}^{222}$, образующееся по условию задачи в основном состоянии:

$$E = E_\alpha + E_{\text{Rn}} = \frac{M_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{M_{\text{Rn}} v_{\text{Rn}}^2}{2}.$$

Считаем, что скорость образовавшихся частиц в много меньше скорости света. Из закона сохранения количества движения:

$$M_\alpha \vec{v}_\alpha = -M_{\text{Rn}} \vec{v}_{\text{Rn}}.$$

можно определить скорость дочернего ядра

$$\vec{v}_{\text{Rn}} = \vec{v}_\alpha \frac{M_\alpha}{M_{\text{Rn}}}.$$

Тогда для E имеем: $E = \frac{M_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{M_{\text{Rn}} v_\alpha^2 M_\alpha^2}{2 M_{\text{Rn}}^2} = \frac{M_\alpha v_\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_{\text{Rn}}} \right).$

Таким образом, при распаде каждого ядра выделяется такая энергия с учетом того, что:

$$E_\alpha = \frac{M_\alpha v_\alpha^2}{2}, \quad E = E_\alpha \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_{\text{Rn}}} \right).$$

Полная энергия распада ядер 1 мг препарата Ra^{226}

$$Q = E_{\text{полн}} = E \cdot \Delta N,$$

где ΔN - число распавшихся ядер за время, равное среднему времени жизни τ .

Число ΔN найдем, используя закон радиоактивного распада (5.9):

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{т.к. } \lambda = \frac{1}{\tau}; \quad (5.10a)$$

$$N_0 = \frac{m}{M_{\text{Ra}}} N_A; \quad N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1};$$

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-1});$$

$$\Delta N = \frac{m}{M_{Ra}} N_A (1 - e^{-1})$$

$$\Delta N = \frac{10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{226 \cdot 10^{-3}} \left(1 - \frac{1}{2,7182} \right) = 1,68 \cdot 10^{18}.$$

Выделенное тепло будет равно

$$Q = 5,3 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,68 \cdot 10^{18} = 1,45 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Задача 5.15. Свободное покоившееся ядро иридия Ir¹⁹² с энергией возбуждения $E_\gamma = 129$ кэВ, перешло в основное состояние, испустив γ -квант. Вычислить относительное изменение энергии γ -кванта, возникающее в результате отдачи ядра. $M_{Ir} = 192,2$ а.е.м.

Решение

Пусть энергия покоившегося ядра иридия Ir¹⁹² равна E_{0Ir} . Энергия возбуждения без учета энергии отдачи ядра равна энергии γ -кванта $E_\gamma = 129$ кэВ; энергия отдачи ядра, возникающая в результате перехода ядра Ir из возбужденного состояния в невозбужденное, $M_{Ir} \cdot v^2/2$; энергия γ -кванта $\hbar\omega$. Требуется определить

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \hbar\omega}{\hbar\omega},$$

Согласно закону сохранения энергии можно составить уравнение:

$$E_\gamma = \frac{M_{Ir} \cdot v^2}{2} + \hbar\omega.$$

Запишем закон сохранения импульса

$$0 = M_{Ir} \cdot v + \frac{\hbar\omega}{c},$$

где 0 - импульс покоившегося возбужденного ядра Ir; $M_{Ir} \cdot v$ - импульс ядра в результате отдачи; $\hbar\omega/c$ - импульс γ -кванта. Откуда находим

$$\hbar\omega = -M_{Ir} \cdot v \cdot c.$$

Для E_γ получаем

$$E_\gamma = \frac{M_{Ir} \cdot v^2}{2} - M_{Ir} \cdot v \cdot c.$$

Из решения этого уравнения определяем скорость:

$$v = c \cdot \sqrt{1 + \frac{2E_\gamma}{M_{Ir} \cdot c^2}} - 1.$$

Разлагая в ряд $\sqrt{1 + \frac{2E_\gamma}{M_{Ir} \cdot c^2}}$ и ограничиваясь двумя членами, получаем $1 + \frac{2E_\gamma}{2M_{Ir} \cdot c^2}$. Окончательно находим $v \approx \frac{E_\gamma}{M_{Ir} \cdot c^2}$.

По условию задачи энергия возбуждения ядра Ir¹⁹² без учета энергии отдачи ядра E_γ = 129 кэВ. Энергия γ - кванта с учетом энергии отдачи ядра, равной M_{Ir}·v²/2 определяется как

$$\hbar\omega = E_{\gamma} - \frac{M_{Ir} \cdot v^2}{2}.$$

Изменение энергии γ - кванта можно найти, решая эти два уравнения

$$\Delta(\hbar\omega) = E_{\gamma} - \hbar\omega = \frac{M_{Ir} \cdot v^2}{2} = \frac{E_{\gamma}^2}{2M_{Ir} \cdot c^2}.$$

Относительное изменение энергии рассчитываем, найдя отношение:

$$\frac{\Delta(\hbar\omega)}{E_{\gamma}} = \frac{E_{\gamma}}{2M_{Ir} \cdot c^2} = \frac{129 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 192,2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 3,6 \cdot 10^{-7}.$$

Задача 5.16. Сколько слоев половинного ослабления имеет пластиинка, ослабляющая интенсивность узкого пучка монохроматических лучей в 32 раза?

Решение

Интенсивность пучка рентгеновских или γ - лучей, прошедших слой вещества толщиной x, определяется формулой (5.18):

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu x},$$

где J₀ - интенсивность пучка, падающего на вещество; J - интенсивность пучка, прошедшего в веществе слой толщиной x; μ - линейный коэффициент ослабления (иногда его называют коэффициентом поглощения).

Ослабление интенсивности падающего пучка происходит в результате взаимодействия γ или рентгеновского излучения с веществом. Это взаимодействие в зависимости от энергии падающего кванта, сводится к фотоэффекту, эффекту Комptonа, а при энергии квантов больше 1,02 МэВ - к образованию электронно-позитронных пар.

Линейный коэффициент поглощения является функцией энергии γ - квантов. Слой половинного ослабления имеет толщину, при прохождении которой интенсивность падающего пучка уменьшается в 2 раза.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений (5.18), в которых отношение интенсивностей

$$\frac{J_1}{J_0} = \frac{1}{2}, \quad \frac{J_2}{J_0} = \frac{1}{32} \quad \text{и} \quad J_1 = J_0 e^{-\mu d_{1/2}},$$

где d_{1/2} - толщина половинного слоя;

$$J_2 = J_0 e^{-\mu d},$$

где d - искомая толщина;

$$\frac{J_1}{J_0} = \frac{1}{2} = e^{-\mu d_{1/2}}; \quad \ln 2 = \mu d_{1/2},$$

$$\frac{J_2}{J_0} = \frac{1}{32} = e^{-\mu d}; \quad \ln 32 = \mu d.$$

Откуда, поделив уравнения друг на друга, получаем:

$$\frac{\mu d}{\mu d_{1/2}} = \frac{\ln 32}{\ln 2}; \quad d = \frac{3,466}{0,693} \cdot d_{1/2} = 5d_{1/2}.$$

Задача 5.17. Вычислить энергию, поглощаемую при реакции ${}_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1p^1$. Значения масс взять из таблицы 1.

Решение

Энергия выхода ядерной реакции определяется выражением (5.20):

$$\Delta E = c^2 \left(\sum_{i=1}^2 m_i - \sum_{k=1}^2 m_k \right).$$

Найдя сумму масс частиц, вступающих в реакцию

$$\sum_{i=1}^2 m_i = m_N + m_{He} = (14,00307 + 4,00260) \text{ а.е.м.} = 18,00567 \text{ а.е.м.}$$

и образующихся в результате реакции

$$\sum_{k=1}^2 m_k = m_O + m_p = (16,99913 + 1,00728) \text{ а.е.м.} = 18,00641 \text{ а.е.м.},$$

определяем дефект массы Δm в а.е.м.

Учитывая, что 1 а.е.м. = 931,5 МэВ, вычисляем энергию реакции:

$$Q = (18,00567 - 18,00641) \cdot 931,5 = -0,689 \text{ МэВ.}$$

Реакция идет с поглощением тепла и является эндотермической.

Задача 5.18. Определить энергию и рассчитать порог ядерной реакции: ${}_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow {}_4Be^7 + {}_0n^1$.

Решение

Для определения энергии воспользуемся формулой (5.20а). С учетом взаимосвязи атомных и энергетических единиц имеем:

$$Q = (7,01601 + 1,00783 - 7,01693 - 1,00867) \cdot 931,5 = -1,64 \text{ МэВ.}$$

Реакция идет с поглощением энергии.

Значение пороговой энергии найдем по формуле (5.21):

$$E_{\text{пор}} = \left(1 + \frac{m_H}{m_{Li}} \right) \cdot |Q| = 1,142 \cdot 1,64 = 1,87 \text{ МэВ.}$$

Задача 5.19. При соударении а-частицы с ядром бора ${}_5B^{10}$ произошла ядерная реакция, в результате которой образовались два новых ядра. Одним из этих ядер было ядро водорода ${}_1H^1$. Определить порядковый номер и массовое число второго ядра, дать

символическую запись ядерной реакции и определить ее энергетический выход.

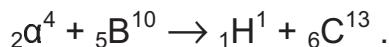
Решение

Обозначим неизвестное ядро через $_zX^A$ и запишем реакцию в виде: $_2\alpha^4 + _5B^{10} \rightarrow _1H^1 + _zX^A$.

Используя законы сохранения зарядов и массовых чисел, получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} 2 + 5 = 1 + Z, \\ 4 + 10 = 1 + A, \end{cases}$$

откуда следует, что $Z = 6$, $A = 13$. Неизвестным ядром $_6X^{13}$ является углерод $_6C^{13}$. Символическая запись ядерной реакции может быть представлена в виде



Тепловой эффект реакции определяется выражением (5.20), из которого следует

$$Q = \Delta E = 931,5 \cdot (m_\alpha + m_B - m_H - m_C) [\text{МэВ}].$$

Значения масс взяты из таблицы 1. Окончательно находим:

$$Q = \Delta E = 931,5(4,00149 + 10,01294 - 1,00783 - 13,00335) = 3,03 \text{ МэВ.}$$

Задача 5.20. На ядро лития налетает протон с кинетической энергией E_p . В результате ядерной реакции образуются две а-частицы с одинаковыми энергиями. Найти угол между направлениями их разлета.

Решение

При взаимодействии протона с ядром лития происходит ядерная реакция, энергия которой равна (5.20а)

$$Q = \Delta mc^2,$$

где Δm - разность между суммой масс частиц, вступающих в реакцию ($m_p + m_{Li}$) и суммой масс образующихся частиц ($2m_\alpha$).

$$Q = c^2(m_p + m_{Li} - 2m_\alpha).$$

Запишем законы сохранения энергии и импульса для взаимодействующих частиц:

$$E_p + Q = 2E_\alpha, \quad (1)$$

$$m_p \vec{v}_p = m_\alpha \vec{v}_a + m_\alpha \vec{v}_a, \quad (2)$$

Отметим, что первое уравнение скалярное, а второе - векторное. По теореме косинусов находим (рис. 5.4):

$$(m_\alpha v_\alpha)^2 = (m_\alpha v_\alpha)^2 + (m_p v_p)^2 - 2m_\alpha v_\alpha m_p v_p \cos\phi/2,$$

откуда

$$\cos\frac{\phi}{2} = \frac{m_p v_p}{2m_\alpha v_\alpha}, \quad \phi = 2 \arccos \frac{m_p v_p}{2m_\alpha v_\alpha}. \quad (3)$$

Зная кинетическую энергию протона, находим скорость протона

$$v_p = \sqrt{\frac{2E_p}{m_p}}.$$

Скорость α -частицы находим из (1):

$$2 \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = E_p + (m_p + m_{Li} - 2m_\alpha)c^2,$$

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{E_p + (m_p + m_{Li} - 2m_\alpha)c^2}{m_\alpha}}.$$

Подставляя полученные значения скорости v_p и v_α в (3), находим угол разлета α -частиц

$$\phi = 2 \arccos \sqrt{\frac{E_p m_p}{2[E_p + (m_p + m_{Li} - 2m_\alpha)c^2]m_\alpha}}.$$

Задача 5.21. В реакции ${}_7N^{14}(\alpha, p){}_8Y$ кинетическая энергия α -частицы $T_\alpha = 7,7$ МэВ. Найти, под каким углом ϕ к направлению движения вылетает протон, если известно, что его кинетическая энергия $T_p = 8,5$ МэВ.

Решение

Запишем ядерную реакцию (5.19)



Образовавшееся ядро ${}_8Y^{17}$ есть ядро изотопа кислорода ${}_8O^{17}$, которое является ядром отдачи.

Запишем законы сохранения энергии и импульса для взаимодействующих частиц. Закон сохранения с учетом того, что ядро азота неподвижно

$$T_\alpha + Q = T_p + T_O, \quad (1)$$

где Q - энергия ядерной реакции.

Закон сохранения импульса взаимодействующих частиц в векторной форме имеет вид:

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_p + \vec{p}_O.$$

Запишем его в скалярной форме, используя теорему косинусов (рис. 5.5):

$$p_O^2 = p_\alpha^2 + p_p^2 - 2p_\alpha p_p \cos \phi.$$

Учитывая связь импульса и энергии $p^2 = 2mT$, получим:

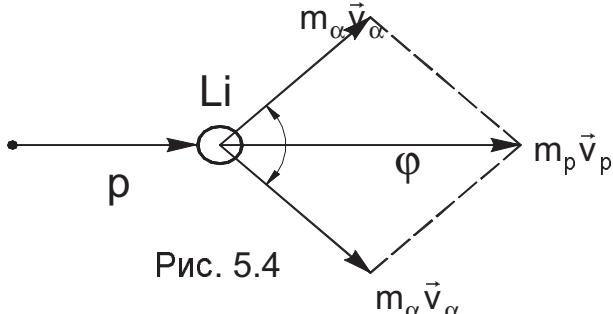


Рис. 5.4

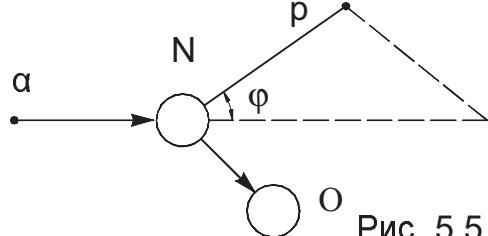


Рис. 5.5

$$2m_O T_O = 2m_\alpha T_\alpha + 2m_p T_p - 2 \cos \varphi \sqrt{4m_\alpha m_p T_\alpha T_p}.$$

$$\text{Откуда: } T_O = \frac{m_\alpha}{m_O} T_\alpha + \frac{m_p}{m_O} T_p - 2 \frac{\cos \varphi}{m_O} \sqrt{4m_\alpha m_p T_\alpha T_p}. \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) энергию T_O , получим

$$T_\alpha \left(\frac{m_O - m_\alpha}{m_O} \right) + Q = T_p \frac{m_p + m_O}{m_O} - 2 \frac{\cos \varphi}{m_O} \sqrt{4m_\alpha m_p T_\alpha T_p}.$$

И для $\cos \varphi$ имеем

$$\cos \varphi = \frac{(m_p + m_O)}{2} \cdot \sqrt{\frac{T_p}{m_p m_\alpha T_\alpha}} - \frac{(m_O - m_\alpha)}{2} \sqrt{\frac{T_\alpha}{m_p m_\alpha T_p}} - \frac{m_O |Q|}{2 \sqrt{m_p m_\alpha T_p T_\alpha}}. \quad (3)$$

Энергия реакции Q рассчитывается по формуле (5.20а):

$$|Q| = \left| (m_{N^{14}} + m_\alpha - m_p - m_{O^{17}}) \right| \cdot 931,5 \text{ МэВ.}$$

Численные значения масс находим из таблицы 1.

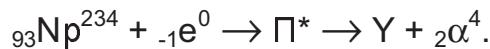
$$|Q| = |(14,00307 + 4,00149 - 1,00728 - 16,99913)| \times 931,5 \text{ МэВ} = 1,72 \text{ МэВ.}$$

Подставляя в (3), находим $\cos \varphi = 0,7$, угол $\varphi = 45,45^\circ$.

Задача 5.22. Ядро нептуния $^{93}\text{Np}^{234}$ захватило электрон из К-оболочки атома (К-захват) и испустило а-частицу. Ядро какого элемента получилось в результате этих превращений?

Решение

Данная реакция идет с образованием промежуточного (составного) ядра (5.23) по схеме:



Составное ядро ${}^{92}\text{P}^{234}$ представляет собой изотоп урана ${}^{92}\text{U}^{234}$. Это ядро испускает а-частицу, образуя новое ядро Y :



${}^{90}\text{Y}^{230}$ является изотопом тория ${}^{90}\text{Th}^{230}$.

Задача 5.23. Найти наименьшее значение энергии γ -кванта для осуществления реакции (фоторасщепление дейтерия): ${}_1\text{H}^2 + {}_0\gamma^0 \rightarrow {}_1\text{H}^1 + {}_0\text{n}^1$.

Решение

Наименьшее значение энергии γ -кванта определим из закона сохранения энергии:

$$E_\gamma = E_{\text{H}^1} + E_n - E_{\text{H}^2}.$$

Подставляя значения масс покоя частиц (таблицы 1,2), выраженные в а.е.м., получаем:

$$E_\gamma = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} [m_{{}_1\text{H}^1} + m_n - m_{\text{H}^2}] \text{ а.е.м.} = 931,5 \cdot [1,00783 + 1,00867 - 2,01410] \text{ МэВ} = 2,23 \text{ МэВ.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Состав ядра. Энергия связи

При решении задач использовать значения масс покоя нейтральных атомов, а также масс покоя элементарных частиц, приведенные в Таблицах 1 и 2. Значения периодов полураспада радиоактивных изотопов даны в Таблице 3.

5.24. Определить массу ядра лития, если масса нейтрального атома лития равна 7,01601 а.е.м.

5.25. Какую часть массы нейтрального атома плутония составляет масса его электронной оболочки?

5.26. Определить атомные номера, массовые числа и химические символы ядер, которые получаются, если в ядрах ${}_2\text{He}^3$, ${}_4\text{Be}^7$, ${}_8\text{O}^{15}$ протоны заменить нейтронами, а нейтроны протонами. Привести символическую запись получившихся ядер.

5.27. Определить диаметры следующих ядер: 1) ${}_3\text{Li}^8$, 2) ${}_{13}\text{Al}^{27}$, 3) ${}_{29}\text{Cu}^{64}$, 4) ${}_{50}\text{Sn}^{125}$, 5) ${}_{84}\text{Po}^{216}$.

5.28. Оценить, какую часть объема атома кобальта составляет объем его ядра. Плотность кобальта $\rho = 4500 \text{ кг}/\text{м}^3$.

5.29. Показать, что средняя плотность $\langle \rho \rangle$ ядерного вещества одинакова для всех ядер. Оценить (по порядку величины) ее значение.

5.30. Два ядра ${}_5\text{B}^{10}$ сблизились до расстояния, равного диаметру ядра. Считая, что масса и заряд равномерно распределены по объему ядра, определить силу F_1 гравитационного притяжения, силу F_2 кулоновского отталкивания и отношение этих сил (F_1/F_2).

5.31. Определить дефект массы Δm и энергию связи ядра атома тяжелого водорода.

5.32. Определить удельную энергию связи $\Delta E_{\text{уд}}$ ядра ${}_6\text{C}^{12}$.

5.33. Во сколько раз сечение ядра нептуния ${}_{93}\text{Np}^{234}$ больше сечения ядра стронция ${}_{38}\text{Sr}^{88}$?

5.34. Найти удельную энергию связи ядер ${}_1\text{H}^3$ или ${}_2\text{He}^3$. Какое из этих ядер наиболее устойчиво?

5.35. Энергия связи ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрана, равна $E_{\text{св}}=7,72 \text{ МэВ}$. Определить массу M_a нейтрального атома, имеющего это ядро.

5.36. Определить массу M_a нейтрального атома, если ядро этого атома состоит из трех протонов и двух нейтронов и энергия связи $E_{\text{св}}=26,3 \text{ МэВ}$.

5.37. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить на отдельные нуклоны ядро ${}_3\text{Li}^7$?

5.38. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы оторвать от ядра азота ${}_7N^{14}$ один нейтрон?

5.39. Найти минимальную энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра углерода ${}_6C^{12}$.

5.40. Определить удельную энергию связи $\Delta E_{уд}$ ядра бериллия ${}_4Be^7$.

5.41. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить ядро углерода ${}_6C^{12}$ на три одинаковые части?

5.42. Определить энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра натрия ${}_{11}Na^{23}$.

5.43. Найти удельную энергию связи нуклонов в ядре алюминия ${}_{13}Al^{27}$.

Радиоактивность. Радиоактивный распад.

5.44. Какая часть начального количества атомов актиния ${}_{89}Ac^{235}$ останется через 5 суток? Период полураспада $T_{1/2} = 10$ суток.

5.45. Некоторый радиоактивный препарат имеет постоянную распада $\lambda = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Через какое время распадется 75% первоначального количества атомов?

5.46. Определить активность А фосфора P^{32} массой $m = 10^{-3}$ г. Молярная масса фосфора $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, период полураспада $T_{1/2} = 14,3$ суток.

5.47. За какое время Δt распадется $1/4$ начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада $T_{1/2} = 24$ часа?

5.48. Какая часть начального количества атомов распадется за 1 год в радиоактивном изотопе тория Th^{229} ? Период полураспада $T_{1/2} = 7 \cdot 10^3$ лет.

5.49. Определить число ΔN атомов, распадающихся в радиоактивном изотопе за время $t = 10$ с, если его активность $A = 0,1$ МБк. Считать активность постоянной в течение указанного времени.

5.50. За время $\Delta t = 1$ сутки активность изотопа уменьшилась от $A_1 = 118$ ГБк до $A_2 = 7,4$ ГБк. Определить период полураспада этого изотопа.

5.51. Сколько а- и β- распадов испытает уран ${}_{92}U^{238}$, превращаясь в конечном счете в стабильный изотоп ${}_{82}Pb^{206}$?

5.52. Радиоизотоп X_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп X_2 с постоянной распада λ_2 . Считая, что в начальный момент препарат содержал только X_1 , найти промежуток времени, через который активность радиоизотопа X_2 достигла максимума.

5.53. Определить возраст древних деревянных изделий, если удельная активность изотопа ${}^{14}C$ у них составляет $3/5$ удельной

активности этого же изотопа в только что срубленных деревьях. Период полураспада ^{14}C равен $T_{1/2}=5570$ лет.

5.54. Радиоизотоп испытывает превращения по схеме $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ (стабилен) с соответствующими постоянными распада λ_1 и λ_2 . Считая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа X_1 в количестве N_{10} , найти закон накопления стабильного изотопа X_3 .

5.55. Активность некоторого препарата уменьшается в 2,5 раза за 7,0 дней. Определить период его полураспада.

5.56. Какой изотоп образуется из а-активного Ra^{226} в результате пяти а-распадов и четырех β -распадов?

5.57. Первоначально покоявшееся ядро $^{84}\text{Po}^{210}$ испустило а-частицу с кинетической энергией $T_\alpha = 5,3$ МэВ. Найти скорость отдачи дочернего ядра.

5.58. Определить количество тепла, которое выделяет 1 мг препарата $^{84}\text{Po}^{210}$ за период, равный среднему времени жизни этих ядер, если известно, что испускаемые а-частицы имеют энергию 6,3 МэВ и практически все дочерние ядра образуются непосредственно в основном состоянии.

5.59. а-распад ядер $^{84}\text{Po}^{210}$ (из основного состояния) сопровождается испусканием двух групп а-частиц с кинетическими энергиями 5,30 и 4,50 МэВ. В результате испускания этих а-частиц дочерние ядра оказываются соответственно в основном и в возбужденном состояниях. Найти энергию γ -квантов, испускаемых возбужденными ядрами.

5.60. Вычислить с помощью табличных значений масс атомов энергии позитрона и нейтрона, испускаемых ядром $^{6}\text{C}^{11}$ в случае, если дочернее ядро не испытывает отдачи.

5.61. Период полураспада радиоактивного нуклида равен $T_{1/2}=1$ ч. Определить среднюю продолжительность жизни τ этого нуклида.

5.62. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

5.63. Определить интенсивность I γ -излучения на расстоянии $r = 5$ см от точечного изотропного радиоактивного источника, имеющего активность $A = 148$ ГБк. Считать, что при каждом акте распада излучается в среднем $n=1,8$ γ -квантов с энергией $E=0,51$ МэВ каждый.

5.64. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния Mg^{27} массой $m = 0,2$ мг, а также его активность по истечении времени $t=1$ час. Период полураспада $T_{1/2} = 9,5$ мин., молярная масса $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$.

5.65. Атомное ядро, поглотившее γ -фотон ($\lambda = 0,47$ пм), пришло в возбужденное состояние и распалось на отдельные нуклоны, разлетевшиеся в разные стороны. Суммарная кинетическая энергия нуклонов $T = 0,4$ МэВ. Определить энергию связи ядра.

5.66. Ядро бериллия $_{4}\text{Be}^7$ захватило электрон из К-оболочки атома. Какое ядро образовалось в результате К-захвата?

5.67. Ядро плутония $_{94}\text{Pu}^{238}$ испытalo шесть последовательных α-распадов. Написать цепочку ядерных превращений с указанием химических символов, массовых, зарядовых чисел, промежуточных ядер и конечного ядра.

5.68. Покоившееся ядро радона $_{86}\text{Rn}^{220}$ выбросило α-частицу со скоростью $v = 1,6 \cdot 10^7$ м/с. В какое ядро превратилось ядро радона? Какую скорость v_1 получило оно в результате отдачи?

5.69. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется не распавшейся через 1,5 периода полураспада?

5.70. В нормальных условиях $m = 1$ г радия образует $\Delta V = 0,043$ см³ гелия в год. Определить период полураспада радия.

5.71. Вычислить толщину слоя половинного ослабления $X_{1/2}$ параллельного пучка γ -излучения для воды, если линейный коэффициент ослабления $\mu = 0,047$ см⁻¹.

5.72. 1 г урана $_{92}\text{U}^{238}$ в равновесии с продуктами его распада выделяет мощность $1,07 \cdot 10^{-7}$ Вт. Найти полное количество тепла, выделяемое одним грамм-атомом урана за среднюю продолжительность жизни атома урана.

5.73. Интенсивность узкого пучка γ -излучения после прохождения через слой свинца толщиной $d = 4$ см уменьшилась в $k = 8$ раз. Определить энергию γ -кванта и толщину слоя половинного ослабления.

Ядерные реакции, их закономерности.

5.74. Освобождается или поглощается энергия при ядерной реакции $_{4}\text{Be}^9 + _1\text{p}^1 \rightarrow _5\text{B}^{10} + _0\text{n}^1$?

5.75. При бомбардировке ядра $_{13}\text{Al}^{27}$ α-частицами получается радиоактивный изотоп фосфора $_{15}\text{P}^{30}$, который распадается с выделением позитрона. Написать уравнения обеих реакций.

5.76. При делении одного ядра урана $_{92}\text{U}^{235}$ выделяется энергия 200 МэВ. Какую долю энергии покоя составляет выделившаяся энергия?

5.77. Освобождается или поглощается энергия при ядерной реакции $_{3}\text{Li}^7 + _1\text{H}^1 \rightarrow 2 _2\text{He}^4$? Найти величину этой энергии.

5.78. Электрон и позитрон, имевшие одинаковые кинетические энергии, равные 0,24 МэВ, при соударении превратились в два

одинаковых фотона. Определить энергию фотона и соответствующую ему длину волны λ .

5.79. α -частица с кинетической энергией T возбуждает реакцию ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$. Найти кинетическую энергию нейтрона, вылетевшего под прямым углом к направлению движения α -частицы. Массы покоя частиц считать известными.

5.80. Радиоактивное ядро магния Mg^{23} выбросило позитрон и нейтрино. Записать реакцию распада ядра Mg^{23} и определить энергию распада.

5.81. Какую энергию необходимо сообщить, чтобы при реакции ${}_{13}\text{Al}^{27}(\alpha, p){}^{14}\text{Si}^{30}$ подверглись превращению все ядра, находящиеся в 1 г алюминия?

5.82. При бомбардировке изотопа ${}^3\text{Li}^6$ дейтонами образуются две α -частицы. При этом выделяется энергия, равная 22,3 МэВ. Зная массы дейтона и α -частицы, найти массу изотопа ${}^3\text{Li}^6$.

5.83. При бомбардировке изотопа ${}^3\text{Li}^6$ дейтонами образуются две α -частицы, разлетающиеся симметрично под углом ϕ к направлению скорости бомбардирующих дейтонов. Найти: 1) угол разлета ϕ , 2) энергию образующихся α -частиц, если известно, что энергия бомбардирующих дейтонов равна 0,2 МэВ.

5.84. Изотоп ${}^2\text{He}^3$ получается бомбардировкой ядер трития ${}^1\text{H}^3$ протонами. Написать уравнение реакции, найти энергию этой реакции.

5.85. Найти наименьшее значение энергии γ -кванта, достаточное для осуществления реакции ${}_{12}\text{Mg}^{24}(\gamma, n)$.

5.86. Какое количество воды можно нагреть от 0°C до кипения, если использовать все тепло, выделяющееся при реакции ${}^3\text{Li}^7(p, \alpha)$ при полном разложении одного грамма лития?

5.87. Какое количество энергии в кВт-часах можно получить от деления $m=1$ г урана ${}_{92}\text{U}^{235}$, если при каждом делении выделяется энергия, равная приблизительно 200 МэВ?

5.88. Определить энергию Q ядерной реакции $\text{Be}^9(n, \gamma)\text{Be}^{10}$, если известно, что энергия связи ядра Be^9 равна $E_{\text{св1}}=58,16$ МэВ, а ядра $\text{Be}^{10}-E_{\text{св2}}=64,98$ МэВ.

5.89. При реакции $\text{Li}^6(p, \alpha)\text{Li}^7$ освобождается энергия $Q = 5,028$ МэВ. Определить массу Li^6 . Массы остальных атомов взять из таблицы.

5.90. При ядерной реакции ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$ освобождается энергия $Q = 5,70$ МэВ. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер бериллия и гелия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_α и T_n продуктов реакции.

5.91. Определить суммарную кинетическую энергию $T_{\text{ядер}}$, образовавшихся в результате реакции $^{13}\text{C}(\alpha, \alpha)^{11}\text{B}$, если кинетическая энергия T_α дейтона равна 1,5 МэВ. Ядро-мишень ^{13}C считать неподвижным.

5.92. Определить энергию Q распада ядер углерода $^{6}\text{C}^{10}$, выбросившего позитрон и нейтрину.

5.93. Вычислить энергию необходимую для разделения ядра Ne^{20} на две а-частицы и ядро C^{12} , если энергия связи на один нуклон в ядрах Ne^{20} , He^4 и C^{12} равны 8,03; 7,07 и 7,68 МэВ.

5.94. Вычислить в а.е.м. массу ядра C^{10} с энергией связи на один нуклон 6,04 МэВ.

5.95. Найти энергию реакции $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$, если кинетическая энергия налетающей а-частицы $T_\alpha = 4,0$ МэВ, а протон, вылетевший под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению движения а-частицы имеет кинетическую энергию $T_p = 2,09$ МэВ.

5.96. Протоны, налетающие на неподвижную литиевую мишень, возбуждают реакцию $^7\text{Li}(p, n)^7\text{Be}$. При какой кинетической энергии протона возникший нейтрон может оказаться покоящимся?

5.97. Протоны с кинетической энергией $T = 1,0$ МэВ бомбардируют литиевую мишень, возбуждая реакцию $p + ^7\text{Li} \rightarrow ^2\text{H} + ^4\text{He}$. Найти кинетическую энергию каждой а-частицы и угол между направлениями их разлета, если разлет произошел симметрично к направлению набегающих протонов.

5.98. Какую кинетическую энергию необходимо сообщить протону, чтобы он смог расщепить покоящееся ядро ^2H , энергия связи которого $E_{\text{св}} = 2,2$ МэВ?

5.99. Определить массу атома, ядро которого, испуская а-частицу с энергией 5,46 МэВ, превращается в $^{84}\text{Po}^{218}$. Масса полония $M_{\text{Po}} = 218,07676$ а.е.м.

5.100. Определить энергию, освобождаемую при синтезе $m = 1$ кг гелия в термоядерной реакции: ${}_1\text{H}^2 + {}_1\text{H}^3 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_0\text{n}^1$

5.101. Определить энергию быстрых нейтронов, возникающих в результате реакции ${}_4\text{Be}^9 + {}_2\alpha^4 \rightarrow {}_6\text{C}^{12} + {}_0\text{n}^1$

5.102. Найти пороговую кинетическую энергию а-частицы для возбуждения реакции ${}^7\text{Li}(\alpha, n){}^{10}\text{B}$.

5.103. Нейтроны с кинетической энергией $T = 10$ МэВ возбуждают реакцию ${}^{12}\text{C}(n, \alpha){}^9\text{B}$, порог которой $E_{\text{пор}} = 6,17$ МэВ. Найти кинетическую энергию а-частиц вылетающих под прямым углом к направлению падающих нейтронов.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Квантовые явления в оптике

1.25 $T = 648\text{K}$.

1.26 $T = 1\text{kK}$.

1.27 $W = 565 \text{ кДж}$

1.28 $\Phi_e = 5,67 \cdot 10^{14} \text{ Вт}$.

1.29 $\Delta M_e / M_e = 0,04$.

1.30 в 1,19 раза.

1.31 $M_e = 64,7 \text{ МВт} / \text{м}^2$; $T = 5,8 \text{ кК}$.

1.32 $T = 396\text{K}$.

1.33 $M_e = a_T \cdot \sigma \cdot T^4 = 5,88 \text{ кВт} / \text{м}^2$; $W = M_e \cdot S \cdot t = 1,76 \text{ кДж}$

1.34 $a_T = 0,953$.

1.35 $\eta = 1 - \sigma \cdot T^4 \cdot S / P = 0,71$.

1.36 $a_T = M_e / \sigma \cdot T^4 = 0,26$

1.37 $T = \left(\frac{P}{4\pi \cdot a_T \cdot R^2 \cdot \sigma} \right)^{1/4} = 866\text{K}$.

1.38 $\lambda_{\max} = 10,6 \text{ мкм}$.

1.39 $\lambda_{\max} = 547 \text{ нм}$

1.40 3,8 кК; 7,6 кК.

1.41 4,98 кК.

1.42 Увеличились в 81 и в 243 раза.

1.43 $T_1 = 3,62 \text{ кК}$, $T = 7,24 \text{ кК}$.

1.44 $\lambda_{\max} = 1,45 \text{ мкм}$

1.45 1) 30 $\text{МВт} / \text{м}^2 \cdot \text{мм}$; 2) 600 $\text{Вт} / \text{м}^2$;

1.46 Уменьшилась на $\Delta T = T / (1 + b/T \cdot \Delta \lambda) = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$.

1.47 $\Phi_e = 4\pi R^2 \sigma \cdot \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 = 2,1 \text{ МВт}$. $W = \Phi_e \cdot \Delta t = 2,1 \text{ МДж}$

1.48 4,1 млн. т/с. Около 10^{11} лет.

1.49 $T = T_0 \left(1 - \frac{6 \cdot \sigma \cdot T_0^3 \cdot \tau}{C \cdot \rho \cdot d} \right) = 153 \text{ K}$.

1.50 $N_1 = 6,2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$; $N_2 = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$; $N_3 = 1,1 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$.

$N_4 = 5,9 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$; $N_5 = 4,6 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$; $N_6 = 5,1 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$.

1.51 а) 2,07 эВ; $1,1 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; $3,68 \cdot 10^{-36} \text{ кг}$;

- б) $12,4 \text{ кэВ}; 6,62 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}; 2,21 \cdot 10^{-32} \text{ кг};$
 в) $1,24 \text{ МэВ}; 6,62 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}; 2,21 \cdot 10^{-30} \text{ кг}.$
- 1.52 а) $960 \text{ К};$ б) $1,6 \cdot 10^4 \text{ К}$ в) $1,6 \cdot 10^{10} \text{ К}.$
- 1.53 а) $5 \cdot 10^{19};$ б) $10^{13}.$
- 1.54 $N = \frac{\lambda}{h} \cdot \sqrt{\frac{8k \cdot T \cdot m}{\pi}} = 7,6 \cdot 10^3,$ м - масса атома гелия,
 k – постоянная Больцмана.
- 1.55 $T = \frac{\pi \cdot h^2}{8m \cdot k \cdot \lambda^2} = 745 \text{ К},$ м - масса нейтрона.
- 1.56 $v = 4,53 \cdot 10^{17} \text{ м/с}^{-1}.$
- 1.57 $E = \frac{h \cdot c}{b \cdot \sin \varphi} = 2,36 \cdot 10^{-3} \text{ эВ},$ $p = 1,26 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$
- 1.58 $E = \frac{h \cdot c}{d(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} = 2,07 \text{ эВ}.$
- 1.59 $F = 4 \text{ НН}, N_\phi = 10^{19}$ фотонов.
- 1.60 $n_\phi = \frac{p \cdot \lambda}{(1 + \rho) \cdot h \cdot c} = 2,52 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3},$ $n_{1\phi} = n \cdot c = 7,56 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$
- 1.61 $P = 4,6 \text{ мкПа}.$
- 1.62 $J = 1,5 \text{ кВт/м}^2.$
- 1.63 $F = 10^{-10} \text{ Н.}$
- 1.64 $P = 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$
- 1.65 $F = 11,7 \text{ мкН.}$
- 1.66 $N = 9 \cdot 10^{15}.$
- 1.67 $N_1 = 3,77 \cdot 10^{18}.$
- 1.68 $n = 10^{12} \text{ м}^{-3}.$
- 1.69 $P = 11 \text{ мкПа}.$
- 1.70 $P_1 = 0,7 \text{ мкПа}, P_2 = 0,35 \text{ мкПа}.$
- 1.71 $\lambda = 197 \text{ нм}; \lambda_0 = 175 \text{ нм}.$
- 1.72 $p_{\max} = 3,45 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$
- 1.73 $\lambda_{0 \text{ Li}} = 517 \text{ нм}, \lambda_{0 \text{ Na}} = 540 \text{ нм}, \lambda_{0 \text{ K}} = 620 \text{ нм}, \lambda_{0 \text{ Cs}} = 660 \text{ нм}.$
- 1.74 $\varepsilon_{\min} = 4,5 \text{ эВ.}$
- 1.75 $A_{\text{вых}} = 4,5 \text{ эВ}; v_{\max} = 9,1 \cdot 10^5 \text{ м/с}; T_{\max} = 3,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,38 \text{ эВ}.$
- 1.76 а) для Cs: $v_{\max} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ м/с};$ для Pt: $v_{\max} = 7,05 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$ б) для Cs: $v_{\max} = 6,05 \cdot 10^5 \text{ м/с;}$ из Pt фотоэлектроны не вырываются.
- 1.77 $\varepsilon_{\min} = 2,15 \text{ эВ.}$
- 1.78 $V = 1,73 \text{ В.}$

1.79 $x = 3,76 \cdot 10^{-4} \text{ м}$

1.80 $\lambda = 24,2 \text{ пм.}$

1.81 $\varepsilon'_\phi = 0,26 \text{ МэВ}; \quad p'_\phi = 9,3 \cdot 10^{-12} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$

1.82 $\varepsilon_e = 0,1 \text{ МэВ.}$

1.83 $\lambda_1 = 57 \text{ пм.}$

1.84 $\theta = 120^\circ \text{ или } \theta = 240^\circ.$

1.85 $\varepsilon'_\phi = 0,224 \text{ МэВ}; \quad T = 0,176 \text{ МэВ.}$

1.86 $p'_e = 2,8 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$

1.87 $0,5$

1.88 $\theta = 60^\circ 40'.$

1.89 $\varepsilon_\phi = 0,37 \text{ МэВ.}$

1.90 $70\%.$

1.91 $\Delta\lambda_e = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 4,8 \text{ пм} \quad \text{и} \quad \Delta\lambda_p = 2,6 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$

1.92 $\theta = 90^\circ, \quad T'_e = 24,0 \text{ кэВ.}$

1.93 $\varepsilon'_e = \frac{h \cdot c}{\lambda} \frac{2 \cdot \lambda_c \cdot \sin^2 \theta/2}{\lambda + 2\lambda_c \cdot \sin^2 \theta/2}, \quad \lambda_c = \frac{h}{m_e \cdot c}, \quad \varepsilon'_e = 118,184 \text{ и } 255 \text{ кэВ.}$

1.94 $\theta = 50^\circ.$

1.95 $p'_e = 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$

1.96 $\Delta\lambda = 1,35 \cdot 10^{-12} \text{ м}, \quad \theta = 63^\circ 40'.$

1.97 $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}\theta/2}{1 + h/m_e \cdot c \cdot \lambda}.$

1.98 $\theta + \varphi = 109^\circ 30'.$

1.99 $\lambda = \frac{h}{2m_e \cdot c} = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$

2. Основы квантовой механики

2.17. 39 и 0,91 пм; 0,15 кэВ и 0,082 эВ.

2.18. $\lambda = \pi \cdot \hbar \sqrt{2(\eta^2 - 1) / m \cdot \Delta E} = 0,15 \text{ нм}$

2.19. $\lambda = 2\pi \cdot \hbar / \sqrt{2m \cdot k \cdot T} = 132 \text{ пм}, \quad T - \text{температура}; m - \text{масса молекулы.}$

2.20. $T_p = \frac{e^2 (BR)^2}{2m_p} = 30 \text{ кэВ}, \quad T - \text{кинетическая энергия.}$

2.21. $\Delta E = 2\pi^2 \hbar^2 / m \cdot \lambda^2 - p^2 / 2m = 0,38 \text{ кэВ.}$

2.22. а) $\lambda = \frac{2\pi \cdot \hbar}{\sqrt{2m \cdot T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + T/2m \cdot c^2}}$; б) $T \leq 20 \text{ кэВ} - \text{для электрона}$
 $37 \text{ МэВ} - \text{для протона}$

2.23. $T = (\sqrt{2} - 1) \cdot m \cdot c^2 = 0,21 \text{ МэВ};$

$$2.24. T > m \cdot c^2 \left(\sqrt{1 + (\lambda_C/L)^2} - 1 \right), \quad T_e > m_e \cdot c^2 \cdot \lambda_C / L = 1,2 \text{ ГэВ}$$

$T_p > 0,6 \text{ ГэВ}$ где λ_C - комптоновская длина волны частицы.

$$2.25. \lambda = \lambda_K / \sqrt{1 + m_e \cdot c \cdot \lambda_K / \pi \cdot \hbar} = 3,3 \text{ пм}, \quad \lambda_K - \text{коротковолновая граница спектра.}$$

$$2.26. \varphi(\lambda) \sim \lambda^{-4} \exp\left(-\frac{a}{\lambda^2}\right), \quad \text{где } a = \frac{\hbar^2}{2mkT};$$

$$\lambda_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\pi \cdot \hbar}{\sqrt{m \cdot k \cdot T}} = 89 \text{ пм}.$$

$$2.27. v = 4\pi \cdot \hbar \cdot L / b \cdot m \cdot \Delta x = 1,0 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$2.28. T = 2(\pi \cdot \hbar \cdot L / d \cdot \Delta x)^2 / m = 24 \text{ эВ}.$$

$$2.29. U_0 = \pi^2 \cdot \hbar^2 / 2 \cdot m \cdot L \cdot d^2 (\sqrt{\eta} - 1)^2 \sin^2 \theta = 0,15 \text{ кВ}.$$

$$2.30. d = \pi \cdot \hbar \cdot \kappa / \sqrt{2 \cdot m \cdot T} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0,21 \text{ нм}, \quad \kappa = 4$$

$$2.31. a) \psi(x, t) = A \cdot e^{2\pi i \left(\frac{kx}{2\pi} - vt \right)} = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (px - Et)}$$

$$b) \psi(\vec{r}, t) = A \cdot e^{2\pi i \left(\frac{k\vec{r}}{2\pi} - vt \right)} = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p}\vec{r} - Et)}.$$

$$2.32. \lambda = 4 \cdot 10^{-14} \text{ м}.$$

$$2.33. 7,27 \cdot 10^6 \text{ и } 3,96 \cdot 10^3 \text{ м/с}, \quad 150 \text{ и } 0,082 \text{ эВ}.$$

$$2.34. \lambda_e = 1,2 \text{ пм}; \quad \lambda_p = 0,66 \text{ фм}$$

$$2.35. \Delta\lambda \approx \frac{\hbar}{\sqrt{2m_H \cdot E}} \cdot \frac{m_{e0}}{2m_H} \approx 7,8 \cdot 10^{-15} \text{ м}, \quad m_H - \text{масса атома водорода}.$$

$$2.36. \lambda = \frac{\hbar}{\mu_0 \cdot e \cdot H \cdot R} = 0,18 \text{ нм}.$$

$$2.37. T > \frac{\hbar^2}{2m \cdot d^2} \approx (0,06 \div 3,3) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}.$$

$$2.38. \lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2meU(1 + eU/2mc^2)}}$$

$$2.39. T \approx 4m \cdot c^2 \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}; \quad a) 20,4 \text{ кэВ}; \quad b) 37,5 \text{ МэВ}; \quad v) 150 \text{ МэВ}.$$

$$2.40. \lambda \approx \frac{\hbar \cdot c}{T} = 2,07 \cdot 10^{-16} \text{ м}. \quad T - \text{кинетическая энергия электрона}.$$

$$2.41. U = \frac{\hbar^2}{8 \cdot m_e \cdot e \cdot d^2 \cdot \sin^2 v} n^2; \quad \text{для } n = 1, 2, 3 \quad U = 26,1; 104,5; 235 \text{ В}.$$

$$2.42. \varphi = \lambda / \pi \cdot b \approx 2^\circ.$$

$$2.43. \Delta v_e = 2 \cdot 10^2 \text{ м/с}; \quad \Delta v_p = 0,1 \text{ м/с}.$$

$$2.44. \Delta v = 1 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad v_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$2.45. T_{\min} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e L^2}, \quad T \approx 4 \text{ эВ}.$$

$$2.46. \Delta v / v \approx 2 \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot L^2 \cdot T}} = 1,2 \cdot 10^{-4}.$$

$$2.47. T \approx 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{\hbar^2}{m \cdot L^2}.$$

$$2.48. \Delta x \approx c \cdot \tau = 3 \text{ м}, \quad \Delta \lambda / \lambda \approx \lambda / 2\pi \cdot c \cdot \tau \approx 3 \cdot 10^{-8}.$$

$$2.49. E_{\text{cb}} = \frac{m \cdot e^4}{2(4\pi \cdot \epsilon_0)^2 \hbar^2} = 13,6 \text{ эВ}; \quad r = \frac{4\pi \epsilon_0 \cdot \hbar^2}{m \cdot e^2} = 53 \text{ нм}.$$

$$2.50. l \approx \frac{\hbar}{2\sqrt{2mE_{\min}}} = 0,7 \text{ фм}.$$

$$2.51. 1) \frac{\Delta p}{p} = 1,2 \cdot 10^{-2}, \quad 2) \frac{\Delta p}{p} = 1,2. \text{ Волновые свойства электронов}$$

существенно проявляются во втором случае.

$$2.52. 1) \Delta E = 0, \quad 2) \Delta E \approx 0,03 \text{ мкэВ}.$$

$$2.53. \text{а)} A = \sqrt{2/a\sqrt{\pi}}; \quad \text{б)} \langle x \rangle = 0; \quad \text{в)} \langle x^2 \rangle = a^2/8, \quad \text{г)} \langle p_x \rangle = \hbar k.$$

$$2.54. w(x) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{4x^2}{a^2}\right); \quad \Delta x = a.$$

$$2.55. E_n = \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{2m \cdot L^2} \cdot n^2, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{L}.$$

$$2.56. L = 2,5 \text{ нм}.$$

$$2.57. T = 2,9 \cdot 10^5 \text{ К}.$$

$$2.58. dN = \frac{L}{\pi \cdot \hbar} \cdot \sqrt{\frac{m}{2E}} dE.$$

$$2.59. \Delta E_n / E_n = 78\%, 21\%, 2\%.$$

$$2.60. L = \pi \cdot \hbar \sqrt{(2n+1)/(3m \cdot \kappa \cdot T)}.$$

$$2.61. x_1 = \frac{1}{3}L; \quad x_2 = \frac{2}{3}L; \quad |\psi(x)|^2 = \frac{3}{2L}.$$

$$2.62. P = 0,475.$$

$$2.63. P = 0,091.$$

$$2.64. \text{а)} \psi_{n_1 n_2}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{a \cdot b}} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n_1 \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n_2 \cdot y}{b},$$

$$\text{б)} E_{n_1 n_2} = \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right);$$

$$\text{Б) } \left\{ \left(2k_1 - 1 \right) \frac{a}{2n_1} : \left(2k_2 - 1 \right) \frac{b}{2n_2} \right\} \quad n_1 = 2; \quad k_1 = 1, 2. \\ n_2 = 3; \quad k_2 = 1, 2, 3.$$

2.65. $P = 0,67$.

$$2.66. \text{ а) } A = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot a}}; \quad \text{б) } \langle r \rangle = \frac{a}{2}.$$

$$2.67. \text{ а) } \frac{1}{2}r_0 \quad \text{б) } \frac{1}{3}r_0^2 \left(1 - \frac{3}{2\pi^2 \cdot n^2} \right); \quad \text{в) } \frac{1}{12}r_0^2 \left(1 - \frac{6}{\pi^2 \cdot n^2} \right).$$

$$2.68. E = -\frac{\kappa^2 \cdot m \cdot e^4}{8\hbar^2}; \quad \kappa = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0}.$$

$$2.69. \text{ а) } \frac{4}{r_1^3}r^2 \exp \left(-\frac{2r}{r_1} \right); \quad \text{б) } 0,323; \quad \text{в) } 0,238.$$

$$2.70. r_{\text{веп}} = r_1; \quad \langle r \rangle = \frac{3}{2}r_1; \quad \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}r_1.$$

$$2.71. \text{ а) } \sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_1\sqrt{3}, \quad \text{б) } \langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{1}{r_1}; \quad \langle U \rangle = -\frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1},$$

$$\text{в) } \langle \frac{1}{r^2} \rangle = \frac{2}{r_1^2}; \quad \langle F \rangle = \frac{2e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1^2}, \quad \text{г) } P_1 = 5/L^2 = 0,677,$$

$$\text{д) } P_2 = (r_{\text{я}}/r_1)^3 = 6,5 \cdot 10^{-15}.$$

2.72. $a = -\beta = 1/2 \cdot r_1$, где r_1 - радиус первой боровской орбиты

$$r_1 = 4\pi \cdot \epsilon_0 \hbar^2 / m \cdot e^2 = 52,9 \text{ ПМ}, \quad E = -\frac{1}{4}E_1,$$

$$E_1 = \frac{m \cdot e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = 13,6 \text{ эВ}, \quad n = 2.$$

$$2.73. A = 1/\sqrt{8\pi \cdot r_1^3}.$$

$$2.74. E = -\frac{1}{9}E_1, \quad n = 3, \quad E_1 = \frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 h^2}.$$

$$2.75. w(x) = \sqrt{\frac{m \cdot \omega}{\pi \cdot \hbar}} \exp \left(-\frac{m \cdot \omega}{\hbar} x^2 \right).$$

$$2.76. \text{ а) } 0; \quad \text{б) } 0; \quad \text{в) } \frac{1}{2}x_0^2, \quad \text{где } x_0 = \sqrt{\hbar/(m \cdot \omega)}.$$

$$2.77. \text{ а) } \frac{\hbar \cdot \omega}{4}; \quad \text{б) } \frac{\hbar \cdot \omega}{4}.$$

$$2.78. R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}; \quad D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

$$2.79. R = 0,016; \quad n = 0,77$$

2.80. $R = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2$.

2.81. $n_1 = 0,172$; $n_2 = 5,83$.

2.82. $R = \frac{1}{16} \left(\frac{U}{E} \right)^2$

2.83. 2%.

2.84. 1,03.

2.85. $D = 4n/(1+n)^2$.

2.86. $n_1 = 0,384$, $n_2 = 2,61$.

2.87. D=0,2.

2.88. а) 1; б) $|\psi|^2 = \frac{4\kappa_1^2}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \exp(-2\kappa_2 x)$.

2.89. $n = \sqrt{1 + \frac{U_0}{E}} = 1,25$.

2.90. $x_{\text{эффи.}} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}}$; $x_{\text{эффи.}} = 0,1 \text{ нм}$.

2.91 а) 0,122; б) в 42,9 раза.

2.92. а) $D \approx \exp \left[-\frac{4L\sqrt{2m}}{3\hbar \cdot U_0} (U_0 - E)^{3/2} \right]$;

б) $D \approx \exp \left[-\frac{\pi \cdot L}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{U_0}} (U_0 - E) \right]$.

3. Основы квантовой физики атомов и молекул.

3.19 Серии Бальмера соответствуют $n = 2$ и $n' = 3, 4, 5, \dots$

а) $\lambda_1 = 656 \text{ нм}$; $\lambda_\infty = 365 \text{ нм}$;

б) четыре: $\lambda_1 = 656 \text{ нм}$, $\lambda_2 = 486 \text{ нм}$, $\lambda_3 = 434 \text{ нм}$, $\lambda_4 = 410 \text{ нм}$.

3.20 $E = 0,97 \text{ эВ}$; $\lambda = 1,28 \text{ мкм}$.

3.21 а) $U_1 = 40,8 \text{ В}$; б) $U_1 = 91,8 \text{ В}$.

3.22 а) $\lambda_1 = 30,4 \text{ нм}$; б) $\lambda = 13,5 \text{ нм}$.

3.23 $\lambda = 254 \text{ нм}$.

3.24 $U = 775 \text{ кВ}$.

3.25 $U_{\text{He}} = 54,4 \text{ В}$; $U_{\text{Li}} = 122 \text{ В}$.

3.26 $n = 3$.

3.27 $n = 3$; $\lambda_1 = 102,6 \text{ нм}$; $\lambda_2 = 121,5 \text{ нм}$ и $\lambda_3 = 656 \text{ нм}$.

3.28 $N = \frac{n(n-1)}{2} = 45 \text{ линий}$.

3.29 Три линии, принадлежащие серии Лаймана.

- 3.30 $n = 4$.
- 3.31 $E = -0,544 \text{ эВ} ; n = 5$.
- 3.32 $U_{12} = 10,2 \text{ В} ; E_1 = 13,6 \text{ эВ} ; \lambda_{12} = 121,5 \text{ нм} ; \lambda_{1\infty} = 91,2 \text{ нм} ;$
 $v_{12} = 2,47 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-1} ; v_{1\infty} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-1} ; \bar{v}_{12} = 8,23 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1} ;$
 $\bar{v}_{1\infty} = 10,97 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$.
- 3.33 $\lambda = 53 \text{ нм}$.
- 3.34 $397,0 \text{ нм} ; 7,55 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-1}$.
- 3.35 $R = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.
- 3.36 $E_i = \frac{4}{3} h \cdot c \frac{1}{\lambda_1} = 13,6 \text{ эВ}$.
- 3.37 $2743; 2916, 686 \text{ и } 439 \text{ нм}^{-1}$; соответственно $30,4, 292, 1055 \text{ и } 2590 \text{ нм}$.
- 3.38 Первые две – серии Бальмера ($7 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 2$), последняя – серии Пашена ($10 \rightarrow 3$).
- 3.39 $\hbar = \left(\frac{15 \cdot \Delta\lambda}{5632} \cdot \frac{m \cdot e^4}{\pi^3 \cdot \epsilon_0^2 \cdot c} \right)^{1/3} \approx 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.
- 3.40 $n = 2 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot d \cdot \sin \varphi}{R \cdot d \cdot \sin \varphi - 4k}} = 4$.
- 3.41 Около 1950 штрихов.
- 3.42 $\lambda = 52,5 \text{ нм}$.
- 3.43 $v = 7 \cdot 10^5 \text{ м/с}$. относительно ядра.
- 3.44 $\Delta\lambda = \frac{h}{2M \cdot c} \left(1 - \frac{\Delta v}{v} \right) \approx \frac{h}{2M \cdot c} = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ м}$ при $\Delta v/v \ll 1$,
 $\Delta v = v - v'$, M - масса атома. Скорость отдачи атома
 $v = 3h \cdot R / 4M = 3,26 \text{ м/с}$.
- 3.45 $N_3 / N_2 = 1,5 \cdot 10^{-3}$.
- 3.46 $n_2 \rightarrow n_1$, где $n_1 = Z$, $n_2 = 2Z, 3Z, 4Z, \dots$; (Z - зарядовый номер ядра водородоподобного иона).
- 3.47 Да.
- 3.48 $v = 3,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.
- 3.49 $a_1 = \frac{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \hbar^2}{\mu \cdot e^2} = 1,05 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, μ - приведенная масса частиц.
 $E_i = 6,8 \text{ эВ}$.
- 3.50 $a_1 = 2,85 \cdot 10^{-13} \text{ м} ; \lambda_{12} = 0,654 \text{ нм}$.
- 3.51 $R = 2,07 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1} ; U_{12} = 1,92 \text{ кВ} ; U_i = 2,56 \text{ кВ}$.
- 3.52 $\Delta L = \mp \sqrt{2} \hbar, \pm \hbar(\sqrt{2} - \sqrt{6}), \hbar(\sqrt{6} - \sqrt{12})$.
- 3.53 $L = \hbar \sqrt{12} = 3,64 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} ; L_{z\max} = 3\hbar = 3,15 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

3.54 $E_{2p} = -3,38 \text{ эВ}; L = \hbar\sqrt{2} = 1,48 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; \mu_p = 1,3 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{Тл} .$

3.55 $0,91 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; 2,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

3.56 $61,8^\circ.$

3.57 $65,9^\circ, 144,7^\circ.$

3.58 $\varphi = 28,12^\circ.$

3.59 $\Delta x = \mu_B \frac{\partial B}{\partial z} L^2 / mv^2 = 4,4 \text{ мм}.$

3.60 $l = 4.$

3.61 $\Delta L = 1,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; 2p.$

3.62 $35,26^\circ.$

3.63 $10,5^\circ.$

3.64 кратность вырождения 32; $2,04 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; 0,91 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

3.65 $\pm 0,46 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}.$

3.66 $\frac{1}{\sqrt{3}} \mu_B; \frac{2\sqrt{5}}{3} \mu_B.$

3.67 $L_z = 0, \pm 1,05 \cdot 10^{-34}, \pm 2,1 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

3.68 Во всех nS-состояниях $L = 0,$ во всех np-состояниях $L = \hbar\sqrt{2} = 1,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

3.69 1) один электрон; 2) два электрона; 3) $2(2l + 1)$ электронов;
4) $2n^2$ электронов.

3.70 Всего 32 состояния.

n	n = 4			
l	0	1	2	3
m	0	-1,0,+1	-2,-1,0,1,2	-3,-2,-1,0,1,2,3
m _s	$\pm 1/2$	$\pm 1/2$	$\pm 1/2$	$\pm 1/2$

3.71 $\theta = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ.$

3.72 а) 9, б) 2, в) 3, г) 5.

3.73 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3; N = 15.$

3.74 $N = 46$

3.75 а) 7, б) 3.

3.76 $3 \cdot 10^{-17}.$

3.77 $1,14 \cdot 10^{-4}.$

3.78 $10^{-30}.$

3.79 $2,3 \cdot 10^{-3}.$

3.80 5,75 кэВ.

3.81 Li, Na.

3.82 69,6 кэВ.

- 3.83 2,45 кэВ.
- 3.84 $\mu = \sqrt{3} \cdot \mu_B$.
- 3.85 В Р - состоянии: 2/3 и 4/3, в D – состоянии 4/5 и 6/5.
- 3.86 0; $1,31 \cdot 10^{-23}$ Дж / Тл; $2,27 \cdot 10^{-23}$ Дж / Тл.
- 3.87 $I = \frac{\hbar}{\Delta\omega} = 1,92 \cdot 10^{-47}$ кг · м², $d = 1,12 \cdot 10^{-10}$ м.
- 3.88 2 и 3
- 3.89 $\omega_{\text{вр}} = \frac{\hbar}{I} \sqrt{12} = 1,9 \cdot 10^{13}$ с⁻¹ (I - момент инерции молекулы).
- 3.90 $L = \sqrt{\frac{m \cdot d^2 \cdot E}{2}} = 3,5\hbar$, где m - масса молекулы.
- 3.91 $\Delta\omega = 7,24 \cdot 10^{11}$ с⁻¹.
- 3.92 $\Delta E = 1,48$ мэВ.
- 3.93 T = 3,3К.
- 3.94 $\Delta L = -1,035\hbar$.
- 3.95 $I = \frac{\hbar \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{2\pi \cdot c(\lambda_2 - \lambda_1)} = 2,6 \cdot 10^{-47}$ кг · м².
- 3.96 J_m = 8.
- 3.97 T = 392К.
- 3.98 $\Delta\omega = \frac{4k \cdot T}{81\hbar} = 24,9 \cdot 10^{11}$ с⁻¹.
- 3.99 T = 347К.
- 3.100 13 уровней.
- 3.101 N ≈ 30 линий.
- 3.102 $\frac{E_v}{E_r} = 36$.
- 3.103 $\frac{E_v}{E_r} = 1,7 \cdot 10^2$.
- 3.104 $\frac{N_{J=1}}{N_{J=0}} = 1,67$.
- 3.105 $\frac{N_{\text{кол}}}{N_{\text{вращ}}} = 3,1 \cdot 10^{-4}$.
- 3.106 A = $0,82 \cdot 10^{-11}$ м; k = $1,89 \cdot 10^3$ Н / м.
- 3.107 d = $1,12 \cdot 10^{-10}$ м
- 3.108 T = $\frac{\hbar \cdot \omega}{k \cdot \ln 3} = 740$ К.
- 3.109 T = 630 K.

4. Основы физики твердого тела

Элементы квантовой статистики.

4.30. $E_{\max} = 5,49 \text{ эВ}; v_{\max} = 1,39 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

4.31. $E_F = 11,55 \text{ эВ}; v_{\max} = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

4.32. $n_1/n_2 = 1,8.$

4.33. $N_1/N_2 = 1,74.$

4.34. Число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия, 0,995.

4.35. $n = 1,66 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$

4.36. $E_{\max} = 4,68 \text{ эВ}; T_F = 5,43 \cdot 10^4 \text{ К.}$

4.37. $T = 2,51 \cdot 10^4 \text{ К.}$

4.38. $f(E, T) = 0,6.$

4.39. Уменьшится в $\sim 1,08$ раза.

4.40. Уменьшится в $\sim 11,63$ раза.

4.41. $T = 1491 \text{ К.}$

4.42. $\Delta E_1 = 1,39 \text{ кТ}, \Delta E_2 = -1,39 \text{ кТ.}$

4.43. При $T_1=300 \text{ К}; f_1(E, T_1) = 0,128; f_2(E, T_1) = 0,87;$

при $T_2=60 \text{ К}; f_1(E, T_2) = 6,8 \cdot 10^{-5}; f_2(E, T_2) = 1.$

$$\frac{f(E, T_1)}{f(E, T_2)} = 1,07.$$

4.44.

4.45. $\Delta E_1 = 2,2 \text{ кТ}; \Delta E_2 = -2,2 \text{ кТ.}$

4.46. При $\Delta E_1 = -0,05 \text{ эВ}$ $\frac{f_1(E, T_1)}{f_2(E, T_2)} = 0,881,$

при $\Delta E_1 = +0,05 \text{ эВ}$ $\frac{f_3(E, T_1)}{f_4(E, T_2)} = 1,29 \cdot 10^4.$

4.47. $T = 572 \text{ К}, 2)$ При любой температуре.

4.48. $\langle E \rangle = 4,8 \text{ эВ.}$

4.49. $E_{\max} = 2,029 \text{ эВ}; \langle E \rangle = 1,217 \text{ эВ.}$

4.50. $E_{\max} = 7 \text{ эВ.}$

4.51. $T = 394 \text{ К.}$

4.52. $E = 1,32 \text{ кДж.}$

4.53. Не зависит. $\langle E \rangle = 3 \text{ эВ.}$

4.54. $T = 3,3 \cdot 10^4 \text{ К.}$

$$4.55. g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E.$$

4.56. $N = 3 \cdot 10^{23}$ электронов.

$$4.57. \eta = \frac{\Delta N}{N_{\max}} = (1 - 0,5^{3/2}) = 0,65.$$

4.58. $\langle \Delta E_i \rangle = 2 \cdot 10^{-23} \text{ эВ}, \langle \Delta E_i \rangle$ уменьшается в η раз.

$$4.59. \Delta E_i = \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi V(2m)^{3/2}E_i^{1/2}}; \text{ a) } 1,5 \cdot 10^{-22} \text{ эВ, б) } 0,85 \cdot 10^{-22} \text{ эВ.}$$

$$4.60. \eta = \frac{\Delta N_i}{\Delta N_{\max}} = (1 - 0,6^{3/2}) = 0,54.$$

$$4.61. E \geq E_F, \quad E \geq 0,63 E_F.$$

$$4.62. E = E_F (1 - 0,54)^{2/3} = 2,8 \text{ эВ.}$$

$$4.63. E = E_F (1 - 0,5)^{2/3} = 3,44 \text{ эВ.}$$

$$4.64. \Delta N_1 / \Delta N_2 = 0,65.$$

$$4.65. \Delta N / N = [1 - (1 - 0,04)^{3/2}] = 0,06.$$

$$4.66. \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{1 - (1 - 0,02)^{2/3}}{(0,5)^{3/2}} = 0,086.$$

$$4.67. \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{[1 - (1 - 0,04)^{3/2}]}{(0,04)^{3/2}} = 7,424.$$

$$4.68. \frac{\Delta n_1}{n} = 1 - (1 - \eta)^{3/2} = 0,03.$$

$$4.69. \frac{\Delta n_1}{n} = 1 - (0,6)^{3/2} = 0,54; \quad \frac{\Delta n_1}{n} = 54\%.$$

$$4.70. T = \frac{2E_F}{5k} = 25434 \text{ К.}$$

$$4.71. \Delta E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mV(3\pi^2n)^{1/3}} = 4 \cdot 10^{-23} \text{ эВ.}$$

$$4.72. \langle v \rangle = 1,18 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$4.73. \langle v \rangle = 1,05 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$4.74. \langle v \rangle = 1,676 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$4.75. \langle v \rangle = 1,52 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$4.76. \langle p \rangle = 0,04 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

$$4.77. \langle v_{KB} \rangle = 1,14 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$4.78. \langle v_{KB} \rangle = 9,9 \cdot 10^5 \text{ м/с, } v_{\max} = 1,27 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$4.79. \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{3}{2v_{\max}}; \quad \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle / \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = 1,125.$$

$$4.80. dn(v) = \frac{m^3}{\pi^2 h^3} v^2 dv; \quad \Delta n = \frac{m^3 v_{\max}^3}{3\pi^2 h^3} [1 - (0,5)^3] = 4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

$$4.81. dn(v) = \frac{m^3}{\pi^2 h^3} v^2 dv; \quad \frac{\Delta n_1}{n} = 0,03.$$

$$4.82. \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = 7.$$

$$4.83. \langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\frac{6E_F}{5m}} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с,} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{9E_F}{8m}} = 1,05 \cdot 10^6 \text{ м/с,}$$

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \sqrt{\frac{9m}{8E_F}} = 1,08 \cdot 10^{-6} \text{ см/с.}$$

4.84. $\Delta n = 1,423 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$.

4.85. $\Delta N/N = 0,56$.

4.86. $v_{\text{KB}} = \sqrt{0,6} \cdot v_{\text{max}}$; $\Delta N = \frac{m^3 V}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{v_{\text{KB}}^3}{3}$, $\Delta N = 3,1 \cdot 10^{22}$ электронов.

4.87. $\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = 7$.

Электрические свойства твердых тел.

4.88. $\sigma = 2,26 \text{ См/м.}$

4.89. $\rho \cong 208 \text{ Ом}\cdot\text{м.}$

4.90. $n = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

4.91. $\mu_p = 0,52 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ при $n = 4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

4.92. $n = 2,24 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

4.93. $n = 1,36 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$; $\mu_n = 0,306 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.94. $\mu_n = 0,37 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.95. $\mu_p = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $n_p = 1,7 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$.

4.96. $\sigma = 6,98 \cdot 10^2 \text{ См/м.}$

4.97. $n_p = \frac{N_d}{2} \left\{ \left[1 + 4 \left(\frac{n_i}{N_d} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}; n_p = 2,82 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

4.98. $\langle \lambda \rangle = 71 \text{ нм.}$

4.99. $n_p = 1,47 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$; 2) $\frac{j_n}{j_{n+p}} = 0,74$.

4.100. $\mu_n + \mu_p = \frac{\eta - 1}{q_e \Delta n \eta I R} = 0,18 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.101. $\Delta \phi_X = 1,2 \text{ В.}$

4.102. $n_p = 3,69 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$; 2) $\mu_p = 0,85 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.103. $R_X = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-3}/\text{Кл}$; 2) Носители тока - отрицательные заряды;
3) $n = 3,125 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$; 4) $\mu_n = 0,079 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.104. 1) $n_e = \frac{BUa}{q_e / \rho \Delta \phi_X} = 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. 2) $\mu_e = \frac{q_e \Delta \phi_X}{BUa} = 0,05 \text{ м}^2 / (\text{В}\cdot\text{с})$.

4.105. $n = \frac{3\pi Bja}{8q_e \Delta \phi_X} = 4,2 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$.

4.106. $U = \frac{\Delta \phi_X \rho l}{R_X Ba} = 56,25 \text{ В.}$

4.107. $n_e = 1,1 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$; 2) $\mu_n = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.108. $R = 1330 \text{ Ом.}$

$$4.109. \rho_2 = \rho_1 \exp \left[\frac{E_F}{k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right] = 1,07 \cdot 10^{-5} \Omega \text{м} \cdot \text{м}.$$

$$4.110. \sigma_2/\sigma_1 = \exp(4,83) = 125,7.$$

$$4.111. \Delta E = \frac{2k \ln 10}{1/\tau_1 - 1/\tau_2} = 0,75 \text{эВ.}$$

$$4.112. n_1/n_2 = 1332; 2) n_2 = 6,03 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3} \text{ при } T_2 = 400 \text{ К.}$$

$$4.113. \Delta E = \left[\left(\frac{2kT_1T_2}{T_2 - T_1} \right) \ln \eta \right] = 0,33 \text{эВ.}$$

$$4.114. \frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\Delta E_3 \Delta T}{2kT_1 T_2} \right) = 3,315.$$

$$4.115. E_3 = \frac{2kT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{R_1}{R_2}.$$

$$4.116. T_2 = \frac{\Delta E_3 T_1}{\Delta E_3 - 2kT_1 \ln 2} = 308 \text{К.}$$

$$4.117. 1) \alpha = -\frac{E_3}{2kT^2}; \quad 2) \alpha_{Si} = -6,43 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}.$$

$$4.118. \alpha = -0,048 \text{ К}^{-1}.$$

$$4.119. E_3 = 0,14 \text{ эВ.}$$

$$4.120. 1) \lambda \leq \lambda_{min} = 1,66 \text{ мкм}, 2) \alpha = -\frac{\pi c \hbar}{k T^2 \lambda_{max}} = -0,05 \text{ К}^{-1}.$$

$$4.121. 1) \lambda_1 = 19,096 \text{ мкм}, 2) \lambda_1 = 0,2482 \text{ мкм.}$$

$$4.122. 1) \lambda_{max} = 6200 \text{ нм}, 2) \alpha = -8,33 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}.$$

$$4.123. 1) v = 1,57 \cdot 10^{15} \text{ Гц}, 2) \lambda = 191 \text{ нм}, 3) \alpha = -0,942 \text{ К}^{-1}.$$

$$4.124. v_{KP} = 2,6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-1}.$$

$$4.125. \alpha = -0,071 \text{ К}^{-1}.$$

$$4.126. R_0 = \frac{R}{1 - q_e \Delta n(\mu_n + \mu_p) / R} = 360 \Omega.$$

$$4.127. \Delta n_n \approx \Delta n_p \approx \frac{R_0 - R}{q_e (\mu_n - \mu_p) \cdot R_0 R \cdot I}$$

$$4.128. 1) \lambda_{KP} = 2,03 \cdot 10^{-6} \text{ м}, 2) \Delta E_3 = 0,6096 \text{ эВ.}$$

4.129. $E_1 = -1,03 \text{ эВ}, E_2 = -2,472 \text{ эВ}, E_3 = -4,12 \text{ эВ. Приняли энергию } E \text{ равной нулю при } n \rightarrow \infty, \text{ что соответствует внешнему фотоэффекту.}$

$$4.130. \tau = \frac{t}{\ln \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_0 - \rho_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}} = 9,865 \text{ мс.}$$

Тепловые свойства твердых тел. Фононы.

$$4.131. 1) \text{Для железа } c_{уд} = 445 \text{ Дж/(кг·К);}$$

$$2) \text{Для никеля } c_{уд} = 425 \text{ Дж/(кг·К).}$$

$$4.132. c_{уд, золота} = 17,53 \text{ Дж/(кг·К).}$$

4.133. $c_{yд2}/c_{yд1} = 62,6$.

4.134. $c_yд = 1,08 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$.

$$\frac{c_{yдAl}}{c_{yдAg}} = \sqrt[3]{3} \frac{M_{Ag}}{M_{Al}} \left(\frac{\rho_{Ag}}{\rho_{Al}} \right)^2 = 5,66.$$

4.135.

4.136. $M = 0,107 \text{ кг/моль}$, материал – серебро.

4.137. $\Delta T = 66,43 \text{ К}$.

4.138. Да. Так как при этих температурах $c \sim T^3$. $\theta = 409,46 \text{ К}$.

4.139. $\Delta U = 1,33 \text{ Дж}; U_0 = 1963 \text{ Дж}$.

$$4.140. 1) \omega_{max} = \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{v_{||}^{-3} + v_{\perp}^{-3}}} = 6,13 \cdot 10^{13} \text{ рад/с.} 2) \theta = 466,41 \text{ К.}$$

$$4.141. 1) \theta = 1415 \text{ К; } 2) p_{max} = \frac{2k\theta}{v} = 2k\theta \left(\frac{1}{v_{||}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right)^{1/3} = 5,85 \cdot 10^{-21} (\text{кг}\cdot\text{м})\cdot\text{с.}$$

4.142. 1) $E_{max} = 2,86 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; 2) $\theta = 207 \text{ К}$; 3) $\lambda = 6,95 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

4.143. 1) $v_{max} = 3422 \text{ м/с}$; 2) $\omega_{max} = 5,99 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$; 3) $p_{max} = 3,68 \cdot 10^{-24} (\text{кг}\cdot\text{м})/\text{с.}$

$$4.144. 1) v = \frac{k\theta}{\hbar} \sqrt[3]{\frac{M}{6\pi^2 \rho N_A}} = 2622 \text{ м/с.} 2) \lambda_{min} = 2d = 2\sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}} = 0,46 \text{ нм.}$$

$$4.145. 1) v = \frac{k\theta d}{\hbar \sqrt[3]{6\pi^2}} = 6,73 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

$$2) p_{max} = 0,82 \cdot 10^{-24} (\text{кг}\cdot\text{м/с}); 3) \lambda_{фотона} = 8,04 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$4.146. 1) E_{max} = 2,28 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.} 2) p_{max} = \frac{2\hbar \sqrt[3]{6\pi^2}}{d} = 2,04 \cdot 10^{-24} (\text{кг}\cdot\text{м})/\text{с.}$$

4.147. $U_0 = 18,35 \text{ Дж}$.

$$4.148. U_0 = \frac{9}{8} R \cdot \frac{\hbar \cdot v_{3B}}{2kd} = 3698 \text{ Дж}$$

4.149. 1) $E_{max} = 6,45 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; 2) $p_{max} = 3,57 \cdot 10^{-24} (\text{кг}\cdot\text{м})/\text{с.}$ 3) $\lambda_{фотона} = 3,08 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

$$4.150. \Delta U = \frac{m}{M} \pi^2 R \left[\frac{kT_1^2}{4E_F} + \frac{3\pi^2}{5\theta^3} (T_2^4 - T_1^4) \right] = 32,55 \text{ Дж, где } T_1 = T_0 = 2 \text{ К, } T_2 = 20 \text{ К.}$$

$$4.151. \Delta U = \frac{m}{M} c_v(T) \cdot \Delta T = 411,6 \text{ Дж, где } c_v(T) = 242,84 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К.}$$

$$4.152. \frac{\Delta U}{U_0} = \frac{8\pi^2}{9\theta} \left[\frac{k}{4E_F} T_0^2 + \frac{3\pi^2}{5\theta^3} (30^4 - T_0^4) \right] = 0,0124, \text{ где } T_0 = 3 \text{ К.}$$

4.153. $v_{max} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$.

4.154. 1) $\omega_{max} = 1,05 \cdot 10^{14} \text{ рад/с}$; 2) $v = 3,6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

4.155. $\theta = 164 \text{ К}$.

$$4.156. \Delta U = \frac{m}{M} c_v(T_1) \cdot \Delta T = 99,37 \text{ Дж.}$$

$$4.157. \Delta U = \frac{m}{M} c_v(T_1) \cdot \Delta T = 586,57 \text{Дж.}$$

$$4.158. \theta = \sqrt[3]{\frac{3m\pi^4 R(T_2^4 - T_1^4)}{5MQ}} = 331,27 \text{К.}$$

$$4.159. \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{5kT_2^2 \theta^3}{12E_F \pi^2 (T_4^4 - T_3^4)} = 1,26 \cdot 10^{-2}.$$

$$4.160. \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} = 3,22 \cdot 10^{-3}, \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} = \frac{\pi^4 (T_2^4 - T_1^4)}{5(T_4 - T_3)\theta^3}.$$

$$4.161. \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = 9,99 \cdot 10^{-2}; \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{\pi^4 (T_2^4 - T_1^4)}{5\Delta T \cdot \theta^3}.$$

$$4.162. \frac{\Delta U}{U_0} = \frac{24\pi^4 (T_2^4 - T_1^4)}{45\theta^4}; \frac{\Delta U}{U_0} = 5,2 \cdot 10^{-3}.$$

$$4.163. \theta_D = 443 \text{ К.}$$

$$4.164. 1) E_{\max} = 2,28 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}; 2) d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}} = 2,57 \cdot 10^{-10} \text{ м}; 3) \langle n \rangle = 1,37.$$

$$4.165. \langle l \rangle = 4 \text{ нм.}$$

$$4.166. \frac{\langle n_i \rangle}{\langle n_{\max} \rangle} = 2,28.$$

$$4.167. \frac{\langle n_1 \rangle}{\langle n_2 \rangle} = 1,16 \cdot 10^{-4}.$$

$$4.168. \langle I \rangle = \frac{xM}{\rho R v}; \quad \langle l \rangle = 1,39 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$4.169. c_v = \frac{xM}{\rho \langle I \rangle \langle v \rangle}; \quad c_v = 44,15 \text{ Дж/(моль·К).}$$

4.170. а) $T \gg \theta$ - высокие температуры, $U = 3N_A kT$; б) $T \ll \theta$ - низкие

$$\text{температуры, } U = \frac{4\pi^5 k^4 V}{5h^3 v^3} \cdot T^4.$$

5. Элементы физики атомного ядра Состав ядра. Энергия связи.

$$5.24. m = 7,014 \text{ а.е.м.} = 6533,88 \text{ МэВ.}$$

$$5.25. m_e / m_a = 2 \cdot 10^{-2} \text{%.}$$

$$5.26. {}_1H^3; {}_3Li^7; {}_7N^{15}.$$

$$5.27. 5,2 \text{ Фм}; \quad 7,8 \text{ Фм}; \quad 10,4 \text{ Фм}; \quad 13 \text{ Фм}; \quad 15,6 \text{ Фм.}$$

$$5.28. V_a / V_a = 2,49 \cdot 10^{-14}.$$

$$5.29. \langle \rho_y \rangle \cong 0,18 \cdot 10^{18} \text{ кг/м}^3.$$

$$5.30. F_1 = 0,59 \cdot 10^{-33} \text{ Н, } F_2 = 0,18 \cdot 10^3 \text{ Н, } F_2 / F_1 = 0,312 \cdot 10^{36}.$$

$$5.31. \Delta m = 4 \cdot 10^{-30} \text{ кг; } E_{CB} = 2,24 \text{ МэВ.}$$

- 5.32. $\Delta E_{уд.св} = 7,42 \text{ МэВ/нуклон.}$
- 5.33. $\sigma_1 / \sigma_2 = 3,36.$
- 5.34. $\Delta E_{уд.1} = 2,839 \text{ МэВ/нуклон, } \Delta E_{уд.2} = 2,584 \text{ МэВ/нуклон;}$
 $^1\text{H}^3$ более устойчиво.
- 5.35. $M_a = 3,0141 \text{ а.е.м.}$
- 5.36. $M_a = 5,0113 \text{ а.е.м.}$
- 5.37. $E_{min} = 39,27 \text{ МэВ.}$
- 5.38. $E_{min} = 10,55 \text{ МэВ.}$
- 5.39. $E_{min} = 15,45 \text{ МэВ.}$
- 5.40. $\Delta E_{уд.св.} = 5,376 \text{ МэВ/нуклон.}$
- 5.41. $E_{min} = 7,3 \text{ МэВ.}$
- 5.42. $E = 12,4 \text{ МэВ.}$
- 5.43 $E_{уд.} = 8,2 \text{ МэВ/нуклон.}$

Радиоактивность. Радиоактивный распад.

- 5.44. $\delta = 0,71.$
- 5.45. 2,88 сут.
- 5.46. $A(0) = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ Бк.}$
- 5.47. $\Delta t \cong 9,96 \text{ час.}$
- 5.48. $\Delta N/N = 10^{-4}.$
- 5.49. 10^6 атомов.
- 5.50. $T_{1/2} = 6 \text{ час.}$
- 5.51. $N_\alpha = 8, N_\beta = 6.$
- 5.52. $\Delta t = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln(\lambda_1 / \lambda_2).$
- 5.53. $t = 4104,9 \text{ года.}$
- 5.54. $N_3(t) = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right).$
- 5.55. $T_{1/2} = 5,3 \text{ дней.}$
- 5.56. $^{82}\text{Pb}^{206}.$
- 5.57. $v_\alpha = 3 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$
- 5.58. $Q = 1,862 \text{ МДж.}$
- 5.59. $E\gamma = 0,0155 \text{ МэВ.}$
- 5.60. $E_n = 930,9 \text{ МэВ; } E_{e+} = -7,6 \text{ МэВ.}$
- 5.61. $\tau = 86,5 \text{ мин.}$
- 5.62. $\eta = 1/9.$
- 5.63. $I = 0,69 \text{ Вт/м}^2.$
- 5.64. $A(0) = 3 \cdot 10^{14} \text{ Бк/мин, } A (\Delta t) = 0,4 \cdot 10^{13} \text{ Бк/мин.}$
- 5.65. $E_{св.} = 2,24 \text{ МэВ.}$
- 5.66. $^3\text{Li}^7.$

- 5.67. Самостоятельно.
- 5.68. ${}_{84}^{216}\text{Po}$; $v_{\text{Po}} = 2,96 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$
- 5.69. $\Delta N/N = 0,35$.
- 5.70. $T_{1/2} = 1579,36 \text{ лет.}$
- 5.71. $x_{1/2} = 14,75 \text{ см.}$
- 5.72. $Q = 3,296 \cdot 10^{12} \text{ Дж.}$
- 5.73. $x_{1/2} = 1,33 \text{ см.}$

Ядерные реакции

- 5.74. Поглощается. $Q = -933,49 \text{ МэВ.}$
- 5.75. Самостоятельно.
- 5.76. $E/E_0 = 10^{-3}$.
- 5.77. Выделяется. $Q = 17,35 \text{ МэВ.}$
- 5.78. $E_\gamma = 0,75 \text{ МэВ, } \lambda = 1,65 \text{ пм.}$
- 5.79. $T_n = \frac{T(1 - m_\alpha/m_C) + (m_{\text{Be}} + m_\alpha - m_C - m_n)c^2}{1 + m_n/m_C}.$
- 5.80. $E = 3,55 \text{ МэВ.}$
- 5.81. $E = Q \frac{m}{\mu} N_A = 1,35 \cdot 10^{23} \text{ МэВ.}$
- 5.82. $m_{Li}^6 = 6,0134 \text{ а.е.м.}$
- 5.83. $T_\alpha = \frac{T_d + Q}{2} = 11,29 \text{ МэВ. } \cos \varphi = \sqrt{\frac{m_d T_d}{4 m_\alpha T_\alpha}} = 0,045; \varphi = 87,4^\circ.$
- 5.84. С поглощением. $Q = -1,28 \text{ МэВ.}$
- 5.85. $E_\gamma = 9,45 \text{ МэВ.}$
- 5.86. $m_{H_2O} = 5,53 \cdot 10^5 \text{ кг.}$
- 5.87. $Q = 2,3 \cdot 10^4 \text{ кВт}\cdot\text{час.}$
- 5.88. $Q = 6,82 \text{ МэВ.}$
- 5.89. $m = 6,01514 \text{ а.е.м.}$
- 5.90. $T_\alpha = 5,26 \text{ МэВ; } T_n = 0,44 \text{ МэВ.}$
- 5.91. $T_\alpha = 6,7 \text{ МэВ.}$
- 5.92. $Q = -11 \text{ МэВ.}$
- 5.93. $E = 11,9 \text{ МэВ.}$
- 5.94. $m_C = 10,0135 \text{ а.е.м.}$
- 5.95. $Q = \left(1 + \frac{m_p}{m_0}\right)T_p - \left(1 - \frac{m_\alpha}{m_0}\right)T_\alpha - 2\sqrt{\frac{m_p m_\alpha}{m_0^2} T_p T_\alpha} \cdot \cos \theta; Q = -1,2 \text{ МэВ.}$
- 5.96. $T_p = -2,15 \text{ МэВ.}$
- 5.97. $T_\alpha = 9,1 \text{ МэВ; } \varphi = 170,5^\circ.$
- 5.98. $T_p \geq \frac{E_{CB}(m_p + m_{H^2})}{m_{H^2}} = 3,3 \text{ МэВ.}$

$$5.99. m_x = (m_{p_0} + m_\alpha) \left(1 + \frac{T}{931,5 \cdot m_{p_0}} \right) = 222,0842 \text{ а.е.м.}$$

$$5.100. Q = \frac{m_{He}}{\mu_{He}} N_A Q_1 = 4,23 \cdot 10^{14} \text{ Дж.}$$

$$5.101. T_n = \frac{m_C(m_\alpha + m_{Be} - m_n - m_C)}{m_\alpha + m_C} \cdot 931,5 \text{ МэВ} = 5,28 \text{ МэВ.}$$

$$5.102. T_{\pi OP, \alpha} = \frac{m_\alpha + m_{Li}}{m_{Li}} \cdot |Q| = 4,39 \text{ МэВ.}$$

$$5.103. T_\alpha = \frac{1}{m_\alpha + m_{Be}} \left[T(m_{Be} - m_n) - \frac{m_C m_{Be}}{m_n + m_C} E_{\pi OP} \right] = 2,2 \text{ МэВ.}$$

Таблица интегралов.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x \cdot dx}{e^x - 1} &= \frac{\pi}{6} \\ \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cdot dx}{e^x - 1} &= 2,405 \\ \int_0^{\infty} \frac{x^3 \cdot dx}{e^x - 1} &= \frac{\pi^4}{15} = 6,494\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{e^x - 1} &= 0,225 \\ \int_0^2 \frac{x^3 \cdot dx}{e^x - 1} &= 1,18\end{aligned}$$

Формулы для приближенных вычислений.

Если $x \ll 1$, то в первом приближении можно принять

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \pm x} &= 1 \mp x, & (1 \pm x)^2 &= 1 \pm 2x, \\ \sqrt{(1 \pm x)} &= 1 \pm \frac{1}{2}x, & \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} &= 1 \mp \frac{1}{2}x, \\ e^x &= 1 + x, & \ln(1 + x) &= x.\end{aligned}$$

Таблица 1.
Масса нейтральных атомов

Элемент	Порядковый номер	Изотоп	Масса, а.е.м
(Нейтрон)	0	n	1,00867
Водород	1	^1H	1,00783
		^2H	2,01410
		^3H	3,01605
Гелий	2	^3He	3,01603
		^4He	4,00260
Литий	3	^6Li	6,01513
		^7Li	7,01601
Бериллий	4	^7Be	7,01693
		^9Be	9,01219
		^{10}Be	10,01354
Бор	5	^9B	9,01333
		^{10}B	10,01294
		^{11}B	11,00931
Углерод	6	^{10}C	10,00168
		^{11}C	11,00114
		^{12}C	12,00000
		^{13}C	13,00335
		^{14}C	14,00324
Азот	7	^{13}N	13,00574
		^{14}N	14,00307
		^{15}N	15,00011
Кислород	8	^{16}O	15,99491
		^{17}O	16,99913
		^{18}O	17,99916
Фтор	9	^{19}F	18,99840
Натрий	11	^{22}Na	21,99444
		^{23}Na	22,98977

Таблица 1.
(продолжение)

Элемент	Порядковый номер	Изотоп	Масса, а.е.м
Магний	12	^{23}Mg	22,99414
		^{24}Mg	23,99267
Алюминий	13	^{27}Al	26,9815
		^{30}Al	29,99817
Кремний	14	^{30}Si	29,9833
		^{31}Si	29,97535
Фосфор	15	^{31}P	30,97376
Калий	19	^{41}K	40,96184
Кальций	20	^{44}Ca	43,95549
Свинец	82	^{206}Pb	205,97446
Полоний	84	^{210}Po	209,98297

Таблица 2.
Масса и энергия покоя элементарных частиц и
легких ядер.

Частица	Масса		Энергия	
	m_0 , кг	m_0 , а.е.м.	E_0 , Дж	E_0 , МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Нейтральный мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14526	-	135
Протон	$1,67 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,68 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейtron	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733

Таблица 3.

Период полураспада радиоактивных изотопов.

Изотоп	Символ изотопа	Тип распада	Период полураспада
Актиний	$^{235}_{89}\text{Ac}$	α	10 суток
Йод	$^{131}_{53}\text{J}$	β^- , γ	8 суток
Иридий	$^{192}_{77}\text{Ir}$	β^- , γ	75 суток
Кобальт	$^{60}_{27}\text{Co}$	β^- , γ	5,3 года
Магний	$^{27}_{12}\text{Mg}$	β^-	10 мин.
Радий	$^{219}_{88}\text{Ra}$	α	10^{-3} с
	$^{226}_{88}\text{Ra}$	α , γ	$1,62 \cdot 10^3$ лет
Радон	$^{222}_{86}\text{Rn}$	α	3,8 суток
Стронций	$^{90}_{38}\text{Sr}$	β^-	28 лет
Торий	$^{229}_{90}\text{Th}$	α , γ	$7 \cdot 10^3$ лет
Уран	$^{238}_{92}\text{U}$	α , γ	$4,5 \cdot 10^9$ лет
Фосфор	$^{32}_{15}\text{P}$	β^-	14,3 суток
Натрий	$^{22}_{11}\text{Na}$	γ	2,6 года

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ (начало)

№ Вар	Квантовые явления в оптике	Волны де Броиля Соотношение неопределенностей	Квантовая механика
1	1.28; 1.61; 1.71	2.17, 2.41, 2.48	2.53(а), 2.66(а), 2.92(а)
2	1.25; 1.65; 1.82	2.18, 2.28, 2.51	2.53(б), 2.66(б), 2.92(б)
3	1.30; 1.56; 1.73	2.19, 2.29, 2.47	2.54, 2.69(а), 2.90.
4	1.27; 1.43; 1.84	2.20, 2.30, 2.45	2.56, 2.70(б), 2.86
5	1.32; 1.55; 1.75	2.21, 2.31(а), 2.46	2.57, 2.70(в), 2.84
6	1.29; 1.60; 1.86	2.22, 2.31(б), 2.44	2.58, 2.75, 2.83
7	1.34; 1.49; 1.77	2.23, 2.35, 2.46	2.59(а), 2.71(б), 2.81
8	1.31; 1.57; 1.88	2.24, 2.27, 2.45	2.59(б), 2.71(а), 2.79(б)
9	1.36; 1.70; 1.79	2.25, 2.26, 2.44	2.59(в), 2.71(в), 2.79(а)
10	1.33; 1.47; 1.90	2.26, 2.25, 2.43	2.60, 2.77, 2.82
11	1.38; 1.61; 1.81	2.27, 2.22, 2.52	2.61, 2.76(а), 2.85
12	1.35; 1.62; 1.92	2.28, 2.17, 2.47	2.61, 2.76(а), 2.85
13	1.40; 1.44; 1.83	2.29, 2.18, 2.50	2.62, 2.76(б,в), 2.87
14	1.37; 1.58; 1.94	2.30, 2.19, 2.43	2.63, 2.66(а), 2.88
15	1.42; 1.40; 1.85	2.31(а), 2.40, 2.42	2.64(а), 2.68, 2.89
16	1.39; 1.50; 1.96	2.31(б), 2.38, 2.43	2.64(б), 2.67(а), 2.91(а)
17	1.44; 1.59; 1.87	2.32, 2.21, 2.42	2.53(а), 2.70(а), 2.92(а)
18	1.41; 1.66; 1.98	2.33, 2.22, 2.44	2.53(б,в), 2.66(а), 2.90
19	1.46; 1.54; 1.89	2.34, 2.36, 2.45	2.54, 2.69(б), 2.88(а)
20	1.43; 1.62; 1.99	2.35, 2.37, 2.46	2.61, 2.69(в), 2.88(б)
21	1.48; 1.42; 1.91	2.36, 2.20, 2.47	2.62, 2.77, 2.87
22	1.45; 1.46; 1.72	2.37, 2.32, 2.48	2.63, 2.66(б), 2.86
23	1.50; 1.53; 1.93	2.38, 2.34, 2.50	2.56, 2.71(а), 2.84
24	1.47; 1.65; 1.74	2.39(а), 2.23, 2.51	2.57, 2.71(б), 2.83
25	1.52; 1.45; 1.95	2.39(б), 2.34, 2.52	2.60, 2.67(в), 2.78(а)
26	1.49; 1.52; 1.76	2.39(в), 2.35, 2.42	2.65, 2.71(в), 2.78(б)
27	1.54; 1.64; 1.97	2.40, 2.29, 2.46	2.64(в), 2.71(г), 2.80
28	1.51; 1.25; 1.78	2.41, 2.24, 2.47	2.64(б), 2.66(б), 2.82
29	1.56; 1.63; 1.99	2.17, 2.29, 2.48	2.64(а), 2.69(а), 2.81
30	1.53; 1.66; 1.80	2.18, 2.41, 2.45	2.55, 2.69, 2.79(а)

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ (продолжение)

№ Вар	Физика атомов и молекул	Квантовая статистика	Электрические свойства твердых тел
1	3.14(а); 3.48; 3.87	4.30; 4.41; 4.67	4.112; 4.122; 4.95
2	3.15; 3.52; 3.88	4.37; 4.42; 4.69	4.90; 4.104; 4.116
3	3.16(а); 3.53; 3.89	4.42; 4.36; 4.64	4.95; 4.110; 4.123
4	3.16(б); 3.57; 3.90	4.48; 4.46; 4.65	4.113; 4.104; 4.124
5	3.35; 3.58; 3.91	4.54; 4.40; 4.63	4.89; 4.106; 4.118
6	3.21; 3.60; 3.92	4.33; 4.84; 4.38	4.105; 4.91; 4.115
7	3.25; 3.61; 3.93	4.35; 4.65; 4.85	4.88; 4.103; 4.109
8	3.26; 3.64; 3.94	4.43; 4.66; 4.78	4.128; 4.113; 4.107
9	3.30; 3.67(а,г); 3.95	4.49; 4.31; 4.67	4.111; 4.129; 4.102
10	3.34; 3.59; 3.96	4.32; 4.44; 4.82	4.115; 4.96; 4.121
11	3.38; 3.56; 3.97	4.38; 4.64; 4.83	4.118; 4.90; 4.129
12	3.40; 3.55; 3.98	4.36; 4.62; 4.81	4.106; 4.112; 4.127
13	3.43; 3.51; 3.99	4.44; 4.68; 4.79	4.99; 4.101; 4.117
14	3.37; 3.50; 3.100	4.54; 4.43; 4.77	4.124; 4.108; 4.100
15	3.14(б); 3.49; 3.101	4.33; 4.61; 4.75	4.91; 4.105; 4.120
16	3.18; 3.54; 3.102	4.39; 4.68; 4.76	4.108; 4.94; 4.125
17	3.17(а); 3.75; 3.103	4.66; 4.45; 4.74	4.94; 4.111; 4.122
18	3.17(б); 3.63; 3.104	4.33; 4.67; 4.87	4.104; 4.97; 4.128
19	3.20; 3.65; 3.105	4.50; 4.69; 4.86	4.120; 4.95; 4.88
20	3.23; 3.66; 3.106	4.34; 4.71; 4.85	4.110; 4.89; 4.117
21	3.24; 3.67(б,в); 3.107	4.40; 4.60; 4.80	4.93; 4.115; 4.121
22	3.27; 3.68; 3.108	4.41; 4.73; 4.66	4.117; 4.102; 4.90
23	3.28; 3.69; 3.109	4.46; 4.56; 4.84	4.121; 4.94; 4.109
24	3.31; 3.77; 3.87	4.51; 4.63; 4.73	4.114; 4.90; 4.129
25	3.42; 3.72; 3.88	4.35; 4.57; 4.72	4.123; 4.103; 4.114
26	3.39; 3.73; 3.89	4.36; 4.62; 4.80	4.116; 4.102; 4.124
27	3.36; 3.74; 3.90	4.67; 4.32; 4.82	4.96; 4.110; 4.122
28	3.33; 3.70; 3.91	4.47; 4.61; 4.86	4.119; 4.98; 4.113
29	3.32; 3.80; 3.92	4.52; 4.33; 4.79	4.109; 4.104; 4.123
30	3.29; 3.81; 3.93	4.44; 4.77; 4.69	4.129; 4.107; 4.90

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ I (продолжение)

№ Вар	Тепловые свойства твёрдых тел	Элементы физики атомного ядра
1	4.138; 4.160; 4.164	5.27; 5.53; 5.80
2	4.139; 4.163; 4.166	5.37; 5.73; 5.78
3	4.131; 4.162; 4.154	5.34; 5.51; 5.80
4	4.141; 4.137; 4.159	5.36; 5.62; 5.74
5	4.144; 4.138; 4.158	5.35; 5.64; 5.82
6	4.162; 4.142; 4.134	5.33; 5.48; 5.93
7	4.160; 4.140; 4.132	5.26; 5.55; 5.88
8	4.158; 4.167; 4.150	5.38; 5.66; 5.75
9	4.161; 4.146; 4.136	5.25; 5.65; 5.76
10	4.142; 4.155; 4.133	5.28; 5.72; 5.77
11	4.137; 4.154; 4.148	5.32; 5.73; 5.87
12	4.134; 4.153; 4.168	5.31; 5.50; 5.83
13	4.135; 4.149; 4.169	5.30; 5.49; 5.84
14	4.140; 4.157; 4.164	5.24; 5.46; 5.79
15	4.133; 4.163; 4.147	5.60; 5.71; 5.101
16	4.152; 4.164; 4.133	5.24; 5.50; 5.85
17	4.149; 4.161; 4.136	5.43; 5.47; 5.96
18	4.153; 4.150; 4.137	5.42; 5.69; 5.86
19	4.154; 4.159; 4.131	5.36; 5.70; 5.78
20	4.147; 4.139; 4.158	5.94; 5.64; 5.101
21	4.136; 4.161; 4.143	5.43; 5.58; 5.85
22	4.148; 4.135; 4.160	5.37; 5.44; 5.97
23	4.146; 4.158; 4.138	5.40; 5.54; 5.92
24	4.143; 4.139; 4.133	5.39; 5.61; 5.98
25	4.157; 4.140; 4.135	5.28; 5.54; 5.92
26	4.132; 4.142; 4.160	5.34; 5.57; 5.99
27	4.131; 4.151; 4.146	5.31; 5.63; 5.95
28	4.155; 4.145; 4.136	5.27; 5.70; 5.79
29	4.159; 4.163; 4.138	5.32; 5.68; 5.74
30	4.162; 4.150; 4.164	5.33; 5.45; 5.103

Литература

- [1] Савельев И.В. Курс общей физики, т.3. - М.: Наука, 1979.
- [2] Детлаф А.А, Яворский Б.М. Курс физики. - М.: Высшая школа, 1989.
- [3] Киттель Ч. Элементарная физика твердого тела. - М.: Наука, 1965.
- [4] Бушманов Б.И, Хромов Ю.А. Физика твердого тела. - М.: Высшая школа, 1971.
- [5] Ваулин Е.П., Лучина А.А. Основы зонной теории твердого тела. - М.: МАИ, 1975.
- [6] Наумов А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц. - М.: Просвещение, 1984.
- [7] Методические указания к практическим занятиям по курсу физики (ядерной) под ред. Ф.А. Николаева. - М.: МАИ, 1987.
- [8] Кременцова Ю.Н, Мусин Ю.Р., Рослик С.Ф., Черепанов В. В. Ядерная физика. Учебное пособие к выполнению домашнего задания под ред. Ю.Р. Мусина. - М.: МАИ, 1993.
- [9] Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. - М.: Высшая школа, 1988.
- [10] Иродов И.Е. Задачи по общей физике. - М.: Наука, 1988.
- [11] Ваулин Е.П., Коновалова З.И., Соколова Е.Ю., Третьякова О.Н., Ющенко Т.А., Практический курс физики. Квантовая физика. Пособие для самостоятельной работы студентов.ч.1/Под ред. Е.П. Ваулина.- М.: 2004.-127с.
- [12] Ваулин Е.П., Коновалова З.И., Соколова Е.Ю., Третьякова О.Н., Ющенко Т.А., Практический курс физики. Квантовая физика. Пособие для самостоятельной работы студентов.ч.2/Под ред. Е.П. Ваулина.- М.: 2004.-68с
- [13] Белашова Г.Н., Ваничева Н.А., Мартыненко Т.П., Нарбекова Е.Н., Одинцова Г.А., Практический курс физики. Твердое тело. Ядерная физика. Пособие для самостоятельной работы студентов.ч.1/Под ред. Т.П. Мартыненко.-М.: 2001.-117с.
- [14] Белашова Г.Н., Ваничева Н.А., Мартыненко Т.П., Нарбекова Е.Н., Одинцова Г.А., Практический курс физики. Твердое тело. Ядерная физика. Пособие для самостоятельной работы студентов.ч.2/Под ред. Т.П. Мартыненко.-М.: 2001.-64с

СОДЕРЖАНИЕ

<i>ПРЕДИСЛОВИЕ -----</i>	3
<i>1. КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОПТИКЕ-----</i>	4
Основные понятия и законы -----	4
Примеры решения задач-----	13
Задачи для самостоятельного решения-----	28
<i>2. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ-----</i>	36
Основные понятия и законы -----	36
Примеры решения задач-----	40
Задачи для самостоятельного решения-----	54
<i>3. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ-----</i>	64
Основные понятия и законы -----	64
Примеры решения задач-----	75
Задачи для самостоятельного решения-----	86
<i>4. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА-----</i>	95
Основные понятия и законы -----	95
Примеры решения задач-----	120
Задачи для самостоятельного решения-----	139
<i>5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА-----</i>	154
Основные понятия и законы -----	154
Примеры решения задач-----	162
Задачи для самостоятельного решения-----	176
<i>ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ-----</i>	182
1. Квантовые явления в оптике -----	182
2. Основы квантовой механики -----	184
3. Основы квантовой физики атомов и молекул -----	188
4. Основы физики твердого тела -----	192
5. Элементы физики атомного ядра-----	197
<i>ПРИЛОЖЕНИЕ -----</i>	201
<i>ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ -----</i>	205
<i>ЛИТЕРАТУРА -----</i>	208

Учебное издание

*Татьяна Павловна Мартыненко
Галина Аркадьевна Одинцова
Вера Сергеевна Пронина
Елена Юрьевна Соколова*

ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС ФИЗИКИ

*КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.
ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ.*

Подписано в печать
Формат 60x84/16 12.25 п. л. усл. п. л.
Тираж экз. Зак. №

Отпечатано в типографии
Военно-воздушной инженерной академии
имени профессора Н.Е. Жуковского
125190, Москва, ул. Планетная, д.3
тел./факс 614-29-90, e-mail: pubcenter@mail.ru