ПЗ-3-4. Абсолютная и условная сходимость числового ряда.

Знакочередующиеся ряды.

Определение 22.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным*.

Например, знакопеременным будет ряд

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{3}+\frac{\sin\frac{3}{4}\pi}{3^2}+\frac{\sin\frac{5}{4}\pi}{3^3}+\frac{\sin\frac{7}{4}\pi}{3^4}+\ldots+\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n}+\ldots=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{18}-\frac{\sqrt{2}}{54}-\frac{\sqrt{2}}{162}+\ldots+\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n},$$

так как за двумя положительными членами следуют два отрицательных члена.

Определение 22.2. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, называется *знакочередующимся*, если его члены поочередно меняют знаки.

Например, знакочередующимся является ряд

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}.$$

Обозначая модули членов такого ряда через a_i и считая $a_i > 0$ $(i=1,2,3,\ldots)$, запишем знакочередующийся ряд в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \qquad (22.1)$$

где a_n есть модуль общего члена ряда.

Теорема 22.1 (*теорема Лейбница*[1]). Если у знакочередующегося ряда (22.1) модули всех членов убывают с ростом n, т. е.

$$a_1>a_2>a_3>\ldots>a_{n-1}>a_n>\ \ldots, \qquad (22.2)$$

и модуль a_n общего члена ряда стремится к нулю при $n\to\infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (22.3)$$

то ряд (22.1) сходится.

П р и м е р 22.1. Рассмотрим ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,.$$

Ряд сходится, так как выполнены условия (22.2) и (22.3) теоремы Лейбница. Действительно, $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $(a_n > a_{n+1})$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$. Пусть S есть сумма данного ряда:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

2671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

◀ Поскольку

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n + \pi n\right) =$$

$$= \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n\right)\cos\left(\pi n\right) + \cos\left(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n\right)\sin\left(\pi n\right) =$$

$$= (-1)^n \sin\pi\left(\sqrt{n^2+k^2} - n\right) \equiv (-1)^n b_n,$$

где $b_n = \sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$ — последовательность, монотонно (при $n > n_0$) стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, то, по признаку Лейбница, ряд сходится. ▶

Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Определение 22.3. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ из абсолютных величин членов этого ряда.

Определение 22.4. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно* (*неабсолютно*) *сходящимся*, если он сам сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ из абсолютных величин его членов расходится.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^5}$ — абсолютно сходящийся, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin n\alpha|}{n^5}$, общий член которого $\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^5} \leqslant \dfrac{1}{n^5}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^5}$ сходится Ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ — условно сходящийся, так как он сам сходится , а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В случае сходимости установить характер сходимости ряда.

Решение. Отметим, что данный ряд знакочередующийся, модули членов убывают при $n \to \infty$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т. е. выполнены все условия теоремы Лейбница. Следовательно, ряд сходится. Чтобы установить характер сходимости, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ из модулей членов данного ряда.

Этот ряд расходится Поскольку ряд из модулей сходящегося ряда расходится, то исходный знакопеременный ряд сходится условно. ■

П р и м е р 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^3+1}$. В случае сходимости установить ее характер.

Р е ш е н и е. Ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница: ряд знакочередующийся, модули его членов убывают с ростом n. $\left(\dfrac{1}{(n+1)^3+1} < \dfrac{1}{n^3+1} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3+1} = 0$. Отсюда следует, что ряд сходится. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+1}$ из модулей членов данного ряда. Так как $\dfrac{1}{n^3+1} < \dfrac{1}{n^3}\ \ \forall\ n \in \mathbf{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ сходится , то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+1}$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ■

П р и м е р 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$. В случае сходимости установить ее характер.

Р е ш е н и е. Ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница: ряд знакочередующийся, модули его членов убывают при $n\to\infty$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\ \ \forall\ n \in \mathbf{N}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$. Следовательно, ряд сходится. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, составленный из модулей членов данного ряда. Так как $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ при $n\to\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится , то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится. Поскольку сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то исходный ряд сходится условно. ■

Т е о р е м а 22.2 (*достаточное условие сходимости знакопеременного ряда*). Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ (т. е. абсолютно сходящийся ряд сходится).

П р и м е р 22.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\alpha}{n^3}$ сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\cos n\alpha|}{n^3}$, поскольку $\dfrac{|\cos n\alpha|}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n^3}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ сходится ■

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ имеем $|u_n| = \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ (так как $|\sin n\alpha| \leqslant 1$). Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ по признаку сравнения для знакопостоянных рядов. Следовательно, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ сходится абсолютно.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема 22.5 (*о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда*). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Теорема 22.6 (*теорема Римана*[2]). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то можно так переставить его члены, что сумма полученного ряда будет равна любому наперед заданному числу. Можно при перестановке получить и расходящийся ряд.

Пример 22.8. Рассмотрим условно сходящийся ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \qquad (22.12)$$

Обозначим через S его сумму. Переставим его члены так, чтобы за каждым положительным членом следовали два отрицательных:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots \qquad (22.13)$$

Можно доказать, что этот ряд сходится. Тогда по теореме 20.3 можно сгруппировать его члены, например, так:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots, \qquad (22.14)$$

причем ряд (22.14) согласно теореме 20.3 будет иметь ту же сумму, что и ряд (22.13). Перепишем ряд (22.14) в виде

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Таким образом, при перестановке членов в условно сходящемся ряде (22.12) сумма его уменьшилась в два раза.

Теорема 22.7 (*о структуре абсолютно сходящегося ряда*). Если ряд сходится абсолютно и имеет сумму S, то ряд, составленный из его положительных членов, и ряд, составленный из его отрицательных членов, сходятся и имеют соответственно суммы S_+ и S_-, причем $S = S_+ + S_-$.

Теорема 22.8 (*о структуре условно сходящегося ряда*). Если ряд сходится условно, то ряд, составленный из его положительных членов, и ряд, составленный из его отрицательных членов, расходятся.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,$$

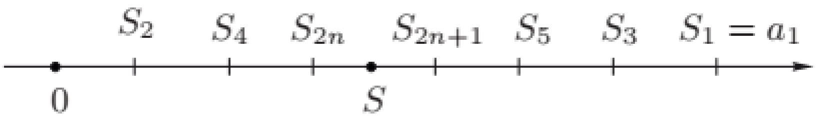

Рис. 22.1

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится по теореме Лейбница и имеет сумму S, т. е. $a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots = S$. Тогда $S = S_n + R_n$,

где n-й остаток ряда

$$R_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots)$$

(знак «$+$» или «$-$» в зависимости от четности или нечетности n).

Так как остаток ряда R_n сам является знакочередующимся рядом и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то он сходится и для модуля его суммы справедлива найденная выше оценка $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

Таким образом, полагая $S \approx S_n$, мы получаем погрешность, абсолютная величина которой δ_n не превосходит модуля первого отброшенного члена ряда, т. е.

$$\delta_n = |S - S_n| = |R_n| \leqslant a_{n+1}. \tag{22.9}$$

Подчеркнем, что эта оценка имеет место только для знакочередующихся рядов, удовлетворяющих условиям теоремы Лейбница.

П р и м е р 22.1. Рассмотрим ряд Лейбница

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,.$$

Ряд сходится, так как выполнены условия (22.2) и (22.3) теоремы Лейбница. Действительно, $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}\quad\forall\, n\in\mathbf{N}\quad(a_n>a_{n+1})$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\ \left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\right)$. Пусть S есть сумма данного ряда:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Если положить $S\approx S_6$, то $S-S_6>0$ и погрешность $\delta_6=S-S_6\leqslant\dfrac{1}{7}$. Если $S\approx S_7$, то $S-S_7<0$ и $\delta_7=|S-S_7|\leqslant\dfrac{1}{8}$. Если $S\approx S_{999}$, то $S-S_{999}<0$ и $\delta_{999}=|S-S_{999}|\leqslant\dfrac{1}{1000}$. ■

П р и м е р 22.2. Найти с точностью до 0.01 сумму ряда

$$\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\,.$$

Р е ш е н и е. Данный ряд сходится по теореме Лейбница. Следовательно, $\delta_n=|S-S_n|\leqslant a_{n+1}$.

Так как сумма ряда должна быть вычислена с точностью до 0.01, то достаточно, чтобы выполнилось неравенство

$$\delta_n\leqslant a_{n+1}<0.01,\quad\text{или}\quad\frac{1}{(2n+1)!}<0.01=\frac{1}{10^2}\,.$$

Это неравенство выполняется начиная с $n=2$, так как $\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120}<$ $<\dfrac{1}{100}$. Таким образом,

$$S\approx S_2=1-\frac{1}{3!}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\approx0.833\approx0.83.\ ■$$

П р и м е р 6. Дан ряд $1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot n!} + \ldots$ Показать, что он сходится, и оценить погрешность δ замены суммы S этого ряда

а) суммой S_4 первых его четырех членов;

б) суммой S_5 пяти его первых членов.

Р е ш е н и е. Данный ряд знакочередующийся, модули его членов убывают при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot n!} = 0$, т.е. выполнены все условия теоремы Лейбница. Следовательно, ряд сходится.

Для разности $|S - S_n|$ в этом случае справедлива оценка $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$, где $a_{n+1} = |u_{n+1}|$, т.е. модулю первого отброшенного члена в приближенном равенстве $S \approx S_n$. Составим частные суммы:

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} - \frac{1}{4\cdot 4!}, \qquad a_5 = \frac{1}{5\cdot 5!};$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} - \frac{1}{4\cdot 4!} + \frac{1}{5\cdot 5!}, \qquad a_6 = \left| -\frac{1}{6\cdot 6!} \right| = \frac{1}{6\cdot 6!}.$$

а) При замене S на S_4, т.е. в приближенном равенстве $S \approx \approx S_4$, разность $= S - S_4 > 0$ $(S_{2n} < S)$, и поэтому погрешность $\delta_4 = S - S_4 \leqslant a_5 = \frac{1}{5\cdot 5!} = \frac{1}{600} < 10^{-2}$.

б) При замене S на S_5, т.е. в приближенном равенстве $S \approx S_5$, разность $S - S_5 < 0$ $(S_{2n-1} > S)$, и погрешность $\delta_5 = |S - S_5| \leqslant a_6 = = \frac{1}{6\cdot 6!} = \frac{1}{4320} < 10^{-3}$. ■

П р и м е р 7. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму S с точностью: 1) до 0.01, 2) до 0.0001?

Р е ш е н и е. Данный ряд сходится по теореме Лейбница. Следовательно, погрешность δ_n приближенного равенства $S \approx S_n$ не превосходит по абсолютной величине модуля первого из отброшенных членов, т.е.

$$\delta_n = |S - S_n| \leqslant |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Определим число n членов ряда, удовлетворяющее неравенствам:

$$1)\ \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 0.01; \qquad 2)\ \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 0.0001.$$

В первом случае

$$(n+1)^2 \geqslant (0.01)^{-1} = 100, \ \ n+1 \geqslant 10, \ \ n \geqslant 9.$$

Во втором случае

$$(n+1)^2 \geqslant (0.0001)^{-1} = 10000, \ \ n+1 \geqslant 100, \ \ n \geqslant 99.$$

Следовательно, для вычисления суммы ряда с точностью до 0.01 достаточно взять 9 членов ряда, а с точностью до 0.0001 — 99 членов ряда.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Теорема 22.3 (*признак Даламбера*). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$, то

1) при $\rho < 1$ ряд сходится абсолютно;

2) при $\rho > 1$ ряд расходится.

(При $\rho = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.)

Пример 22.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{3^n}$.

Решение. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}(n+1)|3^n}{3^{n+1}|(-1)^n n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \dfrac{n}{3^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$ сходится, а поэтому исходный ряд сходится абсолютно. ■

Пример 22.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n}{n^2}$.

Решение. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}2^{n+1}|n^2}{(n+1)^2|(-1)^n 2^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1.$$

По теореме 22.3 данный ряд расходится. ■

П р и м е р 4. Исследовать каждый из следующих рядов на сходимость и в случае сходимости ряда установить ее характер:

1) $\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10^2} - \dfrac{13}{10^3} + \dfrac{19}{10^4} + \dfrac{25}{10^5} - \dfrac{31}{10^6} + \ldots;$

Р е ш е н и е. 1) Так как ряд 1 не является знакочередующимся, то теорема Лейбница к нему не применима. Используем признак Даламбера или признак Коши для знакопеременных рядов. Запишем формулу для модуля $|u_n|$ общего члена ряда. Заметим, что числители членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 6$, а знаменатели — геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 10$ и знаменателем $q = 10$. Тогда

$$|u_n| = \frac{a_1 + d(n-1)}{b_1 q^{n-1}} = \frac{1 + 6(n-1)}{10 \cdot 10^{n-1}} = \frac{6n-5}{10^n}.$$

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6n-5}{10^n}$ с помощью признака Даламбера. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(6n+1)10^n}{10^{n+1}(6n-5)} = \dfrac{1}{10} < 1$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно (см. теорему 22.3).

Т е о р е м а 22.4 (*признак Коши*). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то

1) при $\rho < 1$ ряд сходится абсолютно;

2) при $\rho > 1$ ряд расходится.

(При $\rho = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.)

П р и м е р 22.6. Исследовать на сходимость ряды

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n (2n-1)\frac{\pi}{4}}{2^n}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{4n-1}{n+100}\right)^n.$$

Р е ш е н и е. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ для каждого ряда.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^n (2n-1)\frac{\pi}{4}}{2^n}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|\sin^n (2n-1)\frac{\pi}{4}\right|}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin (2n-1)\frac{\pi}{4}\right|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{4n-1}{n+100}\right)^n$ находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\left(\frac{4n-1}{n+100}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+100}=4>1.$$

По теореме 22.4 ряд расходится. ■

3) К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}$ применим признак Коши для знакопеременного ряда. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}\right|}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e^{-1}}=e>1.$$

Отсюда следует, что по теореме 22.4 исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}}$$

расходится. ■

Признак Абеля.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1}$$

сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность (b_n) есть монотонная и ограниченная.

2673.1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

◀ Имеем

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = \cos\left(\pi(n-1) + \frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= \cos\left(\pi(n-1)\right)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \cancelto{0}{\sin\left(\pi(n-1)\right)}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$, по признаку Лейбница, сходится, а последовательностьп $\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)$ монотонна и ограничена, то исследуемый ряд, по признаку Абеля, также сходится. ▶

Признак Дирихле.

Ряд (1) сходится, если последовательность (b_n), начиная с некоторого номера n_0, монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена.

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2667. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^{100} n}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

◀ Поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right| = \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}\left|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n+1}{8}\pi\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

а последовательность $(n^{-1}\ln^{100} n)$, начиная с достаточно большого n, монотонно стремится к нулю (это вытекает из того, что

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^{100} x = 100 \lim_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^{99} x = 0, \quad (x^{-1}\ln^{100} x)' < 0 \ \forall x > e^{100}),$$

то, согласно признаку Дирихле, данный ряд сходится. ►

Действия над рядами

Теорема 20.4. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и имеет сумму S, то для любого числа c ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ сходится и имеет сумму cS.

Теорема 20.5. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ также сходятся и имеют соответственно суммы $S_1 + S_2$ и $S_1 - S_2$.

Теорема 20.6. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ расходятся.

Отметим, что если оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходятся, то о рядах $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ ничего определенного сказать нельзя, т. е. эти ряды могут как сходиться, так и расходиться.

Теорема 22.9 (*о сложении абсолютно сходящихся рядов*). Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ также абсолютно сходятся.

2495. Составить сумму рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$. Сходится ли эта сумма?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+(-1)^n-n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{3^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^n} \quad \text{— сходится!}$$

2496. Составить разность расходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ и исследовать ее сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-(2n-1)}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)n} \quad \text{— сх-ся.}$$

2497. Сходится ли ряд, образованный вычитанием ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2n+1}{(2n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{(2n-1)n} \quad \text{— расх-ся!}$$

2670. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

◀ Представляя общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

и замечая, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$, по признаку Лейбница, сходится, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ расходится (к $+\infty$), заключаем, что данный ряд также расходится (к $+\infty$). ▶

Задачи для самостоятельного решения

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{5n+4}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+2}}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+3}$;

4. $1-\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}-\dfrac{1}{5^4}-\dfrac{1}{6^4}+\ldots$;

5. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{n^3}{2^n}+\ldots$;

6. $-\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{5}{7}\right)^2-\left(\dfrac{7}{10}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots$;

7. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{12}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{5n-3}+\ldots$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\dfrac{n}{3^n}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{1}{n}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{2n+7}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arcsin\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

15. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}$ нужно взять, чтобы его сумма была вычислена с точностью до 10^{-2}?

2669. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2665. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

2673. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

2668. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$.

Литература

Демидович Б.П.
Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.