ПЗ – 6/7. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов. I

Определение 4. *Функциональный ряд* (1) *называется* ***равномерно сходящимся*** *к своей сумме* $S(x)$ *на множестве* X, *если последовательность частичных сумм* $(S_n(x))$ *этого ряда равномерно сходится на* X *к* $S(x)$.

1. Критерий Коши.

Для равномерной сходимости ряда (1), п.4.1, на множестве X необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \land \forall p \in \mathbb{N} \land \forall x \in X$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Важнейшие достаточные признаки равномерной сходимости рядов.

2. Мажорантный признак Вейерштрасса. *Если* $\exists a_k \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\forall x \in X$ *справедливы неравенства* $|u_k(x)| \leqslant a_k$, $k \in \mathbb{N}$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то ряд* (1), *п.4.1, сходится равномерно на* X.

2768. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ **на отрезке** $[-1, 1]$.

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{при } n \to \infty,$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **ряд сходится**

рассматриваемый ряд сходится равномерно.

2774.г. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x| < +\infty$.

◀ Найдем $\sup\limits_{|x|<+\infty} |a_n(x)|$, где $a_n(x)$ — общий член ряда. Имеем

$$\sup_{|x|<+\infty} |a_n(x)| = \sup_{|x|<+\infty} \left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

и достигается при $x_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ является мажорантным для данного ряда. Так как мажорантный ряд сходится, то исходный ряд, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно. ▶

2774.д. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}),\ \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2.$

◀ Легко найти, что

$$\sup_{\frac{1}{2} \leqslant |x| < 2} (x^n + x^{-n}) = 2^n + \frac{1}{2^n} < 2^{n+1}.$$

Поскольку, к тому же, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$, в силу признака д'Аламбера, сходится, то исследуемый ряд сходится равномерно. ▶

3. Признак Дирихле. *Если частичные суммы ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *равномерно ограничены на* X, *т.е.* $\exists M > 0$ *такое, что* $\forall x \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* $|S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M$, *а функциональная последовательность* $(b_n(x))$ *удовлетворяет двум условиям:*

а) $\forall x \in X : b_{n+1}(x) \leqslant b_n(x)\ \forall n > n_0$;

б) $b_n(x) \rightrightarrows 0$ *на* X *при* $n \to \infty$, *то функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \tag{1}$$

сходится равномерно на X.

2775. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$: а) на отрезке $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$;

◀ а) Поскольку частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ ограничены:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

а последовательность $\left(\frac{1}{n}\right) \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то, по признаку Дирихле, ряд сходнтся равномерно.

2781. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}},\ 0 \leqslant x < +\infty.$

◀ Поскольку частичные суммы, в силу оценки

$$\left|\sum_{n=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\sin\frac{nx}{2} \sin\frac{n+1}{2}x\right| \leqslant 2,$$

ограничены, а функциональная последовательность $\left((n+x)^{-\frac{1}{2}}\right)$ равномерно по x $\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0\right)$ и монотонно по n

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} = \frac{1}{\sqrt{(n+x)(n+1+x)}(\sqrt{n+1+x} + \sqrt{n+x})} > 0\right)$$

стремится к нулю прн $n \to \infty$, то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится равномерно. ▶

4. Признак Абеля. *Ряд* (1) *сходится равномерно на* X, *если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *сходится равномерно на* X, *а функции* b_k *удовлетворяют двум условиям:*

а) $\exists M > 0$ *такое, что* $\forall x \in X \wedge \forall k \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* $|b_k(x)| \leqslant M$;

б) $\forall x_0 \in X$ *последовательность* $(b_k(x_0))$ *монотонна при* $k > k_0$.

5*.** для равномерной сходимости на множестве X последовательности (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, к предельной функции $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_X r_n(x)\right) = 0,$$

где

$$r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|.$$

<u>2747.</u> $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $0 \le x \le 1$.

∢ Критерий 5^{***}:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^n - x^{n+1}) = 0,$$

при $0 \le x \le 1$.

$$(x^n - x^{n+1})' = n x^{n-1} - (n+1)x^n = 0$$

$$n - (n+1)x = 0, \to x = \frac{n}{n+1}$$

(.) экстремума

$$\sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)| = \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right| =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

#

2748. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \le x \le 1$

По критерию 5^{***} $f(x) = 0$;

$(x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0$

$1 - 2x^n = 0$, $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \ne 0, \Rightarrow$$

последовательность $\{f_n(x)\}$ стремится к нулю неравномерно.

2750. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◀ Нетрудно видеть, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x} = x$ и справедлива оценка $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{nx}{1+n+x} - x\right| \leqslant \frac{2}{n+1}$.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0, \quad f_n(x) \rightrightarrows x. \ ▶$$

Задачи для самостоятельного решения

2774. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

2776. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$; $0 < x < +\infty$.

Литература

Демидович Б.П.

Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.