0

Вариант 12

1. **(7.20)** Дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в колебательном контуре имеет вид $q+6\cdot10^3q'+10^8q=0$. Определить логарифмический декремент затухания.

Дано:
$q + 6\cdot10^3q' + 10^8q = 0$
δ - ?

Решение:
Дифференциальное уравнение колебательного контура
$$q + 2\beta q' + \omega_0^2q = 0.$$
Отсюда $\beta = 3\cdot10^3$ Ом/Гн, $\omega_0^2 = 10^8$ с$^{-2}$.
Логарифмический декремент затухания:
$$\delta = \beta T,$$
где $T = 2\pi/\omega$ - период колебаний; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний.
Логарифмический декремент затухания:
$$\delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$
$$\delta = \frac{2\cdot3{,}14\cdot3\cdot10^3}{\sqrt{10^8 - \left(3\cdot10^3\right)^2}} = 2{,}1.$$
Ответ: ***δ = 2,1.***

2. **(7.41)** Катушка индуктивностью L = 12 мГн, конденсатор емкостью C = 30 мкФ и активное сопротивление R = 20 Ом подключены к внешней переменной э.д.с., изменяющейся по закону ε = 8,1sin754t [В]. Определить: а) полное сопротивление цепи; б) сдвиг фаз между током и э.д.с.; в) амплитудное значение силы тока.

Дано:
$C = 30$ мкФ $= 3\cdot10^{-5}$ Ф
$L = 12$ мГн $= 12\cdot10^{-3}$ Гн
$R = 20$ Ом
$\varepsilon = 8{,}1\sin754t$ [В]
а) Z - ?
б) φ - ?
в) i_m - ?

Решение:
а) Полное сопротивление цепи при последовательном соединении:
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$
б) Запишем законы изменения внешнего напряжения и тока в цепи:
$$\varepsilon = \varepsilon_m\cdot\sin\omega t,$$
$$I = i_m\cdot\sin(\omega t - \varphi).$$
Где сдвиг фаз φ определяется по формуле
$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$
Так как по условию задачи, э.д.с. изменяется по закону ε = 8,1sin754t [В], то ε_m = 8,1 В, ω = 754 с$^{-1}$,
$$\varphi = arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$
Резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура:
$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$
в) Максимальная сила тока
$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{Z}.$$
$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$
Подставляя численные значения, находим:
$$Z = 40{,}45 \text{ Ом};\ \varphi = -60°;\ i_m = 0{,}2 \text{ А}.$$
Ответ: а) Z = 40,45 Ом; б) φ = -60°; в) i_m = 0,2 А.

3. **(8.14)** Напряжение на пластинах плоского воздушного конденсатора изменяется по закону $U = U_0\cdot\sin\omega t$. Определить ток смещения через сечение AA′. Площадь пластин конденсатора S, расстояние между пластинами d.

Дано:
$U = U_0\cdot\sin\omega t$
S, d
$I_{см}$ - ?

Решение:
Ток смещения через сечение конденсатора
$$I_{см} = j_{см}\cdot S.$$
Плотность тока смещения в конденсаторе
$$j_{см}(t) = \partial D/\partial t,$$
где D – вектор электрического смещения
$$D = \varepsilon\varepsilon_0E.$$
Закон изменения напряженности электрического поля конденсатора:
$$E(t) = U(t)/d = U_0\cdot\sin\omega t/d.$$
Отсюда
$$D(t) = \varepsilon\varepsilon_0U_0\cdot\sin\omega t/d,$$
$$j_{см} = \varepsilon\varepsilon_0\omega U_0\cdot\cos\omega t/d,$$
$$I_{см} = \varepsilon\varepsilon_0\omega S\cdot U_0\cdot\cos\omega t/d.$$
Конденсатор воздушный, следовательно, ε = 1. Окончательно имеем:
$$I_{см} = \varepsilon_0\omega S\cdot U_0\cdot\cos\omega t/d.$$
Ответ: $I_{см} = \varepsilon_0\omega S\cdot U_0\cdot\cos\omega t/d$.

4. **(8.29)** Пластины плоского воздушного конденсатора площадью S находятся на расстоянии d друг от друга. Одну из пластин начинают отодвигать от другой по нормали к пластинам с постоянным ускорением a. Найти плотность тока смещения в конденсаторе в зависимости от времени, если конденсатор все время остается подключенным к источнику тока. Начальный заряд на пластинах конденсатора q_0.

Дано:
S, d, a, q_0
$j_{см}(t)$ - ?

Решение:
Плотность тока смещения в конденсаторе
$$j_{см}(t) = \partial D/\partial t,$$
где D – вектор электрического смещения
$$D(t) = -g(t)/S.$$
Закон изменения заряда на пластинах конденсатора:
$$q(t) = q_0d/r(t),$$
где r(t) – закон изменения расстояния между пластинами:
$$r(t) = d + at^2/2$$
Отсюда
$$q(t) = \frac{q_0d}{d + \frac{at^2}{2}};$$
$$D(t) = -\frac{q_0d}{S\left(d + \frac{at^2}{2}\right)};$$

$$j_{см}(t) = \frac{q_0 d \cdot at}{S\left(d + \frac{at^2}{2}\right)^2}.$$

Ответ: $j_{см}(t) = \frac{q_0 d \cdot at}{S\left(d + \frac{at^2}{2}\right)^2}$.

5. **(8.51)** Плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности магнитного поля $H_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ А/м распространяется в вакууме. Определить среднее значение плотности потока энергии <S>. Найти максимальное P_{max} и среднее <p> давление, которое оказывает волна при нормальном падении на поверхность тела, полностью поглощающего волну.

Дано:
$H_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ А/м
<S> - ?, <p> - ?, P_{max} - ?

Решение:
Среднее значение модуля вектора Пойнтинга, то есть среднее по времени значение энергии, переносимое электромагнитной волной через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны:

$$\langle S \rangle = \tfrac{1}{2} E_0 H_0.$$

Учитывая, что в вакууме для электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0,$$

получаем

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0^2 = \frac{\mu_0 c}{2} H_0^2,$$

$$\langle S \rangle = \frac{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8}{2} \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 0{,}47 \frac{Вт}{м^2}.$$

Максимальное давление, которое оказывает волна:

$$P_{max} = (1 + r) \cdot w,$$

где r = 0 – коэффициент отражения для поверхности, полностью поглощающей волну; w – объемная плотность энергии волны:

$$w = \tfrac{1}{2} \cdot (\varepsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2) = \mu_0 H_0^2;$$

$$P_{max} = \mu_0 H_0^2;$$

$$P_{max} = 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-9} \text{ Па}.$$

Средне давление, которое оказывает волна:

$$\langle p \rangle = (1 + r) \cdot \langle w \rangle,$$

где <w> – средняя объемная плотность энергии волны:

$$\langle w \rangle = \tfrac{1}{2} \cdot w = \tfrac{1}{4} \cdot (\varepsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2) = \tfrac{1}{2} \mu_0 H_0^2;$$

$$\langle p \rangle = \tfrac{1}{2} \cdot \mu_0 H_0^2;$$

$$\langle p \rangle = \tfrac{1}{2} \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 = 1{,}57 \cdot 10^{-9} \text{ Па}.$$

Ответ: <S> = 0,47 Вт/м^2; <p> = 1,57·10^{-9} Па;
P_{max} = 3,14·10^{-9} Па.

$$|j_{см}(t)| = \Delta\varphi\cdot v\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0/(d_0 + vt)^2.$$

Ответ: *1)* $j_{см} = 0$; *2)* $|j_{см}(t)| = \Delta\varphi\cdot v\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0/(d_0 + vt)^2$.

5. **(3.53)** Плоская

Дано:

$\langle S\rangle$, ω

$j_{см(макс)}$ - ?

Решение:

Среднее значение плотности потока энергии (вектора Пойнтинга).

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}E_0H_0.$$

Для электромагнитной волны

$$\varepsilon_0E^2 = \mu_0H^2,$$

отсюда

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot E_0^{\,2} = \frac{c\varepsilon_0}{2}\cdot E_0^{\,2}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle S\rangle}{c\varepsilon_0}}$$

Закон изменения напряженномти электрического поля:

$$E(t) = E_0\cdot\cos(\omega t + \alpha)$$

Плотность тока смещения

$$j_{см}(t) = \partial D/\partial t.$$

где D – вектор электрического смещения

$$D(t) = \varepsilon_0E(t) = \varepsilon_0\, E_0\cdot\cos(\omega t + \alpha)$$

$$j_{см}(t) = -\omega\varepsilon_0\, E_0\cdot\sin(\omega t + \alpha)$$

Максимальное значение плотности тока смещечия

$$j_{см(макс)} = \omega\varepsilon_0\, E_0$$

$$j_{см(макс)} = \omega\varepsilon_0\sqrt{\frac{2\langle S\rangle}{c\varepsilon_0}} = \omega\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\langle S\rangle}{c}}.$$

Ответ: $j_{см(макс)} = \omega\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0\langle S\rangle}{c}}$.

6. **(3.62)** Выразить интенсивность плоской электромагнитной волны, распростроняющейся в немагнитной среде ($\mu = 1$) с показателем преломления n, через амплитуду вектора напряженности электрического поля E_0.

Дано:

E_0, n

I - ?

Решение:

Интенсивность лазерного излучения равна среднему значению вектора Пойнтинга. В немагнитной среде с показателем преломления n:

$$I = \langle S\rangle = \frac{n}{2}E_0H_0.$$

Для электромагнитной волны

$$\varepsilon_0E^2 = \mu_0H^2,$$

отсюда

$$I = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot E_0^{\,2} = \frac{c\varepsilon_0 n}{2}\cdot E_0^{\,2}.$$

Ответ: $I = \dfrac{c\varepsilon_0 n}{2}\cdot E_0^{\,2}$.

7. **(4.4)** На пути одного из двух интерференционных лучей разной интенсивности помещен светофильтр, пропускающий четверть падающего на него света $\left(I_{1прon} = \dfrac{1}{4}I_1\right)$. При этом максимальная интенсивность в интерференционной картине уменьшилась в два раза. Найти отношение интенсивностей падающих на установку лучей $\left(I_1/I_2\right)$.

Дано:

$$I_{1прon} = \frac{1}{4}I_1$$

I_1/I_2 - ?

Решение:

Максимальная интенсивность без светофильтра:

$$I_{1\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cdot\cos 0 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$$

Максимальная интенсивность со светофильтром:

$$I_{2\max} = \frac{I_1}{4} + I_2 + 2\sqrt{\frac{I_1}{4}I_2}\cdot\cos 0 = \frac{I_1}{4} + I_2 + \sqrt{I_1I_2}$$

По условию задачи:

$$\frac{I_{1\max}}{I_{2\max}} = 2.$$

Отсюда

$$\frac{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}}{\dfrac{I_1}{4} + I_2 + \sqrt{I_1I_2}} = 2$$

$$I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} = \frac{I_1}{2} + 2I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$$

$$\frac{I_1}{2} - I_2 = 0$$

$$\frac{I_1}{I_2} = 2.$$

Ответ: $\dfrac{I_1}{I_2} = 2$.

8. **(4.61)** Установка для наблюдения колец Ньютона состоит из плоскопараллельной стеклянной пластинки и соприкасающейся с ней выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы. Монохроматический свет падает нормально на плоскую границу линзы. Интерференционная картина наблюдается в отраженном или проходящем свете. Центральное темное пятно при наблюдении колец в отраженном свете считают за нулевое. Найти а) толщину h слоя воздуха там, где в отраженном свете ($\lambda = 0{,}6$ мкм) наблюдается первое светлое кольцо Ньютона; б) толщину слоя воды в том месте, где наблюдается третье темное кольцо в проходящем свете с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм, показатель преломления воды n = 1,33.

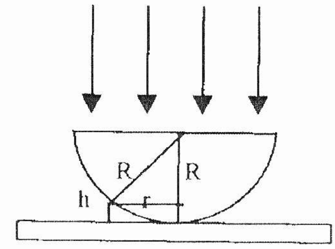
Дано:

а) $\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6\cdot10^{-7}$ м; m = 1

б) $\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5\cdot10^{-7}$ м; m = 3; n = 1,33

h - ?

Решение:



а) Для m-го светлого кольца запишем условие максимума:

$$2h\cdot\cos\beta = m\lambda - \lambda/2$$

$$\cos\beta = 1$$

$$4h = (2m - 1)\lambda,$$

где h – толщина воздушного пространства между линзой и пластинкой.

$$h = (2m - 1)\lambda/4$$

$$h = (2\cdot1 - 1)\cdot6\cdot10^{-7}/4 = 1{,}5\cdot10^{-7}\text{ м} = 0{,}15\text{ мкм}.$$

б) В проходящем свете интерферируют два луча: луч 1, прошедший систему без отражений, и луч 2, испытавший отражения на нижней и верхней поверхностях слоя воды.
Для m-го темного кольца запишем условие минимума:

$$2hn\cdot\cos\beta = (2m - 1)\lambda/2$$
$$\cos\beta = 1$$
$$4hn = (2m - 1)\lambda,$$

где h – толщина воздушного пространства между линзой и пластинкой.

$$h = (2m - 1)\lambda/4n$$
$$h = (2\cdot3 - 1)\cdot5\cdot10^{-7}/(4\cdot1{,}33) = 4{,}7\cdot10^{-7}\ м = 0{,}47\ мкм.$$

Ответ: а) h = 0,15 мкм; б) h = 0,47 мкм.

9. **(5.19)** Плоская монохроматическая световая волна интенсивности I_0 падает нормально на поверхность непрозрачного экрана с круглым отверстием, открывающим для точки наблюдения P центральную зону Френеля. В отверстие поместили стеклянный диск, перекрывающий внутреннюю половину центральной зоны. При какой толщине этого диска интенсивность света в точке P будет: а) максимальна? Чему она равна? б) минимальна?

Дано:
λ, I_0
h - ?, I - ?

Решение:
Дополнительный по сравнению с воздухом оптический путь в стекле составляет $h(n - 1)$, где h – толщина диска. Это дает дополнительный сдвиг по фазе для волны, прошедшей сквозь диск:

$$\Delta\varphi = 2\pi h(n - 1)/\lambda.$$

а) Максимальная амплитуда результирующего колебания получится, если вектор колебаний, соответствующих внутренней половине центральной зоны Френеля окажется сонаправленным с вектором колебаний остальной части волновой поверхности. Это выполнится при условии

$$\Delta\varphi = \pi/2 + 2\pi m,\ m = 0,1,2\ldots$$

Следовательно,

$$2\pi h(n - 1)/\lambda = \pi/2 + 2\pi m,\ m = 0,1,2\ldots$$

Окончательно получаем:

$$h = \frac{\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda}{n - 1}, \quad m = 0,1,2\ldots$$
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$
$$I_1 = 2I_0$$
$$I_2 = 2I_0$$
$$I = 2I_0 + 2I_0 + 2\sqrt{4I_0 I_0} = 8I_0$$

б) Минимальная амплитуда результирующего колебания получится, если вектор колебаний, соответствующих одной зоне Френеля окажется противоположно направленным с вектором колебаний остальной части волновой поверхности. Это выполнится при условии

$$\Delta\varphi = 2\pi m,\ m = 0,1,2\ldots$$

Следовательно,

$$2\pi h(n - 1)/\lambda = 2\pi m,\ m = 0,1,2\ldots$$

Окончательно получаем:

$$h = \frac{\lambda m}{n - 1}, \quad m = 1,2\ldots$$
$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$
$$I_1 = I_0$$
$$I_2 = 4I_0$$
$$I = I_0 + 4I_0 - 2\sqrt{4I_0 I_0} = I_0.$$

Ответ: а) $h = \dfrac{\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda}{n - 1}$, ***m = 0,1,2…; I = 8I₀;***

б) $h = \dfrac{\lambda m}{n - 1}$, ***m = 1,2…; I = I₀.***

10. **(5.44)** На дифракционную решетку

Дано:
$\lambda_ф = 389\ нм = 389\cdot10^{-9}\ м$
$\varphi_{ф1} = 27°33'$
$\varphi_{ф2} = 36°27'$
$\varphi_{к1} = 23°54'$
$\varphi_{к2} = 40°6'$
$m_1 = m_2 = 1$
$\lambda_к$ - ?

Решение:
Главные максимумы наблюдаются под углами дифракции

$$d\sin\varphi = m\lambda$$

Отсюда

$$d\sin\varphi_ф = m_1\lambda_ф$$
$$d\sin\varphi_к = m_2\lambda_к$$
$$\lambda_к = \frac{\sin\varphi_ф}{\sin\varphi_к}\lambda_ф$$

Углы дифракции:

$$\varphi_ф = \frac{\varphi_{ф2} - \varphi_{ф1}}{2}; \qquad \varphi_к = \frac{\varphi_{к2} - \varphi_{к1}}{2}$$

$$\lambda_к = \lambda_ф\cdot\frac{\sin\left(\frac{\varphi_{ф2} - \varphi_{ф1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_{к2} - \varphi_{к1}}{2}\right)}.$$

Подставляя численные значения, находим: $\lambda_к = 706$ нм.

Ответ: $\lambda_к = 706$ нм.

11. **(5.78)** На дифракционную решетку нормально

Дано:
$\varphi = 30°$
$\lambda = 650\ нм = 6{,}5\cdot10^{-7}\ м$
$Д_{лин} = 0{,}5\ мм/нм = 0{,}5\cdot10^6$
f - ?

Решение:
Линейная дисперсия

$$Д_{лин} = f\cdot Д/\cos^2\varphi,$$

где Д – угловая дисперсия.
Угловая дисперсия определяется как угловое расстояние между двумя близкими спектральными линиями, отнесенное к разности длин волн этих линий:

$$Д = d\varphi/d\lambda.$$

Запишем условие двух минимумов, ближайших к максимуму m-го порядка:

$$d\cdot\sin\varphi_1 = m\lambda_1 - \lambda/N,\ d\cdot\sin\varphi_2 = m\lambda_2 + \lambda/N$$

Отсюда

$$d\cdot(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) = m\cdot(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$2\cdot\sin((\varphi_2 - \varphi_1)/2)\cdot\cos((\varphi_2 + \varphi_1)/2) = m(\lambda_2 - \lambda_1)/d.$$

При большом N величина $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi$ мала и $(\varphi_2 + \varphi_1)/2 = \varphi$.

$$d\varphi\cdot\cos\varphi = m\cdot d\lambda/d.$$

Отсюда

$$d\varphi/d\lambda = m/d\cos\varphi$$

Учитывая, что $d\cdot\sin\varphi = m\lambda$, получим:

$$m/d = \sin\varphi/\lambda$$
$$Д = tg\varphi/\lambda$$
$$Д_{лин} = f\cdot tg\varphi/(\lambda\cdot\cos^2\varphi).$$

Фокусное расстояние линзы:

$$f = Д_{лин}\cdot\lambda\cdot\cos^2\varphi/tg\varphi$$

Подставляя численные значения, находим: f = 21,1 см.

Ответ: f = 21,1 см.

12. **(6.2)** Найти угол φ между главными плоскостями анализатора и поляризатора, если интенсивность естественного света, проходящего через анализатор и поляризатор уменьшается в 4 раза.

Дано:

k = 4

φ - ?

Решение:

Интенсивность света I_1, прошедшего через анализатор, равна

$$I_1 = ½·I_0.$$

Здесь I_0 - интенсивность естественного света, падающего на первый поляризатор; коэффициент ½ учитывает то, что проходит только половина естественного света при прохождении через анализатор.

В соответствии с законом Малюса, интенсивность света, прошедшего поляризатор

$$I_2 = I_1·\cos^2φ,$$

$$I_2 = ½·I_0·\cos^2φ.$$

Отсюда

$$k = I_0/I_2 = 2/\cos^2φ.$$

Угол между главными плоскостями анализатора и поляризатора:

$$φ = \arccos[(2/k)^{1/2}]$$

$$φ = π/4 = 45°.$$

***Ответ:** φ = 45°.*

13. (5.57) Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества 45°. Найти для этого вещества угол полной поляризации.

Дано:

$i_{пр} = 45°$

i_B - ?

Решение:

Угол полной поляризации определяется из соотношения:

$$\operatorname{tg} i_B = n_2/n_1.$$

Предельный угол полного внутреннего отражения определяется из соотношения:

$$\frac{\sin i_{пр}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Отсюда

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sin i_{пр}}$$

$$i_B = arctg\left(\frac{1}{\sin i_{пр}}\right)$$

$$i_B = arctg\left(\sqrt{2}\right) = 54°44'.$$

***Ответ:** $i_B = 54°44'$.*