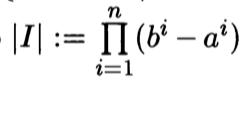
## Интеграл Римана на n-мерном промежутке

Определение 1: Множество I = { x € Rn | ai < =xi < =bi, i = 1..n} называется промежутком или координатным параллелепипедом в Rn.

Определение 2: Промежутку I = { x € Rn | ai < xi < bi, i = 1..n} ставится в соответствие число 

называемое объемом или мерой промежутка.

Если некоторый промежуток является объединением несколько промежутков, и эти промежутки попарно не имеют общих внутренних точек, то мера исходного промежутка равна сумме мер объединяемых промежутков.

Определение 3: Диаметром множества Е ⊂ Rn называется d(E) = sup p(x,y) (x ∈ E, y ∈ E)

^2

Определение 4: Множество всех {} называется разбиением промежутка

P - определение для разбиения n-мерного промежутка.

Определение 5: Параметром разбиения Р называется

Пусть

Определение 6: Разбиение с отмеченными точками называется разбиением, в каждом промежутке которого отмечена точка

Определение 7: Интегральной суммой функции f на разбиении с отмеченными точками называется число

{} - база.

Определение 8: Интегралом функции f на промежутке I называется число

Необходимое условие интегрируемости (существование конечного предела)

## 2. Множество Лебеговой меры нуль. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

Определение 1: Множеством меры 0 называется подмножество Rn, что для найдется система n-мерных промежутков, сумма мер которых <и объединение которых содержит это множество.

Количество промежутков в системе либо конечно, либо счетно.

Примеры: точка, конечное число точек, счетное число точек.

Свойства множеств меры 0

Объединение конечного или счетного числа множеств меры 0 есть множество меры 0.

Подмножество меры 0 имеет меру 0

Теорема (необходимое условие интегрируемости)

f - интегрируема на

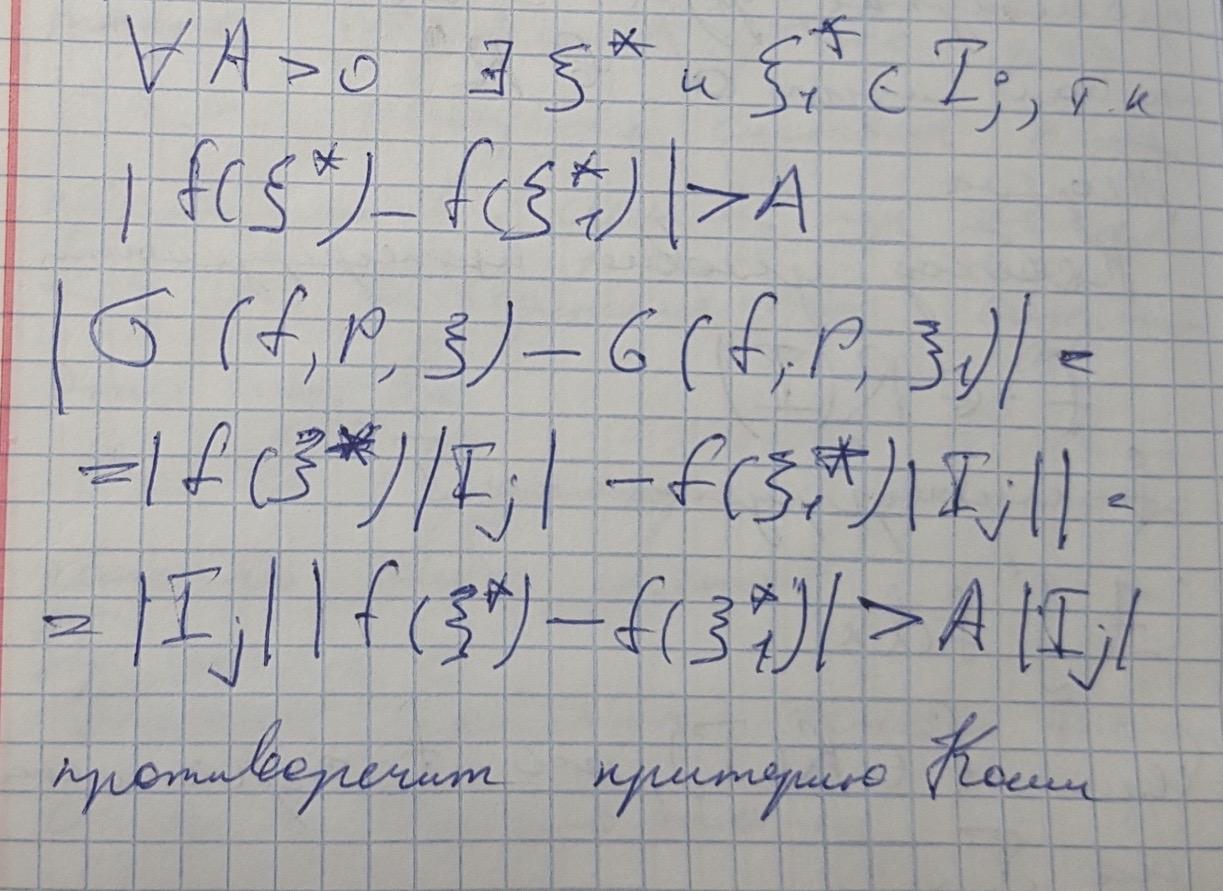
Если , то f - ограничена на

Доказательство:

P - разбиение

Если f не огр на , то

Пусть - 2 набора отмеченных точек на промежутках разбиения Р. Эти наборы совпадают для всех промежутков из Р, кроме промежутка



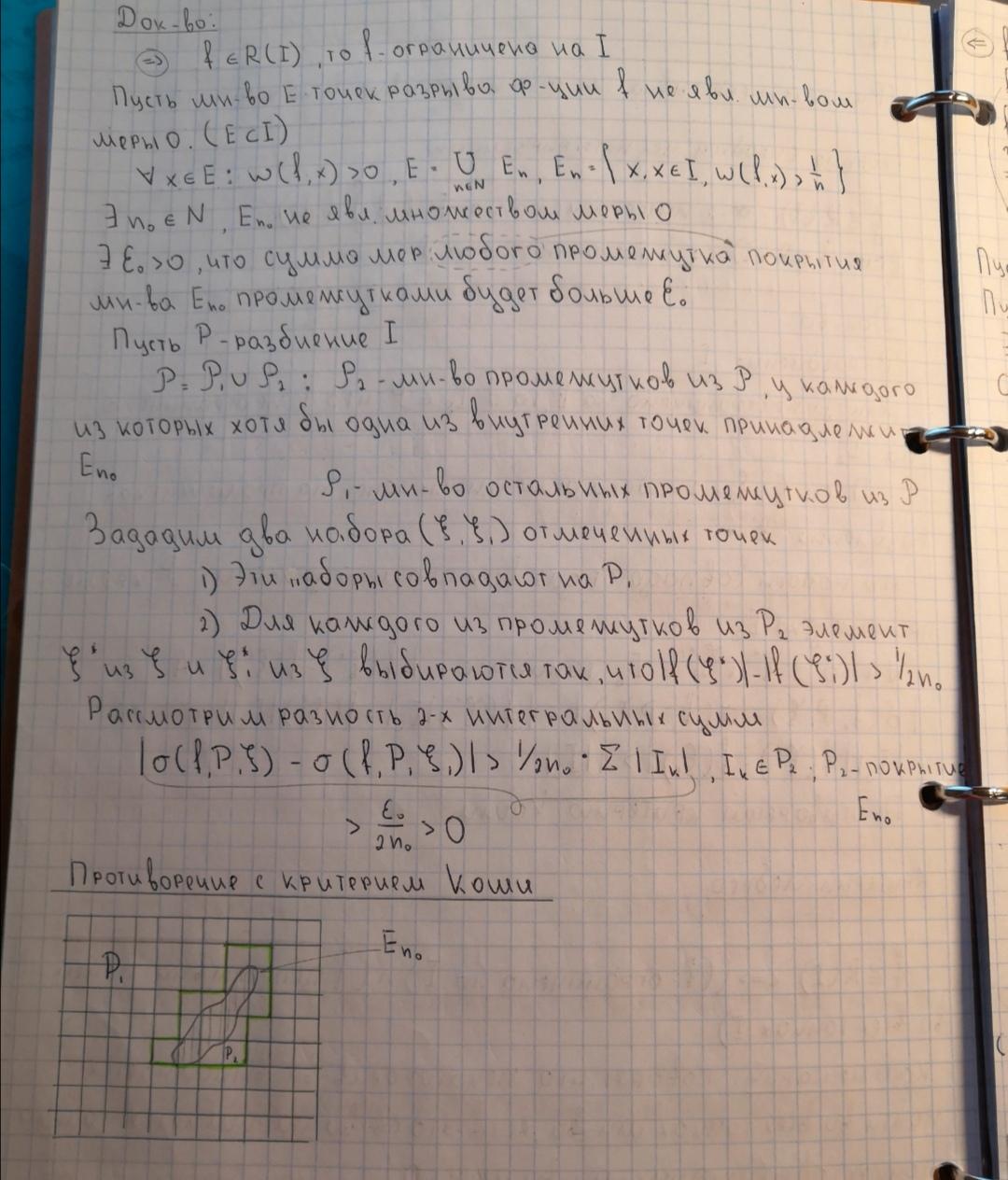
Критерий Лебега интегрируемости функции.

Функция () (интегрируема по риману) ((f - ограничена на ) (f непрерывна почти во всех точках ))

Комментарий:

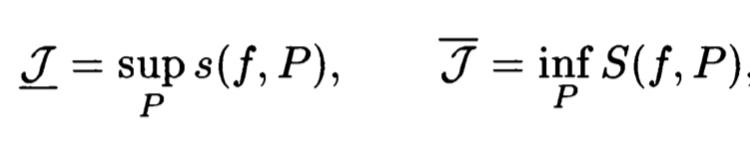
Говорят, что некоторое свойство выполняется почти во всех точках множества, если это свойство нарушается только в точках образующих множество меры 0.

Доказательство:



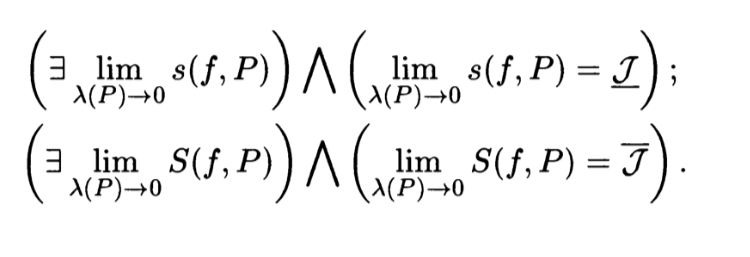
## 3. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции

Определение 1: Нижним и верхним интегралом (Дарбу) от функции на промежутке I называются соответственно величины

TV

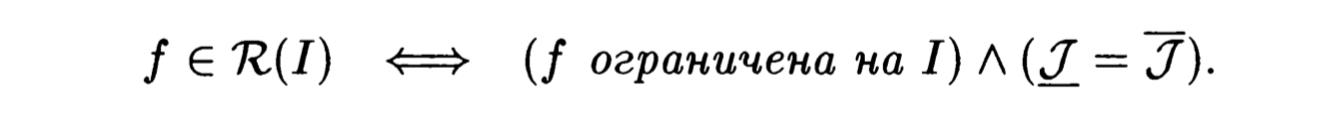
где верхняя и нижняя грани берутся по всевозможным разбиениям P промежутка I.

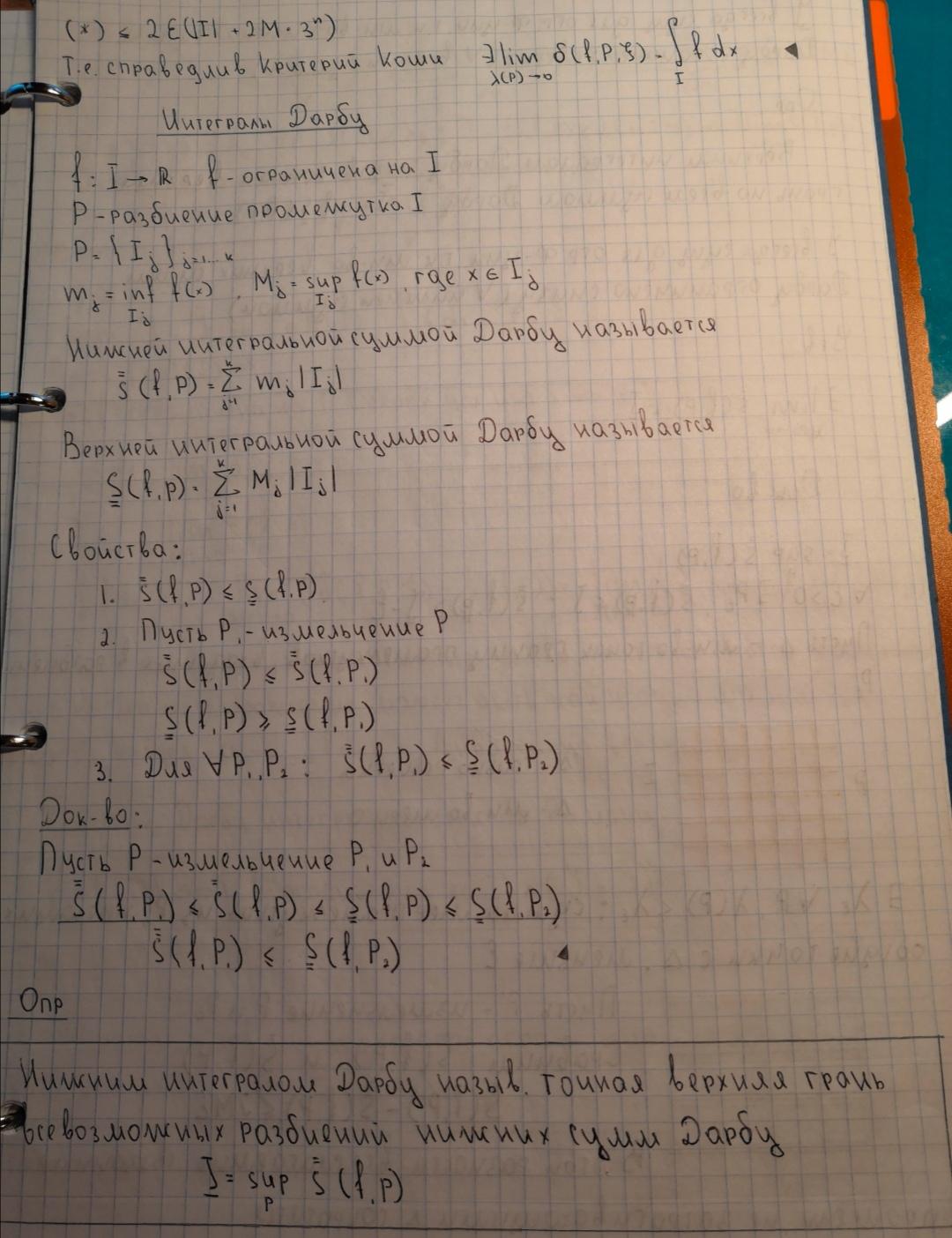
Теорема(Дарбу): Для любой ограниченной функции имеют место утверждения:

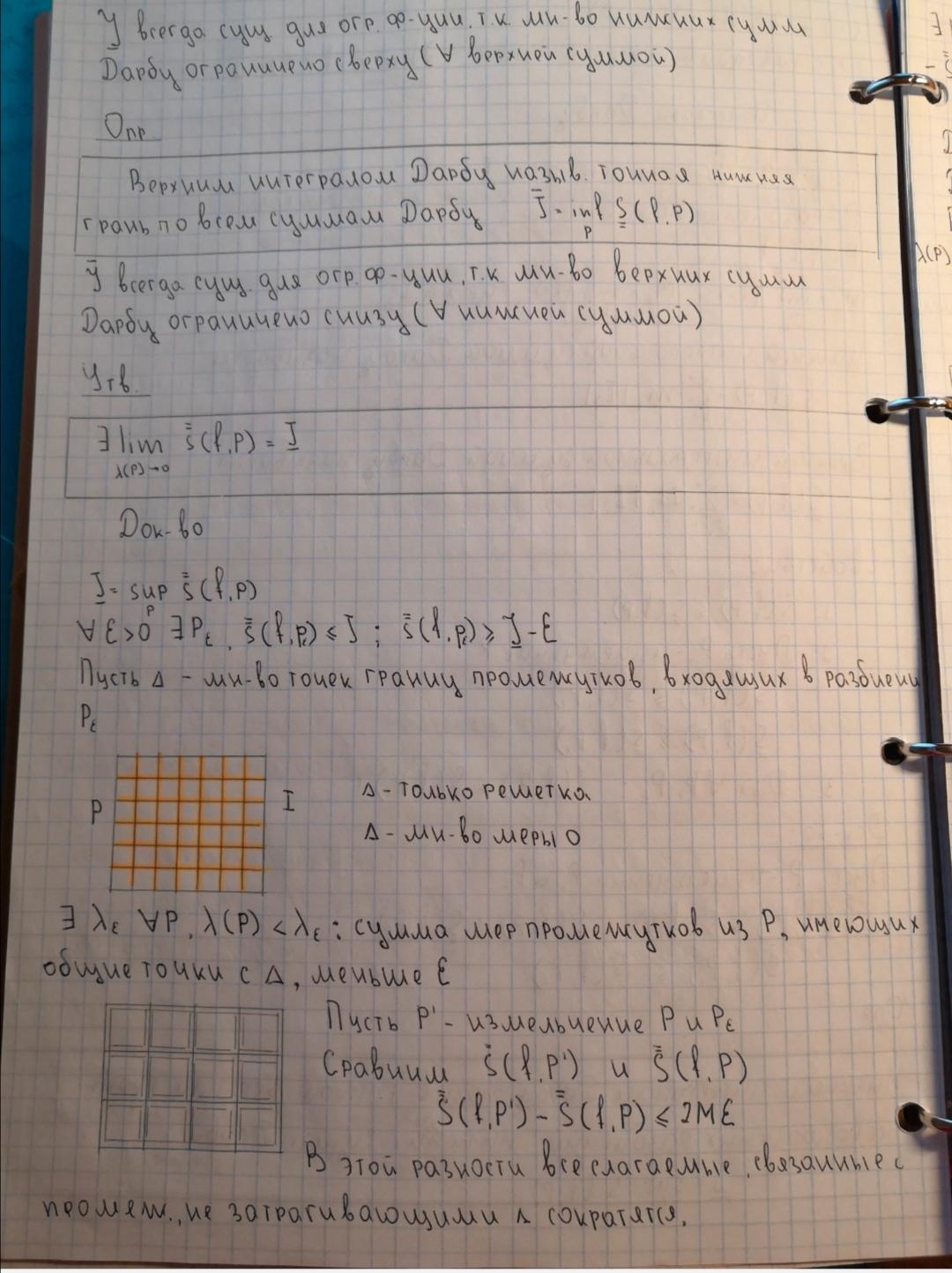


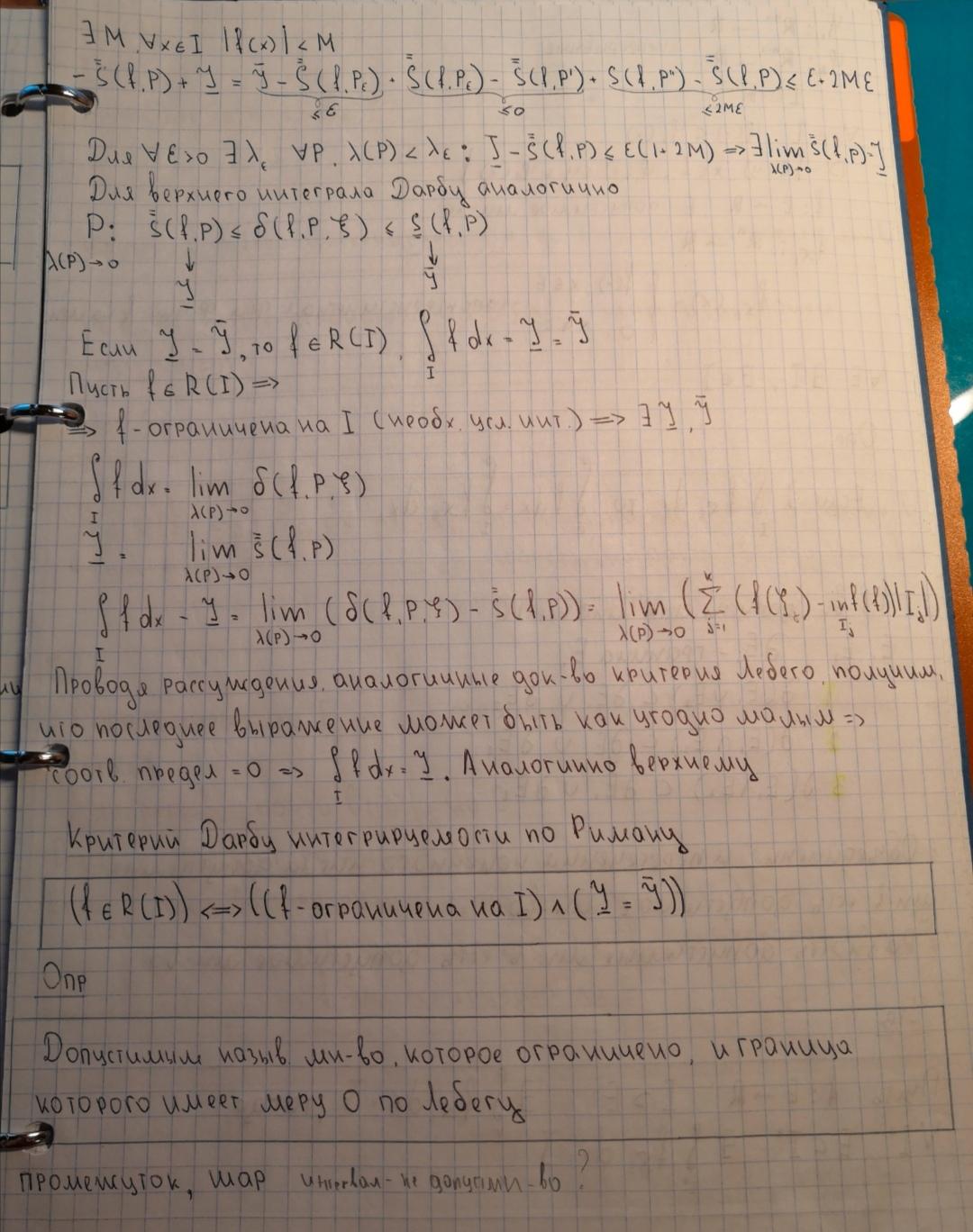
Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции:

Определенная на промежутке вещественнозначная функция интегрируема на нем тогда и только тогда, когда она ограничена на и ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают.









## 4. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества и ее геометрический смысл. Критерий Лебега существования интеграла по измеримому множеству

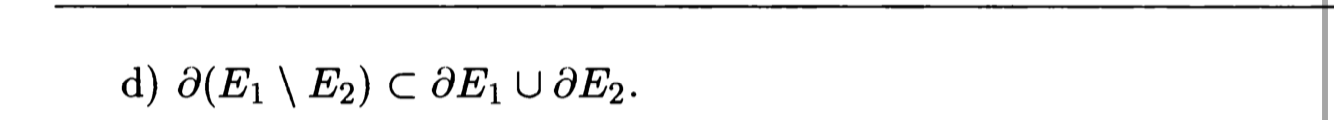
Определение 1: Допустимым называется множество, которое ограничено и границы которого имеют меру 0 по Лебегу.

Примеры: куб, тетраэдр, шар в р3

Определение 2: Если , то

Свойства допустимых множеств:





Объединение и пересечение конечного числа допустимых множеств есть допустимое множество.

Разность допустимых множеств - допустимое множество.

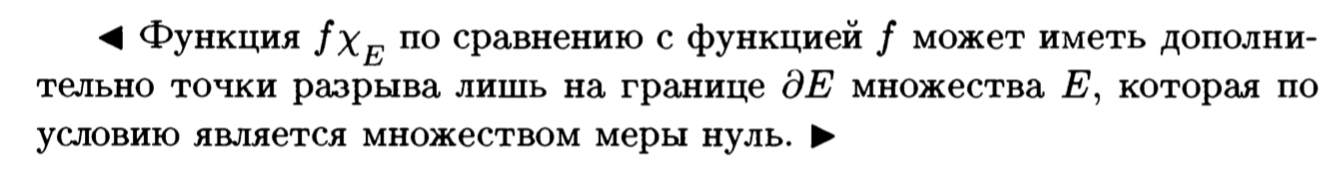
Утверждение:

Пусть ;

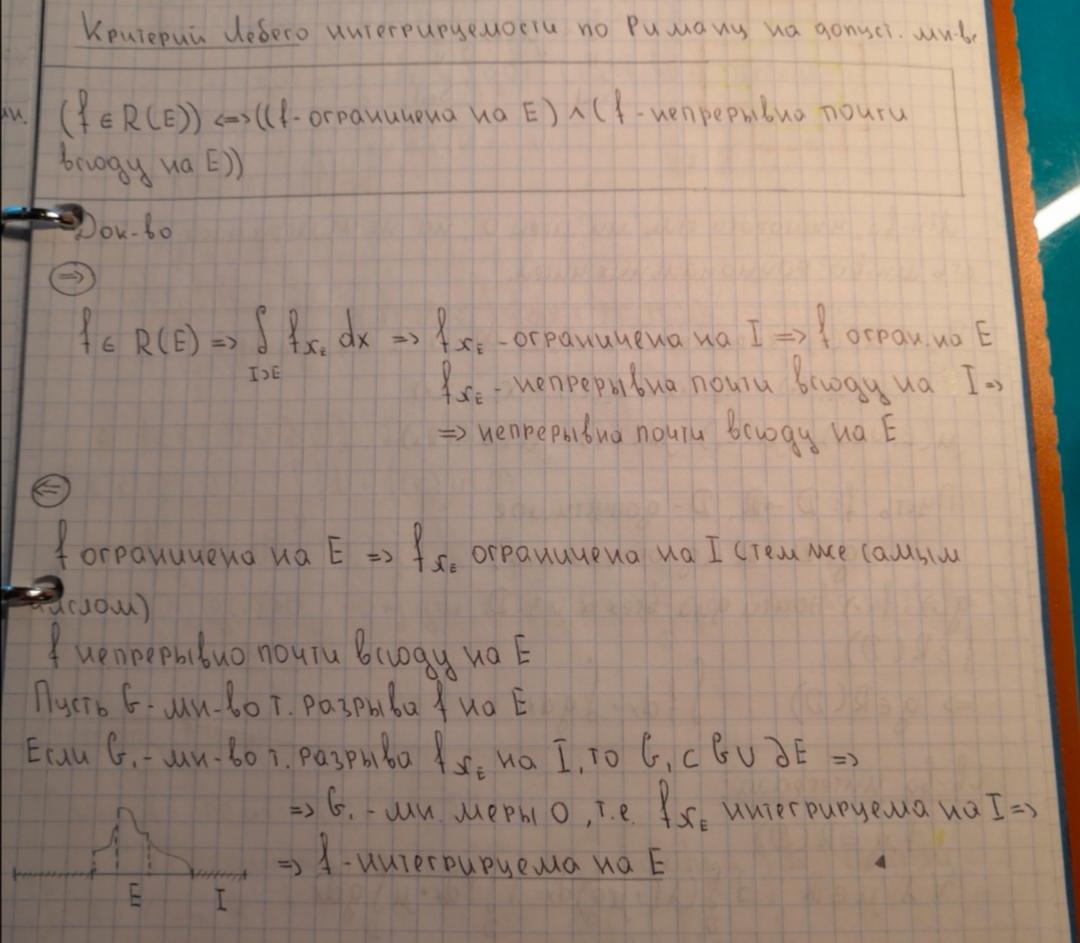
Тогда

Критерий Лебега интегрируемости по Риману на допустимом множестве.

Функция интегрируема на допустимом множестве тогда и только тогда, когда она ограничена и непрерывна почти во всех точках множества Е.



Док-во:



Определение: Мерой (Жордана) или объемом ограниченного множества - число

Геометрический смысл:

есть общий предел при объемов вписанных в Е и описанных около Е многогранников, что совпадает с принятым представлением об объеме простых тел

## 5.Общие свойства интеграла

1) f, g

Интеграл называется функционалом на множестве классов эквивалентности на множестве функции.

В одном классе две функции отличаются не больше, чем на множество меры 0.

2) Аддитивность

(

3) f,g - интегрируемы на множестве, для любого х из этого множества если f(x)>=g(x), то с интегралами то же самое.

4) f - интегрируема на множестве Д, модуль интеграла <= модуль интеграла от модуля f

5)

- Жорданова мера

6)

7) f,g

m <= f(x) <= M =>

m

## 

## 

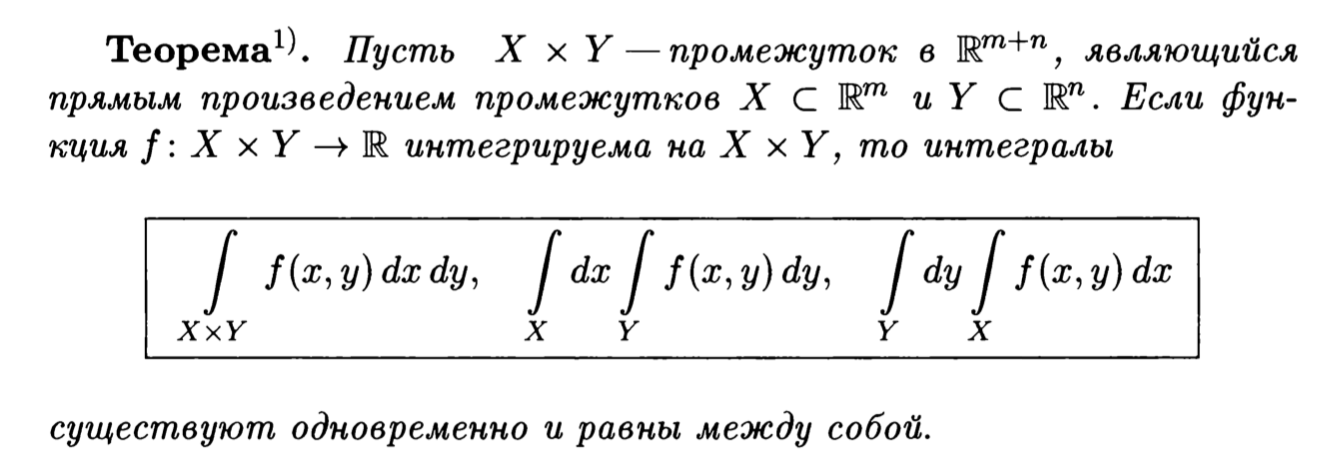
## 

## 6.Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема Фубини

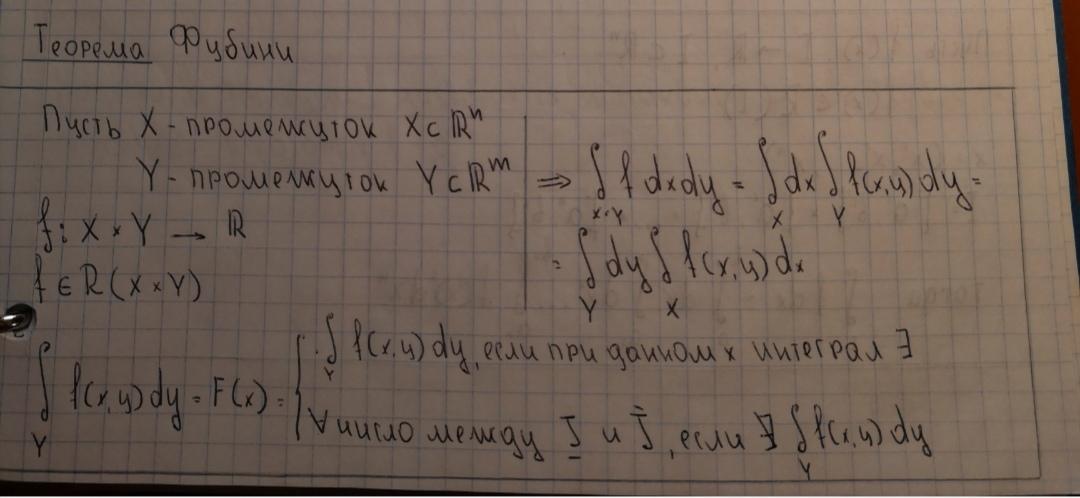
Теорема Фубини (в лекции нихуя непонятно):

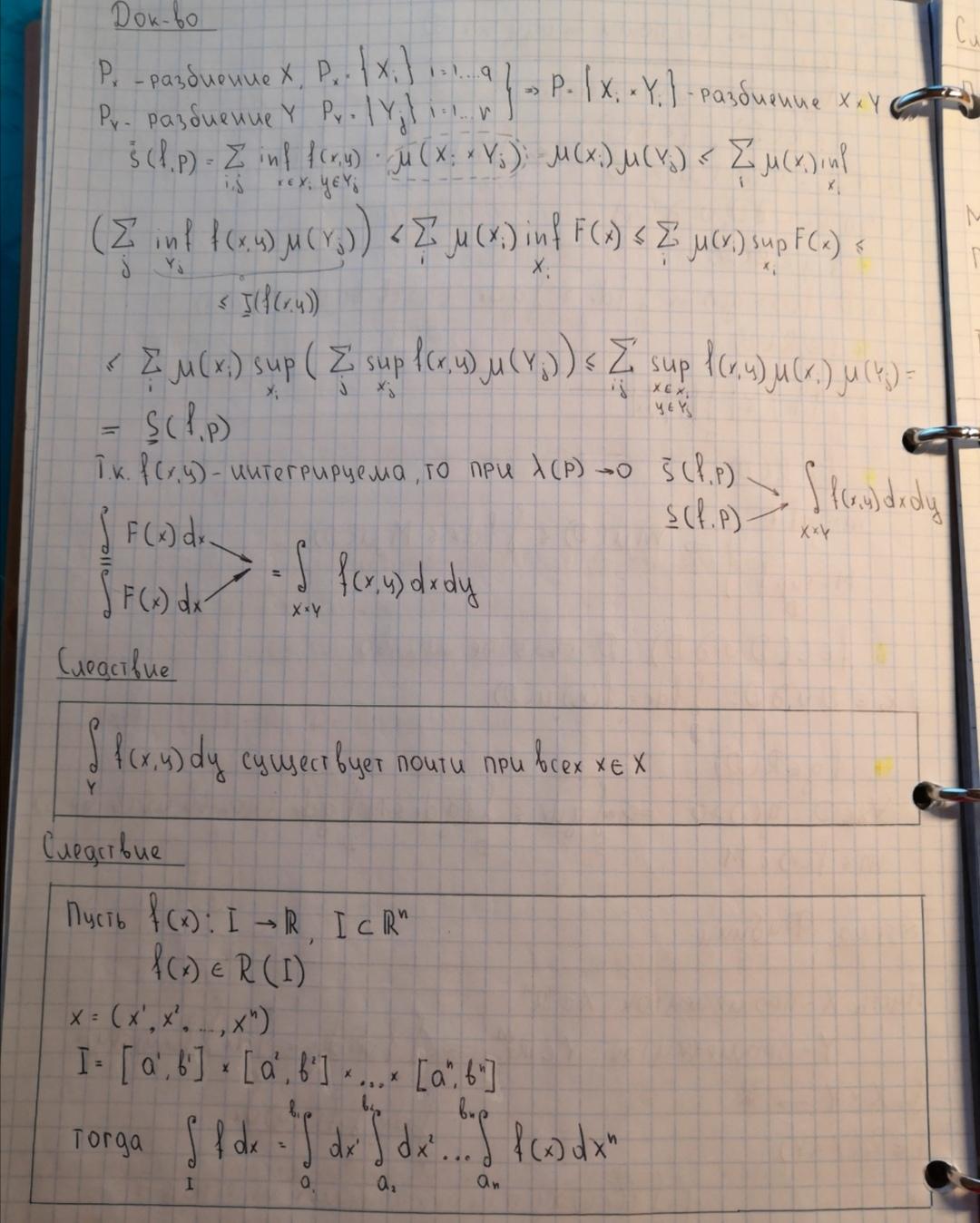
J

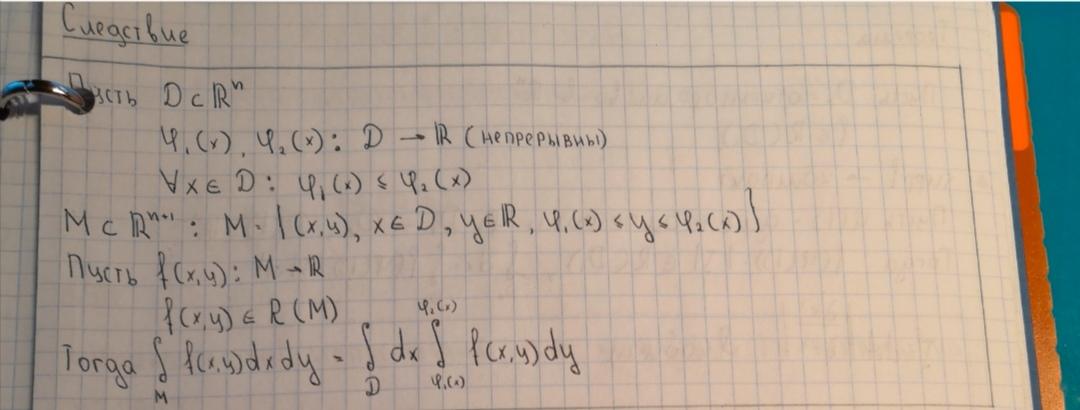
Эта же хуйня из Зорича:



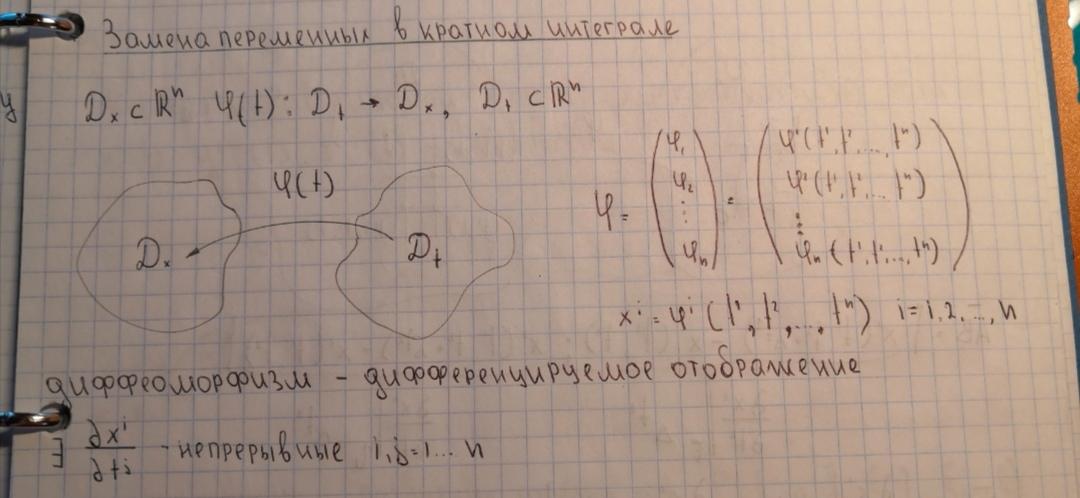
Формулировка, док-во и следствия:







7. Замена переменных



Определение: Носителем функции называется замыкание множества точек области определения, в которых функция не равна нулю.

Теорема: Пусть Dx - открытое множество в Rn. Пусть f интегрируема на Dx, причем носитель функции - компакт. Пусть φ(t) - диффеоморфизм φ:Dt -> Dx, тогда f(φ(t))\*|J| интегрируема на Dt.

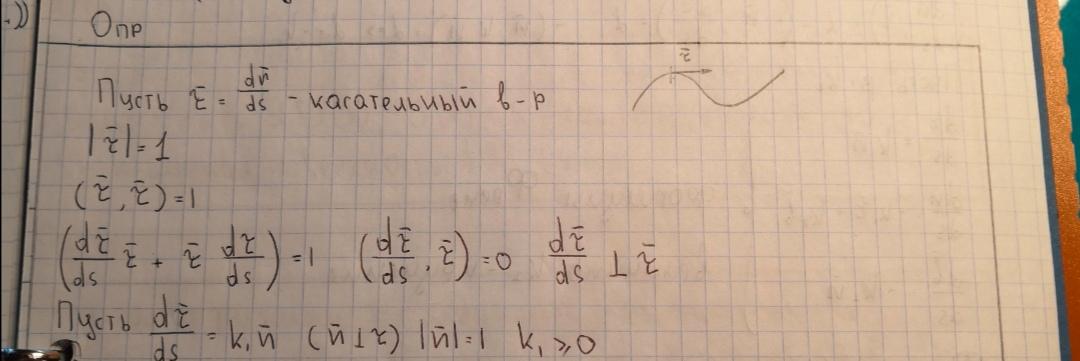
J - Якобиан.

## 8.Параметрически заданная кривая. Касательная к кривой

Определение: Кривой в R3 называется отображение

Определение: Кривая называется непрерывной, если x(t), y(t), z(t) - непрерывна на [a,b]

Определение: Кривая называется гладкой с порядком гладкости n, если - непрерывна



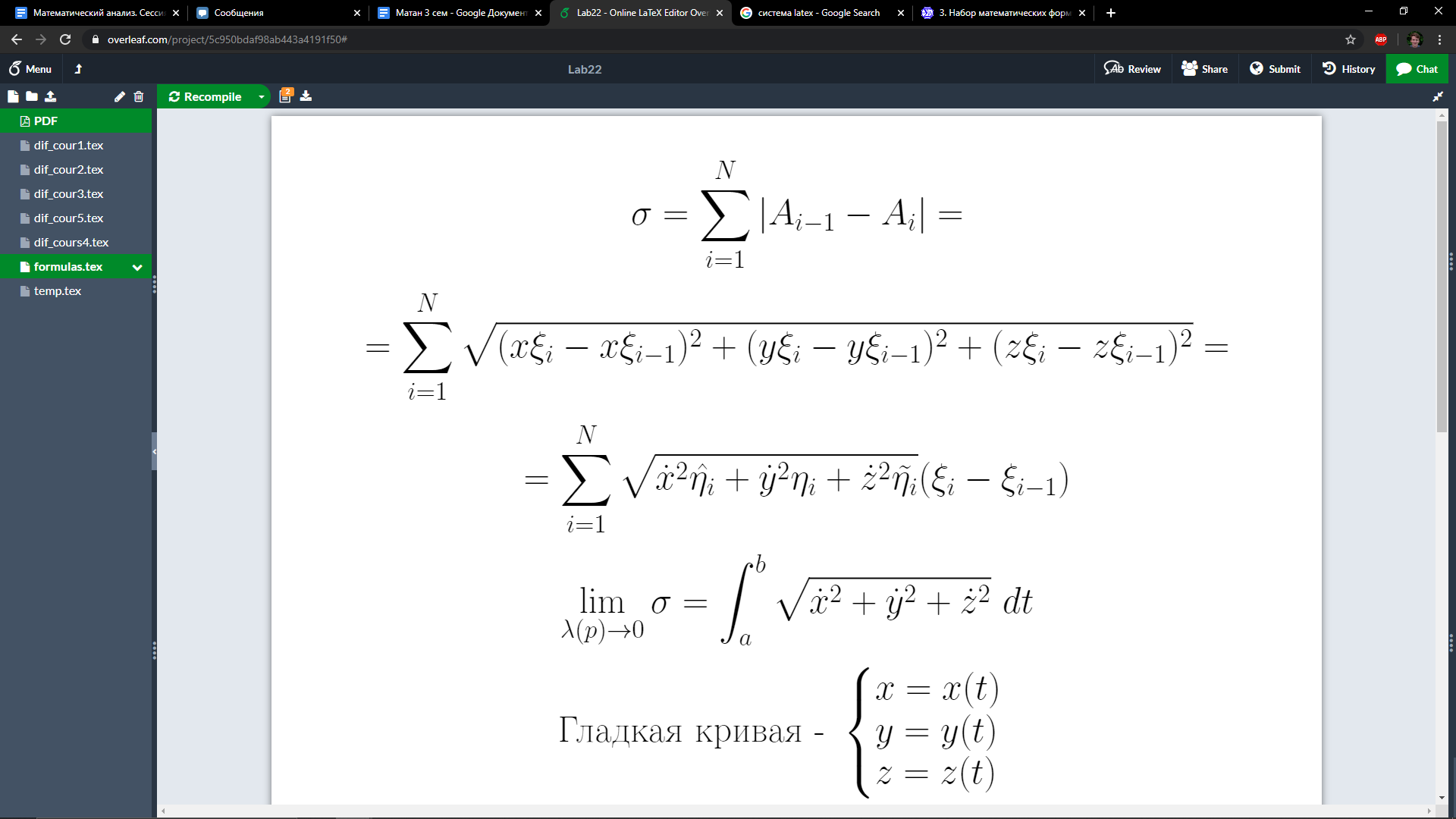
## 9.Длина дуги кривой. Натуральная параметризация.

Определение: Если существует sup{σ} = l, то l называется длиной кривой.

Утверждение: Если кривая имеет длину, то существует конечный .

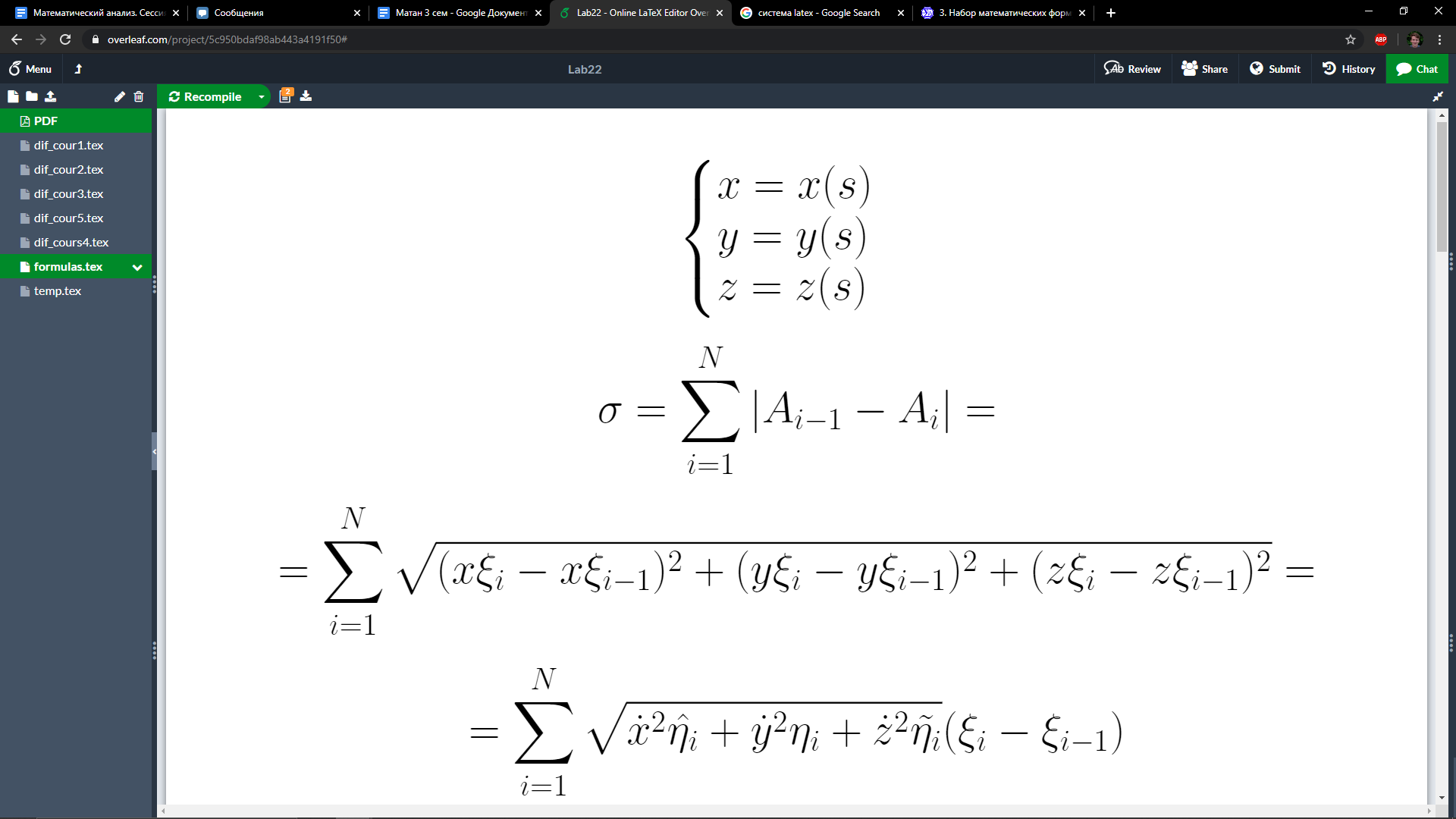
Вычисление длины:

x(t), y(t), z(t) - C1[a, b]



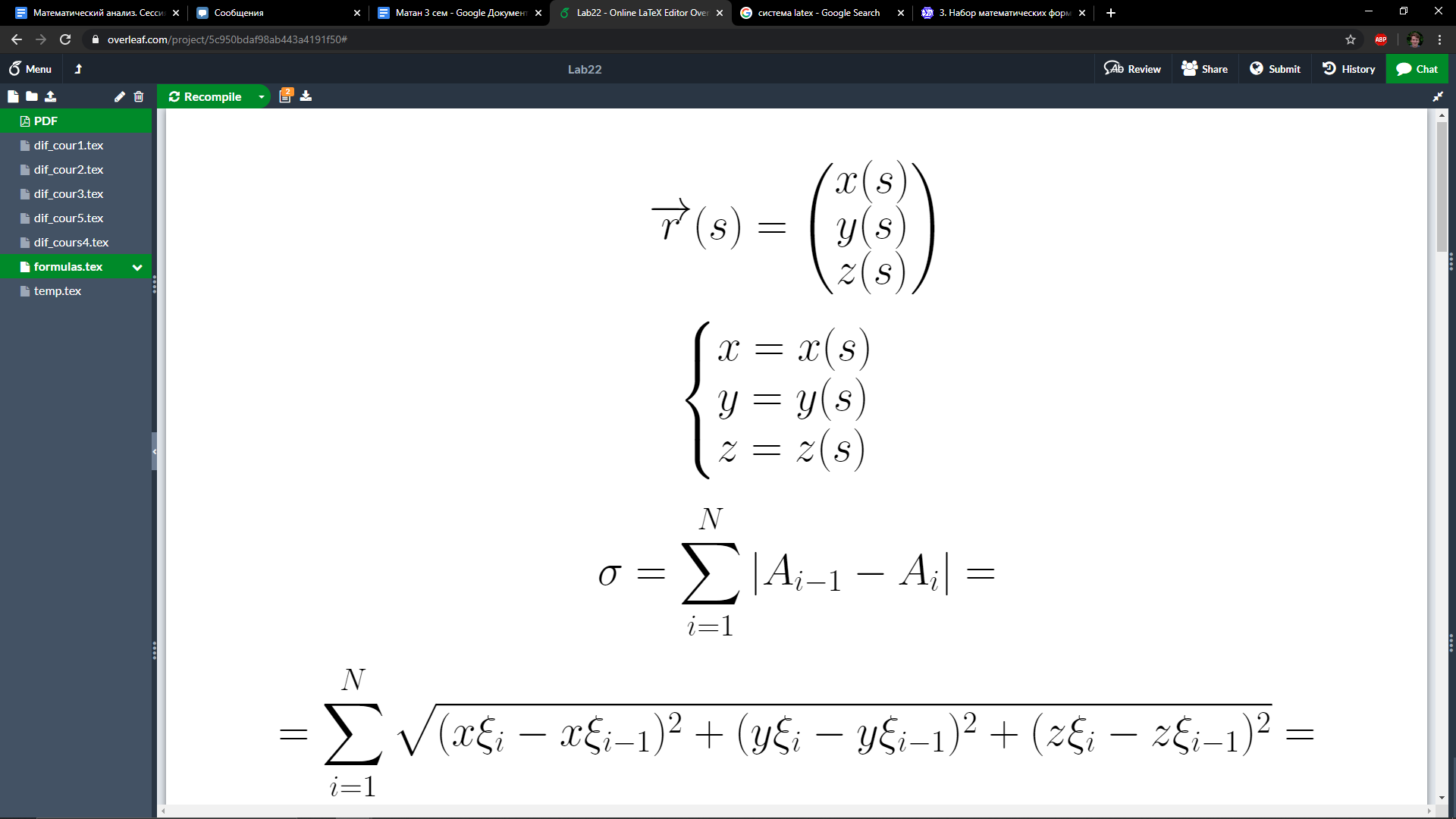
t ∈ [0, T]

s = s(t). s = s(t) <-> t = t(s). Подставим t(s) в x, y, z вместо t и получим кривую в виде

- натуральная параметризация.

s ∈ [0, L] - натуральный параметр.

10. Естественный трехгранник кривой. Формулы Френе.



Определение: Пусть - касательный вектор. .

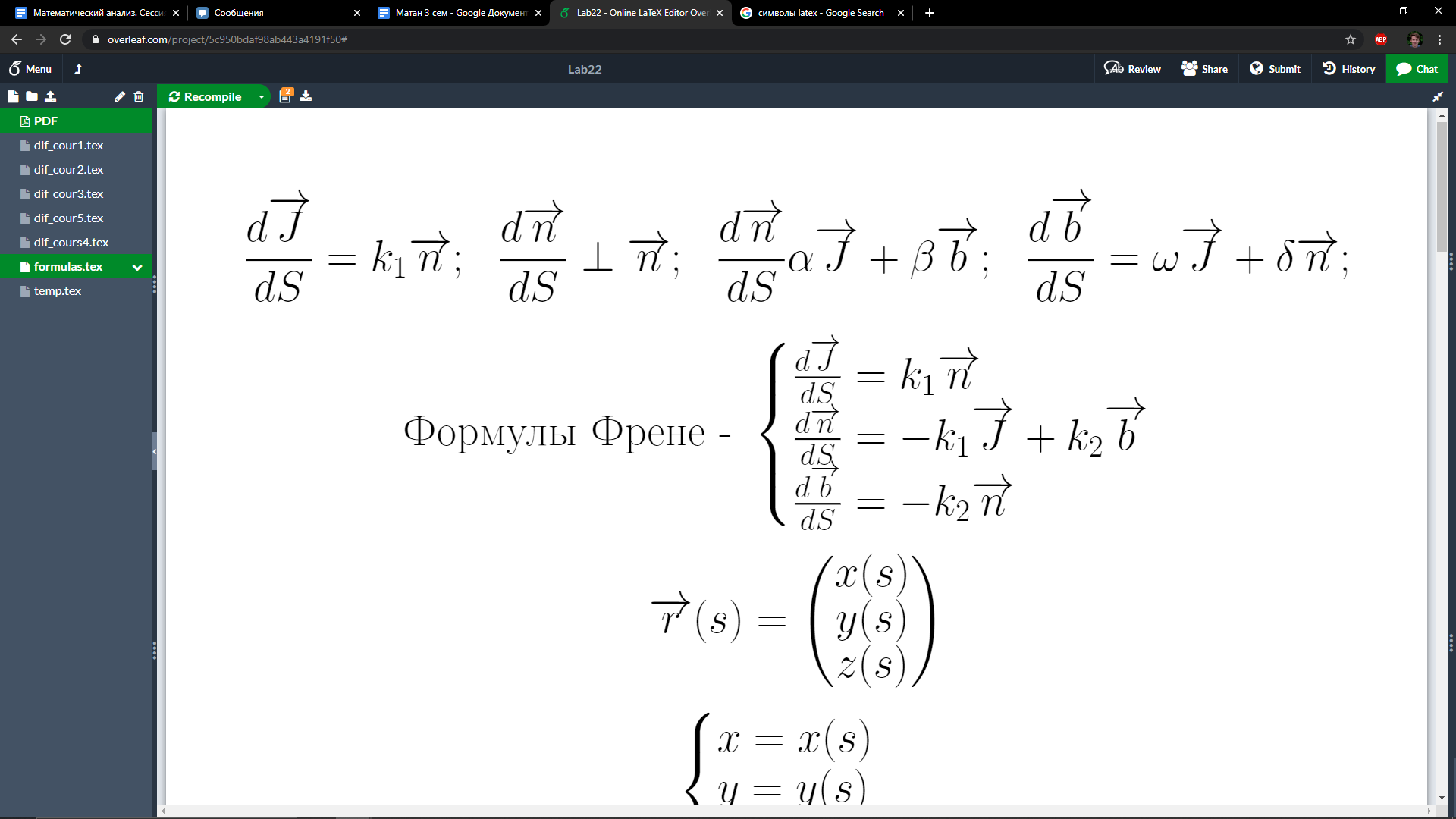
Определение: - главная нормаль к кривой в рассматриваемой точке.

Определение: k1 - кривизна в рассматриваемой точке.

Определение: k2 - кручение кривой в рассматриваемой точке.

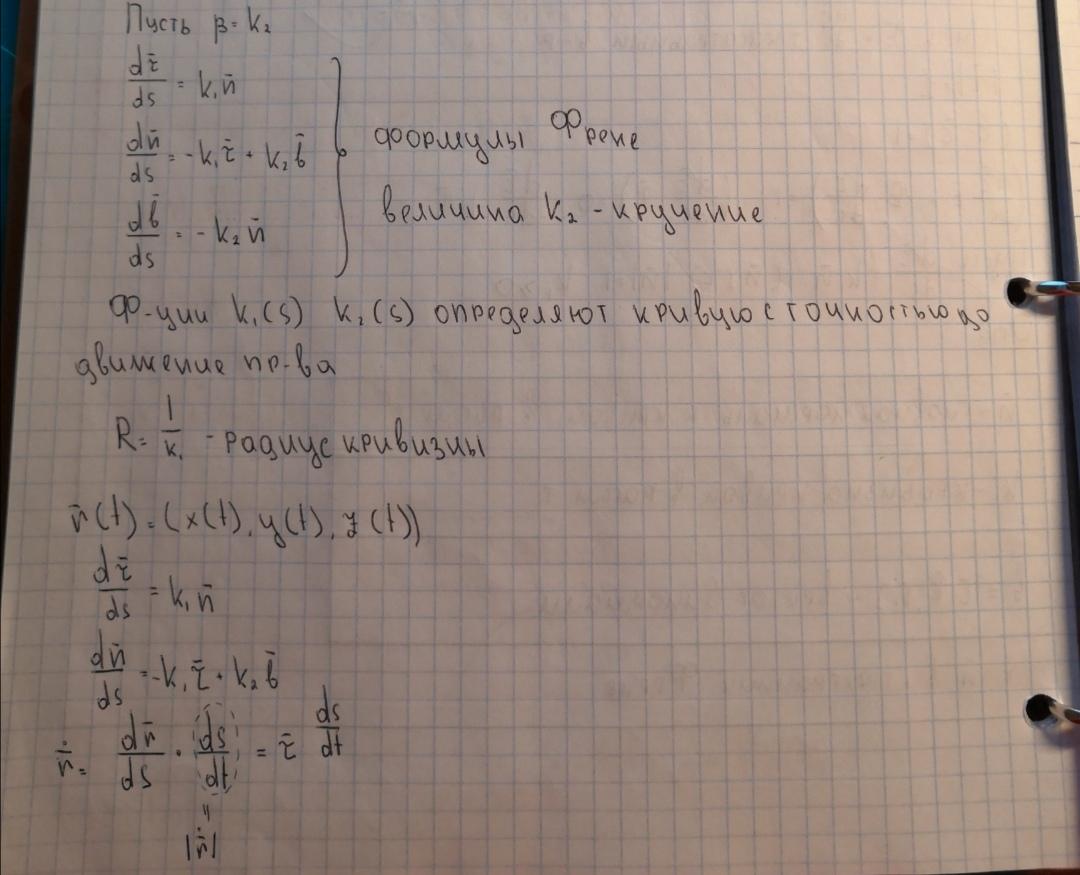
Определение: - вектор бинормали.

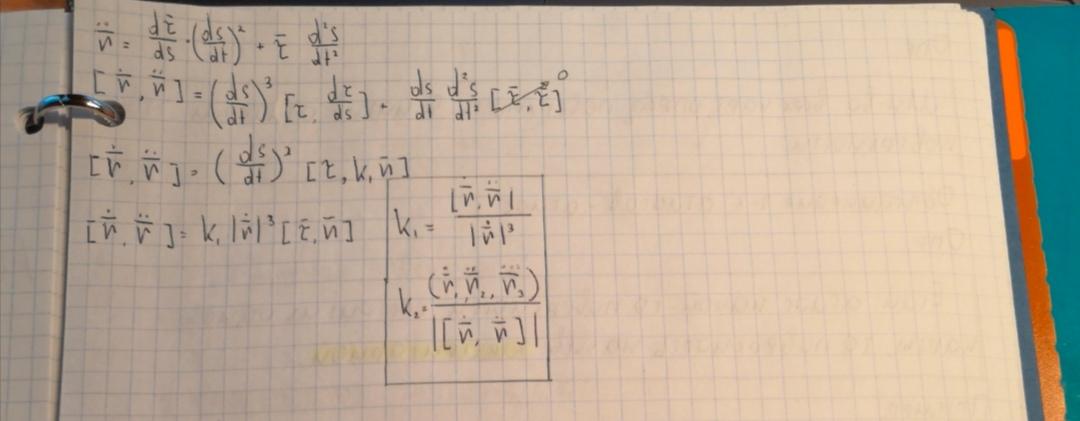
- трехгранник Френе.



## 

## 11. Кривизна и кручение кривой





## 

## 12.Поверхность в евклидовом пространстве. Примеры

Определение:

Если для любого х : - гомеоморфно Rk, то S - называется k-мерной поверхностью в Rn (k<n).

Гомеоморфизмом 2-х множеств назыв биективное отображение этих множеств друг на друга, непрерывное в обе стороны.

Определение: называется картой поверхности S.

Отображение вводит координатную структуру в множестве

Определение: Множество всех карт, определяющих поверхность S называется атласом этой карты.

Замечание: объединение двух атласов - атлас

Определение: Если атлас состоит из 1 карты, то поверхность называется элементарной.

Пример:

f: D -> R (D Rn) График f - элементарная поверхность Rn+1

Будем считать, что все функции, опред карты, явл k - минимум непрерывно дифференцированными

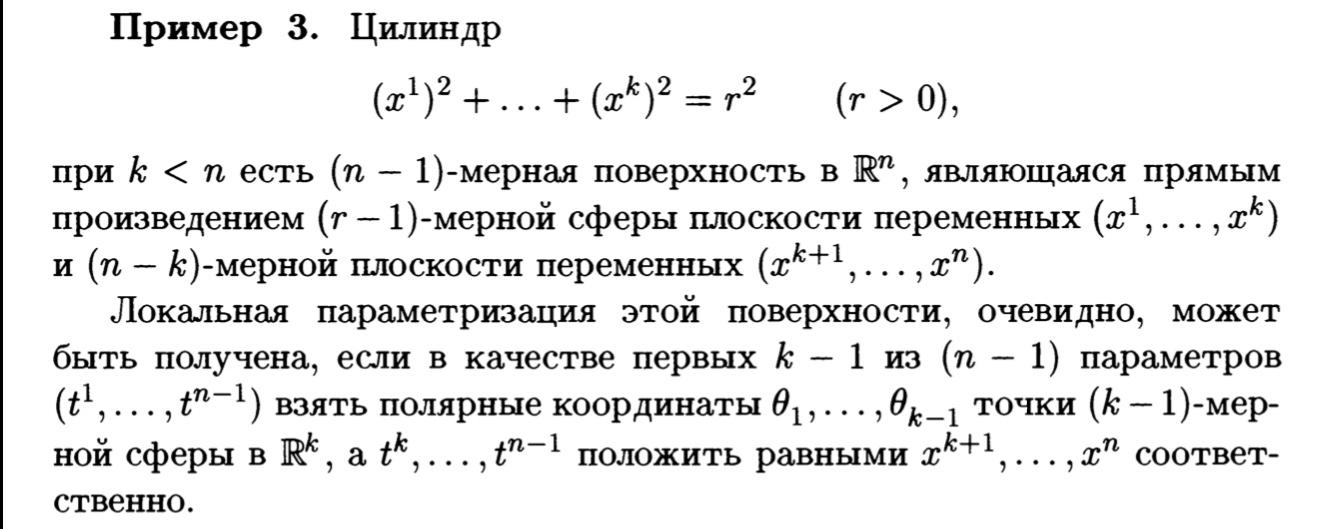
Пример: непрерывно дифференцируемая, но не гладкая

x = t^2

y = t^3



Поверхность называется гладкой, если все скалярные функции, опред карты которой поверхности являются гладкими и для любой карты ранг максимален в любой точке области определения карты( =k)



## 13. Ориентация поверхности. Ориентируемые и неориентируемые поверхности

Определение: Две локальные карты поверхности называют согласованными, либо когда районы их действия не пересекаются, либо когда это пересечение непусто и взаимные переходы в общей области действия этих локальных карт осуществляются диффеоморфизмами с положительным якобианом.

Определение: Атлас поверхности называется ориентирующим атласом поверхности, если он состоит из попарно согласованных карт.

Определение: Поверхность называется ориентируемой, если она обладает ориентирующим атласом. В противном случае поверхность называется неориентируемой.

Определение: Класс эквивалентности ориентирующих атласов поверхности по указанному отношению эквивалентности называется классом ориентации атласов поверхности или просто ориентацией поверхности.

Определение: Ориентированной поверхностью называется поверхность с фиксированным классом ориентации ее атласов (те с фиксированной на ней ориентацией)

Определение: Ориентировать поверхность - тем или иным способом указать определенный класс ориентации ориентирующих атласов этой поверхности.

Утверждение: На ориентируемой связной поверхности существует точно две ориентации. (взаимно противоположные)

## 

## 14. Край поверхности. Согласованная ориентация поверхности и ее края

Пусть Rk - Евклидово пространство.

Определение: Полупространством Hk называется множество вида Hk = {(t1, t2, …, tk), t1 ≥ 0}.

Определение: Краем полупространства называется множество δHk = {(t1, t2, …, tk), t1 = 0}

Определение: Поверхностью с краем размерности k называется подмножество S пространства Rn (n ≥ k) такое, что для любого x из S ∃U(x) и U(x) ∩ S гомеоморфная либо Rk, либо Hk.

Определение: Если S - поверхность с краем и преобразование точки x из S при соответствующем гомеоморфизме является точка из δHk, то точка x называется точкой края поверхности S.

Определение: Множество точек края называется краем поверхности.

Если поверхности ориентированы, всегда можно согласовать ориентации поверхности и ее края.

## 15. Площадь поверхности в евклидовом пространстве

Определение: Кусочно-гладкой поверхностью размерности 1 называется множество, которое после удаления из него конечного или счетного числа точек распадается на одномерные гладкие поверхности.

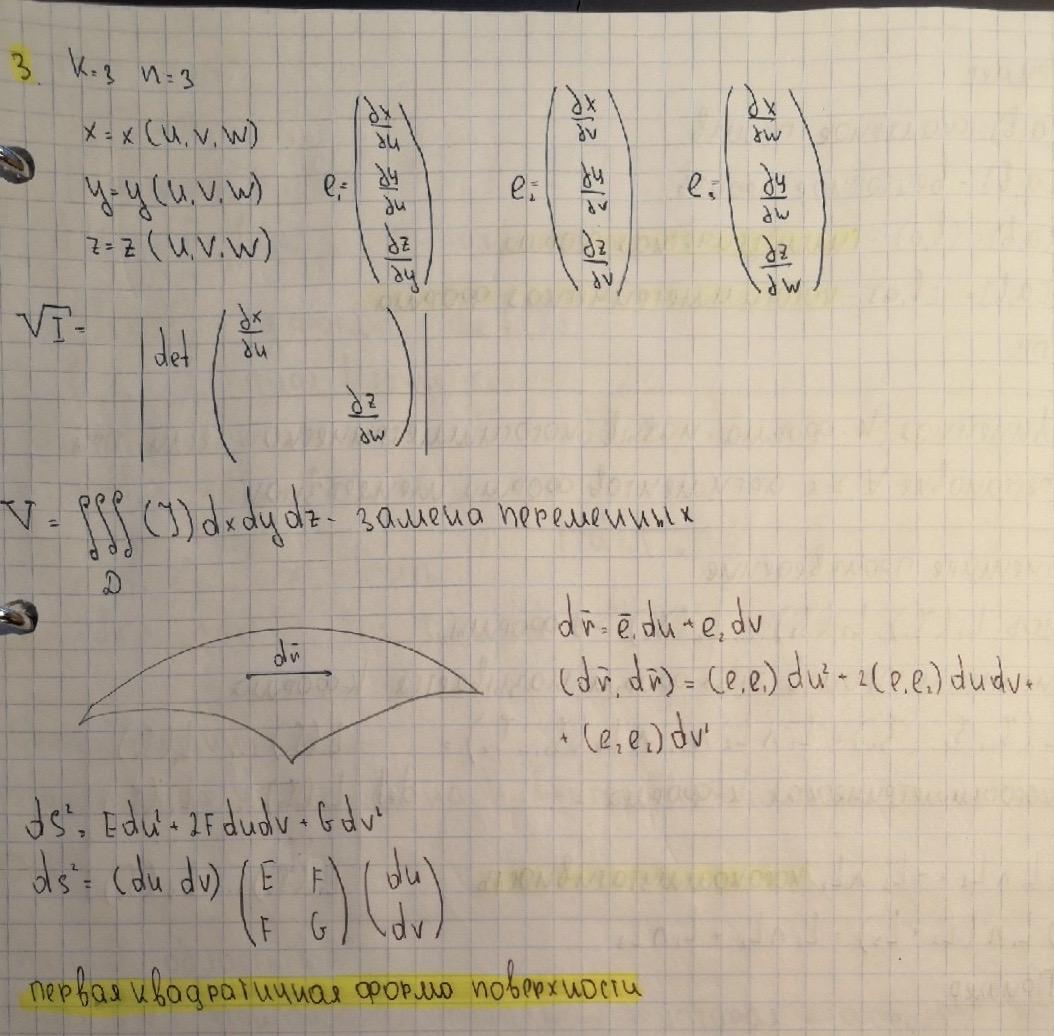
Определение: Кусочно-гладкой поверхностью размерности k называется множество, которое после удаления из него конечного или счетного числа кусочно-гладких поверхностей размерности, не превышающей k-1, на гладкие k-мерные поверхности.

Определение: Если поверхность гладкая, то в каждой точкой этой поверхности существует базис касательного пространства.

Определение: Объемом k-мерной поверхности называется

I - определитель Грамма рассматриваемого базиса. I = AT\*A

## 16. Первая квадратичная форма поверхности. Площадь поверхности в R3



## 

## 

## 17. Алгебра форм. Кососимметрические формы. Операция внешнего умножения

L : V -> W

L(- линейная форма

L : V^2 -> W, L(x,y) - линейна по каждому аргументу

билинейная форма 2-форма

Пример: скалярное и векторное произведения

Определение: Линейная k-форма называется кососимметрической при перестановке любых 2 аргументов форма меняет знак.

Внешнее произведение:

Пусть - 1-формы

Внешнее произведение этих форм называется k-форма.

1)- кососимметрическая

2)

## 

## 

## 

## 

## 

## 18. Дифференциальные формы в областях евклидова пространства. Определения и примеры: дифференциал функции, форма работы, форма потока

Определение: Пусть D - область Rn. Пусть в каждой точке этой области определена некоторая k-форма, тогда говорят, что в этой области определена дифференциальная форма.

Утверждение: Если функция f - дифференцируема в области D, то ее дифференциал является дифференциальной 1-формой в области D

Пусть в области D задано векторное поле V(x)

D,

Определение: форма работы(дифференциальная 1-форма на D)

T, дифференциальная 2-форма, форма потока.

Пример:



…

## 

## 19. Координатная запись дифференциальной л

Пусть у нас есть дифференциальная форма порядка P

x , - базис в пространстве в Т

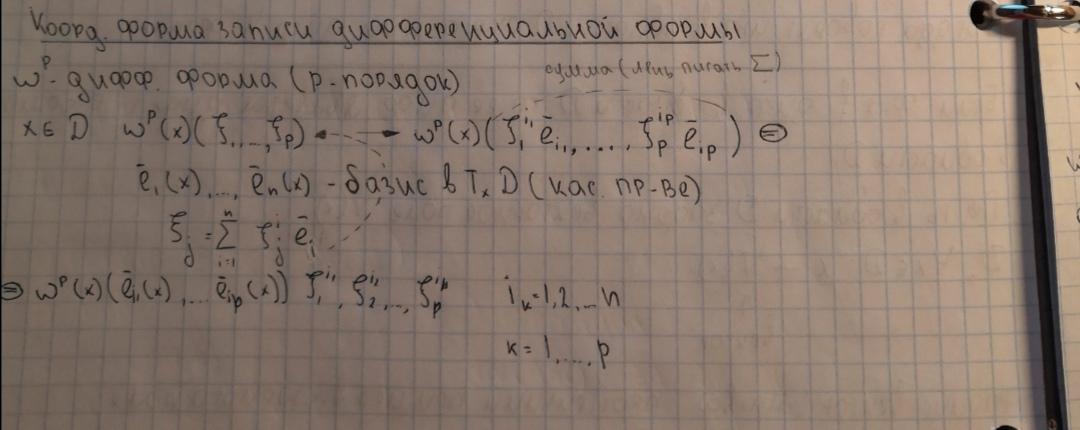
- разложение по базису

= и

Общий случай:

Акккааааи п

Тоже самое только подробнее + пример:



20. Внешний дифференциал формы

- дифференциальная форма

Дифференциалом формы называется форма

Замечание: При внешнем дифференцировании порядок формы увеличивается на 1.

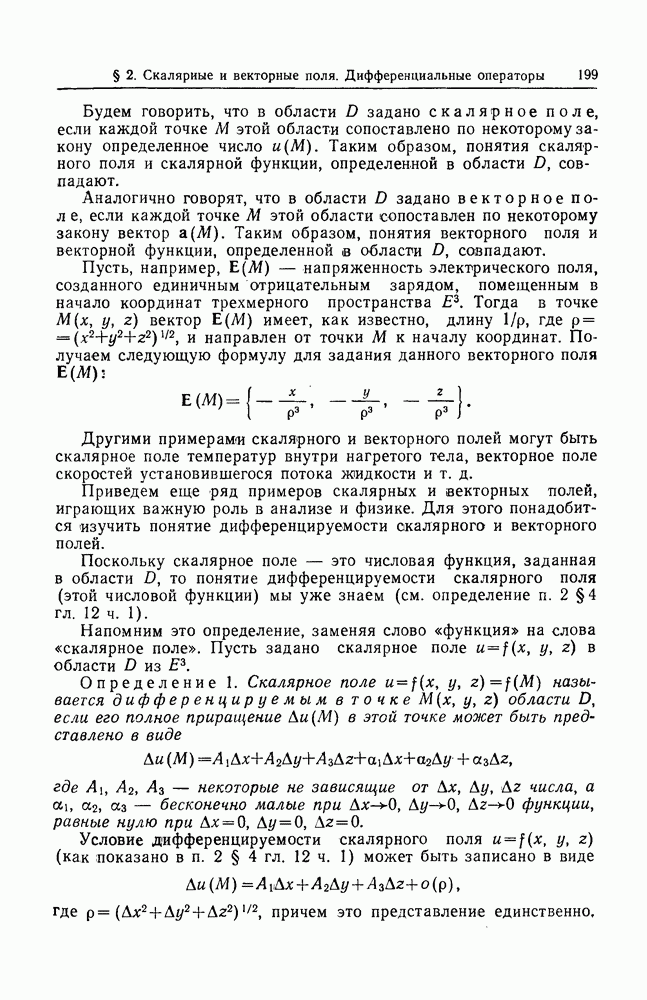
Часто функция - дифференциальная форма нулевого порядка.

## 21. Скалярные и векторные поля в областях евклидова пространства. Связь с дифференциальными формами

Определение: Пусть D - некоторая область. Будем говорить, что в D задано скалярное поле, если каждой точке M этой области сопоставлено по некоторому закону определенное число u(M).

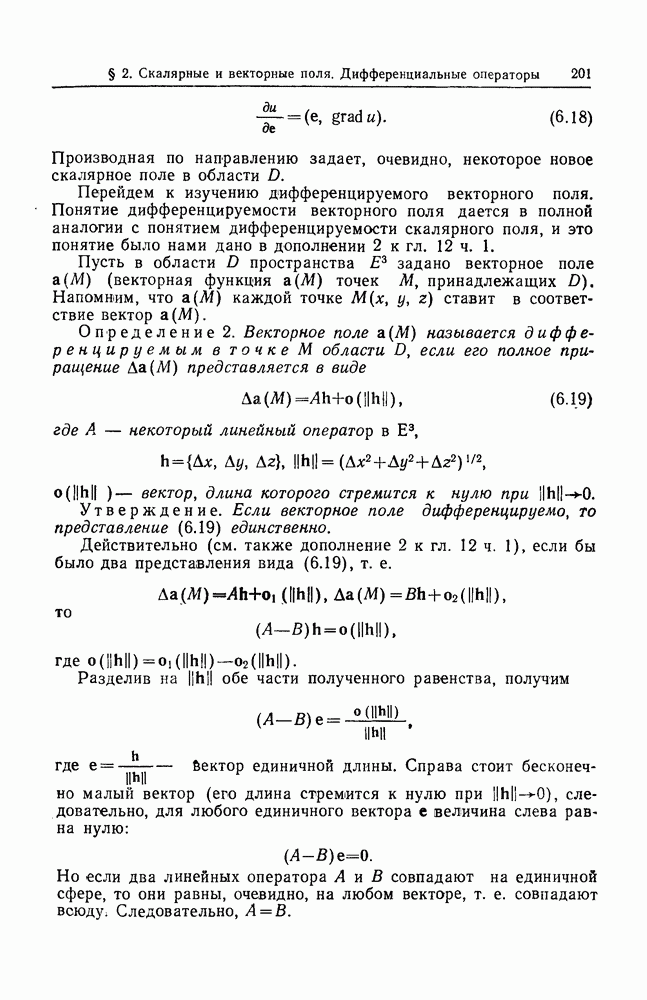
Определение: Пусть D - некоторая область. Будем говорить, что в D задано векторное поле, если каждой точке M этой области сопоставлен по некоторому закону определенный вектор a(M).

Определение: Скалярное поле u = f(x, y, z) = f(M) называется дифференцируемым в точке M(x, y, z) области D, если его полное приращение Δu(M) в этой точке может быть представлено в виде



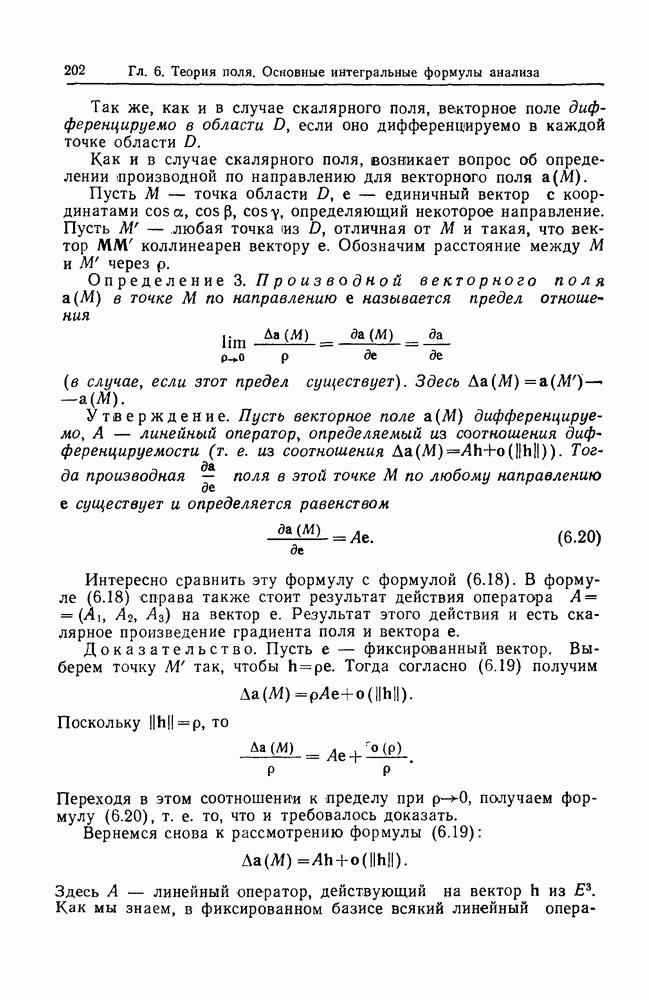
где A1, A2, A3 - некоторые не зависящие от Δx, Δy, Δz числа, а ɑ1, ɑ2, ɑ3 - бесконечно малые при Δx -> 0, Δy -> 0, Δz -> 0.

Определение: Векторное поле a(M) называется дифференцируемым в точке M области D, если его полное приращение Δa(M) представляется в виде



o(||h||) - вектор, длина которого стремится к нулю при ||h|| -> 0.

Определение: производной векторного поля a(M) в точке M по направлению e называется предел отношения (если этот предел существует)



## 22. Общая формула Стокса

Пусть S - k-мерная поверхность, компактна и ориентируема

მS - край поверхности S

будем считать, что ориентация S и მS согласованы. Пусть - дифференциальная форма на S порядка k-1

Замечание(Формула Ньютона-Лейбница):

k=1

форма степени 0 - функция

F(b)-F(a) =

f = F’

Частные случаи общей формулы стокса

1)Формула Грина

n=2

G - область в Rk (компактная) k=2

- край G

Pdx+Qdy - 1-форма на G

2) Формула стокса (см 23)

## 23. Классические интегральные формулы Ньютона-Лейбница, Стокса, Остроградского-Гаусса

Теория поля:

1. Градиент - векторное поле вида

grad F = ()

1. Ротор

rot(P,Q,R) = | i j k |

| |

| P Q R|

1. Дивергенция векторного поля

div(A,B,C) = ++

Формула Остроградского-Гаусса:

поток, через Риманов интеграл

поверхность сколько вытекло

сколько родилось

dif F - внешний дифференциал формы потока в k-мерном пространстве k-форма имеет одно слагаемое

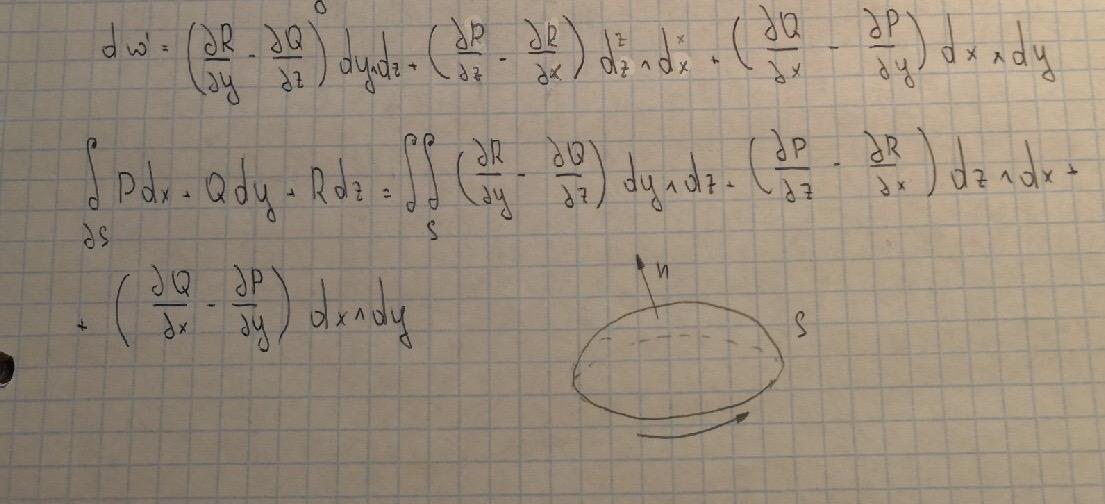
Общая формула Стокса(см 22)

Частная формула Стокса:

n=3

S - двумерная компактная поверхность k=1

dS - край поверхности



слева - циркуляция, справа - поток rot через поверхность S

)

## 24. Интегральные формулы в векторных обозначениях. Дивергенция, ротор

Ротор

rot(P,Q,R) = | i j k |

| |

| P Q R|

Дивергенция векторного поля

div(A,B,C) = ++

## 25. Криволинейные интегралы первого и второго рода

Определение: f: I -> R задана на множестве I.

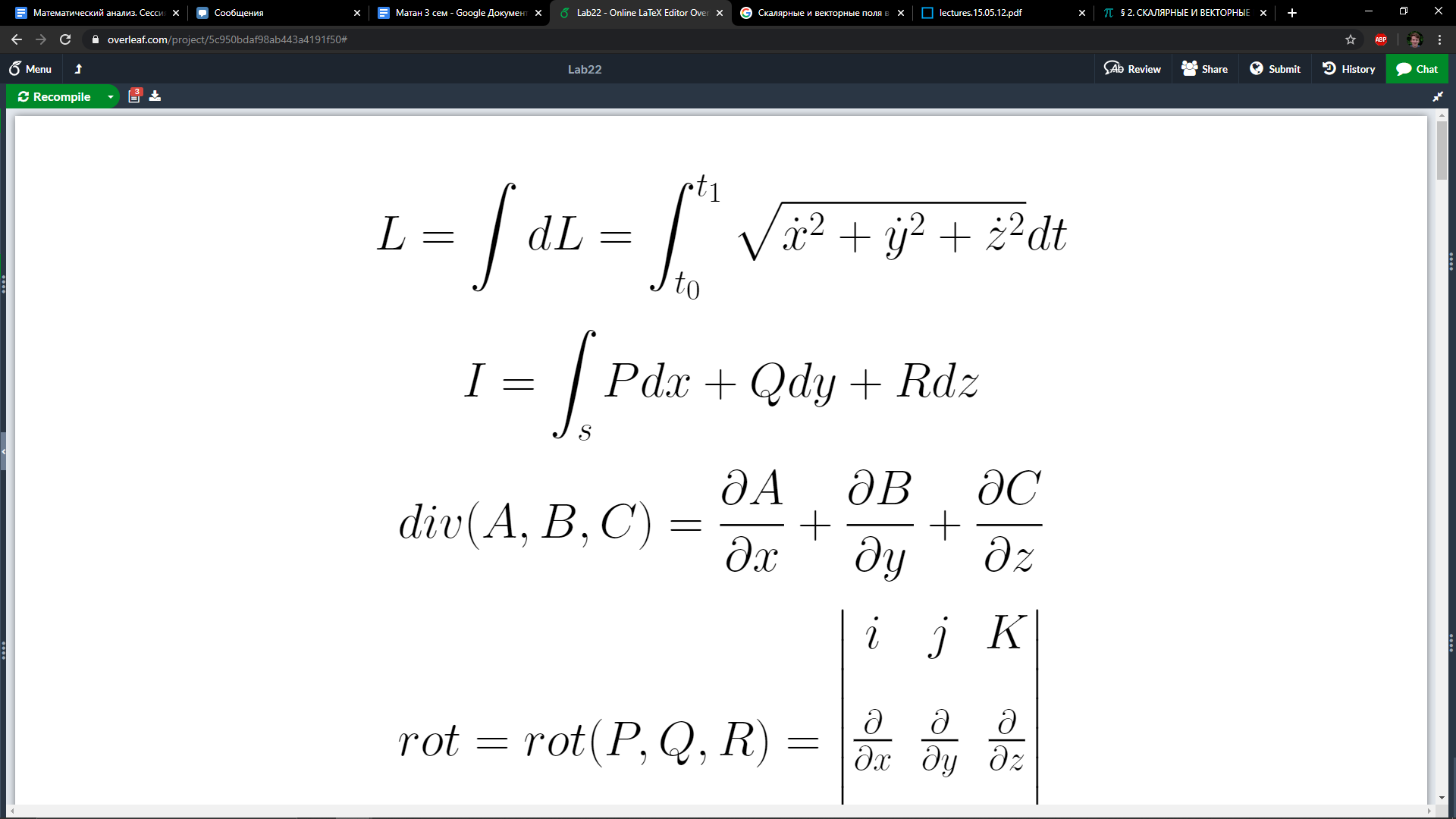
называется криволинейным интегралом первого рода.

Свойства криволинейного интеграла:

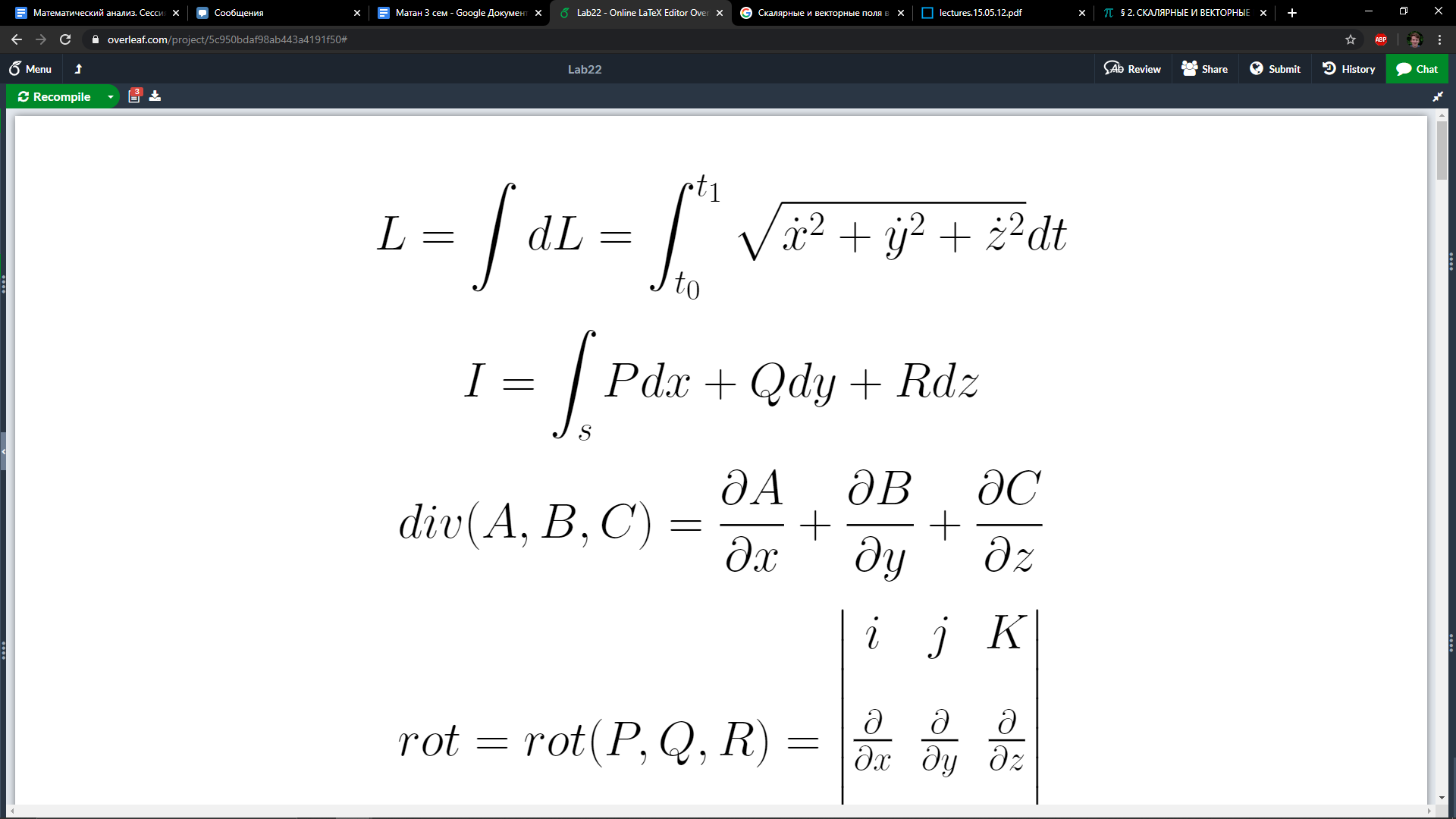
1. для существования интеграла необходимо и достаточно, чтобы функция переменной t была интегрируема на своем отрезке.
2. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации гладкой кривой I.

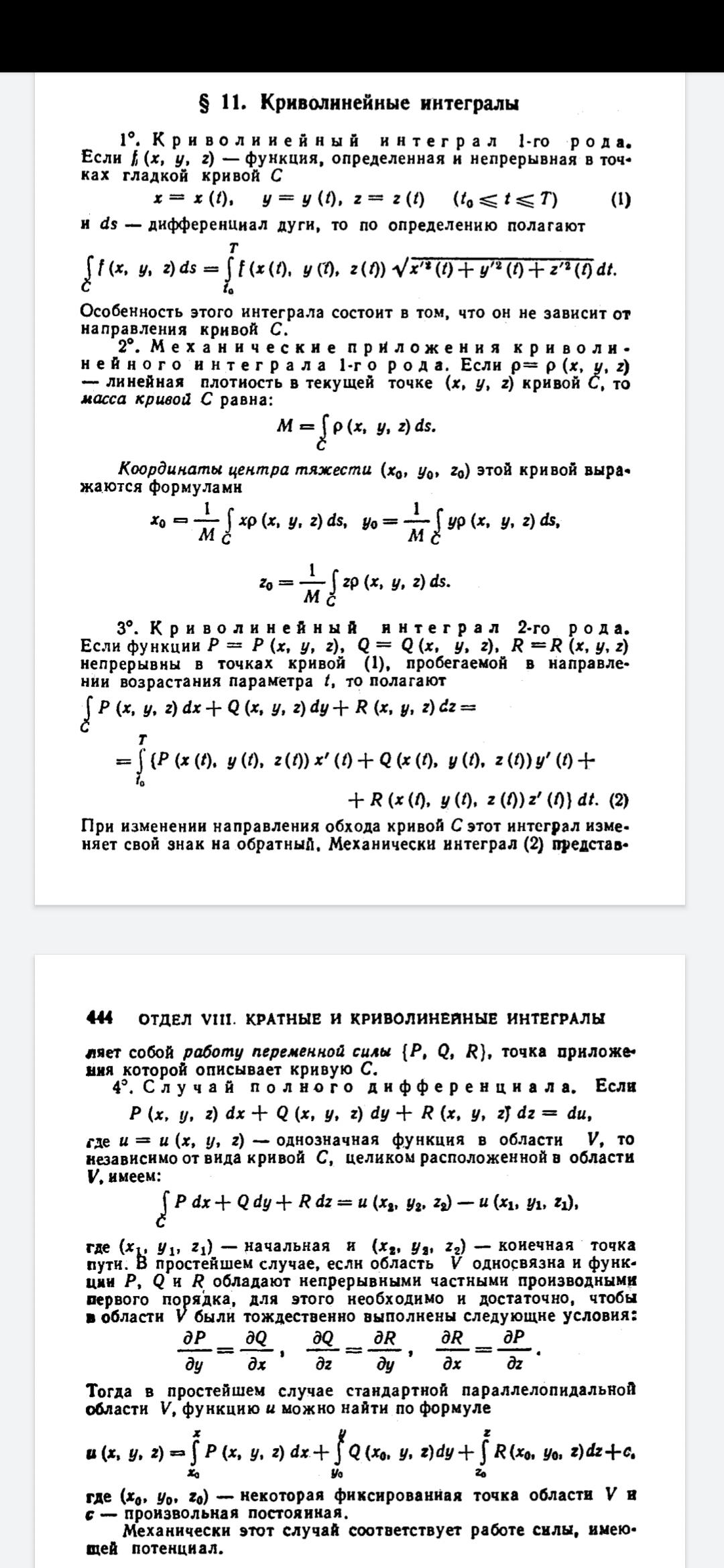
Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

I-го рода



II - го рода





## 26. Поверхностные интегралы первого и второго рода

