Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 1. Нелинейные системы. Основные методы исследования нелинейных систем.

Введение. Определение нелинейных систем и основные методы их исследования. Математические модели нелинейной динамики. Нелинейные статические и динамические элементы. Математические модели Винера-Гаммерштейна. Соединения нелинейных элементов. Математические модели на основе функциональных рядов Вольтерра.

Введение.

В первой части курса был рассмотрен целый ряд систем, которые, с определенной степенью достоверности, можно описать с помощью линейных стационарных конечномерных моделей (систем обыкновенных дифференциальных уравнений) с непрерывным и с дискретным временем. Были также проанализированы модели, описываемые с помощью дифференциальных уравнений со случайной правой частью, а также разностные стохастические модели.

Однако, как правило, классические математические модели большинства объектов являются неавтономными, описываются нелинейными соотношениями и содержат параметры, которые либо неизвестны, либо требуют дополнительных трудоемких исследований для их оценки. Особенно важным при создании управляемых систем оказывается исследование поведения таких объектов вблизи тех значений параметров, при которых резко меняется динамическая структура поведения.

Поэтому во второй части курса, будут в основном рассматриваться следующие задачи:
- демонстрация разнообразия методов исследования и регулирования нелинейными математическими моделями, описывающими разнообразные прикладные объекты;
- структурный и качественный анализ управляемых динамических систем при различных условиях их функционирования;
- изучение и практическое применение различных методов проектирования нелинейных технических систем;
- оценивание и параметрическая идентификация моделей систем по данным наблюдений за вход - выходными соотношениями;
- оптимизация управления техническими системами.

Определение нелинейных систем и основные методы их исследования.

К нелинейным системам относятся динамические системы, которые описываются с помощью нелинейных функций и операторов. При этом модель нелинейной системы может содержать как типовые линейные звенья, так и специальные блоки, описываемые с помощью нелинейных операторов. В зависимости от вида нелинейной модели различают статические и динамические, а также гладкие и негладкие блоки системы.

Практически все системы управления, строго говоря, являются нелинейными, то есть описываются нелинейными уравнениями. Линейные системы управления являются их линеаризованными моделями, полученными в результате разложения нелинейных функций в соответствующие ряды. Однако применимость линеаризованных моделей ограничена окрестностью опорной точки или опорной траектории, в области которой проводилось соответствующая линеаризация. Кроме того, существуют нелинейные функции, линеаризация которых невозможна. К таким нелинейным блокам, которые называют еще блоками, с существенной нелинейностью, относятся, например, релейные элементы. Нелинейные системы по сравнению с линейными системами обладают рядом принципиальных особенностей, а именно:
- для них не выполняется принцип суперпозиции, и, поэтому, исследование нелинейной системы при нескольких воздействиях нельзя сводить к раздельному исследованию реакции системы на каждое воздействие;
- устойчивость, управляемость и наблюдаемость, а также характер переходного процесса существенно зависят от точки фазового пространства, где находится исследуемая система;
- при различных внешних воздействиях возможны несколько, а иногда и бесконечное множество, состояний равновесия;

- возникают свободные установившиеся процессы, носящие как регулярный периодический характер, так и в ряде случаев стохастический вид, которые в линейных системах возникать не могут.

Универсальных аналитических методов исследования нелинейных систем нет, так как в огромном большинстве случаев системы уравнений, описывающих модели нелинейных систем, не имеют явного (интегрируемого) решения. Имеющиеся математические методы анализа и синтеза обычно применимы для достаточно узкого класса систем и задач. К наиболее широко используемым методам исследования нелинейных систем относятся следующие методы:

- фазовой плоскости;
- функций Ляпунова;
- абсолютной устойчивости;
- частотного усреднения или гармонической линеаризации;
- статистической линеаризации;
- геометрического анализа.

В последние 30 лет также интенсивно развивались методы нелинейной динамики, базирующиеся на геометрическом подходе к анализу нелинейных систем.

Наиболее распространенные модели нелинейных систем обычно представлены системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши или соответствующими интегро-дифференциальными уравнениями. Анализ таких моделей требует привлечения другого математического аппарата, по сравнению с тем, который использовался для исследования линейных систем.

<u>Математические модели нелинейной динамики.</u>

Пусть в области $\mathrm{D} \times \mathrm{R}^{+} \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{n}+1}; \mathrm{R}^{+} = [0, \infty)$ поведение системы описывается уравнением $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$, где $\mathrm{F}(0, \mathrm{t}) = 0, \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0$ и $\mathrm{F} : \mathrm{D} \times \mathrm{R}^{+} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$. Решение $\mathrm{x}(\mathrm{t}, \mathrm{t}_0, \mathrm{x}_0 = 0) = 0, \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0$ будем называть невозмущенным движением. Движение $x(t, t_0, x_0), t \geq t_0$, вызванное начальным возмущением x_0, будем называть возмущенным движением. Соответственно выход системы определим соотношением $y = H(x, t)$, где $H : D \times R^{+} \to R^{p}$.

Если система является управляемой, то существует некоторый вектор $u \in U \subseteq R^{m}$ - называемый вектором управления, что поведение системы будет описываться уравнением $\dot{x} = F(x, u, t)$, где $F(0, 0, t) = 0, t \geq t_0$ и $F : D \times U \times R^{+} \to R^{n}$.

Автономная система с одним выходом может быть описана n уравнениями состояния следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ... x_n) \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, ... x_n) \\ \quad .... \\ \dot{x}_n = f_1(x_1, x_2, ... x_n) \end{cases},$$

и скалярным уравнением выхода $y = h(x_1, x_2, ..., x_n)$. Здесь $x_i = x_i(t)$ - переменные состояния, $y = y(t)$ - выходная переменная, $f_i(.)$ и $h(.)$ - функции, определенные на соответствующих множествах. В векторной форме данные соотношения можно записать в следующем виде: $\dot{x} = F(x)$, $y = h(x)$, где $F(x) : X \to R^{n}$, $h(x) : X \to R$, $t \in [0, \infty)$.

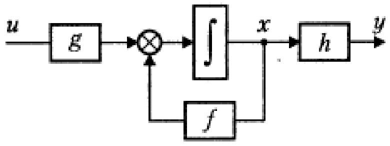
Определение. *Стационарным решением (стационарной точкой) динамической системы* $\dot{x} = F(x)$ *называется точка* $x^* \in X$ *, для которой при всех* $t \geq 0$ *выполняется соотношение:* $x(t, x^*) = x^*$*, где* $x(t) = x(t, x^*)$ *решение уравнения* $\dot{x} = F(x)$ *при начальном условии* $x(0) = x^*$*.*

Таким образом, необходимым и достаточным признаком стационарности точки $x^* \in X$ служит отсутствие движения системы $\dot{x}(t, x^*) = 0$. То есть критерием стационарности является выполнение условия $F(x^*) = 0$.

Пусть некоторая система управления с одним входом и одним выходом может быть соответственно описана следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ... x_n) + g_1(x_1, x_2, ..., x_n)u \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, ... x_n) + g_2(x_1, x_2, ..., x_n)u \\ \qquad .... \\ \dot{x}_n = f_1(x_1, x_2, ... x_n) + g_n(x_1, x_2, ..., x_n)u \end{cases},$$

и уравнением выхода $y = h(x_1, x_2, ..., x_n)$. Здесь $u = u(t)$ - входное (управляющее) воздействие, $g_i(.)$ - функции, определенные на множестве X . *Данная система является линейной по управляющему воздействию* $u = u(t)$ *и называется аффинной.* В векторной форме аффинную систему управления можно записать в следующем виде: $\dot{x} = F(x) + G(x)u$, $y = h(x)$, где $F(x), G(x) : X \to R^n$, $h(x) : X \to R$, $u(t) \in R$, $t \in [0, \infty)$.



Нелинейная система (аффинная)

Модель нелинейной системы с аддитивным скалярным возмущением $w = w(t)$ описывается следующим уравнением: $\dot{x} = F(x) + G(x)u + D(x)w$, $y = h(x)$, где $F(x), G(x), D(x) : X \to R^n$, $h(x) : X \to R$, $u(t), w(t) \in R$, $t \in [0, \infty)$. Такая система является аффинной, как по отношению к управлению, так и возмущению.

Наиболее общее представление автономной нелинейной системы с одним входом и одним выходом задается следующими уравнениями: $\dot{x} = F(x, u, w)$, $y = h(x, u, w)$, где $F(x, u, w) : X * U * W \to R^n$, $h(x, u, w) : X * U * W \to R$, $u(t), w(t) \in R$, $t \in [0, \infty)$.

Определение. *Нелинейная динамическая система называется гладкой системой, если соответствующие функции* F, h *(для аффинных систем* F, h, G, D*) являются гладкими во всех точках множества* $X * U * W$*.*

Введем классификацию функций, связанную со свойствами непрерывности и гладкости.

Определение. *Скалярная функция* $y = f(x)$ *называется функцией класса* C^0*, если при* $x \in X \subset R^n$ *она непрерывна; функцией класса* C^k*, если при* $x \in X \subset R^n$ *она непрерывна и* k *раз дифференцируема (то есть имеет* k *частных производных); функцией класса* C^∞ *или* *(бесконечно) гладкой функцией, если при $x \in X \subset R^n$ она имеет частные производные сколь угодно высокого порядка.*

Рассмотрим теперь случай векторной функции многих переменных $y = F(x)$, то есть отображение $F: X \to Y, X \subset R^n, Y \subset R^m$, где $F(x) = \{ f_1(x),..., f_m(x)\}$.

Определение. *Векторная функция $y = F(x)$ называется функцией класса C^0, C^k или C^∞, если на множестве $x \in X \subset R^n$ все скалярные функции $f_i(x), i = 1,..., m$ принадлежат классам C^0, C^k или C^∞ соответственно.*

Матрицей Якоби гладкой векторной функции $F(x) = \{ f_1(x),..., f_m(x)\}$ будем называть функциональную матрицу частных производных размера (m*n) следующего вида:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & ... & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & ... & \partial f_2/\partial x_n \\ : & : & ::: & : \\ \partial f_m/\partial x_1 & \partial f_m/\partial x_2 & ... & \partial f_m/\partial x_n \end{pmatrix}.$$ Пусть $m \le n$.

Определение. *Векторная функция $y = F(x)$ в точке $x^* \in X \subset R^n$ называется отображением ранга $\nu \le m$, если $rank \frac{\partial F}{\partial x}|_{x^*} = \nu$, и регулярным (невырожденным) отображением, если имеет место равенство $rank \frac{\partial F}{\partial x}|_{x^*} = m$.*

Если $m = n$, то определитель матрицы Якоби называется якобианом, и отображение $F(x)$ не вырождено в точке $x^* \in X$, когда выполняется соотношение $\det \frac{\partial F}{\partial x}|_{x^*} \ne 0$.

Будем в дальнейшем рассматривать случай, когда выполняется равенство $m = n$.

Определение. *Векторная функция $y = F(x)$ называется диффеоморфизмом, если:*

1. Функция $F(x)$ гладкая, то есть $F(x) \in C^\infty$;

2. Отображение $F: X \to Y$ взаимно однозначно (биективно);

3. Обратная функция $x = F^{-1}(y)$ существует и является гладкой, то есть $F^{-1} \in C^\infty$.

Различают локальный и глобальный диффеоморфизмы.

Понятие глобального диффеоморфизма подразумевает, что функция $F(x)$ определена на всем пространстве R^n и все необходимые свойства отображения имеют место для любой точки $x \in R^n$.

Для локального диффеоморфизма указанные свойства отображения $F(x)$ имеют место в некоторой окрестности точки $x^* \in X$, то есть локально.

Пример. Функция $y = \sin(x)$ при $x \in (-\infty, \infty)$ является гладкой, но не взаимно однозначной. Однако в области $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ отображение является гладким, взаимно-однозначным и имеет гладкое обратное отображение $x = \arcsin(y)$.

Теорема об обратной функции. *Гладкое отображение $F: X \to Y$ является локальным диффеоморфизмом в окрестности точки $x^* \in X$ тогда и только тогда, когда $\det \frac{\partial F}{\partial x}|_{x^*} \ne 0$.*

Пример. Функция $y = x^3$ в точке $x^* = 0$ имеет производную $\frac{\partial F}{\partial x}|_0 = 0$. Поэтому функция не является диффеоморфизмом в любой области, содержащей точку $x^* = 0$.

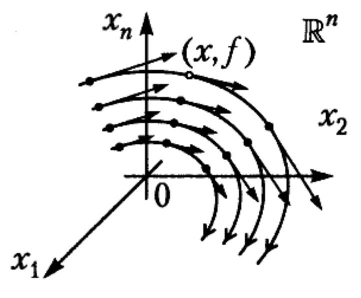
Определение. *Функцию $y = f(t), t \in [0,\infty)$ будем называть функцией класса L_p $(1 \le p \le \infty)$, когда существует такое конечное неотрицательное число l_p, что выполняется следующее соотношение:* $\| f(t) \|_p = (\int\limits_0^\infty | f(\tau)|^p \, d\tau)^{\frac{1}{p}} \le l_p$.

Функция $f(t) \in L_1$, то есть, для которой справедливо соотношение $\| f(t) \|_1 = (\int\limits_0^\infty | f(\tau) | \, d\tau) \le l_1$, называется интегрально ограниченной. Функция $f(t) \in L_\infty$, для которой справедливо соотношение: $\| f(t) \|_\infty = \sup | f(t) | \le l_\infty$, называется ограниченной. Непрерывная функция $f(t) \in C^0$, $t \in [0,\infty)$, имеющая ограниченную производную $\dot{f}(t) \in L_\infty$, называется равномерно непрерывной.

Интегрально ограниченные равномерно непрерывные функции удовлетворяют следующему свойству.

Лемма Барбалата. *Если функция $f(t)$, $t \in [0,\infty)$, удовлетворяет всем следующим условиям:* $f(t) \in C^0$, $\dot{f}(t) \in L_\infty$, $f(t) \in L_1$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Гладкое отображение $F(x): X \to R^n$, которое каждой точке $x \in X \subset R^n$ ставит в соответствие вектор $F(x) = \{ f_1(x),..., f_n(x)\} \in R^n$, будем называть гладким векторным полем. Тогда фазовым потоком дифференциального уравнения $\dot{x} = F(x)$ будем называть однопараметрическую группу диффеоморфизмов, для которой $F(x): X \to R^n$ будет являться векторным полем фазовой скорости. Чтобы найти фазовый поток уравнения, достаточно решить последнее: $\varphi^t x_0$ есть значение в момент времени $t \in [0,\infty)$ решения $\varphi(t)$ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$. Иными словами под действием фазового потока фазовая точка уравнения $\dot{x} = F(x)$ движется так, что вектор ее скорости в каждый момент времени равен вектору фазовой скорости в той точке фазового пространства, где движущаяся точка находится. При этом для фазового потока выполняется групповое свойство: $\varphi^{t+s} = \varphi^t \varphi^s$ /Арнольд ОДУ с.53/.



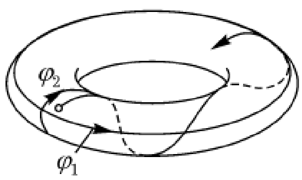
Возникает вопрос, всякое ли гладкое векторное поле является полем фазовой скорости потока? Ответ на этот вопрос – отрицательный.

Пример. Рассмотрим случай, когда $F(x)=x^2$, $x \in R$. Решение уравнения $\dot{x}=x^2$ с начальным условием x_0 при $t=0$ имеет вид $x=x_0/(1-x_0t)$. То есть фазовый поток задается соотношением $\varphi^t x = x/(1-tx)$. Однако, отображение φ^t ни при каком t, кроме точки $t=0$, не является диффеоморфизмом прямой. Поэтому поле $F(x)=x^2$ не является полем фазовой скорости никакой однопараметрической группы диффеоморфизмов прямой.

Понятие дифференцируемых многообразий.

Примеры многообразий.

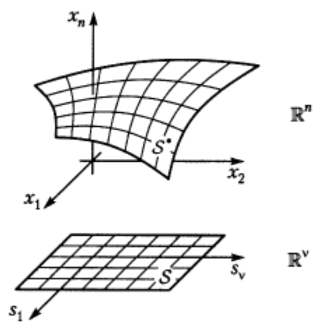
1. Линейное пространство R^n или любая его область (открытое подмножество) $U \subset R^n$.
2. Сфера S^n, заданная в евклидовом пространстве R^{n+1} уравнением $x_1^2+...+x_{n+1}^2=1$. В частность многообразие S^1 является окружностью на плоскости R^2.
3. Двумерный тор $T^2=S^1 * S^1$, который представляет собой прямое произведение двух окружностей.



Дифференцируемое многообразие M – это множество M вместе со структурой дифференцируемого многообразия в нем. Говорят, что в множестве M введена структура многообразия, если задан атлас, состоящий из карт, которые согласованы.

Определение /Арнольд ОДУ с234/. *Картой называется область $U \subset R^n$ вместе с взаимно однозначным отображением $\varphi : W \to U$ подмножества W множества M на U.*

Таким образом, в окрестности некоторой точки $x \in M$ можно ввести систему локальных координат многообразия (гиперповерхности) и вектор локальных координат $m=\{m_i\} \in M$, заданный в некоторой области $M \in R^\nu, \nu \le n$. Локальные координаты определяются через координаты пространства, где находится многообразие, с помощью выражения: $m=\psi(x)$, где $\psi=\{\psi_i\}, i=1,2,...,\nu$ - гладкая векторная функция. То есть, область $M \in R^\nu, \nu \le n$, вместе с координатной системой, будет образовывать карту многообразия.



Гиперповерхность и карта

В общем случае, для полного описания поверхности (многообразия) нужно задать несколько координатных система и несколько карт (атлас), каждая из которых соответствует определенной области множества M. При этом, в зависимости от класса гладкости отображений $\psi = \{\psi_i\}, i = 1,2,..., v$ получаются различные классы многообразий.

<u>Нелинейные статические и динамические элементы.</u>

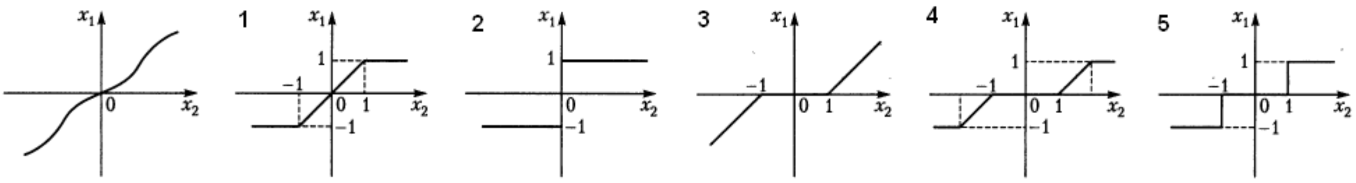
Нелинейные статические элементы.

Часто, при исследовании нелинейных систем удается выделить нелинейность так, чтобы она описывалась непосредственной зависимостью между выходной и входной величинами /Мирошник с27/: $x_1 = G(x_2)$, где $G(x)$ - нелинейная функция, которая может иметь любую форму (релейного типа, кусочно-линейного или криволинейного). Для гладких блоков функция $G(x)$ достаточно гладкая: $G \in (C^1, C^2,...)$, в то время как негладкие блоки описываются либо с помощью разрывной, либо непрерывной, но не гладкой функции, то есть $G \in (\overline{C}, C^0)$.

Канонические (приведенные) негладкие блоки описываются уравнениями вида: $x_1 = G^0(x_2)$. В зависимости от вида функции G^0 различают следующие звенья.

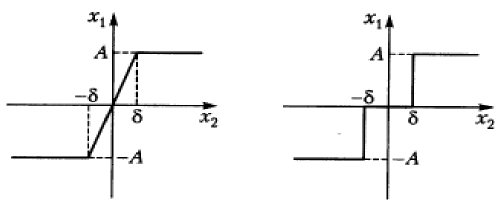
1. Звено с насыщением (ограничением) $x_1 = sat(x_2)$;
2. Релейное звено $x_1 = sign(x_2)$;
3. Звено с зоной нечувствительности;
4. Звено с насыщением и зоной нечувствительности;
5. Релейное звено с зоной нечувствительности $x_1 = dez(x_2)$.

Для канонических звеньев предполагается, что линейный участок характеристики имеет единичный наклон, а уровни насыщения, границы линейной области или зоны нечувствительности равны +1 и -1.



Канонические нелинейные блоки (статические)

В общем случае негладкие звенья могут быть описаны выражением: $x_1 = AG^0(x_2/\delta)$, где A - параметр, характеризующий уровень насыщения, а δ - параметр, характеризующий величину зоны нечувствительности или линейной зоны.



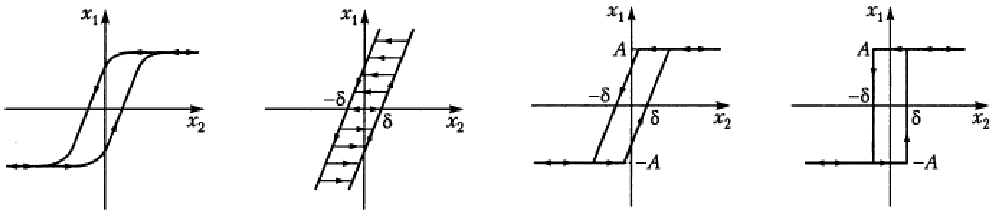
Статические блоки — общий случай

Определение. *Статический нелинейный блок называется положительным, если для любых входных сигналов* x_2 *произведение вход-выход положительно, то есть* $x_1 x_2 > 0$

Очевидно, что последнему условию удовлетворяют блоки, характеристики которых расположены в I и III квадрантах. Все приведенные блоки 1-5 являются очевидно положительными, а блок $x_1 = \sin(x_2)$ с очевидностью не удовлетворяет данному условию.

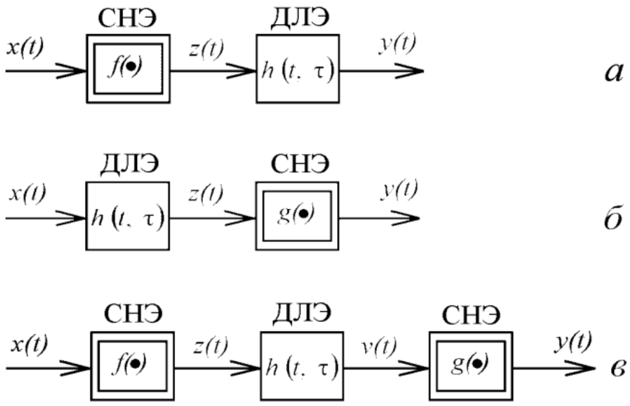
Нелинейные динамические элементы.

Динамические звенья описываются дифференциальными уравнениями первого или второго порядка: $a(x_1, \dot{x}_1, \neg x_1) = b(x_2, \dot{x}_2)$, где $a(.), b(.)$ - нелинейные функции. Достаточно часто используются уравнения следующего вида $x_1 = c(x_2, sign(\dot{x}_2))$, где $c(.)$ - нелинейная функция. Наиболее распространены звенья следующего типа: люфт и гистерезис ($x_1 = hys(x_2, sign(\dot{x}_2))$).



Математические модели Винера-Гаммерштейна.

Под объектами типа Гаммерштейна – Винера принято понимать объекты, состоящие из последовательно соединённых статических нелинейных объектов (СНЭ) и динамических линейных элементов (ДЛЭ) и имеющие одну из структур, изображённых на рисунке.



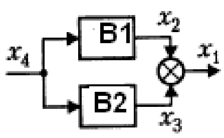
Структурные схемы последовательного соединения нелинейного и линейного звеньев:
а) объект Гаммерштейна; *б*) объект Винера;
в) объект Гаммерштейна – Винера

Соединения нелинейных элементов.

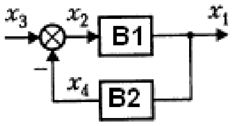
Последовательное соединение описывается системой уравнений: $B1: x_1 = G_1(x_2)$; $B2: x_2 = G_2(x_3)$.

Уравнение связи выходной переменной x_1 с входной переменной x_3 имеет вид: $x_1 = G_1(G_2(x_3)) = (G_1 \circ G_2)(x_3)$. Если $G_2 = G_1^{-1}$, то получим линейную зависимость: $x_1 = x_3$.

Параллельное соединение описывается системой уравнений: $x_1 = x_2 + x_3$; $B1: x_2 = G_1(x_4)$; $B2: x_3 = G_2(x_4)$. Связь выходной переменной x_1 с входной переменной x_4 определяется с помощью выражения: $x_1 = G_1(x_4) + G_2(x_4)$.



Замыкание нелинейных элементов с помощью отрицательной обратной связи будет описываться следующими уравнениями: $B1: x_1 = G_1(x_2)$; $B2: x_4 = G_2(x_1)$; $x_2 = x_3 - x_4$.



После преобразования получим следующее соотношение:

$x_1 = G_1(x_3 - G_2(x_1))$ или $G_1^{-1}(x_1) + G_2(x_1) = x_3$.

Если $G_1(x_2) = Kx_2$, то последнее соотношение можно переписать в следующем виде: $x_1 / K + G_2(x_1) = x_3$. При условии $K \to \infty$, данное выражение принимает вид: $G_2(x_1) = x_3$, и, следовательно, $x_1 = G_2^{-1}(x_3)$.

Таким образом, подключение нелинейного звена в отрицательную обратную связь к пропорциональному звену с достаточно большим коэффициентом усиления позволяет получить обратную функцию. Аналогичный результат (для некоторой ограниченной области изменения x_3) может быть получен и при $G_1(x_2) = sign(x_2)$. Следует, однако, отметить, что обратная функция G_2^{-1} может быть получена только в ограниченном диапазоне частот входного сигнала и при условии малости сигналов шума на входе. В противном случае, уровень шумов на выходе может «забить» полезный сигнал.

Математические модели нелинейных систем на основе функциональных рядов Вольтерра.

Основным допущением представления нелинейных систем в виде функциональных рядов является предположение о том, что сигнал на выходе системы можно рассматривать как функционал, заданный на множестве возможных процессов, действующих на вход. Обоснованием того допущения является следующее утверждение /Пупков т1 с549/, доказанное М.Фреше: «Для любого непрерывного функционала $X(u(t))$ существует последовательность функционалов $X_k(u(t))$, которая при $k \to \infty$ сколь угодно точно аппроксимирует $X(u(t))$».

Пусть нелинейная система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$\sum_{j=0}^{n} a_j(t)x^{(j)} + F(x, \dot{x}, ...) = u(t)$, где $F(x, \dot{x}, ..)$ - нелинейная гладкая функция аргумента x и его производных. При этом производные функции $F(x, \dot{x}, ..)$ удовлетворяют условиям степенной ограниченности Липшица, то есть: $\left| \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \right| \le L |x_i - x_j|^{\alpha}$, где L - постоянная Липшица, $0 < \alpha < 1$ показатель степенной сходимости.

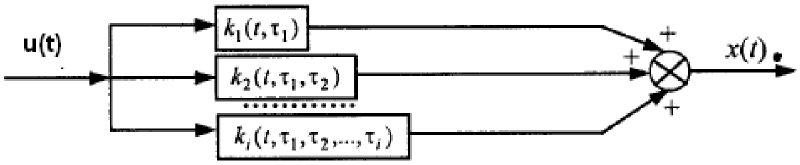
Тогда имеет место следующее представление выхода системы:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t ... \int_0^t K_k(t, \tau_1, ..., \tau_k) u(\tau_1) ... u(\tau_k) d\tau_1 ... d\tau_k .$$

Данное представление называется функциональным рядом Вольтерра, а функции $K_k(t, \tau_1, ..., \tau_k)$ представляют собой многомерные импульсные переходные функции нестационарной линейной части системы (ядра Вольтерра).

Условие Фреше утверждает, что существует последовательность ядер $K_k(t,\tau_1,...,\tau_k)$, при реализации которой решение $x(t)$ можно аппроксимировать конечным числом членов функционального ряда сколь угодно точно.

Структурная схема нелинейной системы, описываемой функциональными рядами Вольтерра, может быть представлена в следующем виде.



Структурная схема нелинейной системы

Для стационарных систем ряд Вольтерра может быть представлен в виде бесконечной суммы:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}x_i(t)\text{, где } x_i(t)=\int_0^t...\int_0^t K_i(\tau_1,...,\tau_i)u(t-\tau_1)...u(t-\tau_i)d\tau_1...d\tau_i .$$

То есть каждая подсистема i-го порядка характеризуется своим ядром $K_i(\tau_1,...,\tau_i)$. Первая подсистема является линейной. Ее выходной сигнал представляет собой интеграл свертки входного сигнала $u(t)$ с импульсной переходной функцией линейной части системы. Вторая подсистема является уже нелинейной и носит квадратичный характер. Ее выход есть интеграл свертки второго порядка входа с импульсной переходной функцией $K_2(\tau_1,\tau_2)$. Аналогично третья подсистема носит кубический характер. Ее выход $x_3(t)$ представляет собой трехмерную свертку входа $u(t)$ с импульсной переходной функцией $K_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$, которая может быть названа ядром Вольтерра третьего порядка.

Данный прием можно обобщить и на случай, когда вход и выход являются случайными процессами. В том случае равенство левой и правой частей представления выхода системы в виде ряда Вольтерра следует понимать в средне-квадратичном.

Рассмотрим непрерывную нелинейную систему, образованную последовательным соединением линейного инерционного и стационарного полиномиального звеньев.

Структурная схема системы

Можно записать следующие соотношения для данной системы:

$$z(t)=\int_0^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau\text{ , } x(t)=\sum_{i=1}^{N}c_i z^i(t) .$$

Отсюда получим следующее выражение выхода системы от входа:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}c_i z^i(t)=\sum_{i=1}^{N}c_i\int_0^t...\int_0^t\prod_{j=1}^{i}[K(t,\tau_j)u(\tau_j)\}d\tau_1...d\tau_i=\sum_{i=1}^{N}\int_0^t...\int_0^t K_i(t,\tau_1,...,\tau_i)u(\tau_1)...u(\tau_i)d\tau_1...d\tau_i$$

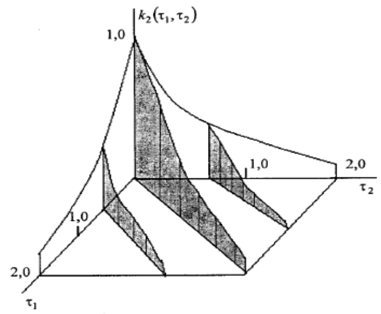
.

Здесь $K_i(t,\tau_1,...,\tau_i)=c_i\prod_{j=1}^{i}K(t,\tau_j)$.

Таким образом, ядра полинома для стационарной линейной части полностью разделимы (сепарабельны), то есть ядро i-го порядка представимо в виде произведения i ядер первого порядка.

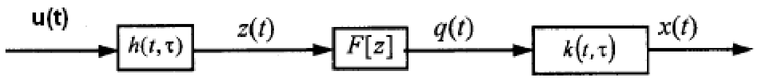
Пример. Пусть линейная часть системы - апериодическое звено с коэффициентом усиления и постоянной времени k, T соответственно. Тогда $K(\tau) = ke^{\frac{-\tau}{T}}$ и

$K_i(t, \tau_1, ..., \tau_i) = c_i \prod_{j=1}^{i} K(t, \tau_j) = c_i k^i e^{\frac{-1}{T}\prod_{j=1}^{i}\tau_j}$. Ядро второго порядка для $k = 1, T = 1, c_1 = c_2 = 1$ изображено на рисунке.



Импульсная переходная функция 2-го порядка

На практике разделимые ядра встречаются достаточно редко. Рассмотрим, например, нелинейную систему, образованную последовательным соединением двух линейных инерционных звеньев, разделенных безынерционным нелинейным звеном.



В этом случае выход системы будет определяться следующим соотношением:

$x(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \int_0^t ... \int_0^t G_i(t, \sigma_1, ..., \sigma_i) \prod_{j=1}^{i} u(\sigma_j) d\sigma_1 ... d\sigma_i$. Здесь $G_i(t, \sigma_1, ..., \sigma_i) = \int_0^t K(t, \tau) \prod_{j=1}^{i} h(\tau, \sigma_j) d\tau$.

Контрольные вопросы к лекции 1.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Скалярная функция $y = f(x)$ называется гладкой функцией класса C^k, если при $x \in X \subset R^n$ она .....?	1. .... ограничена и $\mid f(x) \mid^k < \infty$. 2. … непрерывна и k раз дифференцируема (то есть имеет k частных производных) 3. … имеет не более k точек разрыва первого рода. 4. … непрерывна и уравнение $f(x) = 0$ и имеет k корней.
2	Векторная функция $y = f(x); y \in R^m; x \in R^n$ называется регулярным (невырожденным) преобразованием в точке $x = x^*$, если…	1. … $\det(\frac{\partial F}{\partial x}) \mid_{x=x^*} = n$ 2. … $\det(\frac{\partial F}{\partial x}) \mid_{x=x^*} < m$

		3. … $\det(\frac{\partial F}{\partial x})\|_{x=x^*} = m$ 4.… $\det(\frac{\partial F}{\partial x})\|_{x=x^*} > n$
3.	Нелинейная управляемая аффинная система, это система, правая часть которой по управляющему воздействию является…	1. … гладкой функцией класса C^k . 2. … ограниченной функцией. 3.… функцией, инвариантной к операции сдвига. 4. … линейной функцией.
4	Положение состояния равновесия нелинейной системы $\dot{x} = F(x); x(t_0, t_0, x^0) = x^0$ характеризуется тем, что…	1.… начальное состояние $x^0 = 0$ 2. …решение системы $\| x(t, t_0 x^0) \| < \infty; \forall t \geq t_0$ 3.… существует такая точка $x(t, t_0, x^0) = x^*$, в которой выполняется условие $F(x^*) = 0$ 4….существует такое решение $x^* = x(t, t_0, x^*); \forall t > t_0$; $x(t_0, t_0, x^*) = x^*$, при котором $F(x(t, t_0, x^*) = 0; \forall t \geq t_0$
5	Всякое ли гладкое векторное поле является полем фазовой скорости потока?	1. Да 2. Нет 3. Только ограниченное 4. Только гладкое
6	Математическая модель Винера – Гаммерштейна описывает объекты, состоящие из …	1. … из последовательно соединенных линейных динамических звеньев. 2. … из последовательно соединенных нелинейных динамических и линейных динамических звеньев. 3. … из последовательно соединенных линейных динамических и статических нелинейных звеньев. 4. … из нелинейных динамических звеньев, аффинных по управляющему воздействию
7	Нелинейное звено типа гистерезис, имеющее вход x и выход y , описывается зависимостью вида …..	1. … $y = G(x, \dot{x})$ 2. … $y = G(x)$ 3. … $y = (x - a)^3 - (\dot{x})^2$ 4. … $\dot{y} = G(x, y)$
8	Условие Фреше о представлении произвольной нелинейной системы с помощью функционального ряда Вольтерра заключается в том, что…	1. … правая часть уравнения должна представлять собой непрерывную ограниченную функцию. 2. …правая часть уравнение должна представлять непрерывную функцию, удовлетворяющую условию Липшица. 3. … производные от правой части уравнения должны удовлетворять степенному ограничению Липшица. 4. … правая часть уравнения должна иметь ограниченное число членов разложения в степенной ряд