ПЗ-5. Область сходимости функциональных последовательностей и рядов.

1°. **Область сходимости.** Совокупность X_0 тех значений x, для которых сходится *функциональный ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (1)$$

называется *областью сходимости* этого ряда, а функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (x \in X_0)$$

— его *суммой*.

Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

2716. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$

По Даламберу:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{x^{n+1}}\right| : \left|\frac{n}{x^n}\right| = \frac{1}{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} < 1, \rightsquigarrow$$

$$\frac{1}{|x|} < 1, \rightsquigarrow \quad |x| > 1 \text{ — сходится абсолютно}$$

$\#$

2717. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

1) $\exists\ x=0, \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

сх-ся условно

2) По Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\frac{(1-x)}{(1+x)}\right]^n\right|} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} < 1$$

$$-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$$

$$-(1+x) < 1-x < 1+x$$

$-2 < 0$ ↵ ↳ $0 < 2x \Rightarrow \forall x > 0$

$\Rightarrow \forall x > 0$ сх-ся абсолютно

#

2^*) По Даламберу:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}\right| : \left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right| =$$

$$= \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} < 1, \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$$

...

2719. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$

1) $\exists\ x=1.\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)} : \frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)(2n+2)} =$

$= \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}$

По Раабе:

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$, $\sim$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{2n+1} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{+n}{2n+1} = +\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < 1$ – расходится.

2) $\exists\ x=-1\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}(-1)^n$

По Лейбницу сх-ся, $\Rightarrow$ сх-ся условно!

3) $\exists\ |x| \neq 1$

По Даламберу:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{2n+1}{2n+2} \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \right| = \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| < 1$

$|2x| < 1+x^2$, $\quad 1-|2x|+x^2 > 0$

$(1-|x|)^2 > 0 \quad \forall |x| \neq 1.$

Сх-ся абсолютно!

Определить промежутки сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

2723. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$, $q > 0$, $0 < x < \pi$.

Абсолютная сходимость. Поскольку $|\sin nx| \leqslant 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} |\sin nx| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q},$$

абсолютно сходится, если $q - p > 1$ $\left(\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}} \text{ при } n \to \infty\right)$.

Условная сходимость. Представляя данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}} \cdot \frac{1}{1+n^{-q}}$$

и пользуясь признаком Абеля, находим, что при $q - p > 0$ ряд сходится. Действительно, в этом случае последовательность $\left(\frac{1}{1+n^{-q}}\right) \uparrow 1$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}}$, в силу признака Дирихле, сходится. Следовательно, при $0 < q - p \leqslant 1$ исследуемый ряд сходится условно. ►

2733. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$, $y \geqslant 0$.

◄ Пусть $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда ряд, по признаку Коши, сходится при $|x| < 1$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+y^n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+y^n}} = |x| < 1.$$

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x \geqslant 1$, то $\frac{x^n}{n+y^n} \geqslant \frac{x^n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$. Следовательно, данный ряд расходится, ибо расходится гармонический ряд.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x < -1$, то общий член ряда к нулю не стремится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n+y^n} = +\infty$.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$, $x = -1$, то получим ряд лейбницева типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+y^n}.$$

Пусть $y > 1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n \cdot \frac{1}{1+ny^{-n}},$$

в силу признака Коши, абсолютно сходится, если $|x| < y$.

При $x = \pm y$ общий член исследуемого ряда к нулю не стремится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y^n}{n+y^n} = 1$.

Итак, если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $|x| < 1$ или $|x| < y$ и $y > 1$, то ряд сходится абсолютно. Если же $x = -1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то данный ряд сходится лишь условно. ►

2735. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$, $x \geqslant 0$.

◀ Рассмотрим три случая: а) $0 \leqslant x < 1$; б) $x = 1$; в) $x > 1$.

В случае а) имеем

$\ln(1+x^n) \sim x^n$ при $n \to \infty$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1} \frac{x^n}{n^y}$, согласно признаку Коши, сходится при любом y, то при таких же условиях сходится и исследуемый ряд.

В случае б) получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$, который при $y > 1$ сходится

Наконец, в случае в) имеем

$$\ln(1+x^n) = n\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \sim n\ln x + \frac{1}{x^n},\ n \to \infty.$$

Поскольку ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^{y-1}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y x^n}$ сходятся при $y > 2$, то данный ряд, также сходится при $y > 2$. ▶

Сходится абсолютно при: 1) $0 \leqslant x < 1$, $-\infty < y < +\infty$; 2) $x = 1$, $y > 1$ и 3) $x > 1$, $y > 2$.

2740. Доказать, что если ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

◀ К ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

применим признак Абеля. Здесь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ сходится по условию, $\left(\frac{1}{n^{x-x_0}}\right)$ — монотонная и ограниченная единицей последовательность $\forall x > x_0$.

Следовательно, по признаку Абеля, ряд сходится также при $x > x_0$. ▶

Задачи для самостоятельного решения

2718. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

2721. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

2726. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2728. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

Литература

Демидович Б.П.
Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.