ПЗ – 9/10. Разложение функций в ряды Тейлора.

Разложение функции в степенной ряд. Если функция $f(x)$ допускает в некоторой окрестности $|x - a| < R$ точки a разложение в степенной ряд по степеням $x - a$, то этот ряд (*ряд Тейлора*) имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Основные разложения:

I. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

II. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

IV. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$

$(-1 < x < 1)^{*)}$,

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1)$, Пользуясь основными разложениями I—V, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

2841

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right] =$$

$$\left\{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots - \left[1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)x^n}{n!} + \ldots\right]\right\} =$$

$$= 2\left[\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right] \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

2853. $x \mapsto \sin^3 x$

◀ Преобразовав $\sin^3 x$ к виду $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ и воспользовавшись разложением функции синус, найдем

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3-3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

2855. $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

1) $(1-x)^{-2}$ $\quad m = -2 \quad x = -x$

IV. $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \dfrac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$

$(-1 < x < 1)^{*)}$,

$$(1-x)^{-2} = 1 + \frac{-2}{1!}(-x) + \frac{-2(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \dots = 1 + 2x + 3x^2 + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\ |x| < 1.$$

2) ◀ Поскольку $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\quad \dfrac{1}{1-x}$ - сумма геометрич. прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad , |x| < 1.$$

то, дифференцируя почленно разложение для $(1-x)^{-1}$,

получаем $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$. ▶

2860. $x \mapsto \dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

◀ Разлагая данную дробь на простейшие $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$ и используя разложение IV, а также результат предыдущего примера, можем написать

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1+(-1)^{n+1})x^n.$$

По формуле Коши—Адамара находим интервал абсолютной сходимости полученного степенного ряда: $|x| < 1$. ▶

2867. $x \mapsto \ln(1+x+x^2+x^3)$.

◀ Преобразовывая данную функцию к виду

$$\ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2), \ x > -1,$$

и используя разложение V, получаем

$$\ln(1+x+x^2+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}, \ -1 < x \leqslant 1.$$

Нетрудно видеть, что при $|x| < 1$ этот ряд сходится абсолютно, а в точке $x = 1$ сходится лишь условно (по признаку Дирихле). ▶

2870. $f : x \mapsto \arcsin x$.

◀ С помощью формулы IV, имеем

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Интегрируя этот ряд почленно (что возможно внутри интервала сходимости), находим

$$f(x) = C + x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Так как $f(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно,

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Для исследования сходимости ряда в концевых точках применяем признак Раабе. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} = \frac{3}{2} > 1,$$

поэтому при $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно.

Таким образом, полученное разложение, в силу теоремы Абеля, справедливо при $|x| \leqslant 1$, т.е. во всей области существования $\arcsin x$. ▶

2875 $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$ по степеням $(x+1)$

$$f(x) = \ln \frac{1}{(x+1)^2+1} = -\ln\left(1+(x+1)^2\right) =$$

$$= -\left[(x+1)^2 - \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{(x+1)^6}{3} - \dots \right] \Rightarrow \begin{cases} -1 < (x+1) \le 1 \\ -2 < x \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n}$$

#

2876 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ разложить по отрицательным степеням x.

$$\frac{1}{x} = t, \rightsquigarrow x = \frac{1}{t}, \rightsquigarrow f(t) = \frac{1}{1-\frac{1}{t}} \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{t}{t-1} = -t \cdot \frac{1}{1-t} = -t(1-t)^{-1} \overset{\text{IV}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -t \left[1 + \frac{t}{1!} + \frac{-1(-1-1)}{2!}(-t)^2 + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{3!}(-t)^3 + \dots \right] =$$

$$= -t \left[1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots \right] = -\sum_{n=1}^{\infty} t^n =$$

$$|t| < 1$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \qquad |x| > 1$$

#

Задачи для самостоятельного решения

Разложив предварительно производные, путем почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

2871. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

2877. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\dfrac{x-1}{x+1}$.

Разложить в степенной ряд функции:

2903. $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Литература

Демидович Б.П.
Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.