Московский Авиационный Институт

(Национальный Исследовательский Университет)

Факультет прикладной математики и информационных технологий

Курсовая работа
По дисциплине «Дифференциальные уравнения»
по теме «Линейные дифференциальные уравнения n-порядка и системы»

Выполнил студент: Васильев А. В.

Группы: М8О-205Б-19

Руководитель: Будкина Е. М.

Оценка:

Дата:

Москва, 2020

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой

_______________ Бардин Б.С.
« 1 » сентября 2020 г.

Кафедра 802
Дисциплина
Дифференциальные уравнения
8 факультет 2 курс (бакалавры)

Вариант № 4.

курсовой работы по дифференциальным уравнениям

студенту ____Васильеву А.В.____ группы _М8О-205Б-19

1. Методом изоклин построить приближённо семейство интегральных кривых дифференциального уравнения 1-го порядка:
$$y' = 1 - xy.$$
2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений:
$$\frac{dX}{dt} - AX = 0, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = +i \\ \lambda_3 = -i \end{pmatrix}.$$
3. Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений:
$$\frac{dX}{dt} - AX = F, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin t} \\ \cos t \end{pmatrix}.$$
4. Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:
$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$$
5. Записать вид общего решения ЛНДУВП с постоянными коэффициентами (методом подбора в случае специальной правой части):
$$y'' + y' - 2y = 2e^x \cos 2x - 4e^{-2x}.$$

Основная литература:

1. Пунтус А.А. Дифференциальные уравнения.
2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

1. Методом изоклин построить приближённо семейство интегральных кривых дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$y' = 1 - yx$$

Если уравнение может быть записано в явном виде

$$y' = f(x, y),$$

то оно называется дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешённым относительно производной.

Каждой точке $(x, y) \in G$ области определения уравнение ставит в соответствие значение углового коэффициента $y' = tg\alpha$ касательной к интегральной кривой данного уравнения, проходящей через эту точку. Таким образом, каждой точке $(x, y) \in G$ ставится в соответствие некоторое направление (этой касательной), составляющее с осью угол $\alpha = arctg\ y' = arctg\ f(x, y)$. Тем самым в рассматриваемой области G определяется так называемое поле направлений. Если изобразить это поле, поместив в соответствующих точках отрезки, имеющие направление касательной, то задачу об интегрировании данного дифференциального уравнения можно сформулировать следующим образом: для любой точки $(x, y) \in G$ найти проходящую через неё кривую $y = y(x)$, такую, что в каждой её точке касательная к кривой имеет направление, совпадающее с направлением поля в этой точке. Другими словами, в каждой точке (x, y) поля направлений интегральная кривая $y = y(x)$ касается построенного в данной точке отрезка, а рассматриваемое ДУ выражает тем самым это общее свойство касательных его интегральных кривых.

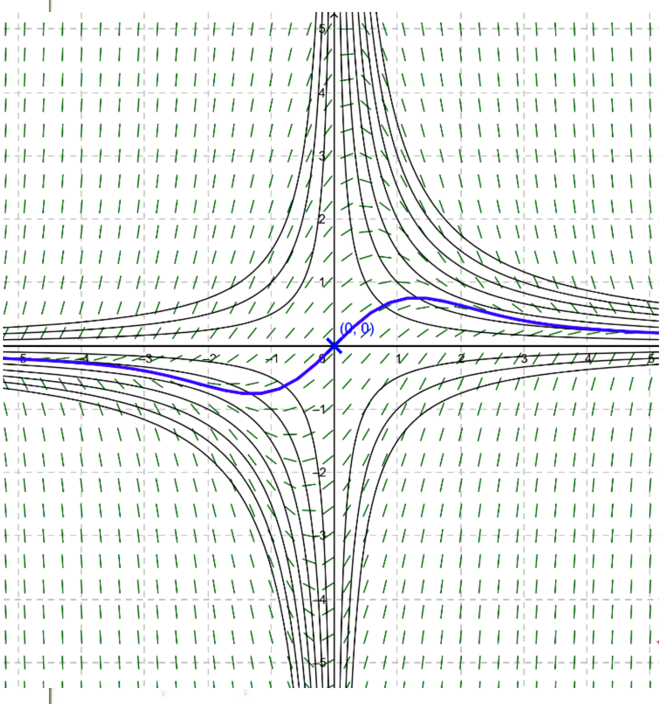
Изоклиной называется геометрическое место точек $(x, y) \in G$, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют одно и то же направление. Семейство изоклин ДУ определяется уравнением $f(x, y) = C$, где C – параметр.

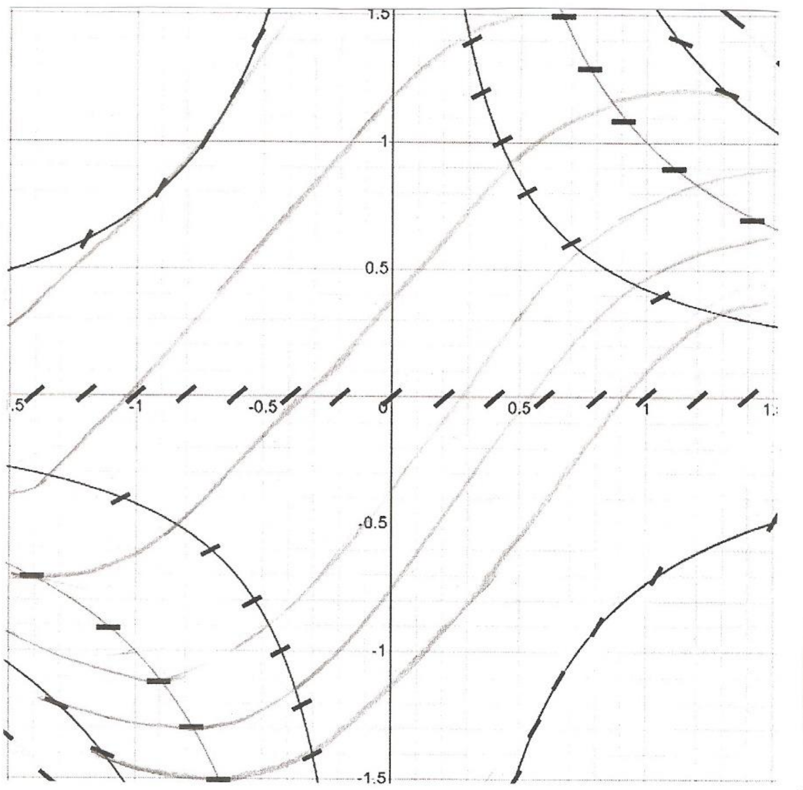
① $y' = 1 - xy$ Методом изоклин построить приближенно семейство интегральных кривых диф уравнения

$y' = k$, т.е $f(x, y) = k$

$1 - xy = k \qquad y = \dfrac{1-k}{x}$

α	$tg\,\alpha = k$	$y = \dfrac{1-k}{x}$
0	0	$y = 1/x$
$\pi/6$	$1/\sqrt{3}$	$y = \dfrac{1 - 1/\sqrt{3}}{x}$
$\pi/4$	1	$y = 0$
$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{x}$
$\pi/2$	∞	$-\infty$
$2\pi/3$	$-\sqrt{3}$	$y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{x}$
$3\pi/4$	-1	$y = \dfrac{2}{x}$
$5\pi/6$	$-1/\sqrt{3}$	$y = \dfrac{1 + 1/\sqrt{3}}{x}$





2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{dt} - AX = 0, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = +i \\ \lambda_3 = -i \end{pmatrix}.$$

Рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad \text{где } A - \text{ постоянная матрица}.$$

В координатной форме эта система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Так как данная система всегда имеет нулевое решение, то основной целью её аналитического решения является определение общего решения данной системы. Итак, аналитическое решение данной системы ищем в виде $y = He^{\lambda x}$, где λ - число, а H - вектор, координаты которого являются постоянными числами.

Искомый вид решения подставляем в уравнение $\frac{dHe^{\lambda x}}{dx} = AHe^{\lambda x}$
откуда $H\lambda e^{\lambda x} = AHe^{\lambda x}$.

Сокращая обе части на $e^{\lambda x} \neq 0$ получаем, очевидно, уравнение $AH - \lambda H = 0$ или $AH - \lambda EH = 0$ и окончательно:

$$(A - \lambda E)H = 0 \quad .$$

Как известно из курса линейной алгебры, для того, чтобы линейная однородная система относительно неизвестных координат вектора H имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель матрицы данной системы равнялся нулю: $|A-\lambda E| = 0$, или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Построенное уравнение относительно неизвестных λ называется *характеристическим уравнением.*
Таким образом, если конкретное значение λ является корнем уравнения и, после его подстановки в уравнение вектор H является соответствующим решением уравнения то тем самым решение $y = He^{\lambda x}$, уравнения определено. Так как уравнение имеет n корней, среди которых могут быть действительные и комплексные, простые и кратные, то для построения общего действительного решения данной системы необходимо построить фундаментальную систему решений, то есть определить n независимых действительных решений. Рассмотрим построение фундаментальной системы в различных случаях корней характеристического уравнения

Пусть все корни характеристического уравнения являются простыми различными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in R$. действительными корнями, то есть:
Решая для каждого из данных значений корней λ_i уравнение а именно $(A - \lambda_i E)H_i = 0$,определяем значения H_i и, следовательно, определяем решения $H_i e^{\lambda_i x}$ для каждого $i = 1, 2, 3$……n

В курсе линейной алгебры доказывается, что в данном случае все λ_i независимы, следовательно, независимы все полученные решения

$$H_1 e^{\lambda_1 x}, H_2 e^{\lambda_2 x}, H_3 e^{\lambda_3 x}, \ldots, H_n e^{\lambda_n x}.$$

Таким образом, эта система может быть принята в качестве фундаментальной системы решений.

Таким образом, в рассматриваемом случае общее решение системы имеет вид:

$$y = C_1 H_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 H_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 H_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n H_n e^{\lambda_n x}.$$

Пусть среди корней характеристического уравнения имеются комплексно-сопряжённые корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, (то есть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$).

Далее решаем уравнения $(A - \lambda_1 E)H_1 = 0$ и $(A - \lambda_2 E)H_2 = 0$ вида для каждого из этих корней. В результате их решения определяем комплексно-значные векторы H_1 и H_2 .

Таким образом, определяем комплексные решения $H_1 e^{\lambda_1 x}$ и $H_2 e^{\lambda_2 x}$ соответственно для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, а именно $y_1 = H_1 e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $y_2 = H_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$.

$$\frac{dx}{dt} - Ax = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = +i \\ \lambda_3 = -i \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda E)H = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ -3 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(3-\lambda) + 20 - 4(3-\lambda) + 10(-1-\lambda) = 0$$

$$-\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \pm i$$

$\exists\ \lambda_1 = 1 \qquad (A - \lambda_1 E)H = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -2h_1 + 2h_2 - 2h_3 = 0 \\ -3h_1 + 2h_2 - 2h_3 = 0 \\ -2h_1 + 2h_2 - 2h_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -h_1 + h_2 - h_3 = 0 \\ -3h_1 + 2h_2 - 2h_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = h_3 \end{cases} \qquad H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\exists\ \lambda_2 = i$

$$\begin{pmatrix} -1-i & 2 & -2 \\ -3 & 3-i & -2 \\ -2 & 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} (-1-i)h_1 + 2h_2 - 2h_3 = 0 \\ -3h_1 + (3-i)h_2 - 2h_3 = 0 \\ -2h_1 + 2h_2 + (-1-i)h_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_2 = \frac{3+i}{2} h_1 \\ h_3 = h_1 \end{cases} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \frac{3\cos t + 3i\sin t + i\cos t - \sin t}{2} \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{3\cos t - \sin t}{2} \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{3\sin t + \cos t}{2} \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \qquad X_2 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{3\cos t - \sin t}{2} \\ \cos t \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{3\sin t + \cos t}{2} \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{3\cos t - \sin t}{2} \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{3\sin t + \cos t}{2} \\ \sin t \end{pmatrix}$$

3. Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} - \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin t} \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x)$$

называется *линейной системой дифференциальных уравнений* . Форма является *векторно-матричной формой линейной системы дифференциальных уравнений*, в которой *вектор-функции* $y = y(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $f(x)$ и *функциональная матрица* $A(x)$ имеют вид:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в координатной форме система записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Если в вектор-функция $f(x) \neq 0$, то данная система называется *линейной неоднородной системой*, если же $f(x) \equiv 0$, то система называется *линейной однородной системой*. Если рассматривается неоднородная система но в ней в промежуточном действии полагается $f(x) \equiv 0$, то при этом условии система называется *линейной однородной системой, соответствующей данной неоднородной системе*

решение СЛОДУ $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \cdots + C_ny_n$

$$\begin{cases} y_{11}(x)C_1'(x) + y_{12}(x)C_2'(x) + \cdots + y_{1n}(x)C_n'(x) = f_1(x) \\ y_{21}(x)C_1'(x) + y_{22}(x)C_2'(x) + \cdots + y_{2n}(x)C_n'(x) = f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}(x)C_1'(x) + y_{n2}(x)C_2'(x) + \cdots + y_{nn}(x)C_n'(x) = f_n(x) \end{cases}.$$

③ $\frac{dx}{dt} - AX = F \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1/\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$\exists\ \lambda_1 = i$

$\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} (1-i)h_1 - h_2 = 0 \\ h_2 = (1-i)h_1 \end{cases} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$X = He^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}(\cos t + \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ \cos t + i\sin t - i\cos t - \sin t \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$

$\begin{cases} C_1'\cos t + C_2'\sin t = \cancel{0}\ \frac{1}{\sin t} \\ C_1'(\cos t - \sin t) + C_2'(\sin t - \cos t) = \cos t \end{cases}$ ⊖

$\begin{cases} C_1' = \frac{1}{\cos t \sin t} - C_2' \cdot tg\, t \\ C_1' - C_1' tg\, t + C_2' tg\, t - C_2' = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} C_1' = \frac{1}{\cos t \sin t} - C_2' tg\, t \\ \frac{1}{\cos t \sin t}(1 - tg\, t) + C_2'(tg^2 t - 1) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} C_1'\cos t + C_2'\sin t = \frac{1}{\sin t} \\ C_1'\sin t - C_2'\cos t = \cos t - \frac{1}{\sin t} \end{cases}$ $\cdot -\frac{\sin t}{\cos t}$ ⊕

$\begin{cases} C_1'\cos t + C_2'\sin t = \frac{1}{\sin t} \\ C_2'\left(\cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right) = -\cos t + \frac{1}{\sin t} \cdot \frac{1}{\cos t} \end{cases} \Big| \cdot \cos t$

$$C_2' = -\cos^2 t + \frac{\cos t}{\sin t} - 1$$

$$C_1' \cos t + \sin t \left(-\cos^2 t + \frac{\cos t}{\sin t} - 1\right) = \frac{1}{\sin t}$$

$$C_1' = \frac{1}{\sin t \cos t} + \sin t \cos t - 1 + \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \ln|\cos 2t - 1| - \ln(\cos t) + \frac{\sin^2 t}{2} - t - \ln|\cos t| + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} t \quad \frac{-\sin 2t}{4} + \ln|\sin 2t| - t + \tilde{C}_2$$

$$X = \left(\frac{1}{2} \ln|\cos 2t - 1| - \ln(\cos t) + \frac{\sin^2 t}{2} - t - \ln|\cos t| + \tilde{C}_1\right)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{4} + \ln|\sin 2t| - t + \tilde{C}_2\right)\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

$$X = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \ln|\cos 2t - 1| - \ln(\cos t) + \frac{\sin^2 t}{2} - t - \ln(\cos t)\right)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{4} + \ln|\sin 2t| - t\right)\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

4. Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка представляет собой сумму общего решения, соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения высшего порядка, и частного решения данного неоднородного уравнения.

Дифференциальное уравнение высшего порядка вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

называется линейным дифференциальным уравнением высшего порядка. При $f(x) \neq 0$ уравнение называется неоднородным линейным уравнением.

Метод вариации произвольных постоянных.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

Общее решение линейного однородного уравнения

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i, \quad c_i = \text{const}, \quad i=1,2,\dots,n$$

Пусть $c_i = c_i(x)$ $i=1,2,\dots,n$

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i.$$

Итак, функции $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ определяются из си линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i' = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'' = 0,\\
&\dots\dots\dots\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-2)} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x)
\end{aligned}\right|$$

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$$

1) $k^2 + 9 = 0 \qquad k^2 = -9 \qquad k_{1,2} = \pm 3i$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

2) $$\begin{cases} C_1' \cos 3x + C_2' \sin 3x = 0 \\ -3C_1' \sin 3x + 3C_2 \cos 3x = \frac{1}{\cos 3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -C_2' \,tg(3x) \\ 3C_2' \cos 3x - 3C_2' \sin 3x \; tg 3x = \frac{1}{\cos 3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -C_2' \,tg 3x \\ C_2' = \frac{1}{\cos 3x (3\cos 3x + 3 \sin 3x \; tg 3x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -C_2' \,tg 3x \\ C_2' = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad C_1' = -\frac{1}{3} tg 3x \qquad C_2' = \frac{1}{3}$$

$$dC_1 = \frac{-tg(3x)\,dx}{3} \qquad dC_2' = \frac{1}{3} dx$$

$$C_1 = \frac{1}{9} \cos 3x \ln(\cos 3x) + \tilde{C}_1 \qquad C_2 = \frac{x}{3} + \tilde{C}_2$$

$$y = \left(\frac{1}{9} \cos 3x \ln(\cos 3x) + \tilde{C}_1\right) \cos 3x + \left(\frac{x}{3} + \tilde{C}_2\right) \sin 3x.$$

$$y = \tilde{C}_1 \cos 3x + \tilde{C}_2 \sin 3x + \frac{1}{9} \cos^2 3x \ln(\cos 3x) + \sin 3x \cdot \frac{x}{3}$$

5. Записать вид общего решения ЛНДУВП с постоянными коэффициентами (методом подбора в случае специальной правой части):

$$y'' + y' - 2y = 2e^{x}\cos 2x - 4e^{-2x}.$$

ЛНДУВП с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения.

1.Пусть $f(x) = P_s(x)$

тогда 1.1) Среди корней характеристического уравнения нет корней =0, то

$$\tilde{y}(x) = R_s(x) = R_0x^s + R_1x^{s-1} + \ldots + R_s$$

1.2) Имеется корень=0 кратности **a** , то

$$\tilde{y}(x) = R_s(x)\, x^{\alpha} = [\, R_0x^s + R_1x^{s-1} + \ldots + R_s\,]\, x^{\alpha}$$

2. Пусть $f(x) = P_s(x)\, e^{px}$

тогда 2.1) Если p ≠ k, где k- корень характеристического уравнения, то

$$\tilde{y}(x) = R_s(x)e^{px} = [\, R_0x^s + R_1x^{s-1} + \ldots + R_s\,]\, e^{px}$$

2.2) Если p=k, где k- корень характеристического уравнения кратности **a**, то

$$\tilde{y}(x) = R_s(x)e^{px}x^{\alpha} = [\, R_0x^s + R_1x^{s-1} + \ldots + R_s\,]\, e^{px}\, x^{\alpha}$$

3. Пусть $f(x) = e^{px}\,[P_m(x)\cos qx + Q_l(x)\sin qx]$.

тогда 3.1) Если p ± qi ≠ k, где k- корень характеристического уравнения, то

$$\tilde{y}(x) = e^{px}\,[R_s(x)\cos qx + T_s(x)\sin qx], \quad \text{где } s = \max(m, l)$$

3.2) Если p ± qi = k, где k- корень характеристического уравнения кратности **a**, то

$$\tilde{y}(x) = e^{px}\,[R_s(x)\cos qx + T_s(x)\sin qx]\, x^{\alpha}$$

где $s = \max(m, l)$

$$y'' + y' - 2y = 2e^{x}\cos 2x - 4e^{-2x}$$

1) $k^2 + k - 2 = 0 \qquad k_1 = -2 \qquad k_2 = 1$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$$

2) $f_1(x) = 2e^{x}\cos 2x$

$\tilde{y}_1(x) = e^{x}(R\cos 2x + T\sin 2x)$

$\tilde{y}_1' = e^{x}[(T-2R)\sin 2x + (R+2T)\cos 2x]$

$\tilde{y}_1'' = -e^{x}[(4R+3T)\sin 2x + (3R-4T)\cos 2x]$

$-[(4R+3T)\sin 2x + (3R-4T)\cos 2x] + (T-2R)\sin 2x + (R+2T)\cos 2x -$

$-2R\cos 2x - 2T\sin 2x = 2\cos 2x$

$-6R\sin 2x - 4T\sin 2x + 6R\cos 2x - 4T\cos 2x = 2\cos 2x$

$-3R\sin 2x - 2T\sin 2x - 3R\cos 2x - 2T\cos 2x = \cos 2x$

$\begin{cases} 3R\cos 2x - 2T\cos 2x = \cos 2x \\ -3R\sin 2x - 2T\sin 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3R - 2T = 1 \\ -3R - 2T = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} R = -\frac{2}{13} \\ T = \frac{3}{13} \end{cases}$

$f_2(x) = -4e^{-2x}$

$\tilde{y}_2 = Re^{-2x}x$

$\tilde{y}_2' = Re^{-2x}(1-2x)$

$\tilde{y}_2'' = 4Re^{-2x}(-1 + \cancel{1}x)$

$4(-1+x)R + (1-2x)R - 2R\cancel{e^{-2x}}x = -4$

$-3R = -4$

$R = \frac{4}{3}$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + \frac{4}{3}e^{-2x}x - \frac{2}{13}e^{x}\cos 2x + \frac{3}{13}e^{x}\sin 2x$$