Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 12. Стохастические оптимальные системы. Оптимальная фильтрация по Винеру-Хопфу и по Калману-Бьюси.

Стохастические оптимальные системы. Линейные стохастические оптимальные системы при полной информации о состоянии. Винеровская задача оптимальной фильтрации. Фильтр Калмана-Бьюси. Задача оптимальной фильтрации при белых шумах. Фильтр Калмана-Бьюси при цветном шуме объекта и цветном шуме наблюдения. Линейные стохастические системы при неполной информации. Принцип разделения.

Стохастические оптимальные системы.

Пусть объект задан системой дифференциальных уравнений со случайной правой частью вида:
$\dot{x} = F(x,u,t) + \xi_0(t); x(t_0) = x^0; x \in R^n; u \in R^m$, где $\xi_0(t)$ - гауссов белый шум, $M\{\xi_0(t)\} = 0; M\{\xi_0(t)\xi_0(t')\} = Q_0\delta(t-t')$, Q_0 - симметричная матрица; x^0 - гауссова случайная величина с известными характеристиками, некоррелированная со случайным процессом $\xi_0(t)$. Будем считаем, что функция $F(x,u,t)$ удовлетворяет необходимым условиям существования и единственности. Критерий оптимальности зададим следующим функционалом:

$J = M\{g_0(x(t_f),t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt\}$. Требуется найти позиционное управление, то есть управление $u = u(x(t),t)$, реализуемое обратной связью, доставляющее минимум критерий оптимальности. В дальнейшем будем называть такое управление стохастическим оптимальным управлением. Можно доказать, что решение $x(t)$ будет являться марковским процессом. Поэтому оптимальное управление должно быть функцией только текущего состояния. Примем, что управление $u = u(x(t),t)$ считается допустимым, если функция $u(x(t),t)$ является кусочно - непрерывной и принадлежит некоторому множеству $U(t)$, а функции f_0, g_0, F являются непрерывными.

Теорема (достаточные условия стохастической оптимальности). *Если существует скалярная функция $S(x,t)$, обладающая непрерывными частными производными $\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, и допустимое управление $u^*(x(t),t) \in U(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\min_{u \in U(t)} \{ f_0(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial x} F(x,u,t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} q_{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

, при граничном условии $S(x(t_f),t_f) = g_0(x(t_f),t_f)$, где $Q_0 = \| q_{ij} \|$, то это управление является стохастическим оптимальным управлением для исходной задачи оптимального управления.

Соотношение $\min\limits_{u \in U(t)} \{ f_0(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial x} F(x,u,t) + \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}^{n} q_{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\} = -\frac{\partial S}{\partial t}$ является по сути уравнением Беллмана, которое учитывает дисперсионную составляющую вектора фазовых переменных, а функция $S(x,t)$ - является функцией Беллмана. Если множество $U(t)$ открыто и минимум в левой части уравнения Беллмана достигается в стационарной точке, то уравнение можно представить в следующем виде:

$$f_0(x,u,t)+\frac{\partial S}{\partial x}F(x,u,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}q_{ij}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}=-\frac{\partial S}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial u}\{f_0(x,u,t)+\frac{\partial S}{\partial x}F(x,u,t)\}=0.$$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что $tr(Q_0\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x})=\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}q_{ij}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}$. Поэтому уравнение Беллмана часто записывают в виде

$$\min_{u\in U(t)}\{f_0(x,u,t)+\frac{\partial S}{\partial x}F(x,u,t)+\frac{1}{2}tr(Q_0\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x})\}=-\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Линейные стохастические оптимальные системы при полной информации о состоянии.

Пусть уравнение вполне управляемого объекта описываются линейными уравнениями со случайной правой частью вида $\dot{x}=Ax+Bu+\xi_0(t);x(t_0)=x^o;x\in R^n;u\in R^m$, а критерий оптимальности задается функционалом $J=M\{x^T(t_f)\Phi x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Lx(t)+u^T(t)Gu(t)]dt\}$,

где $\xi_0(t)$ - гауссов белый шум, $M\{\xi_0(t)\}=0;M\{\xi_0(t)\xi_0(t')\}=Q_0\delta(t-t')$, Q_0 - симметричная матрица; x^0 - гауссова случайная величина $M\{x^0\}=\bar{x}^0;M\{(x^0-\bar{x}^0)(x^0-\bar{x}^0)^T\}=H_0$, некоррелированная со случайным процессом $\xi(t)$. Матрицы A,B,L,G являются, в общем случае, функциями времени.

***Теорема**. Стохастическое оптимальное управление с обратной связью для объекта $\dot{x}=Ax+Bu+\xi_0(t);x(t_0)=x^0$ при критерии оптимальности*

$J=M\{x^T(t_f)\Phi x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Lx(t)+u^T(t)Gu(t)]dt\}$ имеет вид $u=-G^{-1}B^TKx$, где K - симметричная матрица, которая определяется из матричного уравнения Риккати $\dot{K}=-KA-A^TK+KBG^{-1}B^TK-L$ при граничном условии $K(t_f)=\Phi$.

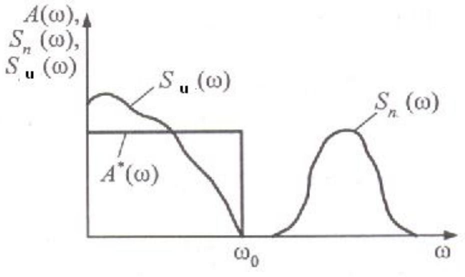
Легко заметить, что оптимальный закон управления совпадает с соответствующим оптимальным законом управления линейного объекта при детерминированном функционале, задающим квадратичный интегральный критерий качества. Таким образом, случайное воздействие на объект и случайное начальное условие не влияет на оптимальный закон управления, если имеется полная информация о фазовом векторе.

Винеровская задача оптимальной фильтрации.

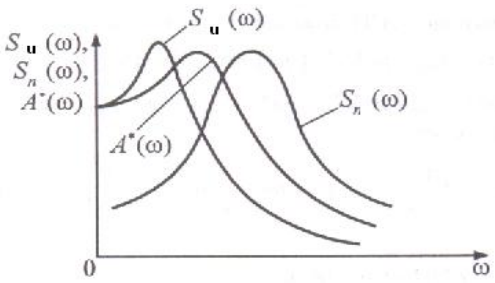
Оптимальной среди систем данного класса называют ту систему, для которой показатель ее качества имеет экстремальное значение.

Рассмотрим случай, когда заданы структура системы и статистические характеристики входных сигналов. Требуется найти такие значения параметров системы, при которых точность системы будет максимальной, то есть ошибка системы минимальной. Как уже отмечалось, ошибка системы состоит из двух составляющих: одна из них вызвана тем, что система не может абсолютно точно воспроизводить полезный сигнал u(t), а вторая – реакцией на помеху n(t). При этом уменьшение первой составляющей будет приводить к увеличению второй составляющей. Решением задачи оптимальной фильтрации называют такое построение системы при исходных допущениях о структуре системы и параметрах математических моделей сигналов, при которых будет обеспечиваться некоторое минимальной (максимальное) значение критерия эффективности.

Очевидно, что наиболее простым случаем является ситуация, когда полезный сигнал имеет более низкочастотный спектр, чем помеха. Более сложным является случай, когда спектры $S_u(\omega)$ и $S_n(\omega)$ пересекаются.

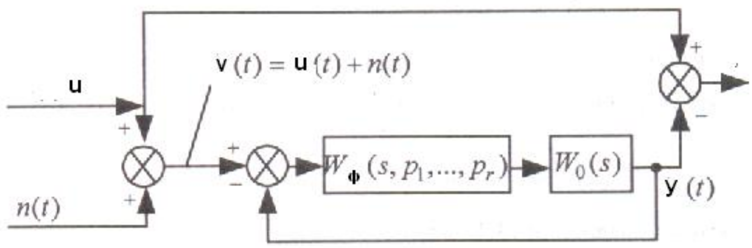


К иллюстрации задачи фильтрации



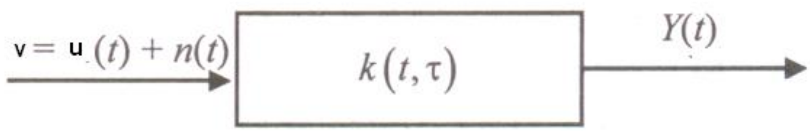
К задаче нахождения оптимальной ПФ системы

Пусть в структуру системы введен фильтр с передаточной функцией $W(s,p)$, причем параметры $p=(p_1,\ldots,p_k)$ могут меняться. Тогда задача оптимальной фильтрации сводится к нахождению некоторой оптимальной передаточной функции разомкнутой цепи, при которых ошибка отработки системы входного сигнала будет минимальной.



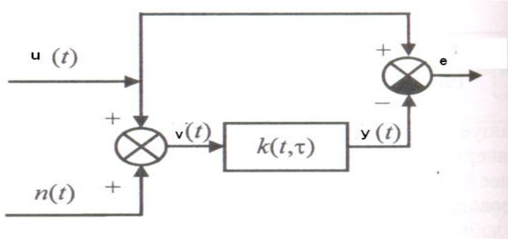
К постановке задачи фильтрации

Рассмотрим следующую линейную систему.



К постановке задачи фильтрации

Пусть заданы взаимно некоррелированные центрированные нестационарные случайные процессы в виде функций времени $u(t)$ - полезный сигнал, и, $n(t)$ - помеха, с корряционными функциями $K_u(t_1,t_2)$ и $K_n(t_1,t_2)$. Требуется найти импульсную переходную характеристику $k^{opt}(t,\tau)$ фильтра, оптимальным образом выделяющего реализацию случайного процесса $u(t)$ в виде некоторой оценки процесса $\hat{u}(t)$ в условиях, когда на вход поступает аддитивная смесь полезного сигнала $u(t)$ и помехи $n(t)$: $v(t)=u(t)+n(t)$. Критерием оптимальности является минимум среднеквадратичной ошибки: $M\{e(t)\}\to\min$. Структурная схема, поясняющая постановку задачи фильтрации в классе линейных систем, приведена на рисунке.



К постановке задачи фильтрации

Положим, что в момент времени $t=0$ фильтр имеет нулевые начальные условия. Тогда сигнал ошибки $e(t)$ определяется с помощью соотношения $e(t)=u(t)-\int_0^t k(t,\tau)v(\tau)d\tau$. Для квадрата ошибки можно записать::

$e^2(t)=u^2(t)-2\int_0^t k(t,\tau)v(\tau)u(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^t k(t,\tau_1)k(t,\tau_2)v(\tau_1)v(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$, где интегралы понимаются в с.к. смысле. Применяя математическое ожидание к полученному равенству, получим: $M\{e^2(t)\}=D_u(t)-2\int_0^t k(t,\tau)K_{vu}(\tau,t)d\tau+\int_0^t\int_0^t k(t,\tau_1)k(t,\tau_2)K_v(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$.

Тогда решая данную классическую вариационную задачу, можно записать условие, когда достигается минимальное значение $M\{e^2(t)\}$:

$K_{vu}(\tau_2,t)=\int_0^t k^{opt}(t,\tau_1)K_v(\tau_1,\tau_2)d\tau_1; 0\le\tau_1,\tau_2\le t; t\in[0,\infty)$. Данное интегральное уравнение 1-го рода определяет оптимальную импульсную переходную функцию фильтра, обеспечивающего воспроизведение полезного сигнала $u(t)$ с минимальной среднеквадратичной ошибкой. Уравнение носит название уравнения Винера-Хопфа.

Рассмотрим теперь постановку задачи (постановка задачи по Колмогорову - Винеру - Хопфу), когда сигналы $u(t)$ и $n(t)$ являются стационарными, эргодическими и центрированными не коррелированными случайными процессами с корреляционными функциями $K_u(t)$, $K_n(t)$ и спектральными плотностями $S_u(\omega)$, $S_n(\omega)$ соответственно. Требуется найти стационарный фильтр. Для данного случая уравнение Винера-Хопфа принимает следующий вид:

$K_{vu}(t)=\int_0^t k^{opt}(\tau)R_v(t-\tau)d\tau$. Очевидно, что, в соответствие с условиями задачи, будет справедливо равенство: $K_v(t)=K_u(t)+K_n(t)$. Применим к уравнению Винера-Хопфа преобразование Фурье. Тогда будет справедливо уравнение: $S_{vu}(\omega)=|W^{opt}(i\omega)|^2\, S_v(\omega)$. Отсюда оптимальные передаточная функция и импульсная переходная функция фильтра определяются по следующим соотношениям: $|W^{opt}(i\omega)|^2=\dfrac{S_{vu}(\omega)}{S_v(\omega)}$ и

$k^{opt}(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W^{opt}(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$. Представим спектральную функцию $S_v(\omega)$ с помощью соответствующего формирующего фильтра, то есть:

$S_v(\omega) = |W_{\Phi}(i\omega)|^2 = W_{\phi}(i\omega) W_{\phi}(-i\omega)$. Тогда передаточная функция оптимального фильтра Винера имеет вид $W^{opt}(i\omega) = \dfrac{1}{W_{\phi}(i\omega)}[\dfrac{S_{vu}(\omega)}{W_{\phi}(-i\omega)}]_+$, где $[...]_+$ - выражение, которое получается, если в разложении на простые дроби дробно-рациональной функции, заключенной в квадратных скобках, исключить те слагаемые, полюсы которых расположены в правой полуплоскости на комплексной плоскости $i\omega$. Данное требование вытекает, как из требований существования корреляционной функции $K_{vy}(t)$, которая априори не задана и определяется с помощью следующего соотношения: $K_{vy}(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{S_{vu}(\omega)}{W_{\phi}(-i\omega)}e^{i\omega t}d\omega$. Данные требования обуславливают условие физической реализуемости оптимального фильтра, которое заключается в том, что $k^{opt}(t) = 0$ при $t < 0$. Но это может иметь место лишь тогда, когда соответствующая передаточная функция $W^{opt}(s)$ имеет все левые полюсы. Можно показать, что соотношение $W^{opt}(i\omega) = \dfrac{1}{W_{\phi}(i\omega)}[\dfrac{S_{vu}(\omega)}{W_{\phi}(-i\omega)}]_+$ будет определять оптимальный линейный фильтр для гауссовых случайных процессов. Для других типов случайных процессов оптимальный фильтр будет находиться в иррациональных передаточных функций. Тогда оптимальная импульсная передаточная функция фильтра, определяемая приведенной формулой, может быть отличной от нуля при $t < 0$. То есть будет физически нереализуемой. Поэтому обычно строят некоторое приближенное решение, которое определяется введением в схему фильтра элемента с запаздыванием.

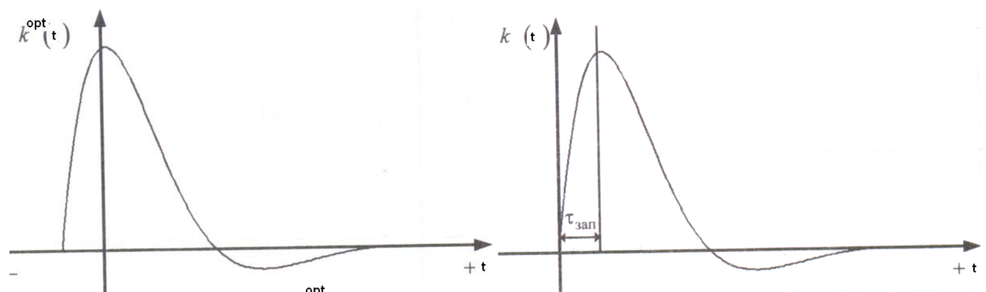


График $k^{opt}(t)$ Приближенная ИПФ $\bar{k}(t)$

Пример. Входной сигнал имеет вид : $v(t) = u(t) + n(t)$, где $u(t)$ - полезный сигнал, представляющий собой стационарный случайный процесс, а $n(t)$ - стационарная случайная помеха с корреляционной функцией $K_n(\tau) = N_0\delta(\tau)$. Корреляционная функция сигнала $x(t)$ имеет вид $K_v(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$. Полезный сигнал и шум не коррелированны. Необходимо определить функцию фильтра Винера. Так как полезный сигнал и помеха являются не коррелированными, то получим, что:
$K_v(\tau) = K_u(\tau) + K_n(\tau); S_v(\omega) = S_u(\omega) + S_n(\omega)$. Спектральные плотности полезного сигнала и помехи равны $S_u(\omega) = \sigma^2\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}; S_n(\omega) = N_0$. Отсюда найдем, что $S_v(\omega) = |\dfrac{\sqrt{N_0}(\beta + i\omega)}{a + i\omega}|^2$., где $\beta^2 = \dfrac{2\sigma^2 a}{N_0} + a^2$. Тогда передаточная функция формирующего фильтра для сигнала $v(t)$ имеет вид

$W_\phi(i\omega)=\dfrac{\sqrt{N_0}\,(\beta+i\omega)}{a+i\omega}$. Найдем взаимную ковариационную функцию входного и полезного сигналов:

$R_{vu}(\tau)=M\{\overset{0}{v}(t)\overset{0}{u}(t+\tau)\}=M\{[\overset{0}{u}(t)+\overset{0}{n}(t)]\overset{0}{u}(t+\tau)\}=R_u(\tau)$. Отсюда следует, что

$S_{vu}(\omega)=S_u(\omega)=\sigma^2\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$. Рассмотрим выражение $\dfrac{S_{vu}(\omega)}{W_\phi(i\omega)}$, входящее в формулу оптимального фильтра: $\dfrac{S_{vu}(\omega)}{W_\phi(i\omega)}=\dfrac{2a\sigma^2}{(i\omega+a)\sqrt{N_0}\,(\beta-i\omega)}=\dfrac{2a\sigma^2}{\sqrt{N_0}\,(a+\beta)}[\dfrac{1}{a+i\omega}+\dfrac{1}{\beta-i\omega}]$. Полюс второй элементарной дроби расположен в правой полуплоскоскости комплексной плоскости. Поэтому можно записать $[\dfrac{S_{vu}(\omega)}{W_\phi(i\omega)}]_+=\dfrac{2a\sigma^2}{\sqrt{N_0}\,(a+\beta)}\dfrac{1}{a+i\omega}$. Подставим полученное выражение в формулу для передаточной функции оптимального фильтра, найдем $W^{opt}(s)=\dfrac{k}{Ts+1}$, где $T=\dfrac{1}{\beta}$, $k=\dfrac{2a\sigma^2}{\beta N_0}$.

<u>Фильтр Калмана-Бьюси. Задача оптимальной фильтрации при белых шумах.</u>

При выводе уравнений фильтра Винера-Хопфа предполагалось, что оценка получается на основе результатов наблюдения на бесконечном отрезке времени. Данное условие является достаточно жестким ограничением для задач управления. Рассмотрим решение задачи оптимальной фильтрации на конечном интервале времени $[t_0,t]$ (Ким т2 с359)..

Пусть задана управляемая система $\dot{x}=Ax+Bu+n_0(t);x(t_0)=x_0;y=Cx+n_н(t)$, где матричные функции A,B,C, в общем случае, являются детерминированными функциями времени, x_0 - случайная величина, а $n_0(t),n_н(t)$ - белые шумы со следующими характеристиками:

$M\{x_0\}=\bar{x}_0;M\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)^T\}=P_0$; $M\{n_0(t)\}=0;M\{n_0(t)n_0^T(t')]=Q_0(t)\delta(t-t')$;

$M\{n_н(t)\}=0;M\{n_н(t)n_н^T(t')]=R_0(t)\delta(t-t')$; $M\{n_0(t)n_н^T(t')]=W_0(t)\delta(t-t')$. Здесь Q_0,P_0 - положительно полуопределенные матрицы; $R_0(t)$ - положительно определенная матрица. При этом случайная величина x_0 не коррелированна с шумами $n_0(t),n_н(t)$.

Требуется на основе наблюдения выхода $y(t)$ на интервале $[t_0,t]$ определить несмещенную оценку $\hat{x}(t)$ на выходе линейного фильтра, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки: $J=M[(x(t)-\hat{x}(t))^T(x(t)-\hat{x}(t))]$ (эффективная оценка). Условие положительной определенности матрицы $R_0(t)$ означает, что ни одна компонента выхода $y(t)$ не измеряется точной. То есть задача оценивания является несингулярной (невырожденной).

Теорема *(Ким т2 с360). Если шумы объекта и наблюдения не коррелированны (*$W_0(t)\equiv 0$*), то оценка* $\hat{x}(t)$ *является несмещенной и эффективной в том случае, когда она находится из уравнения* $\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+K_0(y-C\hat{x});\hat{x}(t_0)=\bar{x}(t_0)$ *с матрицей коэффициентов усиления* $K_0=PC^TR_0^{-1}$*, где* P *определяется из уравнения*

$\dot{P}=AP+PA^T-PC^TR_0^{-1}CP+Q_0;P(t_0)=P_0$.

Матрица P является дисперсионной матрицей ошибки $e = x(t) - \hat{x}(t)$, то есть $P = M[e(t)e^T(t)]$, а уравнение, которому удовлетворяет данная матрица, называется дисперсионным уравнением.

Теорема *(Ким т2 с361). Если шумы объекта и наблюдения коррелированны ($W_0(t) \neq 0$), то оценка $\hat{x}(t)$ является несмещенной и эффективной в том случае, когда она находится из уравнения $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_0(y - C\hat{x}); \hat{x}(t_0) = \bar{x}(t_0)$ с матрицей коэффициентов усиления $K_0 = (PC^T + W_0)R_0^{-1}$, где P определяется из уравнения*

$$\dot{P} = (A - W_0R_0^{-1}C)P + P(A - W_0R_0^{-1}C)^T - PC^T R_0^{-1}CP + Q_0 - W_0R_0^{-1}W_0^T; P(t_0) = P_0.$$

Полученные фильтры называются фильтрами (наблюдателями) Калмана-Бьюси. Фильтры Калмана-Бьюси имеют такую же структуру, что и наблюдатели (идентификаторы) полного порядка (см. лекция 9 часть 1 курса) в детерминированном случае. Отличие состоит в том, что когда случайные воздействия не учитываются (то есть в детерминированном случае), матрица коэффициентов усиления выбирается достаточно произвольно. Когда случайные воздействия учитываются, эта матрица определяется однозначно.

Пример. Определить оптимальную оценку постоянной величины x по наблюдениям за выходом $y = x + n_н(t)$, где $n_н(t)$ - белый шум с интенсивностью r_0, математическим ожиданием $M\{x\} = \bar{x}$ и дисперсией $M\{(x - \bar{x})^2\} = p_0$. Очевидно, что уравнение объекта имеет вид $\dot{x} = 0$, то есть $A = 0; B = 0; C = 1; R_0 = r; Q_0 = 0$. Тогда фильтр Калмана-Бьюси будет описываться уравнением $\dot{\hat{x}} = K_0(y - \hat{x}); \hat{x}(t_0) = \bar{x}$, где $K_0 = p / r_0$. Параметр p будет определяться из уравнения $\dot{p} = -p^2 / r_0; p(t_0) = p_0$. Отсюда коэффициент усиления получаем $k_0 = p_0 / (r_0 + p_0 t)$.

<u>Фильтр Калмана-Бьюси при цветном шуме объекта.</u>

Рассмотрим теперь задачу линейного оптимального оценивания при условии, что шум объекта является цветным, то есть не белым. В этом случае задача синтеза оптимального фильтра сводится к следующей постановке. Управляемая система описывается уравнениями:

$$\dot{x}^{(1)} = Ax^{(1)} + B_1u + x^{(2)}(t); x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}; \dot{x}^{(2)} = A_2x^{(2)} + \tilde{n}_0(t); x^{(2)}(t_0) = x_0^{(2)}; y = C_1x^{(1)} + n_н(t),$$

где $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$ - случайные величины, $\tilde{n}_0(t), n_н(t)$ - белые шумы, с вероятностными характеристиками: $M\{x_0^{(1)}\} = \bar{x}_0^{(1)}; M\{(x_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)})(x_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)})^T\} = P_{01}$;

$M\{x_0^{(1)}\} = \bar{x}_0^{(1)}; M\{(x_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)})(x_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)})^T\} = P_{01}$;

$M\{\tilde{n}_0(t)\} = 0; M\{\tilde{n}_0(t)\tilde{n}_0^T(t')\} = \tilde{Q}_0(t)\delta(t - t')$; $M\{n_н(t)\} = 0; M\{n_н(t)n_н^T(t')\} = R_0(t)\delta(t - t')$;

$M\{\tilde{n}_0(t)n_н^T(t')\} = W_0(t)\delta(t - t')$. Здесь $\tilde{Q}_0, P_0$ - положительно полуопределенные матрицы; $R_0(t)$ - положительно определенная матрица. При этом случайные величины $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$ не коррелированны с шумами $\tilde{n}_0(t), n_н(t)$. Требуется на основе наблюдения выхода $y(t)$ на интервале $[t_0, t]$ определить эффективную несмещенную оценку $\hat{x}^{(1)}(t)$ на выходе линейного фильтра, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$J=M[(x^{(1)}(t)-\hat{x}^{(1)}(t))^T(x^{(1)}(t)-\hat{x}^{(1)}(t))]$. Преобразуем данную задачу в задачу фильтрации с белыми шумами. Введем следующие переменные: $x=\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}$, $x_0=\begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \end{pmatrix}$; $\bar{x}_0=\begin{pmatrix} \bar{x}_0^{(1)} \\ \bar{x}_0^{(2)} \end{pmatrix}$;

$A=\begin{pmatrix} A_1 & E \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C=[C_1,0]$; $G=\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$; $P_0=\begin{pmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & P_{20} \end{pmatrix}$; $Q_0=G\tilde{Q}G^T$. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом $\dot{x}=Ax+Bu+n_0(t);x(t_0)=x_0;y=Cx+n_н(t)$,

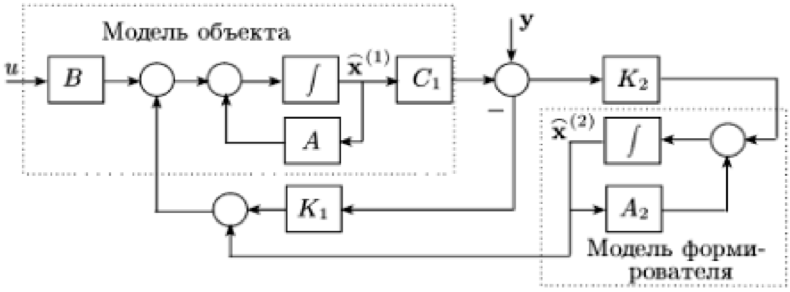
$J=M[(x(t)-\hat{x}(t))^T(x(t)-\hat{x}(t))]\to\min$, где $n_0(t)=G\tilde{n}_0(t)$. При этом фазовый вектор и шумы не коррелированны между собой и имеют вероятностные характеристики

$M\{x_0\}=\bar{x}_0;M\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)^T\}=P_0$; $M\{n_0(t)\}=0;M\{n_0(t)n_0^T(t')]=Q_0(t)\delta(t-t')$;

$M\{n_н(t)\}=0;M\{n_н(t)n_н^T(t')]=R_0(t)\delta(t-t')$; $M\{n_0(t)n_н^T(t')]=W_0(t)\delta(t-t')$. Отсюда найдем уравнения для оптимальной оценки: $\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+K_0(y-C\hat{x});\hat{x}(t_0)=\bar{x}(t_0)$, $K_0=PC^TR_0^{-1}$,

$\dot{P}=AP+PA^T-PC^TR_0^{-1}CP+Q_0;P(t_0)=P_0$

Структурная схема фильтра Калмана-Бьюси, при этом, помимо модели объекта будет включать еще и модель формирователя цветного шума.



Фильтр Калмана-Бьюси при цветном шуме наблюдения.

Рассмотрим теперь задачу линейной оптимальной фильтрации при условии, что шум объекта является белым, а шум наблюдения – цветным. В этом случае управляемая система описывается уравнениями $\dot{x}=Ax+Bu+n_0(t);x(t_0)=x_0;\tilde{y}=\tilde{C}x+z;\dot{z}=Dz+\tilde{n}_н(t)$, где

$M\{x_0\}=\bar{x}_0;M\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)^T\}=P_0$; $M\{n_0(t)\}=0;M\{n_0(t)n_0^T(t')]=Q_0(t)\delta(t-t')$;

$M\{\tilde{n}_н(t)\}=0;M\{\tilde{n}_н(t)\tilde{n}_н^T(t')]=\tilde{R}_0(t)\delta(t-t')$; $M\{n_0(t)\tilde{n}_н^T(t')]=\tilde{W}(t)\delta(t-t')$. Здесь Q_0,P_0 - положительно полуопределенные матрицы; $\tilde{R}_0(t)$ - положительно определенная матрица. При этом случайная величина x_0 не коррелированна с шумами $n_0(t),\tilde{n}_н(t)$. Требуется на основе наблюдения выхода $y(t)$ на интервале $[t_0,t]$ определить эффективную несмещенную оценку $\hat{x}(t)$ на выходе линейного фильтра, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$J=M[(x(t)-\hat{x}(t))^T(x(t)-\hat{x}(t))]$. Преобразуем данную задачу в задачу фильтрации с белыми шумами. Продифференцировав уравнение выхода по времени, можно записать следующее соотношение $\dot{\tilde{y}}=(\dot{\tilde{C}}+\tilde{C}A)x+\tilde{C}Bu+Dx+\tilde{C}n_0+\tilde{n}_н$. Введем новый вектор наблюдения $y=\dot{\tilde{y}}-\tilde{C}Bu-D\tilde{y}$. Тогда после преобразований получим $y=Cx+n_н$, где $C=\dot{\tilde{C}}+\tilde{C}A-D\tilde{C}$;

$n_н = \tilde{C}n_0 + \tilde{n}_н$. Шум $n_н$ имеет интенсивность $R_0 = \tilde{C}Q_0\tilde{C}^T + \tilde{W}^T\tilde{C}^T + \tilde{C}\tilde{W} + \tilde{R}_0$. Интенсивность взаимной корреляционной функции шума $n_н$ и шума объекта определяется соотношением $W_0 = Q_0\tilde{C}^T + \tilde{W}$. Очевидно, что шум объекта $n_0(t)$ и шум $n_н(t)$ преобразованного уравнения наблюдения будут коррелированны. Если матрица $R_0(t)$ положительно определена, то оптимальный фильтр будет описываться уравнениями $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_0(y - C\hat{x}); \hat{x}(t_0) = \bar{x}(t_0)$,

$K_0 = (PC^T + W_0)R_0^{-1}$,

$\dot{P} = (A - W_0R_0^{-1}C)P + P(A - W_0R_0^{-1}C)^T - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0 - W_0R_0^{-1}W_0^T; P(t_0) = P_0$.

Однако в это соотношение входит производная выхода $\dot{\tilde{y}}$, что нежелательно. Поэтому введем следующий вектор $\tilde{x}$, который определим следующим равенством $\hat{x} = \tilde{x} + K_0\tilde{y}$.
Продифференцировав это равенство по времени получим

$\dot{\tilde{x}} = (A - K_0C)\hat{x} + (B - K_0\tilde{C}B)u - (\dot{K}_0 + K_0D)\tilde{y}$ или

$\dot{\tilde{x}} = (A - K_0C)\tilde{x} + (B - K_0\tilde{C}B)u + [(A - K_0C)K_0 - \dot{K}_0 - K_0D]\tilde{y}$; $\tilde{x}(t_0) = \bar{x}_0 - K_0(t_0)\tilde{y}(t_0)$. В это уравнение производная $\dot{\tilde{y}}$ не входит. Это позволяет определить оценку $\tilde{x}$ без дифференцирования выхода объекта, а затем с помощью соотношения $\hat{x} = \tilde{x} + K_0\tilde{y}$ найти искомую оценку $\hat{x}$.

Пример. Объект описывается уравнениями $\dot{x} = 0; \tilde{y} = x + z; M[x(0)] = 0; M[x^2(0)] = p_0$. Шум наблюдения является стационарным случайным процессом с характеристиками $M[z] = 0; M\{z(t)z(t+\tau)] = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}$.
Тогда уравнение формирователя имеет вид $\dot{z} = -z + \tilde{n}_н$, где $M[\tilde{n}_н] = 0; M[\tilde{n}_н(t)\tilde{n}_н(t')] = \delta(t - t')$. Таким образом, в данном случае, будут справедливы соотношения
$A = 0; B = 0; \tilde{C} = 1; Q_0 = 0; D = -1; \tilde{R}_0 = 1; \tilde{W} = 0$. Из этого следует, что $C = 1; R_0 = 1; W_0 = 0$. Тогда можно записать следующие уравнения оценивания $\dot{\tilde{x}} = -k_0\tilde{x} + (-k_0^2 - \dot{k}_0 + k_0)\tilde{y}$;
$\tilde{x}(0) = -k_0\tilde{y}(0); \hat{x} = \tilde{x} + k_0\tilde{y}$. Параметры k_0, p определяются из результатов теоремы ($W_0 = 0$) с помощью уравнений $k_0 = p; \dot{p} = -p^2; p(0) = p_0$. Отсюда легко вычислить $p = k_0 = \frac{p_0}{1 + p_0t}$.

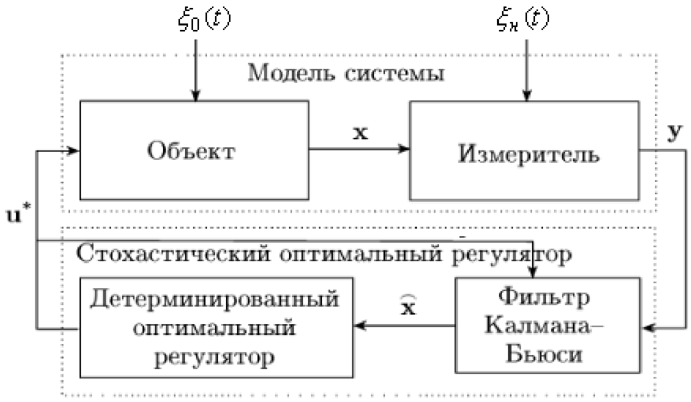
Линейные стохастические оптимальные системы при неполной информации о состоянии.

Пусть уравнение вполне управляемого объекта описываются линейными уравнениями со случайной правой частью вида
$\dot{x} = Ax + Bu + \xi_0(t); \quad y = Cx + \xi_н(t); \quad x(t_0) = x^0; x \in R^n; u \in R^m$, а критерий оптимальности имеет вид: $J = M\{x^T(t_f)\Phi x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Lx(t) + u^T(t)Gu(t)]dt\}$, где $\xi_0(t)$- гауссов белый шум на входе объекта, $M\{\xi_0(t)\} = 0; M\{\xi_0(t)\xi_0(t')\} = Q_0\delta(t - t')$, Q_0 - симметричная матрица; $\xi_н(t)$- гауссов белый шум на выходе (шум наблюдения), $M\{\xi_н(t)\} = 0; M\{\xi_н(t)\xi_н(t')\} = R_н\delta(t - t')$, (принимается, что процессы $\xi_0(t), \xi_н(t)$ некоррелированные); x^0 - гауссова случайная величина

$M\{x^0\}=\bar{x}^0; M\{(x^0-\bar{x}^0)(x^0-\bar{x}^0)^T\}=H_0$, некоррелированная со случайными процессами $\xi_0(t), \xi_н(t)$. Матрицы A, B, L, G являются, в общем случае, функциями времени. Требуется найти управление $u=u(y(\tau), t_0 \le \tau \le t); t_0 \le t \le t_f$, при котором критерий оптимальности принимает минимальное значение.

Теорема (принцип разделения). *Стохастическое оптимальное управление с обратной связью для объекта* $\dot{x}=Ax+Bu+\xi_0(t);\ \ y=Cx+\xi_н(t);\ \ x(t_0)=x^0$ *при критерии оптимальности* $J=M\{x^T(t_f)\Phi x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Lx(t)+u^T(t)Gu(t)]dt\}$ *имеет вид* $u=-G^{-1}B^TK\hat{x}$*, где* K *- симметричная матрица, которая определяется из матричного уравнения Риккати* $\dot{K}=-KA-A^TK+KBG^{-1}B^TK-L$ *при граничном условии* $K(t_f)=\Phi$*; а* $\hat{x}$ *- оптимальная оценка, которая определяется с помощью фильтра Калмана – Бьюси:* $\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+K_0(y-C\hat{x}); \hat{x}(t_0)=\bar{x}^0)$ *с матрицей коэффициентов усиления* $K_0=PC^TR_н^{-1}$*, где* P *определяется из уравнения* $\dot{P}=AP+PA^T-PC^TR_н^{-1}CP+Q_o; P(t_0)=H_0$.

Таким образом, в законе управления используется не сам фазовый вектор, а его оценка, которая получается на выходе фильтра Калмана – Бьюси. То есть стохастический оптимальный регулятор состоит из оптимального фильтра и детерминированного оптимального регулятора.



Этот результат носит название принципа разделения или принципа стохастической эквивалентности. В соответствии с этим принципом задача синтеза стохастической оптимальной системы управления при неполной информации сводится к двум задачам, решаемым раздельно. Первая задача сводится к задаче синтеза фильтра Калмана – Бьюси. Вторая задача сводится к синтезу детерминированной оптимальной системы. Если шумы и начальное состояние подчиняются гауссову закону распределения, то в результате такого синтеза получим оптимальную стохастическую систему.

Контрольные вопросы к лекции 12.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Чем отличается уравнение Беллмана для задачи оптимального управления стохастической системой от соответствующего уравнения Беллмана для задачи оптимального управления детерминированной системой при отсутствии шумов объекта?	1. Ничем, соответствующие уравнения Беллмана совпадают. 2. Уравнение Беллмана для стохастической постановки задачи оптимального управления содержит дополнительный дисперсионный член вида $\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} q_{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}$, где $q_{i,j}, i, j = 1:n$ компоненты соответствующей матрицы интенсивностей белого шума объекта. 3. Функция Беллмана для стохастической постановки задачи оптимального управления должна быть функцией вида $S(x,t,Q)$, где Q - матрица интенсивностей белого шума объекта.
2	Решение, в виде закона управления для линейной задачи оптимального управления стохастической системой, определяется соответствующим решением матричного уравнения Риккати, которое имеет отличие от подобного уравнения Риккати для детерминированной линейной задачи оптимального управления, заключающееся в том, что ….	1. …не имеет никаких отличий, то есть уравнения Риккати для стохастической и детерминированной задач оптимального управления совпадают . 2. … уравнение Риккати для стохастической задачи оптимального управления содержит дополнительное слагаемое, учитывающее матрицу интенсивностей шумов объекта. 3. … уравнение Риккати для стохастической задачи оптимального управления имеет начальные значения, определяемые матрицей интенсивностей шумов объекта.
3	Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса связаны между собой прямым и обратным …	1. … преобразованием Лапласа. 2. …. преобразованием Фурье. 3…. билинейным преобразованием.
4	Спектральная плотность выходного сигнала $S_y(\omega)$ после линейного преобразования связана со спектральной плотностью входного сигнала $S_x(\omega)$ соотношением…	1. … $S_y(\omega) = \mid \Phi(i\omega) \mid S_x(\omega)$ 2. … $S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mid \Phi(i\omega) \mid^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-i\omega t} dt$ 3. … $S_y(\omega) = \mid \Phi(i\omega) \mid^2 S_x(\omega)$
5	Случайный процесс x_t имеет стохастический дифференциал $dx_t = adt + qdw_t$, где w_t - случайный процесс с независимыми приращениями, a, q - детерминированные постоянные. Тогда стохастический дифференциал Ито случайного процесса $y_t = u(x_t)$, где детерминированная функция $u(v)$ имеет непрерывные производные $u_v^{'}, u_{v,v}^{''}$, имеет следующий вид ….	1. … $dy_t = au_x^{'}(x_t)dt + u_x^{'}(x_t)qdw_t$ 2. … $dy_t = au_x^{'}(x_t)dt + \frac{1}{2}u_{x,x}^{''}(x_t)q^2 dt + u_x^{'}(x_t)qdw_t$ 3. … $dy_t = au_x^{'}(x_t)dt + u_x^{'}(x_t)q^2 dw_t$
6	Пусть n_t является нормальным (гауссовым) белым шумом. Процесс w_t, связанный с n_t уравнением $dw_t = Q(t)n_t dt$, где $Q(t)$	1…. нормальным (гауссовым) процессом 2. … пуассоновским процессом 3. … винеровским процессом

	детерминированная матрица, называется ….	
7	Пусть задана линейная система вида $\dot{x} = Ax + bu$, которая имеет полосу пропускания $[0, \omega_c]$. В качестве входного сигнала u подается случайный процесс u_t, имеющий в диапазоне частот $[0, \omega_c]$ практически постоянную спектральную плотность $S_u(\omega) = S_0 = const; \forall \omega \in [0, \omega_c]$. В какой форме следует записывать уравнения системы для дальнейших аналитических расчетов?	1. $\dot{x}_t = Ax_t + bu_t$ 2. $dx = Axdt + bu_t dt$ 3. $\dot{x} = M\{Ax + bu_t\}$
8	Задана линейная нестационарная стохастическая система вида $dx_t = A(t)x_t dt + b(t)dw_t; x_t(t = 0) = v$, где w_t - процесс с независимыми приращениями, имеющий матрицу интенсивностей $Q(t); \|Q(t)\| < C = const$; $M\{v\} = m_v, M\{v \cdot v^T\} = R_v$. Пусть также характеристическое уравнение $\det[A^T(t) + A(t)] = 0$ имеет максимальный корень $\Lambda(t) \le -h; h > 0; \forall t \ge 0$. Тогда уравнения моментов для $t \to \infty$ можно записать в виде ….	1. … $A(t)m_x(t) = 0$; $A(t)\gamma_x(t) + \gamma_x(t)A^T(t) + b(t)Q(t)b^T(t) = 0$ 2. … $\dot{m}_x(t) = A(t)m_x(t); m_x(0) = m_v$ $\dot{\gamma}_x(t) = A(t)\gamma_x(t) + \gamma_x(t)A^T(t) + b(t)Q(t)b^T(t); \gamma_x(0) = R_v$ 3. … $\dot{m}_x(t) = A(t)m_x(t); m_x(0) = m_v$ $\dot{\gamma}_x(t) = A(t)\gamma_x(t) + \gamma_x(t)A^T(t) + b(t)Q(t); \gamma_x(0) = R_v$
9	Процедура факторизации дробно-рациональной спектральной плотности $S(\omega)$ заключается в представлении ее в виде…	1. $S(\omega) = \|W(i\omega)\| \cdot \|W(-i\omega)\|$, где передаточная функция формирующего фильтра $W(s)$ имеет полюса в левой полуплоскости, а нули в правой полуплоскости комплексной плоскости. 2. $S(\omega) = \|W(i\omega)\| \cdot \|W(-i\omega)\|$, где передаточная функция формирующего фильтра $W(s)$ является минимально-фазовой. 3. В аппроксимации графика $S(\omega)$ в шкале $\log \omega$ асимптотическими логарифмическими характеристиками и построении на их основе передаточной функции формирующего фильтра $W(s)$.
10	Для какого типа аддитивной помехи оптимальный фильтр Винера-Хопфа будет иметь дробно-рациональную передаточную функцию?	1. Для случайного процесса винеровского типа. 2. Для случайного процесса, имеющего ограниченные 1-ый и 2 – ый моменты. 3. Для гауссова случайного процесса.
11	Фильтр Калмана-Бьюси представляет собой…	1. … Линейный фильтр, обеспечивающий минимум среднего квадрата ошибки для аддитивных шумов на конечном интервале времени. 2. … Нелинейный фильтр, обеспечивающий минимум среднего квадрата ошибки для аддитивных шумов на конечном интервале времени. 3. … Линейный фильтр, обеспечивающий минимум среднего квадрата ошибки для мультипликативных шумов на бесконечном интервале времени.
12	Оценка вектора состояния линейной системы с помощью фильтра Калмана-Бьюси является…	1. … смещенной и эффективной 2. … несмещенной и эффективной 3. … несмещенной и неэффективной.

13	Принцип разделения при решении задачи оптимального управления линейной стохастической системой при неполной информации о векторе состояния позволяет…	1. .. решать отдельно задачу построения линейного оптимального регулятора и задачу оценки вектора состояния с помощью фильтра Калмана-Бьюси. 2. … решать итеративным способом последовательно задачи построения линейного оптимального регулятора и оценивания вектора состояния системы. 3. … позволяет свести задачу оптимизации линейной стохастической системы к соответствующей задаче оптимального управления детерминированной системы при отсутствии шумов.