1 Кривые в евклидовом пространстве. Плоские кривые

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное n-мерное евклидово пространство, т.е. арифметическое n-мерное линейное пространство со скалярным произведением

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i,$$

где $v = (v^1, \dots, v^n)$ и $w = (w^1, \dots, w^n)$ — произвольные векторы из $\mathbb{R}^n$, заданные своими компонентами в стандартной евклидовой системе координат $(x^1, \dots, x^n)$. Через $\|v\|$ обозначим стандартную норму вектора v:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Пусть x_0 — некоторая точка в $\mathbb{R}^n$, и r — положительное число. *Открытым шаром $U(x_0, r)$ радиуса r с центром в x_0* назовем множество следующего вида

$$U(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}.$$

Подмножество V пространства $\mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если для каждой точки $x \in V$ существует открытый шар $U(x, r)$, такой что $U(x, r) \subset V$. Открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащее точку $x \in \mathbb{R}^n$, называется *открытой окрестностью точки x*.

1.1 Параметрические кривые

Для краткости, обозначим через I, $I \subset \mathbb{R}^1$, конечный или бесконечный *интервал* одного из следующих видов: $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$ или $[a, b)$.

Определение. *Непрерывной параметрической кривой в $\mathbb{R}^n$* называется произвольное непрерывное отображение $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ из некоторого интервала I в пространство $\mathbb{R}^n$.

Каждая непрерывная параметрическая кривая γ задается набором из n *координатных функций* $x^i(t)$, где t — координата на интервале I, называемая *параметром* для γ или *координатой* на γ, а $x^1, \dots, x^n$ — стандартные евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$. При этом непрерывность γ равносильна непрерывности всех функций $x^i(t)$.

Отметим, что непрерывная параметрическая кривая может иметь самопересечения, т.е. могут существовать такие t и t', $t \neq t'$, что $\gamma(t) = \gamma(t')$. Если самопересечений нет, т.е. отображение γ взаимно-однозначно с образом, то параметрическая кривая γ называется *простой*.

Введенный класс параметрических кривых является слишком широким и, в частности, содержит примеры, не согласующиеся с естественным представлением о кривых как одномерных объектах (вспомните известную из курса математического анализа кривую Пеано, отображающую непрерывно отрезок на треугольник или квадрат, см. добавление 1.1).

Напомним, что функция называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема бесконечное число раз.

Замечание. На самом деле, требование бесконечной дифференцируемости часто оказывается слишком сильным, и тогда под гладкостью понимают непрерывную дифференцируемость необходимое (конечное) число раз.

Определение. Непрерывная параметрическая кривая $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ называется *гладкой*, если все задающие ее координатные функции $x^i(t)$ — гладкие.

В каждой точке $\gamma(t)$ гладкой кривой γ в пространстве $\mathbb{R}^n$ определен вектор $\dot\gamma(t) = \bigl(\dot x^1(t), \dots, \dot x^n(t)\bigr)$, называемый *вектором скорости кривой* γ.

Упражнение 1.1. Показать, что образ гладкой кривой, в отличие, скажем, от кривой Пеано, не может содержать никакого открытого шара.

Хотя "одномерности" мы, возможно, и добились (во всяком случае, мы исключили из рассмотрения кривые типа кривой Пеано), тем не менее, интуитивное представление о гладкости как об отсутствии изломов не согласуется с данным определением. Совсем простой пример дает гладкая кривая $x(t) = t^3$, $y(t) = t^2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с евклидовыми координатами (x, y). Более сложный, но более наглядный пример приведен в следующем обязательном упражнении.

Упражнение 1.2. Доказать, что объединение двух отрезков, стыкующихся под произвольным углом, можно представить как образ гладкой параметрической кривой (см. добавление 1.2).

Так как у гладкой параметрической кривой вектор скорости непрерывно зависит от параметра, а направление этого вектора в "точках излома" (таких как вершина угла в упражнении 1.2) меняется скачком, то в таких точках скорость должна равняться нулю. Точка гладкой параметрической кривой, в которой вектор скорости обращается в ноль, называется *особой* или *сингулярной*. Остальные точки — *неособыми* или *регулярными*. Запрещая точки с нулевой скоростью, т.е. особые точки, приходим к следующему определению.

Определение. Гладкая параметрическая кривая называется *регулярной*, если ее вектор скорости всюду отличен от нуля.

Таким образом, подмножество плоскости из упражнения 1.2 нельзя задать как образ регулярной параметрической кривой (если угол отличен от развернутого).

Если две регулярные параметрические кривые пересекаются, то можно определить *угол* между этими кривыми как угол между векторами скоростей кривых в точке пересечения.

Упражнение 1.3. Напишите в явном виде выражение для угла между пересекающимися регулярными параметрическими кривыми.

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная параметрическая кривая. Рассмотрим произвольную непрерывную строго монотонную функцию $\varphi\colon I' \to I$, отображающую интервал I' на весь интервал I (это отображение, очевидно, является взаимно-однозначным). Каждая такая функция порождает новую непрерывную параметрическую кривую $\gamma \circ \varphi\colon I' \to \mathbb{R}^n$ и называется *заменой параметризации кривой* γ. Отметим, что γ и $\gamma \circ \varphi$ имеют совпадающие образы в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, если φ — замена параметризации, то φ^{-1} также является заменой параметризации. В случае, когда кривая γ — гладкая, мы будем дополнительно предполагать, что замены параметризации φ и φ^{-1} — гладкие. При этом, как следует из теоремы об обратной функции, производные функций φ и φ^{-1} всюду отличны от нуля. Таким образом, в сделанных предположениях, замена параметризации сохраняет свойство параметрической кривой быть непрерывной, гладкой или регулярной.

1.2 Кривые–графики и неявные кривые

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}^{n-1}$ — векторно значная гладкая функция. Тогда ее график $\Gamma_f = \Big\{\big(t, f(t)\big) \mid t \in I\Big\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *кривой–графиком* в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ясно, что произвольная кривая–график Γ_f векторно значной функции $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$ может быть задана как образ регулярной параметрической кривой $\gamma_f\colon I \to \mathbb{R}^n$ с координатными функциями $x^1(t) = t$ и $x^{i+1}(t) = f_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Упражнение 1.4. Докажите, что если $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая кривая, то для каждого $t \in I$, $t \neq a$ и $t \neq b$, существует окрестность U точки t в интервале I такая, что $\gamma(U)$ является кривой–графиком некоторой гладкой функции $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-1}$ (при подходящем выборе подпространства $\mathbb{R}^{n-1}$).

Пусть $F_i\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, n-1$, — гладкие функции, заданные на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и $c = (c_1, \dots, c_{n-1})$ — некоторый постоянный вектор. Множество Γ_c решений системы уравнений

$$F_i(x^1, \dots, x^n) = c_i, \qquad i = 1, \dots, n-1,$$

называется *неявной кривой* в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ясно, что каждая кривая–график Γ_f, $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$, является также и неявной кривой, заданной системой уравнений $x^{i+1} - f_i(x^1) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Упражнение 1.5. Докажите, что если ранг матрицы Якоби $\big(\partial F_i/\partial x^j\big)$ в каждой точке неявной кривой Γ_c максимален (и равен $n-1$), то для каждой точки $P \in \Gamma_c$ существует окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, такая что $U \cap \Gamma_c$ есть кривая–график некоторой гладкой функции $f\colon I \to \mathbb{R}^{n-1}$ (при подходящем выборе подпространства $\mathbb{R}^{n-1}$).

Неявная кривая называется *регулярной*, если матрица Якоби системы уравнений, задающих эту кривую, имеет максимальный ранг в каждой точке кривой.

1.3 Определение регулярной кривой

Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ называется *регулярной кривой*, если оно представимо или в виде кривой–графика, или в виде регулярной неявной кривой, или как образ регулярной параметрической кривой.

Замечание. Окружность $x^2+y^2=1$ является регулярной неявной кривой, но не является кривой–графиком. Окружность без точки, заданную как образ гладкой параметрической кривой $\gamma\colon (0,2\pi)\mapsto\big(\cos(t),\sin(t)\big)$ нельзя задать как неявную кривую на плоскости.

Замечание. По-видимому, самый естественный способ определять кривые опирается на понятие одномерного подмногообразия. Мы сознательно не пользуемся им, чтобы не загромождать изложение, см. добавление 1.10.

Из упражнений 1.4 и 1.5 вытекает следующий результат, который мы докажем ниже в более общем случае поверхностей.

Теорема 1.1 *С локальной точки зрения три способа задания регулярной кривой эквивалентны в следующем смысле*:

- *если $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая кривая, то для каждого $t\in I$, $t\neq a$ и $t\neq b$, существует окрестность U точки t в интервале I такая, что $\gamma(U)$ является кривой–графиком некоторой гладкой функции;*
- *для каждой точки P регулярной неявной кривой Γ_c существует окрестность $U\subset\mathbb{R}^n$, такая что $U\cap\Gamma_c$ есть кривая–график в $\mathbb{R}^n$ (при подходящей перестановке координат).*

Ниже мы будем заниматься *локальной* теорией регулярных кривых, поэтому будем предполагать, что рассматриваемая регулярная кривая задана удобным для нас способом.

1.4 Длина кривой, натуральный параметр

Определим длину гладкой параметрической кривой $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$. Более общее определение длины обсуждается в добавлении 1.3.

Определение. *Длиной $\ell(\gamma)$ гладкой параметрической кривой $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$* называется величина интеграла $\int_a^b\big\|\dot\gamma(t)\big\|\,dt$.

Предложение 1.1 *Длина гладкой параметрической кривой не меняется при замене параметризации.*

Доказательство. Действительно, пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая, $t = t(s)$ — замена параметра, где $t \in [t_0, t_1]$, а $s \in [s_0, s_1]$. Положим $\tilde{\gamma}(s) = \gamma\big(t(s)\big)$. По теореме о замене параметра в определенном интеграле имеем:

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| \, ds = \int_{t(s_0)}^{t(s_1)} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| \frac{ds}{dt} \, dt$$

Осталось избавиться от модуля в правой части. Так как $t(s)$ — строго монотонная функция, ее производная по s знакопостоянна. Если $t(s)$ монотонно возрастает, то производная dt/ds неотрицательна, и модуль можно опустить. При этом, очевидно, $t(s_0) = t_0$, и $t(s_1) = t_1$, поэтому правая часть равна длине $\ell(\gamma)$ кривой γ, и утверждение доказано. Если же функция $t(s)$ монотонно убывает, то $dt/ds < 0$, и модуль раскрывается с минусом. Но при этом $t(s_0) = t_1$, и $t(s_1) = t_0$, что и дает недостающий “минус” в правой части. Доказательство закончено.

Из предложения 1.1 вытекает возможность корректно определить *длину регулярной кривой* как длину произвольной задающей ее параметрической кривой.

Упражнение 1.6. Записать явные формулы для длины кривой–графика гладкой функции $f\colon I \to \mathbb{R}^{n-1}$ и для неявной кривой, заданной системой уравнений $F_i(x) = c_i$.

Понятие длины позволяет выбрать на регулярной кривой некоторое естественное семейство параметризаций.

Определение. Параметр s, $s \in [a, b]$, гладкой (параметрической) кривой $\gamma(s)$ называется *натуральным*, если величина $s - a$ равна длине части кривой γ между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(s)$ для любого $s \in [a, b]$.

Если t — произвольный параметр гладкой кривой $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, то отображение $\varphi(t) = \int_a^t \big\|\dot{\gamma}(\tau)\big\| \, d\tau$ задает замену параметра, приводящую к натуральному параметру $s = \varphi(t)$, если и только если φ^{-1} — гладкая функция. В частности, на параметрической кривой из упражнения 1.2, для которой угол стыковки отрезков отличен от 180°, нельзя ввести натурального параметра. Дело в том, что $\varphi(t)$ в этом случае задает непрерывную, но не гладкую замену параметра, приводящую к негладкой параметрической кривой. Тем не менее, если кривая регулярна, то проблем не возникает.

Предложение 1.2 *На гладкой кривой можно ввести натуральный параметр, если и только если эта кривая регулярна.*

Доказательство. Если кривая $\gamma(t)$ регулярна, то отображение

$$\varphi\colon t \mapsto \int_a^t \big\|\dot{\gamma}(\tau)\big\| \, d\tau$$

имеет гладкое обратное (так как $\dot\varphi(t) = \|\dot\gamma(t)\| \neq 0$), поэтому φ — замена параметра t на натуральный параметр $s = \varphi(t)$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно заметить, что всякая натурально параметризованная гладкая параметрическая кривая регулярна, поэтому любая кривая, отличающаяся от нее заменой параметризации — также регулярна, что и требовалось.

Натуральные параметры обладают следующими свойствами.

Упражнение 1.7. Если s_1 и s_2 — два натуральных параметра на кривой γ, то $s_1 = \pm s_2 + c$ для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$.

Предложение 1.3 *Параметр s на регулярной кривой $\gamma(s)$ является натуральным, если и только если $\big\|\dot\gamma(s)\big\| = 1$.*

Доказательство. Пусть s — натуральный параметр, т.е.

$$s = a + \int_a^s \big\|\dot\gamma(t)\big\|\,dt.$$

Дифференцируя левую и правую части равенства по s, получаем требуемое. Обратно, если $\big\|\dot\gamma(s)\big\| = 1$, то

$$s - a = \int_a^s dt = \int_a^s \big\|\dot\gamma(t)\big\|\,dt,$$

поэтому $s - a$ равно длине части кривой γ между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(s)$, т.е. s — натуральный параметр. Что и требовалось.

Прежде чем формулировать следующее свойство, напомним, что *вектором ускорения гладкой параметрической кривой* γ в точке $\gamma(t)$ называется вектор $\ddot\gamma(t) = \big(\ddot x^1(t), \dots, \ddot x^n(t)\big)$.

Предложение 1.4 *Пусть s — натуральный параметр на регулярной кривой γ. Тогда в каждой точке кривой γ вектор ускорения $\ddot\gamma$ перпендикулярен вектору скорости $\dot\gamma$.*

Доказательство. Действительно, $\big\langle\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\big\rangle = 1$ по предложению 1.3. Дифференцируя это равенство по s, получаем

$$2\big\langle\dot\gamma(s), \ddot\gamma(s)\big\rangle = 0,$$

что и требовалось.

1.5 Кривизна регулярной кривой

Чтобы охарактеризовать степень искривления отдельных участков кривой, обычно поступают следующим образом. Будем двигаться вдоль кривой с единичной по модулю скоростью. Тогда на более искривленных участках ускорение будет больше. Таким образом, "искривленность" можно измерять величиной этого ускорения. Пусть γ — произвольная регулярная кривая. Выберем на γ натуральный параметр s. Тогда величина $k(s) = \big\|\ddot\gamma(s)\big\|$ называется *кривизной кривой γ в точке $\gamma(s)$*. Ясно, что $k(s)$ не зависит от выбора натурального параметра. Величина $R(s)$, обратная кривизне, т.е. $R(s) = 1/k(s)$, называется *радиусом кривизны в точке* $\gamma(s)$ (если $k(s) = 0$, то полагают $R(s) = \infty$).

Упражнение 1.8. Если t — произвольный параметр на регулярной кривой γ, то кривизна в точке $\gamma(t)$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$k(t) = \frac{\big\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\big\|}{\big\|\dot\gamma(t)\big\|^3},$$

где через $\|v\times w\|$ мы обозначили площадь параллелограмма, натянутого на векторы v и w из $\mathbb{R}^n$.

В случае кривой на плоскости $\mathbb{R}^2$ формула для кривизны в явном виде выглядит так:

$$k(t) = \frac{\big|\dot x(t)\ddot y(t) - \dot x(t)\ddot y(t)\big|}{\big(\dot x(t)^2 + \dot y(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}},$$

где (x, y) — стандартные координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, и $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Регулярная параметрическая кривая $\gamma(t)$ называется *бирегулярной*, если ее кривизна всюду отлична от нуля. Из упражнения 1.8 вытекает, что бирегулярность кривой равносильна следующему условию: векторы скорости $\dot\gamma(t)$ и ускорения $\ddot\gamma(t)$ при любой параметризации регулярной кривой γ линейно независимы в каждой точке $\gamma(t)$.

1.6 Плоские кривые

Рассмотрим теперь случай плоской кривой. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная бирегулярная кривая в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через τ единичный вектор скорости $\dot\gamma(s)$ в точке $\gamma(s)$, т.е. $\tau = \dot\gamma(s)$, а через ν — нормированный вектор ускорения в точке $\gamma(s)$, т.е. $\nu = \ddot\gamma(s)/\big\|\ddot\gamma(s)\big\|$. Вектор ν называется *главной нормалью к γ* в точке $\gamma(s)$. Из предложения 1.4 следует, что пара (τ, ν) образует ортонормированный репер в каждой точке $\gamma(s)$, который называется *репером Френе*.

Теорема 1.2 (Формулы Френе) *В сделанных предположениях, имеет место следующая система уравнений*:

$$\begin{cases}\dot\tau = k\,\nu,\\ \dot\nu = -k\,\tau,\end{cases}$$

где $k = k(s)$ обозначает кривизну кривой γ в точке $\gamma(s)$.

Доказательство. Первое равенство мгновенно вытекает из определения векторов τ и ν.

Докажем второе равенство. Дифференцируя тождество $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, находим, что $\langle \dot\nu, \nu \rangle = 0$, т.е. вектор $\dot\nu$ перпендикулярен ν и, поэтому, колинеарен с τ. Следовательно,

$$\dot\nu = \langle \dot\nu, \tau \rangle \, \tau.$$

Покажем, что $\langle \dot\nu, \tau \rangle = -k$. Для этого продифференцируем тождество $\langle \nu, \tau \rangle = 0$. Получаем

$$0 = \langle \dot\nu, \tau \rangle + \langle \nu, \dot\tau \rangle = \langle \dot\nu, \tau \rangle + \langle \nu, k\,\nu \rangle = \langle \dot\nu, \tau \rangle + k,$$

что и требовалось.

Для плоских кривых более естественным является понятие *ориентированной* кривизны. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная плоская регулярная кривая, и $\nu_o(s)$ семейство единичных нормалей, таких что при каждом s пара $\big(\dot\gamma(s), \nu_o(s)\big)$ образует положительно ориентированный базис (мы предполагаем, что плоскость канонически ориентирована). Последнее означает, что определитель матрицы перехода от стандартного базиса плоскости к базису $\big(\dot\gamma(s), \nu_o(s)\big)$ положителен.

Определение. *Ориентированной кривизной $k_o(s)$ кривой γ в точке $\gamma(s)$* называется число $\big\langle \ddot\gamma(s), \nu_o(s) \big\rangle$.

Легко видеть, что $k_o(s) = \pm k(s)$. Кроме того, формулы Френе из теоремы 1.2 естественно переписываются через ориентированную кривизну. А именно,

Теорема 1.3 (Формулы Френе для ориентированной кривизны) *В сделанных предположениях, имеет место следующая система уравнений*:

$$\begin{cases} \dot\tau = k_o\,\nu_o, \\ \dot\nu_o = -k_o\,\tau. \end{cases}$$

Более того, ориентированная кривизна может быть вычислена через произвольную параметризацию кривой по аналогии с упражнением 1.8.

Упражнение 1.9. Если t — произвольный параметр на регулярной кривой γ, то ориентированная кривизна в точке $\gamma(t)$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$k_o(t) = \frac{\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)}{\big\|\dot\gamma(t)\big\|^3},$$

где через $v \times w$ мы обозначили ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на векторы v и w из $\mathbb{R}^2$: если $v = (v^1, v^2)$, а $w = (w^1, w^2)$, то $v \times w = v^1 w^2 - v^2 w^1$. В явном виде формула для ориентированной кривизны выглядит так:

$$k_o(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{x}(t)\ddot{y}(t)}{\big(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}},$$

где (x, y) — стандартные координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, и $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Оказывается, ориентированная кривизна полностью определяет форму кривой.

Теорема 1.4 *Пусть $f(s)$ — произвольная гладкая функция. Тогда существует плоская регулярная кривая γ, натурально параметризованная параметром s, такая что ее ориентированная кривизна $k_o(s)$ в каждой точке $\gamma(s)$ равна $f(s)$, причем такая кривая единственна с точностью до движения плоскости, сохраняющего ориентацию.*

Доказательство. Пусть $\gamma(s)$ — произвольная натурально параметризованная регулярная кривая, и $k_o(s) = f(s)$ — ее ориентированная кривизна. Так как вектор $\dot{\gamma}$ единичный, его можно представить как $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, где $\varphi = \varphi(s)$. Поэтому

$$\ddot{\gamma} = \dot{\varphi}\,(-\sin\varphi, \cos\varphi) = \dot{\varphi}\,\nu_o(s),$$

откуда $\dot{\varphi} = k_o$. Следовательно,

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_a^s f(t)\,dt, \ \ x^1(s) = x_0^1 + \int_a^s \cos\varphi(t)\,dt, \ \ x^2(s) = x_0^2 + \int_a^s \sin\varphi(t)\,dt,$$

где φ_0, x_0^1 и x_0^2 — некоторые числа.

Таким образом, если функция $k_o(s)$ фиксирована и равна $f(s)$, то кривая $\gamma(s) = \big(x^1(s), x^2(s)\big)$ восстанавливается однозначно с точностью до чисел φ_0, x_0^1 и x_0^2. Первое из них соответствует повороту плоскости на угол φ_0 (проверьте), а вектор (x_0^1, x_0^2) — сдвигу. Кривая γ, как легко проверить, регулярна, натурально параметризована, и ее ориентированная кривизна равна $f(s)$. Отметим, что мы нашли явные формулы для восстановления кривой γ. Доказательство закончено.

Определение. Соотношение $k_o(s) = f(s)$ называется *натуральным уравнением плоской кривой. Решить натуральное уравнение* означает найти натурально параметризованную регулярную кривую $\gamma(s)$, ориентированная кривизна которой равна $f(s)$.

Упражнение 1.10. Переформулировать теорему 1.4 для случая обычной кривизны.