ПЗ-3. Абсолютная и условная сходимость числового ряда.

Знакочередующиеся ряды.

Определение 22.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным*.

Например, знакопеременным будет ряд

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\sin\frac{3}{4}\pi}{3^2} + \frac{\sin\frac{5}{4}\pi}{3^3} + \frac{\sin\frac{7}{4}\pi}{3^4} + \ldots + \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n} + \ldots =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{18} - \frac{\sqrt{2}}{54} - \frac{\sqrt{2}}{162} + \ldots + \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{3^n},$$

так как за двумя положительными членами следуют два отрицательных члена.

Определение 22.2. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, называется *знакочередующимся,* если его члены поочередно меняют знаки.

Например, знакочередующимся является ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}.$$

Обозначая модули членов такого ряда через a_i и считая $a_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, запишем знакочередующийся ряд в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \qquad (22.1)$$

где a_n есть модуль общего члена ряда.

Теорема 22.1 (*теорема Лейбница*[1]). Если у знакочередующегося ряда (22.1) модули всех членов убывают с ростом n, т. е.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_{n-1} > a_n > \ \ldots, \qquad (22.2)$$

и модуль a_n общего члена ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (22.3)$$

то ряд (22.1) сходится.

Пример 22.1. Рассмотрим ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,.$$

Ряд сходится, так как выполнены условия (22.2) и (22.3) теоремы Лейбница. Действительно, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (a_n > a_{n+1})$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$. Пусть S есть сумма данного ряда:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Определение 22.3. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ из абсолютных величин членов этого ряда.

Определение 22.4. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно (неабсолютно) сходящимся,* если он сам сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ из абсолютных величин его членов расходится.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^5}$ — абсолютно сходящийся, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^5}$, общий член которого $\frac{|\sin n\alpha|}{n^5} \leqslant \frac{1}{n^5}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ сходится Ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ — условно сходящийся, так как он сам сходится , а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В случае сходимости установить характер сходимости ряда.

Решение. Отметим, что данный ряд знакочередующийся, модули членов убывают при $n \to \infty$ $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall\ n \in \mathbf{N} \right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т. е. выполнены все условия теоремы Лейбница. Следовательно, ряд сходится. Чтобы установить характер сходимости, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ из модулей членов данного ряда.

Этот ряд расходится . Поскольку ряд из модулей сходящегося ряда расходится, то исходный знакопеременный ряд сходится условно. ■

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}$. В случае сходимости установить ее характер.

Решение. Ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница: ряд знакочередующийся, модули его членов убывают с ростом n. $\left(\frac{1}{(n+1)^3+1} < \frac{1}{n^3+1} \quad \forall\ n \in \mathbf{N} \right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} =$ $= 0$. Отсюда следует, что ряд сходится. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ из модулей членов данного ряда. Так как $\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$ $\forall\ n \in \mathbf{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится , то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ■

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. В случае сходимости установить ее характер.

Решение. Ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница: ряд знакочередующийся, модули его членов убывают при $n \to \infty$ $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ \forall\, n \in \mathbf{N} \right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$. Следовательно, ряд сходится. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, составленный из модулей членов данного ряда. Так как $\arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится , то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится. Поскольку сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то исходный ряд сходится условно. ■

Теорема 22.2 (*достаточное условие сходимости знакопеременного ряда*). Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (т. е. абсолютно сходящийся ряд сходится).

Пример 22.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3}$ сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^3}$, поскольку $\frac{|\cos n\alpha|}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится

■

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ имеем $|u_n| = \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ (так как $|\sin n\alpha| \leqslant 1$). Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ по признаку сравнения для знакопостоянных рядов. Следовательно, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ сходится абсолютно.

Задачи для самостоятельного решения

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{5n+4}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+2}}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+3}$;

4. $1-\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}-\dfrac{1}{5^4}-\dfrac{1}{6^4}+\ldots$;

7. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{12}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{5n-3}+\ldots$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{2n+7}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{1}{n}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}n^3}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arcsin\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$;

Литература

Демидович Б.П.

Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.