# ПЗ-10. Методические указания к контрольной работе

**Содержание :**

**1.** Исследовать сходимость ряда.

**2.** Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

**3.** Найти интервал сходимости степенного ряда.

**4.** Исследовать ряд на равномерную сходимость.

**5.** Разложить функцию в ряд Тейлора и указать интервал сходимости.

1. Исследовать сходимость ряда.

**Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость рядов:**

**2579.** $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$

**2582.** $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-1/2n^3}-\cos\frac{1}{n^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1-\frac{1}{n^2}\right)^q$$

**1.** *Теорема 4. Если при $n\to\infty$*

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

*то при $p>1$ ряд (1), п. 1.1, сходится, а при $p\leqslant 1$ расходится.*

$$a_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p.$$

◀ Пользуясь разложениями функции $x \mapsto \ln(1+x)$ по формуле Маклорена, находим

$$a_n = \left(e - \exp\left\{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}\right)^p = e^p\left(1 - \exp\left\{-1 + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\}\right)^p =$$
$$= e^p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad n \to \infty.$$

Таким образом, если $p > 1$, то, согласно теореме 4, ряд сходится. ▶

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

**2670.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. **2680.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}$.

**2681.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}$ **2686.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

**2698.1.** в) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10\sin n}$

2670, 2680, 2681, 2686, 2480(ВТУЗ), 2698.1(в),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n)\ln^3(n)}{n^p}$$

2. **2.3. Признак Абеля.**

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1}$$

сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность $(b_n)$ есть монотонная и ограниченная.

**2.4. Признак Дирихле.**

Ряд (1) сходится, если последовательность $(b_n)$, начиная с некоторого номера $n_0$, монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена.

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

◀ Поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}\left|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n+1}{8}\pi\right|<\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

$n=1$

а последовательность $(n^{-1}\ln^{100} n)$, начиная с достаточно большого $n$, монотонно стремится к нулю (это вытекает из того, что

$$\lim_{x\to+\infty}x^{-1}\ln^{100}x=100\lim_{x\to+\infty}x^{-1}\ln^{99}x=0,\quad (x^{-1}\ln^{100}x)'<0\ \forall x>e^{100}),$$

то, согласно признаку Дирихле, данный ряд сходится. ▶

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right).$$

◀ Пусть $p\leqslant 0$. Тогда общий член ряда к нулю не стремится и, следовательно, ряд расходится. Полагая, далее, $p>0$ и пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, находим

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, согласно признаку Лейбница, сходится при $p>0$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^*$, где $a_n^*=\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$, по теореме 4, п.1.5, сходится при $p>\frac{1}{2}$ (при $p\leqslant\frac{1}{2}$ ряд расходится к $+\infty$), то данный ряд сходится только при $p>\frac{1}{2}$.

Следовательно, при значениях p, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$, исследуемый ряд сходится условно.

данный ряд сходится абсолютно при $p>1$. ▶

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$$

◀ При $p \leqslant 0$ общий член ряда не стремится к нулю, т.е. ряд расходится. Поэтому, считая, что $p > 0$, и применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, преобразовываем общий член ряда к виду

$$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = (-1)^n n^{-p} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} =$$

$$= (-1)^n n^{-p} \left(1 + p\frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

при $n \to \infty$. Ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\right)$ сходятся при $p > 0$ (первый — в силу признака Лейбница, а второй — по теореме 4, п.1.5). Поэтому исходный ряд сходится при этом же условии.

Поскольку, далее,

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leqslant \frac{1}{(n+(-1)^n)^p} \leqslant \frac{1}{(n-1)^p}, \; n = \overline{2, \infty},$$

и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, то, в силу последнего неравенства данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при $0 < p \leqslant 1$ исследуемый ряд сходится условно. ▶

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}.$$

◀ Очевидно, при $p \leqslant 0$ ряд расходится, поскольку при этом не выполняется необходимое условие сходимости. При $p > 0$, как и в предыдущем примере, представим общий член ряда в виде

$$\sin\frac{n\pi}{4}\left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)^{-1} = n^{-p}\sin\frac{n\pi}{4}\left(1 + \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1 - \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right) = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right), \quad n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ сходится, по признаку Дирихле, при $p > 0$, поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{4}\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}, \quad \frac{1}{n^p} \downarrow 0; \quad n \to \infty.$$

Далее, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ при $p > 0$ сходится также по признаку Дирихле, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

сходится по теореме 4, п.1.5, только при $p > \frac{1}{2}$. Поэтому полуразность этих рядов

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{12}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

является сходящимся при $p > \frac{1}{2}$ рядом (при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ расходится к $+\infty$, поэтому и последний ряд расходится к $+\infty$). Следовательно, исходный ряд сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$.

данный ряд сходится абсолютно лишь при $p > 1$.

Поэтому при $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ ряд сходится условно. ▶

3. Найти интервал сходимости степенного ряда.

2816, 2834, 2536(ВТУЗ), 2553(ВТУЗ), 2561(ВТУЗ), 2563(ВТУЗ).

**2816.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$ **2834.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2^n}.$

**2536.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n.$ **2553.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}.$

**2561.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$. **2563.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

4. Исследовать ряд на равномерную сходимость.

2774(г, в, л, к)

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x| < +\infty$;

к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $|x| < a$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

# 4.

**Мажорантный признак Вейерштрасса.** *Если $\exists a_k \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in X$ справедливы неравенства $|u_k(x)| \leqslant a_k$, $k \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд (1), п.4.1, сходится равномерно на $X$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2},\ |x| < +\infty.$$

◀ Найдем $\sup\limits_{|x|<+\infty}|a_n(x)|$, где $a_n(x)$ — общий член ряда. Имеем

$$\sup_{|x|<+\infty}|a_n(x)| = \sup_{|x|<+\infty}\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

и достигается при $x_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ является мажорантным для данного ряда. Так как мажорантный ряд сходится, то исходный ряд, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно. ▶

5. Разложить функцию в ряд Тейлора и указать интервал сходимости.

**2901, 2903, 2904**, 2873, **2885, 2888, 2607**(ВТУЗ)

Основные разложения:

I. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

II. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

IV. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$

$(-1 < x < 1)$*),

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1)$,

**2901.** $\int\limits_0^x e^{-t^2} dt.$ **2903.** $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

**2904.** $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$ **2885.** $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x.$

**2888.** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$ **2607.** $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$