Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 8. Релаксационные колебания. Быстро-медленные системы. Метод разделения движений. Принцип усреднения.

Многорежимные системы и релаксационные колебания. Быстро-медленные системы. Медленная поверхность и медленное уравнение. Сингулярно возмущенные системы. Метод разделения движений. Принцип усреднения. Обобщенное уравнение Крылова-Боголюбова. Операторы осреднения. Стандартные системы. Теорема Боголюбова.

Многорежимные системы и релаксационные колебания.

Обычно, при анализе математических моделей систем, зависящих от параметров, принимается, что их значения со временем не меняется. То есть, динамика систем исследуется при постоянных значениях параметров, которые могут меняться только при переходе системы из одного режима функционирования на другой. Однако в приложениях часто встречаются случаи, когда сами параметры медленно изменяются с течением времени. В этом случае в динамике конкретной системы возникают новые явления. Например, устойчивое равновесие по мере изменения параметра может исчезать или делаться неустойчивым. Тогда состояние системы может быстро (по сравнению со скоростью изменения параметров) измениться.

Для таких систем с медленно меняющимися параметрами характерно наличие как минимум двух масштабов времени и двух полей скоростей. Быстрые движения определяются в основном «замороженной» системой, в которой параметры имеют некоторое фиксированные «замороженные» значения. Эволюция же параметров с течением времени описывается как «медленное движение». В технической литературе такие системы также часто называются, как многорежимные системы /Петров Б.Н. Многореж системы/, а в прикладной физике – как быстро-медленные системы.

Среди различных вышеуказанных динамических систем можно выделить такие, в которых быстрое движение приводит к устойчивому состоянию равновесия при различных фиксированных значениях медленных переменных. Такой процесс быстрого установления равновесия называется релаксацией. В процессе изменения медленных переменных устойчивое равновесие может (через большое в масштабе быстрых движений время) исчезнуть или потерять устойчивость. Тогда снова произойдет релаксация, то есть переход к другому состоянию равновесию. Возникающий процесс, состоящий из периодов, в течение которых быстрая система находится в квазиравновесном состоянии и быстрых движений системы при переходе из одного состояния равновесия быстрой системы в другое, называется релаксационными колебаниями (данный термин был введен Ван дер Полем). Релаксационные колебания могут быть периодическими. Однако, возможно и более сложное поведение, когда промежутки времени между последовательными переходами выглядят как случайная последовательность.

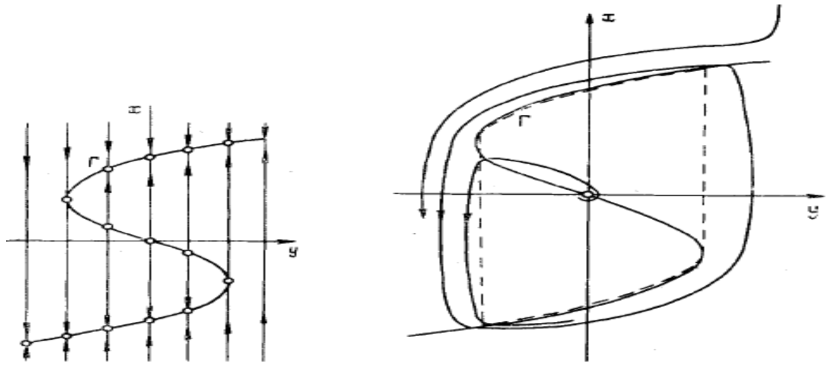
Быстро-медленные системы.

Рассмотрим семейство уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon G(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$, где $x \in R^l$, $y \in R^m$, $\varepsilon \in R$.

Если векторные функции F, G являются гладкими, а ε - малый параметр, то говорят, что приведенные уравнения задают быстро-медленную систему /Арнольд Теория бифур с165/. Переменная x называется быстрой переменной, а y - медленной. При изучении таких систем наибольший интерес представляет асимптотика медленного движения, при стремлении к нулю малого параметра ε, определяющего отношение скоростей быстрого и медленного движения. При этом, если масштаб времени выбран так, что характерное время быстрого движения принять за 1, то медленное движение следует изучать на временах, больших, по меньшей мере, по сравнению с величиной характерного параметра времени $1/\varepsilon$ медленного движения.

Пример. Уравнение Ван дер Поля. Рассмотрим следующую систему: $\dot{x} = y - x^3 + x$, $\dot{y} = -\varepsilon x$. При значении параметра $\varepsilon = 0$ медленная переменная y становится параметром. Если $\varepsilon > 0$, но мало, то отрелаксировавшая систем медленно движется вдоль кривой состояний равновесия быстрых движений (кривая Г на рисунке). В точках кривой с вертикальной касательной система совершает скачки. В результате формируется предельный цикл.



Система Ван дер Поля при $\varepsilon = 0$ | Система Ван дер Поля при малом $\varepsilon > 0$

Будем называть <u>медленной кривой</u> множество нулей функции $F: \{(x, y) \mid F(x, y, 0) = 0\}$. При значении малого параметра $\varepsilon = 0$ система называется «быстрой». То есть переменная y является неподвижным параметром. Следовательно, медленная кривая состоит из неподвижных точек быстрой системы и является, таким образом, ее <u>инвариантным многообразием</u>. Для малых $\varepsilon \neq 0$ медленная система является малым возмущением быстрой системы. С геометрической точки зрения это означает, что вне окрестности медленной кривой траектории системы (в масштабе времени медленной системы) практически параллельны оси быстрого движения x. На графических схемах быстрое движение (ось переменной x) традиционно изображается вертикальной.

Возмущенным уравнением или уравнением с быстрыми и медленными движениями в этом случае будет однопараметрическая деформация уравнения быстрых движений. В общих координатах возмущенное уравнение тогда можно записать:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon G(x, y, \varepsilon) \end{cases}, \text{ где } F(x, y, 0) = f(x, y).$$

<u>Медленная поверхность и медленное уравнение.</u>

Определение. *Множество особых точек уравнения быстрого движения называется <u>медленной поверхностью</u>.*

Для системы Ван дер Поля – это кубическая парабола. Для вертикального касательного расслоения медленная поверхность является гладким многообразием. Размерность этого многообразия равна размерности базы расслоения (числу медленных переменных). Однако следует учитывать, что в целом такое расслоение не диффеоморфное. Например кубическая парабола системы Ван дер Поля имеет две точки с вертикальной касательной.

Рассмотрим точки, в окрестности которых медленная поверхность проектируется диффеоморфно. Такие точки, как известно, имеют отличные от нуля собственные значения линеаризованной модели быстрых движений на фиксированном слое (то есть при фиксированных значениях медленных переменных). Такие точки называются регулярными.

В регулярных точках на медленной поверхности возникает векторное поле – поле медленной скорости.

Определение. *Вектором медленной скорости в регулярной точке медленной поверхности называется производная по ε при $\varepsilon = 0$ проекции вектора возмущенного поля на касательную плоскость медленной поверхности вдоль слоя расслоения.*

Таким образом, медленная поверхность снабжается векторным полем медленной скорости, определенным в регулярных точках. Это поле задает на медленной поверхности <u>медленное</u>

<u>уравнение</u>. В локальных координатах расслоения, введенного выше, медленное уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{d\tau} = g(x,y) \end{cases}, \text{ где } G(x,y,0) = g(x,y); \tau = \varepsilon t.$$

Пример. Уравнение медленного движения системы Ван дер Поля: $y = x^3 - x$, $\dfrac{dy}{d\tau} = -x$. Здесь $\tau = \varepsilon t$ - «медленное» время.

Уравнение медленного движения есть уравнение эволюции медленных переменных при условии, что быстрые координаты поддерживаются в равновесных состояниях. Поэтому основной идеей теории релаксационных колебаний является построение асимптотик истинного возмущенного движения из сменяющихся отрезков быстрого и медленного движений. При подходе к нерегулярным точкам общего положения системы (к так называемым складкам) скорость медленного движения, по отношению к «медленному» времени, стремится к бесконечности вдоль медленной поверхности.

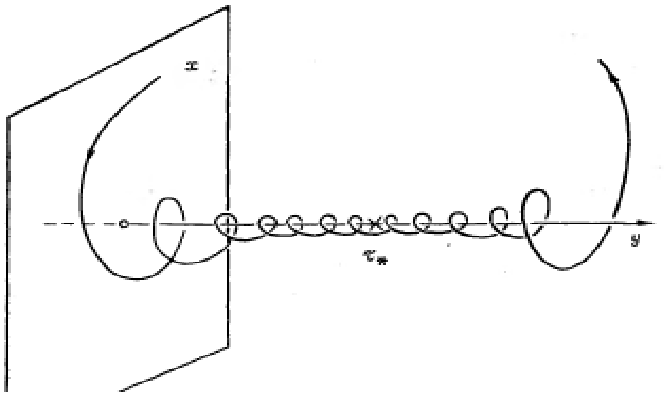
Явления «срыва» или потери устойчивости.

Кроме устойчивых положений равновесия быстрого движения, медленная поверхность содержит, в общем случае, и неустойчивые. Поэтому фазовая траектория медленного движения может за конечное «медленное» время попасть на границу устойчивости быстрого движения.

Пример. Для системы Ван дер Поля движение по верхней ветви медленной кривой направлено влево и приводит в нерегулярную точку, за которую медленное движение не продолжается.

В этом примере возмущенное движение, начинаясь с указанного момента, теряет связь с медленным: происходит «срыв» с медленной кривой (то есть перескок на нижнюю ветвь). Этот случай соответствует столкновению устойчивого положения равновесия с неустойчивым, после которого оба положения равновесия исчезают. На медленной поверхности это явление наблюдается в нерегулярных точках (в этих точках линеаризованная модель первого приближения для быстрой системы имеет нулевое собственное число).

Второй случай потери устойчивости соответствует переходу двух комплексно сопряженных собственных значений линеаризованной модели быстрой системы из левой в правую полуплоскости. Это явление, чаще всего, наблюдается в регулярных точках медленной кривой. Потеря равновесия быстрой системы часто сопровождается затягиванием потери устойчивости всей быстро-медленной системы. Явление затягивания состоит в том, что фактический уход фазовой точки от потерявшего устойчивость положения равновесия происходит не сразу после потери устойчивости, а спустя некоторое время, за которое медленное движение успевает измениться.



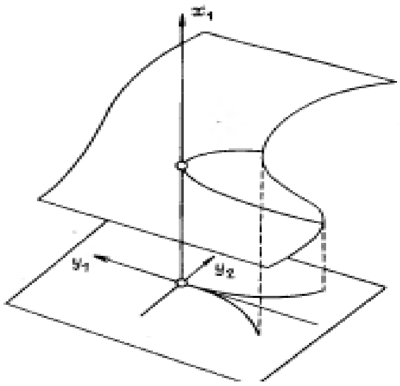
Затягивание потери устойчивости в системе типа 2 для двух быстрых и одной медленной переменной. Медленная кривая совпадает с осью y; крестиком помечена граница устойчивости

В обоих случаях возмущенного движения после потери устойчивости соответствующего состояния равновесия быстрого движения «срываются» с медленной поверхности.

Обычно для оценки дальнейшего движения системы после «срыва» с медленной поверхности используют метод усреднения (который будет рассмотрен в дальнейшем). Иногда траектория движения системы приводит к новому положению равновесия, которое находится на медленной поверхности в стороне от старого положения равновесия. Именно так обстоит дело для системы Ван дер Поля.

Если быстрая переменная одна, то имеется конечный список особенностей. В подходящих (гладких) локальных координатах медленная поверхность может быть записана в виде нормальной формы Уитни следующего вида: $P_\mu(x,y) = x^{\mu+1} + y_1 x^{\mu-1} + ... + y^{\mu}$, $\mu \le m$. Здесь $\{y_i\}$ - медленные переменные. В системах общего положения с одной быстрой и одной медленной переменной реализуется только складка вида $x^2 + y = 0$, как в точках с вертикальной касательной на медленной кривой Ван дер Поля.

В системах общего положения с одной быстрой и двумя медленными переменными реализуется складка ($x^2 + y_1 = 0$) и сборка ($x^3 + xy_1 + y_2 = 0$). Нерегулярные точки образуют в этом случае гладкую кривую, так называемую линию складки, на медленной поверхности.



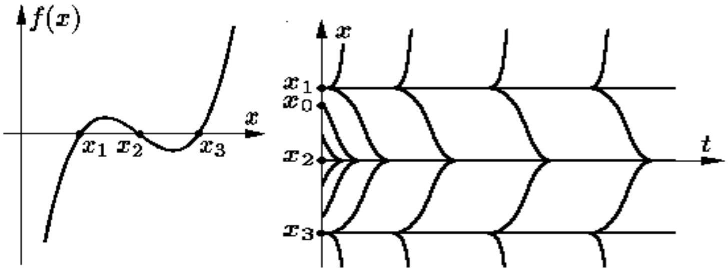
Сборка медленной поверхности

Уравнения быстрых движений аналитической системы общего положения в окрестности медленной поверхности можно привести к нормальной форме $\dot{x} = P/E$, где P - функция нормальной формы Уитни, а $E = \pm 1 + C(y)x^{\mu}$. Функциональный параметр $C(y)$ в этом случае неустраним. Однако, при одной быстрой и двух медленных переменных в окрестности общей точки складки нормальная форма быстрого уравнения принимает вид: $\dot{x} = x^2 + y_1 + (C + y_2)x^3$, где C уже не функция, а число.

<u>Сингулярно возмущенные системы.</u>

Совершенно иной, по сравнению с быстро-медленными системами, характер приобретает зависимость решений уравнений в случае, если малый параметр входит множителем при старшей производной. Такие уравнения, называемые сингулярно возмущенными уравнения, достаточно часто возникают при практических приложениях.

Рассмотрим простейший случай сингулярно возмущенных систем следующего вида: $\varepsilon\dot{x} = f(x)$, где $f : R \to R$, $f \in C^1$. Правая часть такого уравнения $\varepsilon^{-1} f(x)$ принципиально не может непрерывно зависеть от параметра $\varepsilon \to 0$. Поэтому такие уравнения и называются сингулярно возмущенными. При $\varepsilon = 0$ уравнение понижает порядок, то есть становится функциональным $f(x) = 0$. Решение такого функционального уравнения не может уже удовлетворять произвольному начальному условию. Рассмотрим случай, когда уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня. Тогда фазовый портрет системы при малых значениях ε может принять вид, показанный на рисунке.



Можно показать, что если $x(t) \equiv \varphi$ устойчивое решение уравнения $f(x)=0$, а точка x_0 лежит в области притяжения корня φ, то, тогда будет выполняться соотношение $|x_\varepsilon(t)-\varphi| \to 0$ при всех $t>0$. Здесь $x_\varepsilon(t)$ решение задачи $\varepsilon\dot{x} = f(x)$.

В более общем случае сингулярно возмущенную систему можно записать в следующем виде: , $\begin{cases}\varepsilon\dot{x} = f(x,y)\\ \dot{y} = g(x,y)\end{cases}$, где $f, g \in C^1$, $x \in R^l$, $y \in R^m$, $\varepsilon \in R$, $x(0)=x_0, y(0)=y_0$.

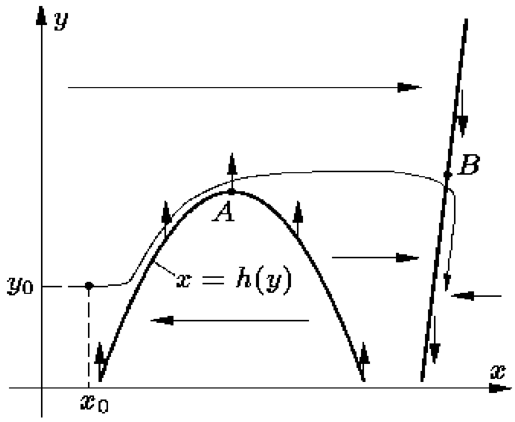
Первое уравнение называют уравнением быстрых движений, а второе - уравнением медленных движений. При $\varepsilon = 0$ система принимает вид: $\begin{cases}0 = f(x,y)\\ \dot{y} = g(x,y)\end{cases}$. Такую систему обычно называют вырожденной. Потеря вырожденной системой порядка, приводит к невозможности учета начальных значений по переменной x. Поэтому, в этом случае, задача Коши решается только для переменной y.

Вырожденную систему можно трактовать, как дифференциальное уравнение $\dot{y} = g(x,y)$ на многообразии Γ решений функционального уравнения $f(x,y)=0$. Устойчивые области многообразия выделяются условием $f'_x(x,y) < 0$.

Обозначим через $x = h(y)$ такое решение уравнения $f(x,y)=0$, чтобы оно проходило через устойчивую область многообразия Г, в зоне притяжения которой лежит точка (x_0, y_0). Подставляя $x = h(y)$ во второе уравнение системы, получим: $\dot{y} = g(h(y), y)$. Пусть $\psi(t)$ решение этого уравнения на интервале $[0,T]$ при начальных условиях $y(0)=y_0$, а $\varphi(t) = h[\psi(t)]$. Предположим, что точки $(\varphi(t), \psi(t))$ лежат на устойчивом участке многообразия Г. То есть выполняется соотношение $f'_\varphi[\varphi(t), \psi(t)] < 0$ для $\forall t \in [0,T]$.

Теорема (А.Н.Тихонов) */Тихонов Диф урав с183/. Пусть ($x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)$) определенное на интервале $[0,T]$ решение задачи Коши задачи $\begin{cases}\varepsilon\dot{x} = f(x,y)\\ \dot{y} = g(x,y)\end{cases}$, $x(0)=x_0, y(0)=y_0$. Тогда справедливы соотношения: $|x_\varepsilon(t)-\varphi(t)| \to 0$, $|y_\varepsilon(t)-\psi(t)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, для $\forall t \in [0,T]$.*

Утверждение теоремы Тихонова не выполняется, в частности, в окрестностях границы устойчивой ветви $x = h(y)$ решений уравнения $f(x,y)=0$ (см точка А на рисунке). Здесь медленное движение фазовой точки опять может смениться быстрым (участок АВ). В этом случае, фазовая точка с большой скоростью перемещается в окрестность другой устойчивой ветви решений уравнения $f(x,y)=0$ или уходит в бесконечность (если такой ветви нет). Точка А называется точкой срыва, а точка В – точкой падения.



Полученный результат позволяет в принципе рассматривать независимо быстрых и медленных движений системы. Вывод относительно свойств устойчивости исходной системы позволяют сделать следующее утверждение.

Теорема (Н.Н. Красовский). *Если подсистемы быстрых и медленных движений порознь экспоненциально устойчивы, то исходная система* $\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$ *также экспоненциально устойчива.*

Метод разделения движений.

Даже сравнительно простые биологические или физические процессы содержат много (несколько десятков) переменных и, соответствующее, количество уравнений. С другой стороны большинство удачных и содержательных математических моделей часто состоят из двух – четырех нелинейных уравнений. Пусть после ряда преобразований и выбора соответствующих масштабов удалось представить исходную систему $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2,...., x_n); i = 1,2,..., n$ в виде совокупности следующих уравнений:

$$\varepsilon^2 \cdot \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2,..., x_n); i = 1,2,..., l$$
$$\varepsilon \cdot \dot{x}_j = f_j(x_1, x_2,..., x_n); j = l+1,..., l+m$$
$$\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2,..., x_n); k = l+m+1,..., n$$

То есть расположить уравнения по степеням малого параметра ε при производной. Систему можно представить также в виде: $\dot{x}_i = \dfrac{1}{T_1} f_i$; $\dot{x}_j = \dfrac{1}{T_2} f_j$; $\dot{x}_k = \dfrac{1}{T_3} f_k$, где $T_1 = \varepsilon^2; T_2 = \varepsilon; T_3 = 1$. Если в процессе анализа необходимо изучение всех переменных, как на малых отрезках времени порядка ε^2, так и на временах порядка единицы, то необходимо исследовать полную систему. Если необходимо провести исследования на средних временах порядка $T_2 \approx \varepsilon$, то первые l уравнений будут описывать очень быстрые процессы, а уравнения с $l+m,..., n$ номера, наоборот, - очень медленные. То есть из последних $n-(l+m+1)$ уравнений $\dot{x}_k = \dfrac{1}{T_3} f_k$ можно выразить переменные x_k, которые не успевают заметно измениться. Оставшуюся систему $l+m$ уравнений можно редуцировать дальше. Поскольку T_1 - время установления переменных x_i - много меньше характерного времени $T_2 \approx \varepsilon$ системы $\dot{x}_j = \dfrac{1}{T_2} f_j$, то переменные x_i успеют достигнуть своих стационарных значений $\bar{x}_i$ раньше, чем переменные x_j успеют заметно измениться. Поэтому заменив в уравнениях $\dot{x}_j = \frac{1}{T_2} f_j$ значения x_i на их стационарное значение $\bar{x}_i$, можно снова понизить порядок и оставить лишь m уравнений, характерные времена которых имеют один порядок $T_2 \approx \varepsilon$. Однако, остается открытым вопрос о том, как в реальной системе определить характерные времена. Этот вопрос, к сожалению, не имеет универсального ответа и решается различным образом в зависимости от конкретного вида анализируемых уравнений.

Определенную оценку возможности разделения движений можно получить, используя величину разнесения спектров матриц линеаризованных систем первого приближения, соответственно, для уравнений быстрого и медленного движений.

Пусть задана сингулярная система следующего вида: $\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$, где $f, g \in C^1$, $x \in R^l$, $y \in R^m$, $\varepsilon \in R$, $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

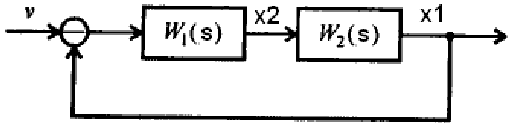
Запишем уравнения медленного движения $\begin{cases} 0 = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$. Обозначим через $x = h(y)$ такое решение уравнения $f(x,y) = 0$, чтобы оно проходило через устойчивую область многообразия Г, в зоне притяжения которой лежит точка (x_0, y_0). Подставляя $x = h(y)$ во второе уравнение системы, получим: $\dot{y} = g(h(y), y)$. Соответственно, можно найти линеаризованное уравнение первого приближения $\dot{y} = A_M y$, описывающее медленное движение системы в окрестности точки (x_0, y_0). Матрица $A_M \in R^{m*m}$ имеет m собственных значений $\{\lambda_1^M, ..., \lambda_m^M\}$.

Уравнения быстрого движения имеют следующий вид $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\varepsilon} f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$. Соответственно, при некотором заданном порядке малости величины ε, можно записать линеаризованное уравнение первого приближения $\dot{x} = A_Б x$, описывающее быстрое движение системы в окрестности точки (x_0, y_0). Матрица $A_Б \in R^{l*l}$ имеет l собственных значений $\{\lambda_1^Б, ..., \lambda_l^Б\}$.

. Пример распределения корней в системе с разнотемповыми процессами

Для оценки удаленности спектров матриц $A_Б, A_M$ часто используют понятие среднеквадратичного корня $\Omega = \sqrt[n]{(-1)^n \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n}$. В этом случае, мерой разделения движений может служить следующая эмпирическая оценка $D = \frac{\Omega_Б}{\Omega_M} \geq 10$.

Пример. Пусть задана следующая замкнутая система с передаточными функциями звеньев $W_1(s)=\dfrac{3}{\varepsilon^2 s^2+\varepsilon s+1}$ и $W_2(s)=\dfrac{2}{s+3}$, где $\varepsilon=0.1$.



Уравнения системы тогда можно записать в следующем виде: $\begin{cases}\dot{x}_1-3x_1=2x_2\\ \varepsilon^2\ddot{x}_2+\varepsilon\dot{x}_2+x_2=3v-3x_1\end{cases}$. Введем дополнительную переменную $x_3=\varepsilon\dot{x}_2$. Тогда уравнения системы примут вид: $\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+2x_2\\ \varepsilon\dot{x}_2=x_3\\ \varepsilon\dot{x}_3=-3x_1-x_2-x_3+3v\end{cases}$.

Уравнение медленного движения имеет вид $\dot{x}_1=-9x_1+6v$. То есть, соответствующая матрица уравнения медленного движения имеет одно собственное значение $\lambda_1^M=-9$. Уравнения быстрого движения имеют вид $\begin{cases}x_1=x0=const\\ \varepsilon\dot{x}_2=x_3\\ \varepsilon\dot{x}_3=-x_2-x_3+3v-3x0\end{cases}$. Матрица уравнения быстрого движения имеет спектр $\{-5+i\sqrt{75},-5-i\sqrt{75}\}$.

Отсюда получим $\Omega_M=9$, $\Omega_Б=10$. Следовательно $D=\dfrac{\Omega_Б}{\Omega_M}\approx 1.1$, то есть при данном значении $\varepsilon=0.1$ разнотемповые процессы в системе не возникнут.

<u>Принцип усреднения. Обобщенное уравнение Крылова-Боголюбова.</u>

Принцип усреднения является одним из мощнейших методов анализа теории возмущений динамических систем. Суть его заключается в построении по уравнениям исходной системы некоторой эквивалентной системы сравнения, которая допускают более простое отыскание решений. Обычно уравнения сравнения строятся с помощью какого-либо оператора сглаживания или усреднения.

Пусть система описывается следующим уравнением: $\dfrac{dz}{dt}=Z(z,t,\mu)$, $z(t_0)=z_0$, где $z\in G\subseteq R^n$, G некоторая n- мерная область фазового пространства, $t\in R=(-\infty,\infty)$, $\mu\geq 0$ - малый параметр.

Наряду с исходной системой зададим другую систему, описываемую следующим соотношением: $\dfrac{d\bar{z}}{dt}=\bar{Z}(\bar{z},t,\mu)$, $\bar{z}(t_0)=\bar{z}_0$. Такую систему будем называть системой сравнения. Соответственно векторную функцию $\bar{Z}(\bar{z},t,\mu)$ будем называть функцией сравнения для функции $Z(z,t,\mu)$.

Общий принцип построения системы сравнения заключается в том, чтобы найти такую невырожденную дифференцируемую замену переменных $z\to\bar{z}$, которая преобразует исходную систему в систему сравнения. Пусть искомая замена переменных представляется в виде: $z=u(\bar{z},t,\mu)$. Тогда будет выполняться следующее тождество: $\dfrac{dz}{dt}=(\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}},\dfrac{d\bar{z}}{dt})+\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Тогда, используя уравнения исходной системы и системы сравнения, можно записать уравнение, которому должна удовлетворять векторная функция $u(\bar{z},t,\mu)$: $(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \bar{Z}(\bar{z},t,\mu)) + \frac{\partial u}{\partial t} = Z(u(\bar{z},t,\mu),t,\mu)$.

Будем называть полученное уравнение обобщенным уравнением метода усреднения или обобщенным уравнением Крылова-Боголюбова /Гребеников Метод усред с19/. К уравнению необходимо также добавить начальные условия: $u(\bar{z}_0, t_0, \mu) = z_0$.

Если преобразование $z = u(\bar{z},t,\mu)$ существует и не вырождено в некоторой области переменных $\bar{z},t,\mu$, то в этой области уравнения исходной системы и системы сравнения будут эквивалентными. К сожалению отыскание точных решений уравнения системы сравнения и обобщенного уравнения усреднения является, как правило, задачей такой же трудности, как и решение уравнения исходной системы. Поэтому обычно при построении системы сравнения идут на определенный компромисс, сущность которого состоит в следующем.

1. Функцию сравнения $\bar{Z}(\bar{z},t,\mu)$ следует выбирать таким образом, чтобы она имела более простую аналитическую структуру по сравнению с первоначальной функцией $Z(z,t,\mu)$, но вместе с тем ей должны быть присущи основные свойства последней.

2. Выбор функции сравнения $\bar{Z}(\bar{z},t,\mu)$ должен осуществляться таким образом, чтобы квазилинейные уравнения в частных производных для замены переменных (уравнение Крылова-Боголюбова) допускали, если не нахождение точного решения, то хотя бы проведение какого-либо анализа. В первую очередь, при этом, необходимо обеспечить такие свойства функции $u(\bar{z},t,\mu)$, как ограниченность и необходимая степень гладкости в некоторой области изменения параметров.

Операторы осреднения.

Очевидно, что для исходной системы можно построить бесконечное количество уравнений сравнения. Традиционно, при построении уравнений сравнения чаще всего использовались операторы усреднения по явно входящему в правую часть функции $Z(z,t,\mu)$ времени t или по тем переменным z, от которых функция $Z(z,t,\mu)$ зависит периодическим образом. Рассмотрим основные операторы усреднения.

$$M_t[Z(z,t,\mu)] = \bar{Z}(z,t_0,\mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} Z(z,t,\mu)dt, \quad M_z[Z(z,\mu)] = \bar{Z}(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} Z(z,\mu)dz_1\dots dz_n$$

Второй оператор усреднения применяется, если функция $Z(z,\mu)$ является 2π - периодической по всем компонентам вектора z в области $z \in G$. То есть выполняются соотношения: $Z(z+(2\pi),\mu) \equiv Z(z,\mu)$.

Если функция периодичности по части переменных, то есть: $Z(z_1+2\pi,\dots z_s+2\pi, z_{s+1},..z_n,\mu) \equiv Z(z,\mu), 0 \le s \le n$, то оператор усреднения можно записать в следующем виде: $M_{z^{(s)}}[Z(z,\mu)] = \bar{Z}(z_{s+1},\dots,z_n,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^s}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} Z(z,\mu)dz_1\dots dz_s$.

В теории управления важным является тот случай, когда функция $Z(z,\mu)$ является 2π - периодической и удовлетворяет условиям разложимости в n - кратный ряд Фурье. Тогда ее можно в области G представить тригонометрическим рядом Фурье вида $Z(z,\mu) = \sum_{\|k\|\ge 0} Z_k(\mu)\exp\{i(k,z)\}$.

Применяя оператор усреднения к 2π -периодической функции $Z(z,\mu)$, получим: $M_z[Z(z,\mu)] = Z_0(\mu)$. То есть результатом усреднения является свободный член ряда Фурье.

Допустим теперь, что вектор z представляется в виде: $z=\omega t$, где вектор $\omega \in R^n$ и имеет компоненты называемые частотами. Тогда можно записать следующее разложение: $Z(\omega t,\mu)=\sum\limits_{\|k\|\geq 0} Z_k(\mu)\exp\{i(k,\omega)t\}$. Применим к полученному ряду усреднение по времени, полагая, что $t_0=0$: $M_t[Z(\omega t,\mu)]=\overline{Z}(\mu)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T Z(\omega t,\mu)dt$. Результат вычисления интеграла существенно зависит от арифметических свойств чисел $\{\omega_i\}, i=1,2,\ldots,n$, являющихся компонентами вектора частот. Если частоты $\{\omega_i\}$ рационально несоизмеримы, то есть равенство $(k,\omega)=0$ выполняется только при $\|k\|=0$, то легко проверить, что будет справедливо соотношение: $M_t[Z(\omega t,\mu)]=Z_0$.

Следовательно, в случае рациональной несоизмеримости чисел $\{\omega_i\}$ операции усреднения по всем переменным z и по времени дают одинаковый результат: $M_t[Z(\omega t,\mu)]=M_z[Z(z,\mu)]$.

Если же числа $\{\omega_i\}$ рационально соизмеримы, то есть равенство $(k,\omega)=0$ справедливо и при некоторых целочисленных векторах k с отличной от нуля нормой, то тогда $M_t[Z(\omega t,\mu)]=\sum\limits_{\|k\|\geq 0}{}'' Z_k(\mu)$, где " (двойной штрих) при сумме означает, что вектор индекс суммирования принимает, лишь «резонансные» значения. То есть «резонансные» значения, это такие кратности частот (вектор k), при которых будет выполняться равенство $(k,\omega)=0$. То есть, при наличии резонанса частот $\{\omega_i\}$ будет выполняться неравенство:
$M_t[Z(\omega t,\mu)]\neq M_z[Z(z,\mu)]$.

Следовательно, результаты усреднения по времени и по фазовым переменным z одной и той же функции $Z(z,\mu)$ не совпадают, если числа $\{\omega_i\}$ рационально соизмеримы.

Заметим, что усреднение по времени t зависит, вообще говоря, от параметра t_0. В большинстве прикладных задач, однако, свойства решений уравнения существенно не зависят от t_0. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $t_0=0$.

Стандартные системы. Теорема Боголюбова.

Рассмотрим теперь построение систем сравнения для различных классов систем, описывающих различные колебательные процессы, в том числе периодические и квазипериодические процессы.

Система вида $\frac{dz}{dt}=\mu Z(z,t,\mu)$, $z(t_0)=z_0$, где $z\in G\subseteq R^n$, G некоторая n- мерная область фазового пространства, $t\in R=(-\infty,\infty)$, $\mu\geq 0$ - малый параметр, называется стандартной системой в смысле Боголюбова.

Пусть функция сравнения $\overline{Z}(\bar{z},\mu)$ определяется соотношением: $\overline{Z}(z,\mu)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T Z(z,t,\mu)dt$.

Тогда уравнение сравнения является автономным и имеет вид: $\frac{d\bar{z}}{dt}=\mu\overline{Z}(\bar{z},\mu)$, $\bar{z}(t_0)=\bar{z}_0$.

Уравнение $\dfrac{d\bar{z}}{dt} = \mu\bar{Z}(\bar{z},0)$, $\bar{z}(t_0) = \bar{z}_0$, называется уравнением сравнения первого приближения для исходной системы. Замена переменных, преобразующая уравнение исходной системы в уравнение системы сравнения, будем искать в виде: $z = \bar{z} + \mu u(\bar{z},t,\mu)$. Такая замена также называется преобразованием Крылова-Боголюбова. Обобщенное уравнение Крылова-Боголюбова для стандартных систем тогда можно записать в форме:

$$\mu(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \bar{Z}(\bar{z},\mu)) + \frac{\partial u}{\partial t} = Z(\bar{z} + \mu u, t, \mu) - \bar{Z}(\bar{z},\mu).$$

Рассмотрим простейший случай, когда функция Z является 2π - периодична по t. То есть выполняются соотношения: $Z(z,t+2\pi,\mu) \equiv Z(z,t)$ для всех $z \in G$ и функция Z дифференцируема по t. Тогда можно записать следующие соотношения: $Z(z,t) = \sum_{|k|\geq 0} Z_k(z)\exp\{ikt\}$, $\bar{Z}(\bar{z}) = Z_0(\bar{z})$. Уравнение Крылова-Боголюбова для этого случая примет вид:

$$\mu(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \bar{Z}(\bar{z})) + \frac{\partial u}{\partial t} = Z(\bar{z} + \mu u) - Z_0(\bar{z}) + \sum_{|k|\geq 0} Z_k(\bar{z} + \mu u)\exp\{ikt\}.$$

Если функция $Z(z,t)$ является аналитической функцией относительно $z \in G$, то с помощью асимптотических рядов возможно формальное представление для функции $u(\bar{z},t)$. В этом случае преобразование замены переменных определяется соотношением: $z = \bar{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k(\bar{z},t)$. Тогда вместо квазилинейного уравнений Крылова-Боголюбова получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных. При этом уравнение системы сравнения удобно записывать в виде некоторого конечного m - го приближения: $\dfrac{d\bar{z}}{dt} = \mu\bar{Z}(\bar{z},0) + \mu^2 A_2(\bar{z}) + \ldots + \mu^m A_m(\bar{z})$.

Функции $A_i(\bar{z}), i = 2,..m$ определяются в процессе решения при сравнении соответствующих асимптотических рядов /Гребеников с29/.

Применение аналитического аппарата для построения замен переменных будет эффективным и обоснованным, если удается получить оценки для нормы $\| z(t,\mu) - \bar{z}(t,\mu) \|$. Классическая ε - оценка для нормы $\| z(t,\mu) - \bar{z}(t,\mu) \|$ дается следующим утверждением.

Теорема (Н.Н. Боголюбов). *Пусть:*

1. Векторная функция $Z(z,t,\mu)$ *определена в открытой связной области* $G \otimes R \otimes [0,\mu^*]$, *ограничена в ней и удовлетворяет относительно* z *условию Липшица.*

2. Существует равномерное относительно $z \in G$ *интегральное среднее, определяемое оператором* $M_t[Z(z,t,\mu)] = \bar{Z}(z,t_0,\mu) = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \int_{t0}^{t0+T} Z(z,t,\mu)dt$.

3. Усредненная система первого приближения $\dfrac{d\bar{z}}{dt} = \mu\bar{Z}(\bar{z},0)$, $\bar{z}(t_0) = \bar{z}_0$ *имеет решение* $\bar{z}(t,\mu)$, *определенное для* $t \in [0,\infty)$ *и лежащее в* G *вместе с некоторой окрестностью.*

Тогда для любых сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и сколь угодно большого $A > 0$ существует $\mu_0(\varepsilon, A) > 0$ такое, что для всех μ из интервала $0 \le \mu < \mu_0$ и для всех t из интервала $0 \le t \le A\mu^{-1}$ справедлива оценка $\| z(t,\mu) - \bar{z}(t,\mu) \| < \varepsilon$, $z(0,\mu) = \bar{z}(0,\mu)$.

Функция $\overline{Z}$ называется равномерно средним значением относительно z для функции Z и области $z \in G \subseteq R^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая не зависящая от z величина $T(\varepsilon) > 0$, что при $\tau > T(\varepsilon)$ неравенство $\| \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} Z(z,t)dt - \overline{Z}(z) \| < \varepsilon$ выполняется для всех $z \in G$.

Контрольные вопросы к лекции 8.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Быстро-медленная система описывается уравнениями: $\begin{cases} \dot{x} = F(x,y,\varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon G(x,y,\varepsilon) \end{cases}$, где $x \in R^l$, $y \in R^m$, $\varepsilon \in R; \varepsilon << 1$. Тогда уравнения медленного движения системы имеют следующий вид …	1. … $\begin{cases} 0 = F(x,y,0) \\ \frac{dy}{d\tau} = G(x,y,0) \end{cases}$, где $\tau = \varepsilon t$. 2. … $\begin{cases} \dot{x} = F(x,y,\varepsilon) \\ 0 = G(x,y,0) \end{cases}$. 3. … $\begin{cases} \dot{x} = F(x,y,\varepsilon) \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$
2	Сингулярно – возмущенная система описывается уравнениями $\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$, где $x \in R^l$, $y \in R^m$, $\varepsilon \in R; \varepsilon << 1$. Тогда уравнения быстрого движения системы имеют следующий вид …	1. … $\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(x,y) \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$, где $\tau = \varepsilon^{-1}t$. 2. … $\begin{cases} 0 = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$. 3. … $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\varepsilon} f(x,y) \\ g(x,y) = const \end{cases}$
3.	Можно ли утверждать, что подсистемы быстрого и медленного движения будут устойчивы, если устойчива исходная сингулярно – возмущенная система при некотором значении ε ?	1. Да, можно. 2. Нет, нельзя. 3. Подсистема быстрых движений будет устойчива, а обеспечение устойчивости подсистемы медленных движений требует дополнительных условий.
4	Условие разделения движений в окрестности точки (x_0, y_0) ($f(x_0,y_0) = 0$) в системе $\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ можно приближенно записать в следующем виде…	1. … $\frac{\Omega_Б}{\Omega_М} > 10$, где $\Omega_Б, \Omega_М$ среднеквадратичные корни характеристических уравнений $\det[\lambda E - \frac{1}{\varepsilon}(\frac{\partial f}{\partial y}\|_{x_0,y_0})] = 0$ и $\det[\lambda E - (\frac{\partial g}{\partial x}\|_{x_0,y_0})] = 0$, соответственно.

		2. … $\frac{\Omega_Б}{\Omega_М} > 10$, где $\Omega_Б, \Omega_М$ среднеквадратичные корни характеристических уравнений $\det[\lambda E - \frac{1}{\varepsilon}(\frac{\partial f}{\partial x}\|_{x_0,y_0})] = 0$ и $\det[\lambda E - (\frac{\partial g}{\partial y}\|_{x_0,y_0})] = 0$, соответственно. 3. … $\frac{\Omega_М}{\Omega_Б} > 10$, где $\Omega_Б, \Omega_М$ среднеквадратичные корни характеристических уравнений $\det[\lambda E - \frac{1}{\varepsilon}(\frac{\partial f}{\partial y}\|_{x_0,y_0})] = 0$ и $\det[\lambda E - (\frac{\partial g}{\partial x}\|_{x_0,y_0})] = 0$, соответственно.
5	Применение операции усреднения для возмущенной периодической системы $\frac{dz}{dt} = Z(z,t,\mu); z \in R^n$, как с применением оператора усреднения по времени, так и с применением оператора усреднения по периоду, дает одинаковый результат, если …	1. … частоты $\omega_i; i = 1,2,..., s \le n$ периодических колебаний в системе рационально несоизмеримы. 2. … частоты $\omega_i; i = 1,2,..., s \le n$ периодических колебаний в системе рационально соизмеримы. 3. … для частот периодических колебаний в системе выполняется соотношение $\omega_1 << \omega_i, i = 2,...s \le n$.
6	Применение операции усреднения для стандартной системы $\frac{dz}{dt} = \mu Z(z,t,\mu)$, $z(t_0) = z_0$, где $z \in G \subseteq R^n$ будет обоснованным на интервале $T = (0 \le t \le A\mu^{-1})$, если для такой системы существует …	1. … среднее $\bar{Z}(z,\bar{t},\mu) = \lim_{\Delta t \to 0}(\frac{Z(z,\bar{t}+\Delta t,\mu) + Z(z,\bar{t},\mu)}{2})$ для $\forall \bar{t} \in T$. 2. … дифференциальное среднее $\frac{d}{dt}\bar{Z}(z,\bar{t},\mu) = \lim_{\Delta t \to 0}(\frac{Z(z,\bar{t}+\Delta t,\mu) - Z(z,\bar{t}-\Delta t,\mu)}{2\Delta t})$ для $\forall \bar{t} \in T$. 3. … интегральное среднее $\bar{Z}(z,\bar{t},\mu) = \lim_{\Delta t \to 0}(\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta t} Z(z,t,\mu)dt$ для $\forall \bar{t} \in T$.