Контрольная работа

Вариант 4

1. Проверить аналитичность функции

$$\text{а) } f(z) = \cos z \; ; \qquad \text{б) } f(z) = e^{\bar{z}} \; .$$

Решение.

Мы используем обозначения:

$$x = \operatorname{Re} z \; , \quad y = \operatorname{Im} z \; , \quad u = \operatorname{Re} f(z) \; , \quad v = \operatorname{Im} f(z) \; .$$

а)

$$f(z) = \cos z \; ;$$

тогда

$$u = \cos x \cdot \cosh y \; , \qquad v = -\sin x \cdot \sinh y \; .$$

Находим:

$$\partial u/\partial x = -\sin x \cdot \cosh y \; , \qquad \partial u/\partial y = \cos x \cdot \sinh y \; ,$$
$$\partial v/\partial x = -\cos x \cdot \sinh y \; , \qquad \partial v/\partial y = -\sin x \cdot \cosh y \; .$$

Уравнения Коши–Римана

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y \; , \quad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$$

выполняются во всей открытой комплексной плоскости. Следовательно, функция $f(z)$ аналитична во всей открытой комплексной плоскости.

б)

$$f(z) = \exp \bar{z} = e^{x-iy} \; ;$$

тогда

$$u = e^{x} \cos y \; , \qquad v = -e^{x} \sin y \; .$$

Находим:

$$\partial u/\partial x = e^{x} \cos y \; , \qquad \partial u/\partial y = -e^{x} \sin y \; ,$$
$$\partial v/\partial x = -e^{x} \sin y \; , \qquad \partial v/\partial y = -e^{x} \cos y \; .$$

Из уравнений Коши–Римана

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y \; , \quad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$$

второе выполняется во всей открытой комплексной плоскости, а первое – только при $\cos y = 0$, т.е. при $y = \pi/2 + p\, k \quad (k = 0, \pm 1, ...)$. Следовательно, функция $f(z)$ не является аналитической ни в одной точке открытой комплексной плоскости.

2. Найти, если возможно, аналитическую функцию

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \ ,$$

если

$$f(0) = 1 \ , \quad v(x,y) = 2\,xy + e^x \sin y \ .$$

Решение.

В данном случае

$$\partial v/\partial x = 2y + e^x \sin y \ , \quad \partial v/\partial y = 2x + e^x \cos y \ ,$$

$$\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 = e^x \sin y - e^x \sin y = 0 \ ;$$

функция v является гармонической, следовательно, искомая аналитическая функция существует.

Записываем уравнения Коши–Римана:

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y = 2x + e^x \cos y \ ,$$

$$\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x = -2y - e^x \sin y \ .$$

Интегрируем первое уравнение:

$$u = \int (2x + e^x \cos y)\,dx + \varphi(y) = x^2 + e^x \cos y + \varphi(y) \ .$$

Подставляем полученную функцию во второе уравнение:

$$-e^x \sin y + \varphi'(y) = -2y - e^x \sin y \ .$$

Получаем

$$\varphi'(y) = -2y \ ;$$

$$\varphi(y) = -y^2 + C$$

$(C = \text{const})$;

$$u = x^2 - y^2 + e^x \cos y + C \ ;$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + i \cdot 2\,xy + e^x\,(\cos y + i \sin y) + C = z^2 + e^z + C \ .$$

Из заданного значения $f(0)$ получаем $C = 0$.

Окончательно,

$$f(z) = z^2 + e^z \ .$$

3. Разложить $f(z)$ в ряд Лорана (Тейлора) в заданном кольце (окрестности точки z_0). В Тейлоре указать область сходимости полученного ряда.

а) $$f(z) = \frac{z-1}{z^2 + 3z + 2} \ ; \qquad 1 < |z| < 2 \ ;$$

б) $$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} - \frac{1}{z-1} \ ; \qquad z_0 = 0 \ .$$

Решение.

а) $1 < |z| < 2$;

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{z-1}{(z+1)(z+2)} \ .$$

Разложим данную дробно-рациональную функцию на элементарные дроби:

$$f(z) = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} = \frac{\alpha(z_1)/\beta'(z_1)}{z-z_1} + \frac{\alpha(z_2)/\beta'(z_2)}{z-z_2} \ ,$$

где

$$z_1 = -1 \ , \qquad z_2 = -2 \ .$$

В результате имеем:

$$f(z) = \frac{-2}{z+1} + \frac{3}{z+2} \ .$$

Используем формулу для суммы элементов геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1) \ .$$

Из данной формулы следует:
при $|z| < |z_0|$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{-1/z_0}{1-z/z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{k=0}^{\infty} (z/z_0)^k$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} z_0^{-k-1} \cdot z^k \ ;$$

при $|z| > |z_0|$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1/z}{1-z_0/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (z_0/z)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} z_0^k \cdot z^{-k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} z_0^{k-1} \cdot z^{-k} \ .$$

В результате получаем:

$$f(z) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot z^{-k} - 3 \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{-k-1} \cdot z^k$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{-k} + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \cdot z^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, z^k \ ,$$

где

$$\alpha_k = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad (k = 0, 1, 2, ...);$$
$$\alpha_{-k} = 2 \cdot (-1)^k \qquad (k = 1, 2, 3, ...).$$

б) $z_0 = 0$;

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} + \frac{1}{1-z}\ .$$

При $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\ .$$

При $0 < |z| < \infty$

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{z^2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k}}{(2k)!}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2\,(k-1)}}{(2k)!} = z^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{z^{2k}}{(2k+2)!}\ .$$

Отсюда при $0 < |z| < 1$

$$f(z) = z^{-2} + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\,\frac{z^{2j}}{(2j+2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = z^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\, z^k\ ,$$

где

$$\alpha_k = 1 \quad \text{для нечетных } k = 2j+1\ ;$$

$$\alpha_k = 1 + \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+2)!} \quad \text{для четных } k = 2j\ .$$

4. Найти особенные точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{z^6}{z^2-4}\cdot\sin\frac{1}{z} + \tan z\ .$$

Решение.

$$f(z) = \frac{z^6}{z^2-4}\cdot\sin(1/z) + \tan z = \frac{z^5}{(z-2)(z+2)}\cdot z\,\sin(1/z) + \tan z\ .$$

Особыми точками функции

$$f_1(z) = \frac{z^5}{(z-2)(z+2)}$$

являются точки:

$z_1 = \infty$ – полюс порядка 5;

$z_2 = 2$ – полюс порядка 1;

$z_3 = -2$ – полюс порядка 1.

Точка $z_4 = 0$ является нулем порядка 5 данной функции.

Особой точкой функции

$$f_2(z) = z\,\sin(1/z)$$

является точка $z_4 = 0$ – это существенно особая точка. Точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой данной функции. Данная функция аналитична и отлична от нуля в точках z_2 и z_3.

Особыми точками функции

$$f_3(z) = \tan z$$

являются точки $\xi_k = \pi/2 + \pi\, k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Каждая из этих точек является простым полюсом, т.к.

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\eta} \cos(\eta + \pi/2 + \pi\, k) = (-1)^{k+1} \lim_{\eta\to 0} \frac{\sin(\eta)}{\eta} = (-1)^{k+1} ,$$

и, следовательно, функция $(z-\xi_k)^{-1} \tan z$ имеет конечный и отличный от нуля предел при $z \to \xi_k$.

В результате получаем: особыми точками функции $f(z)$ являются точки

$z_1 = \infty$ – полюс порядка 5;

$z_2 = 2$ – полюс порядка 1;

$z_3 = -2$ – полюс порядка 1;

$z_4 = 0$ – существенно особая точка;

$\xi_k = \pi/2 + \pi\, k$ – полюсы порядка 1 $\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

5. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

а) $$\int_C \frac{\sinh z}{z^2\,(z+3)}\, dz\ ; \qquad C:\ |z-2| = 3\ .$$

б) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}\ .$$

Решение.

а) C – круг с центом $z_0 = 2$ радиуса $a = 3$;

$$W = \int_C f(z)\, dz\ , \qquad f(z) = \frac{\sinh z}{z^2\,(z+3)}\ .$$

Функция $f(z)$ имеет два полюса $z_1 = 0$ и $z_2 = -3$. Из них только z_1 находится внутри окружности C. Поэтому искомый интеграл равен

$$W = 2\pi\, i \cdot \mathrm{res}_{z_1} f(z)\ .$$

Разложим на элементарные дроби дробно-рациональную функцию, фигурирующую в выражении для $f(z)$. В разложении

$$\frac{1}{z^2\,(z-\eta)} = \frac{\mu_{10}}{z^2} + \frac{\mu_{11}}{z} + \frac{\mu_2}{z-\eta}$$

можно сразу определить коэффициенты μ_{10} и μ_2 по формулам

$$\mu_{10} = 1/\eta \quad \text{и} \quad \mu_2 = 1/\eta^2\ ,$$

а затем определить μ_{11} подставив в формулу разложения значения коэффициентов μ_{10} и μ_2; получаем

$$\mu_{11} = -1/\eta^2\ .$$

В результате имеем:

$$\frac{1}{z^2\,(z+3)} = \frac{1/3}{z^2} + \frac{-1/9}{z} + \frac{1/9}{z+3}\ .$$

Для определения вычетов функции $f(z)$ используем формулы:

$$\mathrm{res}_{z_0}\frac{\Phi(z)}{z-z_0}=\Phi(z_0)\;,\qquad \mathrm{res}_{\,z_0}\frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^2}=\Phi'(z_0)\;,$$

где $\Phi(z)$ – функция, аналитическая в точке z_0.

В результате получаем

$$\mathrm{res}_{z_1}f(z)=\frac{1}{3}\,\cosh z_1-\frac{1}{9}\,\sinh z_1=\frac{1}{3}\;,$$

и

$$W=2\pi\,i\cdot(1/3)=i\cdot 2.094395\;.$$

б)

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\;,\qquad f(z)=\frac{1}{1+z^6}\;.$$

Функция $f(z)$ имеет 6 полюсов

$$z_k=e^{i\,\pi\,(2k+1)/6}\qquad (k=0,...,5)\;,$$

т.е.

$$z_0=e^{i\,\pi/6}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)\;,\quad z_1=e^{i\,\pi/2}=i\;,\quad z_2=e^{i\,\pi\cdot 5/6}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)\;,$$

$$z_3=z_2^*\;,\qquad z_4=z_1^*\;,\qquad z_5=z_0^*\;,$$

из них только z_0, z_1, z_2 находятся в верхней полуплоскости. Поэтому искомый интеграл равен

$$W=2\pi\,i\cdot\Big(\mathrm{res}_{z_0}f(z)+\mathrm{res}_{z_1}f(z)+\mathrm{res}_{z_2}f(z)\Big)\;.$$

Разложим дробно-рациональную функцию $f(z)$ на элементарные дроби:

$$f(z)=\frac{1}{\beta(z)}=\frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)}$$

$$=\frac{\mu_0}{z-z_0}+\frac{\mu_1}{z-z_1}+\frac{\mu_2}{z-z_2}+\frac{\mu_3}{z-z_3}+\frac{\mu_4}{z-z_4}+\frac{\mu_5}{z-z_5}\;,$$

где

$$\mu_k=\frac{1}{\beta'(z_k)}=\frac{1}{6\,z_k^5}\;,$$

нам понадобятся только первые три данных коэффициента:

$$\mu_0=\frac{1}{6}\,e^{-i\,\pi\,5/6}=-\frac{1}{6}\,e^{i\,\pi/6}=\frac{1}{12}\left(-\sqrt{3}-i\right)\;,$$

$$\mu_1=\frac{1}{6}\,e^{-i\,\pi\,5/2}=\frac{1}{6}\,e^{-i\,\pi/2}=\frac{1}{6}\,i\;,$$

$$\mu_2=\frac{1}{6}\,e^{-i\,\pi\,25/6}=\frac{1}{6}\,e^{-i\,\pi/6}=\frac{1}{12}\left(\sqrt{3}-i\right)\;.$$

Получаем:

$$W=2\pi\,i\cdot(\mu_0+\mu_1+\mu_2)=2\pi\,i\cdot\frac{1}{12}\,(-i-2i-i)$$

$$=2\pi/3=2.0943951\;.$$

Вариант 23

6. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения или системы операционным методом.

$$y'' - 2\,y' + 10\,y = t\,e^t\ ,$$
$$y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ .$$

Решение.

При решении операционным методом линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\alpha_2\,\frac{d^2}{dt^2}\,\Phi(t) + \alpha_1\,\frac{d}{dt}\,\Phi(t) + \alpha_0\,\Phi(t) = f(t)$$

с учетом начальных условий $\Phi(0) = y_0$ и $\Phi'(0) = y_1$ необходимо применить преобразование Лапласа к обеим частям данного уравнения. Пусть при преобразовании Лапласа функциям $\Phi(t)$ и $f(t)$ соответствуют функции $\Psi(p)$ и $F(p)$; тогда функциям $\Phi'(t)$ и $\Phi''(t)$ соответствуют функции

$$p\,\Psi(p) - y_0 \quad \text{и} \quad p^2\,\Psi(p) - p\,y_0 - y_1;$$

в результате получаем уравнение

$$Q(p)\,\Psi(p) - \alpha_2\,(p\,y_0 + y_1) - \alpha_1\,y_0 = F(p),$$

откуда

$$\Psi(p) = \frac{F(p)}{Q(p)} + \frac{1}{Q(p)}\Big(\alpha_2\,(p\,y_0 + y_1) + \alpha_1\,y_0\Big).$$

Здесь

$$Q(p) = \alpha_2\,p^2 + \alpha_1\,p + \alpha_0$$

– характеристический полином исходного уравнения.

В данном случае

$$y_0 = 1\ , \qquad y_1 = 1\ ,$$
$$f(t) = t\,e^t\ ,$$
$$Q(p) = p^2 - 2\,p + 10 = (p - 1 - 3i)(p - 1 + 3i)\ .$$

Используем следующее табличное преобразование Лапласа (образом функции $g(t)$ является функция $G(p)$):

$$\text{при} \quad g(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad G(p) = \frac{1}{p^n} \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Используя формулу для сдвига аргумента у изображения, можно также получить

$$\text{при} \quad g(t) = \frac{1}{(n-1)!}\,t^{n-1}\,e^{at} \qquad G(p) = \frac{1}{(p-a)^n} \qquad (n = 1, 2, ...).$$

В результате имеем:

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\ ;$$

$$\Psi(p) = \frac{1}{(p-1)^2\,(p-1-3i)(p-1+3i)} + \frac{p-1}{(p-1-3i)(p-1+3i)}$$
$$= \frac{1+(p-1)^3}{(p-1)^2\,(p-1-3i)(p-1+3i)} = \frac{p^3-3\,p^2+3\,p}{(p-1)^2\,(p-1-3i)(p-1+3i)}\ .$$

Разложим данную дробно-рациональную функцию на элементарные дроби:

$$\Psi(z) = \frac{\alpha(z)}{(z-z_1)^2\,(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{\mu_{10}}{(z-z_1)^2} + \frac{\mu_{11}}{z-z_1} + \frac{\mu_2}{z-z_2} + \frac{\mu_3}{z-z_3}$$

($z_1 = 1$, $z_2 = 1+3i$, $z_3 = 1-3i$). Коэффициенты μ_{10}, μ_2 и μ_3 можно сразу определить по формулам

$$\mu_{10} = \frac{\alpha(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{1}{9}\ ,$$
$$\mu_2 = \frac{\alpha(z_2)}{(z_2-z_1)^2\,(z_2-z_3)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{54}\ ,$$
$$\mu_3 = \frac{\alpha(z_3)}{(z_3-z_1)^2\,(z_3-z_2)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{54}\ ,$$

затем можно определить коэффициент μ_{11} подставив в формулу разложения значения коэффициентов μ_{10}, μ_2 и μ_3; получаем $\mu_{11} = 0$ и

$$\Psi(p) = \frac{1/9}{(p-1)^2} + \frac{1/2+i/54}{p-1-3i} + \frac{1/2-i/54}{p-1+3i}\ .$$

Выполняем обратное преобразование Лапласа:

$$\Phi(t) = \frac{1}{9}\,t\,e^t + \frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{27}\right)e^{(1+3i)\,t} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{i}{27}\right)e^{(1-3i)\,t}\ .$$

Искомое решение

$$\Phi(t) = e^t\left(\frac{1}{9}\,t + \cos(3t) - \frac{1}{27}\,\sin(3t)\right).$$

Проверка результата:

$$\Phi'(t) = e^t\left(\frac{1}{9}\,t + \cos(3t) - \frac{1}{27}\,\sin(3t) + \frac{1}{9} - 3\,\sin(3t) - \frac{1}{9}\,\cos(3t)\right)$$
$$= e^t\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\,t + \frac{8}{9}\,\cos(3t) - \frac{82}{27}\,\sin(3t)\right),$$
$$\Phi''(t) = e^t\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\,t + \frac{8}{9}\,\cos(3t) - \frac{82}{27}\,\sin(3t) + \frac{1}{9} - \frac{8}{3}\,\sin(3t) - \frac{82}{9}\,\cos(3t)\right)$$
$$= e^t\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\,t - \frac{74}{9}\,\cos(3t) - \frac{154}{27}\,\sin(3t)\right),$$
$$\Phi''(t) - 2\,\Phi'(t) + 10\,\Phi(t) = e^t\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\,t - \frac{74}{9}\,\cos(3t) - \frac{154}{27}\,\sin(3t)\right.$$
$$-\frac{2}{9} - \frac{2}{9}\,t - \frac{16}{9}\,\cos(3t) + \frac{164}{27}\,\sin(3t)$$
$$\left.+\frac{1}{9}\,t + \cos(3t) - \frac{1}{27}\,\sin(3t)\right)$$
$$= t\,e^t\ ,$$
$$\Phi(0) = 1\ , \quad \Phi'(0) = 1\ .$$