Вариант 3

1. **(7.16)** В колебательном контуре с индуктивностью L = 0,4 Гн и емкостью C = 20 мкФ амплитудное значение силы тока равно i_m = 0,1 А. Каким будет напряжение на конденсаторе в момент, когда энергии электрического и магнитного полей будут равны?

Дано:
L = 0,4 Гн
C = 20 мкФ = $2\cdot10^{-5}$ Ф
i_m = 0,1 А
$W_М = W_Э$
U - ?

Решение:
В данном колебательном контуре происходят незатухающие электромагнитные колебания. Условимся отсчитывать время от момента соответствующего наибольшей разности потенциалов на обкладках конденсатора. Тогда разность потенциалов меняется по закону

$$U = U_m\cdot\cos\omega_0 t.$$

Ток в контуре

$$J = -dq/dt = -CdU/dt = CU_m\omega_0\cdot\sin\omega_0 t$$

Энергия магнитного поля контура

$$W_М = ½LJ^2 = ½LC^2U_m^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t.$$

Энергия электрического поля контура

$$W_Э = ½CU^2 = ½CU_m^2\cos^2\omega_0 t.$$

Отсюда при условии $W_М = W_Э$

$$½LC^2U_0^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = ½CU_m^2\cos^2\omega_0 t,$$
$$LC\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \cos^2\omega_0 t.$$

Учитывая, что $\omega_0^2 = 1/(LC)$, получим

$$\sin^2\omega_0 t = \cos^2\omega_0 t,$$
$$\cos^2\omega_0 t = ½,$$
$$\omega_0 t = \pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z.$$

Максимальная сила тока

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{R}.$$

Амплитудное значение напряжения на конденсаторе

$$U_m = i_m/(\omega C) = \frac{\varepsilon_m}{RC\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{\varepsilon_m}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = i_m\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Искомое напряжение на конденсаторе:

$$U = i_m\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot\cos(\omega_0 t) = i_m\sqrt{\frac{L}{2C}}$$

Подставляя численные значения, находим: U = 10 В.

Ответ: U = 10 В.

2. **(7.35)** В колебательном контуре, собственная частота колебаний в котором $\omega_0 = 34{,}5\cdot10^3$ c^{-1}, возбуждаются затухающие колебания. Найти добротность контура, если известно, что за время t = 10^{-3} с энергия, запасенная в контуре, уменьшится в η = 2 раза.

Дано:
$\omega_0 = 34{,}5\cdot10^3$ c^{-1}
t = 10^{-3} с
η = 2
Q - ?

Решение:
Добротность колебательного контура

$$Q = \pi/\delta,$$

где δ - логарифмический коэффициент затухания:

$$\delta = \beta T,$$

β - коэффициент затуханий; T – период колебаний.
Период затухающих колебаний

$$T = 2\pi/\omega_0.$$

Закон изменения энергии затухающих колебаний имеет вид:

$$E = E_0\cdot\exp(-2\beta t).$$

По условию задачи

$$E_0/E = \eta.$$

Отсюда

$$\eta = E_0/[E_0\cdot\exp(-2\beta t)] = \exp(2\beta t),$$
$$\beta = \ln(\eta)/(2t),$$
$$\delta = \pi\cdot\ln(\eta)/(\omega_0 t),$$
$$Q = \omega_0 t/\ln(\eta).$$

Подставляя численные значения, находим:

$$Q = 34{,}5\cdot10^3\cdot10^{-3}/\ln2 = 50.$$

Ответ: Q = 50.

3. **(8.12)** Найти плотность тока смещения $j_{см}$ в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью v оставаясь параллельными друг другу. Расстояние d между пластинами остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин. Рассмотреть два случая: 1) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными; 2) разность потенциалов ΔU между пластинами остается постоянной.

Дано:
d, v
1) q = const
2)ΔU = const
$j_{см}$ - ?

Решение:
Плотность тока смещения в конденсаторе

$$j_{см}(t) = \partial D/\partial t,$$

где D – вектор электрического смещения

$$D(t) = -q(t)/S,$$

S – площадь пластин конденсатора.
1) Закон изменения заряда на пластинах конденсатора:

$$q(t) = q = const,$$

Отсюда

$$D = -q/S = const$$
$$j_{см}(t) = \partial D/\partial t = 0.$$

2) Закон изменения заряда на пластинах конденсатора:

$$q(t) = q_0 d/r(t),$$

где r(t) – закон изменения расстояния между пластинами:

$$r(t) = d + vt$$

Начальный заряд на пластинах конденсатора

$$q_0 = C\cdot\Delta U,$$

где C – начальная емкость конденсатора:

$$C = \varepsilon_0 S/d.$$

Отсюда

$$q_0 = \varepsilon_0 S\cdot\Delta U/d,$$
$$q(t) = \frac{\varepsilon_0 S\Delta U}{d+vt};$$
$$D(t) = -\frac{\varepsilon_0\Delta U}{d+vt};$$
$$j_{см}(t) = \frac{\varepsilon_0\Delta U\cdot v}{(d+vt)^2}.$$

Ответ: 1) $j_{см}(t) = 0$; ***2)*** $j_{см}(t) = \frac{\varepsilon_0\Delta U\cdot v}{(d+vt)^2}$.

4. **(8.39)** Волновое уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с относительной магнитной проницаемостью μ = 1, имеет вид (в системе СИ): $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 10^{-16}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$. Найти относительную диэлектрическую постоянную среды ε.

Дано:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 10^{-16}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

ε - ?

Решение:

В случае плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Ox волновое уравнение для E имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

По условию задачи имеем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 10^{-16}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

откуда

$$\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu = 10^{-16}$$

и

$$\varepsilon = \frac{10^{-16}}{\varepsilon_0\mu_0\mu}.$$

Учитывая, что $\mu = 1$ и $1/(\varepsilon_0\mu_0) = c^2 = 9\cdot10^{16}$, имеем

$$\varepsilon = 9\cdot10^{16}\cdot10^{-16} = 9.$$

Ответ: $\varepsilon = 9$.

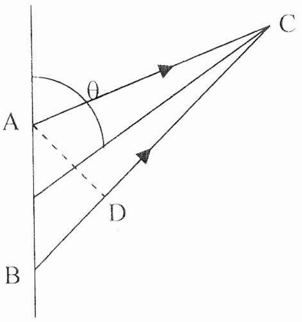
5. **(1.6)** Система состоит из двух одинаковых точечных источников когерентных волн. Расстояние между источниками $d = \lambda/2$. Источники колеблются синфазно. Под какими углами θ интенсивность излучения системы будет составлять половину максимальной интенсивности? Углы отсчитываются от линии, соединяющей источники. Расстояние от источников до точек наблюдения значительно больше λ.

Дано:

$d = \lambda/2$

θ - ?

Решение:



Когда расстояние от источников до точки наблюдения значительно превышает расстояние между источниками (AC, BC >> d), лучи AC и BD оказываются практически параллельными.

Тогда разность хода интерферирующих лучей

$$BC - AC = BD = d\cdot\cos\theta.$$

В точке наблюдения волна от источника B отстает по фазе на величину

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = (\alpha_1 - \alpha_2) + 2\pi d\cdot\cos\theta/\lambda.$$

Источники колеблются синфазно, следовательно,

$$\alpha_2 = \alpha_1.$$

Учитывая, что $d = \lambda/2$, имеем

$$\Delta\varphi = \pi\cdot\cos\theta.$$

Результирующая интенсивность двух интерферирующих лучей определяется как

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi.$$

Для одинаковых источников $I_1 = I_2 = I_0$

$$I = 2I_0(1+\cos\Delta\varphi)$$

Интенсивность будет максимальной при $\cos\Delta\varphi = 1$, т.е.

$$I_{max} = 4I_0$$

По условию задачи $I = ½I_{max}$, откуда

$$2I_0 = 2I_0(1+\cos\Delta\varphi)$$

$$\cos\Delta\varphi = 0$$

$$\Delta\varphi = \pi/2$$

$$\pi\cdot\cos\theta = \pi/2$$

$$\cos\theta = ½$$

$$\theta = 60°;\ \ \theta = 120°.$$

Ответ: $\theta = 60°$; $\theta = 120°$.

6. **(1.14)** В опыте Юнга расстояние между щелями равно d = 2,5 мм, расстояние до экрана равно l = 100 см. На какое расстояние и в какую сторону сместятся интерференционные полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой толщиной h = 10 мкм. Показатель преломления стекла n = 1,5.

Дано:

$d = 2{,}5$ мм $= 2{,}5\cdot10^{-3}$ м

$l = 100$ см $= 1$ м

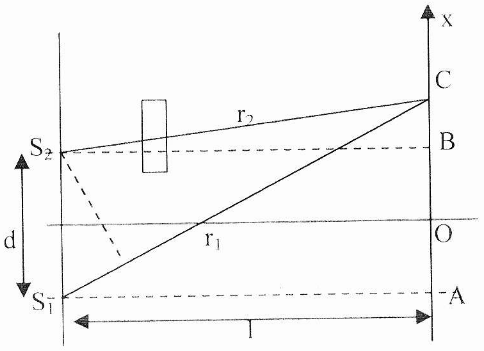
$h = 10$ мкм $= 10\cdot10^{-6}$ м

$\lambda = 600$ нм $= 6\cdot10^{-7}$ м

$n = 1{,}5$

Δx - ?

Решение:



При отсутствии пластинки нулевая полоса располагается в точке x = 0, m-я полоса в точке A, для которой

$$r_1 - r_2 = m\lambda$$

При установке пластики нулевая полоса переместилась в точку A; следовательно, для этой точки $l_{1опт} = l_{2опт}$.

Для первого луча

$$l_{1опт} = r_1.$$

Второй луч прошел путь h в стекле и путь $(r_2 - h)$ в воздухе. Следовательно,

$$l_{2опт} = nh + r_2 - h = r_2 + h(n-1).$$

Получаем

$$r_1 = r_2 + h(n-1),$$

т.е.

$$r_1 - r_2 = h(n-1) = m\lambda.$$

Отсюда

$$m = h\cdot(n-1)/\lambda$$

Ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x' = l\cdot\lambda/d.$$

Расстояние, на которое сместятся полосы

$$\Delta x = \Delta x'\cdot m$$

$$\Delta x = lh\cdot(n-1)/d$$

$$\Delta x = 1\cdot10\cdot10^{-6}\cdot(1{,}5-1)/(2{,}5\cdot10^{-3}) = 2\cdot10^{-3}\text{ м} = 2\text{ мм}.$$

Ответ: $\Delta x = 2$ мм.

7. **(1.49)** Две плоскопараллельные стеклянные пластинки приложены друг к другу так, что между ними образовался воздушный клин с углом при вершине α = 30″. На одну из пластинок падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ = 0,6 мкм. На каком расстоянии l_2 от линии соприкосновения пластинок в отраженном свете наблюдается вторая светлая полоса?

Дано:

$\alpha = 30'' = 1{,}5\cdot10^{-4}$ рад
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 0{,}6\cdot10^{-6}$ м
l_2 - ?

Решение:

Свет падает на клин параллельным пучком. Интерферируют лучи, отраженные от верхней и нижней поверхностей клина. Оптическая разность хода этих лучей определяется соотношением

$$\Delta = 2d\cdot n\cdot\cos\beta + \lambda/2.$$

Здесь d – толщина воздуха в месте падения луча, для воздуха n = 1.

Свет падает по нормали к поверхности, $\cos\beta = 1$,

$$\Delta = 2d + \lambda/2.$$

Запишем условие второй светлой полосы:

$$2\cdot d_2 + \lambda/2 = 2\lambda$$

или

$$d_2 = 3\lambda/4.$$

При малом угле клина

$$d_2 = l_2\cdot\alpha.$$

Получаем

$$l_2 = d_2/\alpha,$$

$$l_2 = 3\lambda/(4\alpha).$$

$$l_2 = 3\cdot0{,}6\cdot10^{-6}/(4\cdot1{,}5\cdot10^{-4}) = 3\cdot10^{-3}\text{ м} = 3\text{ мм}.$$

Ответ: l_2 = 3 мм.

8. **(2.3)** На непрозрачную преграду с отверстием радиуса r = 1,00 мм падает монохроматическая плоская световая волна. Когда расстояние от преграды до установленного за ней экрана равно b_1 = 0,575 м, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интенсивности. При увеличении расстояния до значения b_2 = 0,862 м, максимум интенсивности сменяется минимумом. Определить длину волны λ света.

Дано:
r = 1 мм = 10^{-3} м
b_1 = 0,575 м
b_2 = 0,862 м
λ - ?

Решение:

В случае плоской волны, падающей на диафрагму, радиус m-ой зоны Френеля равен

$$r_m = \sqrt{\lambda b m}$$

Для центрального минимума запишем

$$r = \sqrt{\lambda b_2 m}$$

Для центрального максимума запишем

$$r = \sqrt{\lambda b_1 (m+1)}$$

Отсюда имеем

$$r^2 = \lambda b_2 m$$

$$r^2 = \lambda b_1 (m+1)$$

$$m + 1 = \frac{r^2}{\lambda b_1} \qquad m = \frac{r^2}{\lambda b_2}$$

$$m + 1 - m = \frac{r^2}{\lambda b_1} - \frac{r^2}{\lambda b_2}$$

$$1 = \frac{r^2}{\lambda}\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right)$$

Тогда длина волны

$$\lambda = r^2\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right).$$

Подставляя численные значения, находим:

$$\lambda = 10^{-6}\cdot\left(\frac{1}{0{,}575} - \frac{1}{0{,}862}\right) = 0{,}58\cdot10^{-6}\text{ м} = 580\text{ нм}.$$

Ответ: λ = 580 нм.

9. **(2.38г)** Построить примерный график зависимости интенсивности I от $\sin\varphi$ в случае нормального падения света на дифракционную решетку с числом штрихов N = 5 и отношением периода решетки d к ширине щели b, равным d/b = 3. Ширина щели много больше длины волны λ падающего света.

Дано:
N = 5
d/b = 3
$I(\sin\varphi)$ - ?

Решение:

Распределение интенсивности при дифракции на решетке

$$I = I_0\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi}\right]^2\left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi\right)}\right]^2.$$

График функции симметричен относительно вертикальной оси. При углах дифракции, удовлетворяющих соотношению

$$b\cdot\sin\varphi = m\lambda,\ m = \pm1, \pm2, \ldots$$

$$b = d/3$$

$$\sin\varphi = 3m\lambda/d,\ m = \pm1, \pm2, \ldots$$

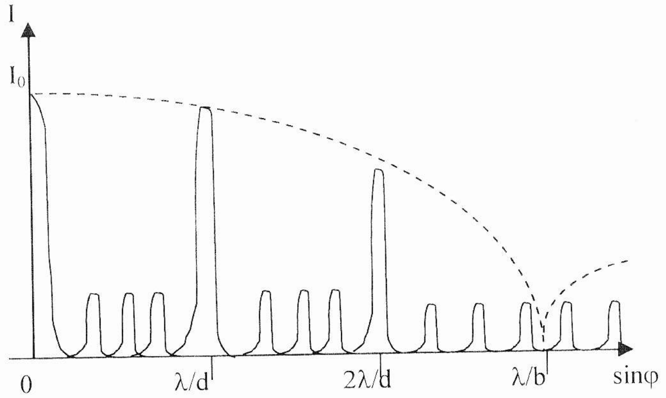
амплитуда от каждой щели равна нулю. Под этими углами будут минимумы интенсивности и при дифракции на решетке.

Условие главных максимумов

$$d\cdot\sin\varphi = m\lambda,\ m = \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\sin\varphi = m\lambda/d,\ m = \pm1, \pm2, \ldots$$

Учитывая, что между двумя соседними главными максимумами расположено N – 1 добавочных минимума и N – 2 добавочных максимума, построим примерный график зависимости:



10. **(3.1в)** Какой характер поляризации имеет плоская электромагнитная волна, проекции вектора **E** которой на оси x и y, перпендикулярные к направлению ее распространения, определяются следующими уравнениями: $E_x = E\cdot\cos(\omega t - zk)$, $E_y = E\cdot\cos(\omega t - kz + \pi)$.

Дано:
$E_x = E\cdot\cos(\omega t - zk)$
$E_y = E\cdot\cos(\omega t - kz + \pi)$

Решение:

Так как

$$E_x = E\cdot\cos(\omega t - zk),$$

$$E_y = E\cdot\cos(\omega t - kz + \pi) = -E\cdot\cos(\omega t - kz),$$

то

$$E_y = -E_x.$$

Результирующее колебание совершается в фиксированном направлении (вдоль прямой y = -x) – волна плоскополяризованная.

11. (3.74а) Пластинка кварца толщиной $d_1 = 1$ мм, вырезанная перпендикулярно к оптической оси, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 20°$. Определить какова должна быть толщина d_2 кварцевой пластинки, помещенной между двумя «параллельными» николями, чтобы свет был полностью погашен.

Дано:

$\varphi_1 = 20°$

$d_1 = 1$ мм $= 10^{-3}$ м

d_2 - ?

Решение:

При прохождении через кварцевую пластинку плоскость поляризации луча поворачивается на угол, равный

$$\varphi_1 = \alpha d_0,$$

Откуда постоянная вращения кварца

$$\alpha = \beta/d_0.$$

Свет будет полностью погашен, когда угол поворота составит $\varphi = 90°$.

Имеем

$$\varphi = \alpha d_2$$

$$\varphi = \varphi_1 d_2/d_1$$

$$d_2 = \varphi d_1/\varphi_1$$

$$d_2 = 90\cdot 10^{-3}/20 = 4{,}5\cdot 10^{-3} \text{ м} = 4{,}5 \text{ мм}.$$

Ответ: $d_2 = 4{,}5$ мм.

8.2 6) Плоский конденсатор образован двумя дисками радиуса R, между которыми находится однородная среда с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между обкладками d. Конденсатор подключен к источнику с напряжением $U = U_0\cos\omega t$. Найти плотность тока смещения и циркуляцию вектора H по окружности радиуса $r = R/2$. (Центр окружности расположен на оси диска).

Дано:

R, ε, d

$U = U_0\cos\omega t$

$r = R/2$

$j_{см}$ - ?, $\oint\limits_l \vec{H}\,\vec{dl}$ - ?

Решение:

Плотность тока смещения в конденсаторе

$$j_{см} = \partial D/\partial t,$$

где D – вектор электрического смещения

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E.$$

Напряженность электрического поля

$$E = U/d = U_0\cos\omega t/d.$$

Тогда

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 U_0\cos\omega t/d$$

$$j_{см} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 \omega U_0}{d} \sin \omega t .$$

Воспользуемся вторым уравнением Максвелла для циркуляции вектора напряженности магнитного поля, учитывая, что токи проводимости отсутствуют:

$$\oint_l \vec{H}\,\vec{dl} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} .$$

Интеграл в правой части уравнения будем вычислять в предположении, что поле E вне конденсатора пренебрежимо мало. Тогда при r < R:

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS = \frac{\partial D}{\partial t} \int_S dS = \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \pi r^2$$

$$\oint_l \vec{H}\,\vec{dl} = \varepsilon\varepsilon_0 \omega \pi r^2 \cdot U_0 \sin\omega t/d$$

При r = R/2, имеем:

$$\oint_l \vec{H}\,\vec{dl} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \omega \pi R^2 U_0}{4d} \sin \omega t .$$

Ответ: $j_{см} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 \omega U_0}{d} \sin \omega t$;

$$\oint_l \vec{H}\,\vec{dl} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \omega \pi R^2 U_0}{4d} \sin \omega t .$$