Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 14. Структурная устойчивость систем. Методы исследования векторных полей. Периодические траектории динамических систем.

Понятие структурной устойчивости систем. Методы исследования векторных полей. Метод фазовой плоскости. Периодические траектории динамических систем. Орбитальная устойчивость. Условия существования предельных циклов для плоских векторных полей. Устойчивость траекторий периодических систем. Отображение Пуанкаре для автономных систем. Диаграмма Ламерея.

Понятие структурной устойчивости систем

В рамках настоящего курса уже рассматривалось понятие «грубой» или «робастной» системы для линейных (линеаризованных) моделей динамических систем.

Рассмотрим более подробно данное понятие для потоков, порождаемых стационарным векторным полем $F \in C^r(R^n), r \geq 1$. Пусть на поле F действует некоторое возмущение G.

Назовем G возмущением класса C^k и величины $\varepsilon > 0$, если существует такое компактное множество $\mathrm{B} \subset R^n$, что $F = G$ на множестве $R^n - \mathrm{B}$ и для всех таких $(i_1, i_2, ..., i_n)$, для которых $i_1 + i_2 + ... + i_n = i \leq k$ выполнено неравенство $\left| \dfrac{\partial^i}{\partial x_1^{i1} .. \partial x_n^{in}} (F - G) \right| < \varepsilon$.

Определение */Гукенхеймер с63/. Два векторных поля F, G класса C^r называются C^k - эквивалентными ($k \leq r$), если существует C^k - диффеоморфизм h, переводящий траектории $\varphi^F(t)$ поля F в траектории $\varphi^G(t)$ поля G и сохраняющий их ориентацию, но не обязательно сохраняющий параметризацию во времени.*

C^0 - эквивалентность называется также топологической эквивалентность.

Одной из причин несохранения, в общем случае, временной параметризации является то, что периоды замкнутых орбит двух потоков могут различаться.

Определение. *Поток $\varphi^F \in C^r(R^n)$ называется структурно устойчивым, если существует такое $\varepsilon > 0$, что любое возмущение потока φ^F (соответственно поля F) класса C^1 и величины ε топологически эквивалентно φ^F.*

Заметим, что гомеоморфная эквивалентность не делает различий между узлами и фокусами. Однако, с точки зрения C^0 - эквивалентности стоки, седла и источники различаются.

Пример. Рассмотрим двумерную систему $\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2 \end{cases}$ и измененную систему $\begin{cases} \dot{x}_1 = \tilde{P}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \tilde{Q}(x_1, x_2 \end{cases}$.

Тогда исходная динамическая система будет грубой в некоторой замкнутой области G, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всевозможных измененных систем, правые части которых $\tilde{P}, \tilde{Q}$ удовлетворяют в области G условиям $|\tilde{P}(x_1, x_2) - P(x_1, x_2)| < \delta$; $|\tilde{Q}(x_1, x_2) - Q(x_1, x_2)| < \delta$; $|\tilde{P}_x^{'}(x_1, x_2) - P_x^{'}(x_1, x_2)| < \delta$; $|\tilde{Q}_x^{'}(x_1, x_2) - Q_x^{'}(x_1, x_2)| < \delta$; $|\tilde{P}_y^{'}(x_1, x_2) - P_y^{'}(x_1, x_2)| < \delta$; $|\tilde{Q}_y^{'}(x_1, x_2) - Q_y^{'}(x_1, x_2)| < \delta$, существует топологическое отображение области G в себя, при котором каждая траектория исходной системы отображается в траекторию измененной системы. При этом соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем $\varepsilon > 0$.

Очевидно, векторное поле, имеющее негиперболическую неподвижную точку, не может быть структурно устойчивым, так как малое возмущение может привести к исчезновению такой точки или к превращению ее в гиперболический сток, седло или источник. Отсюда вытекает важное требование к структурно устойчивым потокам или отображениям: все неподвижные точки и замкнутые орбиты должны быть гиперболическими.

Теорема */Баутин с141/. Если двумерная система является грубой в замкнутой области G, то в G у нее может существовать только конечное число состояний равновесия.*

Можно показать, что в грубых системах не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло.

Следует также отметить, что поведение структурно устойчивых систем для потоков размерности три и более (или для диффеоморфизмов два и более) может быть предельно сложным. Поэтому для таких систем структурная устойчивость не является даже типичным свойством и не дает гарантий сохранения класса топологической эквивалентности.

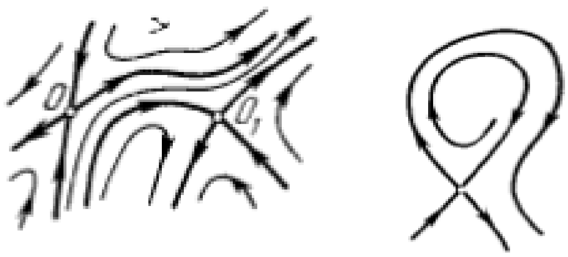
Для двумерных потоков понятие структурной устойчивости является типичным свойством и можно четко определить условия, когда оно имеет место.

Теорема. О структурной устойчивости двумерных потоков. (Пейксото) */Гукенхеймер с 89/.*
Векторное поле класса C^r на компактном двумерном многообразии M^2 структурно устойчиво тогда и только тогда, когда:

1. *Число неподвижных точек и замкнутых орбит конечно и все они гиперболичны;*
2. *Не существует орбит, соединяющих седловые точки;*
3. *Неблуждающее множество состоит лишь из неподвижных точек и периодических орбит.*

Кроме того, если M^2 ориентировано, то множество структурно устойчивых векторных полей плотно в $\mathrm{X}^r(M^2)$.

Таким образом, можно оперировать полями на плоскости при условии, что существует компакт (ограниченная односвязная область) $D \subset R^2$ такой, что на границе D поток направлен внутрь (или наружу). Из теоремы также следует, что типичное двумерное векторное поле будет содержать стоки, седла, источники, а также притягивающие и отталкивающие орбиты в качестве инвариантных множеств.



Принимая во внимание теорему Пейксото, Смейл предложил изучать динамические системы на компактных n-многообразиях, удовлетворяющих условиям (1) и (3) теоремы с подходящей модификацией условия (2) («желаемые» динамические системы). Такие системы теперь называют системами Морса-Смейла.

Определение. *Система Морса-Смейла определяется следующими свойствами:*

1. *Число неподвижных точек и периодических орбит конечно и все они гиперболичны;*
2. *Все устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально;*
3. *Неблуждающее множество состоит только из неподвижных точек и периодических орбит*

В теореме подразумевается, что в трансверсальное пересечение включается и пустое множество, так как очевидно, что если два многообразия не пересекаются, то никакое малое возмущение не приведет к их пересечению.

Проведенные исследования показали, что системы Морса-Смейла являются структурно-устойчивыми (обратное неверно).

Методы исследования векторных полей.

Как уже неоднократно отмечалось, подавляющее большинство нелинейных динамических систем имеют неинтегрируемые математические модели. Использование различных вычислительных алгоритмов для их решения также встречает большие трудности, так как приходится интерпретировать поведение большого количества траекторий (решений) с различными начальными данными в многомерном пространстве. Выделить из такого массива данных области расположения предельных циклов и других инвариантных множеств является далеко нетривиальной задачей. Поэтому, предварительно исследуют такие системы путем качественного анализа, с помощью проекций потока траекторий и соответствующего векторного поля на поверхности меньшей размерности.

Наиболее известным способом является метод фазовой плоскости, когда исследуют поток и векторное поле с помощью проекции на двумерную плоскость.

Метод фазовой плоскости

До сих пор, при построении фазовых портретов, рассматривалось обычно сужения полных, или глобальных фазовых портретов на некоторую окрестность исследуемой точки. Однако, нелинейные системы могут иметь более одной неподвижной точки, а также другие инвариантные множества. Поэтому множество локальных фазовых портретов не всегда определяет глобальный фазовый портрет и для его построения приходится использовать целый ряд дополнительных приемов.

Первые интегралы.

Определение. *Непрерывно дифференцируемая функция* $J: D(R^2) \to R$ *называется первым интегралом системы* $\dot{x} = F(x), F = (f_1, f_2), x \in D \subseteq R^2$ *, если функция* $J(x(t))$ *постоянна на любом решении* $x(t)$ *системы.*

Так как предполагается, что $J(x(t)) = C = const$, то можно записать следующее соотношение: $\frac{d}{dt}J(x(t)) = 0 = \dot{x}_1 J'_{x_1} + x_2 J'_{x_2} = f_1(x_1, x_2) J'_{x_1} + f_2(x_1, x_2) J'_{x_2}$. Первые интегралы полезны в силу соотношения, которое существует между их линиями уровня траекториями системы.

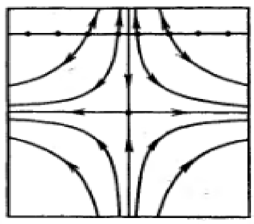
Действительно, рассмотрим линию уровня $L_C = \{x \mid J(x) = C\}$. Пусть точка $x_0 \in L_C$, $x(t)$ - траектория, проходящая через точку x_0 . Тогда получим, что $J(x(t)) = J(x_0) = C$. Следовательно, траектория, проходящая через точку x_0 , будет лежать на линии уровня L_C . Таким образом, каждая линия уровня есть объединение траекторий. В силу теоремы единственности решений, такое объединение будет состоять из непересекающихся множеств.

Первый интеграл называется так потому, что обычно он получается путем однократного интегрирования дифференциального уравнения $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$. Чтобы исключить нули функции

$f_1(x_1, x_2)$ из рассмотрения, обычно первый интеграл находят из решения следующего уравнения $f_1(x_1, x_2)J'_{x_1} + f_2(x_1, x_2)J'_{x_2} = 0$.

Определение. *Если система имеет первый интеграл на всей плоскости R^2, то она называется консервативной.*

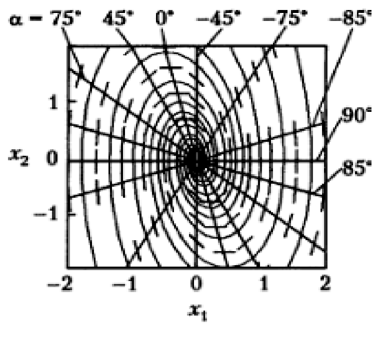
Пример. Пусть система описывается уравнениями $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_2)$, $\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_2)$. Первый интеграл равен $J(x(t)) = x_1 x_2$. Линии уровня функции $J(x(t))$ являются гиперболами, которые могут быть ориентированы в силу того, что направления на координатных осях векторного поля известно. Система имеет неподвижные точки в начале координат и всюду на прямой $x_2 = 1$.



Метод изоклин.

Исключая явную зависимость от времени из уравнения $\dot{x} = F(x), F = (f_1, f_2), x \in D \subseteq R^2$ рассмотрим систему первого порядка $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$. Временно пренебрегая возможной неопределенность на кривой $f_1(x_1, x_2)$, построим кривые $x_2 = h(x_1)$, на которых угловой коэффициент векторного поля постоянен $\dfrac{dx_2}{dx_1} = C$. Такие задаются уравнением $f_2(x_1, x_2) = C f_1(x_1, x_2)$ и называются изоклинами. После нахождения формулы кривых (изоклин) для различных значений С их наносят выбранную область. Затем, на каждой изоклине строятся отрезки прямых с соответствующим углом наклона $arctg(C)$. Если построить достаточно плотное множество изоклин, то можно изобразить поток с нужной точностью.

Пример. Рассмотрим систему $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2$. Уравнения изоклин (кроме угла наклона $arctg(C) = \pi / 2$) имеет вид $a_1 x_1 + (C + a_2) x_2 = 0$. Для угла наклона $arctg(C) = \pi / 2$ уравнение имеет вид $x_2 = 0$.

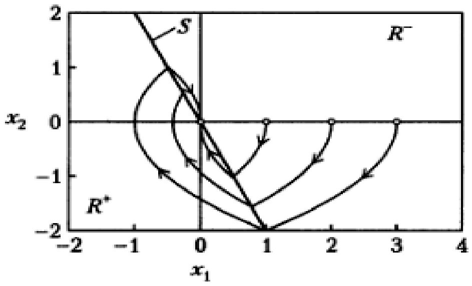


Метод припасовывания.

Для ряда нелинейных систем с кусочно-постоянными параметрами удается построить решения на отдельных участках траекторий. Для таких систем при построении фазового портрета может быть использован метод припасовывания, который предусматривает замену первоначальной нелинейной системы более простой моделью с переменной структурой – линейной моделью с переключающимися параметрами. Данный метод состоит из следующих этапов:

- Представления нелинейной системы в виде набора линейных моделей, соответствующих линейным участкам системы;
- Разбиения фазового портрета на области, в которых система описывается линейными уравнениями;
- Последовательное получение участков фазовых траекторий указанного набора линейных подсистем и их объединение в единую траекторию («припасовывание»).

Пример. Рассмотрим релейную систему, которая описывается следующими уравнениями: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u = sign(v)$, $v = -a_1x_1 - a_2x_2$. На интервалах ($R^+ : v = -a_1x_1 - a_2x_2 > 0$, $R^- : v = -a_1x_1 - a_2x_2 < 0$), где знак значения v постоянен, система будет линейна. Изменение знака происходит при $v = 0$, то есть на прямой $S = a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, которая называется линией переключения.

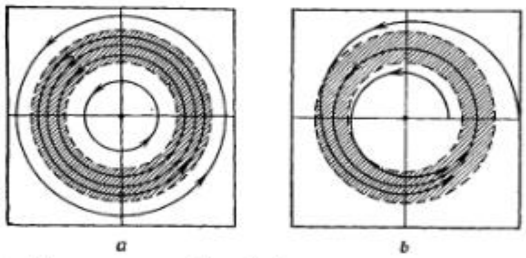


<u>Периодические траектории динамических систем.</u>

Рассмотрим автономную динамическую систему, которая описывается дифференциальным уравнением вида: $\dot{x} = F(x), x \in R^n, F \in C^r, r \geq 1$. Будем полагать, что система допускает периодические траектории. То есть существует такое решение $x = \varphi(t)$, что для некоторого значения $T \neq 0$ будет выполняться $\varphi(t) = \varphi(t+T)$. Очевидно, что $\varphi(t) \in C^{r+1}$. В фазовом пространстве периодическое движение ассоциируется с гладкой замкнутой кривой, называемой <u>предельным циклом (периодической траекторией или периодической орбитой</u>).

Важность исследования предельных циклов обусловлена тем, что устойчивая периодическая траектория представляет собой математический образ такого физического явления, как автоколебания. Кроме того, периодические траектории седлового типа (гетероклинические траектории) являются ключевыми элементами странных аттракторов, с которыми связан динамический хаос. Следует отметить, что нахождение периодических движений в фазовом пространстве, особенно в пространстве систем большой размерности, представляет собой достаточно сложную задачу. Например, оценка количества периодических траекторий, в общем случае, для системы на плоскости является предметом 16-й проблемы Гильберта, которая до сих пор не решена. Исключением являются системы с полиномиальной правой частью, а также близкие к интегрируемым двумерные системы. Для таких систем задача нахождения периодических траекторий сводится к задаче нахождения нулей некоторых специальных интегралов.

Определение */Эрроусмит с109/. Замкнутая траектория L в фазовом пространстве динамической системы $\dot{x} = F(x)$ называется предельным циклом или замкнутой орбитой, если она изолирована от всех замкнутых траекторий или, если существует некоторая трубчатая окрестность C, не содержащая других замкнутых траекторий.*



. Иллюстрация трубчатой (в двумерном случае — кольцевой) окрестности (заштрихована). Заметим, что для центра, изображенного на рис. (*a*), замкнутые орбиты не изолированы. Но на рис. (*b*) предельный цикл является единственной замкнутой орбитой, заключенной в трубчатой окрестности.

Существует три типа предельных циклов:

- Устойчивый предельный цикл, или аттрактор, где траектории навиваются на предельный цикл с обеих сторон при $t \to \infty$;
- Неустойчивый (отталкивающий) предельный цикл, или репеллер, где траектории – спирали, удаляющиеся от предельного цикла с обеих сторон при $t \to \infty$;
- Полуустойчивый предельный цикл, где траектории с одной стороны навиваются на замкнутую траекторию и удаляются от нее с другой стороны.

Орбитальная устойчивость.

Обозначим через $\rho(K,x) = \inf\limits_{z\in K} \| z - x \|$ расстояние от точки x до множества K. Здесь $\| . \|$ - евклидова норма в R^n, $K(\varepsilon)$ - множество всех точек, для которых $\rho(K,x) < \varepsilon$. Положительную полутраекторию фазового потока, порождаемого векторным полем F и проходящую через точку x_0, будем обозначать через $L^+(x_0) = \{x(t,x_0) \mid t \in [0,\infty)\}$.

Определение */Леонов Хаот динамика с26/. Траектория $x(t,x_0)$ динамической системы называется устойчивой по Пуанкаре или орбитально устойчивой, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y_0, удовлетворяющих неравенству $\| x_0 - y_0 \| \le \delta(\varepsilon)$, выполнено соотношение $\rho(L^+(x_0), x(t,x_0)) \le \varepsilon, \forall t \ge 0$.*

Если, кроме того, для некоторого числа $\delta_0 > 0$ и всех y_0, удовлетворяющих неравенству $\| x_0 - y_0 \| \le \delta_0$, выполнено соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(L^+(x_0), x(t,x_0)) = 0$, то говорят, что траектория $x(t,x_0)$ асимптотически устойчива по Пуанкаре или асимптотически орбитально устойчива.

Напомним определение устойчивости по Ляпунову решения $x(t)$ системы $\dot{x} = F(x)$.

Определение. *Решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, называется устойчивым по Ляпунову, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \ge 0$ существует число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что:*

- *Все решения $y(t)$, $y(t_0) = y_0$, удовлетворяющие условию $\| x_0 - y_0 \| \le \delta$, определены при $t \ge t_0$;*
- *Для этих решений справедливо неравенство $\| x(t) - y(t) \| \le \varepsilon, \forall t \ge t_0$.*

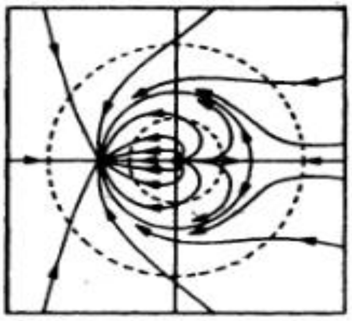
Если $\delta(\varepsilon, t_0)$ не зависит от t_0, то устойчивость по Ляпунову называется равномерной.

Лемма. *Для непрерывных динамических систем из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Пуанкаре. Для состояний равновесия понятия устойчивости по Ляпунову и Пуанкаре эквивалентны.*

Наиболее известным примером периодических решений непрерывных систем, которые неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуанкаре, является следующая двумерная система (уравнение Дуффинга): $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -x - x^3$.

<u>Условия существования предельных циклов для плоских векторных полей.</u>

Для наличия устойчивого предельного цикла или периодической орбиты в двумерном потоке необходимо, чтобы существовала трубчатая окрестность (в двумерном случае – кольцо) такое, что все траектории, пересекающие ее границу, стремились к предельному циклу при $t \to \infty$. Предположим, что на фазовой плоскости имеется кольцевая область, обладающая следующим свойством: все траектории, пересекающие границу, входят в эту окрестность. Достаточно ли этого, чтобы в этом кольце существовал предельный цикл? Приведенный ниже фазовый портрет показывает – что не достаточно. В случае, когда имеются седло и узел, может возникнуть фазовый портрет с указанными свойствами, но без предельного цикла.



Фазовый портрет системы $\dot{r} = r(1-r)$, $\dot{\theta} = \sin\theta$.

Теорема (Пуанкаре-Бендиксона) */Гукенхеймер с69/. Всякое непустое компактное ω – или α - предельное множество плоского потока, не содержащее неподвижных точек, является замкнутой орбитой.*

То есть, если на плоскости для двумерного потока на плоскости существует некоторое ограниченное инвариантное множество D, такое, что траектории потока будут оставаться в нем при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$ и, в котором отсутствуют неподвижные точки, то в нем должен существовать предельный цикл. Другими словами, если на границе области D вектор $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ будет направлен внутрь этой области, окружающей единственную особую точку типа неустойчивого «фокуса» или «узла» (но не «седло»), то любая фазовая траектория не может со временем, с одной стороны, стремиться к особой точке, и, с другой стороны, не может выйти за границы замкнутой поверхности.

Теорема (Критерий Бендиксона). *Пусть в некоторой односвязной области $D \subset R^2$ задано векторное поле $F = \{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\}$, и, выражение $div\{F\} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$ не равно нулю тождественно и не изменяет знака. Тогда система $\dot{x} = F(x)$ не имеет замкнутых траекторий (орбит), целиком лежащих в D.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Стокса (Грина) на плоскости . В соответствии с известным утверждением, если действительные функции $P(x_1, x_2)$ и $Q(x_1, x_2)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой односвязной области S плоскости (x_1, x_2), ограниченной простой замкнутой кривой γ, то будет справедливо равенство: $\iint\limits_S (\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 = \oint\limits_\gamma (P dx_1 + Q dx_2)$. Предположим, что для рассматриваемой системы $\dot{x} = F(x)$ существует предельный цикл C с периодом T. Положим $P = -f_2$ и $Q = f_1$. Тогда можно записать следующее соотношение: $\oint\limits_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \int\limits_0^T (f_1 \dot{x}_2 - f_2 \dot{x}_1) dt = 0$. Это следует из того, что предельный цикл С является интегральной кривой уравнения $\dot{x} = F(x)$. С другой стороны, в соответствии с теоремой Грина имеет следующее выражение: $\oint\limits_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint\limits_S (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 \neq 0$, которое вытекает из условий теоремы. Показанное противоречие доказывает теорему.

Обобщением критерия Бендиксона является критерия Дюлака.

Теорема (Критерий Дюлака) */Братусь с185/. Пусть $\mu(x_1, x_2)$ - однозначная дифференцируемая функция, и, пусть выражение: $div\{\mu \cdot F\} = \frac{\partial}{\partial x_1} \mu(x_1, x_2) f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} \mu(x_1, x_2) f_2(x_1, x_2)$ не меняет знака и, не равно нулю тождественно в области $D \subset R^2$. Тогда, если $D \subset R^2$ - односвязная область, то в D не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий, то есть, нет предельных циклов. Если $D \subset R^2$ - двусвязная кольцевая область, то в D не может быть более одного предельного цикла.*

Пример. Покажем, что система «хищник-жертва» Лотки - Вольтерры на плоскости вида $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(d_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(d_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{cases}$ не имеет предельных циклов в первом «положительном» квадранте R_+^2.

Пусть в области R_+^2 нет предельного цикла. Тогда там существует состояния равновесия, а значит определитель $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$. Выберем, в соответствии с критерием Дюлака, следующую функцию $\mu(x_1, x_2) = x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}$.

Тогда $div\{\mu \cdot F\} = \mu(x_1, x_2)[(\alpha a_{11} + \beta a_{21} + a_{11})x_1 + (\alpha a_{12} + \beta a_{22} + a_{22})x_2 + \alpha d_1 + \beta d_2]$. Выберем величины α, β так, чтобы $(\alpha a_{11} + \beta a_{21} + a_{11}) = 0$ и $(\alpha a_{12} + \beta a_{22} + a_{22}) = 0$. Это возможно, так как $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$. Тогда $div\{\mu \cdot F\} = \mu(x_1, x_2)(\alpha d_1 + \beta d_2)$, то есть не меняет своего знака в области R_+^2. Если $(\alpha d_1 + \beta d_2) \equiv 0$, то функция $\mu(x_1, x_2) = x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}$ является интегрирующим множителем и система $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(d_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(d_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{cases}$ имеет первый интеграл. Но тогда замкнутая траектория будет не изолированной.

<u>Устойчивость траекторий периодических систем.</u>

Рассмотрим задачу устойчивости периодической траектории для нестационарного векторного поля, задаваемого уравнением: $\dot{x} = F(x, t)$, где F - периодическая по времени t функция.

Пусть система имеет периодическое решение $x=\varphi(t)$ с периодом T, который либо равен периоду функции $F(x,t)$, либо кратен ему. Обозначим через $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ характеристические показатели вариационного (линеаризованного) уравнений: $\dot{\xi}=F'_x(\varphi(t),t)\xi$.

Теорема (Ляпунов) */Шильников с221/. Пусть $\alpha_i<0, i=1,2,...,n$. Тогда решение $x=\varphi(t)$ является устойчивым. Более того, оно экспоненциально устойчиво, то есть любое решение с начальными условиями, близкими к $\varphi(t_0)$ при $t=t_0$, экспоненциально стремится к $\varphi(t)$ при $t\to\infty$.*

А.М. Ляпунов доказал данную теорему для случая, когда система $\dot{x}=F(x,t)$ имеет аналитическую правую часть. Однако, она справедлива и в случае, когда функция $F(x,t)$ является лишь C^1 - гладкой по x и непрерывной по t. В малой окрестности $x=\varphi(t)$ систему $\dot{x}=F(x,t)$ можно привести к виду $\dot{x}=\Lambda x+G(x,t)$, где Λ - некоторая постоянная матрица, действительные части собственных значений которой, является характеристическими показателями Ляпунова, то есть $\operatorname{Re}\lambda_i=\alpha_i, i=1,2,...,n$. Функция $G(x,t)$ - периодическая по t с периодом T или $2T$. Кроме того, $G(0,t)=G'_x(0,t)=0$.

Рассмотрим теперь автономную динамическую систему следующего вида: $\dot{x}=F(x), x\in R^n, F\in C^r, r\ge 1$, имеющую периодическое решение $x=\varphi(t)$ периода T. Как известно (см.лекция 2 данного курса), один из характеристических показателей линейной системы первого приближения в этом случае должен быть равен нулю. Данный случай, с точки зрения устойчивости по Ляпунову, является критическим. Тем не менее, имеет место следующая теорема.

Теорема (Андронов-Витт). *Если все (n-1) нетривиальных характеристических показателя периодического решения системы $\dot{x}=F(x)$ имеют отрицательные действительные части, то периодическое решение будет устойчивым по Ляпунову.*

Эта теорема позволяет обосновать линеаризацию, но только для очень слабой формы устойчивости. Действительно, даже две любые близкие точки в окрестности периодического решения, не могут асимптотически сближаться, а будут оставаться на конечном расстоянии друг от друга, обусловленным различными начальными фазами движения по замкнутой орбите.

Для оценки орбитальной устойчивости по Пуанкаре периодического решения имеет место следующее утверждение, позволяющее оценивать устойчивость и скорость приближения произвольной траектории к предельному циклу.

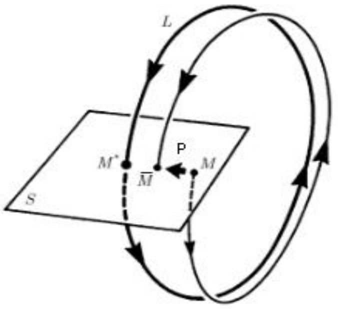
Теорема */Шильников с224/. Если все мультипликаторы периодической траектории L лежат внутри единичной окружности, то L орбитно устойчива при $t\to\infty$ и удовлетворяет следующему неравенству $\rho(L,x(t))\le Ke^{-\lambda t}$, где K и λ - некоторые положительные константы.*

Случай, когда все мультипликаторы периодической траектории L лежат вне единичной окружности, сводится к рассмотренному выше путем обращения времени $t\to -t$. Все траектории в малой окрестности такой неустойчивой периодической траектории с ростом t покидают окрестность. Такие неустойчивые периодические траектории называются <u>вполне неустойчивыми</u> или <u>отталкивающими</u> (репеллерами).

Приведенные утверждения позволяют оценить устойчивость уже найденных периодических решений, но не дают конкретных рекомендаций, как искать такие решения. Поэтому, рассмотрим способ, предложенный Пуанкаре, который в значительной мере помогает поиску периодических решений.

<u>Отображение Пуанкаре для автономных систем.</u>

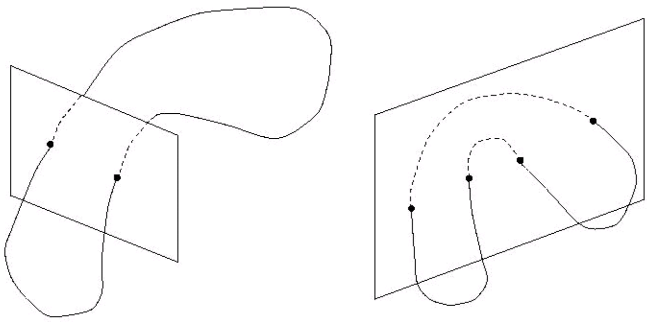
Пусть $x=\varphi^*(t)$ периодическая орбита потока $\Phi \in R^n, \varphi^* \in \Phi$, порождаемого нелинейным векторным полем F. Возьмем некоторое локальное сечение $S \in R^n$ размерности (n-1). Гиперповерхность S не обязательно плоская, но она должна быть выбрана так, чтобы поток в каждой точке был ей <u>трансверсален.</u> Это условие будет достигаться, если $F(x)n(x) \neq 0$ для $\forall x \in S$, где $n(x)$ - вектор единичной нормали к поверхности S в точке x. Обозначим точку, где $\varphi^*(t)$ пересекает S, как M^*, и определим некоторую окрестность $U \subseteq S$ этой точки. Выберем теперь точку $M(x^{(0)}) \in U$. Так как множество траекторий плотно в окрестности периодической орбиты, то из точки $M(x^{(0)})$ будет выходить некоторая траектория $x=\varphi(t, x^{(0)})$. Пусть первый возврат траектории на S произойдет в некоторой точке $\overline{M}(x^{(1)}) \in U$ через некоторый момент времени τ. Заметим, что обычно величина τ зависит от точки $\overline{M}$ и не обязана равняться $T=T(p)$, периоду орбиты $\varphi^*(t)$. Тем не менее, $\tau \to T$ при $\overline{M} \to M^*$. Определим отображение $P: U \to S$, как $P: x^{(k)} = \varphi(t(x^{(k-1)}), x^{(k-1)}) = f(x^{(k-1)})$. Такое отображение носит название «отображения или сечения Пуанкаре». Если $\varphi^*(t)$ устойчивая периодическая орбита, то точка M будет являться неподвижной точкой отображения $P: U \to S$. А устойчивость этой точки будет соответствовать устойчивости предельного цикла $\varphi^*(t)$ для потока $\Phi(t)$.



Секущая S трансверсальна как периодической траектории L, так и траектории, близкой к L

По построению точки $\{M_j\}$, представляют собой образы точки M, полученные под действием отображения Пуанкаре: $M_j = P^j M$. Последовательность $\{M_j\}$ называется траекторией точки M относительно отображения P. Отсюда, в частности следует, что траектория системы $\dot{x} = F(x)$ стремится при $t \to \infty$ к периодической траектории $\varphi^*(t)$ тогда и только тогда, когда при $j \to \infty$ соответствующая траектория отображения P на S будет стремиться к неподвижной точке M^*. Момент пересечения траекторией секущей поверхности – это момент смены знака функции $S(x)$, так как секущая поверхность задается уравнением $S(x)=0$. Предположим, что это произошло между n-ым и (n+1)-ым шагами решения системы $\dot{x} = F(x)$ некоторым численным методом. Так что $S_n(x) = S(x(n*\Delta t)$ и $S_{n+1}(x) = S(x((n+1)*\Delta t)$ имеют противоположный знак. Как теперь уточнить момент пересечения? Решение этой задачи было предложено Эно (Хеноном, Henon) и состоит в следующем /Кузнецов Динам Хаос с94/.

Уравнения системы $\dot{x} = F(x)$ дополняются еще одним соотношением $\frac{d}{dt}S(x) = (\frac{\partial S}{\partial x})^T \frac{dx}{dt}$ или $\frac{d}{dt}S(x) = (\frac{\partial S}{\partial x})^T F(x)$. Введем для удобства следующее обозначение $H(x) = (\frac{\partial S}{\partial x})^T F(x)$. Тогда можно записать следующие уравнения $\frac{dx}{dS} = F(x)H^{-1}(x)$ и $\frac{dt}{dS} = H^{-1}(x)$. Если по этим уравнениям найти решение $S(x) = 0$, то полученные в результате значения x, t дадут значения фазовых координат и времени в момент пересечения траекторией поверхности S. При этом функция $H(x)$ полагается равной 1 до тех пор, пока выполняются стандартные шаги, и переопределяется по приведенным соотношениям, когда возникает необходимость произвести «нестандартный» шаг по S. Однако, следует крайне осторожно определять таким образом период субгармоники. Рассмотрим, например, две замкнутые орбиты различного периода. Учитывая, что почти любое возмущение гиперповерхности сечения Пуанкаре приводит к исчезновению нетрансверсальных пересечений (касаний), будем считать, что любая замкнутая траектория будет пересекать поверхность S (или Σ) четное число раз. Однако, различить, с помощью одного сечения две «близко» лежащие замкнутые траектории представляется весьма непростой задачей.

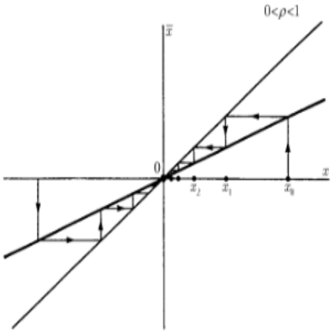


<u>Диаграмма Ламерея.</u>

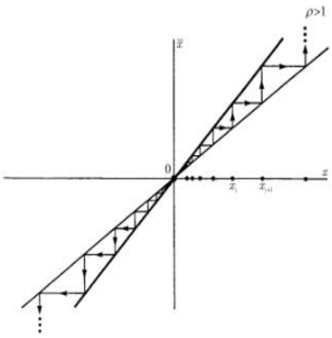
В окрестности неподвижной точки отображение P в координатах, привязанных к неподвижной точке, можно записать в виде: $\bar{x} = Ax + g(x)$, где $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}$ является невырожденной (n-1)*(n-1) матрицей, $g(0) = g'(0) = 0$. Для изучения поведения отображения P часто предварительно исследуют поведение траекторий линеаризованного отображения: $\bar{x} = Ax$. Собственные значения матрицы A играют ключевую роль при определении динамики отображения Пуанкаре вблизи неподвижной точки. Эти собственные значения называют <u>мультипликаторами неподвижной точки</u>.

Рассмотрим простейшее линейное одномерное отображение. Оно имеет вид $\bar{x} = \rho x$. Итерации x_j точки x_0 определяются формулой $x_j = \rho^j x_0$. Очевидно, что при $|\rho| < 1$ получим, что $\lim_{j\to\infty} x_j = 0$. При $|\rho| > 1$ неподвижная точка будет неустойчива.

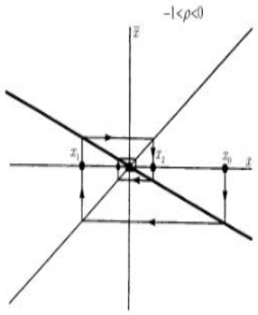
Поведение итераций точек для одномерных отображений удобно интерпретировать с помощью диаграммы Ламерея. Построим, для одномерного отображения $\bar{x} = f(x)$, график функции $f(x)$ и биссектрисы $\bar{x} = x$ на плоскости $(x, \bar{x})$ /Шильников с136/ . Траектории, при этом, представляются в виде ломаных линий: каждая точка с координатами (x_j, x_{j+1}) лежит на графике функции $f(x)$, а каждая точка (x_j, x_j) лежит на биссектрисе $\bar{x} = x$. Каждая точка (x_j, x_j) по вертикали соединяется со следующей точкой (x_j, x_{j+1}), которая, в свою очередь, по горизонтали соединяется со следующей точкой (x_{j+1}, x_{j+1}), и, так далее.



Ступенчатая функция Ламерея. Начало координат является устойчивой неподвижной точкой: все точки в ее окрестности стремятся к точке O



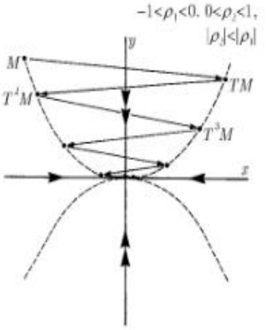
Ступенчатая функция Ламерея. В данном случае начало координат является неустойчивой неподвижной точкой



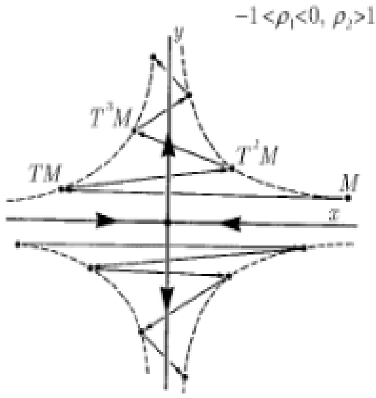
Пример спирали Ламерея; траектория с начальной точкой x_0, имеет вид *прямоугольной спирали, закрученной по часовой стрелке*

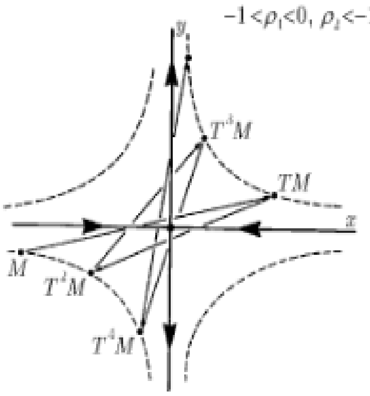
В двумерном случае линейное отображение (сечение) Пуанкаре можно записать в виде: $x_j = \rho_1{}^j x_0$, $y_j = \rho_1{}^j y_0$. В том случае выделяют четыре случая.

1. $|\rho_j| < 1,\ j = 1,2$. Такая неподвижная точка называется устойчивым узлом.
2. $|\rho_j| > 1,\ j = 1,2$. Неподвижная точка называется неустойчивым узлом.
3. $|\rho_1| < 1, |\rho_2| > 1$. Неподвижная точка с такими мультипликаторами называется седлом.
4. $\rho_{1,2} = \rho e^{\pm i\omega}$. При комплексно-сопряженных мультипликаторах неподвижная точка будет фокусом (устойчивым или неустойчивым).



Устойчивый узел (−) с отрицательным ведущим мультипликатором ρ_1. Следовательно, в данном случае координата x меняет знак после каждой итерации

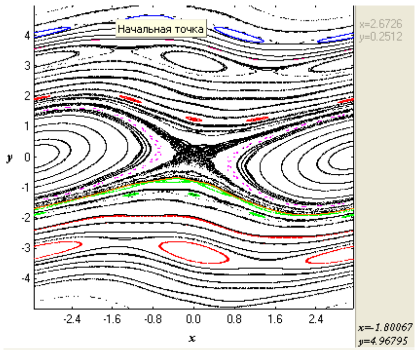




В случае линейного многомерного отображения Пуанкаре, траектория отображения задается формулой $x_j = A^j x_0$. Если все собственные значения матрицы A будут лежать строго внутри единичной окружности, то можно записать следующее соотношение: $\| x_j \| \le \| A \|^j \| x_0 \| \le (\rho+\varepsilon)^j \| x_0 \|$, где ρ - величина, равная максимуму абсолютных величин собственных значений матрицы A. Таким образом, при $j \to \infty$, все траектории отображения Пуанкаре будут экспоненциально стремиться к неподвижной точке в начале координат.

Изучение свойств отображения P позволяет уточнить динамику приближения траекторий системы к периодической траектории L. Однако, такое точечное дискретное преобразование само по себе представляет значительный интерес, так как изучение его свойств позволяет в дальнейшем проводить классификацию поведения траекторий исходной системы не только для замкнутых траекторий..

Пример. Отображение Чирикова /Морозов WinSet с60/. Пусть отображение задается следующими соотношениями: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} = y_n + p_1 \sin x_n \end{cases}$, где $p_1 = 0.7$ Результат работы изображения из заданного начального состояния приведен на рисунке.



Контрольные вопросы к лекции 14.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Гладкая двумерная динамическая система $\dot{x} = F(x)$ является грубой в замкнутой области G, если…	1. … функция удовлетворяет условию Липшица $\lvert F(x_1) - F(x_2)\rvert \le L \lvert x_1 - x_2 \rvert;\quad L < \infty$, для $\forall x_1, x_2 \in G$. 2. .. уравнение $F(x) = 0$ имеет конечное число решений. 3. ..матрица Якоби линеаризованной системы является невырожденной, то есть $\det(\frac{\partial F}{\partial x}) \ne 0$ для $\forall x \in G$.
2	Могут ли в структурно устойчивом потоке на плоскости существовать траектории (сепаратрисы) соединяющие седловые точки?	1. Да, могут. 2. В общем случае нет, за исключением случая, когда они образуют периодические траектории. 3. Нет, не могут.
3	Дает ли свойство структурной устойчивости векторного поля $F(x), x \in R^n; n \ge 3$, гарантию сохранения топологической эквивалентности при возмущениях векторного поля?	1. Да, гарантирует. 2. Нет, не гарантирует. 3. Гарантирует, но только для возмущений вида $\lvert F(x) - \tilde{F}(x)\rvert \le \delta$, где $\tilde{F}$ - возмущенное векторное поле, а величина δ определяется свойствами матрицы $(\frac{\partial F}{\partial x})$
4	Первый интеграл системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dot{x}_1 \end{cases}$ имеет линии уровня в виде …	1. … парабол. 2. … окружностей. 3. … гипербол. 4. … прямых линий, выходящих из точки (0,0).
5	Понятие орбитальной устойчивости, в общем случае, эквивалентно определению устойчивости …	1. … по Ляпунову. 2. … по Пуанкаре. 3. … это отдельное определение устойчивости для замкнутых траекторий.
6	На фазовой плоскости существует кольцевая область, куда входят все траектории пересекающие границу этой области. Будет ли в	1. Да, будет существовать в указанной области при указанных условиях. 2. Нет, не всегда. Но будет существовать при

	этой области существовать предельный цикл?	дополнительном условии, что в указанной области нет точек равновесия системы. 3. Нет, не будет существовать в указанной области, ни при каких дополнительных условиях.
7	Пусть отображение Пуанкаре для системы $\dot{x} = F(x)$ задается секущей поверхностью S, определяемой соотношением $s(x) = 0$. Условия пересечения траекторией системы поверхности S в точке x_0 имеют вид….	1. … $\|(\frac{\partial s}{\partial x})^T x\|_{x=x_0} \neq 0; F(x_0) = 0$. 2. … $\det\{(\frac{\partial F}{\partial x})\|_{x=x_0}\} \neq 0; s(x_0) = 0$. 3. … $\|(\frac{\partial s}{\partial x})^T F(x)\|_{x=x_0} \neq 0; s(x_0) = 0$
8	Пусть функция $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой. Тогда условия сходимости дискретного отображения Пуанкаре $x_{n+1} = f(x_n)$ к неподвижной точке $\bar{x} = f(\bar{x})$ имеют вид …	1. … $\|(\frac{\partial f}{\partial x})\|_{x=\bar{x}} < 1$. 2. … действительные части всех корней характеристического уравнения $\det\{\lambda E - (\frac{\partial f}{\partial x})\|_{x=\bar{x}}\} = 0$ являются отрицательными. 3. … все корни характеристического уравнения $\det\{\lambda E - (\frac{\partial f}{\partial x})\|_{x=\bar{x}}\} = 0$ лежат внутри единичной окружности.