Раздел: «ОТАУ бакалавры. Раздел 2.»

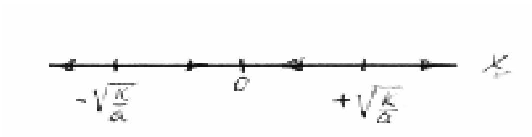
Лекция 7. Метод линеаризации обратной связью по состоянию. Линеаризация обратной связью по выходу. Задачи синтеза управления.

Задача обратной динамики и метод линеаризации обратной связью. Векторные поля на многообразиях. Действие векторного поля на функцию. Производные и ряды Ли. Скобки Ли. Теорема Фробениуса. Линеаризации обратной связью по состоянию (ЛОС). Каноническая форма управления по Бруновскому. Схема линеаризации обратной связью по состоянию. Линеаризация обратной связью в пространстве «вход-выход». Относительный порядок системы. Внешняя и внутренняя динамика. Нуль-динамика. Синтез алгоритмов управления для автономных аффинных систем.

Задача обратной динамики и метод линеаризации обратной связью.

Способы синтеза законов управления, основанные на построении линеаризованных моделях нелинейных систем, позволяют получать только линейные законы управления. В то же время известно, что нелинейные законы управления во многих случаях обеспечивают лучшее качество управления.

Пример /Ким т2 с173/. Пусть задана система $\dot{x} = ax^3 + u, x, u \in R, a > 0$. Заданному стационарному режиму соответствует точка $x = 0$. Линеаризованная модель первого приближения имеет вид $\dot{x} = u$. Сформируем следующий линейный закон управления $u = -kx, k > 0$. Данный закон будет обеспечивать асимптотическую устойчивость линеаризованной модели в целом. Однако исходная нелинейная модель будет устойчива лишь в диапазоне $x \in (-\sqrt{\frac{k}{a}}, \sqrt{\frac{k}{a}})$ (см. рисунок с фазовым портретом).



В подтверждение сказанному, рассмотрим следующую функцию Ляпунова $V(x) = x^2$. Производная $\dot{V}(x)$ в силу уравнения системы имеет вид $V(x) = -2x^2(k - ax^2)$, которая будет отрицательно определена при $x \in (-\sqrt{\frac{k}{a}}, \sqrt{\frac{k}{a}})$. Рассмотрим теперь следующую замену переменных: $x = x, u = -ax^3 + v$. В новых переменных система примет вид $\dot{x} = v$. Очевидно, линейный закон для системы в новых переменных примем в виде $v = -kx, k > 0$. Вернувшись к исходным переменным, получим $u = -ax^3 - kx$. При этом, уравнение замкнутой нелинейной системы имеет вид $\dot{x} = -kx$. То есть, система будет асимптотически устойчива в целом.

Рассмотрим, более подробно второй вариант решения приведенного примера. Предположим, что в качестве системы с желаемой траекторией выбрана система, описываемая уравнением $\dot{x}_g = -kx_g$. Тогда, предполагая, что существует такое управление u, которое обеспечивает такие же траектории в системе $\dot{x} = ax^3 + u, x, u \in R, a > 0$, получим что $u = -ax_g{}^3 - kx_g = -ax^3 - kx$, где $x(t) \equiv x_g(t)$ по предположению. Таким образом, обобщая полученный результат, если имеется нелинейная система вида $\dot{x} = F(x,u), F \in C^1$, $\det(\frac{\partial F}{\partial x}) \neq 0$, $\forall x \in X \subseteq R^n$, и стоит задача поиска управления $u \in \Omega \subseteq R^m$, чтобы динамика проектируемой системы совпадала с динамикой модельной (желаемой) системы сравнения $\dot{x} = (A - K^t B)$, ($\dot{x} = Ax + Bu, u = -K^T x$, $K \in \Sigma \subseteq R^n$) необходимо, чтобы было разрешимо уравнение $F(x,u) = A - K^t B$, относительно $u \in \Omega \subseteq R^m$ для некоторых $K \in \Sigma \subseteq R^n$. Такую задачу часто называют задачей обратной динамики, когда по заданной желаемой (программной) траектории требуется построить необходимое управление для исходной системы. Очевидно, что, довольно часто, решение системы $\dot{x} = (A - K^t B)$ не является решением уравнения $\dot{x} = F(x,u)$ для $\forall K \in \Sigma$. В этом случае, получаемый закон управления не может обеспечить не только совпадения соответствующих решений, но и устойчивости исходной системы.

Пример. Пусть задана система, которая описывается уравнениями: $\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3$, $\dot{x}_2 = u$. Требуется определить закон управления, при котором замкнутая система будет устойчива в целом. Выберем, в качестве системы сравнения, следующую систему: $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2$, которая асимптотически устойчива в целом при $k_1, k_2 > 0$. Тогда, после несложных преобразований, получим, что $u = -x_1(3cx_1 + k_1) - k_2 x_2$. Несложно проверить, что замкнутая исходная система будет асимптотически устойчива в окрестности точки $x_1 = x_2 = 0$. Для проверки асимптотической устойчивости в целом необходимо провести дополнительное исследование, связанное с построением соответствующей функции Ляпунова. Теперь проведем следующее преобразование переменных: $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2 + cx_1^2$, $u = -3cx_1^2(x_2 + cx_1^3) + v$. В новых переменных уравнения объекта примут вид $\dot{z}_1 = z_2$, $\dot{z}_2 = v$. Приняв закон управления $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2, k_1, k_2 > 0$ для замкнутой системы, получим $\dot{z}_1 = z_2$, $\dot{z}_2 = -k_1 z_1 - k_2 z_2$. Данная замкнутая система асимптотически устойчиво в целом. Так как преобразование переменных является диффеоморфизмом, то фазовый поток преобразованной системы будет топологически эквивалентен фазовому потоку исходной системы. То есть, и исходная система, после соответствующего преобразования координат, будет асимптотически устойчива в целом. Несложно получить, что уравнения замкнутой системы в исходных переменных имеют вид:
$\dot{x}_1 = cx_1^3 + x_2, \dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - 3cx_1^2 x_2 - 3c^2 x_1^5 - k_2 c x_1^3$.

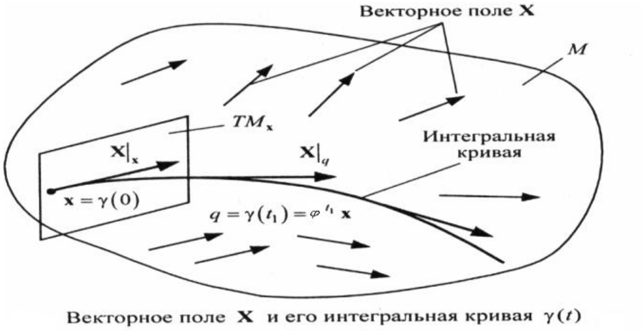
В соответствии с вышеизложенным материалом, возникает проблема, состоящая из следующих задач:

- для каких нелинейных систем существует невырожденное преобразование, позволяющее перейти к рассмотрению соответствующей линейной системы;
- как найти такое преобразование;
- когда существует соответствующее управление, позволяющее удовлетворить необходимые требования к качеству управления, как для эквивалентной линейной системы, так и для исходной нелинейной системы.

Такой подход к анализу нелинейных систем, базирующийся на решении вышеуказанных задач, называется методом линеаризации обратной связью нелинейных систем.

<u>Векторные поля на многообразиях.</u>

Векторное поле F на гладком многообразии M ассоциируется с касательным вектором $F(x)$, который ставится в соответствие каждой точке $x \in M$. Причем $F(x) \in TM_x$, то есть этот вектор принадлежит касательному пространству.



Векторное поле $\mathbf{X}$ и его интегральная кривая $\gamma(t)$ на многообразии M

Если рассматривать многообразие, как некоторое обобщение обычного фазового пространства, то интегральные кривые $\gamma(t) \in M \subseteq R^m, m \le n$, можно охарактеризовать, как результат действия некоторой группы преобразований φ^t на точку $x_0 \in M$, то есть $\gamma(t) = \varphi^t x_0$. Эту группу преобразований для одного и того же векторного поля F называют однопараметрической группой преобразования или фазовым потоком. То есть интегральная кривая векторного поля F это гладкая параметризованная кривая, касательный вектор к которой в каждой точке совпадает со значением векторного поля $F(x)$ в этой точке. Говорят, что инфинитезимальной образующей или генератором этой группы является данное векторное поле F на M, которое задается касательными векторами $F(x) \in TM|_x$ в каждой точке $x \in M$ такими, что $F(x)$ гладко меняется от точки к точке. В локальных координатах $x = (x_1,..., x_m), m \le n$ кривая $\gamma(t) \in M$ задается m гладкими функциями $\gamma(t) = (\varphi^1(t),..., \varphi^m(t))$. В каждой точке $x = \gamma(t)$ к интегральной кривой имеется касательный вектор $(\dot{\varphi}^1(t),..., \dot{\varphi}^m(t))$. Для того, чтобы различать выражения для касательных векторов и для локальных координат точек на многообразии обычно принимают обозначение $\dot{\gamma}(t) = \dot{\varphi}^1(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \dot{\varphi}^m(t)\frac{\partial}{\partial x_m}$ для касательного вектора в точке $x = \gamma(t) = \varphi^t x_0$ /Олвер с51/.

Таким образом, можно сказать, что в локальных координатах $x = (x_1,..., x_m)$ векторное поле имеет вид $F(x) = \dot{\varphi}^1(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \dot{\varphi}^m(t)\frac{\partial}{\partial x_m}$.

Пример. Для винтовой линии $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ в R^3 точке с координатами (x, y, z) соответствует точка $(\cos t, \sin t, t)$ с касательным вектором $(-\sin t\frac{\partial}{\partial x} + \cos t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}) = (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z})$.

Особенностью интегральной кривой $\gamma(t)$ состоит в том, что в каждой точке $x \in \gamma(t)$ выполняется соотношение $\dot{\gamma}(t) = F(x)$. Данное соотношение часто записывается в виде уравнения Ли: $\frac{d}{dt}(\varphi^t x) = F(\varphi^t x), \varphi^{t0} x = x$, где точка $x \in M$ - начальная точка интегральной кривой $\gamma(t)$, причем $\gamma(t_0) = x$. Если ввести обозначение $x(t) = \varphi^t x$, то уравнение Ли примет известный вид: $\dot{x}(t) = F(x(t))$ /Краснощеченко с 53/. Говорят, что если интегральная кривая определена для $\forall t \in (-\infty, \infty)$, то векторное поле F является полным. Для такого поля характерно отсутствие разрывов второго рода в интегральной кривой и существует глобальная однопараметрическая группа φ^t (фазовый поток).

Пример неполного векторного поля. Пусть на $M = R$ задано векторное поле $F = x^2\frac{\partial}{\partial x}$. Рассмотрим уравнение в частных производных $F(z) = 0$, которому соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{x} = x^2, x(t_0) = x_0$. Решение уравнения имеет вид $x(t) = \frac{1}{c - t}$, где $c = \frac{t_0 x_0 + 1}{x_0}$ и $x(t) = \varphi^t x_0$, $\varphi^t = \frac{1}{x_0 t_0 + 1 - x_0 t}$. Очевидно, что решение имеет разрыв 2-го рода в точке $t = c$, а однопараметрическое преобразование φ^t не является диффеоморфизмом, переводящим числовую ось в себя.

Вычисление потока или однопараметрической группы, порожденной данным векторным полем F, часто называют экспоненцированием этого поля (или экспоненциальным отображением) и обозначают следующим образом $\varphi^t x \equiv \exp(tF)x$.

Действие векторного поля на функцию. Производные и ряды Ли.

Пусть векторное поле на многообразии M и $\alpha : M \to R$ - некоторая гладкая функция. Если в локальных координатах имеет место равенство: $F(x) = \xi^1(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + ... + \xi^m(x)\dfrac{\partial}{\partial x_m} = \xi^T \nabla$ (где $\nabla = (\dfrac{\partial}{\partial x_1},..., \dfrac{\partial}{\partial x_m})$), то пользуясь цепным правилом и формулой $\varphi^t x \equiv \exp(tF)x$, получим следующее соотношение: $\dfrac{d}{dt}\alpha(\exp(tF)x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi^i(\exp(tF)x)\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_i}(\exp(tF)x) \equiv F(\alpha)[\exp(tF)x]$.

В частности, при $t = 0$, полученное соотношение можно записать в следующем виде: $\dfrac{d}{dt}\alpha(\exp(tF)x)|_{t=0} = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi^i(x)\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x) \equiv F(\alpha)(x)$. Таким образом, векторное поле F действует на скалярную вещественную функцию $\alpha(x)$ на многообразии M, как оператор взятия частных производных первого порядка. В случае, когда $F(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + ... + \dfrac{\partial}{\partial x_m} = \nabla$, получим $\nabla \alpha = \dfrac{\partial \alpha(x_1,...x_m)}{\partial x} = (\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_1},..., \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_m})$, что равносильно оператору дифференцирования по векторному аргументу . По теореме Тейлора можно записать следующее равенство: $\alpha(\exp(tF)x) = \alpha(x) + tF(\alpha)(x) + O(t^2)$, так что $F(\alpha)$ дает инфинитезимальное изменение функции α под действием потока, порожденного векторным полем F. Можно продолжить ряд Тейлора и тогда получим следующее соотношение:

$\alpha(\exp(tF)x) = \alpha(x) + tF(\alpha)(x) + \dfrac{t^2}{2!}F^2(\alpha)(x) + ... + \dfrac{t^k}{k!}F^k(\alpha)(x) + O(t^{k+1})$, где $F^k(\alpha) = F(F^{k-1}(\alpha))$.

Предполагая сходимость ряда Тейлора по t, получим ряд Ли: $\alpha(\exp(tF)x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}F^k(\alpha)(x)$, который характеризует действие потока на $\alpha(x)$. Такой же результат будет справедлив для векторных функций $G : M \to R^n, G(x) = (g_1(x),..., g_n(x))$. Соответственно для функции G можно записать следующий ряд Ли: $G(\exp(tF)x) = G(x) + tF(G)(x) + \dfrac{t^2}{2!}F^2(G)(x) + ... = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}F^k(G)(x)$

В соответствии с приведенной выше интерпретацией символов $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, каждый касательный вектор $F(x)$ в точке $x \in M$ определяет дифференцирование на пространстве гладких вещественных функций $G = G(x), G \in R^n$, определенных вблизи точки x многообразия M. Эта операция, определенная полем F, обладает основными свойствами операции дифференцирования:

1. Линейность $F(G+\Psi) = F(G) + F(\Psi)$, *2. Выполнение правила Лейбница* $F(G \times \Psi) = F(G)\Psi + GF(\Psi)$.

Таким образом, можно определить векторные поля как процедуры дифференцирования, то есть отображения на пространстве гладких функций на многообразии M, обладающие необходимыми свойствами линейности и требованиям правила Лейбница.

Определение. *Производной Ли скалярной функции $\alpha=\alpha(x)$ по векторной функции $F(x)=(f_1(x),...,\ f_m(x))$ называется скалярная функция $L_F\alpha$, определяемая соотношением*

$$L_F\alpha=\frac{d\alpha}{dx}F=(\nabla\alpha)F=\sum_{i=1}^{m}f_i\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}.$$

Старшие производные Ли рекурсивно определяются следующим образом $L_F^k\alpha=L_F(L_F^{k-1}\alpha)=\nabla(L_F^{k-1}\alpha)F, k=1,2,...$ Нулевая производная Ли функции $\alpha=\alpha(x)$ по $F(x)$ есть сама функция $\alpha=\alpha(x)$, то есть $L_F^0\alpha=\alpha$. Высшие производные по другой векторной функции $G(x)$ определяются аналогично $L_GL_F\alpha=L_G(L_F\alpha)=\nabla(L_F\alpha)G$.

Пример. Пусть система задана уравнениями: $\dot{x}=F(x)$, $y=\alpha(x)$. Тогда $\dot{y}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}\dot{x}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}F(x)=L_F\alpha(x)$, $\ddot{y}=\frac{\partial\dot{y}}{\partial x}F(x)=\frac{\partial}{\partial x}[L_F\alpha(x)]F(x)=L_F^2\alpha(x)$. Если же задана скалярная функция $V(x)$, то ее производная, в силу уравнения системы $\dot{x}=F(x)$, будет равна производной Ли этой функции по $F(x)$:

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}=\frac{\partial V}{\partial x}F(x)=L_FV.$$

Пусть теперь $F(x)$ и $G(x)$ - две гладкие векторные функции $F,G:R^m\to R^m$. Тогда производная Ли от векторной функции $G(x)$ по векторной функции $F(x)$ является также векторной функцией и определяется аналогично производной Ли от скалярной функции: $L_FG=\frac{dG}{dx}F$.

<u>Скобки Ли.</u>

Наиболее важная операция над векторными полями – это их скобки Ли или коммутатор. Если $F(x)$ и $G(x)$ - векторные поля на многообразии M, то их скобка Ли $[F,G]$ единственное векторное поле, удовлетворяющее условию: $[F,G](\alpha)=F(G(\alpha))-G(F(\alpha))$ для всех гладких функций $\alpha:M\to R$. Легко проверить, что $[F,G]$ на самом деле является векторным полем. Запишем поля F,G в локальных координатах: $F=\sum_{i=1}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $G=\sum_{i=1}^{m}\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда, после преобразований получим: $[F,G]=\sum_{i=1}^{m}\{F(\eta^i)-G(\xi^i)\}\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\{\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x_j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x_j}\}\frac{\partial}{\partial x_i}$. Заметим, что при преобразовании сокращаются члены, содержащие производные второго порядка функции $F(x)$.

Пример. Пусть $F(x)=y\frac{\partial}{\partial x}$ и $G(x)=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}$. Тогда скобка Ли вычисляется по следующей формуле:

$$[F,G]=F(x^2)\frac{\partial}{\partial x}+F(xy)\frac{\partial}{\partial y}-G(y)\frac{\partial}{\partial x}=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Для скобок Ли довольно часто используют обозначение $[F,G]=ad_FG$, которое более удобно для скобок второго и более высоких порядков. Очевидно, что, если использовать введенные

обозначения для производной Ли, можно записать следующее соотношение:
$[F,G]=ad_F G=\nabla GF-\nabla FG=L_F G-L_G F$. <u>*Отсюда, в частности видно, что производная Ли поля G по полю F минус производная поля F по полю G равна скобке Ли*</u> $[F,G]$.

Скобки Ли высокого порядка тогда рекурсивно определяются следующим образом: $ad_F^k G=ad_F(ad_F^{k-1}G)=[F,ad_F^{k-1}G], k=1,2,...$. Скобки Ли нулевого порядка полей $F(x)$ и $G(x)$ равны $G(x)$, то есть: $ad_F^0 G=G$.

Пример. Пусть $F(x)=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$ и $G(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем скобки Ли первого и второго порядков. Вычислим скобки Ли первого порядка: $ad_F G=\frac{dG}{dx}F-\frac{dF}{dx}G=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Производная скобки Ли по x равна: $\frac{d}{dx}(ad_F G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда, соответственно для скобки Ли второго порядка получим следующее соотношение: $ad_F^2 G=ad_F(ad_F G)=\frac{d}{dx}(ad_F G)F-\frac{dF}{dx}Fad_F G=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3x_1^2 \end{pmatrix}$.

Лемма */Ким т2 с177/. Пусть $F(x),F_1(x),F_2(x),G(x),G_1(x),G_2(x),W(x)$ - гладкие векторные функции, $\alpha(x)$ - гладкая скалярная функция, c_1,c_2 - скалярные постоянные. Скобки Ли обладают следующими свойствами:*

1. Билинейность - $[c_1F_1+c_2F_2,G]=c_1[F_1,G]+c_2[F_2,G]$, $[F,c_1G_1+c_2G_2]=c_1[F,G_1]+c_2[F,G_2]$.

2. Асимметрическая коммутативность - $[F,G]=-[G,F]$.

3. Тождество Якоби - $[F,[G,W]]\alpha+[W,[F,G]]\alpha+[G,[W,F]]\alpha=0$ или $L_{ad_{FG}}\alpha(x)=L_F L_g\alpha-L_g L_F\alpha$.

Геометрическая трактовка скобки Ли двух векторных полей - это интерпретация ее как «инфинитезимиального коммутатора» двух однопараметрических групп, порождаемых векторными полями, потоков $\exp(tF)x$ и $\exp(tG)x$.

<u>Теорема Фробениуса.</u>

Определение. *Множество линейно независимых функций $\{F_1(x),F_2(x),...F_r(x)\}$ называется инволютивным, если скобки Ли любых двух функций $F_i(x)$ и $F_j(x)$ из этого множества (не обязательно разных) равны линейной комбинации функций из этого множества, то есть существуют такие функции (скалярные поля) $\alpha_k^{ij}(x)$, что выполняется равенство*

$$[F_i,F_j]=\sum_{k=1}^{r}\alpha_k^{ij}(x)F_k(x).$$

Множество линейно независимых постоянных векторов всегда инволютивно. Действительно, скобки Ли двух постоянных векторов являются нулевыми и, следовательно, представляются тривиальными (нулевыми) комбинациями исходных векторов.

Множество, состоящее из одного вектора, является инволютивным, так как скобки Ли двух одинаковых функций равны нулю $[F,F]=(\nabla F)F-(\nabla F)F\equiv 0$.

Определение. *Множество $r, r<n$ линейно независимых n-мерных функций $\{F_1(x),F_2(x),...F_r(x)\}$ называется интегрируемым, если существуют $n-r$ независимых скалярных функций $\alpha_1(x),..., \alpha_{n-r}(x)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений $\nabla\alpha_i(x)F_j(x)=0$, где $i=1,2,..., n-r; j=1,2,...r$.*

Скалярные функции $\alpha_1(x),...,\alpha_{n-r}(x)$ будут независимы в некоторой области D, если векторы $\nabla\alpha_i(x), i=1,2,...,n-r$ будут линейно независимы в этой области.

***Теорема Фробениуса** /Ким т2 с181/. Множество $r, r<n$ линейно независимых n-мерных функций $\{F_1(x), F_2(x),...F_r(x)\}$ интегрируемо в том и только в том случае, когда оно инволютивно.*

Пример. Задана система дифференциальных уравнений $2x_3\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}-\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}=0$, $-x_1\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}-2x_2\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial\alpha}{\partial x_3}=0$, где $\alpha=\alpha(x_1,x_2,x_3)$ - искомая функция. Требуется определить разрешимость системы уравнений.

Запишем систему в векторной форме $\frac{d\alpha}{dx}F_1=0$ и $\frac{d\alpha}{dx}F_2=0$. Здесь $F_1(x)=(2x_3,-1,0)^T$,

$F_2(x)=(-x_1,-2x_2,x_3)^T$. Вычислим скобки Ли: $[F_1,F_2]=\frac{dF_2}{dx}F_1-\frac{dF_1}{dx}F_2=\begin{pmatrix}-4x_3\\2\\0\end{pmatrix}$. Очевидно, что скобки Ли можно представить, как линейную комбинацию функций F_1,F_2 : $[F_1,F_2]=-2F_1+0F_2$. Таким образом, множество F_1,F_2 инволютивно и, следовательно, по теореме Фробениуса исследуемая система интегрируема.

Линеаризация обратной связью по состоянию (ЛОС).

Рассмотрим нелинейную аффинную систему $\dot{x}=F(x)+G(x)u$, $x\in R^n, u\in R, F(0)=0$, где F,G - гладкие векторные функции. Очевидно, что уравнение вида $\dot{x}=F(x)+G(x)W(u+\varphi(x))$, если существует обратное преобразование W^{-1}, можно подстановкой $v=W(u+\varphi(x))$ привести к виду $\dot{x}=F(x)+G(x)u$. Можно поставить задачу о приведении исходной нелинейной аффинной системы к линейной стационарной системе.

***Определение** /Ким т2 с182/. Система $\dot{x}=F(x)+G(x)u$ называется линеаризуемой обратной связью по состоянию, если существует диффеоморфизм $z=T(x)$ и преобразование обратной связью $u=\alpha(x)+\beta(x)v$ такие, что уравнение $\dot{x}=F(x)+G(x)u$ принимает вид $\dot{z}=Az+bv$,*

где $A=\begin{pmatrix}0&1&0&...0\\..&..&..&.....\\0&0&0&...1\\0&0&0&...0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}$.

Очевидно, что любая вполне управляемая линейная стационарная система может быть преобразована к такому виду.

Составим для системы $\dot{x}=F(x)+G(x)u$ матрицу $Y=[G, ad_F G,..., ad_F^{n-1}G]$. Для линейной стационарной системы, когда $F(x)=Ax, G(x)=b$, где A,b - постоянные матрицы, размерности $(n\times n)$ и $(n\times 1)$ соответственно, для скобок Ли можно записать следующие соотношения:

$ad_F^0 G=b$, $ad_F G=\frac{dG}{dx}F-\frac{dF}{dx}G=-Ab$, $ad_F^2 G=-\frac{dF}{dx}ad_F G=-\frac{dAx}{dx}ad_F G=A^2 b$,...,

$ad_F^{n-1}G=(-1)^{n-2}\frac{dAx}{dx}ad_F^{n-2}G=(-1)^{n-1}A^{n-1}b$. Отсюда получим, что матрица $Y=[b,-Ab,A^2b,...,(-1)^{n-1}b]$. Если отбросить перед четными столбцами матрицы Y знаки минус, которые не влияют на ее ранг, то получим матрицу управляемости для пары (A,b). Поэтому матрицу Y также называют матрицей управляемости для системы $\dot{x}=F(x)+G(x)u$.

Теорема (о линеаризации обратной связью по состоянию). *Нелинейная система $\dot{x}=F(x)+G(x)u$ линеаризуема обратной связью по состоянию в некоторой окрестности Ω начала координат в том и только том случае, когда в этой окрестности ее матрица управляемости Y имеет ранг n, то есть $\det(Y)\neq 0$ всюду в области Ω (за исключением точки начала координат) и множество векторов $\{G, ad_F G,..., ad_F^{n-2}G\}$, составленное из $(n-1)$ столбцов матрицы управляемости Y, инволютивно.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что существуют преобразования состояния $z=T(x)$ и управления $u=\alpha(x)+\beta(x)v$ такие, что переменные z,v удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений вида: $\dot{z}_i=z_{i+1}, \dot{z}_n=v, i=1,2,...,(n-1)$. Подставляя сюда $z_i=T_i(x)$, получим следующие соотношения: $\dot{z}_i=\dfrac{\partial T_i}{\partial x}[F(x)+G(x)]=T_{i+1}$, $i=1,2,...,(n-1)$, $\dot{z}_n=\dfrac{\partial T_n}{\partial x}[F(x)+G(x)]=v$. Так как функции $T_1,T_2,...,T_n$ не зависят от управления u, то из этой системы следует, что будут выполняться равенства: $\dfrac{\partial T_1}{\partial x}G=....=\dfrac{\partial T_{n-1}}{\partial x}G=0$ и $\dfrac{\partial T_n}{\partial x}G\neq 0$. Тогда, из первых $(n-1)$ уравнений получаем соотношения: $\dfrac{\partial T_1}{\partial x}F=T_2$,…., $\dfrac{\partial T_{n-1}}{\partial x}F=T_n$. Полученные соотношения, используя производные Ли, можно записать в виде: $L_G T_1=L_G T_2=....=L_G T_{n-1}=0$, $L_G T_n\neq 0$ и $L_F T_1=T_2$, $L_F T_2=T_3$, ….., $L_F T_{n-1}=T_n$. Тогда на основании свойств скобок Ли получим формулы: $\nabla T_1 ad_F^k G=0, k=0,1,2,..(n-2)$, $\nabla T_1 ad_F^{n-1}G\neq 0$. Из этого можно сделать вывод о том, что система векторов $\{G, ad_F G,......, ad_F^{n-1}G\}$ линейно независима и инвалютивна.

Инволютивность следует из того, что существует скалярная функция $T_1(x)$, удовлетворяющая $(n-1)$ уравнениям в частных производных $\nabla T_1 ad_F^k G=0, k=0,1,2,..(n-2)$ и $\nabla T_1 ad_F^{n-1}G\neq 0$.

Независимость векторов докажем от противного. Пусть существуют такие скалярные величины $\alpha_0,...,\alpha_{i-1}$ такие, что справедливо равенство $ad_F^i G=\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k ad_F^k G$. Вычислим скобки Ли $ad_F^{i+1}G$, используя полученное выражение: $ad_F^{i+1}G=\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k ad_f^{k+1}G$. Продолжая данную последовательность вычислений скобок до $(n-1)$-го порядка, получим $ad_F^{n-1}G=\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k ad_f^{k+l}G, l=n-i-1$. Умножим обе части полученного равенства слева на ∇T_1. Тогда, учитывая соотношение $\nabla T_1 ad_F^k G=0, k=0,1,2,..(n-2)$ получим равенство:
$\nabla T_1 ad_F^{n-1}G=\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k \nabla T_1 ad_f^{k+l}G=0$, которое противоречит условию $\nabla T_1 ad_F^{n-1}G\neq 0$.

Достаточность. Так как система векторов $\{G, ad_F G,..., ad_F^{n-2}G\}$ инволютивна, то существует скалярная функция $T_1=T_1(x)$, удовлетворяющая системе уравнений $L_G T_1=L_{ad_F G}T_1=...=L_{ad_F^{n-2}G}T_1=0$. Отсюда в силу свойств скобки Ли получим $L_G T_1=L_G L_F T_1=...=L_G L_F^{n-2}T_1=0$. Поэтому в качестве искомого преобразования состояния примем $T_1=T_1(x), T_2=L_F T_1,...,T_n=L_F^{n-1}T_1$, где $T_1(x)$ решение системы уравнений

$L_G T_1 = L_{ad_F G} T_1 = ... = L_{ad_F^{n-2} G} T_1 = 0$. Тогда, с учетом соотношений $L_G T_1 = L_G L_F T_1 = ... = L_G L_F^{n-2} T_1 = 0$ получим следующие уравнения: $\dot{T}_1 = \frac{\partial T_1}{\partial x}(F + Gu) = L_F T_1 + L_G T_1 u = T_2$; $\dot{T}_2 = \frac{\partial T_2}{\partial x}(F + Gu) = L_F T_2 + L_G T_2 u = T_3$,

.... $\dot{T}_{n-1} = \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x}(F + Gu) = L_F T_{n-1} + L_G T_{n-1} u = T_n$; $\dot{T}_n = L_F T_n + L_G T_n u = L_F^n T_1 + L_G L_F^{n-1} T_1 u$

Таким образом, при преобразовании $T_1 = T_1(x), T_2 = L_F T_1, ..., T_n = L_F^{n-1} T_1$ система $\dot{x} = F(x) + G(x)u$ принимает в новых переменных вид: $\dot{z}_i = z_{i+1}, i = 1,2,...,(n-1)$, $\dot{z}_n = L_F^n T_1 + L_G L_F^{n-1} T_1 u$. В силу теоремы Фробениуса и инволютивности множества $\{G, ad_F G, ..., ad_F^{n-2} G\}$ можно показать, что $L_G L_F^{n-1} T_1 \neq 0$. Тогда воспользовавшись преобразованием управления $u = \frac{1}{L_G L_F^{n-1} T_1}(-L_F^n T_1 + v)$ получим, что $\dot{z}_n = v$.

Каноническая форма управления нелинейных систем по Бруновскому.

Уравнения в преобразованных переменных $z_i, i = 1,2,..., n$, линеаризованной обратной связью аффинной нелинейной системы $\dot{x} = F(x) + G(x)u$, как было показано выше, удовлетворяют следующей системе уравнений $\dot{z}_i = z_{i+1}, i = 1,2,...,(n-1)$, $\dot{z}_n = v$. Данная запись уравнений называется представлением в форме Бруновского. В матричном виде форма Бруновского принимает вид:

$\dot{z} = Az + bv$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ...0 \\ .. & .. & .. & ..... \\ 0 & 0 & 0 & ...1 \\ 0 & 0 & 0 & ...0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$. Как видно данная система является вполне управляемой.

Для термина система в канонической форме Бруновского иногда используют следующий эквивалент – статически линеаризуемая система.

Схема линеаризации обратной связью.

Доказательство достаточности в теореме о линеаризации обратной связью является конструктивным, что позволяет, на его основе сформировать схему линеаризации обратной связью по состоянию для нелинейных аффинных систем.

1. По заданной системе определить матрицу управляемости $Y = [G, ad_F G, ..., ad_F^{n-1} G]$.
2. Вычислить $\det(Y)$. Если $\det(Y) \neq 0$ проверить инволютивность множества векторных функций, составленных из первых $(n-1)$ столбцов матрицы управляемости, то есть множества $\{G, ad_F G, ..., ad_F^{n-2} G\}$.
3. Если множество $\{G, ad_F G, ..., ad_F^{n-2} G\}$ инволютивно, то вычислить функцию $T_1(x)$ из соотношений: $\nabla T_1 ad_F^k G = 0, k = 0,1,2,..(n-2)$ и $\nabla T_1 ad_F^{n-1} G \neq 0$.
4. Определить преобразование состояния $z = T(x) = \{T_1(x), T_2(x), ..., T_n(x)\}^T$, где $T_2 = L_F T_1, ..., T_n = L_F^{n-1} T_1$ и преобразование управления $u = \frac{1}{L_G L_F^{n-1} T_1}(-L_F^n T_1 + v)$.

Пример. Задана система: $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3^3 + u, \dot{x}_3 = x_1 + cx_3^3$. Приведем данную систему к форме управления по Бруновскому.

В данном случае $F(x) = (x_2, x_3^3, x_1 + cx_3^3)^T, G(x) = (0,1,0)^T$.

1. Найдем матрицу управляемости $Y=[G, ad_F G, ad_F^2 G]$.

$$ad_F G=\frac{dG}{dx}F-\frac{dF}{dx}G=-\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&3x_3^2\\1&0&3cx_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ ad_F^2 G=\frac{d(ad_F G)}{dx}F-\frac{dF}{dx}ad_F G=-\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&3x_3^2\\1&0&3cx_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица управляемости равна: $Y=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. Очевидно, что $\det(Y)=1\neq 0$. Первые два столбца матрицы Y являются постоянными и, поэтому, образуют инволютивное множество.

3. Уравнения для определения решения преобразования $z=T(x)=\{T_1(x),T_2(x),...,T_n(x)\}^T$ имеют вид:

$$\nabla T_1 G=\nabla T_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{\partial T_1}{\partial x_2}=0,\ \ \nabla T_1 ad_F G=-\nabla T_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-\frac{\partial T_1}{\partial x_1}=0,\ \ \nabla T_1 ad_F^2 G=\nabla T_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-\frac{\partial T_1}{\partial x_3}\neq 0.$$

Отсюда следует, что T_1 зависит только от x_3. Поэтому в качестве частного решения можно взять $T_1=x_3$.

4. Остальные две компоненты преобразования найдем из формул:

$$T_2=L_F T_1=\nabla T_1 F=(0,0,1)\begin{pmatrix}x_2\\x_3^3\\x_1+cx_3^3\end{pmatrix}=x_1+cx_3^3,\ T_3=L_F^2 T_1=L_F T_2=(1,0,3cx_3^2)\begin{pmatrix}x_2\\x_3^3\\x_1+cx_3^3\end{pmatrix}=x_2+3cx_3^2(x_1+cx_3^3).$$

Отсюда получим следующие соотношения для введенного преобразования:
$z_1=x_3, z_2=x_1+cx_3^3, z_3=x_2+3cx_3^2(x_1+cx_3^3)$. Для определения преобразования управления найдем

$$L_F^3 T_1, L_G L_F^2 T_1:\ \ L_G L_F^2 T_1=\nabla T_3 G=(3cx_3^2, 1, 6cx_3x_1+15c^2x_3^4)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1,$$

$$L_F^3 T_1=\nabla T_3 F=(3cx_3^2, 1, 6cx_3x_1+15c^2x_3^4)\begin{pmatrix}x_2\\x_3^3\\x_1+cx_3^3\end{pmatrix}=3cx_3^2x_2+x_3^3+(6cx_3x_1+15c^2x_3^4)(x_1+cx_3^3)$$

Отсюда получим, что $u=-[3cx_3^2x_2+x_3^3+(6cx_3x_1+15c^2x_3^4)(x_1+cx_3^3)]+v$.

Соответственно, в новых переменных система примет вид формы Бруновского: $\dot z_1=x_2, \dot z_2=z_3, \dot z_3=v$.

<u>Линеаризация обратной связью в пространстве «вход-выход».</u>

Определение */Ким т2 с187/. Линеаризацией обратной связью по выходу называется такое преобразование нелинейной системы $\dot x=F(x,u)$, $y=H(x)$, при котором в преобразованной системе связь между выходом y и входом u будет линейной.*

Пример /Бойчук с27/. Пусть задана система $\dot x_1=x_2^2+x_3$, $\dot x_2=x_1$, $\dot x_3=u$, $y=x_1$. Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий слежение за траекторией $y_p(t)$. Для решения поставленной задачи будем использовать метод обратной задачи динамики. Для этого потребуем, чтобы ошибка слежения $e(t)=y(t)-y_p(t)$ являлась решением некоторого заданного уравнения 2-го порядка: $\ddot e+a_1\dot e+a_0 e=0$, где a_1, a_0 - заданные параметры желаемого уравнения. Отсюда найдем:
$\ddot y=\ddot y_p-a_1\dot e-a_0 e=\ddot y_p-a_1(\dot y-\dot y_p)-a_0(y-y_p)$. С другой стороны из исходной системы несложно

получить следующие соотношения: $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^2 + x_3$, $\ddot{y} = 2x_2\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 2x_2x_1 + u$. Подставив полученное равенство в предыдущее уравнение, найдем требуемое управление
$u = -2x_2x_1 - a_1(x_2^2 + x_3) - a_0x_1 + \ddot{y}_p + a_1\dot{y}_p + a_0y_p$.

Пример. Пусть задана система $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = x_3(x_1 + 1); \dot{x}_3 = x_1x_2 + u; y = x_1$. Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий слежение за траекторией $y_p(t)$. Для решения поставленной задачи будем использовать метод обратной задачи динамики. Для этого потребуем, чтобы ошибка слежения $e(t) = y(t) - y_p(t)$ являлась решением некоторого заданного уравнения 3-го порядка:
$\dddot{e} + a_2\ddot{e} + a_1\dot{e} + a_0e = 0$, где a_2, a_1, a_0 - заданные параметры желаемого уравнения. Продифференцируем y необходимое количество раз: $\dot{y} = x_2; \ddot{y} = x_3(x_1 + 1); \dddot{y} = x_1x_2(x_1 + 1) + (x_1 + 1)u + x_2x_3$.

Введем следующее преобразование управления: $u = \dfrac{1}{(1 + x_1)}(-x_1x_2(x_1 + 1) - x_2x_3 + v)$. Отсюда получим соотношение: $\dddot{y} = v$. Подставив его в уравнение для желаемой ошибки, получим:
$v = \dddot{y}_p - a_2\ddot{e} - a_1\dot{e} - a_0e$. Из данного уравнения уже можно вычислить искомое управление:
$u = -\dfrac{1}{(1 + x_1)}((x_1x_2 + a_2x_3)(x_1 + 1) + x_2x_3 + a_1x_2 + a_0x_1 - \dddot{y}_p - a_2\ddot{y}_p - a_1\dot{y}_p - a_0y_p)$.

Во втором примере число дифференцирований для получения явной зависимости между входом и выходом равно порядку системы. В первом примере, уравнение ошибки имеет 2-ой порядок и описывает лишь часть динамики синтезированной системы, которая имеет 3-ий порядок. Для получения полного описания синтезированной системы необходимо к уравнению $\ddot{e} + a_1\dot{e} + a_0e = 0$ добавить еще одно уравнение первого порядка, которое будет описывать, так называемую, внутреннюю динамику системы. Полученный алгоритм управления будет допустимым, лишь в том случае, если внутренняя динамика является устойчивой.

Относительный порядок системы.

Основным методом получения прямой зависимости между входом и выходом является повторное дифференцирование выхода, пока не получится явная зависимость выхода от входа, и последующее преобразование обратной связи. Число дифференцирований выхода, необходимых для получения явной зависимости между входом и выходом, называется *относительной степенью или относительным порядком*. Для вполне управляемых систем относительная степень $r \le n$.

Рассмотрим теперь аффинную систему следующего вида: $\dot{x} = F(x) + G(x)u; y = H(x)$, где $x \in R^n, u \in R, y \in R$, а $F(x), G(x), H(x)$- гладкие функции в некоторой области $\Omega \subset R^n$.

Продифференцируем выход y по параметру t: $\dot{y} = \dfrac{dH}{dx}\dot{x} = \dfrac{dH}{dx}(F(x) + G(x)u) = L_FH + (L_GH)u$.

Если $L_GH = 0$ для всех $x \in \Omega$, то дифференцируем выход еще раз:

$\ddot{y} = \dfrac{d}{dx}(L_FH)\dot{x} = \dfrac{d}{dx}(L_FH)(F(x) + G(x)u) = L_F^2H + (L_GL_FH)u$. Если $L_GL_FH = 0$,

дифференцирование продолжаем, пока не получим $L_GL_F^{r-1}H \ne 0$. Затем, применяя преобразование обратной связью $u = \frac{1}{L_G L_F^{r-1} H}(-L_F^r H + v)$, можно получить линейное уравнение $y^{(r)} = v$.

Определение*. Автономная аффинная система* $\dot{x} = F(x) + G(x)u; y = H(x)$, $x \in R^n, u \in R, y \in R$ *имеет относительную степень* $r \le n$ *в области* $\Omega \subset R^n$*, если для любых* $x \in \Omega$ *выполняются соотношения:* $L_G L_F^i H(x) = 0, i = 0,1,..., r-2$, $L_G L_F^{r-1} H(x) \ne 0$.

Пример. Пусть система описывается с помощью передаточной функции вида: $\frac{y}{u} = \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$.

Найдем относительную степень данной системы.

В нормальной форме уравнения данной системы имеют вид: $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3 + b_1 u$, $\dot{x}_3 = -(a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3) + (b_0 - a_2 b_1)u, y = x_1$. Запишем эти уравнения в матричном виде. Тогда получим следующие равенства: $F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -(a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3) \end{pmatrix}$, $G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$, $H(x) = x_1$. Вычислим теперь соответствующие производные Ли: $L_G H = (\nabla H)G = (1,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = 0$,

$L_F H = (\nabla H)F = (1,0,0)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -(a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3) \end{pmatrix} = x_1$. $L_G L_F H = \nabla(L_F H)G = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = b_1 \ne 0$. Таким образом, относительная степень $r = 2$. Данное значение относительной степени совпадает с относительным порядком передаточной функции, равным разности ее степени знаменателя и степени числителя.

Внешняя и внутренняя динамика.

Если относительная степень $r < n$, то линеаризация обратной связью разбивает уравнение системы на уравнения внешней и внутренней динамики. При этом внешняя динамика имеет порядок r и характеризуется, соответственно, r независимыми переменными, а внутренняя динамика будет характеризоваться $n-r$ независимыми переменными. Введем новый вектор новых переменных $z \in R^n$, связанный с исходным вектором состояния $x \in R^n$ с помощью невырожденного преобразования $z = \Phi(x)$. Условие невырожденности преобразования, в соответствии с теоремой об обратной функции, имеет следующий вид: $\det(\frac{\partial \Phi}{\partial x}) \ne 0$. Выделим в векторе z две составляющие: размерности r и размерности $(n-r)$ соответственно: $z = (z^{[r]}, z^{[n-r]})^T$. Тогда, если исходная система $\dot{x} = F(x) + G(x)u; y = H(x)$ имеет относительную степень $r < n$, то с помощью соответствующего преобразования ее можно привести к следующей форме в виде двух соответствующих подсистем: $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, ..., \dot{z}_{r-1} = z_r$, $\dot{z}_r = f(z^{[r]}, z^{[n-r]}) + g(z^{[r]}, z^{[n-r]})u$, $\dot{z}^{[n-r]} = w(z^{[r]}, z^{[n-r]}), y = z_1$. Нетрудно заметить, что подсистема внешней динамики примет соответствующий вид, если в качестве переменных ее состояния принять выход и его производные: $z_1 = y = H(x) = L_F^0 H(x)$, $z_2 = \dot{y} = L_F H(x)$, ….,
$z_r = y^{(r-1)} = L_F^{(r-1)} H(x)$. При этом $f(z^{[r]}, z^{[n-r]}) = L_F^r H(x) = L_F^r(\Phi^{-1}(z))$,

$g(z^{[r]}, z^{[n-r]}) = L_G L_F^{r-1} H(x) = L_G L_F^{r-1}(\Phi^{-1}(z))$. Покажем, что компоненты градиента такого преобразования линейно независимы. Допустим противное, что существуют такие постоянные $c_i, i = 1,2,.., r$, не все равные нулю одновременно, что выполняется равенство:

$c_1 \nabla z_1 + ... + c_r \nabla z_r = 0$ или $c_1 \nabla H + c_2 \nabla L_F H + ... + c_r \nabla L_F^{r-1} H = 0$. Умножим, справа, обе части полученного равенства на G. Тогда получим: $c_1 L_G H + c_2 L_G L_F H ... + c_r L_G L_F^{r-1} H = 0$. Так как все слагаемые $L_G L_F^i H, i = 0,1,2,.., r-2$ в полученном равенстве, равны нулю, то получим $c_r L_G L_F^{r-1} H = 0$. Отсюда, так как $L_G L_F^{r-1} H \neq 0$, то $c_r = 0$. Умножим равенство $c_1 \nabla z_1 + ... + c_r \nabla z_r = 0$ справа на значение $ad_F G$. Тогда, так как $c_r = 0$, получим, что: $c_1 L_{ad_{FG}} H + c_2 L_{ad_{FG}} L_F H + ... + c_{r-1} L_{ad_{FG}} L_F^{r-2} = 0$. Отсюда, аналогично, получим, что $c_{r-1} = 0$. Продолжая данную процедуру со значениями $ad_F^2 G,..., ad_F^{r-1} G$, получим, что все $c_i = 0$. То есть, градиенты $\nabla z_i, i = 1,2,...r$ линейно независимы.

Так как система из одного вектора G является инволютивной, то по теореме Фробениуса существуют $(n-1)$ независимых функций $q_k(x), k = 1,2,..., n-1$, удовлетворяющих системе уравнений $L_G q_k(x) = 0, k = 1,2,..., n-1; \forall x \in \Omega$. С другой стороны функции $z_i = L_F^{i-1} H(x), i = 1,2,...r$ удовлетворяют этому уравнению и являются независимыми, так как их градиенты линейно независимы. Другие $n-r$ функций, которые являются независимыми и удовлетворяют уравнению $L_G q_k(x) = 0, k = 1,2,..., n-1; \forall x \in \Omega$, примем за переменные вектора $z^{[n-r]}$. При нахождении этих функций, следует учитывать, что они должны быть линейно независимы между собой и с остальными переменными, то есть $\det(\frac{\partial z}{\partial x}) \neq 0$. Однако необходимо еще показать, что функция z_r, которые не удовлетворяет уравнению $L_G q_k(x) = 0$, линейно не зависит от остальных переменных. Это можно доказать от противного, предположив, что градиент ∇z_r линейно выражается через градиенты остальных переменных. То есть, что выполняется равенство для некоторых $\alpha_i, i = 1,2,..., r-1, r+1,..n$ не всех равных нулю одновременно: $\nabla z_r = \alpha_1 \nabla z_1 + ... + \alpha_{r-1} \nabla z_{r-1} + \alpha_{r+1} \nabla z_{r+1} + ... + \nabla z_{n-1}$. Умножим, справа, обе части этого равенства на вектор G, получим: $L_G z_r = \alpha_1 L_G z_1 + ... + \alpha_{r-1} L_G z_{r-1} + \alpha_{r+1} L_G z_{r+1} + ... + L_G z_{n-1}$. Так как все слагаемые в правой части равенства равны нулю, то $L_G z_r = 0$, что противоречит условию $L_G L_F^{r-1} H = L_G z_r \neq 0$.

Пример. Пусть задана система: $\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, y = x_3$. Необходимости провести линеаризацию обратной связи по выходу. Так как $\dot{y} = x_2$ и $\ddot{y} = x_1 x_2 + u$, то относительная степень системы $r = 2$. Поэтому в качестве новых переменных принимаем $z_1 = y = x_3$, $z_2 = \dot{y} = x_2$. Третью переменную будем искать из решения уравнения в частных производных: $L_G q = \nabla q G = \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0$. Примем в качестве третьей переменной

$z_3 = x_1$. Вычислим определитель соответствующей матрицы Якоби $\det(\frac{\partial z}{\partial x}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$. Таким образом, найденное преобразование имеет вид $z = (x_3, x_2, x_1)^T$. Соответственно $f(z) = L_F^2 H = L_F x_2 = (0,1,0)F(x) = x_1 x_2 = z_3 z_2$, $g(z) = L_G L_F H = \nabla x_2 G = (0,1,0)G = 1$. Описание системы в новых координатах имеет вид: $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3 z_2 + u, \dot{z}_3 = -z_3^2, y = z_1$. Проведем преобразование обратной связью с помощью соотношения $u = -z_3 z_2 + v$. Отсюда получим окончательный вид системы в координатах состояния и управления: $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = v, \dot{z}_3 = -z_3^2, y = z_1$.

Нуль-динамика.

Внутренняя динамика преобразованной системы описывается $(n-r)$ уравнениями вида: $\dot{z}^{(n-r)} = w(z^{[r]}, z^{[n-r]})$. Как видно, в общем случае, вектор внутреннего состояния $z^{[n-r]}$ зависит от вектора внешнего состояния $z^{[r]}$. Однако, когда управление таково, что выход системы $y \equiv 0$, внутренняя динамика не зависит от переменных внешнего состояния.

***Определение** /Ким т2 с195/. Нуль-динамикой нелинейной системы называется ее динамика при условии, что выход системы тождественно равен нулю, то есть $y \equiv 0$.*

Уравнения нуль-динамики системы имеют вид: $\dot{z}^{[r]} = 0$, $\dot{z}^{[n-r]} = w(0, z^{[n-r]})$. Управление, которое требуется для поддержания условия $\dot{z}^{[r]} = 0$, получается очевидным образом из уравнения: $\dot{z}_r = f(z^{[r]}, z^{[n-r]}) + g(z^{[r]}, z^{[n-r]})u = 0$, а именно: $u = -\frac{f(0, z^{[n-r]})}{g(0, z^{[n-r]})}$. Нуль-динамика является внутренним свойством нелинейной системы, а ее устойчивость не зависит от выбора закона управления $u = v(z^{[r]}, y_p)$ и программной траектории. Если относительная степень нелинейной системы равна ее порядку, то линеаризация обратной связью по выходу полностью линеаризует систему, то есть нелинейную систему можно полностью преобразовать в соответствующую линейную систему. Если относительная степень системы меньше порядка системы, то пригодность синтезированного на основе линейной модели закона управления зависит от устойчивости ее внутренней динамики.

Синтез алгоритмов управления для автономных аффинных систем.

Задача стабилизации.

Пусть точка $x = 0$ является положением равновесия системы $\dot{x} = F(x) + G(x)u; y = H(x)$, где $F(0) = 0$.

***Теорема**. Пусть система $\dot{x} = F(x) + G(x)u; y = H(x), x \in \Omega \subset R^n, u, y \in R$ имеет относительную степень $r < n$ и линеаризованная (путем разложения в ряд Тейлора) модель ее нуль динамики асимптотически устойчива. Тогда, если многочлен $Q(\lambda) = \lambda^r + \alpha_{r-1}\lambda^{r-1} + ... + \alpha_0$ устойчив, то закон управления: $u = -\frac{1}{L_G L_F^{r-1} H}(L_F^r H + \alpha_{r-1} L_F^{r-1} H + ... + \alpha_0 L_F^0 H)$ обеспечивает локальную асимптотическую устойчивость замкнутой системы.*

Доказательство. При указанном в теореме законе управления замкнутая система в координатах z может быть представлена в виде: $\dot{z}^{[r]} = A_{11} z^{[r]}$, $\dot{z}^{(n-r)} = w(z^{[r]}, z^{[n-r]})$, где $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & ... & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & ... & -\alpha_{r-1} \end{pmatrix}$.

Уравнение внутренней динамики после линеаризации, путем разложения в ряд Тейлора, можно преобразовать к виду $\dot{z}^{[n-r]} = A_{21} z^{[r]} + A_{22} z^{[n-r]}$. Тогда линеаризованная модель всей системы будет в матричном виде описываться следующим уравнением: $\begin{pmatrix} \dot{z}^{[r]} \\ \dot{z}^{[n-r]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{[r]} \\ z^{[n-r]} \end{pmatrix}$. Для нуль-динамики системы линеаризованная модель примет вид $\dot{z}^{[r]} = 0$, $\dot{z}^{[n-r]} = A_{22} z^{[n-r]}$. Характеристический многочлен матрицы A_{11} совпадает с устойчивым многочленом $Q(\lambda)$. Тогда характеристический многочлен матрицы всей линеаризованной модели системы будет следующим:

$\det\begin{pmatrix} \lambda E_r - A_{11} & 0 \\ -A_{21} & \lambda E_{n-r} - A_{22} \end{pmatrix} = Q(\lambda)\det(\lambda E_{n-r} - A_{22})$, где E_r, E_{n-r} - соответствующие единичные матрицы размерностей r и $n-r$, соответственно. Очевидно, что характеристический многочлен всей системы будет устойчивым, если устойчивым будет многочлен $\det(\lambda E_{n-r} - A_{22})$ подсистемы нуль-динамики, что соответствует условию теоремы.

Задача слежения.

Пусть функция $y_p(t)$ определяет программное движение системы. Введем следующие обозначения $e_i = y^{(i)} - y_p^{(i)}, i = 0,1,2,...,(r-1)$, где $y^{(i)}$ выход системы и соответствующие его производные. Выберем закон управления в следующем виде:

$u = -\dfrac{1}{L_G L_F^{r-1} H}(L_F^r H - y_p^{(r)} + \alpha_{r-1} e_{r-1} + ... + \alpha_0 e_0)$. Тогда уравнения замкнутой системы примет вид: $\dot{\bar{e}} = A_{11}\bar{e}$, $\dot{z}^{(n-r)} = w(\bar{e} + \bar{y}_p, z^{[n-r]})$, где $\bar{e} = (e_0, ..., e_{r-1})^T$, $\bar{y}_p = (y_p, \dot{y}_p, ..., y_p^{(r-1)})^T$.

Теорема. *Пусть система* $\dot{x} = F(x) + G(x)u; y = H(x), x \in \Omega \subset R^n, u \in R$ *имеет относительную степень* $r < n$ *и ее нуль-динамика экспоненциально устойчива. Тогда если многочлен* $Q(\lambda) = \lambda^r + \alpha_{r-1}\lambda^{r-1} + ... + \alpha_0$ *устойчив и программная траектория и ее* $(r-1)$ *производная достаточны малы, то управление* $u = -\dfrac{1}{L_G L_F^{r-1} H}(L_F^r H - y_p^{(r)} + \alpha_{r-1} e_{r-1} + ... + \alpha_0 e_0)$ *обеспечивает сходимость к нулю ошибки слежения при неограниченном увеличении времени, а также ограниченность переменных внутренней динамики:* $e(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$, $\| z^{[n-r]} \| < \delta, \delta > 0$.

Доказательство данной теоремы базируется на построении соответствующей функции Ляпунова.

Контрольные вопросы к лекции 7.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1.	Задано векторное поле $F=-x^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}; x\in R$. Является ли данное векторное поле полным?	1. Да, является полным. 2. Нет, не является полным. 3. Такого векторного поля не существует.
2	Производная Ли от произведения дифференцируемых скалярных функций $\alpha(x)\beta(x)$ по векторному полю F равна …	1. .. $L_F(\alpha\beta)=(\beta\cdot\nabla(\alpha))F$ 2. .. $L_F(\alpha\beta)=(\alpha\cdot\nabla(\beta))F$ 3. .. $L_F(\alpha\beta)=(\beta\cdot\nabla(\alpha)+\alpha\cdot\nabla(\beta))F$
3	Производная Ли векторного поля G по полю F равна …	1. .. $L_F G-L_G F$ 2. .. $L_F G+L_G F$ 3. .. $L_G F-L_F G$
4	Совокупность функций $(x^2,ax+b,c)$, где a,b,c - некоторые постоянные, является …	1. … неиволютивной 2. … инволютивной 3. … инволютвной, только если $b=c$
5	Задана система уравнений в частных производных $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}f_1(x)+\dfrac{\partial u}{\partial x_2}f_2(x)=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}g_2(x)+\dfrac{\partial u}{\partial x_3}g_3(x)=0\end{cases}$. Условия интегрируемости данной системы имеет вид …	1. .. $[F,G]=\alpha_1(x)F(x)+\alpha_2(x)G(x)$ 2. .. $[F,G]\neq\alpha_1(x)F(x)+\alpha_2(x)G(x)$ 3. .. $[F,G]=[G,F]$ где $F=(f_1,f_2,0)^T;G=(0,g_2,g_3)^T$; $\alpha_i(x)$ - скалярные поля.
6	Условие линеаризуемости обратной связью по состоянию системы $\dot{x}=F(x)+G(x)u$ в области Ω имеет вид…	1. .. $rank[F,ad_G F,...,ad_G^{n-1}F]=n$ и множество $\{F,ad_G F,...,ad_G^{n-2}F\}$ инволютивно для $\forall x\in\Omega$ 2. .. $rank[G,ad_F G,...,ad_F^{n-1}G]=n$ и множество $\{G,ad_F G,...,ad_F^{n-2}G\}$ инволютивно для $\forall x\in\Omega$ 3. .. $rank[G,ad_F G,...,ad_F^{n-2}G]=n-1$ и множество $\{G,ad_F G,...,ad_F^{n-1}G\}$ инволютивно для $\forall x\in\Omega$
7	Относительный порядок (степень) нелинейной автономной аффинной системы $\dot{x}=F(x)+G(x)u; y=H(x)$, где $x\in\Omega\subseteq R^n, u\in R, y\in R$ равен …	1. .. $\min\limits_{x\in\Omega\backslash x=0}[rank(\dfrac{\partial H}{\partial x})]$ 2. .. $\max\limits_{x\in\Omega\backslash x=0}[rank(\dfrac{\partial H}{\partial x})]$ 3. .. $\arg\{\min\limits_r[L_G L_F^{r-1}H(x)\neq 0]\};\forall x\in\{\Omega\backslash x=0\}$
8	Описание подсистемы внешней динамики системы $\dot{x}=F(x)+G(x)u; y=H(x)$, где $x\in\Omega\subseteq R^n, u\in R, y\in R$ с относительным порядком $r<n$ можно привести, с помощью линеаризации обратной связью по выходу, к форме …	1. .. $\dot{z}_1=z_2,...,\dot{z}_{r-1}=z_r,\dot{z}_r=f(z^{[r]},z^{[n-r]})+g(z^{[r]},z^{[n-r]})u$, 2. .. $\dot{z}_1=z_2,...,\dot{z}_{r-1}=f(z^{[r]},z^{[n-r]}),\dot{z}_r=g(z^{[r]},z^{[n-r]})u$ 3. .. $\dot{z}_1=z_2,...,\dot{z}_{r-1}=z_r,\dot{z}_r=g(z^{[r]},z^{[n-r]})+f(z^{[r]},z^{[n-r]})u$

		где $z^{[r]}=(z_1,...,z_r)^T, z^{[n-r]}=(z_{r+1},...,z_n)^T$; $f(z)=f(z^{[r]},z^{[n-r]})=L_F^r H(x), g(z)=L_G L_F^{r-1} H(x)$
9.	Переменные состояния подсистемы внешней динамики порядка r системы $\dot{x}=F(x)+G(x)u; y=H(x)$, где $x\in\Omega\subseteq R^n, u\in R, y\in R$ определяются соотношениями …	1. .. $z_1=L_F^0 L_G H(x),..., z_r=L_F^{r-1}L_G H(x)$ 2. .. $z_1=L_F^0 H(x),..., z_r=L_F^{r-1}H(x)$ 3. .. $z_1=L_G^0 H(x),..., z_r=L_G^{r-1}H(x)$
10	Переменные состояния вектора $z^{[n-r]}$ подсистемы внутренней динамики $\dot{z}^{[n-r]}=w(z^{[r]},z^{[n-r]})$ определяются как …	1. .. как $(n-r)$ независимых решений уравнений $L_F q_k(x)=0; k=1,2,...n$ 2. .. как $(n-r)$ независимых решений уравнений $L_G q_k(x)=0; k=1,2,...n$ 3. … как $(n-r)$ независимых решений уравнений $L_F L_G q_k(x)=0; k=1,2,...n$
11	Выход преобразованной канонической системы, преобразованной с помощью метода линеаризации обратной связью по выходу, определяется следующим соотношением….	1. .. $y=z_1$ 2. … $y=H(z^{[r]},z^{[n-r]})$ 3. … $y=z_r$
12	Уравнения нуль - динамики нелинейной системы при ее преобразовании к канонической форме с помощью метода линеаризации обратной связью по выходу имеют вид …	1. .. $\dot{z}_1=z_2,...,\dot{z}_{r-1}=z_r, \dot{z}_r=f(z^{[r]},z^{[n-r]}),$ $\dot{z}^{[n-r]}=w(z^{[r]},z^{[n-r]})$ 2. … $\dot{z}_1=z_2,...,\dot{z}_{r-1}=z_r, \dot{z}_r=f(z^{[r]},z^{[n-r]}),$ $w(z^{[r]},z^{[n-r]})=0$ 3. .. $z^{[r]}=0, \dot{z}^{[n-r]}=w(0,z^{[n-r]})$
13	Система $\dot{x}=F(x)+G(x)u; y=H(x)$, где $x\in\Omega\subseteq R^n, u\in R, y\in R$, будет локально асимптотически устойчивой в окрестности точки равновесия, если …	1. .. ее подсистема внутренней динамики будет иметь ограниченную нуль – динамику и существует закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость подсистемы внешней динамики. 2 . .. ее подсистема внутренней динамики будет асимптотически устойчивой в окрестности точки равновесия и существует закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость подсистемы внешней динамики 3. .. Если можно найти управление $u=-K^T x$, что в окрестности точки равновесия существует функция Ляпунова $V(K,x)>0$, допускающая бесконечно большой низший предел и бесконечно малый верхний предел, имеющая производную в силу уравнений системы $\dot{V}(K,x)<0$ для любого K из заданной области.