ПЗ-5. Область сходимости функциональных последовательностей и рядов.

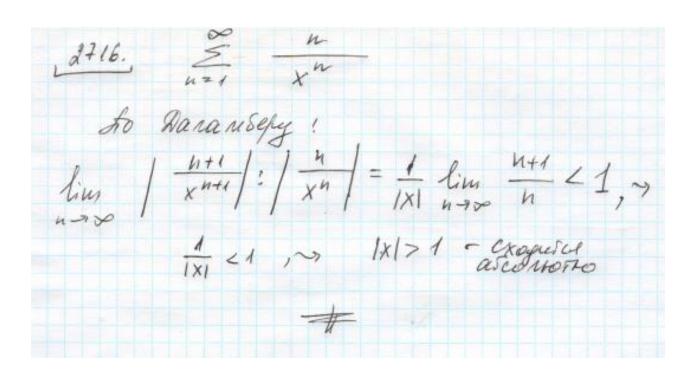
 1° . Область сходныости. Совокупность X_0 тех визчений x, для которых сходится функциональный ряд

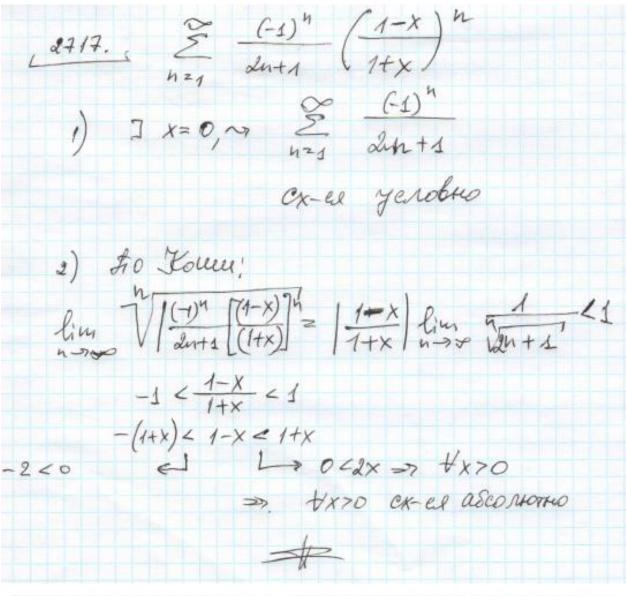
$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$
 (1) называется областью сходимости этого ряда, а функция

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (x \in X_0)$$

- его суммой.

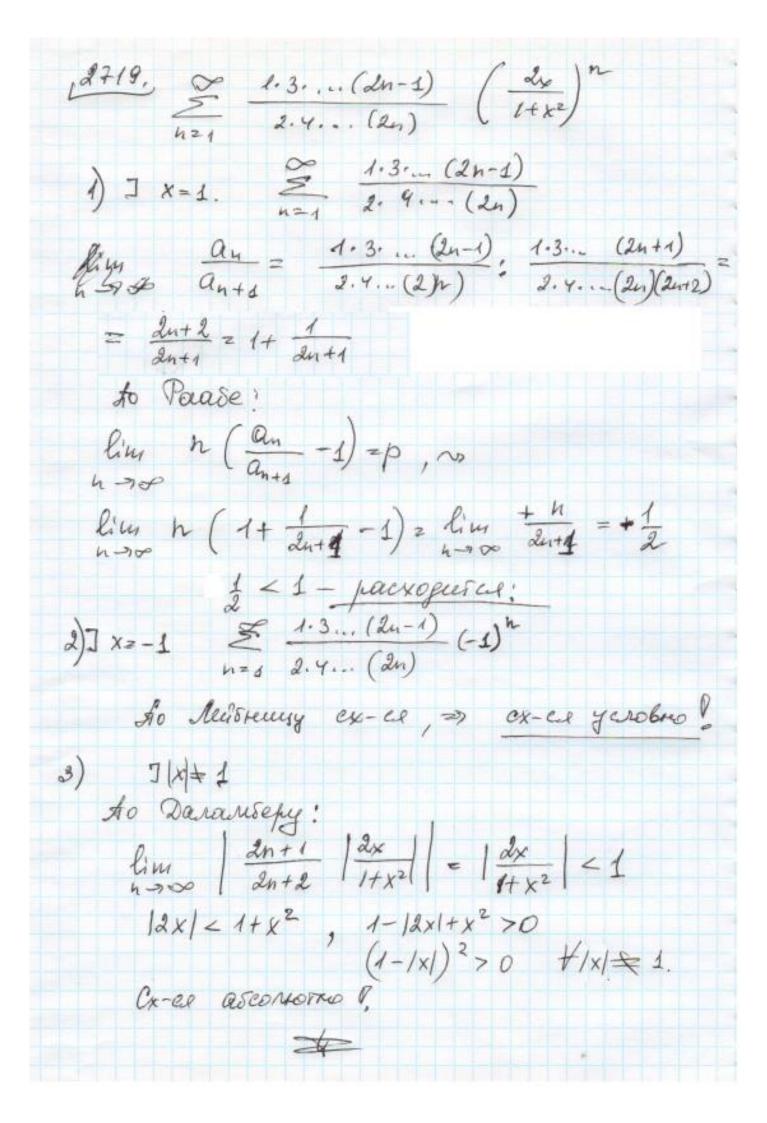
Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:





2*) fo daransepy:

lim $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}\right|$; $\left|\frac{(-1)^{n}}{2n+1}\left(\frac{1+x}{1+x}\right)^{n}\right|^{2}$ = $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ lim $\frac{2n+1}{2n+3}$ ≤ 1 , \Rightarrow $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \leq 1$



Определить промежутки сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

$$2723. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1 + n^q}, \ q > 0, \ 0 < x < \pi.$$

Абсолютная сходимость. Поскольку $|\sin nx| \leq 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} \left| \sin nx \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q},$$

абсолютно сходится, если q-p>1 $\left(\frac{n^p}{1+n^q}\sim \frac{1}{n^{q-p}} \ \text{при } n\to\infty\right).$

Условная сходимость. Представляя данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}} \cdot \frac{1}{1+n^{-q}}$$

и пользуясь признаком Абеля, находим, что при q-p>0 ряд сходится. Действительно, в этом случае последовательность $\left(\frac{1}{1+n^{-q}}\right)\uparrow 1$ при $n\to\infty$, а ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^{q-p}}$, в силу признака Дирихле, сходится. Следовательно, при $0< q-p\leqslant 1$ исследуемый ряд сходится условно. \blacktriangleright

2733.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}, y \ge 0.$$

◀ Пусть $0 \le y \le 1$. Тогда ряд, по признаку Коши, сходится при |x| < 1. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+y^n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+y^n}} = |x| < 1.$$

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x \geqslant 1$, то $\frac{x^n}{n+y^n} \geqslant \frac{x^n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$. Следовательно, данный ряд расходится, ибо расходится гармонический ряд.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и x < -1, то общий член ряда к нулю не стремится, так как $\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^n}{n + y^n} = +\infty$.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$, x = -1, то получим ряд лейбницева типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+y^n}.$$

Пусть y > 1. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n \cdot \frac{1}{1+ny^{-n}},$$

в силу признака Коши, абсолютно сходится, если |x| < y.

При $x=\pm y$ общий член исследуемого ряда к нулю не стремится, так как $\lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{n+y^n}=1$.

Итак, если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и |x| < 1 или |x| < y и y > 1, то ряд сходится абсолютно. Если же x = -1 и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то данный ряд сходится лишь условно. \blacktriangleright

2735.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}, \ x \geqslant 0.$$

◄ Рассмотрим три случая: a) 0 ≤ x < 1; б) x = 1; в) x > 1.

В случае а) имеем

 $\ln(1+x^n) \sim x^n$ при $n \to \infty$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$, согласно признаку Коши, сходится при любом y, то при таких же условиях сходится и исследуемый ряд.

В случае б) получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$, который при y>1 сходится

Наконец, в случае в) имеем

$$\ln(1+x^n) = n \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \sim n \ln x + \frac{1}{x^n}, \ n \to \infty.$$

Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^{y-1}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{y}x^{n}}$ сходятся при y > 2, то данный ряд, также сходится при y > 2.

Сходится абсолютно при: 1) $0 \le x < 1$, $-\infty < y < +\infty$; 2) x = 1, y > 1 и 3) x > 1, y > 2.

2740. Доказать, что если ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x=x_0$, то этот ряд сходится также при $x>x_0$.

∢ К ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

применим признак Абеля. Здесь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ сходится по условию, $\left(\frac{1}{n^{x-x_0}}\right)$ — монотонная н ограниченная единицей последовательность $\forall x > x_0$.

Следовательно, по признаку Абеля, ряд сходится также при $x > x_0$.

Задачи для самостоятельного решения

2718.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

2721.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

2726.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

2728.
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$$
.

Литература

Демидович Б.П.

Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.