Тема 2

Кривые в трехмерном пространстве

Рассмотрим теперь регулярные кривые в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. В предыдущем разделе мы построили репер Френе для плоской бирегулярной кривой и изучили его зависимость от натурального параметра, что, в конечном счете, позволило нам решить натуральное уравнение. В трехмерном пространстве двух векторов — скорости и главной нормали, — не хватает для репера, поэтому нужны дополнительные построения.

2.1 Формулы Френе

Конструкция 2.1. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная бирегулярная кривая в $\mathbb{R}^3$. Как и выше, пусть τ — вектор скорости $\dot{\gamma}(s)$, и ν — главная нормаль к γ в точке $\gamma(s)$. Обозначим через β — векторное произведение $[\tau, \nu]$. Тройка (τ, ν, β) образует положительно ориентированный ортонормальный базис в $\mathbb{R}^3$.

Определение 2.2. Вектор β называется *бинормалью* к бирегулярной кривой γ в точке $\gamma(s)$, а базис (τ, ν, β) — *репером Френе* кривой γ в точке $\gamma(s)$.

Лемма 2.3. *Производная $\dot{\beta}(s)$ вектора бинормали по натуральному параметру коллинеарна вектору главной нормали ν.*

Доказательство. По формуле Лейбница имеем

$$\dot{\beta} = [\tau, \nu]^{\cdot} = [\dot{\tau}, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [\tau, \dot{\nu}],$$

где последнее равенство справедливо, так как вектор $\dot{\tau}$, равный $\ddot{\gamma}$, коллинеарен ν и, значит, $[\dot{\tau}, \nu] = 0$. Отсюда, в частности, следует, что вектор $\dot{\beta}$ ортогонален τ. Далее, так как вектор $\beta(s)$ — единичный при каждом s, то $\dot{\beta}$ перпендикулярен β. Следовательно, $\dot{\beta}$ коллинеарен вектору ν, что и требовалось. $\square$

Определение 2.4. Величина $\varkappa = -\langle\dot\beta, \nu\rangle$ называется *кручением* бирегулярной кривой γ в точке $\gamma(s)$.

Замечание 2.5. Из определения и леммы 2.3 вытекает, что $\dot\beta = -\varkappa\nu$. Ясно, что кручение $\varkappa$ является гладкой функцией натурального параметра s.

Теорема 2.6 (Формулы Френе)**.** *В сделанных предположениях справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{cases} \dot\tau = k\,\nu, \\ \dot\nu = -k\,\tau + \varkappa\,\beta, \\ \dot\beta = -\varkappa\,\nu. \end{cases}$$

где k и $\varkappa$ — кривизна и кручение бирегулярной кривой γ в точке $\gamma(s)$, соответственно.

Доказательство. Первое и третье уравнения — это фактически определения кривизны и кручения. Осталось доказать второе равенство.

Так как вектор $\dot\nu$ перпендикулярен ν, то его можно разложить по векторам τ и β. Положим $\dot\nu = a\,\tau + b\,\beta$. В силу ортонормальности репера Френе имеем $a = \langle\dot\nu, \tau\rangle$ и $b = \langle\dot\nu, \beta\rangle$. Мы должны показать, что $a = -k$, а $b = \varkappa$.

Так как $\langle\nu, \tau\rangle = \langle\nu, \beta\rangle = 0$, то, дифференцируя эти равенства, заключаем, что

$$0 = \langle\dot\nu, \tau\rangle + \langle\nu, \dot\tau\rangle = a + k, \qquad 0 = \langle\dot\nu, \beta\rangle + \langle\nu, \dot\beta\rangle = b - \varkappa,$$

что и требовалось доказать. □

Приведем теперь явные формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в произвольной параметризации.

Теорема 2.7. *Пусть $\gamma(t)$ — бирегулярная кривая. Тогда*

$$k = \frac{\big\|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\big\|}{\|\dot\gamma\|^3}, \qquad \varkappa = \frac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\big\|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\big\|^2},$$

где через (u, v, w) обозначено смешанное произведение векторов u, v и w из $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Пусть сначала $t = s$ — натуральный параметр. Тогда

$$\dot\gamma = \tau, \quad \|\dot\gamma\| = 1, \quad \ddot\gamma = k\,\nu, \quad \big\|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\big\| = k$$

и

$$\dddot\gamma = \dot k\,\nu + k(-k\,\tau + \varkappa\,\beta), \qquad (\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = k^2\varkappa,$$

поэтому в этом случае теорема имеет место.

Сделаем замену параметра. Оказывается, что приведенные формулы при этом не изменятся. Действительно, обозначая начальный параметр через s, новый параметр — через t, а дифференцирования по параметрам — соответствующими нижними индексами, получаем

$$\gamma_s = \gamma_t\,t_s, \quad \gamma_{ss} = \gamma_{tt}\,t_s^2 + \gamma_t\,t_{ss}, \quad \gamma_{sss} = \gamma_{ttt}\,t_s^3 + 3\gamma_{tt}\,t_s\,t_{ss} + \gamma_t\,t_{sss},$$

откуда

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = [\gamma_t, \gamma_{tt}]\, t_s^3, \qquad (\gamma_s, \gamma_{ss}, \gamma_{sss}) = (\gamma_t, \gamma_{tt}, \gamma_{ttt})\, t_s^6$$

и, наконец,

$$\frac{\big\|[\gamma_s, \gamma_{ss}]\big\|}{\|\gamma_s\|^3} = \frac{\big\|[\gamma_t, \gamma_{tt}]\big\|}{\|\gamma_t\|^3} \quad \text{и} \quad \frac{(\gamma_s, \gamma_{ss}, \gamma_{sss})}{\big\|[\gamma_s, \gamma_{ss},]\big\|^2} = \frac{(\gamma_t, \gamma_{tt}, \gamma_{ttt})}{\big\|[\gamma_t, \gamma_{tt}]\big\|^2}.$$

Доказательство закончено. □

Упражнение 2.8. Пусть t — произвольный параметр пространственной бирегулярной кривой γ. Проверить справедливость следующих формул для вычисления векторов бинормали и главной нормали:

$$\beta(t) = \frac{[\dot\gamma, \ddot\gamma]}{\big\|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\big\|}, \qquad \nu(t) = [\beta, \tau].$$

2.2 Натуральные уравнения

Оказывается, кривизна и кручение полностью определяют форму бирегулярной кривой в трехмерном пространстве.

Теорема 2.9. *Пусть $f(s)$ и $g(s)$ — две гладкие функции на отрезке $[a, b]$, причем функция $f(s)$ положительна. Тогда существует единственная, с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства, натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$, такая, что ее кривизна $k(s)$ и кручение $\varkappa(s)$ равны соответственно $f(s)$ и $g(s)$.*

Доказательство. Формулы Френе, в которые вместо кривизны подставлена функция f, а вместо кручения — функция g, можно рассматривать как систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с девятью неизвестными — компонентами векторов τ, ν и β. Эту систему будем обозначать символом $(*)$. Нам будем удобно записать ее в матричном виде. Пусть $\tau = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$, $\nu = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$, $\beta = (\beta^1, \beta^2, \beta^3)$, тогда система $(*)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot\tau^1 & \dot\tau^2 & \dot\tau^3 \\ \dot\nu^1 & \dot\nu^2 & \dot\nu^3 \\ \dot\beta^1 & \dot\beta^2 & \dot\beta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 \\ \nu^1 & \nu^2 & \nu^3 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \end{pmatrix}.$$

Матрицу из системы $(*)$, строками которой являются координаты векторов τ, ν и β, обозначим через η, а матрицу, содержащую f и g, — через Ω. Таким образом, система $(*)$ имеет вид $\dot\eta = \Omega\eta$. Отметим, что Ω — кососимметричная матрица.

Выберем в $\mathbb{R}^3$ некоторый ортонормальный положительно ориентированный репер (τ_0, ν_0, β_0). По теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений существуют и единственны вектор-функции $\tau(s)$, $\nu(s)$, $\beta(s)$, удовлетворяющие системе $(*)$ и начальным условиям $\tau(a) = \tau_0$, $\nu(a) = \nu_0$, $\beta(a) = \beta_0$. Положим

$$\gamma(s) = \gamma_0 + \int_a^s \tau(t)\, dt,$$

где γ_0 — произвольный вектор, и покажем, что γ — искомая кривая, т.е. γ — бирегулярная кривая, параметризованная натуральным параметром s, её кривизна $k(s)$ равна $f(s)$, а кручение $\varkappa(s)$ равно $g(s)$.

Лемма 2.10. *При каждом s тройка $\bigl(\tau(s),\nu(s),\beta(s)\bigr)$ образует ортонормальный положительно ориентированный репер.*

Доказательство. Ортонормированность репера $\bigl(\tau(s),\nu(s),\beta(s)\bigr)$ равносильна ортогональности матрицы $\eta(s)$ при каждом s, т.е. $\eta^T(s)\eta(s)=E$, где E — единичная матрица. Так как начальное условие (τ_0,ν_0,β_0) представляет собой ортонормальный репер, то при $s=a$ матрица $\eta(a)$ ортогональна. Поэтому достаточно проверить, что матрица $\eta^T(s)\eta(s)$ не зависит от s. Для этого продифференцируем выражение $\eta^T(s)\eta(s)$ по s и воспользуемся тем, что $\dot\eta(s)=\Omega\eta$. Имеем:

$$\bigl(\eta^T\eta\bigr)^{\cdot}=\dot\eta^T\eta+\eta^T\dot\eta=\eta^T\Omega^T\eta+\eta^T\Omega\eta=\eta^T(\Omega^T+\Omega)\eta=0,$$

где последнее равенство следует из кососимметричности матрицы Ω, что и требовалось.

Положительность ориентации репера $\bigl(\tau(s),\nu(s),\beta(s)\bigr)$ при каждом s следует из того, что репер (τ_0,ν_0,β_0) ориентирован положительно по предположению, а определитель матрицы $\eta(s)$ не обращается в нуль ни при каком s, значит ориентация не меняется. Лемма доказана. □

Проверим, что γ — искомая кривая. Так как $\dot\gamma(s)=\tau(s)$, то из леммы 2.10 следует, что γ — регулярна, и s — натуральный параметр. Продифференцируем еще раз и воспользуемся тем, что γ — решение системы $(*)$: $\ddot\gamma(s)=\dot\tau(s)=f(s)\,\nu(s)$. По предположению функция $f(s)$ положительна, а $\nu(s)$ — единичный вектор в силу леммы 2.10, поэтому $f(s)$ совпадает с кривизной, а $\nu(s)$ — с главной нормалью кривой γ в точке $\gamma(s)$. Так как $f(s)>0$ при любом s, то кривая γ — бирегулярна. Далее, поскольку каждый из ортонормальных реперов $\bigl(\tau(s),\nu(s),\beta(s)\bigr)$ положительно ориентирован, то $\beta(s)$ совпадает с бинормалью к γ. Наконец, по условию $\dot\beta(s)=-g(s)\,\nu(s)$, откуда $g(s)$ совпадает с кручением кривой γ. Таким образом, доказано существование кривой γ.

Теперь докажем теперь единственность кривой γ. Пусть имеются две натурально параметризованные параметром s кривые γ_1 и γ_2 с одинаковыми кривизной k и кручением $\varkappa$. С помощью движения совместим их начальные точки и начальные реперы Френе. Полученные кривые вновь обозначим теми же буквами. Пусть $\bigl(\tau_i(s),\nu_i(s),\beta_i(s)\bigr)$ — семейство реперов Френе для кривой γ_i. Заметим, что эти реперы удовлетворяют одной и той же системе обыкновенных дифференциальных уравнений Френе и имеют одинаковые начальные условия. Отсюда по теореме единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения реперы Френе кривых γ_i совпадают в соответствующих точках. В частности, совпадают векторы $\tau_i(s)$. Наконец, так как $\gamma_i(s)$ является решением дифференциального уравнения $\dot\gamma_i(s)=\tau_i(s)$ с одинаковыми начальными условиями, кривые γ_i совпадают. Теорема доказана. □

Определение 2.11. Если $f(s)$ и $g(s)$ — две гладкие функции, такие, что $f(s)>0$ при всех s, то условия $k(s)=f(s)$, $\varkappa(s)=g(s)$ на кривизну k и кручение $\varkappa$ кривой γ называются *натуральными уравнениями пространственной кривой. Решить натуральные уравнения* означает найти натурально параметризованную бирегулярную кривую $\gamma(s)$ с кривизной $f(s)$ и кручением $g(s)$.

Следствие 2.12. *Натуральное уравнение пространственной кривой всегда имеет решение. Более того, это решение единственно с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства* $\mathbb{R}^3$.

Замечание 2.13. Напомним, что в плоском случае по одной гладкой функции — ориентированной кривизне — однозначно восстанавливается регулярная (не обязательно бирегулярная) кривая. Дело в том, что в двумерном случае семейство ориентированных главных нормалей регулярной кривой продолжается по непрерывности в те точки кривой, в которых ускорение обращается в нуль, т.е. нарушается бирегулярность. В трехмерном пространстве такое продолжение, вообще говоря, невозможно, так как в окрестности точки, в которой нарушается бирегулярность, прямая, проведенная вдоль главной нормали, может меняться скачком.

Упражнение 2.14. Привести пример регулярной кривой $\gamma(s)$, для которой выполнено равенство $(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = 0$, но кривая γ не лежит ни в одной двумерной плоскости. Может ли такая кривая быть бирегулярной? Исследовать поведение главной нормали построенной кривой в окрестности точек, в которых нарушается бирегулярность.