Вариант 11

1. **(7.12)** Дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в идеальном контуре Томсона имеет вид: $q^{11}+10^8\cdot q = 0$. Определить магнитный поток, ω_0пронизывающий катушку контура в момент времени $t = \pi\cdot10^{-4}/2$ с, если при $t = 0$ магнитный поток сквозь катушку равен нулю, а заряд на конденсаторе $q_0 = 10^{-6}$ Кл. Емкость конденсатора $C = 10^{-6}$ Ф.

Дано:

$t = \pi\cdot10^{-4}/2$ с
$q_0 = 10^{-6}$ Кл
$\Phi_0 = 0$
$C = 10^{-6}$ Ф
$q'' + 10^8\cdot q = 0$
Ф- ?

Решение:

Магнитный поток пропорционален силе тока:

$$\Phi = L\cdot I$$
$$L = 1/(C\cdot\omega_0^2).$$

В данном колебательном контуре происходят незатухающие магнитные колебания. Дифференциальное уравнение этих колебаний: $q'' + \omega_0^2\cdot q = 0$. Следовательно, $\omega_0^2 = 10^8$, $\omega_0 = 10^4$ рад/с. Решением данного дифференциального уравнения является функция

$$q = q_m\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

отсюда

$$I = -dq/dt = q_m\omega_0\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Так как при $t = 0$ заряд$q = q_0$ и $I_0 = \Phi_0/L = 0$, то

$$q_0 = q_m\cdot\cos(\varphi_0),$$
$$0 = q_m\omega_0\cdot\sin(\varphi_0),$$
$$\varphi_0 = 0,\ q_m = q_0.$$

Таким образом,

$$q(t) = q_m\cdot\cos(\omega_0 t),$$
$$I(t) = q_0\omega_0\sin(\omega_0 t),$$
$$\Phi(t) = L\cdot q_0\omega_0\sin(\omega_0 t) = q_0\sin(\omega_0 t)/(C\omega_0).$$

При $t = \pi\cdot10^{-4}/2$ с

$$\Phi = 10^{-6}\cdot\sin(10^4\cdot\pi\cdot10^{-4}/2)/(10^{-6}\cdot10^4) = 10^{-4}\ \text{Вб}.$$

Ответ: $\Phi = 10^{-4}$ Вб.

2. **(7.28)** Колебательный контур состоит из последовательно соединенных катушки с индуктивностью $L = 40$ мГн, резистора сопротивлением $R = 3$ Ом и конденсатора емкостью $C = 4{,}8$ мкФ. Определить частоту колебаний. Через какое время начальная амплитуда колебаний заряда уменьшится в два раза?

Дано:

$R = 3$ Ом
$L = 40$ мГн $= 0{,}04$ Гн
$C = 4{,}8$ мкФ $= 4{,}8\cdot10^{-6}$ Ф
$n = 2$
ν - ?, τ - ?

Решение:

Угловая частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

гдеβ - коэффициент затуханий:

Так как

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а коэффициент затуханий определяется как

$$\beta = R/(2L),$$

то имеем

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Угловая частота колебаний связана с частотой соотношением

$$\omega = 2\pi\nu$$

Отсюда

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Закон изменения амплитуды затухающих колебаний имеет вид:

$$q = q_0\cdot\exp(-\beta t)$$

где $\beta = R/(2L)$ – коэффициент затуханий.

При $t = \tau$

$$q_0/q = n.$$

Отсюда

$$\exp(2\beta\tau) = n$$
$$\exp(R\tau/L) = n$$
$$\tau = L\cdot\ln(n)/R.$$

Подставляя численные значения, находим:

$$\nu = 2{,}3\ \text{кГц};$$
$$\tau = 18\cdot10^{-3}\ \text{с} = 18\ \text{мс}.$$

Ответ: $\nu = 2{,}3$ кГц; $\tau = 18$ мс.

3. **(8.16)** Скорость изменения магнитной индукции в бетатроне $dB/dt = 60$ Тл/с. Вычислить напряженность E вихревого электрического поля на орбите электрона, если ее радиус $r = 0{,}5$ м.

Дано:

$dB/dt = 60$ Тл/с
$r = 0{,}5$ м
E - ?

Решение:

Воспользуемся первым уравнением Максвелла, записанным в виде:

$$2\pi r\cdot E = \oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\,d\Phi/dt.$$

Учитывая, что магнитный поток, пронизывающий камеру бетатрона

$$\Phi = B\cdot S,$$

где $S = \pi r^2$, получаем

$$2\pi r\cdot E = \pi r^2\cdot dB/dt.$$

Отсюда, напряженность вихревого электрического поля на орбите электрона

$$E = ½r\cdot dB/dt;$$
$$E = 0{,}5\cdot0{,}5\cdot60 = 15\ \text{В/м}.$$

Ответ: E = 15 В/м.

4. **(8.36)** Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью $L = 10^{-3}$ Гн и переменного конденсатора, емкость которого может меняться в пределах от $9{,}7\cdot10^{-12}$ Ф до $92\cdot10^{-12}$ Ф. В каком диапазоне длин волн может принимать радиостанции этот приемник?

Дано:

$L = 10^{-3}$ Гн
$C_1 = 9{,}7\cdot10^{-12}$ Ф
$C_2 = 92\cdot10^{-12}$ Ф
λ_1 - ?, λ_2 - ?

Решение:

Для того, чтобы определить длину волны, необходимо вычислить собственную частоту колебаний контура, так как

$$\lambda = c/\nu,$$

где c – скорость электромагнитной волны в вакууме.

Собственная частота колебаний

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Тогда длина волны:

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}.$$

Диапазон длин волн работы радиоприемника:

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{LC_1};$$

$$\lambda_2 = 2\pi c\sqrt{LC_2}.$$

Подставляя численные значения, находим:

$$\lambda_1 = 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{10^{-3} \cdot 9{,}7 \cdot 10^{-12}} = 186\,м;$$

$$\lambda_2 = 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{10^{-3} \cdot 92 \cdot 10^{-12}} = 570\,м.$$

Ответ: от $\lambda_1 = 186$ м до $\lambda_2 = 570$ м.

5. **(8.42)** Амплитуда электрической составляющей плоской электромагнитной волны E_0 = 50 мВ/м. Волна распространяется в вакууме. Найти среднее за период колебаний значение плотности потока энергии <S>.

Дано:

E_0 = 50 мВ/м = 0,05 В/м

<S> - ?

Решение:

Среднее значение плотности потока энергии в плоской электромагнитной волне равно

$$\langle S\rangle = \tfrac{1}{2}E_0H_0.$$

Учитывая, что

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_0 = \sqrt{\mu_0\mu}H_0,$$

получаем

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_0^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2.$$

Для вакуума $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Имеем

$$\langle S\rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2.$$

Подставляя численные значения, находим:

$$\langle S\rangle = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}{2} \cdot 0{,}05^2 = 3{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{Вт/м}^2.$$

Ответ: $\langle S\rangle = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ Вт/м^2.

6. **(1.3)** На пути одного из двух интерферирующих лучей разной интенсивности помещен светофильтр, пропускающий половину падающего на него света ($I_{2проп} = \frac{1}{2}I_2$). При этом минимальная интенсивность в интерференционной картине не изменилась. Найти отношение интенсивностей падающих лучей (I_2/I_1).

Дано:

$I_{2проп} = \frac{1}{2}I_2$

I_2/I_1 - ?

Решение:

Результирующая интенсивность двух интерферирующих лучей определяется как

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi.$$

Интенсивность будет минимальной при $\cos\Delta\varphi = -1$, т.е.

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}.$$

Учитывая, что $I_{2проп} = \frac{1}{2}I_2$, находим

$$I_{\min\,проп} = I_1 + \frac{I_2}{2} - 2\sqrt{I_1\frac{I_2}{2}}.$$

По условию задачи $I_{\min} = I_{\min проп}$, откуда

$$I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2} = I_1 + \frac{I_2}{2} - 2\sqrt{I_1\frac{I_2}{2}}$$

$$\frac{I_2}{2} + 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{I_1I_2} = 0$$

$$\frac{I_2}{I_1} + 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 4\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 8\cdot\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \approx 1{,}37.$$

Ответ: $I_2/I_1 = 1{,}37$.

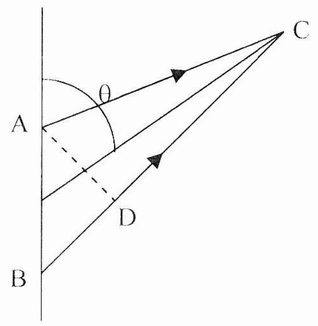
7. **(1.10)** Система состоит из двух одинаковых точечных источников когерентных волн. Расстояние между источниками d = 2λ. Источники колеблются в противофазе. Определить углы θ, которым соответствует: а) максимальное, б) минимальное излучение системы. Углы отсчитываются от линии, соединяющей источники. Расстояние от источников до точек наблюдения значительно больше λ.

Дано:

$d = 2\lambda$

θ - ?

Решение:



Когда расстояние от источников до точки наблюдения значительно превышает расстояние между источниками (AC, BC >> d), лучи AC и BD оказываются практически параллельными.

Тогда разность хода интерферирующих лучей

$$BC - AC = BD = d\cdot\cos\theta.$$

В точке наблюдения волна от источника B отстает по фазе на величину

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = (\alpha_1 - \alpha_2) + 2\pi d\cdot\cos\theta/\lambda.$$

Источники колеблются в противофазе, следовательно,

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \pi.$$

Учитывая, что $d = 2\lambda$, имеем

$$\Delta\varphi = \pi + 4\pi\cdot\cos\theta.$$

а) Из условия максимумов интенсивности получим

$$\pi + 4\pi\cdot\cos\theta = 2\pi m,$$

откуда следует

$$\cos\theta = (2m - 1)/4.$$

Это соотношение может выполняться только при m = -1, 0, 1, 2. Имеем:

m = -1, $\cos\theta = -3/4$, $\theta = 138{,}59°$;

m = 0, $\cos\theta = -1/4$, $\theta = 104{,}48°$;

m = 1, $\cos\theta = 1/4$, $\theta = 75{,}52°$;

m = 2, $\cos\theta = 3/4$, $\theta = 41{,}41°$.

Таким образом, максимумы интенсивности имеют место под углами: θ = 41,41°; θ = 75,52°; θ = 104,48°; θ = 138,59°.

б) Из условия минимумов интенсивности получим

$$\pi + 4\pi\cdot\cos\theta = (2m + 1)\pi,$$

откуда следует

$$\cos\theta = m/2.$$

Это соотношение может выполняться только при m = -2, -1, 0, 1, 2. Имеем:

m = -2, $\cos\theta = -1$, $\theta = 180°$;

m = -1, $\cos\theta = -1/2$, $\theta = 120°$;

m = 0, $\cos\theta = 0$, $\theta = 90°$;

m = 1, $\cos\theta = 1/2$, $\theta = 60°$;

m = 2, $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$.

Таким образом, минимумы интенсивности имеют место под углами: $\theta = 0$; $\theta = 60°$; $\theta = 90°$; $\theta = 120°$; $\theta = 180°$.

Ответ: а) $\theta = 41{,}41°$; $\theta = 75{,}52°$; $\theta = 104{,}48°$; $\theta = 138{,}59°$;

б) $\theta = 0$; $\theta = 60°$; $\theta = 90°$; $\theta = 120°$; $\theta = 180°$.

8. **(1.60)** Установка для наблюдения конец Ньютона состоит из плоскопараллельной стеклянной пластинки и соприкасающейся с ней выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы. Монохроматический свет падает нормально на плоскую границу линзы. Интерференционная картина наблюдается в отраженном или проходящем свете. Центральное темное пятно при наблюдении колец в отраженном свете считают за нулевое. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света, если при наблюдении в отраженном свете радиусы двух соседних светлых колец r_k = 3,8 мм и r_{k+1} = 4,2 мм, радиус кривизны линзы R = 6,5 м.

Дано:

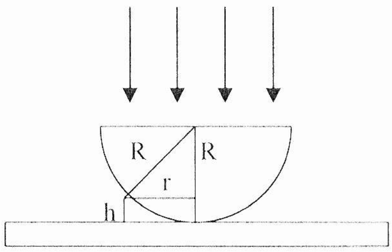
$r_k = 3{,}8$ мм $= 3{,}8\cdot10^{-3}$ м

$r_{k+1} = 4{,}2$ мм $= 4{,}2\cdot10^{-3}$ м

R = 6,5 м

k - ?, λ - ?

Решение:



Для m-го светлого кольца запишем условие максимума:

$$2h\cdot\cos\beta = m\lambda - \lambda/2$$

$$\cos\beta = 1$$

$$4h = (2m - 1)\lambda,$$

где h – толщина воздушного пространства между линзой и пластинкой:

$$h = (2m - 1)\lambda/4.$$

Радиус кольца (с учетом симметричности системы)

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2$$

$$r^2 = 2Rh - h^2$$

$$r \approx \sqrt{2Rh}$$

$$r_m \approx \sqrt{\frac{(2m-1)}{2}R\lambda}.$$

Для k-го светлого кольца

$$r_k \approx \sqrt{\frac{(2k-1)}{2}R\lambda}.$$

Для k+1-го светлого кольца

$$r_{k+1} \approx \sqrt{\frac{(2k+1)}{2}R\lambda}.$$

Отсюда

$$2k\lambda = \frac{r_k^2 + r_{k+1}^2}{R}; \quad \lambda = \frac{r_{k+1}^2 - r_k^2}{R};$$

$$k = \frac{1}{2}\cdot\frac{r_k^2 + r_{k+1}^2}{r_{k+1}^2 - r_k^2}.$$

Подставляя численные значения, находим:

$$k = 5; \ \lambda = 0{,}5 \text{ мкм}.$$

Ответ: $k = 5$; $\lambda = 0{,}5$ мкм.

9. **(2.43)** При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции линии λ_1 = 0,65 мкм в первом порядке равен φ_1 = 20,7°. Найти угол дифракции для линии λ_2 = 0,5 мкм в третьем порядке.

Дано:

$\lambda_1 = 0{,}65$ мкм $= 0{,}65\cdot10^{-6}$ м

$m_1 = 1$

$\varphi_1 = 20{,}7°$

$\lambda_2 = 0{,}5$ мкм $= 0{,}5\cdot10^{-6}$ м

$m_2 = 3$

φ_2 - ?

Решение:

Запишем условие максимумов

$$d\cdot\sin\varphi = m\lambda.$$

Для линии λ_1 в первом порядке спектра имеем

$$d\cdot\sin\varphi_1 = m_1\lambda_1.$$

Отсюда постоянная решетки

$$d = m_1\lambda_1/\sin\varphi_1$$

Для линии λ_2 в третьем порядке спектра имеем

$$d\cdot\sin\varphi_2 = m_2\lambda_2$$

или

$$m_1\lambda_1\cdot\sin\varphi_2/\sin\varphi_1 = m_2\lambda_2,$$

Откуда искомый угол

$$\sin\varphi_2 = m_2\lambda_2\cdot\sin\varphi_1/(m_1\lambda_1)$$

$$\varphi_2 = \arcsin[m_2\lambda_2\cdot\sin\varphi_1/(m_1\lambda_1)].$$

Подставляя численные значения, находим:

$$\varphi_2 = \arcsin[3\cdot0{,}5\cdot10^{-6}\cdot\sin(20{,}7°)/(1\cdot0{,}65\cdot10^{-6})] = 54{,}7°.$$

Ответ: $\varphi_2 = 54{,}7°$.

10. **(2.76)** Считая для данной длины волны и порядка спектра угол дифракции малым, найти связь между угловой дисперсией Д и разрешающей способностью R. Свет падает на решетку нормально.

Решение:

Угловая дисперсия определяется как угловое расстояние между двумя близкими спектральными линиями, отнесенное к разности длин волн этих линий:

$$Д = d\varphi/d\lambda.$$

Запишем условие двух минимумов, ближайших к максимуму m-го порядка:

$$d\cdot\sin\varphi_1 = m\lambda_1 - \lambda/N,$$

$$d\cdot\sin\varphi_2 = m\lambda_2 + \lambda/N.$$

Отсюда

$$d\cdot(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) = m\cdot(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$2\cdot\sin((\varphi_2 - \varphi_1)/2)\cdot\cos((\varphi_2 + \varphi_1)/2) = m\cdot(\lambda_2 - \lambda_1)/d.$$

При большом N величина $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi$ мала и $(\varphi_2 + \varphi_1)/2$.

$$d\varphi\cdot\cos\varphi = m\cdot(\lambda_2 - \lambda_1)/d.$$

Учитывая, что угол φ мал, получим:

$$d\varphi = m\cdot d\lambda/d$$

$$Д = m/d.$$

Разрешающая способность решетки

$$R = \lambda/d\lambda.$$

Так как R = mN, а число штрихов N = l/d, то

$$\lambda/d\lambda = ml/d,$$

$$R = Д\cdot l.$$

Ответ: $R = Д\cdot l$.

11. **(3.8)** Во сколько раз ослабляется интенсивность света, проходящего через два николя, плоскости пропускания которых образуют угол α = 30°, если в каждом из николей в отдельности теряется 10% интенсивности падающего на него света?

Дано:

$\alpha = 30°$

$\eta = 10\% = 0{,}1$

n - ?

Решение:

Интенсивность света I_1, прошедшего через первый николь равна

$$I_1 = ½(1 - \eta)\, I_0.$$

Здесь I_0 – интенсивность естественного света, падающего на первый поляризатор; коэффициент ½ учитывает то, что проходит только половина естественного света при прохождении через поляризатор; η - коэффициент поглощения в первом николе.

В соответствии с законом Малюса

$$I_2 = I_1 \cdot (1 - \eta) \cdot \cos^2\alpha,$$

где α - угол между плоскостями поляризации николей.

Таким образом,

$$I_2 = \tfrac{1}{2}(1 - \eta)^2 I_0 \cdot \cos^2\alpha,$$

$$n = \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-\eta)^2 \cos^2\alpha}.$$

$$n = \frac{2}{(1-0{,}1)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3{,}3.$$

Ответ: в 3,3 раза.

12. **(3.1в)** Какой характер поляризации имеет плоская электромагнитная волна, проекции вектора **E** которой на оси x и y, перпендикулярные к направлению ее распространения, определяются следующими уравнениями: $E_x = E \cdot \cos(\omega t - zk)$, $E_y = E \cdot \cos(\omega t - kz + \pi)$.

Дано:

$E_x = E \cdot \cos(\omega t - zk)$

$E_y = E \cdot \cos(\omega t - kz + \pi)$

Решение:

Так как

$$E_x = E \cdot \cos(\omega t - zk),$$

$$E_y = E \cdot \cos(\omega t - kz + \pi) = -E \cdot \cos(\omega t - kz),$$

то

$$E_y = - E_x.$$

Результирующее колебание совершается в фиксированном направлении (вдоль прямой y = -x) – волна плоскополяризованная.

Ответ: плоская поляризация вдоль прямой y = -x.