

Лекция 5. Анализ и моделирование стохастических систем.

Математические задачи стохастического управления. Методы численного интегрирования стохастических уравнений. Уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка и методы его решения. Методы численного моделирования и оценивания дискретных стохастических моделей. Алгоритмы моделирования случайных функций с заданными характеристиками.

Математические задачи стохастического управления.

Фильтрация шумов и восстановление вектора состояния.

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$dx_t = A \cdot x_t dt + Q \cdot dw_t, x_t \in \mathbb{R}^n, w_t \in \mathbb{R}^m, x_0 = x(0, \omega),$$

где w_t - стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ - гауссова случайная величина, имеющая закон распределения $N(m_{x0}, P_{x0})$. Пусть измеряется

следующий выход системы $y_t \in \mathbb{R}^p$, который удовлетворяет следующей модели измерений:

$$dy_t = H \cdot x_t dt + R \cdot df_t; y_0 = 0,$$

Где $f_t \in \mathbb{R}^l$ - стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $y_0 \in \mathbb{R}^p$.

Обозначим через $\Upsilon_t, t \geq 0$ - σ -алгебру, порожденную процессом $y_s, 0 \leq s \leq t$. Тогда наилучшая

оценка \hat{x}_t вектора состояния x_t , доставляющая минимум функционалу $M\{(x_t - \hat{x}_t)^2\}$

определяется, как оценка Калмана - Бьюси: $\hat{x}_t = M\{x_t | \Upsilon_t\}$. Причем $M\{x_t\} = M\{\hat{x}_t\}$.

Рассмотрим корреляционную матрицу $P(t) = M\{(x_t - \hat{x}_t) \cdot (x_t - \hat{x}_t)^T\}$ (часто, также, называемую дисперсионной матрицей). В соответствии с теорией фильтра Калмана – Бьюси данная матрица будет удовлетворять дифференциальному уравнению Риккати:

$$\dot{P}(t) = A \cdot P(t) + P(t) \cdot A^T + Q \cdot Q^T - P(t) \cdot H^T \cdot (R \cdot R^T)^{-1} \cdot H \cdot P(t); P(0) = P_{x0},$$

а процесс \hat{x}_t будет представлять собой гауссов процесс, представляющий собой решение следующего стохастического уравнения:

$$d\hat{x}_t = (A - P(t) \cdot H^T \cdot (R \cdot R^T)^{-1} \cdot H) \cdot \hat{x}_t \cdot dt + P(t) \cdot H^T \cdot (R \cdot R^T)^{-1} \cdot dy_t; \hat{x}_t(0) = m_{x0}$$

Пусть теперь задана управляемая система вида

$$dx_t = A \cdot x_t dt + B \cdot u + Q \cdot dw_t, x_t \in \mathbb{R}^n, w_t \in \mathbb{R}^m, x_0 = x(0, \omega),$$

u - детерминированный сигнал управления.

Сигнал ξ_t , связанный с процессом w_t уравнением $\dot{w}_t = Q(t)\xi_t$, является белым шумом. При этом, если w_t является стандартным винеровским процессом, то такой белый шум называется нормальным (гауссовым) белым шумом. Стохастические уравнения объекта и модели измерений тогда можно записать в следующей форме, часто применяемой в инженерных расчетах:

$$\dot{x}_t = A \cdot x_t + B \cdot u + \xi_{p,t}, x_t \in \mathbb{R}^n, \xi_{p,t} \in \mathbb{R}^m, x_0 = x(0, \omega),$$

$$y_t = H \cdot x_t + \xi_{m,t},$$

где $\xi_{p,t}, \xi_{m,t}$ - белые шумы объекта и модели измерений, имеющие следующие характеристики:

$$M\{\xi_{p,t}\} = 0; M\{\xi_{p,t} \cdot \xi_{p,s}^T\} = Q \cdot \delta(t - s);$$

$$M\{\xi_{m,t}\} = 0; M\{\xi_{m,t} \cdot \xi_{m,s}^T\} = R \cdot \delta(t - s);$$

$$M\{\xi_{p,t} \cdot \xi_{m,s}^T\} = S \cdot \delta(t - s)$$

Предположим, для упрощения записи, что $S \equiv 0$. То есть, что шумы объекта и измерений не коррелированы. Тогда оценка \hat{x}_t будет несмещенной и оптимальной, когда она находится из решения стохастического уравнения:

$$\dot{\hat{x}}_t = A \cdot \hat{x}_t + B \cdot u + K_f \cdot (y - H \cdot \hat{x}_t); \quad \hat{x}_t = m_{x0},$$

где матрица коэффициентов усиления равна: $K_f = P(t) \cdot H^T \cdot P_{x0}$, а дисперсионная матрица определяется из уравнения Риккати:

$$\dot{P}(t) = A \cdot P(t) + P(t) \cdot A^T - P(t) \cdot H^T \cdot R^{-1} \cdot H \cdot P(t) + Q; \quad P(0) = P_{x0}$$

Оптимальное стохастическое управление.

Пусть объект задан системой дифференциальных уравнений со случайной правой частью вида:

$$\dot{x} = F(x, u, t) + \xi_0(t); x(t_0) = x^0; x \in \mathbb{R}^n; u \in \mathbb{R}^m,$$

где $\xi_0(t)$ - гауссов белый шум, $M\{\xi_0(t)\} = 0; M\{\xi_0(t) \cdot \xi_0(s)\} = Q \cdot \delta(t-s)$, Q - симметричная матрица; x^0 - гауссова случайная величина с известными характеристиками, некоррелированная со случайным процессом $\xi_0(t)$.

Будем считать, что функция $F(x, u, t)$ удовлетворяет необходимым условиям существования и единственности.

Критерий оптимальности зададим следующим функционалом:

$$J = M\{g_0(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt\}.$$

Требуется найти позиционное управление, то есть управление $u = u(x(t), t)$, реализуемое обратной связью, доставляющее минимум критерий оптимальности. В дальнейшем будем называть такое управление стохастическим оптимальным управлением. Можно доказать, что решение $x(t)$ будет являться марковским процессом. Поэтому оптимальное управление должно быть функцией только текущего состояния. Примем, что управление $u = u(x(t), t)$ считается допустимым, если функция $u(x(t), t)$ является кусочно - непрерывной и принадлежит некоторому множеству $U(t)$, а функции f_0, g_0, F являются непрерывными.

Теорема (достаточные условия стохастической оптимальности). Если существует

скалярная функция $S(x, t)$, обладающая непрерывными частными производными $\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, и

допустимое управление $u^*(x(t), t) \in U(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\min_{u \in U(t)} \{f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot F(x, u, t) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} q_{ij} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\} = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

при граничном условии $S(x(t_f), t_f) = g_0(x(t_f), t_f)$, где $Q = \|q_{ij}\|$, то это управление является стохастическим оптимальным управлением для исходной задачи оптимального управления.

Соотношение:

$$\min_{u \in U(t)} \left\{ f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot F(x, u, t) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} q_{ij} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\} = - \frac{\partial S}{\partial t},$$

представляет собой уравнение Беллмана, которое учитывает дисперсионную составляющую вектора фазовых переменных, а функция $S(x, t)$ - является функцией Беллмана. Если множество $U(t)$ является открытым и минимум в левой части уравнения Беллмана достигается в стационарной точке, то уравнение можно представить в следующем виде:

$$f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} F(x, u, t) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} q_{ij} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{\partial S}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} F(x, u, t) \right\} = 0.$$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что $tr(Q \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_{ij} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}$. Поэтому

уравнение Беллмана часто записывают в виде:

$$\min_{u \in U(t)} \left\{ f_0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot F(x, u, t) + \frac{1}{2} \cdot tr(Q \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x}) \right\} = - \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Пусть уравнение вполне управляемого объекта описываются линейными уравнениями со случайной правой частью вида:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + \xi_0(t); x(t_0) = x^0; x \in \mathbb{R}^n; u \in \mathbb{R}^m,$$

а критерий оптимальности задается функционалом

$$J = M \left\{ x^T(t_f) \cdot \Phi \cdot x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) \cdot L \cdot x(t) + u^T(t) \cdot G \cdot u(t)] \cdot dt \right\},$$

где $\xi_0(t)$ - гауссов белый шум, $M\{\xi_0(t)\} = 0; M\{\xi_0(t) \cdot \xi_0^T(s)\} = Q \cdot \delta(t-s)$, Q - симметричная матрица; x^0 - гауссова случайная величина $M\{x^0\} = \bar{x}^0; M\{(x^0 - \bar{x}^0) \cdot (x^0 - \bar{x}^0)^T\} = P_0$, некоррелированная со случайным процессом $\xi(t)$. Матрицы A, B, L, G являются, в общем случае, функциями времени.

Теорема. Стохастическое оптимальное управление с обратной связью для объекта

$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + \xi_0(t); x(t_0) = x^0$ при критерии оптимальности:

$$J = M \left\{ x^T(t_f) \cdot \Phi \cdot x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) \cdot L \cdot x(t) + u^T(t) \cdot G \cdot u(t)] \cdot dt \right\},$$

имеет вид $u = -G^{-1} \cdot B^T \cdot K \cdot x$, где K - симметричная матрица, которая определяется из матричного уравнения Риккати $\dot{K} = -K \cdot A - A^T \cdot K + K \cdot B \cdot G^{-1} \cdot B^T \cdot K - L$ при граничном условии $K(t_f) = \Phi$.

Легко заметить, что оптимальный закон управления совпадает с соответствующим оптимальным законом управления линейного объекта при детерминированном функционале, задающим квадратичный интегральный критерий качества. Таким образом, случайное воздействие на объект и

случайное начальное условие не влияет на оптимальный закон управления, если имеется полная информация о фазовом векторе.

Стохастическая устойчивость.

Рассмотрим систему, которая описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида:

$$dx(t) = b(t, x) \cdot dt + \sum_{k=1}^r \sigma_k(t, x) \cdot d\xi_k(t), \quad x(t_0) = x^0 = v(\omega),$$

где $x(t)$, $b(t, x)$, $\sigma_k(t, x)$ - векторы из пространства \mathfrak{R}^n , $\xi_k(t)$ - независимые винеровские процессы, а соответствующие дифференциалы понимаются в смысле Ито. Предположим также, что коэффициенты b, σ_k непрерывны по t и удовлетворяют условию Липшица по x в каждой ограниченной по $x \in \mathfrak{R}^n$ области, то есть:

$$\sum_{k=1}^r |\sigma_k(t, x) - \sigma_k(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| < B |x - y|.$$

Будем полагать, что невозмущенное движение системы определяется тривиального решения $x(t) \equiv 0$. То есть, будем полагать, что $b(t, 0) = 0, \sigma_k(t, 0) = 0, k = 1, 2, \dots, r$. Приведем некоторые определения основных типов устойчивости для стохастических систем /Кузнецов с86/.

Невозмущенное движение системы $x(t) \equiv 0$ будем называть устойчивым по вероятности или стохастически устойчивым при $t \geq t_0$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ выполняется соотношение:

$$\lim_{x^0 \rightarrow 0} P\{\sup_{t \geq t_0} \|x(t, t_0, x_0)\| \geq \varepsilon\} = 0,$$

где $x(t, t_0, x^0)$ решение уравнения:

$$dx(t) = b(t, x)dt + \sum_{k=1}^r \sigma_k(t, x)d\xi_k(t),$$

такое, что $x(t_0, t_0, x^0) = x^0$.

Невозмущенное движение системы $x(t) \equiv 0$ будем называть асимптотически устойчивым по вероятности или асимптотически стохастически устойчивым, если оно стохастически устойчиво и, кроме того, справедливо соотношение:

$$\lim_{x^0 \rightarrow 0} P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0\} = 1.$$

Невозмущенное движение системы $x(t) \equiv 0$ будем называть асимптотически стохастически устойчивым в целом, если оно стохастически устойчиво и, кроме того, для всех $\|x_0\| < \infty$ выполняется соотношение $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0\} = 1$.

Очевидно, что приведенные определения являются обобщением классических определений устойчивости в малом по Ляпунову на случай стохастических систем. Приведем определения устойчивости, связанные с моментами различных степеней (p - устойчивость).

Невозмущенное движение системы $x(t) \equiv 0$ называется устойчивым в среднем p ($p > 0$) или p -устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, выполняется соотношение $M\{\|x(t, t_0, x_0)\|^p\} < \varepsilon$ для $\forall t \geq t_0$ и $\|x_0\| < \delta$.

Невозмущенное движение системы $x(t) \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым в среднем p ($p > 0$) или асимптотически p -устойчивым, если оно p -устойчиво и существует $\delta = \delta(t_0) > 0$, такое что $\lim_{t \rightarrow \infty} M\{\|x(t, t_0, x_0)\|^p\} = 0$ для $\forall \|x_0\| < \delta$.

Невозмущенное движение системы $x(t) \equiv 0$ называется экспоненциально p -устойчивым, если существуют постоянные $\gamma, \alpha > 0$, такие, что $M\{\|x(t, t_0, x_0)\|^p\} < \gamma \|x_0\|^p e^{-\alpha(t-t_0)}$ для $t \geq t_0$.

Рассмотрим условия устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$. Будем искать условия, при которых не только $|x(t)|$ стремиться к нулю по вероятности равномерно по t , но и $\sup_{t>0} |x(t)| \xrightarrow{P} 0$ при $|x(0)| \rightarrow 0$. При таком определении устойчивость (или неустойчивость) положения равновесия будет определяться поведением коэффициентов в малой окрестности положения равновесия. Поэтому естественно предположить, что исходная система будет устойчива, если будет устойчива система первого приближения вида:

$$dx(t) = \frac{\partial b(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \cdot x \cdot dt + \sum_{k=1}^r \frac{\partial \sigma_k(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \cdot x \cdot d\xi_k(t).$$

Особую роль при анализе устойчивости с помощью данного подхода играют характеристические показатели Ляпунова. Можно показать, что для линеаризованной системы с вероятностью 1 существуют n неслучайных показателей $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ и разбиение пространства \mathfrak{R}^n на случайные множества $\Lambda_1(\omega), \dots, \Lambda_n(\omega)$, такие, что для стартовавших из этих множеств решений уравнения первого приближения, существуют пределы вида:

$$\lambda(x_0, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{t-t_0} \frac{1}{t-t_0} \ln \|x(t, t_0, x_0)\| \right),$$

которые будут равны $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, соответственно. Тогда можно показать, что стохастическая асимптотическая устойчивость решений $x(t) \equiv 0$ будет иметь место тогда и только тогда, когда $\lambda_n < 0$.

Стохастические функции Ляпунова.

Обобщение метода функций Ляпунова для стохастических дифференциальных уравнений были, в основном получены в 60-80 годы прошлого столетия /Хасьминский, Кушнер/.

Рассмотрим стохастическое уравнение:

$$dx(t) = b(t, x) \cdot dt + \sum_{k=1}^r \sigma_k(t, x) \cdot d\xi_k(t),$$

и функцию $V(x, t) : \mathfrak{R}^n \times (t > 0) \rightarrow \mathfrak{R}$, которая при всех (x, t) является непрерывной и положительно определенной. Будем также предполагать, что $V(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемой по x и один раз по t , за исключением может быть множества $x = 0$. Кроме

того, будем считать, что выполняется равенство $V(0, t) = 0$. В силу формулы Ито стохастического дифференцирования имеем:

$$V(x(t), t) - V(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^t L\{V(x(\tau), \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^r \int_{t_0}^t G^{(i)}\{V(x(\tau), \tau)\} d\xi^{(i)}(\tau) \text{ с вероятностью } 1.$$

Здесь:

$$L\{.\} = \frac{\partial\{.\}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \cdot \frac{\partial\{.\}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \sigma_{k,l}(x, t) \cdot \sigma_{k,i}(x, t) \frac{\partial^2\{.\}}{\partial x_l \partial x_i},$$

$$G^{(i)}\{.\} = \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j}(x, t) \cdot \frac{\partial\{.\}}{\partial x_j}, i = 1 : m.$$

Учитывая свойства функции $V(x, t)$, в малой окрестности решения $x(t) \equiv 0$ можно принять, что роль первой производной $V(x, t)$ в силу уравнений движения играет в стохастическом случае $L\{V(x(t), t)\}$. Будем считать, что в этой окрестности при $x \neq 0, t \geq t_0$ будет выполняться неравенство $L\{V(x(t), t)\} \leq 0$.

Функцию $V(x, t)$, обладающую перечисленными выше свойствами, будем называть стохастической функцией Ляпунова. Отсюда можно получить следующее неравенство:

$$P\left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} V(x(t), t) \geq \delta \right\} \leq \frac{1}{\delta} V(x(t_0), t_0),$$

для $\forall \delta > 0, \forall T \geq t_0$. Тогда, учитывая непрерывность функции $V(x, t)$ и условие $V(0, t) = 0$, получим соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} P\left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} V(x(t), t) \geq \delta \right\} = 0.$$

Данное условие означает, что траектория процесса, выходящая из точки x_0 в момент t_0 , навсегда останется в заданной окрестности начала координат с вероятностью, стремящейся к единице, когда $\|x\| \rightarrow 0$ /Хасьминский с206/.

Имеют место следующие факты для различных видов стохастической устойчивости /Кузнецов с89/.

Предположим $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ и пусть в области $D \times (t > 0)$, включающей множество $x(t) \equiv 0$, существует непрерывная, положительно определенная функция $V(x, t) \in C^2$ и пусть выполняются соотношения:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} (\sup_{t > 0} V(x, t)) = 0, \quad L\{V(x(t), t)\} < 0,$$

в этой области.

Тогда невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво по вероятности (стохастически устойчиво).

Пусть для всех $x \in \mathbb{R}^n$ существует положительно определенная функция $V(x, t) \in C^2$, для которой выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} (\sup_{t > 0} V(x, t)) = 0; \quad \inf_{t > 0} V(x, t) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} \infty; \quad L\{V(x(t), t)\} < 0.$$

Тогда невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ асимптотически стохастически устойчиво в целом.

Для экспоненциальной p -устойчивости невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$ при $t \geq t_0$ достаточно, чтобы при всех $x \in \mathfrak{R}^n$ существовала функция $V(x, t) \in C^2$, удовлетворяющая, при некоторых положительных постоянных k_1, k_2, k_3 неравенствам:

$$k_1 \|x\|^p \leq V(x, t) \leq k_2 \|x\|^p, \quad L\{V(x(t), t)\} \leq -k_3 \|x\|^p.$$

Методы численного интегрирования стохастических уравнений

Рассмотрим стохастическую систему, которая описывается с помощью уравнения $dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dw_t$, $x_t \in \mathfrak{R}^n$, $w_t \in \mathfrak{R}^m$ на интервале $t \in [0, T]$ с начальным условием $x_{t=0} = v$. Здесь w_t стандартный векторный винеровский процесс. Данное уравнение может быть представлено в скалярной форме: $dx_{k,t}(t) = a_k(x_t, t)dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_{ki}(x(t), t)dw_{i,t}$, $x_{k,t=0} = v_k$,

$$k = 1, 2, \dots, n. \text{ Введем обозначения } \|a(x, t)\|^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2(x, t) \text{ и } \|\sigma(x, t)\|^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sigma_{ki}^2(x, t).$$

Рассмотрим условия существования и единственности решения приведенной стохастической системы.

Теорема.

Пусть случайная величина v не зависит от $\{w_t, t \in [0, T]\}$, $M\{|v|^2\} < \infty$, а коэффициенты уравнения $dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dw_t$ непрерывны по переменным $t \in [0, T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$. Пусть также:

- найдется такая величина $K < \infty$, что при всех $t \in [0, T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ будет выполняться соотношение $\|a(x, t)\|^2 + \|\sigma(x, t)\|^2 \leq K \cdot (1 + \|x\|^2)$;

- найдется такая величина $C < \infty$, что при всех $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathfrak{R}^n$ будет выполняться соотношение $\|(a(x, t) - a(y, t))\|^2 + \|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)\|^2 \leq C \|x - y\|^2$.

Тогда на интервале $t \in [0, T]$ существует и единственно (почти наверное) непрерывное решение x_t уравнения $dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dw_t$, $x_{t=0} = v$, причем

$$M\{|x_t|^2\} \leq R \cdot (1 + M\{|v|^2\}), \text{ где константа } R \text{ зависит лишь от } T, K.$$

Рассмотрим теперь следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$d\xi_t = A(t)\xi_t dt + u(t)dt + B(t)dw_t; \xi_{t_0} = v, \text{ где } A(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathfrak{R}^{n \times q}, u(t) \in \mathfrak{R}^n \text{ непрерывные неслучайные функции.}$$

Можно показать, что процесс, определяемый равенством:

$$\xi_t = \psi(t, t_0)v + \int_{t_0}^t \psi(t, \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \psi(t, \tau)B(\tau)dw_\tau$$

будет являться решением стохастического дифференциального уравнения, если функция $\psi(t, t_0)$ будет удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t, t_0) = A(t)\psi(t, t_0), t \geq t_0 \\ \psi(t_0, t_0) = E \end{cases}.$$

Второй интеграл в равенстве, определяющем решение, понимается в смысле Ито.

Большинство численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений строятся с помощью разложения в ряд Тейлора. Поэтому попробуем применить такой же подход для решения стохастических уравнений.

Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{x}_t = a(x_t, t) + b(x_t, t) \cdot n_t,$$

где $x_t \in \mathcal{R}$ - решение уравнения; $a, b: \mathcal{R} \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$; n_t - случайный процесс в виде гауссова белого шума, $n_t \cdot dt = dw_t$.

Запишем это же уравнение в форме стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dx_t = a(x_t, t) + b(x_t, t) \cdot dw_t,$$

где w_t - стандартный винеровский процесс.

Применим обычную идеологию численных методов к данным стохастическим уравнениям. Согласно формуле Тейлора при значении $s > t$ имеем:

$$x_s = x_t + \frac{dx_t}{dt} \cdot (s - t) + \frac{d^2 x_t}{dt^2} \cdot \frac{(s - t)^2}{2} + O((s - t)^3),$$

где запись $\xi_t = O(s - t)^\alpha$ понимается как: $\lim_{s \rightarrow t} \frac{\sqrt{M\{\xi_t^2\}}}{(s - t)^\alpha} = C = \text{const} < \infty$. Используя первое уравнение, найдем:

$$x_s = x_t + a(x_t, t) \cdot (s - t) + b(x_t, t) \cdot (s - t) \cdot n_t + \frac{d}{dt} \cdot [a(x_t, t) + b(x_t, t) \cdot n_t] \cdot \frac{(s - t)^2}{2} + O((s - t)^3).$$

Правая часть данного соотношения неопределенна. Это связано с тем, что белый шум n_t не является дифференцируемым в каком – либо смысле случайным процессом.

Рассмотрим теперь применение этой же идеологии в отношении уравнения Ито. Используем для случайных функций $a(x_t, t), b(x_t, t)$ такие же правила дифференцирования, как и для неслучайных функций, то есть:

$$da(x_t, t) = \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} \cdot dx_t + \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial t} \cdot dt, \quad db(x_t, t) = \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \cdot dx_t + \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} \cdot dt,$$

как это делается в обычных алгоритмах численного решения. Запишем решение уравнения в интегральной форме:

$$x_s = x_t + \int_t^s a(x_\tau, \tau) \cdot d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \cdot dw_\tau,$$

$$\text{где: } a(x_s, s) = a(x_t, t) + \int_t^s \left[a(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} \right] \cdot d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} \cdot dw_\tau,$$

$$b(x_s, s) = b(x_t, t) + \int_t^s \left[a(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} \right] \cdot d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} \cdot dw_\tau.$$

Подставляя данные выражения в разложение Тейлора, получим следующее разложение:

$$\begin{aligned}
x_s = & x_t + a(x_t, s) \cdot (s - t) + b(x_t, t) \cdot \int_t^s dw_\tau + b(x_t, t) \cdot \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \cdot \int_t^s \int_t^\tau dw_{\tau_1} \cdot dw_\tau + \\
& + b(x_t, t) \cdot \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} \cdot \int_t^s \int_t^\tau dw_{\tau_1} \cdot d\tau + [a(x_t, t) \cdot \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} dx_t + \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t}] \cdot \int_t^s \int_t^\tau d\tau_{\tau_1} \cdot dw_\tau + \\
& + b(x_t, t) \cdot [(\frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x})^2 + b(x_t, t) \cdot \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2}] \cdot \int_t^s \int_t^\tau \int_t^{\tau_1} dw_{\tau_2} \cdot dw_{\tau_1} \cdot dw_\tau + O((s - t)^2)
\end{aligned}$$

Однако, поскольку для случайных процессов $a(x_t, t), b(x_t, t)$, правила дифференцирования должны выполняться по формуле Ито, то с вероятностью 1 получим:

$$\begin{aligned}
a(x_s, s) = & a(x_t, t) + \int_t^s [a(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \cdot b^2(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial^2 a(x_\tau, \tau)}{\partial x^2}] \cdot d\tau + \\
& + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} \cdot dw_\tau \\
b(x_s, s) = & b(x_t, t) + \int_t^s [a(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \cdot b^2(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial^2 b(x_\tau, \tau)}{\partial x^2}] \cdot d\tau + \\
& + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \cdot \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} \cdot dw_\tau
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в соотношение: $x_s = x_t + \int_t^s a(x_\tau, \tau) \cdot d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \cdot dw_\tau$,

получим с вероятностью 1 разложение:

$$\begin{aligned}
x_s = & x_t + a(x_t, s) \cdot (s - t) + b(x_t, t) \cdot \int_t^s dw_\tau + b(x_t, t) \cdot \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \cdot \int_t^s \int_t^\tau dw_{\tau_1} \cdot dw_\tau + \\
& + b(x_t, t) \cdot \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} \cdot \int_t^s \int_t^\tau dw_{\tau_1} \cdot d\tau + \\
& [a(x_t, t) \cdot \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \cdot dx_t + \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot b^2(x_t, t) \cdot \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2}] \cdot \int_t^s \int_t^\tau d\tau_{\tau_1} \cdot dw_\tau + \\
& + b(x_t, t) \cdot [(\frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x})^2 + b(x_t, t) \cdot \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2}] + \int_t^s \int_t^\tau \int_t^{\tau_1} dw_{\tau_2} \cdot dw_{\tau_1} \cdot dw_\tau + O((s - t)^2)
\end{aligned}$$

Сопоставляя разложения при разных правилах дифференцирования, найдем что они

различаются на слагаемое $\frac{1}{2} \cdot b^2(x_t, t) \cdot \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2}] \cdot \int_t^s \int_t^\tau d\tau_{\tau_1} \cdot dw_\tau$. Это слагаемое имеет порядок

$\frac{3}{2}$. Таким образом, приходим к выводу, что при применении обычных правил дифференцирования

будут отсутствовать часть слагаемых. То есть формальное применение правил дифференцирования для неслучайных функций к случайным процессам приводит, либо к неопределенности, либо к неверному результату. Поэтому применение сильных и слабых численных методов интегрирования на основе детерминированного разложения Тейлора является малоэффективным.

При сильных методах нахождения решения предполагается, что реализации аппроксимирующего процесса \hat{x}_t были близки к траекториям исходного процесса x_t . В этом случае критерием близости является абсолютная ошибка $M\{|x_t - \hat{x}_t|\}$.

Говорят, что аппроксимирующий процесс \hat{x}_t сходится в сильном смысле с порядком $\gamma \in [0, \infty)$ к решению x_t , если, существуют конечная константа R и положительная константа $\delta_0 > 0$, такие, что $M\{|x_t - \hat{x}_t|\} \leq R \cdot \delta^\gamma$ для любой временной дискретизации с максимальным размером шага $\delta \in (0, \delta_0)$.

Однако, во многих случаях, нужна не близость аппроксимирующей и истинной траекторий, а только близость некоторая функция/и (или моменты) от значений случайного сигнала. Тогда методы, реализующие такое приближение, называются слабыми.

Говорят, что аппроксимирующий процесс \hat{x}_t сходится в слабом смысле с порядком $\beta \in [0, \infty)$, если для любого полинома g существуют конечная константа R и положительная константа $\delta_0 > 0$, такие, что $|M\{g(x_t)\} - M\{g(\hat{x}_t)\}| \leq R \cdot \delta^\beta$ для любой временной дискретизации с максимальным размером шага $\delta \in (0, \delta_0)$.

Рассмотрим метод интегрирования линейных стохастических уравнений на основе численного вычисления интеграла Ито.

Интегрирование линейных стохастических дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейную систему, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением вида:

$$dx_t = A(t) \cdot x_t \cdot dt + B(t) \cdot f(t) \cdot dt + G(t) \cdot dw_t; \quad x_{t=t_0} = v,$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$ - случайный процесс, являющийся решением уравнения с начальным случайным условием $x_{t=t_0} = v$; $w_t \in \mathbb{R}^m$ - винеровский случайный процесс с независимыми компонентами

$$w_t = (w_{1,t}, \dots, w_{m,t})^T, w_{k,t} \in \mathbb{R}, M\{w_t\} = 0; M\{w_t w_t^T\} = \Sigma_w^2 = \text{diag}\{\sigma_{w_k}^2\}_{k=1}^m;$$

$f(t) \in \mathbb{R}^p$ - детерминированное возмущение;

$A(t), B(t), G(t)$ - соответствующие матричные функции, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения стохастического уравнения.

Приведенную систему можно рассматривать, как систему уравнений Ито или Стратоновича, поскольку можно показать, что в силу своей структуры оно имеет одно и то же решение, в каком бы смысле она не рассматривалась. Поэтому, часто применяемая в технической литературе форма описания линейной стохастической системы в виде:

$$\dot{x}_t = A(t) \cdot x_t + B(t) \cdot f(t) + G(t) \cdot \Sigma_w \cdot n_t; \quad x_{t=t_0} = v,$$

с белым шумом n_t с единичной дисперсионной матрицей в правой части не приводит к неоднозначности математического определения решений системы.

Рассмотрим стационарный случай системы, то есть когда ее модель описывается стохастическим уравнением:

$$dx_t = A \cdot x_t \cdot dt + B \cdot f(t) \cdot dt + G \cdot dw_t; x_{t=t_0} = v.$$

В этом случае решение будет определяться с вероятностью 1 в виде:

$$x_t = e^{A(t-t_0)} \cdot v + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \cdot B \cdot f(s) \cdot ds + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \cdot G \cdot dw_s.$$

Для численного решения выберем регулярную сетку $t_{k+1} = t_k + h; t_0 = 0; k = 0, 1, 2, \dots$, где h -

шаг сетки. Введем следующие обозначения $\hat{A} = e^{Ah}$, $(\hat{B}f)_k = \int_0^h e^{A(h-s)} \cdot B \cdot f(kh + s) \cdot ds$,

$\hat{n}_{k+1} = \int_0^h e^{A(h-s)} G dw_{(kh+s)}$. Тогда непрерывную систему можно аппроксимировать дискретной

моделью вида:

$$x_{k+1} = \hat{A} \cdot x_k + (\hat{B} \cdot f)_k + \hat{n}_{k+1},$$

где случайные величины $x_k, (\hat{B}f)_k, \hat{n}_{k+1}$ сохраняют свое значение на интервале h .

Векторный гауссов дискретный случайный процесс \hat{n}_k имеет дисперсионную матрицу:

$$D\{\hat{n}_{k+1}\} = D_{\hat{n}}(h) = \int_0^h e^{A(h-s)} G \cdot \Sigma_w^2 \cdot G^T \cdot e^{A^T(h-s)} \cdot ds.$$

Несложно показать, что дисперсионная матрица $D_{\hat{n}}(t), t \in [0, h]$ является решением уравнения:

$$\dot{D}_{\hat{n}}(t) = A \cdot D_{\hat{n}}(t) + D_{\hat{n}}(t) \cdot A^T + G \cdot \Sigma_w^2 \cdot G^T; D_{\hat{n}}(0) = 0.$$

То есть, для моделирования случайной составляющей решения надо на каждом шаге моделировать гауссов случайный процесс с нулевым средним и дисперсионной матрицей $D_{\hat{n}}(h)$. Если шаг является переменным, то надо вычислять, при каждом его изменении, новую дисперсионную матрицу, что является вычислительно трудоемким.

Вычисление систематической составляющей решения линейной стохастической модели.

Оценка систематической составляющей сводится к вычислению интеграла:

$$Z_h = \int_0^h e^{A(h-s)} \cdot B \cdot f(kh + s) \cdot ds.$$

Представим векторную функцию $f(kh + s), s \in [0, h]$ с точностью ρ следующей полиномиальной функцией:

$$f(kh + s) = \sum_{j=0}^L q_j(k) \cdot s^j + r(k, s),$$

где $|r(k, s)| \leq \rho s^{L+1}$ для величин $k = 0, 1, 2, \dots$; а векторные коэффициенты $q_j(k), j = 1, 2, \dots, L$ могут быть различными способами. Тогда можно записать:

$$Z_h = \sum_{j=0}^L Z_{h,j} \cdot B \cdot q_j(k) + R_{h,L+1},$$

где $\|Z_{h,L+1}\| = \left\| \int_0^h e^{A(h-s)} \cdot B r(k, s) \cdot ds \right\| \leq \rho \cdot \|Z_{h,L+1}\| \cdot \|B\|$, $Z_{h,j} = \int_0^h s^j \cdot e^{A(h-s)} \cdot ds$.

Для вычисления интегралов $Z_{h,j}$ можно использовать следующие очевидные рекуррентные соотношения:

$$Z_{h,0} = A^{-1} \cdot (e^{Ah} - E), \quad Z_{h,j} = -A^{-1} \cdot (h^j \cdot E - j \cdot Z_{h,j-1}); \quad j = 1, 2, \dots, L.$$

Отсюда найдем:

$$Z_{h,j} = -A^{-(j+1)} \cdot j! \cdot (A \cdot Z_{h,0} - \sum_{l=1}^j \frac{h^l \cdot A^l}{l!}); \quad j \geq 1$$

или, отбрасывая остаточный член $R_{h,L+1}$, получим следующее приближенное представление:

$$Z_{h,j} = -A^{-(j+1)} \cdot \sum_{j=0}^L j! \cdot (e^{Ah} - \sum_{l=0}^j \frac{h^l \cdot A^l}{l!}).$$

При кусочно – постоянной аппроксимации ($L = 0$) выполняется соотношение

$q_0(k) = f(kh) = f_k$. Тогда:

$$Z_h \approx A^{-1} \cdot (e^{Ah} - E) \cdot B \cdot f_k = \hat{B} \cdot f_k.$$

То есть:

$$(\hat{B} \cdot f)_k = \hat{B} \cdot f_k,$$

где $\hat{B} = A^{-1} \cdot (e^{Ah} - E) \cdot B$.

При линейной интерполяции ($L = 1$) получим:

$$q_0(k) = f_k, \quad q_1(k) = \frac{1}{h} \cdot (f_{k+1} - f_k).$$

Отсюда найдем:

$$Z_h \approx A^{-1} \cdot (e^{Ah} - E) \cdot B \cdot f_k + \frac{A^{-2}}{h} \cdot (e^{Ah} - E - h \cdot A) \cdot B \cdot (f_{k+1} - f_k)$$

Вычисление случайной составляющей решения линейной стохастической модели.

Рассмотрим дисперсионную матрицу:

$$D_{\hat{n}}(h) = M\{\hat{n}_{k+1} \cdot \hat{n}_{k+1}^T\} = \int_0^h e^{A(h-s)} \cdot G \cdot \Sigma_w^2 \cdot G^T \cdot e^{A^T(h-s)} \cdot ds.$$

Так как эта матрица является квадратной, симметричной и невырожденной, то ее SVD разложение можно записать в виде:

$$D_{\hat{n}}(h) = M\{\hat{n}_{k+1} \cdot \hat{n}_{k+1}^T\} = T \cdot \Lambda_D^2 \cdot T^{-1},$$

где матрица $\Lambda_D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, n$ - собственные значения матрицы $D_{\hat{n}}(h)$;

T - матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_{\hat{n}}(h)$. Очевидно, что, так как

матрица T является ортогональной. Представим вектор \hat{n}_{k+1} в виде $\hat{n}_{k+1} = T \cdot \Lambda_D \cdot n_{k+1}$, где n_{k+1} -

случайный вектор – столбец, такой, что его компоненты $n_{j,k+1}, j = 1, 2, \dots, n$ являются случайными

величинами с нулевым средним с единичной дисперсией. Поэтому, чтобы смоделировать

случайный вектор \hat{n}_{k+1} надо найти матрицу $D_{\hat{n}}(h)$, ее собственные значения и собственные

векторы, а также смоделировать n независимых гауссовых случайных величин с нулевым средним

и единичной дисперсией, для построения вектора \hat{n}_{k+1} .

Приближенный метод интегрирования линейных стохастических дифференциальных уравнений.

Вычисление дисперсионной матрицы $D_{\hat{n}}(h)$ является алгоритмически достаточно трудоемким. Поэтому достаточно часто используют приближенный метод численного решения стохастических уравнений. Для этого белый шум $n_t, (dw_t = \Sigma_w \cdot n_t \cdot dt)$ заменяется на промежутке $[kh, (k+1) \cdot h]; k = 0, 1, 2, \dots$ кусочно постоянным случайным процессом \bar{n}_t с достаточно малым шагом дискретизации δ . Запишем следующее приближенное представление стохастической системы в следующей форме:

$$\dot{\tilde{x}}_t = A \cdot \tilde{x}_t + B \cdot u(t) + G \cdot \bar{n}_t; y_t = C \cdot \tilde{x}_t; x_{t=t_0} = v,$$

где \bar{n}_t - кусочно постоянный на промежутках $[kh, (k+1) \cdot h]; k = 0, 1, 2, \dots; \delta = \frac{h}{N}; N \geq 1$, случайный процесс с независимыми значениями на этих промежутках.

То есть имеют место соотношения: $\bar{n}_t = z_{k,r} = \text{const}$ при значении $t \in [r\delta, (r+1) \cdot \delta);$

$$M\{z_{k,r}\} = 0; M\{z_{k,r} \cdot z_{k,r}^T\} = \frac{1}{\delta} \Sigma_w.$$

Корреляционная функция случайного процесса \bar{n}_t имеет вид:

$$R_{\bar{n}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \cdot (1 - \frac{|t|}{\delta}) \cdot \Sigma_w^2, & |t| \leq \delta \\ 0, & |t| > \delta \end{cases}.$$

Таким образом, при $\delta \rightarrow 0$ корреляционная функция процесса \bar{n}_t будет стремиться к δ -функции Дирака, а спектральная плотность к постоянной величине. Если выполняется условие $\omega_{\max} \delta \leq \frac{2\pi}{8}$, где ω_{\max} - максимальная частота, наблюдаемая в системе, то будет справедливо соотношение $0.95 \Sigma_w^2 \leq S_{\bar{n}}(\omega) \leq \Sigma_w^2$. Таким образом, на интервале длиной h должно быть не менее 8 подинтервалов δ постоянства процесса \bar{n}_t .

Построим дискретное представление линейной стохастической модели на регулярной сетке: $[kh, (k+1) \cdot h]; k = 0, 1, 2, \dots$; в виде:

$$\tilde{x}_{k+1} = e^{Ah} \cdot \tilde{x}_k + \int_0^h e^{A(h-s)} \cdot B \cdot u(kh+s) \cdot ds + \int_0^h e^{A(h-s)} \cdot G \cdot d\bar{n}_{(kh+s)}.$$

Оценим стохастический интеграл, используя кусочно постоянное приближение процесса \bar{n}_t на более мелкой сетке с шагом δ :

$$\begin{aligned} \int_0^h e^{A(h-s)} \cdot G \cdot d\bar{n}_{(kh+s)} &= \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} e^{A(h-s)} \cdot ds \cdot G \cdot \bar{n}_{(kN+j-1)\delta} \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot A^{-1} \cdot (e^{A\delta} - E) \cdot \sum_{j=1}^N e^{A(h-j\delta)} \cdot G \cdot \sqrt{\delta} z_{k,j} \end{aligned}.$$

Представляя дисперсионную матрицу $\Sigma_w = T \cdot \Lambda_w \cdot T^{-1}$ в виде SVD представления, получим:

$$\int_0^h e^{A(h-s)} \cdot G \cdot d\bar{n}_{(kh+s)} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot A^{-1} \cdot (e^{A\delta} - E) \cdot \sum_{j=1}^N e^{A(h-j\delta)} \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{z}_{k,j},$$

где $\tilde{G} = \sqrt{\delta} \cdot G \cdot T \cdot \Lambda_w$, $\tilde{z}_{k,j}$ - вектор-столбец независимых стандартных гауссовых случайных величин.

Представляя систематическую составляющую с помощью кусочно – постоянной аппроксимации, найдем, что:

$$\int_0^h e^{A(h-s)} \cdot B \cdot u(kh+s) \cdot ds \approx A^{-1} \cdot (e^{Ah} - E) \cdot Bu_k.$$

Тогда можно записать следующую рекуррентную формулу для приближенного моделирования линейной стохастической системы:

$$\tilde{x}_{k+1} = e^{Ah} \cdot \tilde{x}_k + A^{-1} \cdot (e^{Ah} - E) \cdot B \cdot u_k + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot A^{-1} \cdot (e^{A\delta} - E) \cdot \sum_{j=1}^N e^{A(h-j\delta)} \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{z}_{k,j}; y_k = C \cdot \tilde{x}_k,$$

где $N \geq 8$.

Алгоритм моделирования можно записать в следующей форме.

1. Определение временного интервала моделирования $[0, t_{\max}]$ и задание шагов размеров

сеток $h = \frac{t_{\max}}{M}, k = 1, 2, \dots, M; \delta = \frac{h}{N}, j = 1, 2, \dots, N; N \geq 8$.

2. Вычисление с заданной точностью матриц:

$$e^{A\delta}, e^{Ah}, A^{-1} \cdot (e^{Ah} - E) \cdot B, \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot A^{-1} \cdot (e^{A\delta} - E); \tilde{G}.$$

3. $k = 1; \tilde{x}_1 = x_{t=0} = v; u_1 = u(t = 0)$.

4. Численное моделирование N случайных независимых гауссовых векторов $\tilde{z}_{k,j}; j = 1, 2, \dots, N$ размерности m .

5. Вычисление с заданной точностью матриц $e^{A(h-j\delta)} \cdot \tilde{G}, j = 1, 2, \dots, N$.

6. Вычисление

$$\tilde{x}_{k+1} = e^{Ah} \cdot \tilde{x}_k + A^{-1} \cdot (e^{Ah} - E) \cdot B \cdot u_k + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot A^{-1} \cdot (e^{A\delta} - E) \cdot \sum_{j=1}^N e^{A(h-j\delta)} \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{z}_{k,j}; y_k = C \cdot \tilde{x}_k$$

7. Если $k < M$, то $k = k + 1$ и переход к шагу 4.

8. Конец работы алгоритма

Расчет моментных характеристик решений линейных стохастических уравнений.

Пусть задана линейная стохастическая система:

$$dx_t = A \cdot x_t \cdot dt + B \cdot f(t) \cdot dt + G \cdot dw_t; y_t = C \cdot x_t; x_{t=t_0} = v,$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$ - случайный процесс, являющийся решением уравнения с начальным случайным условием $x_{t=t_0} = v$; $y_t \in \mathbb{R}^q$ - выход системы;

v - случайная гауссова величина с законом распределения $N(m_v, D_v)$;

$w_t \in \mathfrak{R}^m$ - винеровский случайный процесс с независимыми компонентами

$$w_t = (w_{1,t}, \dots, w_{m,t})^T, w_{k,t} \in \mathfrak{R}, M\{w_t\} = 0; M\{w_t w_t^T\} = \Sigma_w^2 = \text{diag}\{\sigma_{w_k}^2\}_{k=1}^m;$$

$f(t) \in \mathfrak{R}^p$ - детерминированное возмущение;

A, B, G, C - постоянные вещественные матрицы соответствующего размера.

Введем обозначения:

$$m_x(t) = M\{x_t\}; x_t^0 = x_t - m_x(t), R_x(t, s) = M\{x_t^0 x_s^0\}; D_x(t) = R_x(t, t).$$

Используя уравнения моментов можно записать следующие соотношения:

$$\dot{m}_x(t) = A \cdot m_x(t) + B \cdot f(t); m_x(0) = m_v;$$

$$\dot{D}_x(t) = A \cdot D_x(t) + D_x(t) \cdot A^T + G \cdot \Sigma_w^2 \cdot G^T; D_x(0) = D_v.$$

Если $f(t) = \bar{f} = \text{const}$ и матрица A является гурвицевой, то приведенные соотношения имеют стационарное решение, определяемое уравнениями:

$$A \cdot m_x(\infty) + B \cdot \bar{f} = 0;$$

$$A \cdot D_x(\infty) + D_x(\infty) \cdot A^T + G \cdot \Sigma_w^2 \cdot G^T = 0;$$

$$R_x(t, s) = R_x(t - s) = \begin{cases} e^{A(t-s)} D_x(\infty), t \geq s \\ D_x(\infty) e^{A^T(s-t)}, t < s \end{cases}$$

Таким образом, процесс x_t является асимптотически стационарным.

Моментные характеристики выхода y_t системы определяются соотношениями:

$$M\{y_t\} = m_y(t) = C \cdot m_x(t);$$

$$M\{y_t^0 (y_t^0)^T\} = D_y(t) = C \cdot D_x(t) \cdot C^T;$$

$$R_y(t, s) = C \cdot R_x(t, s) \cdot C^T.$$

Спектральная плотность стационарного выходного процесса y_t определяется формулой:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot dt = C \cdot (i\omega E - A)^{-1} \cdot G \cdot \Sigma_w^2 \cdot G^T \cdot (-i\omega E - A^T)^{-1} \cdot C^T,$$

где $C \cdot (sE - A)^{-1} \cdot G \cdot \Sigma_w^2$ - матричная передаточная функция системы от входа

$n_t, (dw_t = \Sigma_w \cdot n_t \cdot dt)$ в виде белого шума с единичной дисперсионной матрицей.

Уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка и методы его решения.

Рассмотрим стохастическое уравнение с коэффициентами, не зависящими от времени, то есть:

$$dx(t) = a(x) \cdot dt + \sigma(x) \cdot dw(t), x(0) = v.$$

Оказывается, между решениями таких стохастических уравнений и диффузионными процессами имеется теснейшая связь.

Теорема. Пусть $x(t)$ решение стохастического уравнения однородного по времени

$dx(t) = a(x) \cdot dt + \sigma(x) \cdot dw(t), x(0) = v$. Если выполнены условия существования решения (см.

теорему выше), то $x(t)$ является однородным диффузионным процессом с вектором сноса $a(x)$ и матрицей диффузии $\Sigma(x) = \sigma(x) \cdot \sigma^T(x)$.

Пусть $a(y) = \{a_1(y), \dots, a_n(y)\}^T$, $\Sigma_{ij}(y) = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(y) \cdot \sigma_{kj}(y)$. Введем следующий

дифференциальный оператор:

$$L\{q\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(a_i(y) \cdot q(y))}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2(\Sigma_{ij}(y) \cdot q(y))}{\partial y_i \partial y_j},$$

где $q(y)$ - достаточно гладкая скалярная функция.

Теорема. Пусть выполнены условия существования решения уравнения

$dx(t) = a(x)dt + \sigma(x)dw(t)$, $x(0) = v$, и, кроме того, функции $a_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ непрерывно дифференцируемы, а функции $\{\sigma_{ij}(y)\}$ дважды непрерывно дифференцируемы. Если переходная плотность $p_x(z, t, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по y и один раз непрерывно дифференцируема по $t \in [0, T]$ при всех $z \in \mathbb{R}^n$, то она удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial p_x(z, t, y)}{\partial t} = L\{p_x(z, t, y)\}, \quad p_x(z, 0, y) = \delta(y - z).$$

При этом одномерная плотность распределения $p_x(y, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial p_x(y, t)}{\partial t} = L\{p_x(y, t)\}, \quad p_x(y, 0) = p_0(y),$$

где $p_0(y)$ плотность распределения $x(0)$.

Примечание. Если $p_x(y, t)$ плотность распределения сечения $x(t)$, то

$$p_x(y, t) = \int_R p_x(z, s) p(z, t - s, y) dz.$$

Пример.

Скалярная случайная функция $x(t)$ удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dx(t) = ax(t)dt + b dw(t), \quad x(0) = v,$$

где $v \sim N(m_v, \gamma_v)$. Найдем $p_x(y, t)$. Будем искать $p_x(y, t)$ в следующем виде:

$$p_x(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_x(t)}} \exp\left\{-\frac{(y - m_x(t))^2}{2R_x(t)}\right\}.$$

Если $R_x(t) > 0$ при всех $t \geq 0$, то нетрудно проверить, что будет выполняться соотношение:

$$\frac{\partial p_x(y, t)}{\partial t} = -a \frac{\partial}{\partial y} (y p_x(y, t)) + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 p_x(y, t)}{\partial^2 y}, \quad p_x(y, 0) = p_v(y).$$

Функции $m_x(t), R_x(t)$ будем определять из уравнений метода моментов $\dot{m}_x(t) = am_x(t)$, $m_x(0) = m_v$ и $\dot{R}_x(t) = 2aR_x(t) + b^2$, $R_x(0) = R_v$. Очевидно, что если $b \neq 0$, то условие $R_x(t) > 0$ будет выполнено при всех $t > 0$ для любого $R_v \geq 0$.

Методы решения уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка

Прямое численное интегрирование уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка для задач даже не очень высокой размерности достаточно затруднительно. Рассмотрим способ замены частных производных по фазовым координатам разностными оценками дискретных функций. Будем рассматривать ограниченную область фазового пространства в виде прямоугольного многомерного

параллелепипеда $|x_i| \leq L_i$, где вместо координат $x_i \approx v_i \frac{L_i}{M}$, $v_i = -M, \dots, 0, 1, \dots, M$, M -

некоторое целое число. То есть, будем рассматривать функции $p(x, t)$ и $a(x), \sigma(x)$ только в конечном числе точек, а именно в $(2M + 1)^n$ точках фазового пространства. Значения функций

p, a, σ в этих точках обозначим соответственно $p_{v1, \dots, vn}, a_{v1, \dots, vn}, \sigma_{v1, \dots, vn}$. Заменяя частные

производные $\frac{\partial}{\partial x_i}(p, a_i, \sigma_i)$ первыми разностями, а частные производные $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ вторыми

разностями, можно аппроксимировать уравнение

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(a(x) \cdot p(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\Sigma(x) \cdot p(x, t))}{\partial^2 x}$$

следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{v1, v2, \dots, vn} - \frac{M}{L_i} \cdot \sum_{i=1}^n (p_{v1, \dots, vbi, \dots, vn} a_{i, v1, \dots, vbi, \dots, vn} - p_{v1, \dots, vai, \dots, vn} a_{i, v1, \dots, vai, \dots, vn}) - \\ - \frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot \sum_{i, j=1}^n \frac{\Sigma_{ij}}{L_i \cdot L_j} \cdot (p_{v1, \dots, vbi, \dots, vn} - p_{v1, \dots, vai, \dots, vn} - p_{v1, \dots, vci, \dots, vn} + p_{v1, \dots, vdi, \dots, vn}) = 0 \end{aligned}$$

Начальные значения величин $p_{v1, v2, \dots, vn}$ при $t = 0$, определяются начальным распределением вероятности, и известны. Таким образом, численное интегрирование исходного уравнения в частных производных сводится к интегрированию системы обыкновенных линейных уравнений размерности $(2M + 1)^n$. Обычно значение M редко можно взять меньше пяти. Тогда минимальный порядок системы уравнений будет равен 11^n . Поэтому, в реальности методами численного интегрирования можно решать задачи размерности n не выше трех /Красовский А с35/.

В ряде частных случаев, для некоторых систем можно использовать отдельные методы, связанные со спецификой конкретного уравнения в частных производных. Например, широко используют интегральные преобразования, связанные с собственными функциями диффузионного

оператора $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\Sigma(x) \cdot p(x, t))}{\partial^2 x}$ /Кляцкин с166/.

Метод статистически эквивалентного разложения.

Данный метод применим к нелинейным динамическим системам, поведение которых можно описать, в пространстве состояний с аддитивным нормальным белым шумом в качестве внешнего

возмущения, следующим уравнением $dx(t) = \phi(x(t), t) \cdot dt + dw(t)$, $x(t_0) = V$. Здесь ϕ - нелинейная детерминированная функция, $w \in \mathfrak{R}^n$ - аддитивный нормальный белый шум, $x \in \mathfrak{R}^n$ - вектор состояния системы, V - случайная величина с известным законом распределения.

Рассмотрим предварительно одномерную систему. Пусть $p(y, t)$ является функцией плотности вероятности случайного процесса $x(t)$. Обозначим через $g(\lambda, t)$ характеристическую функцию, которая будет определяться формулой $g(\lambda, t) = M[e^{i\lambda x(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y(t)} \cdot p(y, t) \cdot dy$. Тогда,

в соответствии с уравнением Пугачева В.С., можно записать следующее соотношение :

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = [-\frac{1}{2} G \lambda^2 + i m_w \lambda] \cdot g(\lambda, t) + \frac{i}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\mu)y} \cdot \phi(y, t) \cdot g(\mu, t) \cdot d\mu,$$

где G интенсивность нормального белого шума ($M\{w(t) \cdot w^T(\tau)\} = G(t) \cdot \delta(t - \tau)$) /Пугачев с183,294/.

Представим искомую характеристическую функцию $g(\lambda, t)$ в виде некоторой эквивалентной суммы:

$$g(\lambda, t) = \sum_{k=1}^N g(\lambda_k, t) \cdot \psi_k(\lambda, t),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ - некоторые фиксированные значения аргумента λ характеристической функции, а $\psi_k(\lambda, t)$ - некоторые известные функции разложения, удовлетворяющие условию $\psi_k(\lambda_v, t) = \delta_{kv}$, δ_{kv} - символ Кронекера. Значения $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ определим путем подстановки заданного разложения в уравнение Пугачева:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N g(\lambda_k, t) \cdot \psi_k(\lambda, t) = & [-\frac{1}{2} G \cdot \lambda^2 + i \cdot m_w \cdot \lambda] \cdot \sum_{k=1}^N g(\lambda_k, t) \cdot \psi_k(\lambda, t) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\mu)y} \cdot \phi(y, t) \cdot \sum_{k=1}^N g(\lambda_k, t) \cdot \psi_k(\mu, t) \cdot d\mu \end{aligned}$$

Полагая в последнем соотношении последовательно $\lambda = \lambda_v, v = 1, 2, \dots, N$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\lambda_v, t)}{\partial t} = & [-\frac{1}{2} G \cdot \lambda_v^2 + i \cdot m_w \cdot \lambda_v] \cdot g(\lambda_v, t) + \\ & + i \cdot \lambda_v \cdot \sum_{k=1}^N g(\lambda_k, t) \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_v y} \cdot \phi(y, t) \cdot dy \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu y} \cdot \psi_k(\mu, t) \cdot d\mu \right\} \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_k(y, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu y} \cdot \psi_k(\mu, t) \cdot d\mu, \quad f_k(\lambda_v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_v y} \cdot \phi(y, t) \cdot \varepsilon_k(y, t) \cdot dy.$$

Отсюда получим следующую систему дифференциальных уравнений для определения значений функции $g(\lambda_v, t)$ при $\lambda = \lambda_v$:

$$\frac{\partial g(\lambda_v, t)}{\partial t} = [-\frac{1}{2} G \cdot \lambda_v^2 + i \cdot m_w \cdot \lambda_v] \cdot g(\lambda_v, t) + i \cdot \lambda_v \cdot \sum_{k=1}^N g(\lambda_k, t) \cdot f_k(\lambda_v, t), v = 1, 2, \dots, N.$$

Эта система должна решаться при заданных начальных условиях $g(\lambda_v, t)$, которые определяются по заданию начального распределения $p(y, t_0)$ случайной функции $x(t_0) = V$:

$$g(\lambda_v, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_v y} \cdot p(y, t_0) \cdot dy.$$

После определения функций $g(\lambda_v, t)$, $v = 1, 2, \dots, N$ с помощью решения системы дифференциальных уравнений можно построить приближение:

$$g(\lambda, t) = \sum_{k=1}^N g(\lambda_k, t) \cdot \psi_k(\lambda, t).$$

Так как плотность вероятности связана с характеристической функцией обратным преобразованием Фурье: $p(y, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda y} \cdot g(\lambda, t) \cdot d\lambda$, то отсюда получим:

$$p(y, t) = \sum_{k=1}^N g(\lambda_k, t) \cdot \varepsilon_k(y, t).$$

Выбор набора значений $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функций $\psi_k(\lambda, t)$ может быть осуществлен с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$\psi_k(\lambda, t) = \frac{(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda - \lambda_N)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_N)}.$$

Значения $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ выбираются таким образом, чтобы минимизировать ошибку невязки уравнения:

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2} G \cdot \lambda^2 + i \cdot m_w \cdot \lambda \right] \cdot g(\lambda, t) + \frac{i}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda - \mu)y} \cdot \phi(y, t) \cdot g(\mu, t) \cdot d\mu,$$

при подстановке полученных функций $\psi_k(\lambda, t)$. Если плотность вероятности отлична от нуля на некотором интервале $[-a, a]$, расположенном симметрично начала координат, то функции $\psi_k(\lambda, t)$ имеют вид $\psi_k(\lambda, t) = \frac{\sin a(\lambda - \lambda_k)}{a(\lambda - \lambda_k)}$, где $\lambda_k = \frac{k\pi}{a}$, $k = 0, \pm 1, \dots$.

Численное решение уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка с помощью метода Монте – Карло.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида:

$$dx_t = a(x_t, t) \cdot dt + \sigma(x_t, t) \cdot dw_t; \quad t \geq t_0; \quad x_t \in \mathbb{R}^n; \quad w_t \in \mathbb{R}^m,$$

где w_t - винеровский процесс, исходящий из нуля с интенсивностью $Q(t) \geq 0$. Будем считать, что плотность распределения $x_{t=0}$ задана: $p_0(x)$.

Тогда эволюция плотности процесса x_t описывается уравнением Колмогорова – Фоккера – Планка (КФП) вида:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (a(x, t) \cdot p(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b(x, t) \cdot p(x, t))}{\partial^2 x}; \quad p(x, t_0) = p_0(x),$$

где $b(x, t) = \sigma(x, t) \cdot Q(t) \cdot \sigma^T(x, t)$.

Уравнение КФП можно переписать в форме:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \lambda(x,t) \cdot p(x,t) + \beta(x,t) \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b(x,t) \cdot p(x,t))}{\partial^2 x}, \text{ где}$$

$$\lambda(x,t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 b_{ij}(x,t)}{\partial x_i \cdot \partial x_j};$$

$$\beta_i(x,t) = -a_i(x,t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{ij}(x,t)}{\partial x_i}$$

Тогда решение $p(x,t)$ для момента времени $T \geq t_0$ можно записать в виде:

$$p(\bar{x}_{t=T}, T) = M\{\Lambda(T) \cdot p_0(\bar{x}_{t=0}) | \bar{x}_{t=T} = x\}, \quad \Lambda(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(\bar{x}_s, s) \cdot ds\right),$$

где процесс \bar{x}_t описывает стохастическое уравнение в обратном времени:

$$d\bar{x}_\tau = \beta(\bar{x}_\tau, \tau) \cdot d\tau + v(\bar{x}_\tau, \tau) \cdot d\bar{w}_\tau.$$

Здесь $\tau = T - t$, \bar{w}_τ - стандартный винеровский процесс, $v(x_\tau, \tau)$ - нижняя треугольная матрица, определяемая разложением Холецкого: $v(x_\tau, t) \cdot v^T(x_\tau, t) = b(x_\tau, t)$.

Численная аппроксимация выражения для плотности $p(\bar{x}_{t=T}, T)$ позволяет получить следующую формулу для оценивания решения:

$$p(\bar{x}_{t=T}, T) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\Lambda(T) \cdot p_0(x_{t=t_0}^{(i)})],$$

где $\bar{x}_t^{(i)}$ - соответствующая i - ая реализация случайного процесса.

Отсюда можно построить следующий алгоритм решения уравнения КФП методом Монте – Карло:

- выбирается область поиска $\Omega \in \mathbb{R}^n$;
- создается n - ая сетка в выбранной области $j = 1, 2, \dots, M$;
- запускается N раз случайный процесс \bar{x}_t на отрезке $[T, t_0]$;
- получается оценка $\hat{p}(\bar{x}_{t=T}, T)$ математического ожидания по N реализациям.

Так как поиск решения для каждой точки происходит независимо от других точек, то результат решения не зависит от их расположения.

Методы численного моделирования и оценивания дискретных стохастических моделей.

Начиная с 70-ых годов прошлого века, благодаря во многом работам Бокса и Дженкинса, временные ряды стали изучать с помощью моделей авторегрессии, скользящего среднего или смешанной модели авторегрессии – скользящего среднего (см. лекцию 24, часть I данного курса). Простота структуры приведенных моделей, доступность алгоритмического и программного обеспечения с одной стороны, и, в то же время возможность использования их для аппроксимации широкого класса случайных процессов, с другой стороны, обусловили их практическую и теоретическую важность. Прежде, чем переходить к схеме выбора и оценивания таких моделей, вспомним основные понятия, приведенные ранее.

Модели авторегрессии и скользящего среднего.

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ последовательность независимых случайных величин с характеристиками $m_\varepsilon(n) = M\{\varepsilon_n\}$ и $m_\varepsilon(n) = M\{\varepsilon_n\}$. Далее последовательность $\{\varepsilon_n\}$ будем

называть дискретным белым шумом. Дискретный белый шум будет стационарным, если $m_\varepsilon(n) = m_\varepsilon = \text{const}$ и $D_\varepsilon(n) = D_\varepsilon = \text{const}$. При этом некоррелированность сечений будет следовать из их независимости /Миллер с98/.

Определение. Случайная последовательность $\{y_n\}$ называется авторегрессионной последовательностью (АР последовательностью) порядка $p \geq 1$, если она удовлетворяет

уравнению: $y_n + \sum_{k=1}^p b_k y_{n-k} = \varepsilon_n$, $n \in Z$, где $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ - числовые параметры, а $p \geq 1$ порядок модели авторегрессии.

Алгебраическое уравнение $z^p + \sum_{k=1}^p b_k z^{p-k} = 0$ называется характеристическим уравнением

АР модели. АР модель называется асимптотически устойчивой, если все решения $\{z_i\}$ характеристического уравнения удовлетворяют условию $|z_i| < 1$. Модель авторегрессии часто обозначают символически $AR(p)$, где p порядок модели. Пусть задано уравнение авторегрессии

$y_n + \sum_{k=1}^p b_k y_{n-k} = \varepsilon_n$. Умножим уравнение на y_{n-k} и применим операцию математического ожидания.

Так как $M\{\varepsilon_n y_{n-k}\} = 0; k > 0$, то получим $R_y(k) = -b_1 R_y(k-1) - b_2 R_y(k-2) - \dots - b_p R_y(k-p); k > 0$.

То есть, получим разностное уравнение относительно $R_y(k)$. Как известно, общее решение этого разностного уравнения имеет вид $R_y(k) = A_1 z_1^{|k|} + \dots + A_p z_p^{|k|}$, если корни $z_i; i = 1: p$

характеристического уравнения $z^p + \sum_{k=1}^p b_k z^{p-k} = 0$ различны. Граничными условиями общего

решения будут $(p-1)$ соотношения $R_y(-k) = R_y(k); k = 1, 2, \dots, (p-1)$. Отсюда можно получить

выражение для дисперсии случайного процесса $AR(p)$: $\sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{1 + b_1 r_y(1) + \dots + b_p r_y(p)}$, где

$$r_y(k) = \frac{R_y(k)}{\sigma_y^2}.$$

Пример.

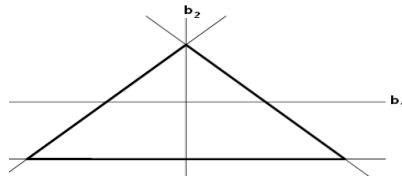
Рассмотрим случайный процесс типа $AR(2)$, определяемый уравнением

$y_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} = \varepsilon_n$. Характеристическое уравнение такого процесса будет иметь вид

$z^2 + b_1 z + b_2 = 0$. Случайная последовательность $\{y_n\}$ будет асимптотически устойчивой, если корни характеристического уравнения будут лежать внутри единичного круга $|z_i| < 1; i = 1, 2$, то есть

$|z_{1,2}| = \left| \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2} \right| < 1$. Данная область параметров (b_1, b_2) будет определяться неравенствами

$b_1^2 + 4b_2 < 0$ и $-1 < b_2 < 0$. Геометрическая иллюстрация этих неравенств, приведена на рисунке.



Корреляционная функция процесса $AR(2)$ имеет вид $R_y(k) = A_1 z_1^{|k|} + A_2 z_2^{|k|}$. Отсюда получим

$$\begin{cases} R_y(0) = b_1 R_y(1) + b_2 R_y(2) + \sigma_\varepsilon^2 \\ R_y(1) = b_1 R_y(0) + b_2 R_y(1) \\ R_y(2) = b_1 R_y(1) + b_2 R_y(0) \end{cases} \quad \text{Отсюда найдем } R_y(0) = \sigma_y^2 = \frac{(1-b_2)\sigma_\varepsilon^2}{1-2b_1-b_1^2(1+b_2)+b_2^2}; \quad R_y(1) = \frac{b_1}{1-b_2} R_y(0);$$

$$R_y(2) = \frac{1+b_1^2-b_2^2}{1-b_2} R_y(0). \quad \text{Соответственно, можно определить коэффициенты } A_1, A_2:$$

$$A_1 = \frac{z_1(1-z_2^2)}{(1+z_1 z_2)(z_1-z_2)} R_y(0); \quad A_2 = \frac{z_2(1-z_1^2)}{(1+z_1 z_2)(z_1-z_2)} R_y(0).$$

Для параметрической оценки параметра $b = (-b_1, -b_2, \dots, -b_p)^T$ AP – модели можно использовать метод наименьших квадратов. Оценка \hat{b} , в этом случае, определяется из выражения

$$\hat{b} = (Z^T X)^{-1} Z^T Y, \quad \text{где } Z = \begin{pmatrix} y_p & y_{p-1} & \dots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \dots & y_{N-p-1} \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_{p+1} \\ y_{p+2} \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}. \quad \text{Здесь } \{y_k\}; k = 1, 2, \dots, N -$$

последовательность наблюдений AP процесса, полученная согласно уравнению $y_n + \sum_{k=1}^p b_k y_{n-k} = \varepsilon_n$.

Метод Юла – Уокера также предназначается для определения оценок \hat{b} параметра $b = (-b_1, -b_2, \dots, -b_p)^T$ процесса AP. Уравнения Юла – Уокера имеют следующий вид: $\hat{b} = W^{-1} H$,

$$\text{где } W = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 \dots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 \dots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-3} \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \dots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}; \quad \hat{\rho}_k; k = 1, 2, \dots, p - \text{выборочные автокорреляции AP}$$

процесса, вычисленные по наблюдениям $\{y_k\}; k = 1, 2, \dots, N$ согласно выражениям

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}; k = 1, 2, \dots, p; \quad \text{где } \hat{\gamma}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} y_i y_{i+k}; k = 0, 1, 2, \dots, p \text{ выборочные автоковариации. Можно}$$

показать, что оценки, полученные соответственно методом наименьших квадратов и методом Юла – Уокера параметров AP процесса, асимптотически тождественны [/Капустинскас с27/](#).

Пример.

Рассмотрим AP – процесс первого порядка, задаваемый уравнение $y_n + b y_{n-1} = \varepsilon_n$. Уравнение Юла – Уокера в этом случае можно записать в виде $R_y(1) = -b R_y(0)$. Подставляя вместо $R_y(0), R_y(1)$ их оценки,

найдем $\hat{b} = -\frac{\hat{R}_y(1)}{\hat{R}_y(0)} = -\frac{n}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - \bar{y})(y_{i+1} - \bar{y}) \right] / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$. Оценка $M\{\varepsilon_n^2\} = \sigma^2$ определяется соотношением $\hat{\sigma}^2 = \hat{R}_y(0) + \hat{b}\hat{R}_y(1)$.

Определение. Случайная последовательность $\{u_n\}$ называется последовательностью скользящего среднего (СС последовательностью) порядка $q \geq 1$, если она удовлетворяет уравнению: $u_n = a_0\varepsilon_n + \sum_{k=1}^q a_k\varepsilon_{n-k}, n \in Z$, где $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ - числовые параметры, а $q \geq 1$ порядок модели скользящего среднего.

Если все решения $\{z_i\}$ характеристического уравнения СС модели: $a_0z^q + \sum_{k=1}^q a_kz^{q-k} = 0$, удовлетворяют условию $|z_i| < 1$, то СС модель называется минимально-фазовой. Модель скользящего среднего часто обозначают символически $MA(q)$, где q порядок модели.

Обе, приведенные выше, модели можно объединить в одну комбинированную модель.

Определение. Случайная последовательность $\{y_n\}$ называется последовательностью авторегрессии - скользящего среднего (АРСС последовательностью) порядка (p, q) , если она удовлетворяет стохастическому уравнению: $y_n + \sum_{k=1}^p b_k y_{n-k} = a_0\varepsilon_n + \sum_{j=1}^q a_j\varepsilon_{n-j}$, $n \in Z$, где $\{b_k\}, k=1, \dots, p$ и $\{a_j\}, j=1, \dots, q$ - числовые параметры АРСС модели, $p \geq 1$ порядок модели авторегрессии, а $q \geq 1$ порядок модели скользящего среднего.

Если последовательность $\{\varepsilon_n\}$ гауссов белый шум, то АРСС последовательность $\{y_n\}$ также называется гауссовой. Модель авторегрессии – скользящего среднего часто обозначают символически $ARMA(p, q)$, где p порядок модели авторегрессии, а q порядок модели скользящего среднего.

Теорема /Миллер с100/. Пусть $\{y_n\}$ удовлетворяет уравнению $y_n + \sum_{k=1}^p b_k y_{n-k} = \varepsilon_n$, описывающему асимптотически устойчивую АР модель порядка $p \geq 1$, где $\{\varepsilon_n\}$ стационарный белый шум. Тогда имеет место соотношение: $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \varepsilon_{n-k}$, где коэффициенты $\{r_k\}$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} |r_k| < \infty$ и вычисляются по рекуррентным формулам: $r_{k+1}\beta_{k,1} = 0$, $\beta_{k+1,j} = \beta_{k,j+1} - \beta_{k,1}b_j; j=1,2,\dots, p-1; \beta_{k+1,p} = -\beta_{k,1}b_p; k=0,1,\dots$, с начальными условиями $r_0 = 1; \beta_{0,j} = b_j; j=1,2,\dots, p$. Случайная последовательность $\{y_n\}$, при этом, является

стационарной и имеет характеристики $m_y = m_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} r_k$ $D_y = D_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (r_k)^2$ $R_y(m) = D_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} r_k r_{k+|m|}$,
 $R_\varepsilon(m) = D_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \lambda_{k+|m|}$, $m \in Z$.

Пример.

Рассмотрим модель *ARMA* (1,1), определяемую уравнением $y_n + b_1 y_{n-1} = \varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1}$.

Последовательность будет асимптотически устойчивой, если $|b_1| < 1$. Тогда уравнения для корреляционной функции будут иметь вид:

$$\begin{cases} R_y(0) = -b_1 R_y(1) + R_{y\varepsilon}(0) + a_1 R_{y\varepsilon}(-1) \\ R_y(1) = -b_1 R_y(0) + a_1 R_{y\varepsilon}(0) \\ \dots\dots\dots \\ R_y(k) = -b_1 R_y(k-1); \quad k \geq 2 \end{cases}.$$

Выражения для $R_{y\varepsilon}(0)$ и $R_{y\varepsilon}(-1)$ получаются умножением уравнения $y_{n+1} + b_1 y_n = \varepsilon_{n+1} + a_1 \varepsilon_n$

на ε_n и ε_{n-1} и, соответствующим переходом к математическому ожиданию. Отсюда получим $R_{y\varepsilon}(0) = \sigma_\varepsilon^2$ и

$R_{y\varepsilon}(-1) = (a_1 - b_1) \sigma_\varepsilon^2$. Подставляя полученные соотношения в выражения для корреляционной функции, получим:

$$\begin{cases} R_y(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 + a_1^2 - 2a_1 b_1}{1 - b_1^2} \\ R_y(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1 - a_1 b_1)(a_1 - b_1)}{1 - b_1^2} \\ \dots\dots\dots \\ R_y(k) = -b_1 R_y(k-1); \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Структурная идентификация АРПСС моделей (ARIMA).

Построение модели по стохастическим временным рядам состоит из следующих этапов:

- определение цели построения модели (осуществление краткосрочного прогноза; построение математической модели, для синтеза соответствующего управления; и прочее);
- выполнить предварительный анализ экспериментальных данных: (удаление аномальных данных или выбросов, компенсация отсутствующих данных) и априорной информации о процессах, для которых строится модель;
- выполнить выделение и проверку имеющихся данных (временных рядов) на наличие детерминированных (в общем случае нелинейных) составляющих;
- выбрать и обосновать класс возможных моделей – кандидатов, для проведения дальнейшей параметрической идентификации, а также выбрать критерий отбора (селекции) моделей;
- выбрать наиболее эффективный метод оценивания параметров модели временного ряда;
- проверить адекватность полученной модели.

Определение цели построения модели.

Основной задачей теории управления является построение (синтез) такого регулирующего воздействия на объект, при котором выходной сигнал удовлетворял некоторому заданному критерию, например, воспроизводил на выходе с минимальной ошибкой задающее входное воздействие. Обычно, для решения такой задачи строится регулятор, обеспечивающий, как устойчивость замкнутой системы, так и ограничивающий динамические ошибки в переходном

режиме в некоторых допустимых пределах. Для решения такой задачи синтеза необходимо иметь динамическую вход – выходную модель объекта. Поэтому основной задачей анализа экспериментальных данных является построение такой модели.

Предварительный анализ экспериментальных данных.

На этом этапе отбрасывают аномальные данные, связанные со сбоями измерительной аппаратуры или непредсказуемым изменением условием эксперимента. При наличии пропущенных данных формируется процедура их учета и компенсации (например, присвоением средних значений, полученных по соседним наблюдениям). На качественном уровне определяется наличие детерминированной составляющей, оценивается возможность изменения характера поведения ряда, связанное с изменением свойств объекта, выделяются однородные, по характеру поведения, участки ряда. Кроме того, оцениваются взаимно-корреляционные связи между входами и выходами объекта.

Выделение детерминированных (сезонных) составляющих временного ряда.

Если наблюдаемый ряд $\{y_k\}$ имеет признаки нестационарности (например, имеются какие – либо детерминированные тренды – линейный, полиномиальный и т.д.), то описание ряда с помощью стационарного процесса не может быть адекватной моделью. В этом случае, можно предварительно провести регрессионный анализ и удалить из наблюдений детерминированную составляющую. В ряде случаев, может оказаться стационарной некоторая разность наблюдаемого процесса порядка d . То есть ряд $\{w_n = \nabla^d y_n\}$, где $\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$, будет стационарным. Тогда для описания процесса $\{w_n\}$ можно использовать модель ARMA. Таким образом, можно перейти к модели $ARIMA(p, d, q)$, где p порядок модели авторегрессии, d - порядок детерминированного тренда, а q порядок модели скользящего среднего. При этом, чтобы выразить значения наблюдаемого процесса $\{y_n\}$ через значения процесса $\{w_n\}$ нужно использовать оператор суммирования (аналог интегрирования), обратный оператору ∇ .

Обоснование класса возможных моделей.

- Проблема выбора класса моделей включает в себя решение следующих задач:
- обоснование характера и выделение детерминированной составляющей обобщенной (включающей детерминированную и стохастическую составляющие) модели
 - обоснование вида и размерности выходного вектора чисто стохастической модели;
 - выбор и обоснование запаздывания реакции на выходе объекта по отношению к входному сигналу (лаговые эффекты);
 - оценка типа не учитываемых возмущений и оценка их влияния.

Порядок авторегрессии определяется с помощью автокорреляционной функции. Число коэффициентов автокорреляционной функции, которые отличны от нуля в статистическом смысле, и будет составлять порядок авторегрессии.

Одним из общепринятых подходов к определению того, что коэффициенты автокорреляционной функции будут отличны от нуля в статистическом смысле, является использование критерия Льюнга – Бокса:

$$Q(R_y(k)) = n \cdot (n + 2) \cdot \sum_{i=1}^s \frac{R_y^2(i)}{n - i},$$

где n - длина выборки $\{y_i\}; i = 1 : n$, по которой строится модель, s - число коэффициентов автокорреляционной функции, которые исследуются на существенное отличие от нуля.

Методы параметрического оценивания моделей типа ARMA.

Наиболее распространенными методами оценивания параметров модели являются различные модификации метода наименьших квадратов и метод максимального правдоподобия. Однако, для небольших порядков модели APCC достаточно часто используют способ моментов. Данный способ заключается в приравнивании определенного количества выборочных моментов к соответствующим теоретическим значениям, которые являются известными функциями от неизвестных параметров. Рассматривая количество моментов, равное числу оцениваемых параметров, получаем искомые оценки. В частности, для AP – процессов метод моментов сводится к решению системы уравнений Юла – Уокера относительно параметров $\{-b_1, -b_2, \dots, -b_p\}$. Следует отметить, что метод максимального правдоподобия дает более эффективные оценки по сравнению со способом моментов.

Критерии адекватности APCC моделей.

На практике обычно используют следующие оценки адекватности.

Критерий детерминации R^2 .

Коэффициент R^2 определяется как отношение дисперсии той части временного ряда, которая использовалась для получения модели, к выборочной дисперсии, полученной с помощью всего ряда:

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (\hat{y}_i - \tilde{y})^2 / \sum_{i=1}^{n_1+n_2=n} (y_i - \bar{y})^2 ,$$

где \tilde{y} - среднее значение, вычисленное по наблюдениям $\{y_i\}; i=1:n_1$; \bar{y} - среднее значение, вычисленное по наблюдениям $\{y_i\}; i=1:n$ всего ряда.

Критерий Байеса – Шварца (BSC).

Данный критерий основан на вычислении следующего значения:

$$BSC = \ln \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \right] + r \cdot \ln(n) .$$

С помощью данного критерия можно анализировать влияние сложности модели с учетом имеющегося объема выборки наблюдения.

Следует отметить, что для построения и идентификации моделей типа ARIMA существует большое количество прикладных пакетов. Наиболее доступным является модуль

System Identification Toolbox пакета MatLab.

Параметрическое оценивание ARX моделей.

Скалярный случай.

Модель ARX:

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_{n_a} y[k-n_a] = b_1 u[k-1] + \dots + b_{n_b} u[k-n_b] + e[k]$$

может быть представлена как линейная регрессия вида:

$$\hat{y}[k | \theta] = \phi^T[k] \cdot \theta ,$$

где $\phi[k] = (-y[k-1], -y[k-2], \dots, -y[k-n_a], u[k-1], \dots, u[k-n_b])^T$; $\theta = (a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b})^T$.

При эмпирическом критерии наименьших квадратов, который может быть записан в форме:

$$J_N(\theta, Y_N) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \{y[k] - \phi^T(k) \cdot \theta\}^2,$$

МНК оценка дается соотношением:

$$\hat{\theta}_N = \left\{ \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \phi[k] \cdot \phi^T[k] \right\}^{-1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \phi[k] \cdot y[k].$$

Введем в рассмотрение матрицу $R(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k] \cdot \phi^T[k]$ соответствующей размерности

и вектор – столбец $d(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k] \cdot y[k]$. Тогда компоненты матрицы $R(N)$ будут равны

$$\{R(N)\}_{ij} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N y[k-i] \cdot y[k-j] \text{ при } 1 \leq i, j \leq n_a, \text{ и, содержать суммы произведений}$$

$u[k-r]u[k-s]$ или $u[k-r]y[k-s]$ при $n_a < r, s \leq n_a + n_b$.

То есть матрица $R(N)$ будет состоять из оценок ковариационных функций $\{y[k]\}$ и $\{u[k]\}$. То есть МНК оценка является, по сути, оценкой, полученной на основе корреляционного анализа. Так как наблюдаемые данные генерируются в соответствии с уравнением $y[k] = \phi^T[k] \cdot \theta_0 + e[k]$, то значение θ_0 будем считать, как «истинное значение» вектора параметров. Отсюда найдем, что:

$$\hat{\theta}_N = \{R(N)\}^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k] \cdot \{\phi^T[k] \cdot \theta_0 + e[k]\} = \theta_0 + \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \phi[k] \cdot e[k].$$

Если процесс $\{e[k]\}$ является реализацией стационарного случайного процесса, то можно показать, что матрица $R(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R^*$ к некоторой постоянной матрице R^* с вероятностью 1.

Аналогично можно показать, что $\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \phi[k] \cdot e[k] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h$ с вероятностью 1. Таким образом, получим соотношение:

$$\hat{\theta}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \theta_0 + (R^*)^{-1} h,$$

где, либо матрица R^* не является вырожденной, либо $h = 0$.

Матрица R^* будет невырожденной, если последовательности $\{u[k]\}$ и $\{e[k]\}$ являются независимыми, а матрица, состоящая из элементов функции $u[k-r] \cdot u[k-s]$ и имеющая размерности $n_b \times n_b$, будет также невырожденной. В этом случае входную последовательность называют постоянно возбуждающей порядка n_b .

Вектор h будет равен ($h = 0$), если последовательность $\{e[k]\}$ является последовательностью случайных величин с нулевыми средними значениями (белый шум). Тогда значение $e[k]$ не зависит от того, что происходило до момента $[k-1]$ включительно, и, следовательно, $M\{\phi[k] \cdot e[k]\} = 0$.

Основной недостаток МНК относится к его асимптотическим свойствам: если в разностном уравнении ошибка $e[k]$ не является белым шумом, то МНК оценка не сойдется к истинному значению θ_0 . Обычно, для решения этой проблемы вводится дополнительное уравнение,

моделирующее «цветной» шум $e[k] = G(q) \cdot n[k]$, где $n[k]$ - белый шум, q - оператор сдвига назад; $G(q)$ - линейный фильтр. Использование такой модели приводит, в общем случае, к методам отличным от МНК. Однако, если свойства ошибки $e[k]$ хорошо известны (то есть фильтр известен), то получим уравнение:

$$A(q) \cdot y[k] = B(q) \cdot u[k] + G(q) \cdot n[k].$$

Отсюда можно прийти к эквивалентной задаче оценивания модели:

$$A(q) \cdot y_F[k] = B(q) \cdot u_F[k] + n[k],$$

где $y_F[k] = G^{-1}(q) \cdot y[k]$; $u_F[k] = G^{-1}(q) \cdot u[k]$.

Пусть $G(q) = \frac{1}{D(q)}$, где $D(q)$ - полином степени l . Тогда уравнение модели примет вид:

$$A(q) \cdot D(q) \cdot y[k] = B(q) \cdot D(q) \cdot u[k] + n[k].$$

В этом случае, применение МНК с порядками $n_{AD} = n_a + l$; $n_{BD} = n_b + l$ дает состоятельные оценки многочленов $A \cdot D$ и $B \cdot D$. Такой подход часто называют МНК с повторением.

Многомерный случай.

Если выходная переменная $y[k] \in R^r$, то параметр θ будет являться матрицей размера $(s \times r)$, где $s = n_a \cdot r + n_b \cdot m$, где m - число компонент вектора управления. Эмпирический критерий наименьших квадратов принимает вид:

$$J_N(\theta, Y_N) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \cdot \{y[k] - \phi^T(k) \cdot \theta\}^T \cdot \Lambda^{-1} \cdot \{y[k] - \phi^T[k] \cdot \theta\},$$

где Λ - положительная, симметрическая, невырожденная матрица весовых коэффициентов. Тогда МНК оценка дается следующим выражением:

$$\hat{\theta}_N = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k] \Lambda^{-1} \phi^T[k] \right\}^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi[k] \Lambda^{-1} y[k].$$

Уравнение регрессии будет описываться, как: $\hat{y}[k | \theta] = \theta^T \cdot \phi[k]$. Последнюю формулу можно рассматривать, как совокупность r разных линейных регрессий, записанных одна под другой, с одним и тем же регрессионным вектором.

Алгоритмы моделирования случайных функций с заданными характеристиками.

Моделирование дискретного белого шума

Моделирование дискретного цветного шума.

Функции среды Matlab для моделирования случайных величин.

Для формирования массива элементов, распределенных по равномерному закону, используется функция $rand(.)$.

Синтаксис функции $rand(n)$ формирует массив размера $n \times n$, элементами которого являются случайные величины, распределенные по равномерному закону в интервале (0, 1).

Синтаксис $rand(m,n)$ формирует массив размера $m \times n$, элементами которого являются случайные величины, распределенные по равномерному закону в интервале (0, 1).

Команда $X = rand(size(A))$ формирует массив соразмерный с матрицей A , элементами которого являются случайные величины, которые распределены по равномерному закону в интервале (0, 1).

Синтаксис функции $rand$ без аргументов формирует одно случайное число, подчиняющееся равномерному закону распределения в интервале (0, 1), которое изменяется при каждом последующем вызове.

Алгоритм генерации равномерно распределенных случайных чисел основан на линейном конгруэнтном методе, при котором вычисление следующего случайного числа реализовано согласно соотношению: $seed = (7^7 \cdot seed) \pmod{2^{31} - 1}$. Синтаксис $rand('seed')$ возвращает текущее значение базы (начального значения) генератора случайных чисел, а команда $rand('seed', x0)$ присваивает базе (начальному значению) генератора случайных чисел значение $x0$.

Результат выполнения команды зависит от версии системы и предыстории сеанса работы.

Для формирования массива элементов, распределенных по нормальному закону, используется функция $randn(.)$. Синтаксис функции $randn(n)$ формирует массив размера $n \times n$, элементами которого являются случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1.

Синтаксис $randn(m,n)$ формирует массив размера $m \times n$, элементами которого являются случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1.

Команда $X = randn(size(A))$ формирует массив соразмерный с матрицей A , элементами которого являются случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1.

Синтаксис $randn$ без аргументов формирует одно случайное число, распределенное по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1, которое изменяется при каждом последующем вызове.

Функция $normrnd(MU, SIGMA)$ предназначена для генерации псевдослучайного числа по нормальному закону для каждой пары параметров MU (математического ожидания) и $SIGMA$ (среднего квадратического отклонения). Размерность векторов или матриц параметров MU и $SIGMA$ должна быть одинаковой. Скалярный параметр увеличивается до размера остальных входных аргументов.

Команда $R = normrnd(MU, SIGMA, m)$ позволяет получить вектор псевдослучайных чисел из m элементов, распределенных по нормальному закону для параметров MU и $SIGMA$, где m - вектор размерностью 1×2 определяющий размерность матрицы R . Синтаксис $normrnd(MU, SIGMA, m, n)$ позволяет получить матрицу псевдослучайных чисел с размерностью $m \times n$ элементов, распределенных по нормальному закону для параметров MU , $SIGMA$.

Команда $R = mvnrnd(MU, SIGMA)$ генерирует матрицу $n \times d$ псевдослучайных чисел распределенных по многомерному нормальному закону с параметрами математического ожидания

MU и матрицей корреляции $SIGMA$. Размерность матрицы MU равна $n \times d$. Функция $mvnrnd(.)$ генерирует каждый ряд R на основе соответствующего ряда значений MU . Матрица $SIGMA$ должна быть квадратной и положительно определенной. $SIGMA$ может быть задана матрицей с размерностью $d \times d$ или 3-х мерным массивом с размерностью $d \times d \times N$. Если матрица $SIGMA$ задана как 3-х мерный массив, то каждый ряд R генерируется с использованием страницы массива $SIGMA$, то есть $R(i,:)$ генерируется с использованием значений $MU(i,:)$ и $SIGMA(:, :, i)$. Если массив MU задан как вектор с размерностью $1 \times d$, то функция $mvnrnd(.)$ формирует матрицу размерности соответствующей размерности массива $SIGMA$.

Команда $R = mvnrnd(MU, SIGMA, cases)$ генерирует матрицу псевдослучайных чисел с размерностью $cases \times d$, распределенных по многомерному нормальному распределению для вектора средних MU с размерностью $1 \times d$ и матрицы $SIGMA$ с размерностью $d \times d$.