Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 1-4

Условие задачи

Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x,y)=C$):

$$\sqrt{3+y^2}dx - y\cdot dy = x^2y\cdot dy$$

Решение

$\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$ – *уравнение с разделяющимися переменными*

$$\sqrt{3+y^2}\,dx = (x^2+1)y\,dy$$

$$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{3+y^2}}dy$$

$$\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2y}{\sqrt{3+y^2}}dy$$

$$\operatorname{arctg} x = \sqrt{3+y^2} + C$$

$$\operatorname{arctg} x - \sqrt{3+y^2} = C$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 2-4

Условие задачи

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$$

Решение

$xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$ – *уравнение, приводящиеся к однородному дифференциальному уравнению*

$y' = \frac{|x|}{x}\sqrt{1+(y/x)^2} + y/x$ – *однородное дифференциальное уравнение*

$1)\ x>0 \Rightarrow |x| = x$

$$z = y/x \Rightarrow y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \sqrt{1+z^2} + z$$

$\frac{dz}{dx}x = \sqrt{1+z^2}$ – *уравнение с разделяющимися переменными*

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dx}{x}$$

$$\ln(z+\sqrt{1+z^2})=\ln(x)+\ln|C|$$

$$z+\sqrt{1+z^2}=x|C|$$

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=|C|x$$

$$\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}=|C|$$

$$2)x<0\Rightarrow|x|=-x$$

$$y'=-\sqrt{1+(y/x)^2}+y/x-\text{однородное дифференциальное уравнение}$$

$$z=y/x\Rightarrow y'=z'x+z$$

$$z'x+z=-\sqrt{1+z^2}+z$$

$$\frac{dz}{dx}x=-\sqrt{1+z^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{-dx}{x}$$

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\ln x^{-1}+\ln|C|$$

$$\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)x=|C|$$

$$\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)x=|C|$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=|C|$$

$$\text{ответ}:\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}=|C|\ \text{при}\ x>0$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=|C|\ \text{при}\ x<0$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 3-4

Условие задачи

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y'=\frac{2y-2}{x+y-2}$$

Решение

$$\begin{cases} x = v+1 \\ y = u+1 \end{cases}$$

$$u' = \frac{2u+2-2}{v+1+u+1-2}$$

$$u' = \frac{2u}{v+u}$$

$$u' = \frac{2u/v}{1+u/v} - \textit{однородное дифференциальное уравнение}$$

$$z = u/v \Rightarrow u' = z + z'v$$

$$z + z'v = \frac{2z}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dv}v = \frac{2z - z(1+z)}{1+z} - \textit{уравнение с разделяющимися переменными}$$

$$\frac{(1+z)\,dz}{z-z^2} = \frac{dv}{v}$$

$$\ln z - 2\ln(z-1) = \ln v + \ln C$$

$$\frac{z}{(z-1)^2} = Cv$$

$$\frac{u}{(u-v)^2} = C$$

$$\frac{y-1}{(y-x)^2} = C$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 4-4

Условие задачи

Найти решение задачи Коши.

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Решение

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \cos^2 x$$

$$v(u' + u\operatorname{tg} x) + uv' = \cos^2 x$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -u\dfrac{\sin x}{\cos x} \\ uv' = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{u} = \dfrac{-\sin x \cdot dx}{\cos x} \\ uv' = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \\ v = \sin x + C \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = uv = \dfrac{\sin 2x}{2} + C\cos x \\ y(\pi/4) = 1/2 \end{cases} \Rightarrow C = 0$$

$$y = \frac{\sin 2x}{2} - \textit{решение задачи Коши}$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 5-4

Условие задачи

Решить задачу Коши.

$$2\left(4y^2 + 4y - x\right)y' = 1,\ \ y|_{x=0} = 0$$

Решение

$$2\left(4y^2 + 4y - x\right)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 1$$

$$2\left(4y^2 + 4y - x\right) = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}$$

$$2\left(4y^2 + 4y - x\right) = x'_y$$

$$x'_y + 2x = 8y(1+y)$$

$$x = uv \Rightarrow x' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + 2uv = 8y(1+y)$$

$$u'v + u(v' + 2v) = 8y(1+y)$$

$$\begin{cases} v' + 2v = 0 \\ u'v = 8y(1+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{v} = -2\,\mathrm{dy} \\ u'v = 8y(1+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = e^{-2y} \\ u' = 8e^{2y}y(1+y) \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} v = e^{-2y} \\ u = 4e^{2y}y^2 + C \end{cases} \Rightarrow x = uv = 4y^2 + Ce^{-2y}$$

$$y|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$x = 4y^2$$

$$(1)\ \ 8\int e^{2y}y(y+1)\,\mathrm{dy} = \begin{vmatrix} dv = e^{2y}\,\mathrm{dy};\ v = e^{2y}/2 \\ u = \left(y^2 + y\right)\mathrm{dy};\ du = (2y+1)\,\mathrm{dy} \end{vmatrix} =$$

$$= 8\left(\frac{e^{2y}\left(y^2 + y\right)}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2y}(2y+1)\,\mathrm{dy}\right) = \begin{vmatrix} dv = e^{2y}\,\mathrm{dy};\ v = e^{2y}/2 \\ u = 2y+1;\ du = 2\,\mathrm{dy} \end{vmatrix} =$$

$$= 4e^{2y}(y^2+y) - 4\left(\frac{e^{2y}(2y+1)}{2} - \int \frac{e^{2y}}{2}\cdot 2\,\mathrm{dy}\right) = 4e^{2y}(y^2+1) - 2e^{2y}(2y+1) + 4\int e^{2y}\,\mathrm{dy} =$$

$$= 4e^{2y}(y^2+1) - 2e^{2y}(2y+1) + 4\cdot\frac{e^{2y}}{2} + C = 4e^{2y}y^2 + 4e^{2y}y - 2e^{2y}\cdot 2y - 2e^{2y} + 2e^{2y} + C =$$

$$= 4e^{2y}y^2 + C$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 6-4

Условие задачи

Найти решение задачи Коши.

$$y' + 4x^3y = 4\left(x^3+1\right)e^{-4x}y^2,\ y(0) = 1$$

Решение

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{4x^3}{y} = 4\left(x^3+1\right)\mathrm{e}^{-4x}$$

$$z = 1/y \Rightarrow z' = \frac{-1}{y^2}y'$$

$$z' - 4x^3z = -4(x^3+1)e^{-4x}$$

$$z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - 4x^3uv = -4(x^3+1)e^{-4x}$$

$$u'v + u(v' - 4x^3v) = -4(x^3+1)e^{-4x}$$

$$\begin{cases} v' = 4x^3v \\ u'v = -4(x^3+1)e^{-4x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{v} = 4x^3\,\mathrm{dx} \\ u'v = -4(x^3+1)e^{-4x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = e^{x^4} \\ u' = -4(x^3+1)e^{-4x-x^4} \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} v = e^{x^4} \\ u = e^{-4x-x^4} + C \end{cases} \Rightarrow z = uv = e^{-4x} + Ce^{x^4}$$

$$z(0) = 1 \Rightarrow e^0 + C\cdot e^0 = 1 \Rightarrow 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow z = e^{-4x} \Rightarrow y = e^{4x}$$

$$(1)\quad \int -4\left(x^3+1\right)e^{-4x-x^4}\,\mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} d\left(-4x-x^4\right) = (-4-4x^3)\,\mathrm{dx} = \\ = -4\left(x^3+1\right)\mathrm{dx} \end{array} \right| = e^{-4x-x^4} + C$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 7-4

Условие задачи

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

Решение

в задачнике до 2005 года издания (в мягкой обложке)

$$(2x-1-\frac{y}{x^2})\,\mathrm{dx}-(2y-\frac{1}{x})\,\mathrm{dy}=0$$

$$P(x,y)=2x-1-\frac{y}{x^2}\Rightarrow P_y^{'}=\frac{-1}{x^2}$$

$$Q(x,y)=\frac{1}{x}-2y\Rightarrow Q_x^{'}=\frac{-1}{x^2}$$

$P_y^{'}=Q_x^{'}\Rightarrow$ *это уравнение полных дифференциалов*

$$F(x,y)=\int P\,\mathrm{dx}+\varphi(y)=\int(2x-1-\frac{y}{x^2})\,\mathrm{dx}+\varphi(y)=x^2-x+\frac{y}{x}+\varphi(y)$$

$$F_y^{'}=\frac{1}{x}+\varphi'=Q\Rightarrow\varphi'=-2y\Rightarrow\varphi=-y^2+C$$

$$x^2-x+\frac{y}{x}-y^2=C$$

в задачнике 2005 года издания (в твердой обложке)

$$\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)\mathrm{dx}-\left(2x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{dy}=0$$

$$P(x,y)=2x-1-\frac{y}{x^2}\Rightarrow P_y'=-\frac{1}{x^2}$$

$$Q(x,y)=-2x+\frac{1}{x}\Rightarrow Q_x'=-2-\frac{1}{x^2}$$

данная задача является примером на уравнение полных дифференциалов, для которых должно выполняться условие $P_y^{'}=Q_x^{'}$ В данном примере оно не выполняется (в других 30 вариантах этой задачи оно выполняется). В новом издании кузнецова опечатка.

См. решения из задачника до 2005 года издания (в мягкой обложке)

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 8-4

Условие задачи

Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку М.

$$y'=\frac{2x}{3y},\ M(1,\ 1)$$

Решение

построим поле направлений для данного диф. уравнения. Изоклины, соответствующие направлениям поля с угловым коэффициентом равным k есть $y = \dfrac{3k}{2x}$

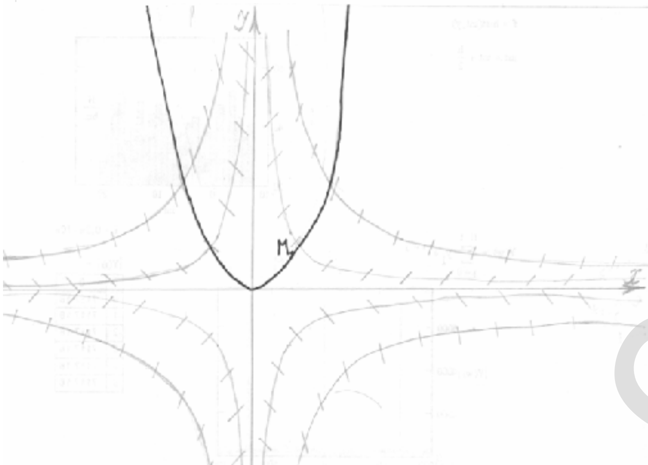
интегральные кривые имеют вид :

$y = C \cdot e^{x^2/3}$

$M(1,1) \Rightarrow C = 1/e^{1/3}$

т.е.

$y = e^{\frac{x^2+1}{3}}$



Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 9-4

Условие задачи

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор $\vec{MN}$ с концом на оси Oy имеет длину, равную a, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy.

$M_0(6,\ 4),\ a = 10$

Решение

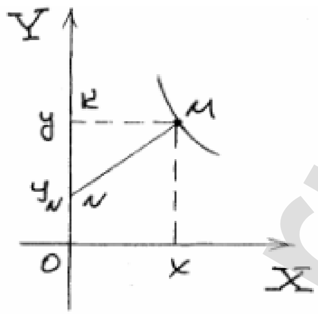
уравнение нормали

$y - Y = \dfrac{-1}{y'}(x - X)$, *где* (x, y) *– координаты произвольной точки искомой линии*

$\triangle MNK$ *– прямоугольный* $\Rightarrow KM^2 + NK^2 = MN^2$

$x^2 + (y - y_N)^2 = a^2$

$N(0; y_N)$ *принадлежит нормали* $\Rightarrow$



$$\Rightarrow y - y_N = \frac{-x}{y'} \Rightarrow y_N = y + \frac{x}{y'}$$

$$x^2 + (y - y - \frac{x}{y'})^2 = a^2$$

$$x^2 + \left(\frac{x}{y'}\right)^2 = a^2$$

$$x^2\left(1 + \frac{1}{(y')^2}\right) = a^2 \Rightarrow \frac{1}{(y')^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\frac{\text{dy}}{\text{dx}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow y = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$M_0(6,\ 4) \Rightarrow 4 = -\sqrt{100 - 36} + C \Rightarrow C = 12$$

$$y = -\sqrt{100 - x^2} + 12$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 10-4

Условие задачи

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' = x + 1$$

Решение

$xy''' + y'' = x + 1 -$ *дифференциальное уравнение высшего порядка, допускающее понижение степени*

$$y'' = p$$

$$xp' + p = x + 1$$

$$p = uv$$

$$xu'v + xuv' + uv = x + 1$$

$$v(xu' + u) + xuv' = x + 1$$

$$\begin{cases} xu' + u = 0 \\ xuv' = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1/x \\ v' = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1/x \\ v = x^2/2 + x + C \end{cases}$$

$$p = uv = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x} = y''$$

$$y' = \int y''\mathrm{dx} = \frac{x^2}{4} + x + C\ln x + C_2$$

$$y = \int y'\mathrm{dx} = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C(x\ln x - x) + C_2 x + C_3$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 11-4

Условие задачи

Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 2\sin y \cdot \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Решение

Это дифференциальное уравнение высшего порядка, допускающее понижение степени

$$y' = p \Rightarrow y'' = p\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dy}}$$

$$p\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dy}} = 2\cos^3 y \cdot (-\sin y)$$

$$p\,\mathrm{dp} = 2\cos^3 y \cdot (-\sin y\,\mathrm{dy})$$

$$\begin{cases} p^2/2 = \cos^4 y/2 + C \\ p(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ y' = \cos^2 y \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \cos^2 y$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\cos^2 y} = \mathrm{dx}$$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\, y = x + C \\ y(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

$$y = \mathrm{arctg}\, x$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 12-4

Условие задачи

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$$

Решение

$y^{IV}-3y'''+3y''-y'=2x$ – *линейное неоднородное дифференциальное уравнение*

характеристическое уравнение

$k^4-3k^3+3k^2-k=0 \Leftrightarrow k=0, k_{2,3,4}=1$

общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$y_{общ}=C_1+e^x(C_2+C_3x+C_4x^2)$

частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$y_{час}=x(ax+b)=ax^2+bx$

$y'_{час}=2ax+b$

$y''_{час}=2a$

$y'''_{час}=y^{IV}_{час}=0$

$y^{IV}_{час}-3y'''_{час}+3y''_{час}-y'_{час}=2x$

$0-3\cdot 0+3\cdot 2a-2ax-b-2x=0$

$$\left(-2a-2\right)x+6a-b=0 \Rightarrow \begin{cases}6a-b=0\\-2-2a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6\cdot(-1)-b=0\\a=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=-6\end{cases}$$

$y_{час}=-x^2-6x$

$$y=y_{общ}+y_{час}=C_1+e^x(C_2+C_3x+C_4x^2)-x^2-6x$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 13-4

Условие задачи

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'''-2y''+y'=(2x+5)e^{2x}$$

Решение

$y'''-2y''+y'=(2x+5)e^{2x}$ – *линейное неоднородное дифференциальное уравнение*

характеристическое уравнение

$k^3-2k^2+k=0 \Rightarrow k\left(k^2-2k+1\right)=0 \Leftrightarrow k=0, k_{2,3}=1$

общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$y_{общ}=C_1+C_2e^x+C_3xe^x$

частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$y_{час}=(ax+b)e^{2x}$

$y'_{час}=a\cdot e^{2x}+(ax+b)\cdot 2e^{2x}$

$y''_{час}=2ae^{2x}+2(ae^{2x}+(ax+b)\cdot 2e^{2x})=e^{2x}(4a+4b+4ax)$

$y'''_{час}=2e^{2x}(4a+4b+4ax)+e^{2x}\cdot 4a=e^{2x}(12a+8b+8ax)$

$y'''_{час}-2y''_{час}+y'_{час}=(2x+5)e^{2x}$

$e^{2x}(12a+8b+8ax)-2e^{2x}(4a+4b+4ax)+a\cdot e^{2x}+(ax+b)\cdot 2e^{2x}-(2x+5)e^{2x}=0$

$$12a+8b+8ax-8a-8b-8ax+a+2ax+2b-2x-5=0$$
$$x\cdot(8a-8a+2a-2)+12a+8b-8a-8b+a+2b-5$$
$$x\cdot(2a-2)+5a+2b-5=0\Rightarrow\begin{cases}-5+5a+2b=0\\2a-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$$
$$y_{час}=xe^{2x}$$
$$y=y_{общ}+y_{час}=C_1+C_2e^x+C_3xe^x+xe^{2x}$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 14-4

Условие задачи

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''+y=2\cos 7x+3\sin 7x$$

Решение

характеристическое уравнение

$$k^2+1=0\Leftrightarrow k=\pm i$$

общее решение

$$y_{общ}=C_1\cos x+C_2\sin x$$

частное решение

$$y_{час}=a\cos 7x+b\sin 7x$$
$$y'_{час}-7a\sin 7x+7b\cos 7x$$
$$y''_{час}=-49a\cos 7x-49b\sin 7x$$
$$y''_{час}+y_{час}=2\cos 7x+3\sin 7x$$
$$-49a\cos 7x-49b\sin 7x+a\cos 7x+b\sin 7x-2\cos 7x-3\sin 7x=0$$
$$(-49a+a-2)\cos 7x+(-49b+b-3)\sin 7x\Rightarrow\begin{cases}-2-48a=0\\-3-48b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1/24\\b=-1/16\end{cases}$$
$$y_{час}=-\frac{\cos 7x}{24}-\frac{\sin 7x}{16}$$
$$y=y_{общ}+y_{час}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 7x}{24}-\frac{\sin 7x}{16}$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 15-4

Условие задачи

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''-3y'=2\text{ch}3x$$

Решение

$$y'' - 3y' = 2\operatorname{ch} 3x; y'' - 3y' = e^{3x} + e^{-3x}$$

характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = 3$$

общее решение

$$y_{общ} = C_1 + C_2 e^{3x}$$

частное решение

$$y_{час} = a \cdot x \cdot e^{3x} + b \cdot e^{-3x}$$

$$y'_{час} = ae^{3x} + 3axe^{3x} - 3be^{-3x}$$

$$y''_{час} = ae^{3x} + 3a(e^{3x} + 3xe^{3x}) + 9be^{-3x}$$

$$y''_{час} - 3y'_{час} = e^{3x} + e^{-3x}$$

$$ae^{3x} + 3a(e^{3x} + 3xe^{3x}) + 9be^{-3x} - 3\left(ae^{3x} + 3axe^{3x} - 3be^{-3x}\right) - e^{3x} - e^{-3x} = 0$$

$$e^{-3x}\left(18b - 1\right) + e^{3x}\left(3a - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 18b - 1 = 0 \\ 3a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 1/18 \end{cases}$$

$$y_{час} = \frac{xe^{3x}}{3} + \frac{e^{-3x}}{18}$$

$$y = y_{общ} + y_{час} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{xe^{3x}}{3} + \frac{e^{-3x}}{18}$$

Задача Кузнецов Дифференциальные уравнения 16-4

Условие задачи

Найти решение задачи Коши:

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}}, y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 6\ln 2.$$

Решение

характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 8 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 2; k_2 = 4$$

$$y_{общ} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$

частное решение будем искать методом вариации

произвольных постоянных. Пусть $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$

$$y_1 = e^{2x};\ y_1' = 2e^{2x}$$

$$y_2 = e^{4x};\ y_2' = 4e^{4x}$$

$$f = 4\Big/\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)$$

$$\begin{cases} C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0 \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' \cdot e^{2x} + C_2' \cdot e^{4x} = 0 \\ C_1' \cdot 2e^{2x} + C_2' \cdot 4e^{4x} = 4\Big/\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right) \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = e^{2x} \cdot 4e^{4x} - e^{4x} \cdot 2e^{2x} = 2e^{6x}$$

$$C_1' = \frac{-y_2 \cdot f}{W} = \frac{-e^{4x} \cdot \dfrac{4}{1+e^{-2x}}}{2e^{6x}} = \frac{-2}{1+e^{2x}} \Rightarrow C_1 = -2x + \ln(1+e^{2x}) + C_3$$

$$C_2' = \frac{y_1 \cdot f}{W} = \frac{e^{2x} \cdot \dfrac{4}{1+e^{-2x}}}{2e^{6x}} = \frac{2}{e^{2x}+e^{4x}} \Rightarrow C_2 = \ln(1+e^{-2x}) - e^{-2x} + C_4$$

$$y = \left(-2x + \ln(1+e^{2x}) + C_3\right)e^{2x} + \left(\ln(1+e^{-2x}) - e^{-2x} + C_4\right)e^{4x}$$

$$y' = \left(-2 + \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^{2x} \cdot 2\right)e^{2x} + \left(-2x + \ln(1+e^{2x}) + C_3\right)e^{2x} \cdot 2 +$$

$$+\left(\frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-2x} \cdot (-2) - e^{-2x} \cdot (-2)\right)e^{4x} + \left(\ln(1+e^{-2x}) - e^{-2x} + C_4\right)e^{4x} \cdot 4$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 + 2\ln 2 \\ y'(0) = 6\ln 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\ln 2 + C_3\right) + \left(\ln 2 - 1 + C_4\right) = 1 + 2\ln 2 \\ \left(-2 + \dfrac{1}{1+1} \cdot 2\right) + \left(\ln 2 + C_3\right) \cdot 2 + \left(\dfrac{1}{1+1} \cdot (-2) - (-2)\right) + \left(\ln 2 - 1 + C_4\right) \cdot 4 = 6\ln 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\ln 2 - 1 + C_3 + C_4 = 2\ln 2 + 1 \\ 6\ln 2 - 4 + 2C_3 + 4C_4 = 6\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 2 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

$$y = \left(-2x + \ln(1+e^{2x}) + 2\right)e^{2x} + \left(\ln(1+e^{-2x}) - e^{-2x}\right)e^{4x} =$$

$$= -2xe^{2x} + e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right) + 2e^{2x} + e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right) - e^{-2x} \cdot e^{4x} =$$

$$= e^{2x}\left(1 - 2x + \ln\left(1+e^{2x}\right) + e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)$$

проверка : $y(0)=e^0\left(1-2\cdot0+\ln\left(1+e^0\right)+e^0\ln\left(1+e^0\right)\right)=1-2\cdot0+\ln2+\ln2=1+2\ln2$

$$y'=2e^{2x}\cdot\left(1-2x+\ln\left(1+e^{2x}\right)+e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)+e^{2x}\left(-2+\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^{2x}\cdot2+e^{2x}\cdot2\cdot\ln\left(1+e^{-2x}\right)+e^{2x}\cdot\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot e^{-2x}\cdot(-2)\right)=$$

$$=e^{2x}\left(2-4x+2\ln\left(1+e^{2x}\right)+2e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)-2+\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}+e^{2x}\cdot2\cdot\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\frac{2}{1+e^{-2x}}\right)=e^{2x}\left(-4x+2\ln\left(1+e^{2x}\right)+4e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)+\frac{2}{1+e^{-2x}}-\frac{2}{1+e^{-2x}}\right)=$$

$$=2e^{2x}\left(-2x+\ln\left(1+e^{2x}\right)+2e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)=-4xe^{2x}+2e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)+4e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$$

$$y'(0)=-4\cdot0\cdot e^0+2\cdot e^0\ln\left(1+e^0\right)+4e^0\ln\left(1+e^0\right)=2\cdot\ln2+4\ln2=6\ln2$$

$$y''=\left(-4xe^{2x}+2e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)+4e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)'=\left(-4xe^{2x}\right)'+\left(2e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)\right)'+\left(4e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)'\overset{(1,2,3)}{=}$$

$$=-8xe^{2x}-4e^{2x}+4e^{2x}\cdot\ln\left(1+e^{2x}\right)+\frac{4e^{4x}}{1+e^{2x}}+16e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\frac{8e^{2x}}{1+e^{-2x}}$$

$$y''-6y'+8y=\left(-8xe^{2x}-4e^{2x}+4e^{2x}\cdot\ln\left(1+e^{2x}\right)+\frac{4e^{4x}}{1+e^{2x}}+16e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\frac{8e^{2x}}{1+e^{-2x}}\right)-$$

$$-6\left(-4xe^{2x}+2e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)+4e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)+8\left(e^{2x}\left(1-2x+\ln\left(1+e^{2x}\right)+e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)\right)=$$

$$=\left(-8xe^{2x}-4e^{2x}+4e^{2x}\cdot\ln\left(1+e^{2x}\right)+\frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}+16e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\frac{8e^{2x}}{1+e^{-2x}}\right)+\left(24xe^{2x}-12e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)-24e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)+$$

$$+\left(8e^{2x}-16xe^{2x}+8e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)+8e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)=-\frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}+4e^{2x}=\frac{-4e^{4x}}{1+e^{2x}}+4e^{2x}=\frac{-4e^{4x}+4e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)}{1+e^{2x}}=\frac{4e^{2x}}{1+e^{2x}}=\frac{4}{1+e^{-2x}}$$

(1) $\left(-4xe^{2x}\right)'=-4\cdot\left(e^{2x}+x\cdot e^{2x}\cdot2\right)=-8xe^{2x}-4e^{2x}$

(2) $\left(2e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)\right)'=2\cdot\left(e^{2x}\cdot2\cdot\ln\left(1+e^{2x}\right)+e^{2x}\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^{2x}\cdot2\right)=\cdot4e^{2x}\cdot\ln\left(1+e^{2x}\right)+\frac{4e^{4x}}{1+e^{2x}}$

(3) $\left(4e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)'=4\cdot\left(e^{4x}\cdot4\cdot\ln\left(1+e^{-2x}\right)+e^{4x}\cdot\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot e^{-2x}\cdot(-2)\right)=16e^{4x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\frac{8e^{2x}}{1+e^{-2x}}$