Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 2. Устойчивость линейных нестационарных систем. Критерии устойчивости по первому приближению. Периодические системы.

Нестационарные линеаризованные модели первого приближения. Устойчивость линейной нестационарной системы и ее характеристический многочлен. Характеристические показатели линейных систем. Спектр и структура решений линейной неавтономной системы. Ляпуновские экспоненты. Приводимые системы. Теоремы об устойчивости линейных неавтономных систем. Оценка устойчивости исходной нелинейной системы по линейной неавтономной системе первого приближения. Эффект Перрона. Критерии устойчивости по первому приближению для нелинейных нестационарных систем. Теория Флоке. Неоднородные линейные периодические системы.

Нестационарные линеаризованные модели первого приближения.

Рассмотрим случай, когда система описывается системой нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений вида: $\dot{x} = F(x(t),u(t),t); x \in R^n; u \in R^m; F = (f_1, f_2,...,f_n)$.

Пусть задана опорная траектория вида $\bar{x}(t),\bar{u}(t)$, то есть $\dot{\bar{x}}(t) = F(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t); \forall t \ge t_0$. Пусть также функция F является аналитической. Разложим функцию F в ряд Тейлора относительно точек опорной траектории. Ограничимся в разложении только членами первого порядка малости. Тогда можно записать следующее приближенное соотношение:

$\dot{\bar{x}} + \Delta x \approx F(\bar{x},\bar{u},t) + A(t)\Delta x + B(t)\Delta u$, где

$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t); \Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$; $A(t) = \dfrac{\partial F(\bar{x},\bar{u},t)}{\partial x^T} = \{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\}|_{\bar{x},\bar{u}}; i,k = 1:n$;

$B(t) = \dfrac{\partial F(\bar{x},\bar{u},t)}{\partial u^T} = \{\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}\}|_{\bar{x},\bar{u}}; i = 1:n; j = 1:m$. Матрицы $A(t), B(t)$ являются матрицами Якоби векторной функции F по переменным x,u соответственно. Тогда можно записать следующую линейную систему дифференциальных уравнений первого приближения относительно приращений переменных $\Delta\dot{x} = A(t)\Delta x + B(t)\Delta u$. Таким образом, в общем случае, линеаризованная модель первого приближения будет описываться нестационарной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Устойчивости линейной нестационарной системы и ее характеристический многочлен.

Асимптотическая устойчивость линейной стационарной системы полностью определяется корнями характеристического многочлена ее коэффициентов. Поэтому, естественно, попытаться связать асимптотическую устойчивость неавтономной системы $\dot{x} = A(t)x$ с корнями $\lambda_j(t)$ уравнения $\det[A(t) - \lambda E] = 0$. В первую очередь желательно ответить на вопрос: гарантирует ли неравенство $\max\limits_j \mathrm{Re}(\lambda_j(t)) \le -\delta$, где $\delta > 0$ - положительная постоянная для любого $t \in [t_0,\infty)$, асимптотическую устойчивость системы? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Пример. Пусть задана система: $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1-2\cos 4t & -2+2\sin 4t \\ 2+2\sin 4t & -1+2\cos 4t \end{pmatrix} x$. Собственными значениями ее характеристического многочлена являются функции $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = -1$. Однако эта система обладает неограниченным решением $\xi_1(t) = e^t \sin 2t, \xi_2(t) = e^t \cos 2t$.

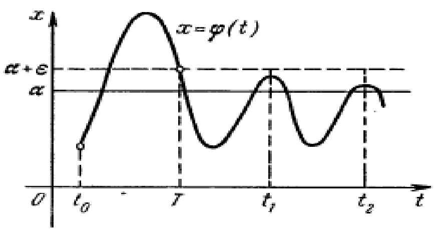
Таким образом, в общем случае, неравенство $\max\limits_j \mathrm{Re}(\lambda_j(t)) \le -\delta$ для корней характеристического многочлена не гарантирует, в общем случае, асимптотическую устойчивость неавтономной системы.

Характеристические показатели линейных систем.

Переходная матрица автономной линейной системы вида $\dot{x} = Ax$, имеет следующий вид: $X(t) = \exp(At)$. При этом, элементы фундаментальной матрицы, нормированной в точке $t = 0$, представляют собой линейные комбинации функций $p_j(t)\exp(\lambda_j t)$, где $p_j(t)$ - некоторые многочлены, λ_j - собственные числа матрицы A . В терминах этих чисел (собственных значений), как известно, можно полностью характеризовать свойство асимптотической устойчивости системы $\dot{x} = Ax$. Оказывается, как показал А.М. Ляпунов, что и со всякой неавтономной линейной дифференциальной системой можно связать конечный набор действительных чисел, которые, как и в автономном случае, позволяют исследовать ее асимптотическую устойчивость /Гайшун с.67/.

Пусть $f(t)$ - числовая функция, заданная и непрерывная на полупрямой R_+. Число (или символы $-\infty$ и ∞) определяемое формулой: $\chi[f] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln|f(t)|$, называется характеристическим показателем или показателем Ляпунова функции $f(t)$. Здесь под обозначением $\overline{\lim_{t\to\infty}}\varphi(t)$ понимается верхний предел функции $\varphi(t)$ при $t \to \infty$.

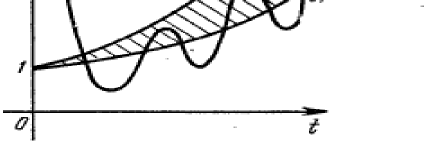
Определение */Демидович с.123/. Наибольший из частичных пределов α функции $\varphi(t)$ при $t \to \infty$ называется ее верхним пределом $\alpha = \overline{\lim_{t\to\infty}}\varphi(t)$.*



Например, при любом действительном λ характеристический показатель функции t^{λ} равен нулю, то есть $\chi[t^{\lambda}] = 0$. Соответственно, несложно показать, что $\chi[e^{\lambda t}] = \lambda$, $\chi[e^{t\sin t}] = 1$, $\chi[e^{t^2}] = \infty$.

Основные свойства показателей Ляпунова.

1. Неравенство $|f_1(t)| \le |f_2(t)|$ влечет за собой соотношение $\chi[f_1(t)] \le \chi[f_2(t)]$.
2. Функция $f(t)$ имеет конечный показатель Ляпунова α тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ выполняются следующие соотношения: $\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} = 0$ и $\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|f(t)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t}} = 0$



3. Если функции $f_1(t), f_2(t),..., f_m(t)$ имеют конечные характеристические показатели, то справедливы следующие неравенство: $\chi[\sum_{k=1}^{m} f_k(t)] \le \max_k \chi[f_k(t)]$ и $\chi[\prod_{k=1}^{m} f_k(t)] \le \sum_{k=1}^{m}\chi[f_k(t)]$.

4. Если $| f(t) |\le M$, где $M > 0$ - конечное число, то $\chi[f(t)] = 0$.
5. Линейная комбинация функций $f_1(t), f_2(t),..., f_m(t)$ с ограниченными коэффициентами не превышает наибольшего из характеристических показателей комбинируемых функций, то есть:

$$\chi[\sum_{k=1}^{m} c_k(t) f_k(t)] \le \max_k \chi[f_k(t)].$$

Характеристический показатель векторной или матричной функции определяется как показатель Ляпунова нормы этой функции. То есть, если $\varphi(t): R_+ \to R^n$ непрерывная n-ная вектор-функция и $\Psi(t)$ матрица размера (n*n) с непрерывными на R_+ элементами, то будут справедливы следующие соотношения: $\chi[\varphi] = \chi[\| \varphi \|]$ и $\chi[\Psi] = \chi[\| \Psi \|]$.

Поэтому для характеристических показателей векторных и матричных функций будут справедливы все свойства, установленные для показателей числовых функций.

Спектр линейной неавтономной системы.

Рассмотрим теперь однородную неавтономную систему $\dot{x} = A(t)x$ с непрерывной на R_+ матрицей $A(t) \in R^{n*n}$.

Теорема Ляпунова (о характеристических показателях решений линейной неавтономной системы) */Демидович с.135/. Если матрица $A(t)$ ограничена, то есть $\| A(t) \| \le c = const < \infty$, то каждое ненулевое решение системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет конечный характеристический показатель.*

Доказательство. Запишем уравнение $\dot{x} = A(t)x$ в интегральном виде: $x(t) = x(t_0) + \int_{t0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau$. Отсюда получим следующее неравенство: $|| x(t) || \le || x(t_0) || + \int_{t0}^{t} || A(\tau) || * || x(\tau || * | d\tau |$. Для дальнейшего доказательство применим обобщение леммы Гронуолла-Беллмана (см. приложение к данной теореме). Из обобщения леммы при $t \ge t_0$, будем иметь $|| x(t_0) || \exp\{-\int_{t0}^{t} || A(\tau) || d\tau\} \le || x(t) || \le || x(t_0) || \exp\{\int_{t0}^{t} || A(\tau) || d\tau\}$.

Так как, в соответствии со свойствами показателей Ляпунова, справедливо соотношение $\chi[\frac{|| x(t) ||}{|| x(t_0) ||}] = \chi[|| x(t) ||]$, то можно записать следующее выражение: $\chi[\exp\{-\int_{t0}^{t} || A(\tau) || d\tau\}] \le \chi[|| x(t) ||] \le \chi[\exp\{\int_{t0}^{t} || A(\tau) || d\tau\}]$.

Отсюда получим: $\underline{A} \le \chi[|| x(t) ||] \le \overline{A}$, где $\underline{A} = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t0}^{t} || A(\tau) || d\tau$ и $\overline{A} = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t0}^{t} || A(\tau) || d\tau$. Таким образом, все характеристические показатели нетривиальных решений линейной неавтономной системы содержатся в конечном отрезке $[-\underline{A}, \overline{A}]$.

Приложение к теореме.

Обобщение леммы Гронуолла-Беллмана. *Пусть функции* $u(t) \ge 0,\ f(t) \ge 0$ *при* $a < t < b$ *и* $f(t) \in C^0$ *. Пусть также для любых* $t, \tau \in (a,b)$ *выполняется неравенство:* $u(t) \le u(\tau) + \int_{\tau}^{t} f(\sigma)u(\sigma) \mid d\sigma \mid$. *Тогда при* $a < t_0 \le t < b$ *справедлива двусторонняя оценка:* $u(t_0)\exp\{-\int_{t0}^{t} f(\tau)d\tau\} \le u(t) \le u(t_0)\exp\{\int_{t0}^{t} f(\tau)d\tau\}$

Определение. *Множество всех характеристических показателей ненулевых решений системы* $\dot{x} = A(t)x$ *называется ее спектром.*

Теорема. *Спектр линейной системы* $\dot{x} = A(t)x$ *с ограниченной матрицей* $A(t)$ *состоит из не более, чем* n *различных элементов.*

Доказательство. Предварительно покажем, что любые n-ые векторные функции $f_1(t), f_2(t),..., f_m(t)$, имеющие различные характеристические показатели, линейно независимы. Пусть числа $\chi[f_k] = \alpha_k$ упорядочены следующим образом: $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_m$ (*). Предположим, что рассматриваемые функции линейно зависимы, то есть: $\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t) \equiv 0$ для некоторых постоянных c_k, не обращающихся одновременно в нуль. Обозначим $p = \max\{k : c_k \ne 0\}$. Тогда можно записать следующее равенство $f_p(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{c_k}{c_p} f_k(t)$. Тогда, в соответствии со свойством 3 характеристических показателей получим, что $\alpha_p = \chi[f_p] \le \max_{k<p} \chi[f_k] = \alpha_{p-1}$, что противоречит условию (*). Отсюда, векторные функции с различными характеристическими показателями линейно независимы. Однако, система $\dot{x} = A(t)x$ не может иметь более, чем n линейно независимых решений. Таким образом, ее спектр не может состоять из более, чем n элементов.

Структура общего решения линейных неавтономных систем.

Используя понятие спектра, можно достаточно детально описать структуру общего решения уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Пусть совокупность функций $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ образует фундаментальную систему, а числа $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ -полный спектр рассматриваемого уравнения, то есть $\chi[x_j] = \alpha_j,\ j = 1,2,..., n$. Положим $\varphi_j = e^{-\alpha_j t} x_j(t)$. Отсюда получим $\chi[\varphi_j] = -\alpha_j + \chi[x_j(t)] = 0$.

Отсюда, общее решение уравнения $\dot{x} = A(t)x$ может быть представлено в виде $\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) e^{\alpha_j t}$, где c_j - произвольные постоянные, а функции φ_j имеют нулевые характеристические показатели.

Отсюда сразу же следует, что если полный спектр системы отрицательный, то есть $\alpha_j < 0$, то такая система асимптотически устойчива.

Ляпуновские экспоненты.

В настоящее время для анализа неавтономных систем также широко используют такие показатели, как ляпуновские экспоненты.

Пусть $X(t)$ - фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$. Введем в рассмотрение сингулярные числа $\gamma_1(X) \ge \gamma_2(X) \ge ... \ge \gamma_n(X) \ge 0$ матрицы $X(t)$. Напомним, что сингулярное число $\gamma_j(X)$ -

это квадратный корень из соответствующего собственного значения матрицы $X^*(t)X(t)$ (для действительной матрицы $X^T(t)X(t)$). Хорошо известна следующая геометрическая интерпретация сингулярных чисел: $\gamma_j(X)$ совпадают с главными полуосями эллипсоида $X(t)J$, где J - шар единичного радиуса.

Определение. *Ляпуновской экспонентой μ_j называется число $\mu_j = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln(\gamma_j(X))$. Экспонента μ_j называется строгой, если существует конечный предел $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln(\gamma_j(X))$.*

Лемма */Леонов Хаотич динамика с43/. Старший характеристический показатель α_1 и ляпуновская экспонента μ_1 совпадают.*

<u>Приводимые системы.</u>

Определение. *Матрица $L(t) \in C^1$ на полупрямой R_+, вообще говоря, комплексная, называется матрицей Ляпунова, если выполнены следующие условия:*

1. Матрицы $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены на полупрямой R_+, то есть $\sup_t \| L(t) \| < \infty$ и $\sup_t \| \dot{L}(t) \| < \infty$ при $t_0 \le t < \infty$. 2. $|\det(L(t))| \ge m > 0$

Очевидно, что в этом случае будет справедливо неравенство: $|\det(L(t))| \le M < \infty$. Заметим также, что матрица $L^{-1}(t)$, обратная матрице $L(t)$, есть также матрица Ляпунова.

Определение. *Линейное преобразование $y = L(t)x$ с матрицей Ляпунова $L(t)$ размера (n*n) называется преобразованием Ляпунова.*

Лемма */Демидович с154/. При преобразовании Ляпунова, произведенном над линейной системой $\dot{x} = A(t)x$, характеристические показатели ее решений сохраняются.*

Доказательство.

Исходя из определения преобразования Ляпунова, будет выполняться равенство: $x = L^{-1}(t)y$. Отсюда можно записать следующие неравенства: $\| y \| \le \| L(t) \| * \| x \|$ и $\| x \| \le \| L^{-1}(t) \| * \| y \|$. Следовательно, учитывая ограниченность $\| L(t) \|$ и $\| L^{-1}(t) \|$, с одной стороны, получим $\chi[y] = \chi[\| y \|] \le \chi[\| L(t) \|] + \chi \| x \| = \chi[x]$, а, с другой стороны, $\chi[x] \le \chi[y]$.

Таким образом: $\chi[x] = \chi[y]$

Определение. *Однородная неавтономная система $\dot{x} = A(t)x$ называется приводимой, если с помощью некоторого преобразования Ляпунова она может быть преобразована в линейную автономную систему: $\dot{y} = By$, где B - постоянная матрица.*

Теорема Еругина (о необходимых и достаточных условиях приводимости линейной неавтономной системы). *Линейная система $\dot{x} = A(t)x$ приводима тогда и только тогда, когда ее фундаментальная матрица $X(t)$ может быть представлена в виде матрицы Ляпунова $L(t)$, умноженной на экспоненциал произведения независимой переменной t на постоянную матрицу B, то есть $X(t) = L(t)e^{tB}$.*

Теоремы об устойчивости линейных неавтономных систем.

Теорема. Достаточное условие асимптотической устойчивости линейной неавтономной системы */Демидович с147/. Для асимптотической устойчивости системы $\dot{x} = A(t)x$ достаточно, чтобы наибольший характеристический ее показатель был бы отрицательным, то есть $\alpha = \max_j \alpha_j < 0$.*

Теорема (об условиях устойчивости приводимой системы).

1. *Приводимая линейная неавтономная однородная система устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические показатели ее неположительны. Причем нулевым характеристическим показателям отвечают простые элементарные делители, если их рассматривать как вещественные части собственных значений соответствующей постоянной матрицы.*
2. *Приводимая линейная неавтономная однородная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические показатели ее отрицательны.*

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из того обстоятельства, что характеристические показатели приводимой системы равны действительным частям корней соответствующего характеристического уравнения: $\det(B - \lambda E) = 0$. Потому система $\dot{y} = By$ устойчива или неустойчива одновременно с системой $\dot{x} = A(t)x$.

Определение. *Дифференциальные системы $\dot{x} = F(t,x)$ и $\dot{y} = G(t,y)$ асимптотически эквивалентны, если между их решениями x, y можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что:*

$\lim_{t\to\infty}[x(t) - y(t)] = 0$.

Теорема Левинсона (об асимптотической эквивалентности систем). *Пусть решения линейной системы $\dot{x} = Ax$, где $A \in R^{n*n}$ - постоянная матрица, ограничены на R_+. Тогда система*

$\dot{y} = [A + B(t)]y$, *где $B(t) \in C^0$ и $\int_0^\infty \| B(\tau) \| d\tau < \infty$, асимптотически эквивалентна системе* $\dot{x} = Ax$.

Теорема. Неравенство Важевского. *Для любого решения системы $\dot{x} = A(t)x$, где $A(t) \in C^0$, при $t_0 \le t < \infty$ справедливо неравенство: $\| x(t_0) \| \exp\{\int_{t0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\} \le \| x(t) \| \le \| x(t_0) \| \exp\{\int_{t0}^{t} \Lambda(\tau)d\tau\}$, где $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ наименьший и наибольший характеристический корни эрмитово-симметризованной матрицы: $A^H(t) = \frac{1}{2}[A(t) + A^*(t)]$.*

Следствие 1*. Для асимптотической устойчивости системы $\dot{x} = A(t)x$ достаточно выполнения условия $\Lambda(t) \le -h < 0$, где h - положительная постоянная.*

Следствие 2. *Спектр линейной системы* $\dot{x} = A(t)x$ *целиком расположен на отрезке* $[l, L]$*, где:* $l = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_{t0}^{t} \lambda(\tau)d\tau$ *и* $L = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_{t0}^{t} \Lambda(\tau)d\tau$*. Для асимптотической устойчивости системы достаточно, чтобы было* $L < 0$.

Нетрудно убедиться, что спектр системы $\dot{x} = A(t)x$ отрицательный, если квадратичная форма $x^T A^H(t)x$ определенно отрицательна, то есть справедливо условие $x^T A^H(t)x \le -\delta |x|^2$, где $\delta = const > 0$, а $A^H(t)$ в случае действительной матрицы $A(t)$ имеет вид $A^H(t) = [A(t) + A^T(t)]$. Данное условие имеет место, когда главные миноры $\Delta_k(t)$ матрицы $A^H(t)$ отделены от нуля, то есть $\det\{\Delta_k(t)\} \ge \gamma = const > 0$ и чередуют знаки. Причем первый из определителей меньше нуля.

Критерий неустойчивости неавтономных систем. *Пусть задана система* $\dot{x} = A(t)x$*. Тогда из условия* $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_{t0}^{t} tr(A(\tau))d\tau > 0$ *следует неустойчивость ненулевых решений системы.*

<u>Оценка устойчивости исходной нелинейной системы по линейной неавтономной системе первого приближения. Эффект Перрона.</u>

В 1930 году О.Перрон показал, что отрицательность старшего характеристического показателя системы первого приближения, не всегда влечет за собой устойчивость нулевого решения исходной нелинейной системы. Более того, в сколь угодно малой окрестности нуля могут существовать решения исходной системы с положительным характеристическим показателем /Леонов Хаотич динамика с49/.

Рассмотрим следующую нелинейную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -bx_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^2 + [\sin(\ln(t+1)) + \cos(\ln(t+1)) - 2b]x_2 \end{cases}$$

, где a - число, удовлетворяющее неравенствам $1 < 2b < 1 + \frac{1}{2}e^{-\pi}$ (условие **(*)**).

Решение уравнения первого приближения имеет вид: $\begin{cases} x_{l1}(t) = e^{-bt}x_1(0) \\ x_{l2}(t) = e^{[(t+1)\sin(\ln(t+1)) - 2bt]}x_2(0) \end{cases}$. При выполнении условия **(*)** для системы первого приближения максимальный характеристический показатель $\alpha < 0$. Однако, решение исходного нелинейного уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-bt}x_1(0) \\ x_2(t) = e^{[(t+1)\sin(\ln(t+1)) - 2bt]}x_2(0) + x_1(0)\int_0^t e^{[-(\tau+1)\sin(\ln(\tau+1))]}d\tau \end{cases}$$

. Можно показать, что при выполнении условия **(*)**, максимальный характеристический показатель будет удовлетворять неравенству $\alpha > 0$ при $x_1(0) \ne 0$. Таким образом, все характеристические показатели системы первого приближения отрицательны, а почти все решения исходной системы экспоненциально стремятся к бесконечности при $t \to \infty$.

Можно привести аналогичные примеры эффекта смены характеристических показателей «в другую сторону»: решение системы первого приближения имеет положительный показатель, а решение исходной системы с теми же начальными данными – отрицательный показатель.

Критерии устойчивости по первому приближению для нелинейных нестационарных систем.

Рассмотрим следующую нелинейную систему: $\dot{x} = A(t)x + f(t,x), t \ge 0, x \in R^n$. Здесь $A(t)$ - непрерывная, ограниченная матрица, $f(t,x)$ - непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая в некоторой окрестности точки $x = 0$ условию $|f(t,x)| \le k|x|^{\nu}, \quad \forall t \ge 0, \forall x \in \Omega(0)$ (условие I).

Здесь k, ν - некоторые положительные числа, $\nu \ge 1$.

Системой первого приближения будем называть систему $\dot{x} = A(t)x$. Предположим, что для матрицы Коши $X(t)X^{-1}(\tau)$ системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет место оценка:

$|X(t)X^{-1}(\tau)| \le C\exp[-\alpha(t-\tau) + \gamma\tau], \quad \forall t \ge \tau \ge 0$, где $\alpha > 0, \gamma \ge 0$ (условие II).

Очевидно, что величина γ характеризует меру неправильности линейной неавтономной системы первого приближения.

Теорема Персидского. *Если выполнены условия (I) и (II) с* $\gamma = 0$ *и с* $\nu = 1$ *и достаточно малым* k, *то решение* $x(t) \equiv 0$ *системы* $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теорема Четаева. *Если выполнены условия (I) и (II) и неравенство* $(\nu - 1)\alpha - \gamma > 0$, *то решение* $x(t) \equiv 0$ *системы* $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Данная теорема усиливает предыдущую теорему об устойчивости по первому приближению.

Рассмотрим теперь систему более общего вида $\dot{x} = F(x,t), \quad t \ge 0, x \in R^n$, где $F(x,t) \in C^2$ - дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Предположим, что для решений данной системы с начальными условиями $x = x(0,y)$ из некоторой области $y \in \Omega$ выполнено следующее условие. Максимальное сингулярное число $\gamma_1(t,y)$ фундаментальной матрицы $Z(t,y)$ линейной системы $\dot{z} = A(t)z$ удовлетворяет неравенству $0 \le \gamma_1(t,y) \le \gamma(t), \quad \forall t \ge 0, \forall y \in \Omega$. Здесь матрица $A(t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}|_{x=x(t,y)}$ является матрицей Якоби векторной функции $F(x,t)$ на решении $x(t,y)$. Введем также нормирующее условие $X(0,y) = E$.

Теорема */Леонов Хаотич динамик с67/. Пусть функция* $\gamma(t)$ *ограничена на интервале* $(0,\infty)$. *Тогда решение* $x(t,y)$, $y \in \Omega$ *устойчиво по Ляпунову. Если, кроме того,* $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$, *то решение* $x(t,y)$, $y \in \Omega$, *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теорема устанавливает асимптотическую устойчивость решений с начальными данными $y \in \Omega$, если соответствующие уравнения $\dot{z} = A(t)z$ имеют отрицательные ляпуновские экспоненты (или отрицательные характеристические показатели). Здесь требования равномерной по Ω отрицательности ляпуновских экспонент заменяет требование малости коэффициента неправильности в теореме Четаева.

Таким образом, эффект Перрона, возможен только на границах устойчивого по первому приближению фазового потока.

Теория Флоке

Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = A(t)x$ с непрерывной (или кусочно-непрерывной) на вещественной оси $(-\infty, \infty)$ периодической матрицей $A(t)$, то есть $A(t+T) \equiv A(t), T > 0$.

Теорема Флоке */Демидович с183/. Для линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ с Т-периодической матрицей, нормированной при $t = 0$, фундаментальная матрица решений имеет вид $X(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}$, где $\Phi(t) \in C^1$ - Т-периодическая неособенная матрица, причем $\Phi(0) = E$, Λ - постоянная матрица.*

Доказательство. Пусть $X(t)$ нормированная фундаментальная матрица решений ($X(0) = E$). Тогда матрица $X(t+T)$ также является фундаментальной. Действительно:

$\frac{d}{dt}[X(t+T)] = \dot{X}(t+T)\frac{d}{dt}(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T)$. Отсюда можно записать следующее соотношение: $X(t+T) \equiv X(t)C$, где С- постоянная неособенная матрица. Полагая $t = 0$, находим, что $C = X(T)$. То есть $X(t+T) = X(t)X(T)$ (матрица $X(T)$ носит название матрицы монодромии). Очевидно, что $\det(X(T)) \neq 0$. Положим $\frac{1}{T}Ln\{X(T)\} = \Lambda$. Тогда будет справедливо равенство: $X(T) = e^{\Lambda T}$.

Напишем следующее тождество: $X(t) \equiv X(t)e^{-\Lambda t}e^{\Lambda t} = \Phi(t)e^{\Lambda t}$, где введено обозначение $\Phi(t) = X(t)e^{-\Lambda t}$. Отсюда можно записать следующее соотношение $\Phi(t+T) = X(t)X(T)e^{-\Lambda t}e^{-\Lambda T} = X(t)e^{-\Lambda t} = \Phi(t)$. То есть матрица $\Phi(t)$ периодическая с периодом Т. Кроме того, если $A(t) \in C^0$, то очевидно, что $\Phi(t) \in C^1$.

Матрицы $\Lambda = \frac{1}{T}Ln\{X(T)\}$ и $\Phi(t) = X(t)e^{-\Lambda t}$, вообще говоря, комплексные. Собственные значения λ_j матрицы Λ, то есть корни характеристического уравнения $\det(\Lambda - \lambda E) = 0$ называются характеристическими показателями системы $\dot{x} = A(t)x$ ($A(t+T) \equiv A(t), T > 0$). Следует сразу отметить, что характеристические показатели линейной периодической системы не идентичны с характеристическими показателями Ляпунова нетривиальных решений этой системы.

Собственные значения $\rho_j, j = 1,2,..., n$ матрицы $X(T) = e^{\Lambda T}$, то есть корни характеристического уравнения $\det(X(T) - \rho E) = 0$ называются мультипликаторами. Для мультипликаторов можно записать следующие соотношения: $\sum_{j=1}^{n}\rho_j = sp(X(T))$ и $\prod_{j=1}^{n}\rho_j = \det(X(T)) = \exp\int_0^\infty sp(A(\tau))d\tau$.

На основании известных свойств собственных значений матричной функции логарифма можно записать следующие соотношения:

$\lambda_j = \frac{1}{T}Ln\{\rho_j\} = \frac{1}{T}[\ln|\rho_j| + i(\arg\rho_j + 2k\pi], j = 1,2,..., n; k = 0,\pm1,...$.

Таким образом, характеристические показатели определяются с точностью до мнимых слагаемых $i2k\pi / T$.

Теорема. *Для всякого мультипликатора ρ существует нетривиальное решение $\xi(t)$ периодической системы $\dot{x} = A(t)x$, ($A(t+T) \equiv A(t), T > 0$), удовлетворяющее условию $\xi(t+T) = \rho\xi(t)$ (так называемое нормальное решение).*

Соответственно, если для некоторого нетривиального решения $\xi(t)$ выполняется условие $\xi(t+T) = \rho\xi(t)$, то число ρ является мультипликатором данной системы.

Следствие. *Линейная периодическая система $\dot{x} = A(t)x$ имеет нетривиальное решение периода Т тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из ее мультипликаторов ρ равен единице.*

Положим $\rho = e^{\lambda T}$ и $\xi(t) = e^{\lambda t}\varphi(t)$. Тогда на основании теоремы о мультипликаторе можно записать следующее равенство: $e^{\lambda(t+T)}\varphi(t+T) = e^{\lambda T}e^{\lambda t}\varphi(t)$, то есть $\varphi(t+T) = \varphi(t)$. Следовательно, нормальное решение периодической системы имеет $\xi(t) = e^{\lambda t}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ периодическая (с периодом Т) вектор-функция класса C^1 и $\lambda = \dfrac{1}{T}Ln\{\rho\}$ - характеристический показатель системы.

Мультипликатору $\rho = -1$, если он существует, соответствует так называемое антипериодическое решение $\xi(t) \neq 0$ периода Т, то есть $\xi(t+T) = -\xi(t)$. Отсюда несложно получить, что $\xi(t+2T) = -\xi(t+T) = \xi(t)$. То есть решение $\xi(t)$ есть периодическое решение с периодом 2Т.

Аналогично, если $\rho = \exp\dfrac{ip\pi}{q}$ (p,q – целые, $q \geq 1$), то периодическая система имеет решение с периодом $2qT$.

Теорема Ляпунова о приводимости периодической линейной системы. *Линейная система с непрерывной периодической матрицей приводима.*

Производя в уравнении $\dot{x} = A(t)x$ замену переменных $x = \Phi(t)y \equiv X(t)e^{-\Lambda t}y$, получим $\dot{y} = \Lambda y$. То есть характеристические показатели λ_j являются корнями характеристического уравнения приведенной системы.

Теорема об устойчивости периодической системы.
1. Линейная однородная периодическая система с непрерывной матрицей устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_j, $j = 1,2,..., n$ расположены внутри замкнутого единичного круга $|\rho| \leq 1$. Причем мультипликаторы, лежащие на окружности $|\rho| = 1$, имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии.
2. Для асимптотической устойчивости периодической системы необходимо и достаточно, чтобы все ее мультипликаторы находились внутри единичного круга $|\rho| < 1$.

Для определения области асимптотической устойчивости, выведем условия, обеспечивающие принадлежность корней характеристического многочлена $f(\rho) = \det(X(T) - \rho E)$ единичному кругу $|\rho| < 1$. Предположим, что матрица $X(T)$ действительная.

Дробно-линейное преобразование $\rho = \dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$ переводит, как нетрудно проверить, единичный круг $|\rho|<1$ плоскости $\rho = \sigma + i\gamma$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ плоскости λ. То есть характеристическое уравнение заменяется следующим $f(\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}) = 0$ или (чтобы сократить члены в знаменателе) $F(\lambda) = \pm(\lambda-1)^n f(\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}) = 0$. Здесь полином $F(\lambda)$ должен быть полиномом Гурвица. Причем знак нужно выбирать так, чтобы полином $F(\lambda)$ был стандартным, то есть $F(0) = \pm(-1)^n f(-1) > 0$.

Неоднородные линейные периодические системы.

Пусть задана линейная периодическая неоднородная система следующего вида: $\dot{y} = A(t)y + f(t)$, где $A(t)$ и $f(t)$ непрерывные (n*n) и (n*1) матрицы с общим периодом T>0.

Теорема (нерезонансный случай)*. Если однородная периодическая система $\dot{x} = A(t)x$, ($A(t+T) \equiv A(t), T > 0$) не имеет нетривиальных периодических решений периода T, то есть все мультипликаторы ее отличны от единицы ($|\rho_j| \neq 1$), то соответствующая неоднородная периодическая система $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ имеет единственное периодическое решение периода T.*

Доказательство. Запишем решение неоднородного уравнения: $y(t) = X(t)y(0) + \int\limits_0^t X(t)X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$. В силу теоремы Коши о единственности, решение $y(t)$ будет периодическим периода T, тогда и только тогда, когда $y(T) = y(0)$. Отсюда получим следующее соотношение: $y(0) = X(T)y(0) + \int\limits_0^T X(T)X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$ или $[E - X(T)]y(0) = X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$. Так как характеристическое уравнение $\det(X(T) - \rho E) = 0$ в силу условий теоремы не имеет корней на единичной окружности, то $\det(X(T) - E) \neq 0$. Таким образом получим следующее равенство: $y(0) = [E - X(T)]^{-1} X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$. Тогда периодическое решение имеет следующий вид: $y(t) = X(t)[E - X(T)]^{-1}\{\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(T)\int\limits_t^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\}$. То, что периодическое решение периода T единственно, вытекает из того, что разность двух различных периодических решений периода T, будет нетривиальным решением периода T однородной системы. А это противоречит условиям теоремы.

Очевидно, что периодическое решение $y(t)$ неоднородной периодической системы может быть записано в виде $y(t) = \int\limits_0^T G(t,\tau)f(\tau)d\tau$, где $G(t,\tau) = X(t)[E - X(T)]^{-1}X^{-1}(\tau)$ при $0 \le \tau \le t \le T$, и $G(t,\tau) = X(t+T)[E - X(T)]^{-1}X^{-1}(\tau)$ при $0 \le t \le \tau \le T$.

Следует отметить, что если однородная система имеет нетривиальные периодические решения периода Т (резонансный случай), то соответствующая неоднородная система $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ допускает периодическое решение периода Т не всегда.

***Теорема Массера** /Демидович с321/. Если линейная неоднородная периодическая система* $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ *имеет ограниченное решение* $y(t)\,(t \geq 0)$*, то у этой системы существует периодическое решение периода Т.*
***Следствие.** Если неоднородная периодическая система периода Т не имеет Т-периодических решений, то все решения той системы не ограничены как на полуоси* $t \geq 0$*, так и на полуоси* $t \leq 0$.

Контрольные вопросы к лекции 2.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Нелинейная управляемая автономная система $\dot{x} = F(x,u)$ имеет нестационарную линеаризованную модель первого приближения при линеаризации в окрестности…	1. … положения равновесия $x^* = x(t,t_0x^*,u)$, где управляющее воздействие $u \equiv const$. 2. … опорной траектории $\bar{x} = x(t,t_0x^0,u)$, где управляющее воздействие $u = u(t)$. 3. Система может иметь только стационарную линеаризованную модель первого приближения. 4. … положения равновесия $x^* = x(t,t_0x^*,u)$ и только при управляющем воздействии $u \equiv 0$.
2	Характеристический показатель Ляпунова функции $f(t)$ характеризует скорость роста $\|f(t)\|$ по отношению к…	1. … экспоненциальным функциям вида $e^{\alpha t}$. 2. … степенным функциям вида t^{α}. 3. ... степенным функциям вида α^t. 4. … сложным экспоненциальным функциям вида $e^{t^{\alpha}}$.
3.	Для оценки асимптотической устойчивости по Ляпунову линейной нестационарной системы $\dot{x} = A(t)x$ необходимо и достаточно…	1. ... исследовать корни характеристического уравнения $\det[\lambda E - A(t)] = 0$ для $\forall t \geq t_0$. 2. …, чтобы $\|A(t)\| < \infty$. 3. …, чтобы $\exp[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau] < \infty$. 4. .., чтобы старший характеристический показатель Ляпунова фундаментальной системы решений был строго меньше нуля.
4	Ляпуновской экспонентой $\mu_i; i = 1,2,..,n$ называется число равное …	1. … $\max_t\{\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\}$, где $\lambda_i(t)$ - корень характеристического уравнения $\det[\lambda E - A(t)] = 0$. 2. … $\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\{\gamma_i(X)\}$, где $\gamma_i(X)$ сингулярное число матрицы $X^T X(t)$, $X(t)$ - фундаментальная матрица

		решений системы $\dot{x} = A(t)x$. 3. … α_i^2, где α_i - i-ый характеристический показатель Ляпунова.
5	Структура общего решения системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет вид …	1. … $\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) e^{\alpha_j t}$, где c_j - постоянные; $\varphi_j(t)$ - функции, имеющие нулевые характеристические показатели Ляпунова; $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ - спектр системы. 2. … $\sum_{j=1}^{S} c_j P_j(t) e^{\lambda_j(t)}$, где $\lambda_j(t)$ корень кратности n_j характеристического уравнения $\det[\lambda_j(t)E - A(t)] = 0$; $n_1 + ... + n_s = n$. А $P_j(t)$ - соответствующие многочлены, имеющую степень не более $(n_j - 1)$. 3. … $\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\alpha_j t}$, где $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ - спектр системы.
6	Для асимптотической устойчивости системы $\dot{x} = A(t)x$ достаточно, чтобы….	1. … наибольший характеристический корень $\Lambda(t)$ матрицы $A^T(t)A(t)$ удовлетворял условию $\Lambda(t) \le -h; h > 0$. 2. … наибольший характеристический корень $\Lambda(t)$ матрицы $[A^T(t) + A(t)]$ удовлетворял условию $\Lambda(t) \le -h; h > 0$. 3. … наибольший характеристический корень $\Lambda(t)$ матрицы $\exp[A(t)t]$ удовлетворял условию $\Lambda(t) \le -h; h > 0$.
7	Система $\dot{x} = A(t)x$ приводима к виду $\dot{z} = Bz$, где B - постоянная матрица, тогда и только тогда, когда существует преобразование Ляпунова $L(t)$ ($z(t) = L(t)x(t)$), удовлетворяющее соотношению …	1. … $X(t) = L(t)e^{Bt}$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица решений. 2. … $A(t) = L(t)e^{Bt}$. 3. .. $b = \ln\{\frac{A^T(t)A(t)}{L(t)}\}$
8	Пусть для нелинейной системы вида $\dot{x} = F(t,x); x^0 = x(0,x^0)$, известна линейная система первого приближения вида $\dot{x} = A(t)x; A(t) = (\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\|_{x(t,x^0)})$. Решение $x(t) = x(t,x^0)$ системы $\dot{x} = F(t,x)$ будет устойчиво по Ляпунова, тогда, когда ….	1. … старший характеристический показатель Ляпунова системы $\dot{x} = A(t)x$ будет отрицательным. 2. … наибольший характеристический корень $\Lambda(t)$ матрицы $[A^T(t) + A(t)]$ удовлетворяет условию $\Lambda(t) \le -h; h > 0$. 3. … максимальное сингулярное число $\gamma_1(t) \ge 0$ фундаментальной матрицы $X(t,x^0)$ решений системы $\dot{x} = A(t)x$ удовлетворяет условию $\gamma_1(t) \le \gamma(t) < \infty$

9	Задана периодическая система вида $\dot{x} = A(t)x; A(t+T) \equiv A(t); T > 0$. Характеристическими показателями такой системы являются корни следующего характеристического уравнения …	1. … $\det[\lambda E - A(T)] = 0$. 2. … $\det[\lambda E - \Lambda] = 0$, где $\Lambda = \frac{1}{T}\ln\{X(T)\}$; $X(T)$ - матрица монодромии; $X(t+T) = X(t)X(T)$; $X(t+T), X(t)$ - фундаментальные матрицы решений системы $\dot{x} = A(t)x$. 3. … $\det[\lambda E - X(T)] = 0$
10	Задана периодическая система вида $\dot{x} = A(t)x; A(t+T) \equiv A(t); T > 0$. Мультипликаторами системы являются корни следующего характеристического уравнения…	1. … $\det[\rho E - A(T)] = 0$ 2. … $\det[\rho E - \Lambda] = 0$, $\Lambda = \frac{1}{T}\ln\{X(T)\}$; $X(T)$ - матрица монодромии. 3. … $\det[\rho E - X(T)] = 0$