Вопрос 1. Кратный интеграл Римана на n-мерном промежутке. Необходимое условие интегрируемости.

· Определение. Координатным параллелепипедом (промежутком) в R^n будем называть множество

$$I = I_{a,b} = \{x = (x_1, \cdots, x_n)|\ a_i \le x_i \le b_i,\ i = \overline{1,n}\}$$

· Определение. Число $\mu = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ будем называть мерой параллелепипеда или его объемом.

· Определение. Пусть $P = \{I_j\}_{j=1}^{k}$ - разбиение промежутка I_j. Если в каждом промежутке I_j выбрана точка $\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, \cdots, \xi_n^{(j)})$, то мы получаем разбиение с отмеченными точками. Будем такое разбиение обозначать (P, ξ).

· Определение. Мелкостью разбиения промежутка называется следующее число
$\lambda(P) = \max\limits_{1 \le j \le k}\left(\sup\limits_{x,y \in I_j} \rho(x,y)\right)$, где $\sup\limits_{x,y \in I_j} \rho(x,y)$ - диаметр промежутка I_j

· Определение пусть на промежутке I задана функция $f : I \to R$ и (P, ξ) – произвольное разбиение с отмеченными точками промежутка I.
Сумма $\sigma(f, P, \xi) = \sum\limits_{j=1}^{k} f(\xi^{(j)}) \cdot \mu(I_j)$ называется интегральной суммой Римана функции f, соответствующей разбиению (P, ξ) промежутка I.

· Определение. Число A называется интегралом Римана от функции f по промежутку I, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 :\ \ \forall (P, \xi),\ \lambda(p) < \delta \implies |A - \sigma(f, P, \xi)| < \varepsilon$$

В этом случае пишут $A = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi)$.

· Обозначение для интеграла Римана: $\int\limits_I f(x)dx$ или $\int\limits_I \int \cdots \int f(x1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n$. Это число называют так же кратным интегралом.

Если интеграл (число A) конечен, то функция f называется интегрируемой на I.
Множество интегрируемых на I функций будем обозначать $R(I)$.

· Теорема (необходимое условие интегрируемости). Если $f \in R(I)$, то f ограничена на I.

Вопрос 2. Множества лебеговой меры нуль. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

· Определение. множество $E \subset R^n$ имеет $n-$мерную меру нуль, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие $\{I_1, \ldots, I_s, \ldots\}$ этого множества промежутками, т.е. $E \subset \bigcup\limits_j I_j$, что $\sum\limits_i \mu(I_j) < \varepsilon$.

· Теорема (критерий Лебега). Пусть функция $f : I \to R$ ограничена на промежутке I и B – множество ее точек разрыва. Тогда f интегрируема на I в том и только в том случае, когда B – множество меры нуль.

Вопрос 3. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества.

· Определение. Введём в рассмотрение, соответственно, нижнюю и верхнюю суммы Дарбу

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{k} m_i \mu(I_i), \quad S(f,P) = \sum_{i=1}^{k} M_i \mu(I_i)$$

где

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$$

· Определение. $J_* = \sup\limits_{P} s(f,P)$ называется верхним интегралом Дарбу

· Определение. $J^* = \inf\limits_{P} S(f,P)$ называется нижним интегралом Дарбу

· Теорема (Дарбу). Имеют место равенства

$$J_* = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P), \quad J^* = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$$

· Теорема (критерий Дарбу). Определенная на промежутке $I \subset R^n$ функция $f : I \to R$ интегрируема на нем тогда и только тогда, когда f ограничена на промежутке I и $J_* = J^*$

· Определение. Пусть $E \subset R^n$. Характеристическая функция χ_E множества E определяется следующим образом: $\chi_E(x) = 1, x \in E$, и $= 0$ в противном случае.

· Определение. Если $E \subset I$ и функция $f : I \to R$ ограничена, то под интегралом $\int\limits_E f(x)dx$ по множеству E от функции f будем понимать слудующий интеграл $\int\limits_I f(x)\chi_E(x)dx$. Если последний интеграл не существует, то говорят, что функция f не интегрируема по Риману на множестве E. В противном случае f интегрируема на E.

· Определение. Назовем Назовем внутренностью множества E следующее множество

$$Int(E) = \{x \in E | \ \ \exists U(x) \subset E\}$$

· Определим границу множества ∂E, как слудющую разность $\partial E = \overline{E} \setminus Int(E)$

· Теорема. Характеристическая функция χ_E принадлежит $R(E)$ тогда и только тогда, когда ∂E – множество меры нуль.

· Определение. Ограниченное множество E, граница которого есть множество меры нуль, называется измеримым по Жордану. Число $\mu(E) = \int\limits_E dx$ называется мерой Жордана множества E.

Вопрос 4. Общие свойства интеграла. Важные для экзамена моменты обозначены (!)

· Теорема. Множество $R(E)$ - линейное пространство, относительно стандартных операций $(+, *)$.

$\cdot$ Теорема. Если $f \in R(E)$ и $\mu(\{x \in E | \ \ f(x) \neq 0\}) = 0$, то $\int\limits_E f(x)dx = 0$.

$\cdot$(!) следствие. Если $f, g \in R(E)$ и $\mu(\{x \in E | \ \ f(x) \neq g(x)\}) = 0$, то $\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx$

$\cdot$(!) Теорема. Пусть множества $E_1, \ E_2$ измеримы по Жордану, а функция f интегрируема на $E_1, \ E_2$. Тогда существует интеграл $\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx$, конечно, если $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$

$\cdot$ Теорема. Если $f \in R(E)$, то $|f| \in R(E)$ и $\left|\int\limits_E f(x)dx\right| \leq \int\limits_E \left|f(x)\right|dx$

$\cdot$(!) Теорема. Если $f \in R(E)$ и $f(x) \geq 0$ на E, то $\int\limits_E f(x)dx \geq 0$

$\cdot$(!) Теорема (о среднем). Если $f \in R(E)$ и $m = \inf\limits_E f, \quad M = \sup\limits_E f$, то существует число $\Theta \in [m, M]$ такое, что $\int\limits_E f(x)dx = \Theta \cdot \mu(E)$

Вопрос 5. Сведение кратного интеграла к повторному (теорема Фубини). Замена переменных в кратном интеграле.

$\cdot$ Данные для теоремы Фубини:

$\rightarrow$ A и B - промежутки в R^n и R^m соответственно

$\rightarrow$ На множестве $A \times B$ определена функция f

$\rightarrow$ Зафиксируем $x \in A$ для функции $g_x : B \rightarrow R$ так, что $g_x(y) = f(x, y)$

$\rightarrow$ Зафиксируем $y \in B$ для функции $g_y : A \rightarrow R$ так, что $g_y(x) = f(x, y)$

$\rightarrow$ Пусть $J_*(x) = \sup\limits_{P_B} s(g_x, P_B)$

$\rightarrow$ Пусть $J^*(x) = \inf\limits_{P_B} S(g_x, P_B)$

$\rightarrow$ Пусть $J_*(y) = \sup\limits_{P_A} s(g_y, P_A)$

$\rightarrow$ Пусть $J^*(y) = \inf\limits_{P_A} S(g_y, P_A)$

$\cdot$ Тогда справедлива теорема Фубини. Если $f \in R(A \times B)$, то функции $J_*(x)$ и $J^*(x)$ интегрируемы на A и имеют место равенства

$$\int\int\limits_{A \times B} f(x, y)dxdy = \int\limits_A J_*(x)dx = \int\limits_A J^*(x)dx$$

Аналогичный результат имеет место и для функций $J_*(y), \ J^*(y)$.

$\cdot$ Замечание. Если функиця g_x интегрируема на B, то $J_*(x) = J^*(x) = \int\limits_B f(x, y)dy$. Поэтому равенство в теореме Фубини можно записать в виде

$$\int\int\limits_{A \times B} f(x, y)dxdy = \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x, y)dy\right) dx = \int\limits_A dx \int\limits_B f(x, y)dy$$

$\cdot$ Определение. Говорят, что отображение $f : U \rightarrow R^n, U \subset R^m, \ f(x) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$ принадлежит классу C^1, если все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрервывны всюду на U.

· Обозначение. Введем в рассмотрение матрицу из частных производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Данная матрица называется матрицей Якоби отображения f. Если $m = n$, то определитель матрицы Якоби называется якобианом отображения f и обозначается

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

· Определение. Пусть $V_1, V_2 \subset R_n$ - открытые подмножества пространства R_n. Отображение $f : V_1 \to V_2$ называется диффеоморфизмом, если оно биективно и $f, f^{-1} \in C^1$

· Теорема. Пусть $g : G \to U$, $g(t_1, \ldots, t_n) = (g_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_n))$ - отображение измеримого (по Жордану) множества $G \subset R^n$ на такое же множество $U \subset R^n$, причём, можно указать такие множества A_G и A_U меры нуль, что $G \setminus A_G$ и $U \setminus A_U$ - открытые множества и $g : (G \setminus A_G) \to (G \setminus A_U)$ - диффеоморфизм и имеет ограниченный якобиан. Тогда для функции $f \in R(U \setminus A_U)$ функция $(f \circ g) \cdot \left|\frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}\right|$ принадлежит $R(G \setminus A_G)$ и имеет равенство

$$\int\limits_U f dx = \int\limits_G (f \circ g)(t) \left|\frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}\right| dt$$

1. Полярные координаты $x = \rho\cos(\varphi), \quad y = \rho\sin(\varphi)$
2. Цилиндрические координаты: "полярные"+ $"z = z"$
3. Сферические координаты

Вопрос 6. Векторные функции скалярного аргумента. Операции анализа над векторными функциями. Кривая. Основные понятия, связанные с кривой. Гладкие кривые. Натуральная параметризация. Касательная к кривой. Длина кривой.

· Определение. Будем говорить, что на промежутке T определена вектор-функция, если каждому элементу $r \in T$ поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(t)$.

· Определение. Назовём вектор $\vec{b}$ пределом вектор-функции $\vec{a}(t)$ при $t \to t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\vec{a}(t) - \vec{b}\right| = 0$. При выполнении последнего условия, будем писать $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \vec{b}$.

· Теорема. Если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \vec{b}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\vec{a}(t)\right| = \left|\vec{b}\right|$

· Определение. Будем называть вектор-функцию $\vec{a}(t)$ непрерывной в точке t_0, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0)$.

· Определение. Назовём вектор $\vec{a'}(t_0)$ производной вектор-функции $\vec{a'}$ в точке t_0, если

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)}{t - t_0} = \vec{a'}(t_0)$$

· Теорема. Аддитивность и однородность пределов (+,*)

· Теорема. Производная суммы равна сумме производных.

· Теорема. Пусть вектор-функции $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ непрерывны в точке t_0 и имеют в этой точке производные. Тогда функция $f(t) = \left(\vec{a}(t), \vec{b}(t)\right)$ имеет производную в точке t_0 и справедлива равенство $f'(t_o) = \left(\vec{a}'(t_0), \vec{b}(t_0)\right) + \left(\vec{a}(t_0), \vec{b}'(t_0)\right)$.

· Теорема. Пусть функция $g(t)$ и вектор-функция $\vec{a}(t)$ имеют производную в точке t_0. Тогда вектор функция $g(t) \cdot \vec{a}(t)$ имеет производную в точке t_0 и справедливо равенство

$$(g(t), \vec{a}(t))'\Big|_{t=t_0} = g'(t_0) \cdot \vec{a}(t) + g(t_0) \cdot \vec{a'}(t_0)$$

· Определение. Задана декартова система координат $Oxyz$ и непрерывная вектор функция $\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]$. Будем при всех значениях t откладывать вектор $\vec{r}(t)$ от точки O. При каждом значении t мы получаем определенный вектор $O\vec{M} = \vec{r}(t)$, начало которого в точке O, а конец зависит от выбора значения t. При изменении t на промежутке $[a; b]$ точка M описывает геометрическое место точек, которое мы будем называть параметрически заданной кривой. Сама вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]$ называется векторным параметрическим представлением кривой. При задании кривой будем использовать следующее обозначение: $\gamma : \vec{r}(t),\ t \in [a; b]$.
Если существует несколько значений параметра t, при которых $\vec{r}(t)$ принимает одно и тоже значение, то говорят, что кривая имеет точки самопересечения или кратные точки.
Кривая без точек самопересечения называется простой. Если $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, то кривая называется замкнутой кривой или контуром.
Если у контура кроме точек, соответствующих значениям параметра $t = a$ и $t = b$ других кратных точек нет, то контур называется простым.

· Определение. Разложим вектор $\vec{r}(t)$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат. $\vec{r}(t) = \varphi(t) \cdot \vec{i} + \psi(t) \cdot \vec{j} + \chi(t) \cdot \vec{k}$. Тогда функции φ, ψ, χ дифференцируемы столько раз, сколько дифференцируема функция $\vec{r}(t)$

· Определение. Предположим, что задана строго монотонная функция $\lambda : [\alpha; \beta] \to [a; b]$, причём $\lambda([\alpha; \beta]) = [a; b]$. Пусть $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(\lambda(\tau)),\ \tau \in [\alpha; \beta]$. Введем обозначения
$\Gamma_1 = \{M \in R^3 |\ \exists \tau \in [\alpha; \beta],\ O\vec{M} = \vec{\rho}(\tau)\}$
$\Gamma_2 = \{N \in R^3 |\ \exists t \in [a; b],\ O\vec{N} = \vec{r}(t)\}$

· Теорема. Имеет место равенство $\Gamma_1 = \Gamma_2$
Таким образом, на кривой можно произвольно менять параметризацию, отчего меняется вид параметрического представления.

· Определение. Предельное положение M_0Q для секущей мы будем называть касательной к кривой в точке M_0

· Определение. Пусть кривая $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]$ является кривой класса C^1. Длиной кривой называется число $\int\limits_a^b \left|\vec{r'}(t)\right| dt$.

· Лемма. Длина кривой g не зависит от выбора параметрического представления кривой.

· Определение. Кривую $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]$ класса C^1, для которой $\left|\vec{r'}(t)\right| \neq 0$ будем называть гладкой.

· Определение. Длину дуги можно взять за параметр кривой. Он называется натуральным параметром.

· Теорема. Пусть $\widehat{AB} : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a; b]$ - гладкая кривая. Тогда переменная длина дуги s, отсчитываемая от начала A кривой, является возрастающей, непрерывно дифференцируемой функцией параметра t;

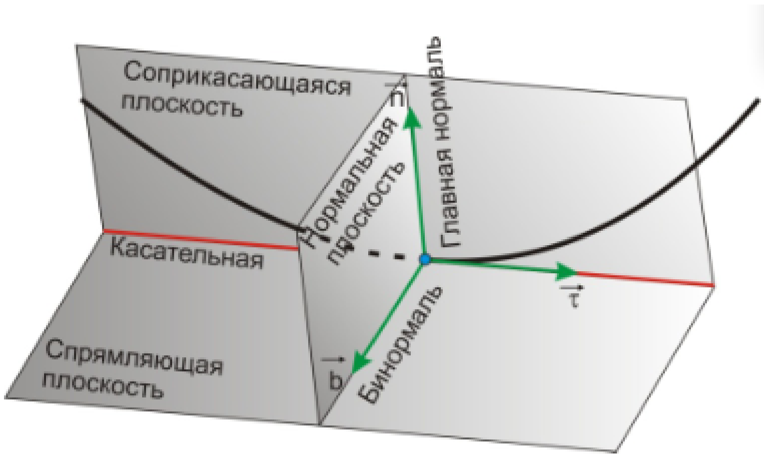
при этом $s'(t) = |r'(t)|$. В частности, если параметром кривой является переменная длина дуги, то $|r'(s)| = 1$

Пусть кривая γ класса C^2 задана параметрическим представлением $\vec{r} = \vec{r}(s),\ s \in [0; L]$, где s - натуральный параметр кривой. Обозначим $\vec{\tau} = \vec{r'}(s)$. Тогда $\vec{\tau}$ - это еденичный касательный вектор кривой. Так как $(\vec{r'}(s), \vec{r'}(s)) = 1$, то дифференцируя скалярное произведение, находим $(\vec{\tau}, \vec{r''}) = 0$. Будем рассматривать кривые, для которых $\vec{r''}(s) \neq 0$. Таким образом, касательный вектор ортогонален вектору $\vec{r''}(s)$ и эти два вектора определяют плоскость, проходящую через них. Такая плоскость называется соприкасающейся плоскостью.

Вопрос 7. Кривизна кривой. Кручение кривой. Репер Френе. Формулы Френе.

Нормаль в данной точке, лежащую в соприкасающейся плоскости (проходящую через эту точку), мы будем называть главной нормалью, а нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости, - бинормалью.

· Определение. Совокупность трех построенных прямоугольных координатных осей и трех координатных плоскостей называется сопровождающим трехгранником кривой в точке M или тройкой Френе.



$k = |\vec{r''}| \implies \vec{\tau'} = k \cdot \vec{n}$. Число k называется кривизной кривой в данной точке
$\vec{b} = [\vec{\tau}; \vec{n}]$

Выведем формулы Френе:
$\vec{b'} = [\vec{\tau'}; \vec{n}] + [\vec{\tau}; \vec{n'}] = [\vec{\tau}; \vec{n'}] \mid\mid \vec{n} \implies \vec{b'} = -\chi\vec{n}$. Число χ называется кручением кривой в этой точке
$\vec{n'} = [\vec{b'}; \vec{\tau}] + [\vec{b}; \vec{\tau'}] = [-\chi\vec{n}; \vec{\tau}] + [\vec{b}; k\vec{n}] = \chi\vec{b} - k\vec{\tau}$.

Итак:
$\vec{\tau'} = k \cdot \vec{n}$
$\vec{b'} = -chi \cdot \vec{n}$
$\vec{n'} = \chi \cdot \vec{b} - k \cdot \vec{\tau}$

Вопрос 8. Параметризованная поверхность. Первая квадратичная форма поверхности.

При изучении поверхностей, как и при изучении кривых, наиболее целесообразным способом их задания является параметрическое представление.

· Определение. Пусть теперь в пространстве R^2 задана область D. Зафиксируем на плоскости декартову систему координат Ouv. Предположим, что каждой точке (u, v) заданной области поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{r}(u, v)$. Тогда говорят, что на области D задана вектор-функция $\vec{r}(u, v)$.

· Определение. Назовём вектор $\vec{A}$ пределом вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ при $(u,v) \to (u_0,v_0) \in D$, если $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \left|\vec{r}(u,v) - \vec{A}\right| = 0$. В этом случае употребляется запись $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u,v) = \vec{A}$.

· Определение. Если $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u_0,v_0)$, то вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ называется непрерывной в точке $(u_0,v_0) \in D$. Если вектор-функция непрерывна в каждой точке области D, то она называется непрерывной в области D.

· Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta u\to 0} \dfrac{1}{\Delta u}(\vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v))$, то он называется частной производной вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ по аргументу u в точке (u,v) и обозначается $\vec{r}'_u(u,v)$ или $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v)$.
Аналогично можно определить частную производную $\vec{r}'_v(u,v)$ и частные производные старших порядков.

· Определение. Пусть нам дана непрерывная вектор-функция двух скалярных аргументов u, v, рассматриваемых в некоторой замкнутой области D их изменения $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k}$. Будем откладывать $\vec{r}(u,v)$ из начала координат O. Когда u и v пробегают область своего изменения, конец радиус-вектора $\vec{r}(u,v)$ описывает некоторое геометрическое место точек Σ , которое мы будем называть поверхностью в параметрическом представлении. Аргументы вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ называют параметрами или криволинейными координатами на Σ.

· Определение. Поверхность $\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}$, где D - плоская область с границей γ, являющейся кусочно-гладкой кривой, а вектор-функция имеет в $\overline{D}$ непрерывные частные производные и хотя бы один из якобианов $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},$ отличен от нуля при любых значениях u и v, называется элементарным гладким куском поверхности. Поверхность называется кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число элементарных гладких кусков. При этом будем считать, что различным точкам (u,v) соответствуют различные точки поверхности.

Пусть элементарный гладкий кусок поверхности S задан параметрическим представлением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ и пусть $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)),\ t \in [t_1; t_2]$ кривая на этой поверхности. Предположим, что $u(t), v(t) \in C^1[t_1, t_2]$. Тогда длина $s(t)$ дуги этой кривой, соответствующей отрезку $[t_1; t]$ изменения параметра t, равна

$$s(t) = \int\limits_{t_1}^{t} |\vec{r}'(\tau)| d\tau = \int\limits_{t_1}^{t} \sqrt{\vec{r}'_u u' + \vec{r}'_v v' \vec{r}'_u u' + \vec{r}'_v v'} d\tau = \int\limits_{t_1}^{t} \sqrt{(\vec{r}'_u, \vec{r}'_u) u'^2 + 2(\vec{r}'_v, \vec{r}'_u) u'v' + (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v) v'^2} d\tau.$$

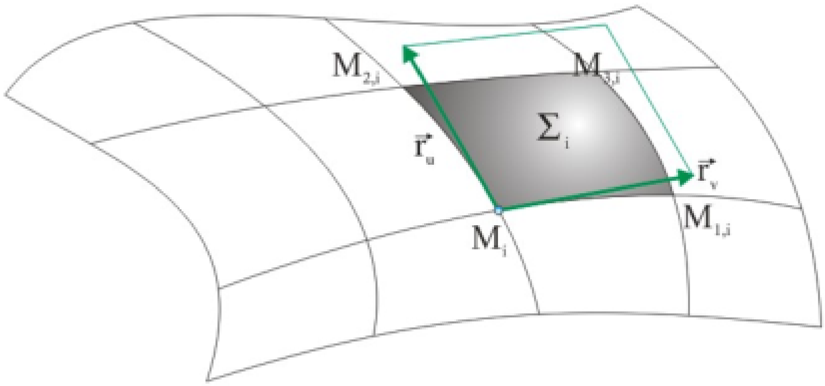
Обозначим

$$E = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_u), \quad F = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_u), \quad G = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v).$$

Тогда

$$s(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} d\tau.$$

Итак, $ds = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} d\tau \quad \Longrightarrow \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ - первая квадратичная форма поверхности, положительна определена.
Значение первой квадратичной формы поверхности заключается в том, что она выражает квадрат дифференциала дуги при бесконечно малом смещении по поверхности. При этом коэффициенты первой квадратичной формы поверхности определяются той точкой, из которой производится смещение, а дифференциалы du, dv отвечают данному смещению.



Первая квадратичная форма поверхности позволяет вычислять площадь поверхности

· Определение. Предел $\mu(\Sigma) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sum\limits_{I_j \in \tau} \left|[\vec{r_v'}, \vec{r_u'}]\right| \Delta v \Delta u = \int\int\limits_D \sqrt{EG - F^2} du dv$ называется площадью поверхности Σ

· Определение. Поверхность называется ориентируемой, если в каждой точке этой поверхности можно выбрать единичный вектор нормали к поверхности $\vec{n}(x, y, z)$, чтобы вектор-функция $\vec{n}(x, y, z)$ была непрерывной на поверхности. Такие поверхности иногда называют двусторонними. Ориентация опредедяется по правилу буравчика.

Вопрос 9 Криволинейные и поверхностные интегралы 1 го и 2 го рода. Независимость криволинейного интеграла 2 го рода от пути интегрирования.

· Определение. Пусть $\gamma : \vec{r}(s) = x(s) \cdot \vec{i} + y(s) \cdot \vec{j} + z(s) \cdot \vec{k},\ s \in [0; L]$ - гладкая кривая (здесь s – натуральный параметр) и в точках кривой γ задана функция $F(x, y, z)$. Выражение $\int\limits_\gamma F(x, y, z) ds$, определённое по формуле

$$\int\limits_\gamma F(x, y, z) ds = \int\limits_0^L F(x(s), y(s), z(s)) ds$$

называется криволинйным интегралом первого рода от функции $F(x, y, z)$ по кривой γ.

· Теорема. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

· Теорема. Пусть $\gamma : \vec{r}(t) = \varphi(t) \cdot \vec{i} + \psi(t) \cdot \vec{j} + \chi(t) \cdot \vec{k},\ t \in [a; b]$ - гладкая кривая и функция $F(x, y, z)$ непрерывна на кривой γ. Тогда

$$\int\limits_\gamma F(x, y, z) ds = \int\limits_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

Пусть $\widehat{AB}$ гладкая ориентированная кривая с параметрическим представлением $\gamma : \vec{r}(s) = x(s) \cdot \vec{i} + y(s) \cdot \vec{j} + z(s) \cdot \vec{k},\ s \in [0; L]$, где s - натуральный параметр кривой. Обозначим через α, β, γ углы, образованные вектором $\vec{r'}(s)$ или, что то же самое, касательной к кривой $\widehat{AB}$ соответственно с осями Ox, Oy, Oz. Тогда $|\vec{r'}(s)| = 1,\ s \in [0; L]$. Следовательно, $\cos\alpha = x'(s),\ \cos\beta = y'(s),\ \cos\gamma = z'(s)$. Пусть в точках кривой $\widehat{AB}$ определена функция $F(x, y, z)$.

· Определение. Криволинейные интегралы $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z) dx$, а также dy, dz определяются по формулам:

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z) dx = \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z) \cos\alpha ds;$$

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)dy = \int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)\cos\beta ds;$$

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)dz = \int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)\cos\gamma ds.$$

· Теорема. Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой.

· Теорема. Если $\gamma : \vec{r}(t) = \varphi(t)\cdot\vec{i} + \psi(t)\cdot\vec{j} + \chi(t)\cdot\vec{k},\ t \in [a;b]$ - гладкая кривая, то справедливы формулы:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)dx = \int_a^b F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)dt;$$

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)dy = \int_a^b F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)dt;$$

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)dz = \int_a^b F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)dt;$$

· Определение. Пусть $\Sigma : \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}$ элементарный гладкий кусок поверхности и в точках этой поверхности задана функция $F(x,y,z)$. Интеграл $\int\int_\sigma F(x,y,z)dS$, определяемый равенством

$$\int\int_\sigma F(x,y,z)dS = \int\int_{\overline{D}} F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

называется поверхностным интегралом первого рода.

· Теорема. Если функция F непрерывна на поверхности Σ, то интеграл $\int\int_\sigma F(x,y,z)dS$ существует.

· Теорема. Если поверхность Σ имеет одно из следующих параметрических представлений
$a)$ $\vec{r}(x,y) = (x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in \overline{D}$;
$b)$ $\vec{r}(x,z) = (x,f(x,z),z),\ (x,z) \in \overline{D}$;
$c)$ $\vec{r}(y,z) = (f(y,z),y,z),\ (y,z) \in \overline{D}$,
то

$$\int\int_\sigma F(x,y,z)dS = \int\int_{\overline{D}} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dxdy$$

$$\int\int_\sigma F(x,y,z)dS = \int\int_{\overline{D}} F(x,f(x,z),z)\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_z)^2}dxdz$$

$$\int\int_\sigma F(x,y,z)dS = \int\int_{\overline{D}} F(f(y,z),y,z)\sqrt{1+(f'_y)^2+(f'_z)^2}dydz$$

· Определение. Пусть $\Sigma :\ \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k},\ (u,v) \in \overline{D}$ - элементарный гладкий кусок поверхности с ориентацией $\vec{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где α,β,γ - углы, которые вектор $\vec{n}$ образует с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно. Кроме того, пусть в точках поверхности Σ определены функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$.
Поверхностный интеграл второго рода

$$\int\int_\Sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

по поверхности Σ с ориентацией $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ определяется следующим равенством:

$$\int\int_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$\int\int_{\Sigma} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS$$

Легко видеть, что поверхностный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации поверхности.

Формула для вычисления поверхностного интеграла второго рода. Выберем в качестве ориентации нормаль $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r_u'}; \vec{r_v'}]}{|[\vec{r_u'}; \vec{r_v'}]|}$. Так как $|[\vec{r_u'}; \vec{r_v'}]| = \sqrt{EG - F^2}$, то нам известны направляющие косинусы нормали, проводя преобразования получаем, что

$$\int\int_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \int\int_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv.$$

Вопрос 10. Полилинейные формы. Базис в пространстве полилинейных форм.

Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_p$ векторные пространства. U - над $\Re$ (произвольным полем)
Отображение $f : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p \to U$ называется полилинейным (в данном случае p-линейным), если для каждого индекса $i = 1, \ldots, p$ и для любых фиксированных векторов $a_j \in V_j,\ 1 \leq j \leq p,\ i \neq j$ отображение

$$f_i : v \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, v, a_{i+1}, \ldots, a_p)$$

Является линейной формой (линейной функцией), т.е.
$f_i(\alpha x + \beta y) = \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \quad \forall x, y \in V_i, \quad \alpha, \beta \in \Re$

Пусть любое полилинейное отображение $V_1\times, \ldots, \times V_p$ в $\Re$ называется полилинейной формой на $V_1 \times V_2, \ldots, \times V_p$. Если $l^i : v_i \mapsto l^i(v_i),\ i = 1, \ldots, p$ - какие-то линейные функции на V_i, то функция f определена отображением

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_p) = l^1(v_1)\ldots l^p(v_p),$$

будет полилинейной формой на $V_1\times, \ldots, \times V_p$. Она называется тензорным произведением линейных функцияй (форм) $l^1, \ldots, l^p$ и обозначается $f = l^1 \otimes \ldots \otimes l^p$ или просто $l^1 l^2 \ldots l^p$ (порядок существен).

Вопрос 11. Альтернация и ее свойства. Антисимметрические тензоры.

· Определение. Отображение

$$A = \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi : \mathsf{T}_p^0(V) \to \mathsf{T}_p^0(V)$$

называется альтернированием, где знак ε_π - чётность перестановки π.

· Свойство. Отображение альтернирования является линейным оператором, обладающим следующим свойством: $A^2 = A$.

Вопрос 12. Внешнее произведение тензоров и его свойства.

Вопрос 13. Базис в пространстве антисимметрических тензоров.

Вопрос 14. Дифференциальные формы, операции над дифференциальными формами.

Вопрос 15. Отображение f* и его свойства.

Вопрос 16. Дифференциал формы и его свойства.

Вопрос 17. Интеграл от дифференциальной формы по сингулярному кубу и по цепи. Свойства интеграла.

Вопрос 18 Общая формула Стокса. Классические интегральные формулы Стокса, Остроградского-Гаусса, Грина.

Теорема (Остроградский – Гаусс). Пусть граница ∂G ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких ориентируемых поверхностей, а функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ на $\bar{G}$. Тогда

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_{\partial G} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

где в качестве нормали на границе ∂G выбрана внешняя нормаль.

Теорема (Стокс). Пусть Σ ориентированная кусочно-гладкая поверхность, а контур Γ охватывает Σ и ориентирован в соответствии с ориентацией поверхности. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе частными производными первого порядка в области G, содержащей поверхность Σ, то

$$\iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz\,.$$

Теорема (формула Грина). Пусть граница области G состоит из конечного числа простых контуров и область G может быть разбита на конечное число элементарных относительно обеих координатных осей областей с кусочно-гладкими границами. Если в замкнутой области $\bar{G}$ заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные на $\bar{G}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то справедлива формула

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\partial G^+} Pdx+Qdy\,. \qquad (8)$$

Вопрос 19. Дифференциальные операции векторного анализа. Скалярные и векторные поля в областях евклидова пространства. Связь с дифференциальными формами. Дифференциальные операции векторного анализа. Интегральные формулы в векторных обозначениях. Физическая интерпретация div, rot, grad.

Вопрос 20. Потенциальные и соленоидальные векторные поля. Потенциал векторного поля, необходимое условие потенциальности.
Критерий потенциальности векторного поля. Соленоидальные поля.