Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 13. Основные понятия качественной теории динамических систем. Грубые состояния равновесия автономных систем. Теорема о центральном многообразии.

Основные понятия качественной теории динамических систем. Определение аттрактора. Качественное (геометрическое) интегрирование динамических систем. Структура предельных множеств. Грубые состояния равновесия автономных динамических систем. Структура решений линеаризованных моделей первого приближения. Инвариантные многообразия нелинейных систем. Теорема о центральном многообразии.

Основные понятия качественной теории динамических систем.

Рассмотрим автономную нелинейную систему, которая описывается дифференциальным уравнением вида: $\dot{x} = F(x), x \in R^n, F = (f_1, f_2, ..., f_n)$. Будем полагать, что функции $f_i, i = 1,..n$ являются C^r гладкими ($r \geq 1$) и определенными в некоторой области $D \subseteq R^n$. Под решением данной системы будем понимать дифференцируемое отображение $\varphi : \tau \to D$, где τ - интервал на оси t, такое, что будет выполняться соотношение $\dot{\varphi}(t) = F(\varphi(t)), \forall t \in \tau$.

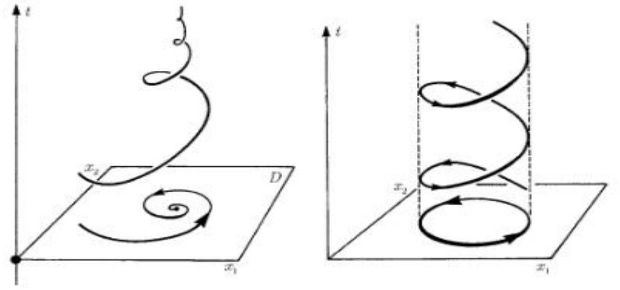
Так как по приведенным выше предположениям, условия теоремы Коши выполняются, то для точки $\forall x_0 \in D$, $\forall t_0 \in R$ существует единственное решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Решение определено на некотором интервале (t^-, t^+), содержащем значение $t = t_0$. Граничные точки t^- и t^+ могут принимать как конечные, так и бесконечные значения.

Существует, как уже отмечалось, две геометрические интерпретации решений системы. Первая относится к фазовому пространству $D \subseteq R^n$, вторая – к так называемому расширенному фазовому пространству $D * R \subseteq R^{n+1}$.

Согласно первой интерпретации, любое решение, удовлетворяющее начальному условию, можно рассматривать как параметрическое уравнение некоторой кривой (с параметром t). Такие кривые называются фазовыми кривыми. Совокупность фазовых кривых при различных начальных условиях образует, так называемый, фазовый портрет системы. При этом, в силу единственности решения задачи Коши для гладкого векторного поля F, существует только одна траектория, проходящая через каждую точку фазового пространства.

Согласно второй интерпретации, решения системы рассматривается как кривая в расширенном фазовом пространстве $D * R \subseteq R^{n+1}$, где $\varphi \in D \subseteq R^n$ и $t_0, t \in R$.

Существует прямая зависимость между фазовыми траекториями и интегральными кривыми. Каждая фазовая траектория есть проекция вдоль оси t соответствующей интегральной кривой на фазовое пространство.



Проекцию интегральной кривой на фазовое пространство D можно представить незамкнутой кривой (a) или, например, периодической траекторией (b)

Однако, в отличие от интегральных кривых, их проекции на фазовое пространство могут быть уже представляться точками. Такие точки называются состояниями равновесия. Они соответствуют постоянным решениям $x = \varphi(t) = x^*$. Согласно уравнениям системы состояния равновесия –

особые точки векторного поля F, и удовлетворяют уравнению $F(x^*) = 0$. Возникает вопрос «Могут ли пересекаться фазовые траектории?». Ответ дает следующее утверждение.

Теорема */Андронов/. Пусть траектория L, отличная от состояния равновесия, соответствует такому решению $x = \varphi(t)$ системы $\dot{x} = F(x)$, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$. Тогда $\varphi(t)$ определено для всех значений t и периодично, а L - простая гладкая замкнутая кривая. Если τ наименьший период $\varphi(t)$, то параметрическое уравнение траектории L принимает вид $x = \varphi(t)$, где $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$. Причем в данном интервале различные значения t соответствуют различным точкам траектории L.*

Траекторию L, соответствующую периодическому решению $\varphi(t)$, называют периодической. Любая другая траектория, не являющаяся ни положением равновесия, ни периодической траекторией, есть незамкнутая кривая.

В дальнейшем будем рассматривать только траектории решений, которые могут быть продолжены на бесконечный интервал $\tau = (-\infty, \infty)$. Такие системы принято называть (Биркгоф) динамическими системами.

Закон эволюции динамической системы /Шильников с23/ – *это отображение любой заданной точки x в фазовом пространстве D и любого значения t в однозначно определенное состояние $\varphi(t,x) \in D$, которое удовлетворяет следующим групповым свойствам: 1. $\varphi(0,x) = x$. 2. $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$. 3. Отображение $\varphi(t,x)$ непрерывно по (t,x).*

Если переменная t непрерывна, то указанные условия определяют поток или динамическую систему. То есть поток – то однопараметрическая группа гомеоморфизмов (взаимно-однозначных непрерывных отображений, для которых существуют обратные непрерывные отображения) фазового пространства $D \subseteq R^n$. Если поток $\varphi(t,x)$ - диффеоморфизм, то поток представляет собой гладкую динамическую систему.

В качестве фазового пространства D, как правило, выбирают либо пространство R^n, либо $R^{n-k} * T^k$, где T^k может быть к-мерным тором ($\underbrace{S^1 * S^1 * ... * S^1}_{k-раз}$), гладкой поверхностью или многообразием.

Резюмируя вышеприведенные утверждения, можно перечислить следующие основные свойства решений автономных дифференциальных уравнений:

Свойство 1*. Пусть $x(t)$ решение задачи $\dot{x} = F(x), x \in R^n$. Тогда $x(t + C)$, где C - любая постоянная, - также решение задачи $\dot{x} = F(x), x \in R^n$.*

Свойство 2*. Две фазовые траектории системы $\dot{x} = F(x), x \in R^n$, либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

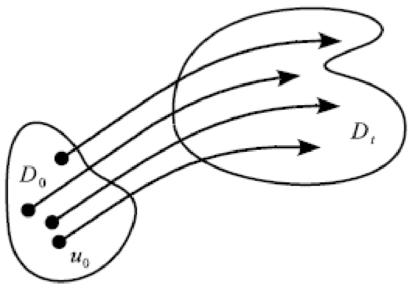
Свойство 3*. Пусть x^* положение равновесия системы $\dot{x} = F(x), x \in R^n$. Тогда $x(t) = x^*$ есть фазовая траектория.*

Свойство 4*. Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая (то есть в каждой точке имеется ненулевой касательный вектор).*

Свойство 5*. Всякая фазовая траектория принадлежит одному из трех типов: гладкая кривая без самопересечений; замкнутая гладкая кривая (цикл); точка.*

***Свойство 6**. О выпрямлении векторного поля в окрестности неособой точки. Пусть точка* $\bar{x}$ *не является положением равновесия системы* $\dot{x} = F(x), x \in R^n$. *Тогда в малой окрестности точки* $\bar{x}$ *систему* $\dot{x} = F(x)$ *с помощью гладкой однозначной замены переменных (диффеоморфизма) можно привести к виду* $\dot{v}_1 = 0; \dot{v}_2 = 0; ...; \dot{v}_{n-1} = 0; \dot{v}_n = 1.$

***Свойство 7**. О скорости изменения фазового объема (теорема Остроградского - Лиувилля). Рассмотрим множество* D_0 *возможных начальных значений динамической системы, имеющее объем* V_0. *В процессе эволюции это множество трансформируется во множество* $D_t = \varphi(t, D_0)$ *с объемом* V_t.



Справедливо следующее утверждение (теорема Остроградского - Лиувилля): скорость изменения фазового объема V_t *удовлетворяет равенству:* $\frac{dV_t}{dt} = \int\limits_{D_t} div\{F(x)\}dx$, *где*

$div\{F(x)\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_1, ..., x_n)}{\partial u_i}$. *Таким образом, достаточное условие сохранения фазового объема дается следующим выражением:* $div\{F(x)\} = 0$. *Если рассмотреть линейную систему вида* $\dot{x} = Ax$, *то* $div\{F(x)\} = trA = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. *Следовательно,* $\dot{V}_t = V(t) \cdot trA; V(0) = V_0$. *Отсюда получим известное соотношение* $V_t = V_0 \exp(trA\}$. *Объем* V_t *совпадает с выражением определителя от переходной матрицы решений системы* $\dot{x} = Ax$.

Дискретные динамические системы, то есть когда $t \in Z$, часто называют каскадами. Каскады имеют следующее свойство.

Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi(1, x)$ и обозначим его через $\psi(x)$. Очевидно, что будет справедливо следующее соотношение $\varphi(t, x) = \psi^t(x)$, где $\psi^t = \underbrace{\psi(\psi(...\psi(x)))}_{(t-1)-раз}$. Следовательно, для задания каскада достаточно определить только гомеоморфизм $\psi : D \to D$.

Если $\psi(x)$ - диффеоморфизм, то каскад – гладкая динамическая система. Каскады такого типа уже рассматривались в предыдущей лекции. Это неавтономная периодическая система вида $\dot{x} = F(x, t)$, где $F(x, t)$- непрерывна по всем переменным $D * R \subseteq R^{n+1}$, гладкая по $x \in D \subseteq R^n$ и периодическая с периодом T по t.

***Будем называть множество инвариантным** относительно рассматриваемой динамической системы, если справедливо соотношение* $A = \varphi(t, A), \forall t$. *В этом выражении* $\varphi(t, A) = \bigcup\limits_{x \in A} \varphi(t, x)$. *То есть, если* $x \in A$, *то и вся траектория* $\varphi(t, x)$ *лежит в множестве* A.

Точка x_0 ***называется блуждающей***, *если существует открытая окрестность* $U(x_0)$ *и такое положительное значение T, что* $U(x_0)\cap\varphi(t,U(x_0))=\varnothing$ *при* $t>T$ *. Такое же выражение можно записать и при обращении траектории* $\varphi(-t,U(x_0))\cap U(x_0)=\varnothing$ *при* $t>T$*. Следовательно, определение блуждающей точки является симметричным относительно обращения времени.*

Обозначим множество блуждающих точек через W. Множество W, как легко можно показать /Шильников с28/, является открытым и инвариантным. Следовательно, множество неблуждающих точек $M=D\setminus W$ замкнуто и инвариантно. Множество неблуждающих точек может быть пустым.

Пример. Рассмотрим следующую динамическую систему: $\dot{x}=F(x,\theta)$, $\dot{\theta}=1$. Так как $\theta=\theta_0+t$, то переменная θ монотонно возрастает со временем. Следовательно, каждая точка (x,θ) - блуждающая.

Очевидно, что состояния равновесия, а также все точки, принадлежащие периодическим траекториям, являются неблуждающими. Все точки точки двояко-асимптотических траекторий, которые при $t\to\pm\infty$ стремятся к состояниям равновесия и периодическим траекториям, также неблуждающие. Такие двояко-асимптотические траектории незамкнуты и называются гомоклиническими.

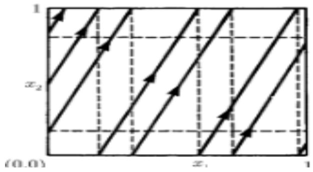
Определение /Шильников с28/. *Точка* x_0 *называется положительно устойчивой по Пуассону, если для произвольной окрестности* $U(x_0)$ *и любого* $T>0$ *существует такое значение* $t>T$*, что* $\varphi(t,x_0)\subset U(x_0)$*.*

То есть, точки, принадлежащие устойчивым по Пуассону траекториям, являются неблуждающими.
Если, для любого $T>0$ существует такое значение t, что $t<-T$, и выполнено условие $\varphi(t,x_0)\subset U(x_0)$, то точка x_0 - отрицательно устойчивая по Пуассону точка. Если точка одновременно положительно и отрицательно устойчива по Пуассону, то она называется устойчивой по Пуассону. Очевидно, что если точка x_0 положительно (отрицательно) устойчива по Пуассону, то и любая точка на траектории $\varphi(t,x_0)$ также является положительно (отрицательно) устойчивой по Пуассону. Таким образом, можно ввести понятие P^+ - траектории (положительно устойчивая по Пуассону), P^- - траектории (отрицательно устойчивая по Пуассону) и просто P - траектории (устойчивая по Пуассону). Легко проверить, что P^+,P^-,P - траектории состоят из неблуждающих траекторий.

Теорема (Биркгоф). *Если* $P^+(P^-,P)$ *траектория незамкнута, то ее замыкание* Σ *содержит континуум незамкнутых* P *траекторий.*

Из теоремы следует, что P траектория последовательно пересекает любую ε окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 бесконечное число раз.

Пример. Рассмотрим квазипериодический поток на двумерном торе T^2, описываемый уравнениями: $\dot{x}_1=\omega_1$; $\dot{x}_2=\omega_2$, где отношение ω_1/ω_2 - иррационально. В данном случае $\Sigma=T^2$ минимальное множество, и поток имеет незамкнутую траекторию всюду плотную на торе. Если бы отношение ω_1/ω_2 было рациональным, то все траектории на торе T^2 были бы периодическими.



Поток на торе можно представить в виде потока на единичном квадрате. Тангенс угла наклона всех параллельных траекторий равен ω_2/ω_1. Склеивание противоположных сторон квадрата дает двумерный тор

Определение аттрактора.

Аттракторы являются одним из важнейших элементов оценки динамики исследуемых нелинейных динамических систем. Поэтому уточнение различных типов аттракторов представляет собой важный практический вопрос.

Определение. *Аттрактор - это замкнутое инвариантное множество K, имеющее такую окрестность (поглощающую область) $U(K)$, что траектория $x(t, x_0)$ произвольной точки x, принадлежащей $U(K)$, удовлетворяет условию:*

$$\rho(K, x(t, x_0)) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \text{ где } \rho(K, x) = \inf_{z \in K} \| x - z \|.$$

Простейшие примеры аттракторов – состояния равновесия, устойчивые периодические траектории и устойчивые инвариантные торы, содержащие квазипериодические траектории. Определение аттрактора не исключает того, что он может содержать другие аттракторы. Существуют, так называемые странные аттракторы, являющиеся инвариантными замкнутыми множествами, состоящими только из неустойчивых траекторий. Аттракторы бывают как локальными, так и глобальными /Леонов Хаот динамика с14/.

Определение. *Будем говорить, что инвариантное множество K является локально притягивающим, если для некоторой ε - окрестности этого множества $K(\varepsilon)$ выполнено соотношение* $\lim\limits_{t \to \infty} \rho(K, x(t, x_0)) = 0, \forall x_0 \in K(\varepsilon)$.

Определение. *Будем говорить, что инвариантное множество K является глобально притягивающим, если:* $\lim\limits_{t \to \infty} \rho(K, x(t, x_0)) = 0, \forall x_0 \in R^n$

Определение. *Будем говорить, что K - аттрактор, если K является инвариантным, замкнутым и локально притягивающим множеством.*

Будем говорить, что K - глобальный аттрактор, если K является инвариантным, замкнутым, глобально притягивающим множеством.

Тривиальным примером аттрактора является все фазовое пространство R^n, если в нем определены траектории при всех значениях $t \geq 0$. Этот пример показывает, показывает, что целесообразно ввести понятие минимального аттрактора – наименьшего инвариантного множества, обладающего свойством притягательности.

Качественное («геометрическое») интегрирование динамических систем.

«Интегрирование системы» означает получение для ее решений аналитического выражения. Однако только очень малый класс динамических систем допускает достижение такой цели. Возможно использование приблизительных «вычислительных» схем интегрирования. Это значительно расширяет класс «условно интегрируемых» систем. Однако, в этом случае, исследователь должен проанализировать и суметь спрогнозировать поведение системы на основе огромного массива данных, не всегда допускающего простую геометрическую интерпретацию. При этом, крайне затруднительно, решить главную цель задачи оценки «нелинейной динамики», которая в частности, определяется решением таких качественных свойств, как количество состояний равновесия, устойчивость, существование периодических траекторий и так далее. Лишь после ответа на такие «качественные» вопросы можно решать задачи количественного поведения конкретных траекторий поведения системы и получать численные оценки их поведения.

Таким образом, чтобы получить качественные особенности свойств динамических систем, необходимо предварительно оценить геометрические свойства их траекторий. Вот почему методы исследования нелинейной динамики получили название качественной или геометрической (топологической) схемы интегрирования динамических систем. При таком подходе возникает необходимость решения самой первой проблемы: « Как описать структуру разбиения фазового пространства на траектории?». Простейшим ответом является описание поведения траекторий и их классификация при $t \to \infty$ ($t \to -\infty$).

Структура предельных множеств.

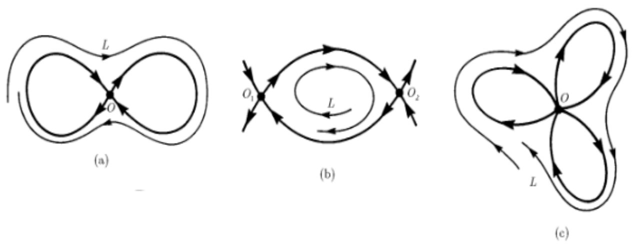
Определение. *Точку* x^* *называют* ω*- предельной точкой траектории* L*, если для некоторой последовательности* $\{t_k\}$*, где* $t_k \to \infty$*:* $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_k) = x^*$*.*

Аналогичное определение α - предельной точкой траектории L будет при $t_k \to -\infty$. Обозначим множество всех ω - предельной точек, принадлежащих траектории L, через Ω_L, а множество α - предельных точек – через A_L. Состояние равновесия является единственной предельной точкой самого себя. Если траектория L - периодическая то все ее точки являются α и ω - предельными точками, то есть $L = \Omega_L = A_l$. Если траектория L - незамкнутая, устойчивая по Пуассону траектория, то множества Ω_L и A_L совпадают с ее замыканием $\overline{L}$.

Для двумерных динамических систем структура множеств Ω_L и A_L подробно изучена. В частности установлено, что множество Ω_L может быть только одного из трех приведенных топологических типов:

<u>1 тип. Состояние равновесия.</u>
<u>2 тип. Периодическая траектория.</u>
<u>3 тип. Контур, образованный состояниями равновесия и траекториями, стремящимся к данным состояниям равновесия при $t \to \pm\infty$.</u>

На рисунке приведены примеры предельных множеств типа 3 /Шильников с34/. Здесь состояния равновесия помечены буквой О.



Под буквами (a) и (c) приведены примеры двух ω-предельных гомоклинических циклов; под буквой (b) – пример гетероклинического цикла, образованного двумя траекториями, направленными от одного положения равновесия к другому

Ситуация для многомерных систем намного сложнее. В данном случае, помимо состояний равновесия и периодических траектория, предельные множества могут содержать другие множества различных топологических типов – таких, как странные (стохастические) аттракторы, которые в ряде случаев могут быть негладкими многообразиями или фрактальными множествами.

Таким образом, чтобы описать качественно динамическую систему необходимо сформировать картину разбиения фазового пространства на области существования траекторий разных топологических типов, то есть провести классификацию имеющихся траекторий и разработать правила такой классификации.

***Определение**. Две системы называются топологическими эквивалентными, если существует гомеоморфизм соответствующих фазовых пространств, отображающий траектории одной системы в траектории второй.*

Все изолированные состояния равновесия и периодические траектории являются особыми траекториями. Незамкнутые траектории также могут быть особыми. Например, траектории двумерной системы, которые стремятся к седловым состояниям равновесия при $t \to \pm\infty$. Эти траектории могут принадлежать двум различным областям, то есть $L \in G_j$ и $L \in G_k$ при $j \neq k$. Таким образом , они являются граничными и разделяют различные области на плоскости. Такие траектории называют сепаратрисами.

Каждое множество эквивалентных траекторий называют ячейкой. При этом, все траектории в одной ячейке имеют один и тот же топологический тип. В частности, если ячейка состоит из незамкнутых траекторий, то все они имеют одно и те же ω- и α - предельные множества.

Можно построить некоторое множество S, состоящее образцов траекторий, взятых из каждой ячейки. Данное множество S называют схемой динамической системы.

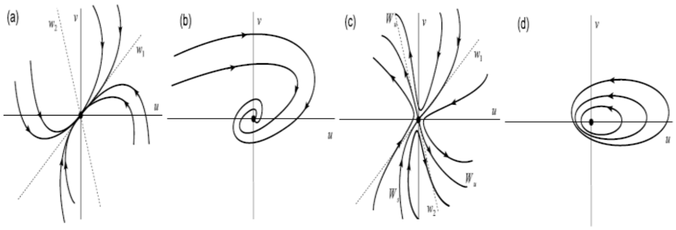
***Теорема (Андронов).** Схема динамической системы является полным топологическим инвариантом.*

Данная теорема обуславливает следующий метод исследования двумерной динамической системы. Сначала классифицируют состояния равновесия. Затем все особые траектории, такие как сепаратриссы, стремящиеся к седловым состояниям равновесия и траектории, стремящиеся к предельным множествам 3-го типа при $t \to \pm\infty$. Полный набор особых траекторий определяет схематический портрет, называемый *скелетом* динамической системы. И, наконец, изучить поведение траекторий внутри каждой ячейки.

К сожалению, этот метод не работает при исследовании многомерных систем. Множество особых траекторий уже в трехмерной системе может быть бесконечным или даже континуальным. То же самое относится к ячейкам. Поэтому провести полную классификацию, в общем случае, не представляется возможным. Тем не менее, основной подход к изучению конкретных многомерных систем остается таким же, как для двумерных. Такой подход носит название локальной теории исследования нелинейных динамических систем.

Грубые состояния равновесия автономных динамических систем.

Рассмотрим следующую автономную динамическую систему: $\dot{x} = F(x), x \in R^n, F = (f_1, f_2, ..., f_n)$. Траекторию $x(t)$ данной системы будем называть состоянием равновесия, если она не зависит от времени, то есть $x(t) \equiv x_0 = const$. Координаты состояния равновесия определяются решением систему уравнений: $F(x) = 0$. Если матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial x}$ не вырождена в точке x_0, то вблизи точки x_0 не существует других решений уравнения $F(x) = 0$. То есть состояние равновесия изолировано. Таким образом, в общем случае, в любой ограниченной подобласти фазового пространства $D \subseteq R^n$ система имеет конечное число состояний равновесия. Изучение системы $\dot{x} = F(x)$ вблизи состояния равновесия основано на стандартной процедуре линеаризации. Очевидно, что поведение траекторий исходной системы в малой окрестности точки равновесия главным образом зависит от линеаризованной модели первого приближения: $\dot{x} = Ax$, где $A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=x_0}$. Алгебраическая и топологическая классификация фазовых портретов системы $\dot{x} = Ax$ на плоскости была подробно рассмотрена в первой части данного курса .



Гиперболические положения равновесия систем на плоскости. (a) Устойчивый узел. Собственные числа $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Направление w_1 отвечает собственному вектору, соответствующему λ_1. (b) Устойчивый фокус. Собственные числа комплексно сопряженные, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. (c) Седло. Собственные числа $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Направление w_1 отвечает собственному вектору, соответствующему $\lambda_1 > 0$, направление w_2 отвечает собственному вектору, соответствующему $\lambda_2 < 0$. Множество W_s обозначает устойчивое множество седловой точки, W_u — неустойчивое множество седловой точки. (d) Пример негиперболического положения равновесия, для которого $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$.

В первой части курса также была приведена известная теорема Гробмана-Хартмана о топологической эквивалентности исходной автономной динамической системы с линеаризованной моделью первого приближения. Напомним данное утверждение.

Теорема (Гробмана-Хартмана) */Шильников с79/. Пусть точка О есть грубое (то есть изолированное) состояние равновесия. Тогда существуют окрестности U_1 и U_2, в которых исходная и линеаризованная системы топологически эквивалентны.*

Структура решений линеаризованных моделей первого приближения.

Рассмотрим теперь более подробно структуру общих решений системы $\dot{x} = Ax$ для многомерного случая, когда $x \in R^n, n \geq 2$. Общее решение данного уравнения задается выражением $x(t) = e^{At}x_0$. Как известно, существует базис, в котором матрица А приводится к блочно-диагональному виду:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & A_2 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & A_s \end{pmatrix}$$, где, каждый блок A_j соответствует либо вещественному собственному значению (возможно кратному), либо паре комплексно-сопряженных значений.

Лемма. *Для любого сколь угодного малого $\varepsilon > 0$ можно выбрать подходящий базис в пространстве R^n, в котором решение $x(t) = e^{At}x_0$ линейной системы $\dot{x} = Ax$ удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$\begin{cases} \| x(t) \| \leq \| e^{At} \| * \| x_0 \| \leq e^{(\max_i \mathrm{Re}(\lambda_i)+\varepsilon)t} \| x_0 \| \_ \\ \| x(t) \| \geq \| e^{-At} \|^{-1} * \| x_0 \| \geq e^{(\min_i \mathrm{Re}(\lambda_i)-\varepsilon)t} \| x_0 \| \end{cases} \quad \text{при } t \geq 0$$

$$\begin{cases} \| x(t) \| \leq \| e^{At} \| * \| x_0 \| \leq e^{(\min_i \mathrm{Re}(\lambda_i)-\varepsilon)t} \| x_0 \| \_ \\ \| x(t) \| \geq \| e^{-At} \|^{-1} * \| x_0 \| \geq e^{(\max_i \mathrm{Re}(\lambda_i)+\varepsilon)t} \| x_0 \| \end{cases} \quad \text{при } t \leq 0$$

где $\lambda_i, i = 1,2,...,n$ характеристические значения матрицы A, $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

Доказательство леммы базируется на известных свойствах представления матрицы A в базисе Жордана и свойствах экспоненциала постоянной матрицы A.

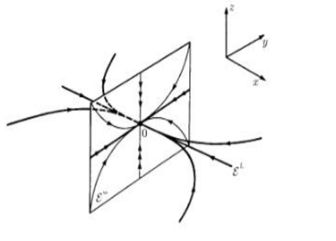
Устойчивые состояния равновесия линейной системы.

Упорядочим характеристические значения матрицы A <u>устойчивого</u> равновесия следующим образом $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \geq \mathrm{Re}\,\lambda_2 \geq ... \geq \mathrm{Re}\,\lambda_n$. Предположим также, что первые m показателей имеют равные действительные части ($\mathrm{Re}\,\lambda_i = \mathrm{Re}\,\lambda_1, i = 1,2,...m$ и $\mathrm{Re}\,\lambda_i < \mathrm{Re}\,\lambda_1, i = m+1,...n$, то есть соответствуют подматрице A_1 в жордановом представлении матрицы A). Обозначим через E^L и E^{ss}, соответствующие m - мерное и $(n-m)$-мерное собственные подпространства собственных векторов матрицы A. Назовем E^L *ведущим* инвариантным подпространством, а E^{ss} - *неведущим, или сильно устойчивым* инвариантным подпространством. Такие названия даны, исходя из того, что при $t \to \infty$ все траектории, кроме траекторий, лежащих в подпространстве E^{ss}, стремятся к состоянию равновесия, касаясь подпространства E^L. Траектории, лежащие в подпространстве E^{ss}, будут стремиться к точке О быстрее, чем функция $e^{(\operatorname{Re}\lambda_{m+1}+\varepsilon)t}$.

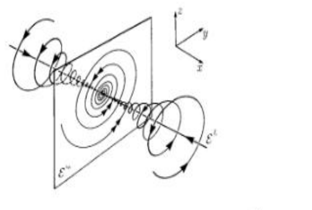
Когда все характеристические значения λ_i матрицы A лежат слева от мнимой оси, можно, на основании приведенной выше леммы, записать следующее соотношение: $\| x(t) \| \le e^{-\lambda t} \| x_0 \|$ при $t \ge 0$, где значение $\lambda > 0$ и $\lambda = \max_i \{-\operatorname{Re}\lambda_i\}$. То есть, в данном случае, каждая траектория линейной системы первого приближения $\dot{x} = Ax$ будет экспоненциально стремиться к точке О при $t \to \infty$. Такое состояние равновесия будем в дальнейшем называть <u>экспоненциально асимптотически устойчивым.</u>

Устойчивый узел. Если $m = 1$, то есть в случае, когда характеристическое значение λ_1 вещественное число и $\operatorname{Re}\lambda_i < \lambda_1, i = 2,...,n$, ведущее подпространство – прямая линия. Такое состояние равновесия будем назвать устойчивым узлом.

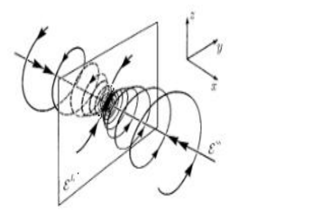
Устойчивый фокус. Если $m = 1$, то есть $\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\omega$, где $\rho > 0, \omega \ne 0$, то соответствующее состояние равновесия будем называть устойчивым фокусом. В данном случае, все траектории, не принадлежащие E^{ss}, имеют форму спиралей, «наматывающихся» на точку О.



Устойчивый узел в $\mathbb{R}^3$.
Ведущее подпространство E^{L} – одномерное, двумерное подпространство E^{ss} – неведущее



Пример устойчивого узла в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Хотя точка O является устойчивым фокусом на плоскости E^{ss}, все траектории вне этой плоскости приближаются к точке O вдоль одномерного ведущего подпространства E^{L}



Устойчивый фокус в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$.
Все траектории вне одномерного подпространства E^{ss} стремятся к точке O по касательной к двумерному ведущему подпространству E^{L}

Неустойчивые состояния равновесия линейной системы.

Если все собственные значения матрицы A находятся в правой полуплоскости, то есть $\operatorname{Re}\lambda_i > 0, i = 1,2,...n$, то все полученные выше соотношения будут выполняться при обращении времени $t \to -t$. Следовательно решение можно оценить с помощью следующего выражения: $\| x(t) \| \le e^{-\lambda|t|} \| x_0 \|$, где $\lambda > 0$ - некоторая произвольная величина, удовлетворяющая неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i > \lambda, i = 1,2,...n$. Такие состояния равновесия называются экспоненциальными вполне неустойчивыми. Ведущее и неведующее подпространства в данном случае определяются так же, как и в случае устойчивых состояний равновесия, но при $t \to -\infty$. Если ведущее подпространство одномерное, то состояние равновесия называется неустойчивый узел. Если ведущее подпространство двумерно и пара комплексно-сопряженных показателей является ближайшей к мнимой оси, то состояние равновесия называется неустойчивым фокусом.

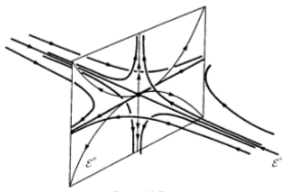
Рассмотрим теперь случай, когда слева от мнимой оси лежит k характеристических значений, а справа (n-k), то есть $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, i = 1,2,...k$ и $\operatorname{Re}\lambda_j > 0, j = k+1,...n, k \ne 0, n$. Такое состояние равновесия называется состоянием равновесия седлового типа. Линейной невырожденной заменой переменных система $\dot{x} = Ax$ может быть приведена к виду: $\dot{u} = A^{-}u$, $\dot{v} = A^{+}v$, где

$spect(A^-) = \{\lambda_1,...,\lambda_k\}$ и $spect(A^+) = \{\lambda_{k+1},...,\lambda_n\}$, $u \in R^k, v \in R^{n-k}$. Тогда можно выделить устойчивое инвариантное подпространство E^s ($v = 0$) и неустойчивое инвариантное подпространство E^u ($u = 0$). Все траектории подпространства E^s экспоненциально стремятся к точке O при $t \to \infty$ и, соответственно, все траектории подпространства E^u экспоненциально стремятся к точке O при $t \to -\infty$.

В выделенных подпространствах можно выделить устойчивое и неустойчивое ведущее и неведущее подпространства $E^{sL}, E^{uL}, E^{ss}, E^{uu}$. Прямую сумму $E^{sE} = E^s \oplus E^{uL}$ называют расширенным устойчивым инвариантным подпространством, а $E^{uE} = E^u \oplus E^{sL}$ расширенным неустойчивым инвариантным подпространством. Инвариантное подпространство $E^L = E^{sE} \cap E^{uE}$ ведущим седловым подпространством.

Если точка O является узлом, как в подпространстве E^s, так и подпространстве E^u, то такую точку называют седлом. В этом случае размерность подпространств E^{sL} и E^{uL} равна 1.

Если точка O является фокусом, по крайней мере в одном из двух подпространств E^s и E^u, ее называют седло-фокус. Можно выделить три типа точек «седло-фокус»: седло-фокус (2,1) – фокус на E^s и узел на E^u; седло-фокус (1,2) - узел на E^s и фокус на E^u; седло-фокус (2,2) - фокус и на E^s, и на E^u.



Седло (1,2)

Седло-фокус (2,1).

<u>Инвариантные многообразия нелинейной системы. Теорема о центральном многообразии.</u>

Инвариантные многообразия устойчивого равновесия нелинейной системы.

Пусть n-мерная динамическая система класса гладкости $C^r, r \geq 1$ имеет грубое состояние равновесия O в начале координат. Тогда систему вблизи точки O можно представить в следующем виде: $\dot{x} = Ax + h(x)$, где $A \in R^{n*n}$ матрица с постоянными коэффициентами, спектр которой лежит в <u>левой</u> части комплексной плоскости (вне мнимой оси); $h: R^n \to R^n$ - гладкая $C^r, r \geq 1$ функция, такая, что выполняются соотношения: $h(0) = 0, h'_x(0) = 0$. В этом случае любая траектория линейной системы первого приближения будет стремиться к началу координат экспоненциально. Зададим вопрос «Сохраняется ли свойство экспоненциальной сходимости к состоянию равновесия для исходной нелинейной динамической системы?». Ответ дает следующее утверждение.

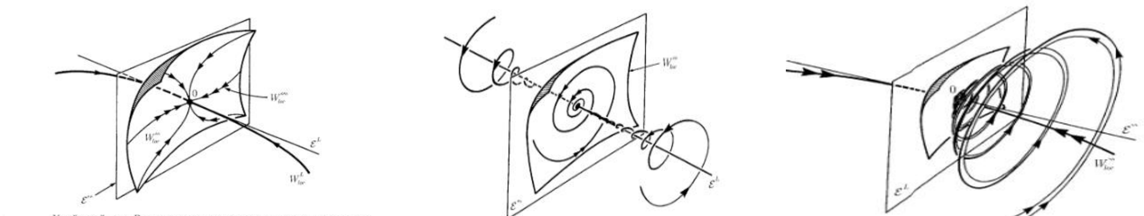
Теорема. *Пусть линейная система первого приближения* $\dot{x} = Ax$ *является экспоненциально устойчивой. Тогда, при достаточно малом* $\delta > 0$ *для любого* x_0 *такого, что* $\| x_0 \| < \delta$, *траектория* $x(t)$ *нелинейной системы* $\dot{x} = Ax + h(x)$ *с начальной точкой* x_0 *при любых значениях* $t \geq 0$ *удовлетворяет неравенству* $\| x(t) \| \leq Me^{(\max_i \mathrm{Re}\lambda_i + \varepsilon)t} \| x_0 \|$, *где константа* $\varepsilon > 0$ *может быть выбрана сколь угодно малой за счет соответствующего выбора* δ, *а* $M > 0$ *- некоторый множитель.*

Замечание. *Если система принадлежит классу гладкости* C^2 *и выше, а ближайшее к мнимой оси характеристическое значение матрицы* A *является простым, то можно положить* $\varepsilon = 0$.

В приведенной теореме утверждается, что топологически устойчивый узел представляет собой экспоненциально устойчивое состояние равновесия исходной нелинейной системы. При этом, в нелинейном случае, роль неведущего подпространства играет инвариантное неведующее многообразие. Каждый вектор x можно однозначно разложить следующим образом: $x = u + v$, где $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ и $v = (v_1, v_2, ..., v_{n-m})$ проекции на, соответственно, ведущее и неведущее собственные подпространства E^L и E^{ss} матрицы A. В новых координатах система принимает вид $\dot{u} = A_1 u + f(u, v)$, $\dot{v} = A_2 v + g(u, v)$, где $spect(A_1) = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$, $spect(A_2) = \{\lambda_{m+1}, ..., \lambda_n\}$, $f, g \in C^r$, $f(0) = f'(0) = 0$, $g(0) = g'(0) = 0$.

Теорема (о инвариантных многообразиях устойчивого равновесия)*. В окрестности U устойчивого состояния равновесия О существует C^r гладкое инвариантное многообразие W_{loc}^{ss} размерности $(n-m)$ (неведущее, или сильно устойчивое), которое проходит через точку О и касается в ней неведущего подпространства E^{ss} (в точке $u = 0$). Траектория $x(t)$, выходящая из любой точки вне многообразия W_{loc}^{ss}, стремится к 0, касаясь ведущего подпространства W_{loc}^{L} (в точке $v = 0$). При этом, при $t \geq 0$, имеет место следующее выражение:*
$\| x(t) \| \leq M e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_1 - \varepsilon)t} \rho(x_0, W_{loc}^{ss})$, где через $\rho(x_0, W_{loc}^{ss})$ обозначено расстояние между x_0 и W_{loc}^{ss}. Все траектории, принадлежащие многообразию W_{loc}^{ss}, стремятся к точке О быстрее, а именно с оценкой $\| x(t) \| \leq M e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_{m+1} + \varepsilon)t} \| x_0 \|$.

Как и в линейном случае, в зависимости от поведения системы в ведущих координатах, выделяются два основных вида устойчивых состояний равновесия: устойчивый узел и устойчивый фокус. Эти состояния часто называют стоками.



Устойчивый узел. В данном случае существует определенная иерархия сильно устойчивых локальных многообразий. Каждая траектория монотонно стремится к узлу O

Устойчивый узел.
Движение траекторий к узлу носит колебательный характер, то есть имеет место фокус

Устойчивый фокус

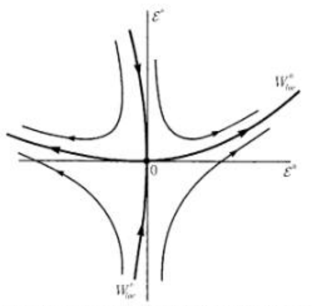
Инвариантные многообразия неустойчивого равновесия нелинейной системы.

Пусть n-мерная динамическая система класса гладкости $C^r, r \geq 1$ имеет грубое состояние равновесия О в начале координат и систему вблизи точки О можно представить в следующем виде: $\dot{x} = Ax + h(x)$, где $A \in R^{n*n}$ матрица с постоянными коэффициентами, спектр которой лежит в правой части комплексной плоскости (вне мнимой оси); $h: R^n \to R^n$ - гладкая $C^r, r \geq 1$ функция, такая, что выполняются соотношения: $h(0) = 0, h'_x(0) = 0$. В этом случае любая траектория, за исключением точки О, будет покидать ее окрестность при $t \to \infty$ и, соответственно, экспоненциально стремятся к точке О при $t \to -\infty$. Такое состояние называют неустойчивым топологическим узлом или источником.

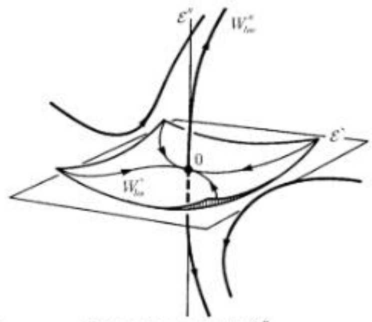
Если только часть характеристических значений линейной модели первого приближения лежит в правой части комплексной плоскости, то такие грубые состояния равновесия называются топологическими седлами или гиперболическими точками (*в некоторых источниках гиперболическими точками называют точки, в которых линейная модель имеет характеристические значения, не лежащие на мнимой оси*).

Пусть k характеристических показателей грубого состояния равновесия О лежат слева от мнимой оси, а (n-k) показателей – справа от нее, то есть $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, i = 1,2,...k$ и $\operatorname{Re}\lambda_j > 0, j = k+1,...n, k \neq 0, n$ Из теоремы Гробмана-Хартмана следует, что топологическое седло исходной нелинейной системы имеет локально устойчивое и локально неустойчивое многообразия W^s_{loc} и W^u_{loc} размерности k и (n-k), соответственно. Инвариантные множества W^s_{loc} и W^u_{loc} пересекаются только в одной точке – в состоянии равновесия О. Продолжая множества W^s_{loc} и W^u_{loc} вдоль траекторий за пределы окрестности седла, получаем глобальное устойчивое инвариантное многообразие W^s и глобальное неустойчивое инвариантное многообразие W^u. Следует отметить, что если локальные многообразия W^s_{loc} и W^u_{loc} достаточно хорошо определенные гладкие объекты, то о многообразиях W^s и W^u такой информации нет. Существование в аналитических системах аналитических инвариантных многообразий седла было доказано Пуанкаре и Ляпуновым только в рамках, так называемой, условной устойчивости. При помощи линейной невырожденной замены переменных нелинейная система вблизи состояния равновесия может быть приведена к следующему виду:
$\dot{u} = A^- u + f(u,v)$, $\dot{v} = A^+ v + g(u,v)$, где $u \in R^k$, $v \in R^{n-k}$, $spect(A^-) = \{\lambda_1,...,\lambda_k\}$, $spect(A^+) = \{\lambda_{k+1},...,\lambda_n\}$, $f, g \in C^r$, $f(0) = f'(0) = 0$, $g(0) = g'(0) = 0$.

Теорема (о локальных инвариантных многообразиях седловой точки). *Грубое седло О имеет C^r - гладкие многообразия W^s_{loc} и W^u_{loc}, задаваемые уравнениями: $W^s_{loc} : v = \psi(u)$, $W^u_{loc} : u = \varphi(v)$, где $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ и $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.*



Локальные устойчивое W^s_{loc} и неустойчивое W^u_{loc} многообразия седла на плоскости



Тот же случай, но в пространстве R^3

В полной аналогии с линейным случаем, можно выделить четыре основных вида седловых положений равновесия в нелинейной динамической системе в зависимости от их поведения в ведущих координатах: седло: узлы на W^s_{loc} и W^u_{loc}; седло-фокус (2,1): фокус на W^s_{loc} и узел на W^u_{loc}; седло-фокус (1,2): узел на W^s_{loc} и фокус на W^u_{loc}; седло-фокус (2,2): фокусы на W^s_{loc} и W^u_{loc}.

Теорема о центральном многообразии /Малинецкий, Потапов Нелин динамика и хаос с133/.
Пусть n-мерная динамическая система $\dot{x} = F(x), x \in R^n, F = (f_1, f_2,..., f_n)$ класса гладкости $C^r, r \geq 1$ имеет грубое состояние в точке начала координат. Выделим три подпространства собственных векторов матрицы $A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=0}$ линейной системы первого приближения:

- *E^s (устойчивое подпространство, stable) – подпространство собственных векторов, у которых $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, i = 1,2,...k$;*

- E^u *(неустойчивое подпространство, unstable) – подпространство собственных векторов, у которых* $\operatorname{Re}\lambda_i > 0, i = k+1,...n-m$*;*
- E^c *(центральное подпространство, center) – подпространство собственных векторов, у которых* $\operatorname{Re}\lambda_i = 0, i = (n-m)+1,...n$*.*

Тогда существуют устойчивое W^s_{loc}*, неустойчивое* W^u_{loc} *и центральное* W^c_{loc}*, локально инвариантные (относительно векторного поля* F *) многообразия, которые касаются в нуле соответственно* E^s, E^u *и* E^c*. Многообразия* W^s_{loc} *и* W^u_{loc} *единственны и имеют гладкость* $C^r, r \geq 1$*, в то время как* W^c_{loc} *имеет гладкость* C^{r-1} *и не обязательно единственно.*

Контрольные вопросы к лекции 13.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Могут ли состояния равновесия гладкой динамической системы в фазовом пространстве отображаться точками?	1. Нет. 2. Да. 3. Могут, но только в виде бесконечного счетного множества точек в некоторой ограниченной области фазового пространства.
2	Могут интегральные кривые гладких динамических систем пересекаться в фазовом пространстве?	1. Да 2. Нет. 3. Могут, но только в исключительном случае, когда приближаются к аттрактору в виде замкнутой периодической траектории.
3.	Скорость изменения фазового объема множества траекторий для линейной динамической системы $\dot{x} = Ax$ определяется…	1. … максимальной вещественной частью корней характеристического уравнения $\det\{\lambda E - A\} = 0$. 2. … среднеквадратичным корнем характеристического уравнения $\det\{\lambda E - A\} = 0$. 3. … следом матрицы $tr\{A\}$.
4	Грубое состояние равновесия x_0 гладкой автономной динамической системы $\dot{x} = F(x)$ характеризуется тем, что …	1. … точка x_0 является решением уравнения $F(x) = 0$. 2. … точке x_0 соответствует ненулевые корни характеристического уравнения $\det[\lambda E - (\frac{\partial F}{\partial x}\|_{x_0})] = 0$. 3. … матрица Якоби $(\frac{\partial F}{\partial x})$ не вырождена в точке x_0 и, вблизи точки x_0 нет других решений уравнения $F(x) = 0$.
5	В окрестности грубой точки равновесия x_0 гладкой динамической автономной динамической системы $\dot{x} = F(x)$ можно выделить следующие инвариантные многообразия …	1. … W^u - неустойчивое; W^s - устойчивое; W^c - центральное. 2. … W^u - неустойчивое; W^s - устойчивое. 3. … W^c - центральное, которое может гладко переходить в W^u или W^s при малом отклонении от точки x_0.

6	Точка равновесия типа «узел» содержит в своей окрестности следующие инвариантные многообразия …	1. … только W^c - центральное. 2. … только W^s - устойчивое. 3. … только W^u - неустойчивое. 4. … W^s и W^u - устойчивое и неустойчивое.
7	Теорема о центральном многообразии говорит о том, что по пространству собственных векторов матрицы Якоби линейной системы первого приближения можно сделать вывод, что исходная система $\dot{x} = F(x)$ содержит в окрестности грубой точки равновесия следующие многообразия …	1. … только устойчивое W^s многообразие. 2. … только устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия, а также единственное гладкое центральное многообразие W^c. 3. … устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия, а также негладкое неединственное центральное многообразие W^c.