Постановка задачи принятия решений при нескольких критериях

- В некоторых случаях предпочтения ЛПР удается описать с помощью единственного критерия и сравнение вариантов сводится к сравнению значения критерия, который может быть количественным или качественным. В большинстве случаев для описания предпочтений ЛПР недостаточно одного критерия.

Задача принятия решений при нескольких критериях выбора решения (или, по-другому, критериях оценки качества решения) является развитием задачи принятия решений при единственном критерии выбора, поэтому естественно ее математическую формулировку считать развитием формулировки задачи принятия решений при единственном критерии. По этой причине начнем формулировку задач принятия решений со случая единственного критерия.

Рассмотрим некоторую удобную с математической точки зрения первичную совокупность, содержащую в себе те решения, которые можно использовать при поиске наиболее предпочтительного. Такую первичную совокупность принято называть *пространством решений*. Отметим, что некоторые из элементов пространства решений (задаваемого неоднозначно) могут являться не реализуемыми по тем или иным причинам. Например, наборы товаров, покупаемых потребителем, удобно считать векторами многомерного линейного пространства. Очевидно, что потребитель может приобрести далеко не всякий набор товаров — какие-то наборы не удовлетворяют его бюджетным ограничениям, а отрицательные покупки вообще не имеют смысла в случае потребителя. Кроме того, некоторые товары могут быть недоступными определенным потребителям.

Обозначим пространство решений через W. Те решения, которые могут быть использованы при поиске наиболее предпочтительного решения, образуют подмножество X пространства решений W. Такое множество $X \subseteq W$ называется *множеством допустимых решений*. Множество X задается либо перечислением допустимых решений (это возможно только в случае их конечного числа), либо некоторым набором ограничений, позволяющим выделить бесконечную совокупность допустимых решений.

Пусть задана числовая функция f, значения которой описывают уровень предпочтительности решений. В этом случае естественно считать, что целью является увеличение значения функции f, которую принято называть *критерием оптимизации*. Подчеркнем, что функция f представляет собой единственный критерий выбора решения, а выбор решения трактуется как поиск некоторого элемента из X, доставляющего максимум f. Таким образом, мы приходим к задаче однокритериальной (скалярной) оптимизации

$$f(x) \to \max, \quad x \in X. \qquad ([redacted])$$

Определение [redacted]. *Элемент $x^* \in X$ называется решением скалярной задачи оптимизации (3.1), если $f(x^*) \geqslant f(x)$ для всех $x \in X$.*

Отметим, что при некоторых простых предположениях в задаче скалярной оптимизации такое решение существует (например, достаточно потребовать непрерывность функции f и компактность X). Если решение не единственно, т.е. несколько решений совпадают по значению критерия f, то можно выбрать любое из них. Численные методы обычно находят какое-то одно решение задачи оптимизации, которое и предлагается использовать.

Итак, если выбор решения лицом, принимающим решение (в исследовании операций его также называют оперирующей стороной), можно описать как стремление к увеличению (или уменьшению) некоторой заданной функции (единственного критерия выбора решения), то проблема выбора наилучшего способа действия сводится к задаче скалярной оптимизации, т.е. к математической задаче поиска допустимого решения, доставляющего критерию максимальное (минимальное) значение. Если же критериев оценки решения несколько, то приходим к *задаче принятия решений при нескольких критериях*.

Если в задаче однокритериальной оптимизации решение x` Более предпочтительно, чем решение x`` в том и только том случае, когда

$$f(x') > f(x''),$$

то в многокритериальных случаях ситуация иная – информации о предпочтениях недостаточно, чтобы понять, как ухудшение значения одного критерия может быть компенсировано улучшением значения другого. Отсутствие такой информации – характерная черта многокритериальных задач принятия решений, а выявление такой информации весьма трудоемкий и не всегда реализуемый процесс.

Поэтому в многокритериальных задачах используют такую формализацию понятия предпочтительности, как предпочтительность по Парето и Слейтеру.

Напомним:

Если предпочтения описываются n критериями $K_1, \dots, K_n$, значение $x_i = K_i(g)$ называется *оценкой* варианта (решения) a по критерию K_i, а вектор $x = (x_1, \dots x_n)$, составленный из оценок варианта (решения) a по каждому из критериев K_i, называется *векторной оценкой* a.

Отношение Парето P^0 определяется следующим образом: вариант a с векторной оценкой $x = (x_1, \dots, x_n)$ предпочтительнее варианта b с векторной оценкой $y = (y_1, \dots, y_n)$ по отношению Парето, если оценки варианта a по всем критериям не хуже оценок варианта b, и хотя бы по одному критерию лучше:

$$aP^0b \Leftrightarrow (x_i \geq y_i, \forall i = 1, \dots, n \text{ и } \exists j\colon x_j > y_j, j \in \{1, \dots, n\}).$$

Комментировать: информация, полученная от ЛПР дает возможность «расширить» отношение *Парето* P^0

Мы уже говорили о принципах оптимальности в ЗПР. Напомним, что набор правил или алгоритм, позволяющий находить подмножество $S^* \subseteq S$ наилучших вариантов решений, называется *принципом оптимальности*. Математически принцип оптимальности задается как отображение χ: $S^* = \chi(D)$, где D – математическая модель проблемной ситуации

$D =< S, G, \Lambda, \psi, p, \vartheta >$,

включающая элементы $S, G, \Lambda, \psi, p, \vartheta$. Принцип оптимальности формализует понятие «лучший вариант». Итак, в однокритериальной задаче в условиях определенности наилучшей является стратегия, максимизирующая (или же, наоборот, минимизирующая) этот критерий.

Принцип оптимальности, основанный на максимизации значения критерия, выражается формулой

$S^* = \{s \in S \mid K(s) = K^*\}$,

где $K^* = max\ K(s)$ по всем $s \in S$.

Соответственно формулируется принцип оптимальности, основанный на минимизации значения критерия.

Здесь отметить специфику подхода к построению принципа оптимальности в ЗПР от классических задач оптимизации в системном анализе.

Если варианты (решения) из S оцениваются по n числовым критериям: $K_1, K_2, \dots, K_n$, которые для определенности максимизируются, то для таких постановок применяется следующий формальный принцип оптимальности:

а) оптимальность по Парето: вариант $s \in S$ включается в множество S^*, если не существует варианта $t \in S$, такого, что $K_i(t) \geq K_i(s)$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $K_j(t) > K_j(s)$ для некоторого $j, 1 \leq j \leq n$;

Обоснование и условия существования парето-оптимальных решений будут рассматриваться в следующих курсах.

Известны, в частности, следующие формальные принципы оптимальности:

б) оптимальность по Слейтору: вариант $s \in S$ включается в множество S^*, если не существует варианта $t \in S$, такого, и $K_j(t) > K_j(s)$ для всех $i = 1, \dots, n$.

в) лексикографический принцип оптимальности: вариант $s \in S$ включается в множество S^*, если для некоторого $i = 1, \dots, n$ значение критерия K_i для варианта s больше значений критерия K_i для всех прочих вариантов $t \in S$ и при этом для всех критериев с номерами $j = 1, \dots, i-1$ выполняется $K_j(s) \geq K_j(t)$ для всех прочих вариантов $t \in S$.

Принципы оптимальности формируются с учетом дополнительной информации о критериях.

Если принцип оптимальности по Парето принимается, как правило, безусловно, то выбор остальных принципов оптимальности требует формального обоснования.

Надо отдавать себе отчет, что понятие критериальной задачи выбора решения является абстракцией, поскольку в реальности конкретное решение содержит значительно больше информации, чем соответствующая точка в пространстве критериев, так что выбор критериальной точки может быть только началом процесса поиска наиболее подходящего решения среди тех решений, которые связаны с этой критериальной точкой. Все же эта абстракция очень удобна и полезна, поскольку достаточно рассмотреть задачу выбора наиболее предпочтительных точек $y = \varphi(x)$ критериального пространства W', "забыв" временно о самих решениях $x \in W$. Обычно такая задача оказывается значительно проще, поскольку решение может характеризоваться тысячами параметров, а число критериев, с которыми эффективно может работать человек, не должно, как уже говорилось, слишком превышать семи.

Конечно, такой выбор может осуществляться не среди всевозможных точек y пространства W', а лишь среди тех, которые могут быть реализованы с помощью допустимых решений x, т.е. $x \in X$. Поэтому в критериальных задачах выбора решений важнейшую роль играет множество тех критериальных точек, которые могут быть получены с использованием решений x из множества X.

Существует два совершенно разных подхода к построению (введению) принципов оптимальности и соответственно к методам решения ЗПР. Методы решения задач принятия решений принято разделять на *эвристические* и *аксиоматические*. *Эвристические* методы не имеют какого-либо строгого обоснования, но наглядны. Они предъявляют достаточно высокие требования к ЛПР и эксперту, которые должны высказывать суждения о важности и весе критериев, определять ценность вариантов, выбирать принцип оптимальности. Эти методы могут привести к некорректным результатам. В отличие от эвристических, *аксиоматические* методы основываются на четко сформулированных допущениях, справедливость которых устанавливается на основе информации, полученной от ЛПР, а выводы, полученные в результате решения задачи являются логическим следствием этих допущений.

Аксиоматические методы построения функции ценности – это формальные методы, основанные на том, что формулируются специальные предположения (аксиомы) о свойствах предпочтения, выполнение которых гарантирует существование функции ценности конкретного вида.

В терминах классификации, приведенной во введении, мы рассматриваем задачу принятия решений в условиях определенности.

Опишем известные эвристические методы.

Метод главного критерия сводится к оптимизации по одному выбранному критерию K_t, который объявляется главным (его значения и определяют функцию ценности), при условии, что остальные критерии не больше (или, исходя из смысла поставленной задачи, не меньше) приемлемых значений b_i, то есть к задаче:

найти $\arg\max K_t(a) = a^*$ при $K_i(a) \geq b_i, i \in \{1, \ldots, n\}, \ i \neq t.$

Метод обобщенного критерия заключается в сведении многокритериальной задачи к однокритериальной. Набор критериев “сворачивается” в числовую функцию, которая и будет являться функцией ценности. Рассматривают различные виды свёрток:

1) аддитивная свёртка: $f(x) = \alpha_1 K_1(x) + \ldots + \alpha_n K_n(x)$; - принцип равномерной оптимальности;
2) мультипликативная свертка: $f(x) = K_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot K_n^{\alpha_n}(x)$; -принцип справедливого компромисса;
3) приведенная свертка: $f(x) = \min(K_1(x)/\alpha_1, \ldots, K_n(x)/\alpha_n)$

(или $f(x) = \max(K_1(x)/\alpha_1, \ldots, K_n(x)/\alpha_n)$).

Примером мультипликативной свертки является функция Кобба - Дугласа – зависимость объема производства Q от создающих его факторов производства – затрат труда L и капитала K. Общий вид функции $Q = \mathrm{A} L^{\alpha} K^{\beta}$, где α и β - коэффициенты эластичности $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - \alpha$, A – константа, характеризующая уровень технологической производительности.

важности.

Методу обобщенного критерия родственно **целевое программирование,** предложенное Чарнсом и Купером. Основу целевого программирования также составляет сведение всех критериев в один минимизируемый обобщенный критерий, имеющий смысл расстояния d от рассматриваемой векторной оценки x до некоторой недостижимой, «идеальной» точки $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m)$. В роли $\hat{x}_i$ могут выступать, например, максимальные значения критериев — числа $\max\limits_{u \in M} K_i(u)$, некоторые «перспективные» уровни и т. п. Наиболее широко применяются следующие формулы:

$$d_{\Pi}(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, | x_i - y_i | ; \quad d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2};$$

$$\bar{d}(x, y) = \max_{i \in M} \alpha_i \, | x_i - y_i | .$$

При использовании целевого программирования оптимальной считается стратегия u^*, для которой векторная оценка $K(u^*)$ лежит ближе всего в смысле выбранного расстояния к идеальной точке $\hat{x}$, так что отыскание оптимальной стратегии сводится к решению задачи:

$$\text{найти } \min_{u \in U} d(\hat{x}, K(u)). \qquad (2.33)$$

Формальные аксиоматические теории.

Аксиоматическая теория содержит: Алфавит, Формулы, Аксиомы , Правила вывода

Теоремы – формулы, полученные с помощью аксиом и правил вывода $r_1, \ldots, r_n$

Обозначение $\vdash A$ - в данной теории формула A выводима

выделено некоторое множество формул, называемых аксиомами теории T;

имеется конечное множество $R_1, \ldots, R_m$ отношений между формулами, называемых *правилами вывода*.

Если формула A и формулы $A_1, \ldots, A_l$ находятся в некотором отношении R_i, то A называется *непосредственным следствием* из формул $A_1, \ldots, A_l$, полученным по правилу R_i.

Выводом в теории T называется всякая последовательность $A_1, \ldots, A_n$ формул такая, что для любого i формула A_i есть либо аксиома теории T, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул.

Формула A называется *теоремой* теории T, если в ней существует вывод, в котором последней формулой является A. Этот вывод называется выводом формулы A. Иными словами, теоремы аксиоматической теории — это формулы, которые могут быть выведены по определенным правилам.

Формула A называется *следствием множества формул* Γ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность формул $A_1, \ldots, A_n$, что A_n есть A, и для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, A_i есть либо аксиома, либо формула из Γ, либо непосредственное следствие некоторых предыдущих формул. Эта последовательность называется выводом A из Γ. Элементы Γ называются *посылками* вывода или *гипотезами*. Сокращенно можно записать $\Gamma \vdash A$ (т. е. A есть следствие Γ). Если множество Γ состоит из формул $B_1, \ldots, B_k$, то пишут $B_1, \ldots, B_k \vdash A$. Если Γ — пустое множество, то $\Gamma \vdash A$ тогда и только тогда, когда A есть теорема. В этом случае принято писать $\vdash A$.

Теории первого порядка. Логические и собственные аксиомы. Модели.

Исчисление высказываний. Алфавит: • ⊃, ¬ -- логические операции (полная система) • $X1, \dots, Xn$ -- переменные •), (Определение формулы, как и ранее с учетом только двух операций.

Аксиомы: I. $A \supset (B \supset A)$

II. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)$

) III. $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$

Правило вывода. Modus ponens (m.p.) - правило замещения: A, $A \supset B /\ B$.

Пример

Теорема. Формула $A \supset A$ выводима в ИВ: $\vdash (\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$, т.е. является теоремой. Выведем из аксиом I-III и правила modus ponens $(A \supset A)$: Положим в аксиоме I B = $A \supset A$, а в аксиоме II - B = $A \supset A$, C = A II: $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$ I: $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ По первой и второй аксиомам и правилу modus ponens, выводим $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$ Полагая в аксиоме I $B = A$, $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$ I: $A \supset (A \supset A)$ по правилу modus poinens получаем $(A \supset A$

Требования к аксиоматическим теориям: 1) Непротиворечивость – нельзя одновременно вывести формулу и её отрицание, то есть А и$\neg A$.

2) Минимальность (независимость аксиом) – минимальность набора аксиом. Не должно содержаться аксиом, которые можно вывести с помощью правил вывода и других аксиом.

3) Полнота – для любой формулы выводима либо она, либо её отрицание, то есть выводима А либо $\neg A$.

В исчислении высказываний выполняются эти свойства: •

Модель (Интерпретация). Логика высказываний.

В аксиомах I-III при подстановке вместо A и B любых формул получаем общезначимые выражения.

Если A -- тождественно истинна и $A \supset B$ -- тождественно истинна, то B – тоже тождественно истинна.

Любая выводимая формула исчисления высказываний тождественно истина и любая тождественно истинная формула выводима.

Исчисление предикатов

Алфавит: • $x1, \dots, xn$ -- предметные переменные • $Aj\ (i)$ -- предикатные символы • ¬, ⊃ • ∀, ∃ -- кванторы всеобщности и существования •),

Формулы….

Аксиомы: I. $A \supset (B \supset A)$

II. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

III. $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$

IV. $(\forall x)\ A(x) \supset A(y)$

V. $A(y) \supset (\exists x)\ A(x)$

Правила вывода:

1) modus ponens

$A, A \supset B / B$

2) $B \supset A(x) / B \supset (\forall x) A(x)$, где B не зависит от x.

3) $A(x) \supset B / (\exists x) A(x) \supset B$, где B не зависит от x.

4) Замена связных переменных в области действия квантора.

Для исчисления предикатов также выполняются свойства Непротиворечивость, Полнота, Независимость аксиом.

Формулы I-V тождественно истинны (общезначимы) при любых A, B, C.

По правилам вывода 1-4 из общезначимых формул выводимы общезначимые формулы.

Примеры теорий первого порядка.

Теория частичного упорядочения. (Добавляется, например, Аксиома транзитивности).

Теория групп. (Например, существование нулевого и обратного элемента).

С другой стороны. В свое время Гильберт, великий математик, провозгласил цель аксиоматизировать всю математику. Гёдель: программа Гилберта не может быть реализована: при любом выборе аксиом арифметики существуют теоремы, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть финитными средствами.

Аксиоматический подход

В данном случае аксиомы - те утверждения ТПР, которые безоговорочно принимаются как истинные (например, сравнимость по Парето); правила вывода – естественные логические выводы и, например, свойство транзитивности отношения предпочтения: из $a\rho b$ и $b\rho c$ следует $a\rho c$.

Для правил группового выбора, например, аксиома – отсутствие диктатора.