ПЗ – 8. Исследование сходимости степенных рядов. Свойства степенных рядов.

Определение. *Ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \text{ где } a_n,\ z,\ a \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

называется степенным рядом; a_n — коэффициенты степенного ряда (они не зависят от z), a — фиксированная точка на комплексной плоскости.

Теорема. *Каждый степенной ряд сходится абсолютно внутри некоторого круга $|z-a| \leqslant R$, где радиус круга $R \geqslant 0$ определяется по формуле Коши—Адамара*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & \text{если } 0 < l = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty, \\ 0, & \text{если } l = +\infty, \\ +\infty, & \text{если } l = 0, \end{cases}$$

или по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2}$$

если этот предел существует хотя бы в несобственном смысле.

Вне круга $|z-a| \leqslant R$ ряд (1) не сходится ни в одной точке $z \in \mathbb{C}$. Вопрос сходимости ряда (1) в точках окружности $|z-a| = R$, $R > 0$, остается открытым и решается отдельно для каждого ряда.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

2527 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} : \frac{|x|^n}{n \cdot 2^n} =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} < 1, \rightsquigarrow$$

$$|x| < 2$$

$\exists\ x = 2 \ ,\rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – рас-ся.

$\exists\ x = -2 \ ,\rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – усл-но сх-ся.

$$x \in [-2, 2)$$

#

2541.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{(n+1)!}|}{|x^{n!}|} = \lim_{n\to\infty} |x^{n+1}| < 1, \rightsquigarrow$$

$$|x| < 1$$

2529.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n |x|^{2n+1}}{(4n+1)^2} : \frac{2^{n-1} |x|^{2n-1}}{(4n-3)^2} =$$

$$= x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(4n-3)}{(4n+1)} < 1.$$

$$x^2 < \frac{1}{2} \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$] \; x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^{n-\frac{1}{2}} (4n-3)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^2}$$

сходится

$] \; x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ — аналогично

$$|x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2546. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{n+1}}{(n+1)\,5^{n+1}} \cdot \frac{|x-3|^n}{n \cdot 5^n} =$$

$$= |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5(n+1)} < 1, \rightsquigarrow$$

$$|x-3| < 5$$

$$-2 < x < 8$$

$\exists\ x = 8, \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – рас-ся.

$\exists\ x = -2, \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – усл-но сх-ся $\Rightarrow$

$$x \in [-2; 8)$$

$\#$

2550. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n |x+3|^n} = |x+3| \lim_{n\to\infty} n < 1, \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow |x+3| < 0 \quad -?$$

$\exists\ x = -3, \rightsquigarrow$ сх-ся.

$(\cdot)\ x = -3$ – сх-ся.

$\#$

2558. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x+2|^{n^2}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|^n}{n} < 1$$

$$|x+2| < 1$$
$$-3 < x < -1$$

] $x = -1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ — сх-ся.

] $x = -3$ — аналогично

$$x \in [-3; -1]$$

2812. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)^p} : \frac{|x^n|}{n^p} = |x| \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p < 1$$

$$|x| < 1$$

] $x = 1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ — сх-ся при $p > 1$

] $x = -1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ $p > 1$ - абсол. сх-ся

$0 < p \leq 1$ - усл-но сх-ся.

$p > 1$ $x \in [-1, 1]$

$0 < p \leq 1$ $x \in [-1, 1)$

$p \leq 0$ $x \in (-1, 1)$

2813. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$

◀ По формуле Коши—Адамара имеем

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{9^k + 4^k}{2k}} = 3,$$

поэтому при $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$ ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение степеиного ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x = -\frac{4}{3}$. Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

сходится, так как равен сумме двух сходящихся рядов.

Пусть $x = -\frac{2}{3}$. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n (-1)^n$$

расходится, т.к. равен сумме расходящегося и сходященося рядов. Следовательно, в точке $x = -\frac{4}{3}$ степенной ряд сходится лишь условно, в точке $x = -\frac{2}{3}$ — расходится. ▶

По Даламберу: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{(n+1)} |x+1|^{n+1} : \frac{3^n + (-2)^n}{n} |x+1|^n =$$

$$= |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{3 + (-2)\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \cdot \frac{n}{n+1} < 1$$

$|x+1| < \frac{1}{3}$ $\qquad R = \frac{1}{3}$

2814. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

◀ По формуле (2), п.5.1, находим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2n+2)!}{(2n)!((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$

поэтому при $|x| < 4$ ряд сходится абсолютно.

При $x = 4$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Поскольку $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}$ то $a_n < a_{n+1}$. Это означает, что последовательность (a_n) монотонно возрастает. Следовательно, общий член ряда к нулю не стремится, т.е. ряд расходится. По этой же причине он расходится и в точке $x = -4$. ▶

2816. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

◀ По формуле Коши—Адамара находим радиус сходимости ряда:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Следовательно, при $|x| < \frac{1}{e}$ ряд сходится абсолютно. При $x = \frac{1}{e}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$. Покажем, что общий член этого ряда к нулю не стремится. Действительно, имеем

$$a_n = \exp\left\{-n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = \exp\left\{-n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\} \to e^{-\frac{1}{2}},\ n \to \infty.$$

Таким образом, в точке $x = \frac{1}{e}$ степенной ряд расходится. По той же причине он расходится и в точке $x = -\frac{1}{e}$. ▶

2817. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a > 1$.

◀ Находим радиус сходимости ряда по формуле (2), п.5.1. Имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

следовательно, данный степенной ряд сходится по всей числовой прямой. ▶

2818. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

◀ По формуле (2), п.5.1, находим

$$R=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{(2n-1)!!(2n+2)!!}{(2n)!!(2n+1)!!}\right)^n=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p=2.$$

Следовательно, при $-1<x<3$ ряд сходится абсолютно.

При исследовании характера сходимости ряда в точках $x=-1$ и $x=3$ пользуемся соответственно признаком Гаусса. Имеем (разложение в ряд)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n\to\infty,\quad \text{где } a_n=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p.$$

1) При $x=3$ ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p$$

$\lambda=1$, $\mu=\frac{p}{2}>1$, при $p>2$ – сходится абсолютно [см. № 2598]

2) При $x=3$ ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p(-1)^n$$

[см. № 2694]

Используем утверждение №2674:

2674. Доказать, что знакочередующийся ряд
$b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots+(-1)^{n-1}b_n+\ldots\quad(b_n>0)$
сходится, если

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad \text{при } p>0$$

Отсюда, учитывая упомянутые признаки, заключаем, что в точке $x=-1$ ряд сходится при $p>0$, а при $p>2$ он сходится абсолютно. Следовательно, в точке $x=-1$ он сходится условно при $0<p\leqslant2$. В точке $x=3$ ряд сходится абсолютно при $p>2$ и расходится при $p\leqslant2$. ▶

расходится при $p\leqslant2$. ▶

Задачи для самостоятельного решения

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

2828. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n.$$

2833. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$$

2834. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2^n}.$$

2836. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}.$$

Литература

Демидович Б.П.

Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.