ПЗ – 6/7. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов. II

1. Почленный предельный переход в рядах и функциональных последовательностях.

Если функциональный ряд (1), п.4.1, сходится равномерно в некоторой окрестности точки x_0 и если $\lim\limits_{x\to x_0} u_k(x) = c_k$, $k \in \mathbb{N}$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, причем

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k.$$

Если последовательность функций (f_n), $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится в окрестности точки x_0 и $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$, то последовательность чисел (A_n), $n \in \mathbb{N}$, также сходится и

$$\lim_{x\to x_0} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right).$$

2. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда.

Если последовательность интегрируемых функций (f_n), $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, то $\forall x_0 \in [a, b]$:

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\, dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \forall x \in [a, b],\ n \to \infty.$$

Если ряд (1), п.4.1, члены которого интегрируемы на $[a, b]$, сходится равномерно на $[a, b]$, то справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\, dt,$$

т.е. ряд (1), п.4.1, можно почленно интегрировать на отрезке $[x_0, x] \subset [a, b]$.

3. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда.

Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций (f_n), $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а последовательность (f'_n), $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно к функции $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, то функция f также дифференцируема на $[a, b]$ и $f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$, т.е. допустим предельный переход под знаком производной.

Если ряд (1), п.4.1, с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на $[a, b]$, а ряд производных

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

сходится равномерно на $[a, b]$, то сумма ряда (1), п.4.1, дифференцируема на $[a, b]$, причем на этом отрезке выполняется равенство

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x),$$

т.е. ряд (1), п.4.1, можно почленно дифференцировать.

2576. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Область сходимости:

по Даламберу:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{n+1} : \frac{|x|}{n} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} < 1$, $\sim$

$|x| < 1$, $-1 < x < 1$

$\exists\ x = 1$, $\sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится

$\exists\ x = -1$, $\sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — сходится условно.

$x \in [-1, 1)$

$S' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

$S = \int\limits_0^x \frac{1}{1-z} dz = -\ln|1-z|\Big|_0^x = -\ln|1-x|$

2577. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

Область сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{n+1} : \frac{|x|^n}{n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} < 1$$

$$|x| < 1, \Rightarrow -1 < x < 1$$

$\exists\ x = 1, \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ – условно сх-ся

$\exists\ x = -1, \Rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

$$x \in (-1; 1]$$

$$S = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln|1+x|$$

#

2578.

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\dots$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$S'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+\dots$$

Область сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}:\frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}=$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}<1, \rightsquigarrow \quad x^2<1$$

$$-1\leq x<1 \quad ;$$

$\exists\ x=1, \rightsquigarrow \quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\dots$ — рас-ся

$\exists\ x=-1, \rightsquigarrow \quad -1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\dots-\frac{1}{2n-1}-\dots$ — расх-ся

$$x\in(-1;1)$$

$$S'=1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+\dots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$S=\int_0^x\frac{1}{1-\tau^2}d\tau=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad , \quad |x|<1$$

#

2579.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Область сходимости (см. 2578.) $|x| < 1$.

$\exists\, x = 1, \rightsquigarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ – условно сх-ся

$\exists\, x = -1, \rightsquigarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(2n-1)+(n-1)}}{2n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} =$

$= -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ – сходится условно.

$x \in [-1; 1]$.

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} =$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n} + \ldots$$

$$S = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctg} x, \quad |x| \le 1$$

#

2780. $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Область сх-ти:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|x^n|}{n\,|x^{n-1}|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}<1$$

$$|x|<1$$

$\exists\ x=1,\ \to\ 1+2+3+\ldots+n=\sum_{n=1}^{\infty} n$ — рас-ся.

$\exists\ x=-1,$ расх-ся: $1-2+3-\ldots+(-1)^{n-1}n+\ldots$

$$\int_0^x S\,d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n\tau^{n-1}\,d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=$$

$$=x+x^2+x^3+\ldots=\frac{x}{1-x}$$

$$S=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1.$$

2581. $1-3x^2+5x^4-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\ldots$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$$

Область сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\,|x^{2n}|}{(2n-1)\,|x^{2n-2}|}=|x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}<1,\ \Rightarrow$$

$$|x|<1,$$

$\exists\ x=1,\quad 1-3+5-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)$ – рас-ся.

$\exists\ x=-1,\quad$ аналогично – рас-ся.

$$|x|<1.$$

$$\int_0^x S\,d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x(2n-1)\tau^{2n-2}\,d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}=$$

$$=x-x^3+x^5-\ldots+(-1)\,x^{2n-1}+\ldots=\frac{x}{1+x^2}$$

$$S=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

2582. $1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1} + \ldots$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$$

Область сходимости $|x| < 1$,

$\exists\, x = 1$, $\rightsquigarrow$ $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n+1)n + \ldots$ рас-ся.

$\exists\, x = -1$, аналогично — рас-ся.

$$S_1 = \int_0^x S\,d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\int_0^x \tau^{n-1}\,d\tau = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$S_2 = \int_0^x S_1\,d\tau = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\int_0^x \tau^n\,d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} =$$

$$= x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n+1} + \ldots =$$

$$= \frac{x^2}{1-x}$$

$$S = (S_2)'' = \left(\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}\right)' = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(2-2x)(1-x)^2 + (2x-x^2)\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(2-2x)(1-x)+2(2x-x^2)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}\ \#$$

2583 $\quad \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ldots+\frac{n}{x^n}+\ldots$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$$

Область сх-ти:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{x^{n+1}}\right|:\frac{n}{|x^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x|}\cdot\frac{n+1}{n}<1,\leadsto$$

$$\frac{1}{|x|}<1,\leadsto \qquad |x|>1$$

$\exists\, x=1, \leadsto\ 1+2+3+\ldots+n+\ldots$ — рас-ся.

$\exists\, x=-1, \leadsto\ -1+2-3+\ldots+(-1)^{n+1}n+\ldots$

рас-ся.

$$\frac{1}{x}S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^{n+1}}=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\ldots$$

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{\tau}S\right)d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\frac{n}{\tau^{n+1}}d\tau=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_0^n}}_{C}=$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\ldots+C=$$

$$=\frac{-1/x}{1-1/x}+C=\frac{1}{1-x}+C$$

$$\frac{1}{x}S=\left(\frac{1}{1-x}+C\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\leadsto$$

$$S=\frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x|>1$$

#

2584. $x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots \quad = S$

Область сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{4n+1}|}{4n+1} : \frac{|x^{4n-3}|}{4n-3} =$$

$$= |x|^4 \lim_{n\to\infty} \frac{(4n-3)}{(4n+1)} < 1, \to \quad |x| < 1.$$

$\exists\, x = 1, \rightsquigarrow \quad 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \ldots$ — рас-ся.

$\exists\, x = -1, \rightsquigarrow \quad -1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{4n-3} - \ldots$ — рас-ся

$$S' = 1 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{2(2n-1)} + \ldots = \frac{1}{1-x^4}$$

$$S = \int_0^x \frac{1}{1-\tau^4}\, d\tau =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-\tau^4} = \frac{1}{(1-\tau)(1+\tau)(1+\tau^2)} = \frac{A}{1-\tau} + \frac{B}{1+\tau} + \frac{C\tau + D}{1+\tau^2} \\ A(1+\tau)(1+\tau^2) + B(1-\tau)(1+\tau^2) + (C\tau + D)(1-\tau^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau^3: & A - B - C = 0 \\ \tau^2: & A + B - D = 0 \\ \tau: & A - B + C = 0 \\ \tau^0: & A + B + D = 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} A - B = 0 \\ A + B = \frac{1}{2} \end{array} \right. \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{4} \\ B = +\frac{1}{4} \\ C = 0 \\ D = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^x \frac{d\tau}{1-\tau} + \frac{1}{4}\int_0^x \frac{d\tau}{1+\tau} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \quad \#$$

2585. $1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^{n-1}}+\ldots=$

$\left(\frac{1}{5}\cdot x^5\right)'=x^4$, или $\left(\frac{1}{9}\,\frac{1}{x^5}\right)'=-\frac{1}{x^6}$

$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}\sim\frac{1}{3^2}=\frac{1}{x^5}\sim\frac{1\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^4\cdot\sqrt{3}}$

$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}\sim\frac{1}{3^3}=\frac{1}{x^7}\sim\frac{1\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^6\cdot\sqrt{3}}$

см. 2579

$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}}+\frac{1}{5(\sqrt{3})^5}-\frac{1}{7(\sqrt{3})^7}+\ldots\right)$

$\exists\, x=\frac{1}{\sqrt{3}} \sim S=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

$S'=1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\frac{1}{1+x^2}$

$S=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x,\sim$

$=\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ #

2586

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{2n-1}{2^n}+\dots =$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6+\dots+(2n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\dots$$

$$\exists\, x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= x^2\left(1+3x^2+5x^4+\dots+(2n-1)x^{2n-2}+\dots\right) =$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$$

$$\int S\,dx = x+x^3+5x^5+\dots+x^{2n-1}+\dots =$$

$$=\frac{x}{1-x^2}$$

$$= x^2\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)' = x^2\,\frac{(1-x^2)+x\cdot 2x}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2\,(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}=3$$

Задачи для самостоятельного решения

Применяя почленное дифференцирование, вычисл суммы следующих рядов:

2908. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

2912. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$

Литература

Демидович Б.П.
Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.