

Раздел: «ОТАУ бакалавры. Часть 2.»

Лекция 15. Глобальные и локальные бифуркации. Локальные бифуркации одномерных непрерывных и дискретных систем. Понятие хаоса.

Бифуркации равновесных решений систем. Глобальные и локальные бифуркации. Локальные бифуркации в одномерных непрерывных динамических системах. Бифуркации одномерных дискретных динамических систем. Периодические решения дискретных систем. Понятие хаоса. Показатель Ляпунова хаотической траектории дискретной системы.

Бифуркации равновесных решений систем.

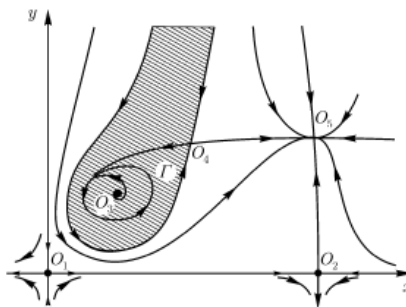
Любая динамическая система $\dot{x} = F(x, \mu), x \in R^n, \mu \in R^k, F \in C^r, r \geq 1$ характеризуется некоторой совокупностью параметров (например, настроек регулятора), которые могут изменяться в некотором ограниченном диапазоне. Обычно предполагается, что очень малое их изменение не должно приводить к качественному изменению процессов в системе, то есть система должна быть структурно устойчивой. Как уже отмечалось, структурная устойчивость системы характеризуется тем, что фазовые портреты системы при малом возмущении ее параметров должны быть топологически эквивалентными. Однако, если изменять параметры в большем диапазоне, то, может случиться, что, при каком-то значении вектора параметров, произойдет качественное изменение соответствующего фазового портрета. Такое качественное изменение называется бифуркацией системы /Гукенхеймер с154/.

Сразу заметим, что в фазовом пространстве точек бифуркации не бывает. Они связаны не с исследованием одной конкретной системы с фиксированными параметрами, а с исследованиями семейства динамических систем, точнее их решений $x = \varphi(t, \mu)$, зависящих от вектора исследуемых параметров $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$. Значения вектора μ , при которых происходят эти качественные изменения, и называются точками бифуркации.

Так как для гиперболических неподвижных точек (циклов) доказана их структурная устойчивость, то кандидатами на точки бифуркации становятся те значения вектора параметров μ , при которых точка (цикл) оказываются негиперболическими. То есть точка бифуркации характеризуется таким значением μ , при котором динамическая система является структурно неустойчивой /Малинецкий, Потапов Нелин динамика и хаос с129/.

Глобальные и локальные бифуркации.

Так как анализ бифуркаций связан с изучением векторного поля вблизи вырожденного положения равновесия или замкнутой орбиты, то эти бифуркации называются локальными. Термин «бифуркация» был впервые введен Пуанкаре для описания «расщепления» равновесных решений для семейства дифференциальных уравнений. Бифуркации системы, приводящие к общему изменению фазового портрета и которые нельзя вывести из локальной информации, в особенности те из них, которые характеризуются отсутствием трансверсальности между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями периодических орбит и равновесий, называются глобальными.

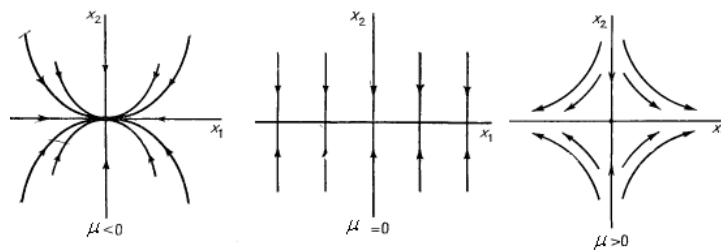


Однако, оказывается, что даже изучение локальных двухпараметрических ($k = 2$) бифуркаций требует понимания глобальных бифуркаций. Это связано с тем, что глобальные бифуркации могут возникать уже в двухпараметрических семействах. Если $\dot{x} = F(x, \mu), x \in R^n, \mu \in R^k, F \in C^r, r \geq 1$, то

равновесные решения этой системы совпадают с корнями уравнения $F(x, \mu) = 0$. Как следует из теоремы о неявной функции, при изменении параметра μ , эти положения равновесия описываются гладкими функциями $\mu(x)$ вне тех точек, в которых $\det \left\{ \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \right\} = 0$, или матрица Якоби $\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x}$ имеет нулевое собственное значение. График, каждой из этих функций $\mu(x)$, представляет собой некоторую ветвь положений равновесия системы $\dot{x} = F(x, \mu)$. В положении равновесия (x_0, μ_0) , в котором $\det \left\{ \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \right\} = 0$, могут сходиться несколько ветвей равновесий и такая точка называется точкой бифуркации. Бифуркационное множество динамической системы $\dot{x} = F(x, \mu)$ состоит из таких множеств точек в пространстве μ , для которых нарушается структурная устойчивость. При этом следует учитывать, что такие инвариантные множества не обязательно являются просто неподвижными точками или периодическими орбитами. Для типичных векторных полей множество особых точек образует некоторое многообразие в расширенном пространстве фазовых координат и изменяемых параметров.

Пример. Рассмотрим 1-но параметрическую систему следующего вида: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$. При значении $\mu < 0$ в

соответствующих системах имеется одно состояние равновесия $x = (0, 0)$, которое представляет собой устойчивый узел. При значении $\mu = \mu_0 = 0$, любая точка оси x_1 будет являться состоянием равновесия системы. При значении $\mu > 0$, системы вновь будут иметь одно состояние равновесия $x = (0, 0)$, которое теперь будет представлять собой седло. То есть, значение параметра $\mu_0 = 0$ представляет собой точку бифуркации.



Пример. Рассмотрим однопараметрическую систему первого порядка $\dot{x} = \mu x - x^3$. Единственной точкой бифуркации в расширенном пространстве является точка $(x, \mu) = (0, 0)$. Легко проверить, что единственная неподвижная точка $x = 0$, существующая при $\mu \leq 0$, устойчива. При значении $\mu > 0$ точка $x = 0$ становится неустойчивой, в то время как новые неподвижные точки $x = \pm\sqrt{\mu}$ будут устойчивыми.



Как известно, для типичного семейства векторных полей множество особых точек семейства образует гладкое подмножество в прямом произведении фазового пространства на пространство параметров. Проектирование построенного многообразия равновесий на пространство параметров является гладким отображением. Это позволяет провести классификацию критических точек типичных отображений, а, следовательно, и бифуркаций положений равновесия. Например, если параметр всего один, то типичная бифуркация, с точностью до определенного над осью параметра диффеоморфизма, такая же, как в семействе

с кривой равновесий $\mu = \pm x^2$ (то есть «рождение» или «смерть» пары равновесий). Если параметров два, то проектирование приводится к одной из нормальных форм: $\mu_1 = \pm x^2$ (складка) или $\mu_1 = x^3 \pm \mu_2 x$ (сборка Уитни).

Локальные бифуркации в одномерных непрерывных динамических системах.

В случае локальных бифуркаций используется техника нормальных форм, предложенная Пуанкаре. Основная идея такого подхода заключается в отыскании наиболее простой формы, к которой можно привести дифференциальное уравнение в окрестности положения равновесия. При этом активно используются ряды по степеням отклонения от этого положения. В соответствии с этим подходом можно дать следующее определение бифуркации.

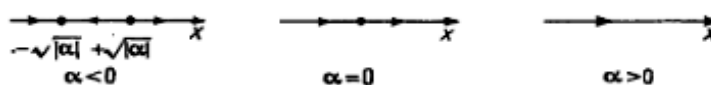
Определение. Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов динамической системы называется бифуркацией.

Таким образом, бифуркация – это изменение топологического типа системы, когда ее параметры проходят через некоторые бифуркационные (критические) значения. Для одномерной динамической системы $\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R, \alpha \in R$ важно изучить те случаи, когда при некотором значении параметра α_b устойчивость положений равновесия \bar{x} нельзя определить с помощью производной правой части, то есть когда $f_x(\bar{x}, \alpha_b) = 0$. Только, в этом случае, при малых изменениях величины параметра возможно появление топологически неэквивалентных фазовых портретов, так как топологическая эквивалентность устанавливается достаточно просто, когда $f_x(\bar{x}, \alpha_b) \neq 0$.

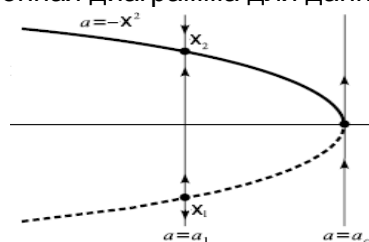
Определение. Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Бифуркации типа седло-узел или касательная бифуркация.

Рассмотрим 1-параметрическое дифференциальное уравнение: $\dot{x} = \alpha + x^2, x, \alpha \in R$. Фазовые портреты системы для разных значений α приведены на рисунке.

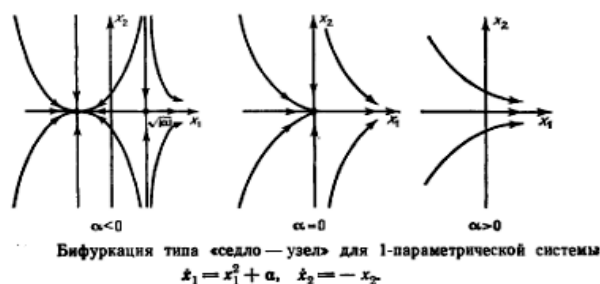


Когда параметр α возрастает, приближаясь к 0 слева ($\alpha \rightarrow -0$), устойчивое и неустойчивое положение равновесия приближаются друг к другу. При значении $\alpha = 0$ они сливаются, а при $\alpha > 0$ одновременно исчезают. Бифуркационная диаграмма для данной системы имеет следующий вид:



В общем, n-мерном случае, если для некоторого положения равновесия матрица имеет одно собственное значение равное нулю, бифуркация происходит аналогично: при изменении параметра положение равновесия либо исчезает, либо расщепляется на два новых положения равновесия.

На рисунке приведен пример бифуркации типа «седло-узел» для двумерного случая.



Теорема /Братусь с398/. Любое дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R, \alpha \in R$, имеющее положение равновесия при $\alpha = 0$, такое, что $f'_x(0,0) = 0; f''_{x,x}(0,0) \neq 0; f'_\alpha(0,0) \neq 0$, с помощью обратимых замен переменных x и параметра α , может быть приведено к виду: $\dot{y} = b + sy^2 + o(y^3)$, где $s = \text{sign}[f_{x,x}(0,0)]$. Кроме того, уравнение $\dot{y} = b + sy^2 + o(y^3)$ локально топологически эквивалентно в окрестности начала координат одной из следующих нормальных форм: $\dot{y} = b + sy^2$. Локальная бифуркация $\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R, \alpha \in R$, нормальная форма которой имеет вид $\dot{y} = b + sy^2$, называется бифуркацией седло-узел или касательной бифуркацией.

Следует отметить, что требование о том, что положение равновесия находится в начале координат и бифуркационное значение параметра равняется нулю, несущественны. Так как подходящей заменой переменных всегда можно добиться их выполнения.

Бифуркация типа вилки или бифуркация с потерей симметрии.

Если дифференциальные уравнения, описывающие систему, обладают некой симметрией, то эта симметрия будет оказывать и на процессы, происходящие при бифуркации.

Рассмотрим, например, 1-параметрическую систему следующего вида: $\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R, \mu \in R$, правая часть которой удовлетворяет соотношению $f(-x, \alpha) = -f(x, \alpha)$. То есть функция f является нечетной по переменной x .

Пример. Пусть $f(x, \alpha) = \alpha x - x^3$. Фазовые портреты системы при различных значениях α приведены на рисунке.

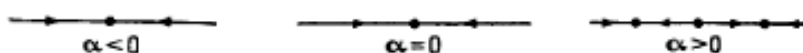
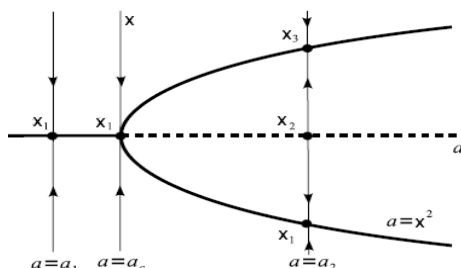


Диаграмма стационарных решений (называемая бифуркацией типа «вилки») в этом случае имеет следующий вид.



Дадим теперь формальное определение системы, обладающей симметрией. Если дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R, \alpha \in R$ симметрично по отношению к переменной x , то есть $f(-x, \alpha) = -f(x, \alpha)$. То для таких систем не выполняется условие $f''_{x,x}(0,0) \neq 0$, приведенной выше теоремы. Если, заменить это условие на условие $f^{(3)}_{x,x,x}(0,0) \neq 0$, то получим

нормальную форму $\dot{y} = by + sy^3; s = \text{sign}[f^3_{x,x,x}(0,0)]$. Соответствующая этой нормальной форме бифуркация называется бифуркацией типа вилки.

Пусть задана система следующего вида: $\dot{x} = F(x), x \in R^n$ и пусть $\varphi(t, x)$ его фазовый поток. Тогда, если существует диффеоморфизм $g : R^n \rightarrow R^n$ такой, что для $\forall x \in R^n$ имеет место соотношение

$$F(g(x)) = \frac{dg(x)}{dx} F(x),$$

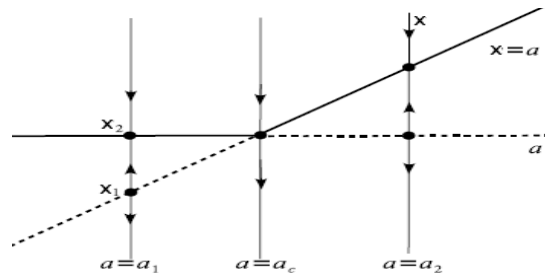
то говорят, что система $\dot{x} = F(x)$ инвариантна по отношению к g или g - инвариантна. Диффеоморфизм g называют симметрией системы $\dot{x} = F(x)$.

Рассмотрим теперь k - параметрическую систему следующего вида: $\dot{x} = F(x, \mu), x \in R^n, \mu \in R^k$ g - инвариантную для каждого μ . Для фазового потока $\varphi(t, x)$ с симметрией g имеет место соотношение:

$\varphi(t, g(x)) = g(\varphi(t, x))$. Таким образом, если $x = \varphi(t)$ есть траектория системы, то $g(x) = g(\varphi(t))$ также является траекторией. Решение, удовлетворяющее соотношению $g(\varphi(t)) = \varphi(t)$, называется g - симметричным решением. Если рассмотреть пример с бифуркацией типа «вилка», приведенный выше, то при возрастании параметра α в точке $\alpha = 0$ произойдет качественное изменение характера симметрии. Если, при $\alpha < 0$, устойчивое стационарное решение является g - симметричным, то при $\alpha > 0$ соответствующее устойчивое стационарное решение этим свойством не обладает. То есть в данном случае происходит потеря симметричности устойчивых решений при бифуркации.

Транскритическая бифуркация.

Рассмотрим динамическую систему $\dot{x} = \alpha x - x^2, x \in R, \alpha \in R$. В точке бифуркации $\alpha = \alpha_c$ происходит смена устойчивости.



Таким образом, если для дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x, \alpha), x \in R, \alpha \in R$, при всех значениях параметра выполняется условие $f(0, \alpha) = 0$, то второе из условий $f_{x,x}(0,0) \neq 0$, приведенной выше теоремы, не выполняется. Если, заменить это условие на условие $f_{\alpha,x}(0,0) \neq 0$, то возникает нормальная форма транскритической бифуркации

$$\dot{y} = by + sy^2; s = \text{sign}[f_{\alpha,x}(0,0)]$$

Бифуркации одномерных дискретных динамических систем.

Рассмотрим разностное уравнение вида $x(t+1) = f(x(t))$ с дискретно изменяющимся параметром t . Если $f \in C^0(X, X)$, где X - некоторое топологическое или метрическое пространство, то отображение $x \rightarrow f(x)$ порождает на X полугруппу непрерывных отображений $\{f^n\}_{n=0}^\infty$. Точка $x_0 \in X$ называется периодической периода m , если $f^m(x_0) = x_0$ и $f^i(x_0) \neq x_0$ при $0 < i < m$. Каждая из точек $x_i = f^i(x_0); i = 1, 2, \dots, m-1$ также является периодической периода m и точки x_0, x_1, \dots, x_{m-1} образуют периодическую траекторию или цикл периода m .

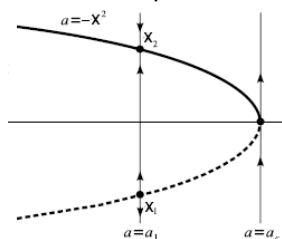
Для дискретных систем, как и для непрерывных, вводится понятие ω -предельного множества. Точка $\bar{x} \in X$ называется ω -предельной точкой траектории $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если для любого $\bar{n} > 0$ и любой окрестности U точки \bar{x} найдется $\bar{n} > \bar{n}$, для которого $f^{\bar{n}}(x) \in U$ (иначе говоря, существует последовательность $n_1 < n_2 < \dots \rightarrow \infty$ такая, что $f^{n_i}(x) \rightarrow \bar{x}$). Множество всех ω -предельных точек траектории, проходящей через точку x , обозначается $\omega(x)$. Если ω -предельное множество состоит из конечного числа точек, то эти точки образуют цикл. Если ω -предельное множество имеет мощность континуума, то оно может содержать или не содержать циклы /Шарковский с22/.

Пример. Рассмотрим на интервале $[0,1]$ отображение $x \rightarrow \lambda x(1-x)$. Это отображение, как и другие квадратичные отображения, например $x \rightarrow x^2 + \lambda$ или $x \rightarrow 1 - \lambda x^2$, наиболее широко используются в приложениях. Можно заметить, что при одних значениях параметра λ траектории асимптотически периодические, в то время, как при других значениях, трудно сказать, как ведут себя траектории. Так при $\lambda = 2$ и $n \rightarrow \infty$ $\{f^n(x)\}$ стремится к неподвижной точке $x = 0.5$, а при $\lambda = 3.2$ к циклу периода 2, образованного точками, равными примерно 0.5 и 0.8. Таким образом, одномерные динамические системы в определенном смысле могут быть такими же сложными, как и динамические системы в произвольных локально компактных пространствах.

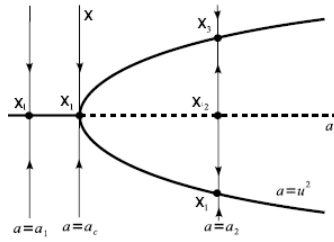
Для анализа локальных бифуркаций одномерных дискретных систем, зависящих от вещественного параметра, используются те же идеи, что и при анализе локальных бифуркаций непрерывных одномерных систем. А именно, приведение к нормальному виду, то есть построение, с помощью невырожденных преобразований, некоторой топологически эквивалентной системы, и, оценке бифуркации, как изменения топологического типа системы.

Бифуркационным значением параметра дискретной динамической системы, будет такое его значение, при которых собственное значение (мультипликатор), вычисленное в неподвижной точке (точке равновесия $\bar{x} \rightarrow f(\bar{x})$) будет равно по модулю единице. Причем, для дискретных систем, необходимо различать два типа: $f_x(\bar{x}) = 1$ и $f_x(\bar{x}) = -1$. Рассмотрим примеры, когда $f_x(\bar{x}) = 1$.

Пример (бифуркация седло-узел). Рассмотрим отображение $x \rightarrow f(x, a) = a + x + x^2$. Это отображение имеет неподвижную точку $\bar{x} = 0$ при $a = 0$, причем $f_x(0,0) = 1$ (то есть нельзя выяснить устойчивость этого положения равновесия по линейному приближению). Найдем множество неподвижных точек при произвольном значении параметра a : $x - f(x, a) = -a - x^2 = 0$. Отсюда получим, что если $a < 0$, то существуют две неподвижные точки $\pm \sqrt{-a}$. При этом одна точка устойчива, а другая неустойчива.



Пример (бифуркация типа вилки). Рассмотрим отображение вида $x \rightarrow f(x, a) = a + x \pm x^3$. В этом случае бифуркационная диаграмма имеет следующий вид.



Для рассмотренных примеров, имеет место, следующее теоретическое утверждение.

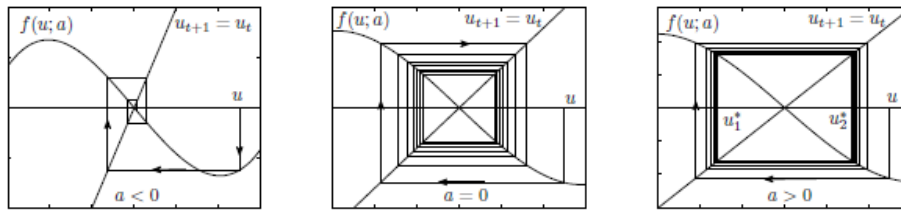
Теорема /Братусь с404/. Пусть одномерная дискретная система $x \rightarrow f(x, a)$, где $x \in R; a \in R$, имеет при $a = 0$ неподвижную точку $\bar{x} = 0$, и пусть $f'_x(0, 0) = 1$. Пусть также выполнены следующие условия: $f''_{x,x}(0, 0) \neq 0; f'_a(0, 0) \neq 0$. Тогда существует гладкая обратимая замена переменных, которая переводит уравнение $x \rightarrow f(x, a)$ в малой окрестности неподвижной точки в уравнение $y \rightarrow b + y + sy^2 + o(y^2)$, где $s = \text{sign}\{f''_{x,x}(0, 0)\}$. Кроме того, динамическая система $y \rightarrow b + y + sy^2 + o(y^2)$ локально топологически эквивалентна системе $y \rightarrow b + y + sy^2$, которая является нормальной формой для бифуркации седло-узел в динамических системах с дискретным временем.

Заметим, что в общем случае, всегда можно сдвинуть координаты положения равновесия и бифуркационного параметра в начало координат с помощью линейной замены.

Если имеет место равенство $f'_a(0, 0) = 0$, то будут происходить бифуркации другого типа. В частности, если $f'_a(0, 0) = 0; f''_{x,a}(0, 0) \neq 0; f''_{x,x}(0, 0) \neq 0$, то в системе будет происходить транскритическая бифуркация. Если $f'_a(0, 0) = 0; f''_{x,a}(0, 0) \neq 0; f''_{x,x}(0, 0) = 0; f^{(3)}_{x,x,x}(0, 0) \neq 0$, то в системе будет происходить бифуркация типа вилки.

Рассмотрим теперь случай, когда $f'_x(\bar{x}) = -1$.

Пример (бифуркация удвоения периода). Рассмотрим следующую одномерную дискретную динамическую систему $x \rightarrow f(x, a) = -(1 + a)x + x^3$. Отображение имеет неподвижную точку $\bar{x} = 0$ для всех значений параметра a . Собственное значение (мультипликатор) имеет значение $f'_x(\bar{x}) = -(1 + a)$. Точка равновесия будет устойчивой при малых $a < 0$ и неустойчива, если $a > 0$. Если $a = 0$, то $f'_x(\bar{x}) = -1$, и, поэтому анализ по линейному приближению недостаточен для изучения устойчивости. Рассмотрим вторую итерацию отображения $f(x, a) = -(1 + a)x + x^3$ при изменении параметра a от отрицательного значения к положительному значению: $f^2(x, a) = f(f(x, a)) = -(1 + a)[-(1 + a)x + x^3] + [-(1 + a)x + x^3]^3 = (1 + a)^2 x - (1 + a)x^3 - (1 + a)^3 x^3 + o(x^3) = (1 + a)^2 x - (2 + 4a + 3a^2 + a^3)x^3 + o(x^3)$. Отображение $f^2(x, a)$, очевидно, имеет тривиальную неподвижную точку $\bar{x} = 0$. Кроме того, оно имеет еще две неподвижные точки при малых значениях параметра $a > 0$: $\bar{x}_{1,2} = \sqrt{a} + o(\sqrt{a})$. То есть, существует две предельные точки $\bar{x}_2 = f(\bar{x}_1, a)$, $\bar{x}_1 = f(\bar{x}_2, a)$, причем $\bar{x}_2 \neq \bar{x}_1$. Таким образом, во второй итерации $f(x, a)$ происходит бифуркация типа вилки. Две неподвижные точки, появляющиеся в $f^2(x, a)$ при $a > 0$, устойчивы и, образуют цикл длины два для исходного отображения $f(x, a)$. Такая бифуркация в исходной системе $f(x, a) = -(1 + a)x + x^3$ называется бифуркацией удвоения периода.



Бифуркация удвоения периода (появление устойчивого цикла длины два).

Если параметр a изменяется в направлении от положительных значений к отрицательным, то амплитуда цикла уменьшается (то есть \bar{x}_2 и \bar{x}_1 стремятся друг к другу), а затем цикл исчезает.

Теорема. Пусть одномерная дискретная система $x \rightarrow f(x, a)$, где $x \in R; a \in R$, имеет при $a = 0$ неподвижную точку $\bar{x} = 0$, и пусть $f'_x(0, 0) = -1$. Пусть также выполнены следующие условия:

$\frac{1}{2}[f''_{x,x}(0, 0)]^2 + \frac{1}{3}f^{(3)}_{x,x,x}(0, 0) \neq 0; f''_{x,x}(0, 0) \neq 0$. Тогда в малой окрестности неподвижной точки существует гладкая обратимая замена переменных, которая переводит систему $x \rightarrow f(x, a)$ в систему $y \rightarrow -(1+b)y + sy^3 + o(y^3)$, где $s = \text{sign}\{\frac{1}{2}[f''_{x,x}(0, 0)]^2 + \frac{1}{3}f^{(3)}_{x,x,x}(0, 0)\}$.

Кроме того, система $y \rightarrow -(1+b)y + sy^3 + o(y^3)$ локально топологически эквивалентна системе $y \rightarrow -(1+b)y + sy^3$, которая является нормальной формой для бифуркации удвоения периода в дискретных динамических системах.

Периодические решения дискретных систем. Понятие хаоса.

Как уже отмечалось, скалярные динамические системы с дискретным временем могут иметь решения в виде циклов, а именно точка $x_0 \in X$ будет периодической периода m , если

$f^m(x_0) = x_0$ и $f^i(x_0) \neq x_0$ при $0 < i < m$. Таким образом, точки x_0, x_1, \dots, x_{m-1} образуют периодическую траекторию или цикл периода m . Здесь $x_i = f^i(x_0); i = 1, 2, \dots, m-1$, и, каждая из точек x_i является неподвижной точкой m итерации отображения f . Покажем, что величина собственного значения (мультипликатора), описывающего устойчивость цикла, не зависит от выбора неподвижной точки. Для этого вычислим $\mu_i = \frac{df^m(x_i)}{dx}; i = 0, 1, 2, \dots, m$. Действительно

$$\mu_i = \frac{df^m(x_i)}{dx} = \frac{df(f^{(m-1)}(x_i))}{dx} = f'(x_{i-1}) \frac{df^{(m-1)}(x_i)}{dx} = \dots = f'(x_{i-1})f'(x_{i-2}) \dots f'(x_i), \text{ так как}$$

$f^{m-1}(x_i) = x_{i-1}$. Таким образом, условие устойчивости цикла длины m принимает вид

$|f'(x_1)f'(x_2) \dots f'(x_m)| < 1$. При противоположном неравенстве, цикл является неустойчивым.

Отметим, что неподвижные точки самого отображения f также являются неподвижными точками отображения f^m . Действительно, если $f(\bar{x}) = \bar{x}$, то $f^k(\bar{x}) = f^{k-1}(\bar{x}) = \dots = \bar{x}$. Аналогично, легко

показать, что точки отображения f^m являются неподвижными точками отображения $f^{m \cdot k}$, где k - целое число. Если f - гладкая монотонно строго возрастающая функция, то отображение не может иметь циклов. Если же f - гладкая монотонно убывающая функция, то вполне могут существовать

такие точки x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$, что $f(x_1) = x_2$; $f(x_2) = x_1$. Поэтому для монотонно убывающих функций возможно появление периодических решений.

Пример. Рассмотрим логистическое уравнение $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$; $r > 0$ и $x_t \in [0, 1]$. Неподвижными точками изображения являются $\bar{x}_1 = 0$ и $\bar{x}_2 = (r - 1)/r$. Очевидно, что вторая неподвижная точка существует лишь при $r > 1$. Так как $f_x(x) = r - 2rx$, то получим $f_x(\bar{x}_1) = r$ и $f_x(\bar{x}_2) = 2 - r$. Таким образом первая неподвижная точка $\bar{x}_1 = 0$ асимптотически устойчива, если $0 < r < 1$, и неустойчива, если $r > 1$. Точка $\bar{x}_2 = (r - 1)/r$ будет устойчива, при $1 < r < 3$, и неустойчива, если $r > 3$. Если $r = 3$, то мультипликатор $f_x(\bar{x}_2) = -1$, то есть происходит бифуркация удвоения периода. Рассмотрим вторую итерацию отображения $f(x, r) = rx(1 - x)$: $f^2(x, r) = r^2x(1 - x)[1 - rx(1 - x)]$. Это отображение имеет четыре неподвижные точки $\tilde{x}_1 = 0$; $\tilde{x}_2 = (r - 1)/r$ и $\tilde{x}_{3,4} = (r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3})/(2r)$. Точки \tilde{x}_3, \tilde{x}_4 существуют, если $r > 3$. Собственные значения (мультипликаторы) $\mu = \frac{df^2(x)}{dx}$ в точках \tilde{x}_3, \tilde{x}_4 одинаковы и равны $\mu = 4 + 2r - r^2$. Эти точки устойчивы для $3 < r < 1 + \sqrt{6}$. При $r = 1 + \sqrt{6}$ значение мультипликатора $\mu = -1$ и, при этом значении параметра r снова происходит удвоение периода. То есть рождается новый устойчивый цикл длины четыре.

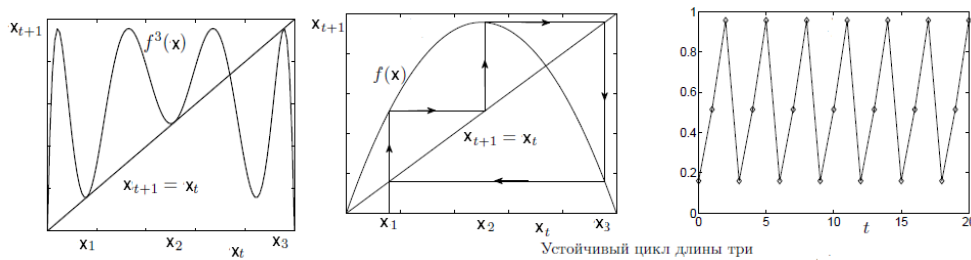
В общем случае, немонотонные отображения и их различные суперпозиции могут иметь множество неподвижных точек, что приводит к сложной нерегулярной динамике и появлению циклов различной длины. Для формулировки основного результата введем следующее упорядочивание всех натуральных чисел:

$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ$	все нечетные числа, кроме 1;
$2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ$	все нечетные числа, умноженные на 2, кроме 1;
$2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ$	все нечетные числа, умноженные на 2^2 , кроме 1;
$2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \dots \succ$	все нечетные числа, умноженные на 2^3 , кроме 1;
.....	

Теорема (Шарковский). Пусть $f : R \rightarrow R$ - непрерывное отображение, и, пусть f имеет цикл длины m . Тогда f имеет цикл длины k , для всех таких значений k , что $m \succ k$ в указанном выше порядке.

Из этой теоремы следует, что если отображение не имеет циклов длины два, то оно вообще не имеет никаких циклов. Если отображение имеет цикл длиной три, то оно имеет циклы всевозможных длин. Известен и более общий результат, который состоит в следующем: непрерывное отображение действительной оси в себя, которое имеет цикл длины три, имеет также циклы длины n для всех $n \in N$ и, кроме того, имеет несчетное множество непериодических траекторий.

Пример. Вновь рассмотрим логистическое уравнение $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$; $r > 0$ и $x_t \in [0, 1]$. Как было показано в предыдущем примере при $r_1 = 3$ происходит рождение устойчивого цикла длины два. При $r_2 = 1 + \sqrt{6}$ устойчивый цикл длины два перестает существовать и появляется цикл длины четыре. Покажем, что существует цикл длины три для данного отображения и, следовательно, по теореме Шарковского, циклы всех возможных длин. Для этого решим задачу $f^3(x, r) = x$, где $f(x, r) = rx(1 - x)$. Эту задачу можно решить численно, предварительно построив возможное графическое решение (качение графика функции $f(x, r) = rx(1 - x)$ биссектрисы первого координатного угла).



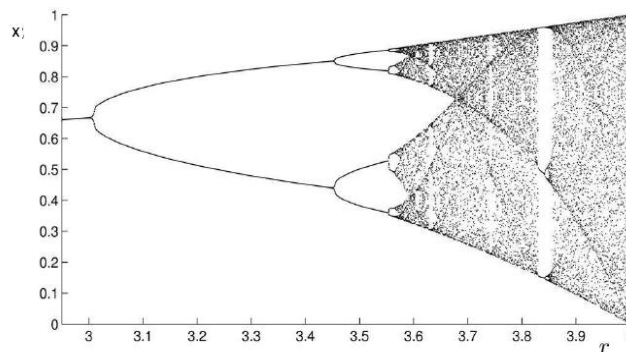
В частности, численные расчеты дают следующие три неподвижные точки цикла

$x_1 \approx 0.1599; x_2 \approx 0.5144; x_3 \approx 0.9563$. Пример такого цикла длительности три приведен на рисунке.

Естественно предположить, что существует некоторая бесконечная последовательность бифуркационных значений параметра $r_{2^k}; k = 1, 2, \dots$. То есть, при r_2 цикл длительности два теряет

устойчивость и рождается цикл длины четыре и т.д. Можно показать, что отношение $\frac{r_{2^k} - r_{2^{k-1}}}{r_{2^{k+1}} - r_{2^k}}$

стремится к предельному значению $\mu_F = 4.6692..$ при $k \rightarrow \infty$. Число μ_F носит название постоянной Фейгенбаума и полностью характеризует сценарий удвоения периода. Если в системе наблюдается каскад удвоения периода, интервалы между последующими бифуркационными значениями быстро уменьшаются, а значения параметра стремятся к некоторому предельному значению r_∞ . При величинах параметра $r > r_\infty$ траектории динамической системы часто называют хаотическими, а каскад удвоения периода – сценарием перехода к хаосу по Фейгенбауму. В данном случае под понятием хаотический понимается чувствительность процесса к малым изменениям начальных параметров и бифуркационного параметра, приводящие к значительной расходимости близких траекторий.



Каскад удвоения периода в дискретном логистическом уравнении $u_{t+1} = ru_t(1 - u_t)$. По оси абсцисс отложены значения параметра, а по оси ординат – те точки фазового пространства, которые посещаются орбитами бесконечное число раз.

Удобный способ доказательства существования периодических траекторий любого периода состоит в следующем. Пусть, для некоторого x_t и, исследуемого отображения $f(x_t)$, существует нечетное целое число n , такое, что выполняется соотношение: $f^n(x_t) < x_t < f(x_t)$. Тогда для отображения $f(x_t)$ существуют циклы нечетной длины. Отсюда, в соответствии с теоремой Шарковского, следует, что существуют и периодические траектории произвольного периода.

Показатель Ляпунова хаотической траектории дискретной системы.

Рассмотрим одно из существующих определений хаотической траектории. Поэтому, в дальнейшем, при чтении литературы, посвященной проблеме «хаоса», всегда необходимо уточнять определение термина «хаотичность». Пусть задано гладкое отображение: $x_{t+1} = f(x_t)$. И пусть, также, x_0 и \bar{x}_0

- две достаточно близкие начальные точки этого отображения. Рассмотрим траектории (орбиты), порожденные этими двумя точками: $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$; и $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \dots$. Вычислим сначала, насколько близки точки x_1 и \bar{x}_1 : $x_1 - \bar{x}_1 = f(x_0) - f(\bar{x}_0) = f'(x_0)(x_0 - \bar{x}_0) + o(|x_0 - \bar{x}_0|)$. Аналогично рассуждая, получим, что если $|f'(x_k)| < 1$, то расстояние, между точками x_{k+1} и \bar{x}_{k+1} будет уменьшаться или увеличиваться. Одной из мер близости орбит удобно взять некоторую среднюю величину, пропорциональную расстоянию между точками орбит, вычисленную по всем возможным значениям k .

Определение. Пусть $f: R \rightarrow R$ - непрерывное отображение. Числом Ляпунова траектории $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ называется величина $l\{x_0\} = \lim_{k \rightarrow \infty} (|f'(x_0)| \cdot |f'(x_1)| \cdot \dots \cdot |f'(x_{k-1})|)^{1/k}$, если этот предел существует.

Эквивалентное определение для показателя Ляпунова имеет следующий вид.

Определение. Показателем Ляпунова траектории $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ называется величина

$$h\{x_0\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)|}{k}, \text{ если этот предел существует.}$$

Из приведенных определений следует, что число Ляпунова равно нулю, если x_k такая точка траектории, что $f'(x_k) = 0$. Показатель Ляпунова, в этом случае, формально не определен, хотя его можно считать равным $-\infty$. Из правила дифференцирования сложной функции следует, что если l - число Ляпунова для отображения f и для траектории, порожденной точкой x_0 , то число Ляпунова, порожденной той же точкой x_0 и отображением f^m , будет равно l^m . Действительно, так

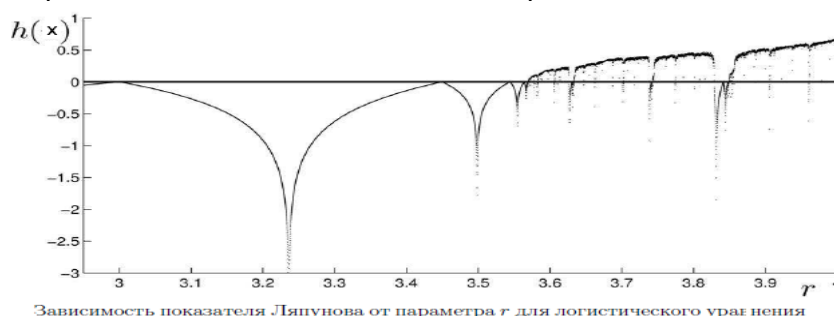
$$\text{как: } (f^m(x_k))' = \frac{df^m(x_k)}{dx} = \frac{df(x_k)}{dx} \frac{df(x_{k+1})}{dx} \dots \frac{df(x_{k+m-1})}{dx}; k = 0, 1, 2, \dots, \text{ то}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [(f^m(x_0))' \cdot (f^m(x_1))' \cdot \dots \cdot (f^m(x_{k-1}))']^{1/k} = l^m$$

Показатель Ляпунова является легко вычислимым признаком хаотического, в смысле введенного выше определения, поведения траекторий. Если показатель $h\{x\}$ положителен, то близкие траектории разбегаются, и в системе может наблюдаться хаотическое поведение.

Определение. Орбиту $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ дискретной системы $x_{t+1} = f(x_t)$ будем называть хаотической, если эта орбита ограничена, не стремится к периодической орбите и ее число Ляпунова $l\{x_0\}$ строго больше одного (соответственно, показатель Ляпунова $h\{x_0\}$ больше нуля).

Зависимость показателя Ляпунова для логистического уравнения, полученная численным путем, приведена на рисунке. Ясно видны начальные широкие интервалы по параметру r с $h\{x\} < 0$, которым отвечают периодические движения с малым периодом.



Зависимость показателя Ляпунова от параметра r для логистического уравнения

Контрольные вопросы к лекции 15.

№	Текст контрольного вопроса	Варианты ответа
1	Можно ли вывести условия возникновения глобальной бифуркации путем анализа локальных бифуркаций во всех особых точках системы?	1. Да, можно. 2. Нет, нельзя. 3. Можно, но только, если $\det\left(\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial \mu}\right) \neq 0$ во всех точках равновесия $F(x, \mu) = 0$ исследуемой системы, где μ - бифуркационный параметр.
2	Структурная неустойчивость системы при изменении бифуркационного параметра μ может возникнуть только в окрестности инвариантного множества, которое представляет собой, или неподвижную точку, или периодическую орбиту.	1. Нет, структурная неустойчивость может возникнуть и в других случаях. 2. Да, структурная неустойчивость может возникнуть только в окрестности неподвижной точки или периодической орбиты. 3. Нет, структурная неустойчивость может возникнуть только тогда, когда одновременно выполняются соотношения $\det\left(\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial \mu}\right) = 0$ и $\det\left(\frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x}\right) = 0$
3	Бифуркационной диаграммой называется разбиение пространства изменяемых параметров по следующему признаку...	1. ...по соотношению знаков значений изменяемых параметров. 2. ... по величине запаса устойчивости исследуемой системы. 3. ... по соотношениям топологической эквивалентности траекторий движения исследуемой системы.
4	Нормальная форма бифуркации уравнения $\dot{x} = f(x, \mu); x, \mu \in R; f(0,0) = 0$ коразмерности один, то есть $f'_x(0,0) = 0; f'_{x,x}(0,0) \neq 0; f'_\mu(0,0) \neq 0$ имеет вид ...	1. ... $\dot{y} = b + sy^3$ 2. ... $\dot{y} = b + sy^2$ 3. ... $\dot{y} = by + sy^3$
5	Условие возникновения бифуркации коразмерности один в одномерной дискретной системе $x_{n+1} = f(x_n, \mu); f(0,0) = 0; x, \mu \in R$ имеет вид ...	1. ... $f'_x(0,0) = 0; f''_{x,x}(0,0) \neq 0; f'_\mu(0,0) \neq 0$ 2. ... $ f'_x(0,0) = 1; f''_{x,x}(0,0) \neq 0; f'_\mu(0,0) = 0; f^{(3)}_{x,x,x}(0,0) \neq 0$ 3. ... $ f'_x(0,0) = 1; f''_{x,x}(0,0) \neq 0; f'_\mu(0,0) \neq 0$
6	Если дискретное одномерное отображение имеет цикл длиной три, то оно имеет также ...	1. ... только циклы длиной три 2. ... имеет только циклы длиной два и три 3. ... имеет циклы любой длины.
7	Постоянная Фейгенбаума μ_F характеризует переход к детерминированному хаосу в одномерной дискретной системе через бифуркационный сценарий типа...	1. ... вилки. 2. ... удвоения периода. 3. ... седло-узел.