ПЗ-1-2. Свойства числовых рядов. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Определение 20.1. Пусть задана числовая последовательность $\{u_n\} = u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{20.1}$$

называют *числовым рядом* (или просто *рядом*), числа $u_1, u_2, \ldots$ — *членами ряда*, u_n — *общим членом ряда*.

Ряд (20.1) обозначают символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и пишут

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Например, рядами будут следующие выражения:

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n;$

2) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}.$

Определение 20.2. *Частной* (или *частичной*) *суммой* S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сумма первых n членов ряда, т. е.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ имеем

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{2}; \quad S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Исследование сходимости числового ряда

1. <u>По определению сходящегося ряда.</u>

1.1.

Определение 20.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся,* если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм, т. е. если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. При этом пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

Пример 20.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение. Составим частную сумму S_n :

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Так как $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ при любом k, то

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \\ + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$. Следовательно, данный ряд сходится, и его сумма $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \blacksquare$$

Пример 6. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$ и найти его сумму S, используя определение сходящегося ряда.

Решение. Преобразуем общий член u_n ряда. Для этого разложим $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$ на сумму элементарных дробей с неопределенными коэффициентами, т. е. $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+2}$, где A и B

подлежат определению. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю и приравняем числители. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему уравнений относительно коэффициентов A и B :

$$\begin{cases} A+B=0; \\ \quad 2A=1. \end{cases}$$

Отсюда $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$. Тогда $u_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. Используя полученное разложение, запишем члены ряда в виде $u_1 = \frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$, $u_2=\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $u_3=\frac{1}{3\cdot 5}= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$, $\ldots$, $u_{n-2}=\frac{1}{(n-2)n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$, $u_{n-1}= \frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.

Составим частную сумму S_n данного ряда:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-2}+u_{n-1}+u_n= \\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\right. \\ &\qquad\left.+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

В скобках после преобразований остались только четыре слагаемых. Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)= \\ &=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-0-0\right)=\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ конечен, то ряд сходится, причем его сумма $S = \frac{3}{4}$. ■

1.2.

Определение 20.4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *расходящимся*, если расходится последовательность $\{S_n\}$ его частных сумм, т. е. если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела при $n\to\infty$ (предел не существует или он бесконечен).

Пример 20.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Запишем частную сумму $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Очевидно, что $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n > 1)$. Учитывая эти неравенства, будем иметь

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \\ > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

или $S_n > \sqrt{n}$. Отсюда следует, что частные суммы S_n с ростом n возрастают, т. е. $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, данный ряд расходится. ■

Пример 20.9. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Решение. Найдем частные суммы данного ряда: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, $\ldots$, $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$. Так как частные суммы с нечетным номером равны единице, а с четным номером равны нулю, то предела S_n при $n \to \infty$ не существует. Следовательно, данный ряд расходится. ■

Пример 7. Доказать, что следующие ряды расходятся, используя определение расходящегося ряда: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$.

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2}$ составим частную сумму $S_n = 1 + 0 - 1 + 0 + \ldots$ Так как S_n равна либо 1, либо 0, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует. Поэтому ряд расходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$ частная сумма

$$S_n = \ln\frac{1+1}{1} + \ln\frac{2+1}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} =$$
$$= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} =$$
$$= \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n} = \ln(n+1).$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Следовательно, ряд расходится. ■

2. <u>Нарушение необходимого признака сходимости.</u>

Теорема 20.2 (*необходимый признак сходимости ряда*). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Нарушение необходимого признака сходимости ряда.

Из теоремы 20.2 следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1000n+1}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000n+1} = \frac{1}{1000} \neq 0.$$

Пример 8. Доказать расходимость следующих рядов, используя необходимый признак сходимости: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{3n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4\sqrt{n}}{n^3+1}$.

Решение. Найдем для каждого ряда предел общего члена u_n при $n\to\infty$.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{3n}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{3n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Ряд расходится, так как нарушен необходимый признак сходимости.

2) Так как для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4\sqrt{n}}{n^3+1}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\sqrt{n}}{n^3+1} = \infty \neq 0,$$

то ряд расходится. ■

3. Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 20.9 (*необходимый и достаточный признак сходимости ряда*). Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists$ номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall\, n > N$ и $\forall\, p \in \mathbf{N}$ выполнялось бы неравенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{20.2}$$

Для доказательства следует использовать определение 20.3 сходящегося ряда, критерий Коши сходимости последовательности $\{S_n\}$ (см. теорему 2.8) и учесть, что $|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} = |S_{n+p} - S_n|$.

Сумму нескольких последовательных членов ряда $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$ называют иногда *отрезком ряда «длины p»*. Как следует из критерия Коши, для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы все достаточно далекие отрезки ряда были как угодно малы по модулю.

Пример 20.11. Рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Напомним, что число c есть *среднее гармоническое* чисел a и b, если имеет место равенство

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Легко проверить, что общий член ряда $u_n = \dfrac{1}{n}$ есть среднее гармоническое членов $u_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}$ и $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, т.е. $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$, или $n = \dfrac{1}{2}\big((n-1) + (n+1)\big)$. Докажем расходимость гармонического ряда, используя критерий Коши. Рассмотрим отрезок ряда длины $p = n$:

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+(p-1)}+\frac{1}{n+p}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}.$$

Очевидно, что $\dfrac{1}{n+k}>\dfrac{1}{n+n}$ при $k=1,2,\ldots,n-1$, т. е.

$$\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+n},\quad \frac{1}{n+2}>\frac{1}{n+n},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n+(n-1)}>\frac{1}{n+n}.$$

Учитывая эти неравенства, получим

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}>$$
$$>\underbrace{\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\ldots+\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}}_{n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

или

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+n}>\frac{1}{2}.$$

Следовательно, для $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ отрезок ряда длины $p=n$ оказался больше ε. В силу критерия Коши гармонический ряд расходится. ■

Знакопостоянные ряды

Определение 21.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, у которого $u_n\geqslant 0$ $(u_n\leqslant 0)$ $\forall n$, называется *рядом с неотрицательными* (*неположительными*) *членами* или *знакопостоянным рядом.*

Достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с неотрицательными членами.

Типовые ряды:

1. Геометрическая прогрессия:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}$$

Сходится при $|q|<1$

Например, прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится, так как $q = \frac{1}{3} < 1$;

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ расходится, так как $q = \frac{3}{2} > 1$. ■

2. Гармонический ряд расходится:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

3. Ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad \begin{array}{l} \textbf{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится } \textbf{при } \alpha \leqslant 1 \end{array}$$

1. <u>Теорема 21.2 (*признак сравнения*).</u> Пусть даны два ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \geqslant 0), \tag{21.1}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (v_n \geqslant 0), \tag{21.2}$$

причем

$$u_n \leqslant v_n \quad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{21.3}$$

Тогда

1) если ряд (21.2) сходится и имеет сумму σ, то сходится и ряд (21.1), причем его сумма $S \leqslant \sigma$;

2) если ряд (21.1) расходится, то расходится и ряд (21.2).

П р и м е р   Исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

Р е ш е н и е. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ его общий член $u_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. $\forall n \in \mathbf{N}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, т.к. для ряда Дирихле степень $2 > 1$.

Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)};$$

Р е ш е н и е. 2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$ его общий член $u_n = \frac{1}{n \cdot 5^n} \leqslant \leqslant \frac{1}{5^n}$ $\forall n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{5} < 1$ Следовательно,
по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$.

3) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$. Так как $\ln(n+1) < n+1$ $\forall n$, то $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ $\forall n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ без первого члена) расходится. Следовательно,
по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ также расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряды, используя признак сравнения:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)};$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right);\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}.$$

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ имеем $u_n=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^n}\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{2^n}=q^n$ $\left(q=\frac{1}{2}\right)$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ сходится при $q<1$, то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ также сходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ общий член $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+4)}<\frac{1}{n^2}$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится , то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

3) Перепишем общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ в виде $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$. Очевидно, что $\sqrt{n-1}<\sqrt{n}$, $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$. Следовательно, $u_n=$ $=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится , то по признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

4) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}$ его общий член $u_n=$ $=\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$, так как $\ln(n+1)<n+1$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ (гармонического ряда без первого члена) следует расходимость данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}$. ■

2. Теорема 21.3 (*предельный признак сравнения*). Пусть даны два ряда:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0), \tag{21.5}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (v_n > 0). \tag{21.6}$$

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (A \neq 0,\ A \neq \infty), \tag{21.7}$$

то оба ряда (21.5) и (21.6) сходятся или расходятся одновременно.

Рассмотрим

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ и 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n}$ гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ и 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ Ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = 2 \quad (2 \neq 0,\ 2 \neq \infty), \quad \text{расходятся}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\,n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{2} \neq 0,\ \frac{1}{2} \neq \infty), \quad \text{расходятся}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 2 \quad (2 \neq 0,\ 2 \neq \infty), \quad \text{сходятся}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{2} \neq 0,\ \frac{1}{2} \neq \infty), \quad \text{сходятся}$$

Пример 21.5. Исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n^3+n+1}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^2+2n+3}.$$

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n^3+n+1}$ его общий член $u_n = \frac{5n+2}{2n^3+n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим $v_n = \frac{1}{n^2}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n+2}{2n^3+n+1} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n^2}{2n^3+n+1} = \frac{5}{2}$ ($\neq 0$, $\neq \infty$). Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 21.2), то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n^3+n+1}$ также сходится.

2) Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^2+2n+3}$ с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Пусть $u_n = \frac{3n+1}{4n^2+2n+3}$ ($u_n \to 0$ при $n \to \infty$), $v_n = \frac{1}{n}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{4n^2+2n+3} : \frac{1}{n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+n}{4n^2+2n+3} = \frac{3}{4}$ ($\neq 0$, $\neq \infty$). Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^2+2n+3}$ расходится, так как расходится гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ■

Замечание 21.4. Из теоремы 21.3 следует, в частности, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно. Поэтому при исследовании на сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$) достаточно сравнить его с таким рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ($v_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$), чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, т. е. $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$ (см. определение 5.6 эквивалентных бесконечно малых). Например,

при исследовании на сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n} \quad \left(\sin\frac{\pi}{2n} > 0,\ \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2n} = 0 \right)$$

достаточно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как $u_n = \sin\frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n} = v_n$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{\pi}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+2}}$, где $u_n \to 0$ при $n \to \infty$. Общий член $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+2}} \sim v_n = \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+2}\cdot 1} = 1$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится то исходный ряд также расходится.

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n^5+n^2}}$ его общий член $u_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$, где $v_n = \frac{n^{1/3}}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{5/2-1/3}} = \frac{1}{n^{13/6}}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/6}}$ следует сходимость данного ряда.

Пример 4. Используя предельный признак сравнения, установить сходимость или расходимость рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1});$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{(n+1)\sqrt[3]{n}};\quad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n+2)}$ его общий член $u_n = \dfrac{n+1}{n(n+2)} \to 0$ при $n \to \infty$. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n(n+2)} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2n} = 1,$$

т. е. $\dfrac{n+1}{n(n+2)} \sim \dfrac{1}{n}$ при $n \to \infty$. Так как гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+2n}$ тоже расходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{2^n}$ его общий член $u_n = \sin\dfrac{\pi}{2^n} \to 0$ при $n \to 0$. Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{2^n}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n}$. Поскольку $\sin\dfrac{\pi}{2^n} \sim$ $\sim \dfrac{\pi}{2^n}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n} = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то сходится и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

3) Преобразуем общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^2}$, переведя иррациональность из числителя в знаменатель:

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \\ = \frac{n+1-n+1}{n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \frac{2}{n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n =$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2\sqrt{n}}{n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1,$$

т. е. $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$ сходится (см. замечание 21.3), то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^2}$.

4) Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{(n+1)\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2-1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/6}} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[3]{n}+1)n^{13/6}}{(n+1)\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{15/6}}{n^{5/2}} = 1,$$

т. е. $u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/6}}$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{(n+1)\sqrt{n^3}}$.

5) Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Так как $\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$. ■

3. Теорема 21.4 (*признак Даламбера*). Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$). Если существует предел отношения последующего члена u_{n+1} к предыдущему u_n при неограниченном возрастании номера n, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho, \qquad (21.9)$$

то

1) при $\rho < 1$ ряд сходится;
2) при $\rho > 1$ ряд расходится.

(При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым, т. е. ряд может как сходиться, так и расходиться.)

Пример 21.6. Исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}.$$

Решение. Вычислим $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ для каждого ряда.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1.$$

По признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2}$ расходится. ■

Пример 21.7. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} + \ldots$$

Решение. Используем признак Даламбера. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n(n+1)\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится. ■

Пример 7. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где: 1) $u_n = \frac{n^3+3}{3^n}$; 2) $u_n = \frac{1}{(2n+1)!}$; 3) $u_n = n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$; 4) $u_n = \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

Решение. 1) Запишем для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{3^n}$ член $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3+3}{3^{n+1}}$. Найдем отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left((n+1)^3+3\right)3^n}{3^{n+1}(n^3+3)} = \frac{(n+1)^3+3}{3(n^3+3)}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3+3}{3(n^3+3)} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

2) Так как для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1,$$

то ряд сходится.

3) Учитывая, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$ при $n \to \infty$, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

4) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$ запишем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n+1)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1.$$

Ряд расходится. ■

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = 2e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}} = \frac{2}{e} < 1$$

(второй замечательный предел) сх-ся.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{e} > 1$ - расходится

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{e} = 1$ - ?

4. Теорема 21.5 (*признак Коши*). Пусть дан ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geqslant 0)$. Если существует предел корня n-й степени из общего члена u_n при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho, \tag{21.12}$$

то

1) при $\rho < 1$ ряд сходится;
2) при $\rho > 1$ ряд расходится.

(При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым, т. е. ряд может как сходиться, так и расходиться.)

Пример 21.8. Исследовать на сходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n.$$

Решение. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ для каждого ряда.

1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Следовательно, по признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$ находим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3 > 1.$$

По признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$ расходится. ■

П р и м е р 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, используя признак Коши, если 1) $u_n = \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$; 2) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$; 3) $u_n = \ln^n(2n+1)$; 4) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Р е ш е н и е. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$ запишем $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}} = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$ сходится.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$ вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

3) Так как для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n(2n+1)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln^n(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(2n+1) = \infty > 1$, то ряд расходится.

4) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ найдем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Следовательно, ряд расходится. ■

5. Т е о р е м а 21.6 (*интегральный признак сходимости и расходимости рядов с положительными членами*). Пусть $f(x)$ — непрерывная, положительная и убывающая функция на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = f(n)$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

П р и м е р 21.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ (ряд Дирихле).

Р е ш е н и е. В данном случае $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} = f(n)$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ удовлетворяет условиям теоремы 21.6. Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ (см. пример 24.5), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant$ $\leqslant 1$. ■

Например, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$ $\left(\alpha = \dfrac{1}{4} < 1\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(\alpha = \dfrac{1}{2} < 1\right)$,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ ($\alpha = 1$, гармонический ряд) расходятся.

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ $\left(\alpha = \dfrac{3}{2} > 1\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ $(\alpha = 2 > 1)$,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$ ($\alpha = 4 > 1$, сходятся)

П р и м е р 21.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Р е ш е н и е. Так как $u_n = \dfrac{1}{n \ln n} = f(n)$, то $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы 21.6 на промежутке $[2, +\infty)$. Найдем несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln \ln x \Big|_2^b \right) =$$
$$= \lim_{b \to +\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится. Поэтому исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ также расходится. ■

П р и м е р 9. Используя интегральный признак, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$, если: 1) $u_n = \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$; 2) $u_n = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$.

Р е ш е н и е. 1) Для ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ его общий член $u_n = \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n} = f(n)$. Поэтому $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln^2 x}$. Функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[2, +\infty)$, т. е. удовлетворяет условиям теоремы 21.6. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 n} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Так как интеграл сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$ его общий член $u_n = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}} = f(n)$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$ удовлетворяет условиям теоремы 21.6 на промежутке $[2, +\infty)$. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d \ln x}{\sqrt{\ln x}} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(2\sqrt{\ln x} \Big|_2^b \right) = 2 \lim_{b \to +\infty} \left(\sqrt{\ln b} - \sqrt{\ln 2} \right) = \infty.$$

Поскольку несобственный интеграл расходится, то расходится и данный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$. ■

Задачи для самостоятельного решения

2562. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$$

2578. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n!)}+\ldots$

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot1001}{1\cdot3}+\frac{1000\cdot1001\cdot1002}{1\cdot3\cdot5}+\ldots$

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot7}{2\cdot6}+\frac{4\cdot7\cdot10}{2\cdot6\cdot10}+\ldots$

Литература

Демидович Б.П.

Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 14-е изд. испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 624 с.