Курс «Вычислительные алгоритмы теории автоматического управления».

Лекция 8. Численные методы решения задач оптимального управления.

Общая постановка задачи оптимального управления. Решение вариационных задач управления методом множителей Лагранжа. Принцип максимума Понтрягина. Прямые численные методы решения задач оптимального управления. Непрямые численные методы решения задач оптимального управления. Оптимальное управление дискретными (многошаговыми) процессами. Метод динамического программирования.

Общая постановка задачи оптимального управления.

Пусть уравнение объекта задается в нормальной форме: $\dot{x} = F(x,u,t)$, где $x \in \Re^n;\ u \in \Re^m;\ F : \Re^n \otimes \Re^m \otimes \Re$. На вектор управления и фазовый вектор могут быть наложены ограничения в виде конечных соотношений – равенств и неравенств: $u(t) \in U_t \subseteq \Re^m$ и $x(t) \in X_t \subseteq \Re^n$. Краевые (граничные) условия также могут быть представлены в виде соответствующих включений: $x(t_0) \in X_0, x(t_f) \in X_f$. Критерий оптимальности обычно задается в виде функционала: $J = J[x(t_0), x(t_f), u(t), x(t)]$.

Тогда задача оптимального управления обычно формулируется следующим образом: при заданном уравнении объекта $\dot{x} = F(x,u,t)$, ограничениях на управление $u(t) \in U_t \subseteq \Re^m$ и фазовый вектор $x(t) \in X_t \subseteq \Re^n$, а также краевых условиях $x(t_0) \in X_0, x(t_f) \in X_f$, определить такое программное управление $u^*(t)$ или управление с обратной связью $u^*(x(t),t)$ (то есть найти фазовую траекторию $x^*(t)$, при которых критерий оптимальности $J = J[x(t_0), x(t_f), u(t), x(t)]$ принимает минимальное (или максимальное) значение). Управления $u^*(t)$ и $u^*(x(t),t)$ называются оптимальными управлениями, а траектория $x^*(t)$ - оптимальной траекторией.

Задачи оптимального управления, в основном различают, по виду ограничений и краевых условий, по виду времени начала и окончания процесса управления, по типу критерия оптимальности /Ким т2 с280/.

По виду ограничений различают следующие задачи:

- задачи классического типа, когда ограничения задаются в виде равенств $\phi_k(x,u,t) = 0; k = 1,2,...r$;
- задачи неклассического типа, когда среди ограничений имеются неравенства, то есть $\phi_k(x,u,t) \le 0; k = 1,2,...r$.

По виду краевых условий различают:

- задачи с фиксированными (закрепленными) концами, когда каждое из множеств X_0 и X_f состоит из одной точки, то есть все фазовые координаты в начальный и конечный моменты заданы ;
- задачи с подвижным правым концом (когда X_f состоит из более чем одной точки), с подвижным левым концом (когда X_0 состоит из более, чем одной точки), с подвижными концами (когда X_0 и X_f состоят из более, чем одной точки каждое) .

По времени начала и окончания процесса различают:

- задачи с фиксированным временем, когда начальный t_0 и конечный t_f моменты времени фиксированы;

- задачи с нефиксированным временем, когда хотя бы один из моментов времени t_0 или t_f не фиксирован.

По критерию оптимальности различают:

задачу Больца: $J = q_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f] + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt$;

задачу Лагранжа: $J = \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt$;

задачу Майера: $J = q_0[x(t_0), x(t_f), t_0, t_f]$.

Задача Майера, в частном случае, когда функционал имеет вид: $J = q_0[x(t_f), t_f]$, называется задачей терминального управления, а когда функционал имеет $J = t_f - t_0$ - то называется задачей максимального быстродействия. Задачи Больца, Лагранжа и Майера являются эквивалентными в том смысле, что путем преобразования переменных каждую из задач можно преобразовать в любую другую задачу.

Решение вариационных задач управления методом множителей Лагранжа.

Задачу оптимального управления в смысле Лагранжа с фиксированными концами можно сформулировать следующим образом. Пусть заданы уравнения объекта с ограничениями и краевыми условиями:

$$\dot{x} = F(x,u,t), \ \phi_k(x,u,t) = 0; k = 1,2,...r; \ x(t_0) = \bar{x}_0, x(t_f) = \bar{x}_f,$$

где $x \in \Re^n; u \in \Re^m$, а критерий оптимальности имеет вид:

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt \to \min.$$

Пусть функции $f_i(x,u,t); F = (f_1,...f_n)^T$ и $\phi_k(x,u,t)$ являются непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам. Управление $u(t)$ принадлежит классу кусочно - непрерывных функций, а траектории $x(t)$ - классу кусочно – гладких функций. Тогда будем называть пару $(u(t), x(t))$ допустимой, если функции $u(t)$ и $x(t)$ принадлежат к классам допустимых функций.

Уравнение Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим усложненную задачу Лагранжа классического вариационного исчисления, в которой на аргументы функционала, помимо краевых условий, наложены дополнительные ограничения (связи).

$$\Phi_i(z,\dot{z},t) = 0; i = 1,2,...,p; \ \phi_k(z,t) = 0; k = 1,2,...l; \ z(t_0) = z^0; \ z(t_f) = z^f; \ J = \int\limits_{t_0}^{t_f} \Phi_0(z,\dot{z},t)dt \to extr.$$

Здесь z - вектор размера s; $\Phi_i; i = 0,1,\ldots,p$; $\phi_k; k = 1,2,...l$ - дифференцируемые по всем своим аргументам функции. Составим функцию следующего вида:

$$L(z,\dot z,\psi,\lambda,t)=\sum_{i=1}^{p}\psi_i\Phi_i+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\phi_k+\psi_0\Phi_0\ ,$$

где $\psi_i; i=0,1,\dots,p$ - функции времени; $\lambda_k; k=1,2,...l$ и ψ_0 - константы.

Функция $L(z,\dot z,\psi,\lambda,t)$ называется функцией Лагранжа, а функции $\psi_i; i=0,1,\dots,p$ и константы $\lambda_k; k=1,2,...l$ и ψ_0 множителями Лагранжа. Применение множителей Лагранжа позволяет усложненную задачу Лагранжа привести к стандартной задаче вариационного исчисления:

$$\tilde J=\int_{t_0}^{t_f}L(z,\dot z,\psi,\lambda,t)dt\to extr\ ;\ z(t_0)=z^0;\ z(t_f)=z^f\ ,$$

где $\psi=(\psi_0,\psi_1,\dots,\psi_p)^T;\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)^T$.

Оптимизационная задача имеет смысл, если множители Лагранжа не равны тождественно одновременно нулю. Если $\psi_0\equiv 0$, то решение не зависит от исходного функционала J . Такой случай называют особым.

Уравнения Эйлера для преобразованной задачи примут следующий вид:

$$L'_{z_i}-\frac{d}{dt}L'_{\dot z_i}=0; i=1,2,\dots,s\ ;\ L'_{\psi_j}=0;\ j=1,2,\dots,p\ ;\ L'_{\lambda_k}=0; k=1,2,\dots,l\ .$$

Так как уравнения $L'_{\psi_j}=0;\ j=1,2,\dots,p$ и $L'_{\lambda_k}=0; k=1,2,\dots,l$ совпадают с уравнениями $\Phi_i(z,\dot z,t)=0; i=1,2,\dots,p$ и $\phi_k(z,t)=0; k=1,2,...l$, то достаточно рассматривать для поиска экстремали уравнения:

$$L'_{z_i}-\frac{d}{dt}L'_{\dot z_i}=0; i=1,2,\dots,s\ .$$

Данные уравнения часто называют уравнениями Эйлера – Лагранжа.

Правило множителей Лагранжа для задач с фиксированными концами.

Приведем задачу Лагранжа оптимального управления с фиксированными концами к следующему виду:

$$f_i(x,u,t)-\dot x_i=0; i=1,2,\dots,n\ ;\ \phi_k(x,u,t)=0; k=1,2,...r\ ;$$

$$x_i(t_0)=x_i^0, x_i(t_f)=x_i^f; i=1,2,\dots,n;\quad J=\int_{t_0}^{t_f}f_0(x,u,t)dt\to\min .$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L=\psi_0 f_0+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(f_i-\dot x_i)+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\phi_k\ .$$

То есть роль аргумента z выполняет вектор (x,u). Так как функционал L не зависит от $\dot u_j$, то уравнения Эйлера – Лагранжа имеют, в этом случае, вид:

$$L'_{x_i}-\frac{d}{dt}L'_{\dot x_i}=0; i=1,2,\dots,n\ ;\ L'_{u_j}=0;\ j=1,2,\dots,m.$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа можно получить также с помощью функции:

$$H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \phi_k \,.$$

Такая функция называется функцией Гамильтона или гамильтонианом. Так как гамильтониан связан с функцией Лагранжа соотношением: $L = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i$, то уравнения Эйлера – Лагранжа принимают вид:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1, 2, ..., n\,;\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0;\ j = 1, 2, ..., m\,.$$

Полученные уравнения называют также условиями стационарности, так как они представляют собой условия экстремума гамильтониана при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_f]$.

Уравнения Эйлера – Лагранжа являются необходимым условием: любое решение задачи оптимального управления является экстремалью, то есть удовлетворяет уравнениям Эйлера – Лагранжа. Но не любая экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, является решением задачи оптимального управления. Но, если решение задачи существует, и экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, единственна, то такая экстремаль будет являться решением задачи оптимального управления.

Правило множителей Лагранжа для задач с подвижными концами.

Рассмотрим задачу оптимального управления с подвижными концами и фиксированным временем классического типа, то есть в этом случае задача оптимального управления может быть вариационной задачей, или Лагранжа, или Больца, или Майера. Однако, когда концы закреплены и время фиксировано, задача оптимального управления может быть только задачей Лагранжа.

Рассмотрим вариационную задачу с подвижными концами и фиксированным временем:

$$J(u) = q_0(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, \dot{x}, t) \cdot dt\,.$$

Принимается, что функции q_0, f_0 непрерывны и дифференцируемы по всем своим аргументам. При этом, будем предполагать, что $x(t)$ принадлежит к классу гладких функций. Пусть экстремум достигается на функции $x^*(t)$. При произвольной фиксированной функции $\tilde{x}(t)$ функционал:

$$J = q_0[x^*(t_0) + \varepsilon\tilde{x}(t_0), x^*(t_f) + \varepsilon\tilde{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x^* + \varepsilon\tilde{x}, \dot{x} + \varepsilon\dot{\tilde{x}}, t)dt = \Phi(\varepsilon)\,,$$

является функцией от числового аргумента ε. Отсюда можно получить следующие условия оптимальности, которые называются условиями трансверсальности:

$$f'_{0,\dot{x}}\,|_{t=t_0} = \frac{\partial q_0}{\partial x}\,|_{t=t_0};\quad f'_{0,\dot{x}}\,|_{t=t_f} = -\frac{\partial q_0}{\partial x}\,|_{t=t_f}\,.$$

Итак, решение вариационной задачи с подвижными концами, кроме уравнений Эйлера - Лагранжа, должно удовлетворять условиям трансверсальности.

Найдем необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления с подвижными концами:

$$f_i(x, u, t) - \dot{x}_i = 0; i = 1, 2, ..., n\,;\ \phi_k(x, u, t) = 0; k = 1, 2, ...r\,.$$

Граничные условия для решения этой системы уравнений порядка n, включая условия трансверсальности, представляет собой $2n$ соотношений, которые позволяют определить все постоянные интегрирования. Данные граничные условия можно записать в виде равенств:

$$q_j[x(t_0), x(t_f)] = 0;\ j = 1, 2, \ldots s \le 2n,$$

где функции q_j предполагаются непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргумента. Тогда исходную задачу можно преобразовать в простейшую задачу Больца:

$$\tilde{J} = Q[x(t_0), x(t_f), v] + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \psi, \lambda, t)dt \to \min,$$

где $Q = \sum_{i=0}^{s} v_i q_i; v_0 = \psi_0$; $L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i$.

Функцию Q называют терминантом. Тогда условия трансверсальности можно записать в виде:

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(t_f) = \frac{\partial Q}{\partial x_i(t_f)}; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Принцип максимума Понтрягина.

В прикладных задачах на управление обычно накладываются ограничения в виде включения в некоторое допустимое множество. Такие ограничения обычно можно записать в виде неравенств. В этом случае применение метода множителей Лагранжа является неэффективным, так как с его помощью нельзя оценить число и координаты точек разрыва функции управления.

Задача с закрепленными концами и фиксированным временем.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t) = 0; i = 1, 2, \ldots, n;\ u \in U \subseteq \Re^m;$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1, 2, \ldots, n;\ J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt \to \min.$$

Будем предполагать, что функции f_i непрерывны по совокупности переменных x, u, t и непрерывно дифференцируемы по переменным x, t.

Отличие от задачи оптимального управления классического вариационного типа состоит в том, что ограничение на управление задается в виде включения $u \in U$. То есть не требуется гладкость функций f_i по переменной u. Таким образом, допустимыми управлениями считаются функции, принадлежащие к классу кусочно – непрерывных функций. В этом случае допустимые траектории системы $x(t)$ не будут непрерывны всюду на интервале $[t_0, t_f]$, а их производные могут иметь разрывы 1-го рода в точках разрыва управления.

Построим следующую функцию Лагранжа и гамильтониан:

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f_i - \dot{x}_i) = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i, \text{ где } H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i.$$

В данном случае, функция Лагранжа и гамильтониан не включают в себя ограничения на управление. Примем, как и ранее, что $\psi_0 = -1$. Тогда исходную задачу можно записать в следующем виде:

$$\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, u, \psi, t)dt \to \max_{u \in U}; \; x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1, 2, ..., n.$$

Пусть полученная задача имеет решение x^*, u^*, ψ^*. Тогда для нахождения такого решения необходимо рассмотреть следующие две подзадачи:

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, u^*, \psi, t)dt \to \max_{x,\psi}; \quad \tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f} L(x^*, \dot{x}^*, u, \psi^*, t)dt \to \max_{u \in U},$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1, 2, ..., n.$$

Эти подзадачи также можно записать в форме:

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u^*, \psi, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i]dt \to \max_{x,\psi}; \quad \tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f} [H(x^*, u, \psi^*, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \dot{x}_i^*]dt \to \max_{u \in U}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, x_i(t_f) = x_i^f; i = 1, 2, ..., n.$$

Очевидно, что первая подзадача является типовой задачей вариационного исчисления. Уравнения Эйлера для этой подзадачи, определяющие экстремали, имеют вид:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}; i = 1, 2, ..., n;$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1, 2, ..., n.$$

Во второй подзадаче, интеграл будет принимать максимальное значение при таком управлении, при котором подынтегральное выражение, как функция от управления u будет принимать максимальное значение. То есть, управление $u^*(t)$ должно доставлять максимум гамильтониану, или, всюду на интервале $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва $u^*(t)$, должно выполняться равенство $\max_{u \in U} H(x^*, u, \psi^*, t) = H(x^*, u^*, \psi^*, t)$. Данное соотношение, рассмотренное с необходимыми условиями оптимальности в виде уравнений Эйлера, называется принципом максимума Понтрягина. Очевидно, что уравнения $\dot{x}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial \psi_i}; i = 1, 2, ..., n$ совпадают с уравнениями объекта. Уравнения $\dot{\psi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1, 2, ..., n$ называют сопряженными уравнениями или сопряженной системой.

Принцип максимума (при закрепленных концах и фиксированном времени)*. Для того, чтобы допустимая для задачи* $\dot{x}_i = f_i(x, u, t) = 0; i = 1, 2, ..., n$*;* $u \in U \subseteq \Re^m$*;*

$x_i(t_0)=x_i^0, x_i(t_f)=x_i^f; i=1,2,...,n$; $J=\int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt \to \min$ *пара* $(x^*(t),u^*(t))$ *была ее решением, необходимо, чтобы существовали такие, не обращающиеся одновременно в нуль, константа* $\psi_0^* \le 0$ *и решение* $\psi^*(t)=(\psi_1^*,...,\psi_n^*)^T$ *сопряженной системы:*

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}; i=1,2,...,n,$$

где $H=\sum\limits_{i=0}^{n}\psi_i f_i$, *при* $x=x^*(t)$ *и* $u=u^*(t)$, *что при любом* $t\in[t_0,t_f]$, *кроме точек разрыва* $u^*(t)$, *функция* $H(u)=H(x^*,u,\psi^*,t)$ *при* $u=u^*(t)$ *достигает максимума, то есть выполняется соотношение* $\max\limits_{u\in U} H(x^*,u,\psi^*,t)=H(x^*,u^*,\psi^*,t)$.

Задача с подвижными концами и нефиксированным временем.

Пусть задана задача Больца:

$$\dot{x}_i = f_i(x,u,t)=0; i=1,2,...,n;\ u\in U\subseteq R^m;$$

$$q_j[x(t_0),x(t_f),t_0,t_f]=0;\ j=1,2,....s\le 2n+2;$$

$$J=q_0[x(t_0),x(t_f),t_0,t_f]+\int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\cdot dt \to \min.$$

Используя, как и ранее, прием Лагранжа, эту задачу сведем к следующей вариационной задаче:

$$\tilde{J}=Q+\int\limits_{t_0}^{t_f}(H-\sum_{i=1}^{n}\psi_i\dot{x}_i)dt \to \max,$$

где $Q=\sum\limits_{i=0}^{s} v_i q_i; v_0=\psi_0$, $H=\sum\limits_{i=0}^{n}\psi_i f_i$.

Для такой задачи можно сформулировать следующий принцип максимума.

Принцип максимума (при подвижных концах и нефиксированном времени)*. Для того, чтобы допустимая для задачи оптимального управления с подвижными концами пара* $(x^*(t),u^*(t))$ *была ее решением, необходимо:*

- *чтобы существовали такие, не обращающиеся одновременно в нуль, константа* $\psi_0^*\le 0$ *и решение* $\psi^*(t)=(\psi_1^*,...,\psi_n^*)^T$ *сопряженной системы* $\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}; i=1,2,...,n$, где $H=\sum\limits_{i=0}^{n}\psi_i f_i$, *при* $x=x^*(t)$ *и* $u=u^*(t)$, *что при любом* $t\in[t_0,t_f]$, *кроме точек разрыва* $u^*(t)$, *функция* $H(u)=H(x^*,u,\psi^*,t)$ *при* $u=u^*(t)$ *достигает максимума, то есть выполняется соотношение* $\max\limits_{u\in U} H(x^*,u,\psi^*,t)=H(x^*,u^*,\psi^*,t)$;

- *выполнялись условия трансверсальности:*

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(t_f) = \frac{\partial Q}{\partial x_i(t_f)}; i = 1,2,..., n \quad u H|_{t=t_0} = \frac{\partial Q}{\partial t_0}; \quad H|_{t=t_f} = -\frac{\partial Q}{\partial t_f}.$$

Допустимый управляемый процесс: $(\hat{x}(t), \hat{u}(.), \hat{t}_0, \hat{t}_f)$, называется локально оптимальным в сильном смысле процессом (или локально оптимальным или оптимальным процессом), если существует $\delta > 0$ такое, что для всякого допустимого управляемого процесса $(\hat{x}(t), \hat{u}(.), \hat{t}_0, \hat{t}_f)$, для которого выполняются условия:

$$\|(x(t), t_0, t_f) - (\hat{x}(t), t_0, t_f)\| = \max(\max_{1 \le i \le n}(\max_{t \in [t_0, t_f]}(|x_i(t) - \hat{x}_i(t)|, \sqrt{(t_0 - \hat{t}_0)^2 + (t_f - \hat{t}_f)^2}))) \le \delta,$$

$$J[\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_f), \hat{u}(t), \hat{x}(t)] \ge J[x(t_0), x(t_f), u(t), x(t)].$$

Можно сформулировать следующие правила решения задач оптимального управления /Александров, с10/ :

Шаг 0. Формализовать задачу, то есть привести ее к виду: $\dot{x} = F(x,u,t)$, $\phi_k(x,u,t) = 0; k = 1,2,...r$, $x(t_0) \in X_0, x(t_f) \in X_f$, $J = J[x(t_0), x(t_f), u(t), x(t)] \to \inf$.

Шаг 1. Построить функции L, Q или функции H, Q.

Шаг 2. Записать необходимые условия оптимальности процесса $(\hat{x}(t), \hat{u}(.), \hat{t}_0, \hat{t}_f)$:

- уравнения Эйлера в лагранжевой форме: $L'_{x_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}_i} = 0; i = 1,2,\ldots,n$; $L'_{u_j} = 0; j = 1,2,\ldots,m$,

или в форме Понтрягина: $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1,2,..., n$ с учетом граничных условий трансверсальности;

Шаг 3. Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполнены условия оптимальности с множителями Лагранжа $\psi_0 \le 0$ и $\psi(t) = (\psi_1, ..., \psi_n)^T$, не равными одновременно нулю;

Шаг 4. Среди найденных допустимых управляемых процессов найти решение – оптимальный процесс. Или показать, что решения нет.

Таким образом, решение задачи оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина (необходимых условий сильного относительного минимума) сводится к решению граничной (краевой) задачи для системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = F(x,u,t), \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

где функция $u(t)$ определяется из оптимизационной задачи:

$$u(t) = \arg(\max_{u \in U} H(x^*, u, \psi^*, t)),$$

которая дополняется условиями ограничений на фазовые координаты:

$$\phi_k(x,u,t) = 0; k = 1,2,...r,$$

и условиями трансверсальности:

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(t_f) = \frac{\partial Q}{\partial x_i(t_f)}; i = 1,2,\ldots,n.$$

Пример.

Рассмотрим задачу классического вариационного исчисления:

$$J = \int_0^1 (\dot{x}^2(t) - 4x(t))dt + x^2(1) \to \inf, \;\; x(0) = 0.$$

Шаг 0. Проведем формализацию задачи к стандартному виду:

$$\dot{x} = u, \;\; u \in U \subset (-\infty, \infty), \;\; \forall t \in [0,1], \;\; x(0) = 0;$$

$$J = \int_0^1 (u^2(t) - 4x(t))dt + x^2(1) \to \inf$$

Шаг 1. Интеграл от функции Лагранжа имеет вид:

$$\Im = \int_0^1 (\psi_0 \cdot (u^2 - 4x) + \psi_1 \cdot (\dot{x} - u))dt + \psi_0 \cdot x^2(1) + q \cdot (x(0) - 0),$$

Соответственно функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \psi_0 \cdot (u^2 - 4x) + \psi_1 \cdot (\dot{x} - u) = \psi^T \cdot x - H,$$

где $H = \psi_1 \cdot u - \psi_0 \cdot (u^2 - 4x)$

Соответственно, терминант можно записать в форме:

$$Q = q \cdot x(0) + \psi_0 \cdot x^2(1)$$

Шаг 2. В соответствии с уравнениями Эйлера – Лагранжа получим:

$$L_x - \frac{d}{dt}(L_{\dot{x}}(t)) = 0 \Rightarrow -4\psi_0 - \frac{d\psi_1}{dt} = 0 \Rightarrow \psi_1 = -4\psi_0 \cdot t + C.$$

Аналогично, для решения уравнений в форме Понтрягина получим:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{\psi}_1 = -4\psi_0 \Rightarrow \psi_1 = -4\psi_0 \cdot t + C$$

Условия трансверсальности в форме Лагранжа имеют вид:

$$L_{\dot{x}}(0) = \psi_1(0) = q; \;\; L_{\dot{x}}(1) = -2\psi_0 \cdot x(1).$$

Соответственно, условия трансверсальности в форме Понтрягина можно записать в форме:

$$\psi_1(0) = q, \;\; \psi_1(1) = -2\psi_0 \cdot x(1)$$

Условия оптимальности по управлению $u(t)$ имеют вид:

для функции Лагранжа $L(u) = \psi_0 \cdot u^2 - \psi_1 \cdot u$:

$$u(t) = \arg\min_{u \in (-\infty,\infty)} (L(u)) = \begin{cases} \dfrac{\psi_1}{2\psi_0}; \psi_0 \neq 0 \\ \forall u \in (-\infty, \infty); \psi_0 = 0, \psi_1 = 0 \\ 0; \psi_0 = 0, \psi_1 \neq 0 \end{cases},$$

для понтрягинской формы (условие максимума) $H(u) = -\psi_0 \cdot u^2 + \psi_1 \cdot u$:

$$u(t) = \arg\min_{u\in(-\infty,\infty)}(L(u)) = \begin{cases} \dfrac{\psi_1}{2\psi_0}; \psi_0 \neq 0 \\ \forall u \in (-\infty,\infty); \psi_0 = 0, \psi_1 = 0 \\ 0; \psi_0 = 0, \psi_1 \neq 0 \end{cases}$$

Условие стационарности по параметрам t_0, t_1 отсутствуют, так как в задаче моменты времени t_0, t_1 фиксированы.

Шаг 3.

Рассмотрим случай $\psi_0 = 0$. Тогда получим $\psi_1 = 0$, то есть все множители Лагранжа равны нулю, что противоречит принципу максимума. Следовательно, при $\psi_0 = 0$ допустимых экстремалей нет.

Если $\psi_0 \neq 0$, то если $\psi_0 = -1$, получим, что $u(t) = -\dfrac{\psi_1}{2}$, где $\psi_1 = 4 \cdot t + C$. То есть $u(t) = -2 \cdot t - \dfrac{C}{2}$. Из уравнения $\dot{x}(t) = u(t)$, найдем, что $x(t) = -t^2 - \dfrac{C}{2} \cdot t + B$. Так как $x(0) = 0$, то найдем, что $B = 0$. А так как $\psi_1(1) = 2 \cdot x(1)$ с одной стороны, и $\psi_1(1) = 4 + C$ с другой стороны, то найдем, что $C = -3$. Следовательно, экстремаль имеет вид: $\tilde{x}(t) = -t^2 + \dfrac{3}{2} \cdot t$.

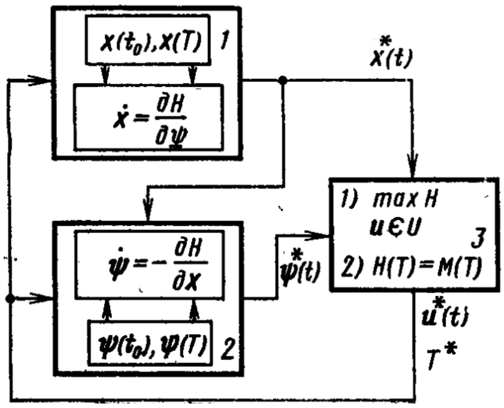
Шаг 4. Возьмем такую вариацию траектории $\delta x(t)$, чтобы функция $\tilde{x}(t) + \delta x(t)$ была допустимой, то есть $\delta x(t) \in C^1[0,1],\ \delta x(0) = 0$. Вычислим приращение функционала:

$$\delta J = J(\tilde{x}(t) + \delta x(t)) - J(\tilde{x}(t)) = \int_0^1 (\delta x(t))^2 dt + (\delta x(1))^2 .$$

Так как $\delta J \geq 0$, то на экстремали $\tilde{x}(t) = -t^2 + \dfrac{3}{2} \cdot t$ достигается абсолютный минимум функционала, который равен $J(\tilde{x}(t)) = -\dfrac{5}{6}$.

Аналитическое решение задачи оптимизации возможно лишь в некоторых, весьма редких, случаях. Чаще всего приходится использовать численные итерационные методы, которые могут быть поделены на два основных класса: прямые и непрямые методы. На рисунке ниже показана основная схема решения динамических задач оптимизации. При этом под величинами, отмеченными звездочкой, следует понимать оптимальное решение /Хофер с.16/.

В блоке 1 с учетом начальных и конечных условий решается дифференциальное уравнение относительно траектории $x(t)$. В блоке 2 соответствующий процесс протекает для сопряженной системы. По результатам, полученным в блоках 1 и 2, в блоке 3 определяются оптимальное управление $u^*(t)$, а также конечный момент T^* с учетом условий трансверсальности $M(T)$ в конечный момент времени. Полученные оценки $u^*(t), T^*$, в дальнейшем, используются для поиска оптимальных решений $x^*(t)$ и $\psi^*(t)$ в блоках 1 и 2.



При использовании прямых методов управление $u(t)$ и конечный момент T оцениваются, как начальные приближения. Итерационный процесс поиска ведется в направлении минимизации $J(u,T)$ в случае, если момент времени T не задан. При этом необходимые условия:

$$\max_{u\in U} H(x^*,u,\psi^*,t) = H(x^*,u^*,\psi^*,t)$$

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(T) = \frac{\partial Q}{\partial x_i(T)}; i = 1,2,...,n$$

$$H\,|_{t=t_0} = \frac{\partial Q}{\partial t_0};\ H\,|_{t=T} = -\frac{\partial Q}{\partial T},$$

не используются. Отсюда и название «прямые методы», так как минимум функционала $J(u,T)$ вычисляется непосредственно, без использования сопряженной системы и свойств максимума гамильтониана.

Обычно прямые методы используют, когда оптимальное управление задается в виде некоторой функции вида:

$$u^*(t) = \theta(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, t),$$

где $\alpha_i, i = 1,2,...,s$ - неизвестные, постоянные по времени параметры.

При использовании непрямых методов оцениваются решения $x(t), \psi(t)$ исходной и сопряженной систем. Необходимое условие $\max\limits_{u\in U} H(x^*,u,\psi^*,t) = H(x^*,u^*,\psi^*,t)$ на каждой итерации выполняется, а исходное и сопряженное уравнения решаются с учетом краевых условий.

Прямые численные методы решения задач оптимального управления.

Рассмотрим систему уравнений состояния вида:

$$\dot{x} = F(x,u,t),\ x \in \Re^n;\ u \in \Re^m;\ F : \Re^n \otimes \Re^m \otimes \Re.$$

Граничные условия для системы заданы соотношениями:

$$q_j(x(t_0), x(t_f)) = 0;\ j = 1,2,....s \le 2n$$

Минимизируемый функционал задается в форме:

$$J(u) = q_0(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) \cdot dt .$$

При итерационном решении задачи с помощью прямых методов в качестве начального приближения берется управление $u^{(0)}(t)$ и для него, при соблюдении граничных условий, интегрируется система $\dot{x} = F(x,u,t)$. Зачем вычисляется значение функционала $J(u^{(0)})$. Новое управление $u^{(1)}(t) = u^{(0)}(t) + \Delta u^{(0)}(t)$ строится таким образом, чтобы выполнялось условие: $J(u^{(1)}) < J(u^{(0)})$. Необходимые коррекции управления $\{\Delta u^{(i)}(t)\}$ строятся до тех пор, пока оптимальное решение не будет аппроксимировано достаточно точно.

Численное решение вариационной задачи Майера.

Рассмотрим теперь применение предложенной схемы для решения вариационной задачи Майера, для которой в функционале $J(u)$ отсутствует функция f_0. То есть $J(u) = q_0(x(t_f, t_f)$. Очевидно, этот критерий имеет смысл тогда, когда функция $x(t_f)$ не имеет ограничений. То есть в качестве граничных условий могут выступать лишь начальные условия, которые можно записать в форме: $x(t_0) = \overline{x}$. Предположим, что момент времени t_f задан, а вектор управления $u(t)$ неограничен.

Таким образом, задача оптимизации состоит в следующем: определить такой вектор управления $u(t)$, при котором система из заданного начального состояния $x(t_0) = \overline{x}$ за заданный интервал времени $t_f - t_0$ будет переведена в конечное состояние $x(t_f)$ и, при этом, будет обеспечен минимум функционала $J(u) = q_0(x(t_f, t_f)$.

Пусть известно начальное приближение функции управления $u^{(0)}(t)$. С помощью этого управления может быть вычислена соответствующая траектория $x^{(0)}(t)$, а также значение функционала $J^{(0)} = J(u^{(0)})$, которое очевидно, в большинстве случаев, не будет совпадать с оптимальным значением $J^* = J(u^*)$. Поэтому необходимо модифицирующее приращение $\Delta u^{(0)}(t)$, чтобы уменьшить значение функционала. Для $i+1$ шага надо будет найти $\Delta u^{(i)}(t)$ такое, что при управлении $u^{(i+1)}(t) = u^{(i)}(t) + \Delta u^{(i)}(t)$ будет выполняться соотношение $J^{(i+1)} < J^{(i)}$.

Запишем линейную часть разложения в ряд Тейлора функционала $J^{(i+1)}$ относительно конечного состояния $x^{(i)}(t_f)$:

$$J^{(i+1)} = J^{(i)} + (\frac{\partial J}{\partial x})|_{x=x^{(i)}(t_f)} \cdot \Delta x^{(i)}(t_f) .$$

Чтобы значение $J^{(i+1)} < J^{(i)}$ необходимо, чтобы $(\frac{\partial J}{\partial x})|_{x=x^{(i)}(t_f)} \cdot \Delta x^{(i)}(t_f) < 0$.

Рассмотрим линеаризованную, относительно траектории $x^{(i)}(t)$, систему уравнений состояния, которую можно записать в виде:

$$\Delta\dot{x}^{(i)}(t) = A^{(i)}(t)\cdot\Delta x^{(i)}(t) + B^{(i)}(t)\cdot\Delta u^{(i)}(t),$$

где $A^{(i)}(t) = (\frac{\partial F}{\partial x})|_{\substack{x=x^{(i)}(t),\\ u=u^{(i)}(t)}}$, $B^{(i)}(t) = (\frac{\partial F}{\partial u})|_{\substack{x=x^{(i)}(t)\\ u=u^{(i)}(t)}}$.

Так как приближенные решения $x^{(i)}(t)$ удовлетворяют начальному условию, то справедливо соотношение: $\Delta x^{(i)}(t_0) = 0$. Тогда решение $\Delta x^{(i)}(t)$ можно записать с помощью соотношения:

$$\Delta x^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{t}\Phi^{(i)}(t,s)\cdot B^{(i)}(s)\cdot\Delta u^{(i)}(s)\cdot ds,$$

где $\Phi^{(i)}(t,s)$ - фундаментальная матрица линеаризованной системы.

Проведя преобразования, найдем, что приращение функционала $\Delta J^{(i)} = J^{(i+1)} - J^{(i)}$ имеет следующий вид:

$$\Delta J^{(i)} = \int_{t_0}^{t_f}\Phi^{(i)}(t_f,t)\cdot(\frac{\partial q_0}{\partial x^{(i)}(t_f)})^T\cdot B^{(i)}(t)\cdot\Delta u^{(i)}(t)\cdot dt.$$

Рассмотрим сопряженную линейную систему:

$$\dot{\psi}^{(i)} = -A^{(i)}(t)\cdot\psi^{(i)},\ \ \psi^{(i)}(t_0) = \bar{\psi}^{(i)}.$$

Фундаментальная матрица $\Psi^{(i)}(t,t_0)$ такой системы удовлетворяет важному соотношению:

$$(\Psi^{(i)}(t,t_0))^T\cdot\Phi^{(i)}(t,t_0) = E,$$

где E - единичная диагональная матрица. Решение сопряженной системы может быть записано как:

$$\psi^{(i)}(t) = (\Phi^{(i)}(t_f,t))^T\cdot\psi^{(i)}(t_f).$$

При этом $\psi^{(i)}(t_f) = -(\frac{\partial q_0}{\partial x^{(i)}})|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t_f)}$.

Введем в рассмотрение следующую функцию Гамильтона:

$$H(x,u,\psi,t) = \psi^T\cdot F(x,u,t).$$

Приращение функционала с учетом приведенных соотношений может быть записано как:

$$\Delta J^{(i)} = -\int_{t_0}^{t_f}(\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}})|_{\substack{x^{(i)}(t)\\ u^{(i)}(t)\\ \psi^{(i)}(t)}}\cdot\Delta u^{(i)}(t)\cdot dt$$

Очевидно, коррекцию $\Delta u^{(i)}(t)$ следует выбирать таким образом, чтобы $\Delta J^{(i)}$ стало возможно более малым , то есть $|\Delta J^{(i)}|$ было бы как можно более большим. В этом случае обычно рассматривают следующее соотношение:

$$\Delta u^{(i)}(t) = h^{(i)}\cdot G^{-1}\cdot(\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T,$$

Где $h^{(i)} > 0$ - длина шага, G - постоянная матрица влияния, которая задает различным компонентам $\Delta u^{(i)}(t)$ различный вес (в большинстве случаев матрица G берется равной единичной диагональной матрице).

Приращение функционала тогда может быть записано как:

$$\Delta J^{(i)} = -h^{(i)} \cdot \int_{t_0}^{t_f} (\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}}) \cdot G^{-1} \cdot (\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T \cdot dt .$$

Алгоритм решения вариационной оптимизационной задачи Майера может быть записан в следующей форме:

Шаг 1. Назначается исходное приближение $u^{(0)}(t)$;

Шаг 2. На каждой итерации $i = 0,1,2,...$ при управлении $u^{(i)}(t)$ и начальном условии $x(t_0) = \overline{x}$ с целью получения решения $x^{(i)}(t)$ численно интегрируется система $\dot{x} = F(x,u,t)$ на отрезке $[t_0, t_f]$.

Шаг 3. Путем численного интегрирования, в обратном порядке от момента $t = t_f$ до момента $t = t_0$, сопряженной линеаризованной системы определяется векторная функция $\psi^{(i)}(t)$.

Шаг 4. С помощью приближений функций $x^{(i)}(t)$, $\psi^{(i)}(t)$ и $u^{(i)}(t)$ вычисляется градиент функции Гамильтона $\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}}$.

Шаг 5. Выбрав длину шага $h^{(i)} > 0$ и матрицу влияния G, вычисляется коррекция управления $\Delta u^{(i)}(t) = h^{(i)} \cdot G^{-1} \cdot (\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T$.

Шаг 6. Определяется величина приращения функционала:

$$\Delta J^{(i)} = -h^{(i)} \cdot \int_{t_0}^{t_f} (\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}}) \cdot G^{-1} \cdot (\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T \cdot dt .$$

Если $| \Delta J^{(i)} | \geq \varepsilon$, то формируется новое значение управления $u^{(i+1)}(t) = u^{(i)}(t) + \Delta u^{(i)}(t)$ и алгоритм переходит к шагу 2.

Если $| \Delta J^{(i)} | < \varepsilon$, то алгоритм останавливает работу.

Численное решение вариационной задачи Больца.

В данном случае функционал задается формулой:

$$J(u) = q_0(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) \cdot dt$$

Тогда линейная часть разложения функционала в ряд имеет вид:

$$J^{(i+1)} = J^{(i)} + (\frac{\partial q_0}{\partial x})|_{x^{(i)}(t_f)} \cdot \Delta x^{(i)}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} ((\frac{\partial f_0}{\partial x})|_{\substack{x^{(i)}(t) \\ u^{(i)}(t)}} \cdot \Delta x^{i}(t) + (\frac{\partial f_0}{\partial u})|_{\substack{x^{(i)}(t) \\ u^{(i)}(t)}} \cdot \Delta u^{(i)}(t)) \cdot dt .$$

С помощью функции Гамильтона $H(x,u,\psi,t) = -f_0 + \psi^T \cdot F(x,u,t)$, а также уравнения сопряженной системы $\dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ можно найти следующие градиенты (векторы - строки):

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}|_{\substack{x^{(i)} \\ u^{(i)} \\ \psi^{(i)}}} = (\dot{\psi}^{(i)} + (A^{(i)}(t))^T \cdot \psi^{(i)})^T ; \qquad \frac{\partial f_0}{\partial u}|_{\substack{x^{(i)} \\ u^{(i)} \\ \psi^{(i)}}} = -\frac{\partial H}{\partial u}|_{\substack{x^{(i)} \\ u^{(i)} \\ \psi^{(i)}}} + ((\psi^{(i)})^T \cdot B^{(i)})^T .$$

Подставляя полученные соотношения в линейную часть разложения функционала и, проведя преобразования с учетом условия трансверсальности, получим следующее выражение для приращения функционала:

$$\Delta J^{(i)} = -\int_{t_0}^{t_f} (\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}})|_{\substack{x^{(i)}(t) \\ u^{(i)}(t) \\ \psi^{(i)}(t)}} \cdot \Delta u^{(i)}(t) \cdot dt .$$

Данный результат совпадает с результатом, полученным для задачи Майера. Поэтому дальнейший вычислительный процесс вычисления поправок управления $\Delta u^{(i)}(t)$ протекает аналогично, как при решении задачи Майера. То есть задача Больца с точки зрения ее решения методом градиента идентична задаче Майера.

Пусть заданы граничные условия на правом конце в виде соотношений $q_j(x(t_f),t_f) = 0,\ j = 1,2,...,r \le n$, а начальные условия по-прежнему имеют вид $x(t_0) = \bar{x}$. В этом случае расчет поправок управления $\Delta u^{(i)}(t)$ резко усложняется и приводит к проблемам сходимости градиентной схемы.

Рассмотрим теперь возможность применения градиентной схемы, когда вектор управления $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))^T$ принадлежит некоторой области, заданной ограничениями:

$$u_{j\min} \le u_j(t) \le u_{j\max},\quad j = 1,2,...,m .$$

Таким образом, величина коррекции управления должна подчиняться следующим условиям:

$$u_{j\min} - u_j^{(i)}(t) \le \Delta u_j^{(i)}(t) \le u_{j\max} - u_j^{(i)}(t),\quad j = 1,2,...,m .$$

Тогда для задачи Больца с незаданными конечными условиями можно сформировать следующие изменения алгоритма для определения поправок управления $\Delta u^{(i)}(t)$.

1.Проверяется условие принадлежности управлений $u_j^{(i)}(t)$ заданной области, то есть:

$$u_{j\min} \le u_j^{(i)}(t) \le u_{j\max},\quad j = 1,2,...,m ,$$

для всех точек отрезка $t \in [t_0, t_f]$.

Если это условие выполнено, то составляющие коррекции управления определяются с помощью соотношений:

$$\Delta u_j^{(i)}(t) = h^{(i)} \cdot g_j^T \cdot (\frac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T ,$$

где g_j^T - вектор – строка, образованный из j - ой строки матрицы G^{-1}.

2.Проверяется выполнение условий:

$$u_{j\min} \le u_j^{(i)}(t) + \Delta u_j^{(i)}(t) \le u_{j\max}, \quad j = 1, 2, ..., m .$$

Если все условия выполняются, то расчет продолжается при вычисленном значении $\Delta u^{(i)}(t)$.

Если же какое-то условие не выполняется, то есть имеет место: $u_j^{(i)}(t) + \Delta u_j^{(i)}(t) > u_{j\max}$ или $u_j^{(i)}(t) + \Delta u_j^{(i)}(t) < u_{j\min}$, то тогда определяют $\Delta u_j^{(i)}(t) = u_{j\max} - u_j^{(i)}(t)$ или, соответственно $\Delta u_j^{(i)}(t) = u_j^{(i)}(t) - u_{j\min}$.

3.Для случая $u_j^{(i)}(t) = u_{j\max}$ справедливо:

$$\Delta u_j^{(i)}(t) = \begin{cases} 0, & g_j^T \cdot (\dfrac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T > 0 \\ h^{(i)} \cdot g_j^T \cdot (\dfrac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T, & g_j^T \cdot (\dfrac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T < 0 \end{cases} .$$

Для случая $u_j^{(i)}(t) = u_{j\min}$ справедливо:

$$\Delta u_j^{(i)}(t) = \begin{cases} 0, & g_j^T \cdot (\dfrac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T < 0 \\ h^{(i)} \cdot g_j^T \cdot (\dfrac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T, & g_j^T \cdot (\dfrac{\partial H}{\partial u^{(i)}})^T > 0 \end{cases}$$

В общем случае, при ограниченных управлениях оптимизация длины шага невозможна из-за возможности нарушений ограничений на управление. Поэтому величину шага $h^{(i)}$ выбирают достаточно малой.

К недостаткам решения оптимизационных задач итерационным методом градиента следует отнести медленную сходимость и достаточно высокую чувствительность к выбору начального приближения $u^{(0)}(t)$ оцениваемой функции оптимального управления.

Непрямые численные методы решения задач оптимального управления.

При итерационном решении задач оптимизации непрямыми методами предполагается, что необходимые условия оптимальности строго выполняются.

Рассмотрим следующую систему в виде уравнений состояния:

$$\dot{x} = F(x, u, t), \; x \in \Re^n; \; u \in \Re^m; \; F : \Re^n \otimes \Re^m \otimes \Re .$$

Краевые условия задаются в виде соотношений:

$$q_{s,j}(x(t_0), t_0) = 0, \; j = 1, 2, ..., p \le n; \quad q_{f,k}(x(t_f), t_f) = 0, \; k = 1, 2, ..., s \le n$$

В качестве задачи оптимизации будем предполагать задачу Больца с функционалом:

$$J(u) = q_0(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) \cdot dt$$

Чтобы решить подобную задачу с помощью принципа максимума необходимо построить сопряженную систему вида:

$$\dot{\psi} = (\frac{\partial f_0}{\partial x})^T - (\frac{\partial F}{\partial x})^T \cdot \psi .$$

Оптимальный вектор управления определяется из условия, что функция Гамильтона $H(x,u,\psi,t) = -f_0 + \psi^T \cdot F(x,u,t)$ должна иметь максимум по управлению $u(t)$, то есть оптимальное управление $u^*(t) = u(x,\psi,t)$. Подставляя полученное управление в уравнения состояния и сопряженную систему, получим систему связанных уравнений порядка $2n$ вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= W(x,\psi,t); \\ \dot{\psi} &= R(x,\psi,t); \end{aligned}$$

для которой надо найти решение краевой задачи. При этом, при интегрировании полученной системы свободные постоянные должны быть выбраны так, чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла краевым условиям, а функция $\psi(t)$ условиям трансверсальности (смотрите соответствующую теорему в разделе, посвященном принципу максимума Понтрягина).

Предположим для простоты, что $q_0(x(t_f),t_f) = 0$, краевые условия заданы в форме:

$$\begin{aligned} x_j(t_0) &= x_{j,0},\ j = 1,2,...,n \\ x_k(t_f) &= x_{k,t_f},\ k = 1,2,....,n \end{aligned},$$

и время t_f фиксировано.

Тогда при известном начальном состоянии $x(t_0)$, а также приближении $\psi^{(i)}(t_0)$ для оптимальной функции $\psi^*(t_0)$ система связанных уравнений может быть численно проинтегрирована и, соответственно, найдены приближения:

$$\begin{aligned} x^{(i)}(t) &= \xi(x(t_0),\psi^{(i)}(t_0),t); \\ \psi^{(i)}(t) &= \eta(x(t_0),\psi^{(i)}(t_0),t) \end{aligned}$$

При этом, приближение $\psi^{(i)}(t_0)$ не совпадает, в общем случае с величиной $\psi^*(t_0)$, а приближение $x^{(i)}(t_f)$ не совпадает с величиной $x(t_f)$. Линейная часть разложения $x(t_f)$ в ряд Тейлора может быть записана в виде:

$$x(t_f) = x^{(i)}(t_f) + \frac{\partial \xi(x(t_0),\psi^{(i)}(t_0),t_f)}{\partial \psi^{(i)}(t_0)} \cdot (\psi^*(t_0) - \psi^{(i)}(t_0)) .$$

Отсюда, для поиска приближения $\psi^{(i+1)}(t_0)$, можно записать следующую итерационную процедуру Ньютона - Рафсона:

$$\psi^{(i+1)}(t_0) = \psi^{(i)}(t_0) - (\frac{\partial \xi}{\partial \psi^{(i)}(t_0)})^{-1} \cdot (x^{(i)}(t_f) - x(t_f)) .$$

Однако такая процедура не даст сразу сходимости величин $\psi^{(i)}(t_0)$ к величине $\psi^*(t_0)$. Поэтому надо выбирать новое значение $\psi^{(0)}(t_0)$ и снова повторять процесс получения функций $\xi(x(t_0),\psi^{(i)}(t_0),t);\ \eta(x(t_0),\psi^{(i)}(t_0),t)$.

Рассмотрим теперь случай, когда краевые условия имеют вид:

$$x_j(t_0)=x_{j,0},\ j=1,2,...,n$$
$$x_k(t_f)=x_{k,t_f},k=1,2,....,r<n$$

Тогда, недостающие $(n-r)$ конечных условий для функции $x(t)$ заменяются условиями трансверсальности для функции $\psi(t)$: $\psi_k(t_f)=0,k=r+1,...,n$.

Тогда можно записать следующие приближенные соотношения:

$$x_k(t_f)=x^{(i)}(t_f)+\frac{\partial\xi_k(x(t_0),\psi^{(i)}(t_0),t_f)}{\partial\psi^{(i)}(t_0)}\cdot(\psi^*(t_0)-\psi^{(i)}(t_0)),\ \ k=1,2,...,r\ ;$$

$$0=\psi_k^{(i)}(t_f)+(\frac{\partial\eta_k(x(t_0),\psi^{(i)}(t_0),t_f)}{\partial\psi^{(i)}(t_0)})^T\cdot(\psi^*(t_0)-\psi^{(i)}(t_0)),k=r+1,...,n$$

Определим новый вектор $y(t)=(y_1(t),y_2(t),...,y_n(t))^T$:

$$y_j(t)=\begin{cases}x_j(t), & j=1,2,...,r\\ \psi_j(t), & j=r+1,...,n\end{cases}$$

Отсюда итерационная процедура Ньютона - Рафсона для нахождения $\psi^*(t_0)$ может быть записана в форме:

$$\psi^{(i+1)}(t_0)=\psi^{(i)}(t_0)-(K^{(i)})^{-1}\cdot(y^{(i)}(t_f)-y(t_f)),$$

где

$$y(t_f)=(x_1(t_f),...,x_r(t_f),0,...,0)^T,\ \ K^{(i)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\hat{\xi}}{\partial\psi^{(i)}(t_0)}\\ ...\\ \dfrac{\partial\hat{\eta}}{\partial\psi^{(i)}(t_0)}\end{pmatrix},\ \hat{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_r)^T,\hat{\eta}=(\eta_{r+1},...,\eta_n)^T$$

Если краевые условия заданы в общем виде и функция $q_0\neq 0$, то форма записи итерационного процесса остается в силе. Однако, выражение для матрицы $K^{(i)}$ значительно усложняется.

Если время t_f не фиксировано, то разложения Тейлора для краевых условий и условий трансверсальности должны быть дополнены производными по параметру t_f. В этом случае матрица $K^{(i)}$ не является квадратной и, необходимо использовать условия трансверсальности для оптимального значения t_f^*.

Алгоритм Ньютона – Рафсона для определения приближений к величинам $\psi^*(t_0)$ и t_f^*.

Шаг 1. Задается начальное приближение $\psi^{(0)}(t_0)$ и, если t_f свободно, $t_f^{(0)}$.

Шаг 2. На каждой итерации $i = 0,1,2,...$ при учете начального состояния $x(t_0)$ и приближений $\psi^{(i)}(t_0), t_f^{(i)}$ интегрируется система связанных уравнений. Определяются решения:

$$x^{(i)}(t) = \xi(x(t_0), \psi^{(i)}(t_0), t);$$
$$\psi^{(i)}(t) = \eta(x(t_0), \psi^{(i)}(t_0), t)$$

Шаг 3. Строят разложение в ряд Тейлора (при необходимости уточненных):

$$x_k(t_f) = x^{(i)}(t_f) + \frac{\partial \xi_k(x(t_0), \psi^{(i)}(t_0), t_f)}{\partial \psi^{(i)}(t_0)} \cdot (\psi^*(t_0) - \psi^{(i)}(t_0)), \;\; k = 1,2,...,r\,;$$

$$0 = \psi_k^{(i)}(t_f) + \left(\frac{\partial \eta_k(x(t_0), \psi^{(i)}(t_0), t_f)}{\partial \psi^{(i)}(t_0)}\right)^T \cdot (\psi^*(t_0) - \psi^{(i)}(t_0)), k = r+1,...,n$$

Шаг 4. Вычисляют улучшенные значения $\psi^{(i+1)}(t_0), t_f^{(i+1)}$ с использованием итерационной процедуры:

$$\psi^{(i+1)}(t_0) = \psi^{(i)}(t_0) - (K^{(i)})^{-1} \cdot (y^{(i)}(t_f) - y(t_f))$$

Процедура повторяется, начиная с шага 2, столько раз, пока не будет достигнута требуемая точность: $\| y^{(i)}(t_f^{(i)}) - y(t_f) \| < \varepsilon$.

Вычисление матрицы $K^{(i)}$ требует вычисления частных производных:

$$\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \psi^{(i)}(t_0)}, \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \psi^{(i)}(t_0)}, \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t_f^{(i)}}, \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t_f^{(i)}}.$$

Область сходимости метода Ньютона – Рафсона значительно меньше, чем область градиентного метода. Поэтому задание начальных приближений $\psi^{(0)}(t_0)$ и $t_f^{(0)}$ должно быть достаточно близким к точным решениям. Иначе метод может расходиться. Кроме того метод имеет большую чувствительность, что требует высокой точности вычислений.

Преимущество метода заключается в возможности вычисления приближения решения $x^{(i)}(t)$ на каждой итерации, которое хотя и не удовлетворяет заданным краевым условиям, но удовлетворяет условиям оптимизации.

<u>Оптимальное управление дискретными (многошаговыми) процессами.</u>

Уравнения, описывающие эволюцию управляемой системы без последействия с дискретным временем с интервалом дискретности ΔT на отрезке $[0, N \cdot \Delta T]$, могут быть записаны в виде /Моисеев с74/:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + F^{(k)}(x^{(k)}, u^{(k)}), \;\; k = 0,1,..., N-1.$$

Для задачи Майера функция Гамильтона будет равна:

$$H_k = H(\bar{\psi}^{(k+1)}, x^{(k)}, u^{(k)}) = (\bar{\psi}^{(k+1)}, F^{(k)}(x^{(k)}, u^{(k)})) = \sum_{i=0}^{k-1} \psi^{(i)} \cdot F^{(i)}(x^{(i)}, u^{(i)}); \;\; \bar{\psi}^{(k+1)} = (\psi^{(1)}, ..., \psi^{(k)})^T$$

.

Сопряженная система для такой задачи будет определяться уравнениями:

$$\overline{\psi}^{(k+1)} = \overline{\psi}^{(k)} - \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x^{(k)}}\right) \cdot \overline{\psi}^{(k)}$$

Если рассматривать задачу Лагранжа, то функционал минимизации примет форму:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0^{(k)}(x^{(k)}, u^{(k)}).$$

Функция Гамильтона тогда будет иметь вид:

$$H_k = H(\overline{\psi}^{(k+1)}, x^{(k)}, u^{(k)}) = (\overline{\psi}^{(k+1)}, F^{(k)}(x^{(k)}, u^{(k)})) - f_0^{(k)}(x^{(k)}, u^{(k)}), k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Рассмотрим задачу Лагранжа со свободным правым концом для дискретной системы. Будем считать значение $x^{(0)}$ фиксированным, а значение $x^{(N)}$ свободным. Оптимальное решение задачи обозначим как: $x^{*(k)}, u^{*(k)}$. Имеет место следующее утверждение.

***Теорема** /Моисеев с78/. Если управление $u^{*(k)}$ и траектория $x^{*(k)}$ доставляют минимум функционалу:*

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0^{(k)}(x^{(k)}, u^{(k)}),$$

при уравнениях связи $x^{(k+1)} = x^{(k)} + F^{(k)}(x^{(k)}, u^{(k)}),\ \ k = 0, 1, \dots, N-1$ *и фиксированных начальных условиях* $x^{(0)}$, *то существуют такие векторы* $\overline{\psi}^{(k)}$, *удовлетворяющие уравнениям:*

$$\overline{\psi}^{(k)} = \overline{\psi}^{(k+1)} + \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x^{(k)}}\right) \cdot \overline{\psi}^{(k+1)} - \frac{\partial f_0^{(k)}}{\partial x^{(k)}},$$

и граничному условию $\overline{\psi}^{(N)} = 0$, *что векторы* $u^{*(k)}$ *при каждом* k *являются стационарными точками функции Гамильтона* H_k. *То есть* $\frac{\partial H_k}{\partial u^{(k)}}\Big|_{\substack{x^{*(k)}\\ u^{*(k)}}} = 0$.

В теореме уравнения для сопряженных переменных записаны «справа - налево». В тех случаях, когда необходима запись «слева – направо», данные уравнения необходимо разрешать относительно $\overline{\psi}^{(k+1)}$.

Данный результат может быть обобщен и для более общего вида краевых условий.

На оптимальной траектории функция Гамильтона тем больше может отличаться от своего максимального значения, чем больше шаг дискретизации. Если дискретная система не связана с конечномерной аппроксимацией непрерывного процесса, то, в общем случае, нет никаких оснований предполагать справедливость принципа максимума. Как показано, оптимальное управление в дискретных задачах обращает производную функцию Гамильтона в нуль, и только. При этом имеются примеры, показывающие, что на оптимальной траектории функция Гамильтона может иметь и максимум, и минимум, и седловую функцию.

Однако можно указать класс дискретных систем, для которых справедлив принцип максимума. Рассмотрим множество:

$$R(x) = \{\tilde{x} : \tilde{x} = x + F(x, u); u \in U\},$$

которое представляет множество всех состояний $\tilde{x}$, в которые можно перевести точку x за один шаг допустимым управлением /Пропой с27/.

***Теорема**. Пусть множество* $R(x)$ *выпукло при любых* x *. Тогда для оптимальности управления необходимо, чтобы функция Гамильтона на оптимальном управлении* $u^{*(k)} \in U$ *достигала максимального значения.*

Метод динамического программирования.

Основная схема метода динамического программирования состоит в том, что исходную задачу включают в некоторое семейство задач оптимизации, среди которых существует некоторая задача, которая легко решается. Тогда используя соотношения, связывающие отдельные задачи семейства, можно найти и решение исходной задачи. Принцип включения решаемой задачи в семейство оптимизационных задач часто называют принципом инвариантного погружения или принципом оптимальности. В общем виде этот принцип формулируется следующим образом: «оптимальная стратегия (поведение) обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и решения на начальном этапе, решения на последующем этапе должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, которое получается в результате принятия решений на начальном этапе».

В задачах оптимального управления критерий оптимальности определяется функционалом $J(u(t), x(t))$, состояние – фазовым вектором $x(t)$; стратегия – это управление на интервале $[t_0, t_f]$, решение – выбор конкретного управления. Принцип оптимальности применим для задачи оптимального управления, если она обладает марковским свойством. То есть, если после выбора управления на начальном интервале $[t_0, t_1]$, на величину критерия $J(u(t), x(t))$ на конечном интервале $[t_1, t_f]$ оказывают влияние выбор управления на этом интервале и значение фазового вектора в конце начального интервала, то есть $x(t_1)$.

Оптимальное управление непрерывными процессами.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = F(x,u,t); u(t) \in U_t; x(t_0) = x^0; x(t_f) \in X_f; \quad J = q_0(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t) \cdot dt \to \min .$$

Введем следующее обозначение управления $u(t)$ на интервале $[a,b]$: $u[a,b] = \{u(t); a \le t \le b\}$.

Тогда, для оптимальности пары $(u^*(t), x^*(t))$ *необходимо, чтобы при любом* $t_1 \in [t_0, t_f]$ *управление* $u^*[t_1, t_f]$ *было оптимальным относительно состояния* $x^*(t_1)$*, в котором окажется объект в момент* t_1*, при выборе на начальном отрезке времени* $[t_0, t_1)$ *управления* $u^*[t_0, t_1)$.

Можно сформулировать и более общее утверждение.

Если допустимая для задачи оптимального управления пара $(u^*(t), x^*(t))$ *оптимальна, то, каков бы ни был интервал* $[t_1, t_2] \subseteq [t_0, t_f]$*, управление* $u^*(t)$ *на этом интервале является оптимальным относительно граничных точек* $x^*(t_1)$ *и* $x^*(t_2)$.

Обратный принцип оптимальности. *Для оптимальности допустимой пары* $(u^*(t), x^*(t))$ *необходимо, чтобы при любом* $t_1 \in [t_0, t_f]$ *управление* $u^*[t_0, t_1]$ *было оптимальным относительно конечного для интервала* $[t_0, t_1]$ *состояния* $x(t_1) = x^*(t_1)$.

Уравнение Гамильтона – Якоби - Беллмана.

Проведем инвариантное погружение задачи оптимального управления в семейство задач, которое получается из исходной задачи путем замены начального условия $x(t_0) = x^{(0)}$ параметрическим условием $x(t_1) = x^{(1)}$, $t_1 \in [t_0, t_f]$. Здесь $t_1, x^{(1)}$ рассматриваются как параметры.

Введем следующую функцию $S(x(t_1), t_1) = \min\limits_{u(t)\in U; t_1 \le t \le t_f} [q_0(x(t_f), t_f) + \int\limits_{t_1}^{t_f} f_0(x,u,t)dt]$. Очевидно, что $S(x(t_f), t_f) = q_0(x(t_f), t_f)$. Функцию $S(x(t_1), t_1)$ называют обычно функцией Беллмана или функцией оптимальной цены. В силу принципа оптимальности можно записать следующее соотношение:

$$S(x(t_1), t_1) = \min_{u(t)\in U; t_1 \le t \le t_1+\Delta t} [\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t} f_0 dt + \min_{u(t)\in U; t_1+\Delta t \le t \le t_f} (q_0(x(t_f), t_f) + \int\limits_{t_1}^{t_f} f_0 dt)],$$

или

$$S(x(t_1), t_1) = \min_{u(t)\in U; t_1 \le t \le t_1+\Delta t} [\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t} f_0 dt + S(x(t_1+\Delta t), t_1+\Delta t)].$$

Функция $S(x(t_1), t_1)$ не зависит от управления на интервале $[t_1, t_1+\Delta t]$. Поэтому можно записать следующее выражение:

$$0 = \min_{u(t)\in U; t_1 \le t \le t_1+\Delta t} [\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t} f_0 dt + S(x(t_1+\Delta t), t_1+\Delta t) - S(x(t_1), t_1)].$$

Тогда, устремляя Δt к нулю, можно записать следующее уравнение:

$$\min_{u(t)\in U} [f_0(x,u,t) + \frac{dS(x(t),t)}{dt}] = 0.$$

или, после преобразований, уравнение:

$$\min_{u(t)\in U} [f_0(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(x,u,t) + \frac{\partial S}{\partial t}] = 0, \quad F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T.$$

Данное соотношение называется уравнением Гамильтона – Якоби – Беллмана, так как тесно связано с оптимизацией движения механических систем, изучаемых в аналитической механике. Очевидно, что функция $S(x(t), t)$ не зависит от управления $u(t)$. Поэтому уравнение Гамильтона – Якоби - Беллмана можно записать в форме:

$$\min_{u(t)\in U} [f_0(x,u,t) + \frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x} F(x,u,t)] = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Таким образом, если функция Беллмана дифференцируема, то для того, чтобы допустимая пара $(u(t), x(t))$ для задачи оптимального управления была ее решением, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению при граничном условии вида:

$$S(x(t_f), t_f) = q_0(x(t_f), t_f).$$

Если минимум $\min\limits_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t) + \frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}F(x,u,t)]$ левой части уравнения достигается во внутренней точке множества U, то уравнение Гамильтона – Якоби - Беллмана можно записать в виде следующей системы уравнений с частными производными:

$$f_0(x,u,t) + \frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}F(x,u,t) = -\frac{\partial S}{\partial t};$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}[f_0(x,u,t) + \frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}F(x,u,t)] = 0; k = 1,2,...,m$$

Для случая, когда правые части уравнений объекта и подынтегральное выражение в критерии оптимальности явно не зависят от времени, и, конечный момент не фиксирован, получим, что функция Беллмана не зависит явно от времени, как от параметра. Тогда можно принять, что $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$. При выводе необходимых условий оптимальности предполагалось, что функция Беллмана является непрерывно дифференцируемой. Однако, данное условие не всегда выполняется. Поэтому часто метод динамического программирования применяют без достаточного обоснования, только используя эвристические соображения. Однако, при определенных условиях, метод Беллмана дает достаточные условия оптимальности.

Достаточное условие оптимальности. *Пусть* $S(x(t),t)$ *- гладкое решение уравнения Гамильтона – Якоби - Беллмана:*

$$\min_{u(t)\in U}[f_0(x,u,t) + \frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}] = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

при граничном условии $S(x(t_f), t_f) = q_0(x(t_f), t_f)$.

Пусть также управление $u^*(x,t)$*, найденное из условия:*

$$[f_0(x,u^*,t) + \frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}F(x,u^*,t) + \frac{\partial S}{\partial t}] = \min_{u(t)\in U}(f_0 + \frac{dS}{dt}),$$

является кусочно – непрерывным и порождает единственную траекторию $x^*(t)$*, удовлетворяющую уравнениям объекта и граничным условиям задачи оптимального управления* $\dot{x} = f(x,u,t); u(t) \in U_t; x(t_0) = x^0; x(t_f) \in X_f$. *Тогда функция* $u^*(x,t)$ *является оптимальным управлением задачи оптимального управления с критерием:*

$$J(u) = q_0(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t)\cdot dt.$$

Алгоритм синтеза оптимального управления методом Гамильтона – Якоби – Беллмана.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\dot{x} = F(x,u,t); u(t) \in U_t; x(t_0) = x^0; x(t_f) \in X_f; \quad J = q_0(x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t) \cdot dt \to \min .$$

Множество $M(t_0, x^0)$ допустимых процессов – это множество пар функций $(x(t),u(t))$, которые удовлетворяют условиям задачи и соответствующим ограничениям, а также начальным условиям $x(t_0) = x^0$. Если решать задачу при различных значениях (t_0, x^0), то получим некоторое семейство A оптимизационных задач /Кротов с238/.

Зададим управление в виде функции $u = v(t,x), \ v \in V^{t,x} \subseteq \Re^{n+1}$. Подставляя такое решение в уравнение $\dot{x} = F(x,u,t)$ и решая соответствующую задачу Коши, найдем траекторию $\tilde{x}(t,t_0,x^0)$, отвечающую заданному закону управления. Так как ограничения на состояние системы отсутствует, то такая траектория является допустимой. Подставляя найденную траекторию в функцию $v(t,x)$, получим управление как функцию времени $\tilde{u}(t,t_0,x^0) = v(t,x)|_{\tilde{x}(t,t_0,x^0)}$. Назовем функцию $v(t,x)$ решением задачи синтеза оптимального управления, если процесс:

$$(\tilde{x}(t,t_0,x^0),\tilde{u}(t,t_0,x^0))$$

является решением задачи семейства A оптимизационных задач для любых пар (t_0, x^0).

Таким образом, при применении метода Гамильтона – Якоби – Беллмана решение задачи дается в форме синтеза оптимального управления $v(t,x)$ в отличие от метода Лагранжа, где решение отыскивается в виде оптимальной программы $u(t)$.

Введем следующие вспомогательные функции:

$$R(x,u,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x}, F(x,u,t)) - f_0(x,u,t),$$

$$\Phi(x) = \varphi(x,t_f) - q_0(x,t_f),$$

где $\varphi(t,x)$ - некоторая функция, которая имеет непрерывные частные производные по всем аргументам.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема *(достаточные условия оптимальности для непрерывных процессов /Кротов с113/).*

Пусть допустимый процесс $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) \in M$ *и некоторая функция* $\varphi(t,x)$ *удовлетворяют условиям:*

$$R(\tilde{x},u,t) = \max_{x(t),u(t) \in U_t} (R(x,u,t)), \ \ \forall t \in [0,t_f];$$

$$\Phi(\tilde{x}(t_f)) = \min_{x \in X_f} (\Phi(x))$$

Тогда процесс $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$ *является оптимальным.*

Введем функцию $P(x,t) = \max_{u \in U_t} (R(x,u,t))$ и предположим, что удалось определить функцию $v(t,x)$ такую, $P(x,t) = c(t)$ и $\Phi(x) = c_1$. Запишем функцию $R(x,u,t)$ в следующем виде:

$$R(x,u,t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\frac{\partial\varphi}{\partial x},F(x,u,t))-f_0(x,u,t)=H(x,u,\frac{\partial\varphi}{\partial x},t)+\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

где $H(x,u,\frac{\partial\varphi}{\partial x},t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot f_i(x,u,t)-f_0(x,u,t)$

Тогда получим соотношение:

$$P(x,t)=\max_{u\in U_t}(R(x,u,t))=\max_{u\in U_t}(H(x,u,\frac{\partial\varphi}{\partial x},t)+\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}.$$

Обозначим $\aleph(x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},t)=\max_{u\in U_t}(H(x,u,\frac{\partial\varphi}{\partial x},t)$. Тогда можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=-\aleph(x,\frac{\partial\varphi}{\partial x},t)+c(t).$$

Данное уравнение называется уравнением Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса. Граничное условие для функции $\varphi(t,x)$ находится из уравнения $\Phi(x)=c_1$. Отсюда получим соотношение:

$$\varphi(t_f,x)=-q_0(x,t_f)+c_1.$$

Подобная задача является гораздо более простой, в отличие от краевой задачи, когда часть граничных условий задается на одном конце, а часть – на другом.

Сравнительный анализ методов Лагранжа – Эйлера – Понтрягина и Гамильтона – Якоби – Беллмана.

1.Метод Лагранжа – Эйлера – Понтрягина сводит задачу оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$. Тогда, как метод Гамильтона – Якоби – Беллмана ставит в соответствие задаче оптимального управления задачу Коши для уравнений в частных производных относительно функции $S(x(t),t)$ от $(n+1)$-переменных, которая значительно сложнее /Кротов Опт упр с249/.

2.Метод Лагранжа – Эйлера – Понтрягина позволяет отыскать оптимальное управление $u^*(t)$ и оптимальную траекторию $x^*(t)$, отвечающих заданным граничным условиям. Метод Гамильтона – Якоби – Беллмана позволяет находить оптимальное решение $u^*(t,x)$ с любыми начальными условиями, то есть решает более общую задачу.

3.Процесс $x^*(t)$, $u^*(t)$, найденный методом Лагранжа – Эйлера – Понтрягина, является лишь претендентом на оптимум, но, в общем случае, может и не быть таковым. Доказательство оптимальности требует дополнительных вычислений. Оптимальное управление $u^*(t,x)$, найденное методом Гамильтона – Якоби – Беллмана, позволяет построить процесс $x^*(t)$, $u^*(t)$, который является оптимальным и, который не требует дополнительных исследований.

4. Метод Гамильтона – Якоби – Беллмана применим только к задачам без ограничений на состояние и лишь к задачам со свободным правым концом. Метод Лагранжа – Эйлера – Понтрягина не требует отсутствия ограничений на состояние при $t=t_f^*$. Поэтому, если заданы ограничения на состояние, то для применения метода Гамильтона – Якоби – Беллмана необходимо преобразование исходной задачи во вспомогательную подзадачу с использованием штрафных функций.

5.Метод Лагранжа – Якоби – Понтрягина более универсален в отношении граничных условий, а метод Гамильтона – Якоби – Беллмана, в свою очередь, применим к более широкому классу задач. В частности, он не требует непрерывности и дифференцируемости функции $F(x,u,t)$. В частности метод Гамильтона – Якоби – Беллмана применим к решению целочисленных задач типа задачи о ранце и других.

Численные методы дискретного динамического программирования.

Рассмотрим дискретную систему вида:

$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)},u^{(k)}),\ \ x^{(k)} \in \Re^n, u^{(k)} \in \Re^m, k = 0,1,...,N-1,$$

при начальном условии $x^{(0)} = \overline{x}$ и пусть функционал оптимизации задается выражением:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0\ (x^{(k)},u^{(k)}) + q_0(x^{(N)})$$

Обозначим через $S(x^{(k)},k)$ минимальное значение функционала для оптимального процесса, начинающегося в момент $t = \Delta T \cdot k$ в точке $x^{(k)}$. Этот процесс можно представить состоящим из двух участков: первого шага, на котором выбирается управление $u = u^{(k)}$, и остальной части от момента $k+1$ до конца процесса. Вклад в значение функционала первого участка процесса равен $f_0(x^{(k)},u^{(k)})$, а вклад второго участка, согласно принципу оптимальности Беллмана можно выразить в виде $S(x^{(k+1)},k+1)$ /Черноусько Дин пр/. Отсюда можно записать равенство:

$$S(x^{(k)},k) = \min_{u^{(k)} \in U}(f_0(x^{(k)},u^{(k)}) + S(x^{(k+1)},k+1)).$$

Подставляя в данное равенство уравнение связи, получим:

$$S(x^{(k)},k) = \min_{u^{*(k)} \in U}(f_0(x^{(k)},u^{(k)}) + S(F(x^{(k)},u^{(k)}),k+1)), k = 0,1,...,N-1.$$

В момент времени $t = \Delta T \cdot N$ будет выполняться соотношение: $S(x^{(N)},N) = q_0(x^{(N)})$.

Пусть $k = N-1$ и известно значение $x^{(N)}$. Тогда можно записать, предполагая известным значение $S(x^{(N)},N) = q_0(x^{(N)})$, следующее соотношение:

$$S(x^{(N-1)},k) = \min_{u^{(N-1)} \in U}(f_0(x^{(N-1)},u^{(N-1)}) + q_0(x^{(N)})).$$

Отсюда можно найти значение $u^{(N-1)} = v_{N-1}(x^{(N-1)})$, решая задачу:

$$u^{(N-1)} = v_{N-1}(x^{(N-1)}) = arg \min_{u^{(N-1)} \in U}(f_0(x^{(N-1)},u^{(N-1)}) + q_0(x^{(N)})).$$

Далее, можно аналогично найти функцию $S(x^{(N-2)},N-2)$ и соответствующую функцию $u^{(N-2)} = v_{N-2}(x^{(N-2)})$ и так далее. Таким образом, можно получить последовательность функций $\{v_k(x^{(k)})\}$, которые будут определять оптимальное управление системой при ее состоянии $x^{(k)}$.

Такая процедура называется попятной или обратной. Для ее реализации необходимо построение функций $S(x^{(k)},k)$ и $v_k(x^{(k)})$, зависящих от n - мерного вектора $x^{(k)}$. По этому вектору не надо выполнять операцию минимизации. Однако надо хранить таблицы значений этих функций. Если хранить 100 значений по одной компоненте вектора $x^{(k)}$, то для формирования попятной процедуры потребуется $(m+1)\cdot N\cdot 100^n$ ячеек памяти. Поэтому, при решении дискретных оптимизационных задач, полное построение функций $S(x^{(k)},k)$ и $v_k(x^{(k)})$ в явном виде, как правило, не выполняется /Коган/. Вместо этого, по имеющейся оптимизационной задаче, строится совокупность частных экстремальных задач, которая и решается определенным образом. Однако, в этом случае получается, в общем случае, только некоторое приближение решения исходной задачи. При этом, довольно часто, при реализации метода динамического программирования в явном виде не записываются и частные задачи, а вводится только соответствующая функция Беллмана.

Для того, чтобы использовать результаты попятной процедуры для построения оптимального управления используют, так называемую, прямую процедуру.

Примем $k=0$ и $x^{(0)}=\bar{x}$. Тогда найдем $u^{*(0)}=v_0(x^{(0)}=\bar{x})$. Затем определим $x^{*(1)}=F(x^{(0)},u^{*(0)})$ и $u^{*(1)}=v_1(x^{*(1)})$. Продолжая процесс, получим оптимальное управление $u^{*(k)}=v_k(x^{*(k)})$ и оптимальную траекторию $x^{*(k+1)}=F(x^{*(k)},u^{*(k)})$. Минимальное значение функционала будет соответствовать значению функции Беллмана $S(x^{(0)},0)$.

Пример (Решение классической задачи коммивояжера).

Введем предварительно ряд определений и фактов. Говорят, что задан граф, обозначаемый $G=(X,F)$, если задано множество элементов X, называемых вершинами, и отображение $F:X\to X$. Отображение F может быть как однозначным, так и многозначным. Если множество X является конечным, то граф называется также конечным.

Часто граф задают в виде множества X и подмножества U множества упорядоченных пар элементов $(x_i,x_j)\in X\times X$. Совокупность пар $U=(x_i,x_j)$ будем называть ребрами графа G. В этом случае граф можно задать с помощью следующего пары $G=(X,U)$. Если на ребрах графа задано направление, то есть пара (x_i,x_j) не эквивалентна паре (x_j,x_i), то такой граф будем называть ориентированным. Если в графе G все дуги являются ориентированными, то такой граф также, часто называют, орграфом. Очевидно, что задание $F(x_i)$ представляет собой сечение бинарного отношения U по элементу x_i.

С каждым ребром (дугой) $u_{ij}=(x_i,x_j)\in U$ можно связать некоторую меру (функцию), отражающую соотношения между переменными x_i и x_j: $W(x_i,x_j)$. В этом случае, говорят, что задан взвешенный граф $G=(X,U,W)$. Если функция $W(x_i,x_j)$ многозначная, то есть каждой паре (x_i,x_j) соответствует конечное множество функций вида $W_k(x_i,x_j)$, то такой граф будем называть взвешенным ориентированным мультиграфом.

Цикл в конечном ориентированном графе называется простым, если он не имеет самопересечений – то есть, нет вершины, которую цикл проходит дважды. Простой цикл называется гамильтоновым, если проходит через все вершины графа. Граф G называется полным, если для любой упорядоченной пары (x_i,x_j) его вершин в графе имеется дуга $u_{ij}=(x_i,x_j)$. В полном n - вершинном ориентированном графе имеются $(n-1)!$ гамильтоновых циклов. Если $G=(X,U,W)$ - взвешенный ориентированный граф, то весом произвольного цикла этого графа называется сумма весов дуг, входящих в состав этого цикла.

Классическая задача коммивояжера формулируется следующим образом: имеется полный взвешенный ориентированный граф без петель $G=(X,U,W)$ с множеством вершин $X=\{1,2,...,n\}$, веса всех дуг $w_{ij}\in W$ неотрицательны. Требуется найти гамильтонов цикл минимального веса.

Исходная информация по задаче коммивояжера представляется в виде матрицы $S=\{s_{ij}\}\in\Re^{n\times n}$, где s_{ij} вес дуги $u_{ij}=(x_i,x_j)$ графа $G=(X,U,W)$. При этом все элементы главной диагонали матрицы S равны нулю. В типовой интерпретации вершины $X=\{1,2,...,n\}$ - это города. Дуги отображают возможные элементарные переходы. Коммивояжеру, изначально находящемуся в городе 1, необходимо обойти все остальные города, побывав в каждом из них ровно по одному разу, и затем, вернуться в город 1. Требуется найти имеющий минимальную длину допустимый маршрут коммивояжера.

Рассмотрим алгоритм решения данной задачи, основанный на принципе обратной процедуры дискретного динамического программирования.

Пусть $i\in X$ произвольный город, а V - любое подмножество городов, не содержащих города 1 и города i. Через множество $M(i,V)$ обозначим совокупность путей, каждый из которых начинается в городе i, и завершается в городе 1. Каждый такой путь, проходит только через города множества V, заходя в каждый из них ровно по одному разу. Обозначим через $S(i,V)$ длину кратчайшего пути множества $M(i,V)$. Очевидно, что $S(1,X)$ - искомая длина простого (без самопересечений) замкнутого пути, проходящего через все города. Если множество V содержит один элемент, то есть $V=\{j\},\ j\neq 1,\ j\neq i$, то совокупность $M(i,V)$ состоит из единственного пути $\pi=(i,j,1)$. Тогда можно записать соотношение:

$$S(i,V)=S(i,\{j\})=s_{ij}+s_{j1}, i\in X,\ j\in(X\setminus 1), i\neq j\,.$$

Тогда значение $S(i,\tilde{V})$, где $\tilde{V}$ произвольное $(k+1)$ элементное множество совокупности $X\setminus\{1,i\}$ вычисляется по формуле:

$$S(i,\tilde{V})=\min_{j\in\tilde{V}}(s_{ij}+S(j,\tilde{V}\setminus\{j\}))\,.$$

Очевидно, что приведенные соотношения задают обратную процедуру Беллмана.

Пусть $S=\begin{pmatrix}0&5&1&4\\2&0&3&5\\1&4&0&2\\3&5&4&0\end{pmatrix}$. Тогда пользуясь соотношением

$S(i,V)=S(i,\{j\})=s_{ij}+s_{j1}, i\in X,\ j\in(X\setminus 1), i\neq j$ найдем:

$$S(2,\{3\})=4; S(2,\{4\})=8; S(3,\{2\})=6; S(3,\{4\})=5; S(4,\{2\})=7; S(4,\{3\})=5\,.$$

Далее, по формуле $S(i,\tilde{V})=\min_{j\in\tilde{V}}(s_{ij}+S(j,\tilde{V}\setminus\{j\}))$ найдем:

$$\begin{aligned}
&S(2,\{\underline{3},4\})=\min(3+5,5+5)=8,\\
&S(3,\{\bar{2},\underline{4}\})=\min(4+8,2+7)=9;\\
&S(4,\{\underline{2},\bar{3}\})=\min(5+4,4+6)=9;\\
&S(1,\{\bar{2},\underline{3},4\})=\min(5+8,1+9,4+9)=10
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное значение критерия равно 10. Выполненные подчеркивания позволяют определить оптимальный маршрут:

$$1\to 3\to 4\to 2\to 1.$$