/Дифференциальные уравнения/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-консультационного материала с целью закрепления у школьников и студентов навыков практической реализации знаний, приобретённых в объёме курса по теме «Дифференциальные уравнения». Настоящий материал предусматривает широкую вариативность приёмов и методов закрепления полного курса в объёме семестра по разделу «Дифференциальные уравнения» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение данного материала в сопоставлении всего объёма предложенных решений.

Дифференциальные уравнения. Вариант 5.

Задача 1

Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$.)

$$6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Преобразуем его к следующему виду:

$$6xdx + 3xy^2dx = 2x^2ydy + 6ydy$$

Запишем дифференциалы, как общие множители:

$$3x(2+y^2)dx = 2y(x^2+3)dy \Rightarrow \frac{3xdx}{(x^2+3)} = \frac{2ydy}{2+y^2}$$

Проинтегрируем левую и правую части выражения:

$$\int\frac{3xdx}{(x^2+3)} = \int\frac{2ydy}{2+y^2} \Rightarrow \int\frac{1.5d(x^2+3)}{x^2+3} = \int\frac{d(y^2+2)}{2+y^2}$$

Взяв эти интегралы, мы получим общий интеграл данного уравнения, т. е. совокупность решений в неявном виде:

$$1.5\ln\left|x^2+3\right| = \ln\left|2+y^2\right| + C$$

Приведем решение к требуемому виду:

$$1.5\ln\left|x^2+3\right| = \ln\left|2+y^2\right| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+3)^{1.5} = A(2+y^2) \Rightarrow \frac{(x^2+3)^{1.5}}{2+y^2} = A$$

В этом выражении $A=e^C$ – произвольная константа.

Ответ: $\dfrac{(x^2+3)^{1.5}}{2+y^2} = A$

Задача 2

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$$

Это дифференциальное уравнение называется однородным относительно x и y. Решать его следует с помощью следующей замены переменной:

$$y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \Rightarrow 2(z + xz') = z^2 + 6z + 3$$

Преобразуем данное уравнение, учитывая что $z' = \dfrac{dz}{dx}$:

$$2xdz = (z^2 + 4z + 3)dx$$

У нас получилось уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dz}{z^2 + 4z + 3} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2dz}{(z+2)^2 - 1^2}$$

Проинтегрируем левую и правую части:

$$\int\frac{dx}{x} = 2\int\frac{d(z+2)}{(z+2)^2 - 1^2} \Rightarrow \ln|x| = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{z+2-1}{z+2+1}\right| + C$$

Мы получили общий интеграл дифференциального уравнения. Представим его в виде Ψ(x,y) = C:

$$\ln|x| = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{z+2-1}{z+2+1}\right| + C \Rightarrow \ln|x| = \ln\left|\frac{z+1}{z+3}\right| + C \Rightarrow x = A\frac{z+1}{z+3}$$

$$\Rightarrow x\frac{z+3}{z+1} = A \Rightarrow x\frac{\frac{y}{x}+3}{\frac{y}{x}+1} = A \Rightarrow \frac{xy + 3x^2}{y + x} = A$$

В этом выражении A – произвольная константа.

Ответ: $\dfrac{xy + 3x^2}{y + x} = A$

Задача 3

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}$$

Найдём точку пересечения прямых $x + y - 2 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$. Это точка с координатами (1,1). Перенесём начало координат в эту точку, т.е. сделаем замену $u = y - 1, v = x - 1$. В новых переменных уравнение будет выглядеть так:

$$u' = \frac{v + 1 + u + 1 - 2}{3(v+1) - u - 1 - 2} = \frac{v + u}{3v - u}$$

Сделаем ещё одну замену:

$u = tv \Rightarrow u' = t + vt'$.

Получим:

$$t + vt' = \frac{1+t}{3-t} \Rightarrow vt' = \frac{1 - 2t + t^2}{3 - t} = \frac{(t-1)^2}{3-t}$$

Преобразуем данное уравнение, учитывая что $t' = \dfrac{dt}{dv}$:

$$\frac{(3-t)dt}{(t-1)^2} = \frac{dv}{v}$$

Проинтегрируем левую и правую части:

$$\int\frac{(3-t)dt}{(t-1)^2} = \int\frac{dv}{v} \Rightarrow \{3 - t = 2 - (t-1)\} \Rightarrow \ln|v| = 2\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2} -$$

$$-\int\frac{d(t-1)}{(t-1)} \Rightarrow \ln|v| = \frac{-2}{t-1} - \ln|t-1| + C \Rightarrow \ln|v(t-1)| + \frac{2}{t-1} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|(u-v)| + \frac{2v}{u-v} = C \Rightarrow \ln|(y-x)| + \frac{2x-2}{y-x} = C$$

В этом выражении A – произвольная константа.

Ответ: $\ln|(y-x)| + \dfrac{2x-2}{y-x} = C$

Задача 4

Найти решение задачи Коши:

$$y'-\frac{y}{x+2}=x^2+2x,\ y(-1)=3/2$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Его решение находится с помощью решения соответствующих однородного и неоднородного уравнений. Сначала решим однородное уравнение $y'-\frac{y}{x+2}=0$

Преобразуем данное уравнение, учитывая что $y'=\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x+2}$$

Проинтегрируем левую и правую части:

$$\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow \ln|x+2|=\ln y+A\Rightarrow y=C(x+2)$$

Решим неоднородное уравнение методом вариации. Для этого произведем подстановку:

$y=C(x)(x+2)$

Тогда:

$$y'=C(x)+(x+2)C'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x)+(x+2)C'(x)-C(x)=x^2+2x+x(x+2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)=x\Rightarrow C(x)=0.5x^2+B\Rightarrow y=(0.5x^2+B)(x+2)$$

В этом выражении B – произвольная константа.

По условию $y(-1)=3/2$, из чего следует:

$$B=1\Rightarrow y=(0.5x^2+1)(x+2)$$

Ответ: $y=(0.5x^2+1)(x+2)$

Задача 5

Решить задачу Коши:

$$(\cos 2y\cos^2 y-x)y'=\sin y\cos y$$

$$y|_{x=1/4}=\pi/3$$

Преобразуем данное уравнение:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x'}\Rightarrow \begin{aligned}&x'+x\frac{1}{\sin y\cos y}=\frac{\cos 2y\cos y}{\sin y}\\&x(\pi/3)=1/4\end{aligned}$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Его решение находится с помощью решения соответствующих однородного и неоднородного уравнений. Сначала решим следующее однородное уравнение:

$$x'+x\frac{1}{\sin y\cos y}=0$$

Преобразуем данное уравнение, учитывая что $x'=\frac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{x}=\frac{-dy}{\sin y\cos y}$$

Проинтегрируем левую и правую части:

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{-dy}{\sin y\cos y}\frac{\sin y\cos y}{\sin y\cos y}=\int\frac{\cos y d(\cos y)}{\sin^2 y\cos^2 y}=$$

$$=0.5\int\frac{d(\cos^2 y)}{(1-\cos^2 y)\cos^2 y}==0.5\int(\frac{1}{(1-\cos^2 y)}+\frac{1}{\cos^2 y})d(\cos^2 y)=$$

$$=0.5\ln(\cos^2 y)-0.5\ln(1-\cos^2 y)+B\Rightarrow\ln|x|=0.5\ln(\cos^2 y)-$$

$$-0.5\ln(1-\cos^2 y)+B\Rightarrow x=C\frac{\cos y}{\sin y}$$

Решим неоднородное уравнение:

Используем метод вариации и произведем следующую подстановку:

$$x=C(y)\frac{\cos y}{\sin y}$$

Тогда:

$$x'=-\frac{1}{\sin^2 y}C(y)+\frac{C'(y)\cos y}{\sin y}\Rightarrow-\frac{1}{\sin^2 y}C(y)+\frac{C'(y)\cos y}{\sin y}+$$

$$+\frac{C(y)}{\sin^2 y}=\frac{\cos 2y\cos y}{\sin y}\Rightarrow C'(y)=\cos 2y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(y)=0.5\sin 2y+B\Rightarrow x=(0.5\sin 2y+B)\frac{\cos y}{\sin y}$$

В этом выражении B – произвольная константа.

Учитывая, что $x(\pi/3)=1/4$ получаем

$$B=0\Rightarrow x=(0.5\sin 2y)\frac{\cos y}{\sin y}=0.5\cdot 2\sin y\cos y\frac{\cos y}{\sin y}=\cos^2 y$$

Ответ: $x=\cos^2 y$. Существует также решение $\cos y=0$, потерянное при делении.

Задача 6

Решить задачу Коши:

$$xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x \qquad y(1)=1$$

Разделим обе части уравнения на y^2:

$$\frac{xy'}{y^2}-\frac{1}{y}=-\ln x(\ln x+2)$$

Произведем следующую замену переменной:

$$z=1/y\Rightarrow z'=-\frac{y'}{y^2} \qquad z(1)=1$$

Запишем уравнение в новых переменных:

$$-xz'-z=-\ln x(\ln x+2)\Rightarrow xz'+z=\ln x(\ln x+2)$$

Произведем еще одну замену переменной:

$$x=e^t\Rightarrow dx=e^t dt\Rightarrow z'+z=t(t+2)$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Решать его придется методом произвольной вариации постоянных, суть которого заключается в том, что решается однородное уравнение, а затем константа, появившаяся в результате интегрирования, объявляется функцией x и решается неоднородное уравнение.

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$z'+z=0$$

Перейдем к уравнению с разделяющимися переменными, учитывая, что $z' = \frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dz}{z} = -dt$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dt \Rightarrow \ln|z| = -t + A \Rightarrow z = Ce^{-t}$$

Решим неоднородное уравнение:
Используем метод вариации произвольных постоянных и произведем следующую подстановку:

$$z = C(t)e^{-t}$$

Тогда:

$$z' = -C(t)e^{-t} + C'(t)e^{-t} \Rightarrow$$

$$-C(t)e^{-t} + C'(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = t(t+2) \Rightarrow C'(t) = t(t+2)e^{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = \int t(t+2)e^{t}dt = \int t(t+2)d(e^{t}) = t(t+2)e^{t} -$$

$$-2\int (t+1)e^{t}dt = t(t+2)e^{t} - 2(t+1)e^{t} + 2e^{t} + B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = (t(t+2)e^{t} - 2(t+1)e^{t} + 2e^{t} + B)e^{-t} = t^2 + Be^{-t} =$$

$$= \ln^2 x + B/x$$

В этом выражении B – произвольная константа.
Учитывая, что $z(1) = 1$ получаем

$$B = 1 \Rightarrow z = \ln^2 x + 1/x \Rightarrow y = \frac{1}{\ln^2 x + 1/x}$$

Ответ: $y = \frac{1}{\ln^2 x + 1/x}$

Задача 7

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + tgx)dy = 0$$

Это уравнение в полных дифференциалах. Его решение следует искать в виде F(x,y) + G(y) = C. Рассмотрим функцию F:

$$F = \int (y^2 + y\sec^2 x)dx = y^2 x + ytgx + G(y)$$

Отсюда найдем G(y):

$$F'_y = 2xy + tgx + G'(y) = 2xy + tgx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(y) = 0 \Rightarrow G(y) = \text{const}$$

Тогда общий интеграл будет выглядеть следующим образом:

$$y^2 x + ytgx = C$$

В этом выражении C – произвольная константа.

Ответ: $y^2 x + ytgx = C$

Задача 8

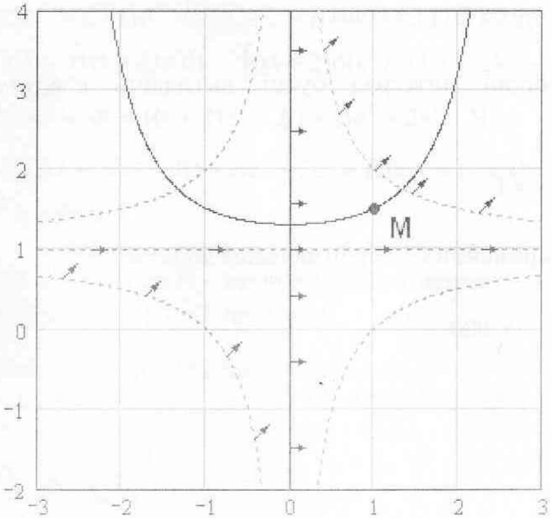
Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M:

$y' = (y-1)x, \quad M(1{,}3/2)$

Воспользуемся тем, что $y' = \mathrm{tg}(\alpha)$, где α – угол наклона касательной к интегральной кривой в заданной точке. Варьируя угол α, мы можем построить поле направлений, а затем провести через заданную точку интегральную кривую. Формула для построения поля направлений будет выглядеть следующим образом:

$y = 1 + \mathrm{tg}(\alpha)/x$

На приведенном ниже рисунке построена искомая интегральная кривая и часть векторов поля направлений для трех значений угла $\alpha(-\pi/4,\ 0,\ \pi/4)$:



Задача 9

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор $\overline{MN}$ с концом на оси Oy имеет длину, равную a, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy.

$M_0(3,\ 5)$, $a=5$.

Уравнение касательной к функции f(x) в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Рассмотрим произвольную точку M_x, принадлежащую искомой линии:

$$M_x(x, f(x))$$

Уравнение касательной в точке M_x:

$$y(z) = f(x) + f'(x)(z - x)$$

Уравнение нормальной прямой в этой же точке:

$$y(z) = f(x) - \frac{1}{f'(x)}(z - x)$$

Эта прямая пересекает Oy в т. $N_x = \left(0, f(x) + \dfrac{x}{f'(x)}\right)$.

Найдем длину вектора $\overline{MN}$:

$$\left|\overline{M_x N_x}\right| = a = \sqrt{x^2 + \left(f(x) - f(x) + \frac{x}{f'(x)}\right)^2}$$

Возведем обе части получившегося уравнения в квадрат:

$$a^2 - x^2 = \frac{x^2}{(f'(x))^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot I, \text{ где } I = \pm 1$$

Исходя из этого выражения, найдем функцию f(x):

$$f(x) = \int \frac{I \cdot x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -I \int \frac{05d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -I\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Так как $\overline{MN}$ образует острый угол с положительным направлением оси Oy, то:

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Найдем C из условия, что f(x) проходит через заданную точку M_0:

$$M_0(3,5) \Rightarrow f(3) = 5 \Rightarrow \sqrt{25 - 9} + C = 4 + C = 5 \Rightarrow C = 1$$

Таким образом, искомая линия описывается следующим уравнением:

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} - 1$$

Ответ: $f(x) = \sqrt{25 - x^2} - 1$

Задача 10

Найти общее решение дифференциального уравнения:
$\operatorname{tg}(x)y'' - y' + 1/\sin x = 0$

Это дифференциальное уравнение 2-го порядка. Оно не содержит в явном виде y. Таким образом, данное дифференциальное уравнение допускает понижение степени с помощью следующей замены переменной:
$z = y' \Rightarrow z' = y''$

Тогда уравнение будет выглядеть так:
$\operatorname{tg}(x)z' - z + 1/\sin x = 0$

Это линейное уравнение, решим сначала соответствующее однородное уравнение:
$z' - z \operatorname{ctg} x = 0$

Преобразуем данное уравнение, учитывая что $z' = dz/dx$:

$$\frac{dz}{z} = \operatorname{ctg} x\, dx$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем левую и правую части:

$$\int z^{-1} dz = \int \operatorname{ctg} x\, dx \Rightarrow \ln|z| = \ln|\sin x| + A \Rightarrow z = C \sin x$$

Применим метод вариации произвольных постоянных:

$$z = C(x)\sin x \Rightarrow C'(x)\sin x \operatorname{tg} x + C(x)\sin x - C(x)\sin(x) =$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \Rightarrow C'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^3 x} \Rightarrow C(x) = -\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{2\sin^2 x} +$$

$$+ B \Rightarrow z = \frac{1}{2\sin x} + B\sin x \Rightarrow y = \int\left(\frac{1}{2\sin x} + B\sin x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right) - B\cos x + C$$

Ответ: $y = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right) - B\cos x + C$

Задача 11

Найти решение задачи Коши:

$y'' = 32\cos y \sin^3 y$

$y(1) = \pi / 2$

$y'(1) = 4$

Произведем следующую замену переменной:

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$$

Запишем уравнение в новых переменных:

$p'p = 32\cos y \sin^3 y$

Перейдем к уравнению с разделяющимися переменными, учитывая, что $p' = \dfrac{dp}{dy}$:

$pdp = 32\cos y \sin^3 y dy$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int pdp = \int 32\cos y \sin^3 y dy = 8\sin^4 y + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = y' = \sqrt{16\sin^4 y + C}$$

Используем равенства $y(1) = \pi / 2, y'(1) = 4$:

$$4 = \sqrt{16\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) + C} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y' = 4\sin^2 y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{4\sin^2 y} = dx \Rightarrow x + B = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} y$$

Определим значение константы B:

$$y(1) = \pi / 2 \Rightarrow 1 + B = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow B = -1$$

Таким образом:

$y = \operatorname{arcctg}(4 - 4x)$

Ответ: $y = \operatorname{arcctg}(4 - 4x)$

Задача 12

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка. Его решение является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Найдем общее решение, для чего составим характеристическое уравнение:

$$a^4 - a^3 = 0 \Rightarrow a_{1,2,3} = 0, a_4 = 1$$

Тогда общее решение будет выглядеть так:

$$y = A + Bx + Cx^2 + De^x$$

Теперь нам нужно найти частное решение неоднородного уравнения. Будем искать его в следующем виде:

$$y = x^3(ax^2 + bx + c)$$

Подставив это выражение в исходное уравнение, получим следующие значения коэффициентов a, b и c:

$$a = -\frac{1}{12}, b = -\frac{5}{4}, c = -\frac{25}{3}$$

Тогда полное решение дифференциального уравнения будет таким:

$$y = A + Bx + Cx^2 + De^x - \frac{x^5}{12} - \frac{5x^4}{4} - \frac{25x^3}{3}$$

Ответ: $y = A + Bx + Cx^2 + De^x - \frac{x^5}{12} - \frac{5x^4}{4} - \frac{25x^3}{3}$

Задача 13

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка. Его решение является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y = y_{оо} + y_{чн}$$

Найдем общее решение, для чего составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 2$$

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$y_{оо} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot x \cdot e^{2x}$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Будем искать его в следующем виде:

$$y_{чн} = x(a + bx)e^{-x}$$

Запишем первые три производные этого решения:

$$y'_{чн} = -axe^{-x} + ae^{-x} - bx^2e^{-x} + 2bxe^{-x}$$

$$y''_{чн} = axe^{-x} - ae^{-x} - ae^{-x} + bx^2e^{-x} - 2bxe^{-x} + 2be^{-x} - 2bxe^{-x} =$$
$$= axe^{-x} - 2ae^{-x} + bx^2e^{-x} - 4bxe^{-x} + 2be^{-x}$$

$$y'''_{чн} = -axe^{-x} + ae^{-x} + 2ae^{-x} - bx^2e^{-x} + 2bxe^{-x} + 4bxe^{-x} -$$
$$-4be^{-x} - 2be^{-x} = -axe^{-x} + 3ae^{-x} - bx^2e^{-x} + 6bxe^{-x} - 6be^{-x}$$

Подставим частное решение в исходное уравнение и найдем коэффициенты a и b:

$$-axe^{-x}+3ae^{-x}-bx^2e^{-x}+6bxe^{-x}-6be^{-x}-3(axe^{-x}-2ae^{-x}+$$
$$+bx^2e^{-x}-4bxe^{-x}+2be^{-x})+4x(a+bx)e^{-x}=(18x-21)e^{-x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2(-b-3b+4b)e^{-x}+x(-a+6b-3a+12b+4a)e^{-x}+$$
$$+(3a-6b+6a-6b)e^{-x}=(18x-21)e^{-x}$$

Составим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 18b=18 \\ 9a-12b=-21 \end{cases}$$

Решением этой системы будут следующие значения a и b:

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

Подставим эти значения в формулу для частного решения неоднородного уравнения и найдем его:

$$y_{чн}=x(x-1)e^{-x}$$

Тогда полное решение дифференциального уравнения будет таким:

$$y=y_{oo}+y_{чн}=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{2x}+C_3\cdot x\cdot e^{2x}+x(x-1)e^{-x}$$

Ответ: $y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{2x}+C_3\cdot x\cdot e^{2x}+x(x-1)e^{-x}$

Задача 14

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''+2y'+5y=-\sin 2x$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Его решение является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y=y_{oo}+y_{чн}$$

Найдем общее решение, для чего составим характеристическое уравнение:

$$P(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+5=0$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1=-1+2i$$
$$\lambda_2=-1+2i$$

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$y_{oo}=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения:

$$y''+2y'+5y=-\sin 2x:\ y_{чн}=\operatorname{Im}\left(\frac{-e^{2ix}}{P(2i)}\right)=$$

$$=-\operatorname{Im}\left(\frac{\cos 2x+i\sin 2x}{1+4i}\right)=-\operatorname{Im}\left(\frac{(\cos 2x+i\sin 2x)(1-4i)}{17}\right)=$$

$$=\frac{1}{17}(4\cos 2x-\sin 2x)$$

Тогда общее решение будет таким:

$$y=y_{оо}+y_{чн}=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x+\frac{1}{17}(4\cos 2x-\sin 2x)$$

Ответ: $y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x+\frac{1}{17}(4\cos 2x-\sin 2x)$

Задача 15

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''+4y=-8\sin 2x-6\cos x+4e^{2x}$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Его решение является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y=y_{оо}+y_{чн}$$

Найдем общее решение, для чего составим характеристическое уравнение:

$$P(\lambda)=\lambda^2+4=0$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1=+2i$$
$$\lambda_2=-2i$$

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$y_{оо}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения, применив принцип суперпозиции. Найдем частные решения для каждого слагаемого из составляющих правую часть дифференциального уравнения:

$$y'' + 4y = -8\sin 2x : y = \mathrm{Im}\left(\frac{-8xe^{2ix}}{P'(2i)}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{-8x(\cos 2x + i\sin 2x)}{4i}\right) = 2x\cos 2x$$

$$y'' + 4y = -6\cos 2x : y = \mathrm{Re}\left(\frac{-6xe^{2ix}}{P'(2i)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-6x(\cos 2x + i\sin 2x)}{4i}\right) = -\frac{3}{2}x\sin 2x$$

$$y'' + 4y = 4e^{2x} : y = \frac{4e^{2x}}{P(2)} = \frac{e^{2x}}{2}$$

Согласно принципу суперпозиции, частное решение неоднородного уравнения будет равно сумме частных решений для каждого слагаемого:

$$y_{чн} = 2x\cos 2x - \frac{3}{2}x\sin 2x + \frac{e^{2x}}{2}$$

Тогда общее решение будет таким:

$$y = y_{оо} + y_{чн} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2x\cos 2x - \frac{3}{2}x\sin 2x + \frac{e^{2x}}{2}$$

Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2x\cos 2x - \frac{3}{2}x\sin 2x + \frac{e^{2x}}{2}$

Задача 16

Найти решение задачи Коши:

$$y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Его правая часть такова, что частное решение этого уравнения нельзя найти методом подбора. Найдем общее решение, для чего составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = 6$$

$$\lambda_2 = 3$$

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{3x}$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения, используя для этого метод вариаций произвольных постоянных. Для этого перейдем от произвольных констант C_1 и C_2 к функциям $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$y = C_1(x)e^{6x} + C_2(x)e^{3x} \quad (*)$$

Наложим дополнительное условие:

$$C_1'(x)e^{6x} + C_2'(x)e^{3x} = 0$$

Вместе с уравнением, получающимся после подстановки функции (*) в исходное дифференциальное уравнение, мы получаем следующую систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{6x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ 6C_1'(x)e^{6x} + 3C_2'(x)e^{3x} = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}} \end{cases}$$

Выразим $C_1'(x)$ через $C_2'(x)$ с помощью первого уравнения этой системы:

$$C_1'(x) = -e^{-3x}C_2'(x)$$

Использовав второе уравнение системы, получим следующие выражения:

$$C_2'(x) = -\frac{3}{1+e^{-3x}} \Rightarrow C_2(x) = -\int \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = -\ln(1+e^{3x}) + B$$

В этом выражении B – это константа. Теперь найдем $C_1(x)$:

$$C_1'(x) = 3\frac{e^{-3x}}{1+e^{-3x}} = 3\frac{e^{3x}}{e^{3x}(1+e^{3x})} = \left(\frac{3}{e^{3x}} - \frac{3}{1+e^{3x}}\right)e^{3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \int\left(\frac{3}{e^{3x}} - \frac{3}{1+e^{3x}}\right)e^{3x}dx = \int\left(\frac{1}{e^{3x}} - \frac{1}{1+e^{3x}}\right)d(e^{3x}) =$$

$$= \ln\left(e^{3x}\right) - \ln(1+e^{3x}) + A$$

A – это также константа. Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение для y:

$$y = \left[3x - \ln(1+e^{3x}) + A\right]e^{6x} + \left[B - \ln(1+e^{3x})\right]e^{3x}$$

Найдем первую производную от полученного выражения:

$$y' = 3e^{3x}(6xe^{3x} - 2e^{3x}\ln(1+e^{3x}) + 2Ae^{3x} + B - \ln(1+e^{3x}))$$

Исходя из начальных условий, найдем константы A и B:

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -2\ln 2 + A + B = 0 \Rightarrow A + B = 2\ln 2$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow -9\ln 2 + 6A + 3B = 0 \Rightarrow 3A = 3\ln 2 \Rightarrow A = B = \ln 2$$

Тогда решение задачи Коши будет выглядеть так:

$$y = \left[3x - \ln(1+e^{3x}) + \ln 2\right]e^{6x} + \left[\ln 2 - \ln(1+e^{3x})\right]e^{3x}$$

Ответ: $y = \left[3x - \ln(1+e^{3x}) + \ln 2\right]e^{6x} + \left[\ln 2 - \ln(1+e^{3x})\right]e^{3x}$