Вариант 11

1. **(1.18)** Два шарика в пустоте взаимодействуют с такой же силой на расстоянии 11 см, как в скипидаре на расстоянии 7,4 см. Определить электрическую проницаемость скипидара.

Дано:

r_1 = 11 см = 0,11 м

r_2 = 7,4 см = 0,074 м

ε - ?

Решение:

В пустоте шарики взаимодействуют по закону Кулона с силой

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_1^2},$$

где q_1, q_2 – заряды шариков.

В скипидаре шарики взаимодействуют с силой

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_2^2}.$$

По условию задачи эти силы равны, т.е.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_2^2}.$$

Откуда электрическая проницаемость скипидара

$$\varepsilon = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Подставляем численные значения:

$$\varepsilon = \left(\frac{0{,}11}{0{,}074}\right)^2 = 2{,}2.$$

Ответ: $\varepsilon = 2{,}2$.

2. **(1.41)** Напряженность электрического поля зависит только от координат x и y по закону $\bar{E} = \frac{a(x\bar{i} + y\bar{j})}{x^2 + y^2}$, где a = const, $\bar{i}$ и $\bar{j}$ - единичные орты осей OX и OY. Найти поток Φ_E вектора напряженности $\bar{E}$ через сферу радиусом R с центром в начале координат.

Дано:

$$\bar{E} = \frac{a(x\bar{i} + y\bar{j})}{x^2 + y^2}$$

R

Φ_E - ?

Решение:

Полный поток равен

$$\Phi_E = \int_S d\Phi = \int_S E\cos\alpha dS = \int_S E_n dS$$

$$\Phi_E = \iint_S \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\Phi_E = a\iint_S dxdy = a \cdot S = 4\pi R^2 a.$$

Ответ: $\Phi_E = 4\pi R^2 a$.

3. **(1.79)** По тонкой нити длиной l_0 равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ. Найти напряженность поля в точках A и B, расположенных соответственно против середины нити и против одного из ее концов на одинаковом расстоянии a от нее.

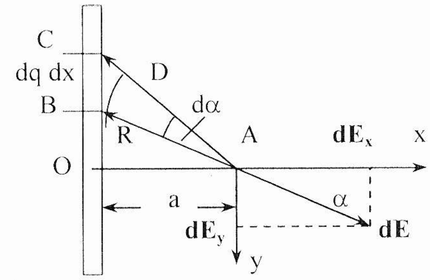
Дано:

τ

l_0

a

E - ?



Решение:

Рассмотрим точку A, расположенную против нити на расстоянии a от нее.

Заряд на нити неточечный, поэтому применим метод дифференцирования и интегрирования. Разделим нить на столь малые элементы, чтобы заряд, находящийся на каждом таком элементе был точечным. Рассмотрим один такой элемент BC длиной dx с зарядом dq = τdx. В точке A элементарная напряженность поля этого заряда

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (*)$$

Выразим дифференциал dE искомой величины E как функцию одной переменной – угла α. Из треугольника BOA находим R = a/cosα. Проведем дугу BD радиусом R с центром в точке A. Образовавшийся элементарный криволинейный треугольник BCD является прямоугольным, причем угол CBD равен α. Так как BD = R·dα = a·dα/cosα, то из треугольника BCD определяем гипотенузу BC = dx:

$$dx = BD/\cos\alpha = a\cdot d\alpha/\cos^2\alpha.$$

Подставляя значения R и dx в уравнение (*), получаем:

$$dE = \frac{\tau\, a\cdot d\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0\cdot a^2\cdot\cos^2\alpha} = \frac{\tau\cdot d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Проекции вектора **dE** на оси Ox и Oy соответственно равны

$$dE_x = dE\cdot\cos\alpha,\quad dE_y = dE\cdot\sin\alpha.$$

Отсюда после интегрирования определяем проекции вектора **E** на горизонтальную и вертикальную оси

Пределы интегрирования от α_1 до α_2:

$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau\cos\alpha\cdot d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\sin\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

$$E_y = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau\sin\alpha\cdot d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot(-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

Для точки, расположенной против середины нити:

$$\alpha_1 = -\arcsin\left(\frac{l_0/2}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2 + a^2}}\right) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2 + a^2}}\right);$$

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{l_0/2}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2 + a^2}}\right) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2 + a^2}}\right);$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\left(\frac{l_0/2}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2+a^2}}-\left(-\frac{l_0/2}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2+a^2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{2\cdot l_0/2}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2+a^2}}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{l_0}{\sqrt{l_0^2+4a^2}};$$

$$E_y=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2+a^2}}-\frac{a}{\sqrt{\left(l_0/2\right)^2+a^2}}\right)=0.$$

Результирующий вектор

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=E_x=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{l_0}{\sqrt{l_0^2+4a^2}}.$$

Для точки, расположенной против конца нити:

$$\alpha_1=-\arcsin\left(\frac{l_0}{\sqrt{l_0^2+a^2}}\right)=\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{l_0^2+a^2}}\right);$$

$$\alpha_2=0;$$

$$E_x=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\left(\frac{l_0}{\sqrt{l_0^2+a^2}}-0\right)=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{l_0}{\sqrt{l_0^2+a^2}};$$

$$E_y=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\left(1-\frac{a}{\sqrt{l_0^2+a^2}}\right).$$

Результирующий вектор

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$$

$$E=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\sqrt{\left(\frac{l_0}{\sqrt{l_0^2+a^2}}\right)^2+\left(1-\frac{a}{\sqrt{l_0^2+a^2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\sqrt{2\cdot\left(1-\frac{a}{\sqrt{l_0^2+a^2}}\right)}.$$

Ответ: для точки A: $E=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\dfrac{l_0}{\sqrt{l_0^2+4a^2}}$;

для точки B: $E=\dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\sqrt{2\cdot\left(1-\dfrac{a}{\sqrt{l_0^2+a^2}}\right)}$.

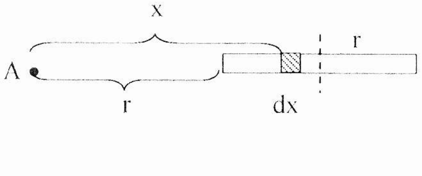
4. **(2.18)** На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ = 10 нКл/м. Вычислить потенциал φ, созданный этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

Дано:

τ = 10 нКл/м = 10^{-8} Кл/м

E - ?

φ - ?



Решение:

Заряд на отрезке неточечный, поэтому применять формулу для напряженности поля точечного заряда нельзя. Применим метод дифференцирования и интегрирования. Разделим проводник на столь малые участки, чтобы каждый из них можно было принять за материальную точку. Поэтому заряд расположенный на таком участке можно считать точечным. Рассмотрим один такой участок длины dx, отстоящий от точки A на расстоянии x. Заряд этого участка точечный и равен $dq = \tau dx$. Заряд dq создает электрическое поле, напряженность **dE**, которого в точке A может быть определена по формуле:

$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

Потенциал $d\varphi$ поля, создаваемого зарядом dq:

$$d\varphi=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

Интегрируя полученную формулу по x в пределах от r до 2r, получим искомый потенциал поля в точке A:

$$\varphi=\int_r^{2r}\frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\ln(x)\Big|_r^{2r}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\ln 2$$

Ответ: $\varphi=\tau\cdot\ln 2/(4\pi\varepsilon_0)$.

5. **(2.46)** Заряд q = 1 нКл распределен по шару радиуса R = 10 см с объемной плотностью ρ, пропорциональной расстоянию от центра шара r. Найти:
   а) потенциал φ_0 в центре шара;
   б) потенциал $\varphi(r)$ внутри шара, как функцию r.

Дано:

$\rho \sim r$

R = 10 см = 0,1 м

q = 1 нКл = 10^{-9} Кл

φ_0 - ?, $\varphi(r)$ - ?

Решение:

Рассмотрим точку, расположенную на расстоянии r от центра шара, внутри него ($r \le R$). Построим замкнутую поверхность, проходящую через эту точку. Такой поверхностью является сфера, радиус которой равен r, а центр совпадает с центром шара. Определим поток индукции Ф через эту поверхность: $\Phi = DS\cdot\cos\alpha$. Вектор **D** в любой точке построенной замкнутой поверхности перпендикулярен боковой поверхности этой сферы, $\cos\alpha$ = 1. S в формуле – это площадь боковой поверхности сферы с радиусом r:

$$\Phi = D\cdot 4\pi r^2.$$

По теореме Гаусса $\Phi = \Sigma q_i$, где Σq_i – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри построенной замкнутой поверхности. Внутри построенной замкнутой поверхности электрический заряд располагается по объему части шара.

Объемная плотность заряда шара не постоянна и зависит от r. Пусть k – коэффициент пропорциональности: $\rho = kr$. Для расчета заряда применим метод дифференцирования и интегрирования Разделим шар радиуса r на тонкие концентрические сферы толщиной dx, так., чтобы центры этих сфер совпадали с центром шара, а объемная плотность заряда одной такой сферы была приблизительно постоянной. Рассмотрим одну такую сферу радиуса x. Ее заряд

$$dq = V\rho = 4\pi x^2\cdot dx\cdot kx = 4\pi kx^3\cdot dx.$$

Интегрируя в пределах от 0 до r, находим суммарный заряд:

$$\Sigma q_i=\int_0^r 4\pi kx^3dx=\pi kr^4.$$

Отсюда,

$$D\cdot 4\pi r^2=\pi kr^4.$$

Получаем,

$$D(r) = \frac{1}{4}kr^2.$$

Напряженность находим из условия $E = D/\varepsilon_0$:

$$E(r) = kr^2/(4\varepsilon_0).$$

Заря всего шара известен и равен q. Имеем

$$q = \pi kR^4 \Rightarrow k = q/(\pi R^4),$$
$$E(r) = qr^2/(4\pi\varepsilon_0 R^4).$$

Учитывая связь напряженности и потенциала, получаем:

$$d\varphi = -E(r)dr,$$
$$\varphi(r) = -\int E(r)dr = -qr^3/(12\pi\varepsilon_0 R^4) + C.$$

Постоянную интегрирования найдем из условия непрерывности потенциала. Точкой, где известен потенциал, является любая точка на поверхности шара (поле вне и на поверхности равномерно заряженного шара эквивалентно полю точечного заряда такой же величины, сосредоточенному в центре шара). Таким образом, потенциал φ_R на поверхности шара

$$\varphi_R = q/(4\pi\varepsilon_0 R)$$

Из условия $\varphi(R) = -q/(12\pi\varepsilon_0 R) + C$, находим $C = q/(3\pi\varepsilon_0 R)$. Отсюда,

$$\varphi(r) = q(4R^3 - r^3)/(12\pi\varepsilon_0 R^4).$$

Потенциал в центре шара:

$$\varphi_0 = \varphi(0) = q/(3\pi\varepsilon_0 R),$$

$$\varphi_0 = \frac{10^{-9}}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1} = 120 \text{ В}.$$

Ответ: $\varphi_0 = 120$ ***В;*** $\varphi(r) = q(4R^3 - r^3)/(12\pi\varepsilon_0 R^4)$.

6. **(2.66)** Прямой бесконечный цилиндр радиусом r_0=1 м, равномерно заряжен электричеством с поверхностной плотностью заряда σ=10^{-12} Кл/м^2. Цилиндр является источником электронов. Вектор скорости вылетающего электрона перпендикулярен поверхности цилиндра. Какова должна быть скорость электронов, чтобы они удалились от поверхности цилиндра на расстояние большее, чем r=10^4 м.

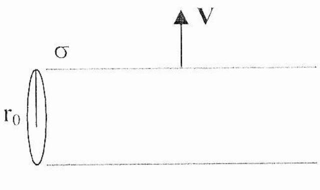
Дано:

r_0 = 1 м

$\sigma = 10^{-12}$ Кл/м^2

r = 10^4 м

V - ?



Решение:

Расстояние, на которое удалится электрон от поверхности цилиндра равно $r=V^2/(2a)$. Отсюда, $V=\sqrt{2ar}$. Ускорение найдем из второго закона Ньютона: a=F/m, где F=eE – сила, действующая на электрон со стороны цилиндра. Напряженность электрического поля цилиндра равна $E=\Delta\varphi/r$, где $\Delta\varphi$ - разность потенциалов между точкой, удаленной на расстояние r от поверхности цилиндра и точкой на поверхности цилиндра. Учитывая связь между напряженностью и потенциалом, получаем:

$$d\varphi_1 = -E_1 dr,\ d\varphi_1 = -\frac{\sigma r_0 dr}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow \varphi_1 = -\int_o^r \frac{\sigma r_0 dr}{\varepsilon_0 r} = -\frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0}\ln|r|$$

$$d\varphi_2 = -E_2 dr,\ d\varphi_2 = -\frac{\sigma r_0 dr}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow \varphi_2 = -\int_o^{r_0} \frac{\sigma r_0 dr}{\varepsilon_0 r} = -\frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0}\ln|r_0|$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0}\ln\left|\frac{r_0}{r}\right|$$

Окончательно получаем:

$$V = \sqrt{2ar} = \sqrt{\frac{2Fr}{m}} = \sqrt{\frac{2eEr}{m}} = \sqrt{\frac{2e\Delta\varphi}{m}} = \sqrt{\frac{2e\sigma r_0}{m\varepsilon_0}\cdot\ln\left|\frac{r_0}{r}\right|}$$

$$V = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-12}\cdot 1}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\cdot\ln\left|\frac{1}{10^4}\right|} = 0{,}6\cdot 10^6\ \frac{м}{с}.$$

Ответ: $0{,}6\cdot 10^6$ ***м/с.***

7. **(3.17)** Два диполя с электрическими моментами p_1 = 1 пКл·м и p_2 = 4 пКл·м находятся на расстоянии r = 2 см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.

Дано:

p_1 = 1 пКл·м = 10^{-12} Кл·м

p_2 = 4 пКл·м = $4\cdot 10^{-12}$ Кл·м

r = 2 см = 0,02 м

F - ?

Решение:

Поле диполя известно:

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos\alpha}.$$

Поле на оси диполя (α = 0, cosα = 1):

$$E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Тогда поле диполя 1 в точке расположения диполя 2:

$$E = \frac{p_1}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Находим силу, действующую на диполь 2:

$$F = p_2\frac{dE}{dr}\cos\alpha = p_2\frac{dE}{dr} = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}$$

$$F = \frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot 10^{-12}}{0{,}02^4} = 6{,}75\cdot 10^{-7}\ H.$$

Ответ: $F = 6{,}75\cdot 10^{-7}$ ***Н.***

8. **(3.45)** На расстоянии h от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд +q. Определить напряженность поля E в точке A, отстоящей от плоскости и от заряда на расстоянии h.

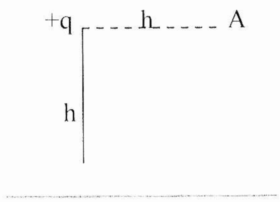
Дано:

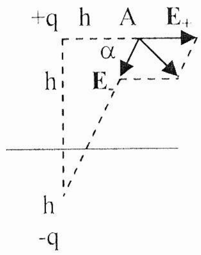
h

E

q

E - ?





Решение:

Плоскость находится в электростатическом поле точечного заряда. Вследствие явления электростатической индукции на стороне плоскости, ближайшей к точечному заряду, появляются наведенные электрические заряды противоположного знака. Согласно методу зеркального изображения, электрическое поле между точечным зарядом и плоскостью эквивалентно полю, созданному данным зарядом +q и его зеркальным изображением в плоскости –q. По принципу суперпозиции получаем искомую напряженность поля в точке A:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-,$$

где E_+ - напряженность поля заряда q в точке A, E_- - напряженность поля заряда -q в точке A.

$$E = \sqrt{E_+^2 + E_-^2 - 2E_+E_-\cos\alpha}$$

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h^2},\quad E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2+4h^2\right)} = \frac{q}{20\pi\varepsilon_0 h^2}$$

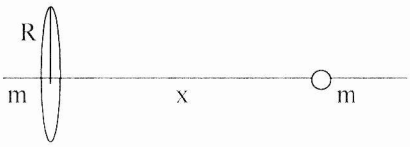
$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+4h^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{q\sqrt{26 - 2 \cdot \sqrt{5}}}{20\pi\varepsilon_0 h^2}$$

Ответ: $E = \dfrac{q\sqrt{26-2\cdot\sqrt{5}}}{20\pi\varepsilon_0 h^2}$.

9. (3.75) Материальное тело массой m=1 кг находится на оси тонкого кольца радиусом R=100 м и массой m=1 кг на расстоянии $x=10^3$ м от плоскости кольца. Какой величины одинаковый заряд q необходимо сообщить кольцу и телу, чтобы энергия их электростатического и гравитационного взаимодействия были равны?

Дано:
m = 1 кг
R = 100 м
$x = 10^3$ м
q - ?



Решение:
При сообщении кольцу и телу заряда, материальное тело будет находится в поле заряда кольца, поэтому их взаимная энергия электростатического взаимодействия W=qφ, где φ - потенциал поля, созданного зарядом кольца в точке расположения материального тела: $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$. Таким образом, энергия электростатического взаимодействия $W = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}$. Энергия гравитационного взаимодействия тел: $G=\gamma m^2/x$. По условию задачи G = W. Отсюда,

$$\frac{\gamma m^2}{x} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}; \qquad \gamma m^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$q^2 = 4\pi\varepsilon_0\gamma m^2$$

$$q = m\sqrt{4\pi\varepsilon_0\gamma}$$

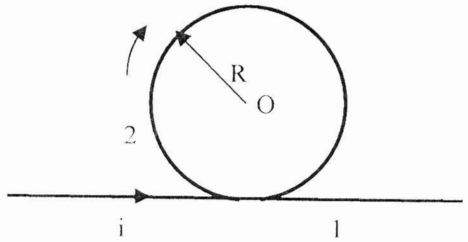
$$q = 1\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}}{9\cdot10^9}} = 8{,}6\cdot10^{-11} \text{ Кл}.$$

Ответ: $8{,}6\cdot10^{-11}$ Кл.

10. (4.13а) Бесконечно длинный тонкий проводник с током i = 50 А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R = 10 см. Определить в точке О магнитную индукцию В поля, создаваемого этим током, в случае, изображенном на рисунке.

Дано:
i = 50 А
R = 10 см = 0,1 м
B - ?

Решение:



Магнитная индукция поля, создаваемого проводником в точке О складывается по принципу суперпозиции из индукций полей, создаваемых частями проводника: прямолинейным участком 1, B_1 и кольцом 2, B_2:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}.$$

Вектор $\mathbf{B_1}$ магнитной индукции поля прямолинейного проводника 1 перпендикулярен плоскости чертежа и направлен к нам; вектор $\mathbf{B_2}$ магнитной индукции поля кольца перпендикулярен плоскости чертежа и направлен от нас. Таким образом, результирующий вектор магнитной индукции В по принципу суперпозиции равен:

$$B = B_2 - B_1.$$

Магнитная индукция поля прямолинейного проводника 1:

$$B_1 = \mu_0\mu i[\cos(0) - \cos(\pi))]/(4\pi R)$$

$$B_1 = \mu_0 i/(2\pi R).$$

Магнитная индукция поля кольца B_2 в центре такого кольца определяется как

$$B_2 = \mu_0 i/(2R).$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} - \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\cdot(\pi - 1)$$

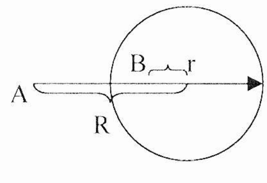
$$B = \frac{12{,}56\cdot10^{-7}\cdot50}{2\cdot3{,}14\cdot0{,}1}\cdot(3{,}14-1) = 214\cdot10^{-6} \text{ Тл} = 214 \text{ мкТл}.$$

Ответ: B = 214 мкТл.

11. (4.39) По бесконечному прямому полому круговому цилиндру протекает параллельно оси цилиндра постоянный ток, равномерно распределенный по его поверхности. Сила тока равна I=10. Найти магнитную индукцию:

1) в произвольной точке внутри цилиндра;
2) в точке А, на расстоянии R = 10 см вне цилиндра.

Дано:
I = 10 А
R = 10 см = 0,1 м
B_1 - ?
B_2 - ?



Решение:
Применим теорему о циркуляции вектора магнитной индукции. Рассмотрим точку В, расположенную внутри цилиндра на расстоянии r от его оси. Проведем через нее окружность радиуса r. Циркуляция вектора $\mathbf{B_1}$:

$$\oint_l \vec{B_1}\,\vec{dl} = \oint B_1 dl = B_1\cdot 2\pi r.$$

Внутри контура токов нет. Следовательно, I=0. Учитывая, что $\oint_l \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I$, получаем:

$$B_1\cdot2\pi r_2 = 0$$

$$B_1 = 0$$

Рассмотрим точку А. Проведем через нее окружность радиуса R. Циркуляция вектора $\mathbf{B_2}$:

$$\oint_l \vec{B_2}\,\vec{dl} = \oint B_2 dl = B_2\cdot 2\pi R.$$

Контур охватывает цилиндр. Ток, охватываемый контуром – I. Отсюда,

$$B_2\cdot2\pi R = \mu_0 I$$

$$B_2 = \mu_0 I/2\pi R$$

$$B_2 = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot10/(2\pi\cdot0{,}1) = 2\cdot10^{-5} \text{ Тл}.$$

Ответ: $B_1 = 0$; $B_2 = 2\cdot10^{-5}$ Тл.

12. (4.50) Определить циркуляцию магнитной индукции по контуру квадрата расположенного в вакууме, если через центр его, перпендикулярно плоскости в которой он лежит, проходит бесконечно длинный прямолинейный проводник, по которому течет ток I=1 А.

Дано:
I = 1 А
$\oint_l \vec{B}\vec{dl}$ - ?

Решение:
Циркуляция вектора В вдоль любого замкнутого контура:

$$\oint_l \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I,$$

где I – токи, охватываемые контуром.

Так как квадрат охватывает проводник с током I, то

$$\oint_l \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\oint_l \vec{B}\,d\vec{l} = 4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 1 = 12{,}56\cdot 10^{-7}\ \text{Тл·м}.$$

Ответ: $12{,}56\cdot 10^{-7}$ Тл·м.

13. (5.15) Протон, обладающий скоростью 20 км/с движется в однородном магнитном поле с индукцией $B=3\cdot 10^{-3}$ Тл под углом $\alpha=30°$ к направлению B. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться протон.

Дано:

$v = 20$ км/с $= 20\cdot 10^3$ м/с

$B = 3\cdot 10^{-3}$ Тл

$\alpha = 30°$

R - ?, h = ?

Решение:

На протон со стороны магнитного поля будет действовать магнитная сила $F_л = q\cdot v\cdot B\cdot \sin\alpha$, где α - угол между векторами v и B. Разложив вектор начальной скорости по оси OX(направление силовых линий) и по оси OY (направление им перпендикулярное), получим: $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\cdot\sin\alpha$. По второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = v_y^2/R$ – центростремительное ускорение протона. Следовательно,

$$q\cdot v\cdot B\cdot\sin\alpha = ma$$

$$q\cdot v\cdot B\cdot\sin\alpha = mv_y^2/R$$

$$R = m\cdot v\cdot\sin\alpha/(q\cdot B)$$

$$R = 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 20\cdot 10^3\cdot 0{,}5/(1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 3\cdot 10^{-3}) = 0{,}035\ \text{м}.$$

В направлении оси OX протон будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью v_x и за время одного оборота пройдет путь, равный шагу винта траектории:

$$h = v_x T,$$

где T – время одного оборота по окружности:

$$T = 2\pi R/v_y = 2\pi m/(q\cdot B)$$

$$h = 2\pi v\cdot m\cdot\cos\alpha/(q\cdot B)$$

$$h = 6{,}28\cdot 0{,}035\cdot\sqrt{3} = 0{,}38\ \text{м}.$$

Ответ: R = 0,035 м; h = 0,38 м.

14. (5.33) Квадратная рамка со стороной a и массой m расположена в одной плоскости на расстоянии b от прямого бесконечного проводника с током i_1. При каком токе i_2 в рамке она будет «висеть» неподвижно?

Дано:

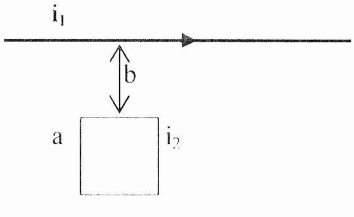
a

m

b

i_1

i_2 - ?



Решение:

Рамка будет «висеть» неподвижно в воздухе если, результирующая сила, действующая на нее будет равна 0. На рамку действуют сила тяжести $F_Т = mg$ и сила Ампера F_A, действующей на рамку со стороны магнитного поля проводника с током. Сила Ампера, действующая на рамку складывается из силы Ампера, действующей на ближайшее к проводнику ребро F_{A1}, направленной к проводнику, и силы Ампера, действующей на дальнее от проводника ребро F_{A2}, направленной от проводника. Таким образом,

$$F_A = F_{A1} - F_{A2}.$$

$$F_{A1} = i_2 B_1 a,$$

где $B_1 = \mu_0 i_1/(2\pi b)$

$$F_{A1} = \mu_0 i_1 i_2 a/(2\pi b).$$

$$F_{A2} = i_2 B_2 a,$$

где $B_2 = \mu_0 i_1/(2\pi(b+a))$

$$F_{A2} = \mu_0 i_1 i_2 a/(2\pi(b+a)).$$

$$F_A = \mu_0 i_1 i_2 a/(2\pi b) - \mu_0 i_1 i_2 a/(2\pi(b+a)) = \mu_0 i_1 i_2 a^2/(2\pi b(b+a)).$$

Учитывая, что $F_Т + F_A = 0$, т.е. $F_Т = F_A$, получаем:

$$mg = \mu_0 i_1 i_2 a^2/(2\pi b(b+a))$$

$$i_2 = 2\pi b(b+a)mg/(\mu_0 i_1 a^2).$$

Ответ: $i_2 = 2\pi b(b+a)mg/(\mu_0 i_1 a^2)$.

15. (6.25) Индукция неоднородного магнитного поля изменяется по закону $B = B_0(1 + \alpha r)$, где $B_0 = 0{,}01$ Тл, $\alpha = 1$ м$^{-1}$, r – расстояние точки от оси вращения, вращается в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси прямой проводник длины $l = 1$ м с постоянной угловой скоростью $\omega = 50$ с$^{-1}$. Ось вращения проходит через один из концов проводника. Силовые линии магнитного поля вертикальны. Определить э.д.с. индукции, возникающую в проводнике.

Дано:

$l = 10$ см $= 0{,}1$ м

$B = 0{,}4$ Тл

$\Delta U = 0{,}2$ В

ω - ?

Решение:

По закону Фарадея э.д.с. индукции, возникающая в проводнике:

$$\varepsilon(t) = -d\Phi_m/dt$$

Поток магнитной индукции через площадь S круга, описываемую проводником при вращении:

$$\Phi_m(t) = BS\cdot\cos(\omega t/2\pi),$$

где ω - угловая скорость вращения проводника, $S = \pi l^2$.

Поле неоднородно, поэтому применим метод дифференцирования и интегрирования. Розобьем круг на узкие площадки, представляющие собой концентрические окружности, шириной dr, так чтобы можно было считать. Что поле в пределах одной такой площадки однородно. Рассмотрим одну такую площадку, радиуса r. Ее площадь $dS = 2\pi r\cdot dr$. Поток магнитной индукции через нее будет равен:

$$d\Phi_m = B(r)\cdot dS\cdot\cos(\omega t/2\pi) = B_0\cdot(1 + \alpha r)\cdot 2\pi r\cdot dr\cdot\cos(\omega t/2\pi)$$

Просуммировав все потоки по площади круга в пределах от 0 до l (радиус круга равен длине проводника), найдем поток через площадь S:

$$\Phi_m = B_0\cdot 2\pi\cos\frac{\omega t}{2\pi}\int_0^l (1+\alpha r)\cdot r\,dr =$$

$$= 2\pi B_0\cos\frac{\omega t}{2\pi}\cdot\left(\frac{r^2}{2} + \frac{\alpha r^3}{3}\right)\Bigg|_0^l = \pi B_0 l^2\cos\frac{\omega t}{2\pi}\cdot\left(1 + \frac{2\alpha l}{3}\right)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\omega}{2\pi}\pi B_0 l^2\sin\frac{\omega t}{2\pi}\cdot\left(1 + \frac{2\alpha l}{3}\right) =$$

$$= \frac{\omega}{2}B_0 l^2\sin\frac{\omega t}{2\pi}\cdot\left(1 + \frac{2\alpha l}{3}\right)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{max} = \frac{\omega}{2}B_0 l^2\cdot\left(1 + \frac{2\alpha l}{3}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{50}{2}\cdot 0{,}01\cdot 1^2\cdot\left(1 + \frac{2\cdot 1\cdot 1}{3}\right) = 0{,}42B.$$

Ответ: ε = 42 В.

16. (6.40) В электрическую цепь с омическим сопротивлением $R_1 = 6$ Ом включен соленоид цепь с сопротивлением $R_2 = 3$ Ом. Определить индуктивность соленоида, если через время t=0,001 с после размыкания цепи ток уменьшился в три раза.

Дано:

$R_1 = 6$ Ом

$R_2 = 3$ Ом
t=0,001 с
L - ?

Решение:

При размыкании электрической цепи, содержащей источник тока, возникают экстратоки размыкания

$$I = I_0\exp(-Rt/L).$$

В момент времени, когда $I = I_0/3$:

$$I_0\exp(-Rt/L) = I_0/3$$

$$\exp(-Rt/L) = 1/3, \quad \exp(Rt/L) = 3, \quad Rt/L = \ln(3)$$

$$L = Rt/\ln(3)$$

Учитывая, что общее сопротивление цепи $R=R_1+R_2$, получаем:

$$L = (R_1 + R_2)\cdot t/\ln(3)$$

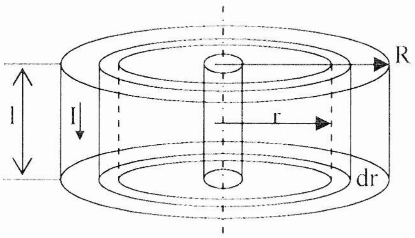
$$L = (6 + 3)\cdot 0{,}001/\ln(3) = 8{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{Гн} = 8{,}2\ \text{мГн}.$$

Ответ: 8,2 мГн.

17. **(6.50)** По бесконечной прямой полой трубке радиуса R_1=1 см идет ток I=100 А. Определить энергию магнитного поля, заключенного в цилиндре радиуса R=1 м и длиной l=1 м, расположенного соосно с трубкой.

Дано:
R_1 = 1 см = 0,01 м
I = 100 А
R = 1 м
l = 1 м

W - ?



Решение:

Магнитное поле, созданное током I идущим по трубке, является неоднородным. Для расчета энергии такого поля применим метод дифференцирования и интегрирования и разобьем цилиндр на малые полые цилиндры толщиной dr. В пределах каждого такого цилиндра магнитное поле можно считать однородным. Рассмотри такой элементарный цилиндр обьемом $dV=2\pi r\cdot l\cdot dr$. Энергия магнитного поля, создаваемая этим цилиндром

$$dW = B^2dV/(2\mu_0\mu) = B^2\pi r\cdot l\cdot dr/(\mu_0\mu).$$

По закону Био-Савара-Лапласа, индукция магнитного поля, создаваемая бесконечно длинным проводником на расстоянии r от центра равна:

$$B = \mu_0\mu I/(2\pi r).$$

В этом случае, энергия, заключенная элементарным цилиндром, равна

$$dW = \mu_0\mu I^2\cdot l\cdot dr/(4\pi r).$$

Интегрируя это уравнение в пределах от R_1 до R имеем:

$$W = \int_{R_1}^{R} \frac{\mu_0\mu I^2\cdot l\cdot dr}{4\pi r} = \frac{\mu_0\mu I^2\cdot l}{4\pi}\cdot \ln\frac{R}{R_1}$$

$$W = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 100^2\cdot 1\cdot \ln(1/0{,}01)/(4\pi) = 4{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $W = 4{,}6\cdot 10^{-3}$ Дж.