FEM Rep [illegible]
WiSe 23-24

①

a) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = A_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underbrace{\underline{e}_j)\, B_{km}\, (\underline{e}_k} \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ij} B_{jm}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$ ✓

b) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = A_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot B_{km}\,(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ij} B_{ij}$ ✓

c) $\underline{v}\,\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}} = v_o\, \underbrace{e_o\; B_{ji}}\, A_{jm}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$= v_i B_{ji} A_{jm}\, \underline{e}_m$ ✓

d) $\underline{v} \cdot \underline{v} = v_i\, \underbrace{\underline{e}_i \cdot v_j}\, \underline{e}_j$

$= v_i v_i$ ✓

e) $\underline{\underline{A}} \cdot \mathbb{C} = A_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot \mathbb{C}_{kmop}\,(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{ij}\, \mathbb{C}_{ijop}\, (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$ ✓

f) $\operatorname{div}(\underline{v}) = \operatorname{grad}(\underline{v}) \cdot \underline{\underline{I}}$; $\operatorname{grad}(\underline{v}) = v_{i,j}$

$= v_{i,i}$ ✓ Komma steht hier für Ableitung

② $\Phi(\underline{\underline{X}}) = 2\underline{\underline{X}}^2 + \underline{\underline{Y}}$

$\underline{\underline{X}} = X_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$; $\underline{\underline{Y}} = Y_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

Ableitung gesucht nach $U = U_{ik}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_k)$

a) $D\Phi(\underline{\underline{X}}) = \frac{d}{d\epsilon}\left[\Phi(\underline{\underline{X}} + \epsilon \underline{\underline{U}})\right]_{\epsilon=0}$

$= \frac{d}{d\epsilon}\left[2(\underline{\underline{X}} + \epsilon\underline{\underline{U}})^2 + \cancel{\underline{\underline{Y}}}\right]_{\epsilon=0}$ =0, keine Funktion von $\underline{\underline{X}}$

$= \frac{d}{d\epsilon}\left[2(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}\epsilon\underline{\underline{U}} + \epsilon\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}} + \epsilon\underline{\underline{U}}\epsilon\underline{\underline{U}})\right]_{\epsilon=0}$

$= \left[2\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{U}} + 2\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}} + 2\epsilon\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}\right]_{\epsilon=0}$

$= 2\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{U}} + 2\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}}$

$= 2(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}})$ Nicht sicher ob das stimmt, weicht von anderer Lösung $2(\underline{\underline{X}}\,4 + \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}})$ ab.

↓ soll vermutlich ein U sein...

b) $D\Phi(\underline{\underline{X}}) = \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial X_{kl}}\, U_{kl}$

$= \frac{\partial\, 2X_{ij} X_{im} + Y_{op}}{\partial X_{kl}}\, U_{kl}$

$= 2(X_{ij}\,\delta_{jk}\,\delta_{ml} + X_{jm}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl})\, U_{kl}$

$= 2(X_{ik}\,\delta_{ml} + X_{lm}\,\delta_{ik})\, U_{kl}$

$= 2(X_{ik} U_{km} + U_{il} X_{lm}) = 2(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}})$

(I)

③

a) $x(t) = x_i(t)\, e_i = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 + (2\bar{X}_1 - \bar{X}_2)t \\ \bar{X}_2 + (\bar{X}_1 + 2\bar{X}_2)\, t \\ \bar{X}_3 + (\bar{X}_1 \bar{X}_2 + 1)\, t \end{pmatrix}$

a) nicht im Repetitorium vorgerechnet...

$Q_{1,t=0} = (0, 0, 0) \rightarrow Q_{1\,t=t} = \overset{(0,\,0,\,t)}{~~[illegible]~~)}$

$Q_{2,t=0} = (1, 0, 0) \rightarrow Q_{2\,t=t} = (1+2t, t, t)$

$Q_{3,t=0} = (1, 1, 0) \rightarrow Q_{3\,t=t} = (1+t, 1+3t, 3t)$

$Q_{4,t=0} = (0, 1, 0) \rightarrow Q_{4\,t=t} = (-t, 1+2t, t)$

$Q_{1\,t=1} = (0, 0, 1)$

$Q_{2\,t=1} = (3, 1, 1)$

$Q_{3\,t=1} = (2, 4, 3)$ (2,1,2) nach Brodi !

$Q_{4\,t=1} = (-1, 3, 1)$

b) $\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1+2t & -t & 0 \\ t & 1+2t & 0 \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1+2t & -t \\ t & 1+2t \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t \end{matrix}$

c) $\det(\underline{\underline{F}}) \overset{!}{>} 0$

$\det(\underline{\underline{F}}) = (1+2t) + t^2 > 0$

t ist immer größer $0 \rightarrow \det(\underline{\underline{F}}) > 0$

d) $C = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$ d) nicht im Repetitorium gerechnet...

$$= \begin{pmatrix} 1+2t & +t & \bar{X}_2 t \\ -t & 1+2t & \bar{X}_1 t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2t & -t & 0 \\ t & 1+2t & 0 \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+2t)^2 + t^2 + (\bar{X}_2 t)^2 & -t-2t^2+t+2t^2+\bar{X}_1 t \bar{X}_2 t & \bar{X}_2 t \\ -t-2t^2+t+2t^2+\bar{X}_1 \bar{X}_2 t^2 & t^2+(1+2t)^2+(\bar{X}_1 t)^2 & \bar{X}_1 t \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+4t+5t^2+\bar{X}_2^2 t^2 & \bar{X}_1 \bar{X}_2 t^2 & \bar{X}_2 t \\ \bar{X}_1 \bar{X}_2 t^2 & 1+4t+5t^2+\bar{X}_1^2 t^2 & \bar{X}_1 t \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1+4t+5t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+4t+5t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FEM Rep [redacted]
WiSe 23-24

④

a) $\bar{\Phi}^I(\eta) = \prod_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{k+1} \frac{\eta - \eta^J}{\eta^I - \eta^J}$

Ordnung der Ansatzfunktion $k = 1 \rightarrow k+1 = 2$

$\eta^1 = -1 \quad \eta^2 = 1$

$$\left.\begin{aligned} \Phi^1_{1D}(\eta_1) &= -\tfrac{1}{2}(\eta_1 - 1) \\ \Phi^2_{1D}(\eta_1) &= \tfrac{1}{2}(\eta_1 + 1) \end{aligned}\right] \text{Nebenrechnung}$$

$\Phi^1(\eta) = +\frac{1}{2}(\eta_1 - 1)\frac{1}{2}(\eta_2 - 1)$

$\Phi^2(\eta) = -\frac{1}{2}(\eta_1 + 1)\frac{1}{2}(\eta_2 - 1)$

$\Phi^3(\eta) = -\frac{1}{2}(\eta_1 - 1)\frac{1}{2}(\eta_2 + 1)$

$\Phi^4(\eta) = \frac{1}{2}(\eta_1 + 1)\frac{1}{2}(\eta_2 + 1)$

b) $A_{\text{verzerrt}} = 4$

$A_{\text{referenz}} = 2$

b) nicht im Repetitorium gerechnet...

$\rightarrow \frac{A_{ver}}{A_{ref}} = \frac{1}{2} \int 1 \cdot \underbrace{\det(\underline{J})}_{= \frac{A_{ver}}{A_{ref}}} d\eta$

c) $P_\eta(-1, 0{,}5)$

$\Phi^1(P_\eta) = \frac{1}{4}$

$\Phi^2(P_\eta) = 0$

$\Phi^3(P_\eta) = \frac{3}{4}$

$\Phi^4(P_\eta) = 0$

hier steht im Aufschrieb $\frac{1}{3}$ ... ~~Fehler~~?
↳ Es wird mit $\frac{3}{4}$ weitergerechnet, also vermutlich Schreibfehler.

$\underline{X}^h = \sum \underbrace{\hat{\underline{X}}^I}_{\text{↳ Knotenpunkt Position im physikalische System } (x_1, x_2)} \cdot \Phi^I(\eta)$

$\underline{X}^h\left(\begin{pmatrix}-1\\0{,}5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$P_x = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

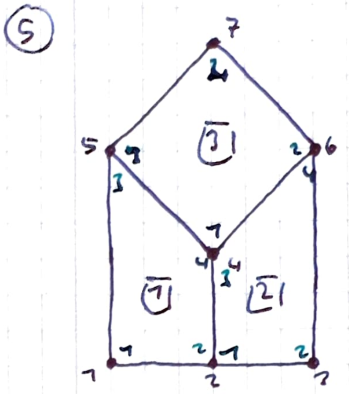
d) $J = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{\eta}} \approx \frac{\partial \underline{X}^h}{\partial \underline{\eta}}$

$$J^h = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sum_I \hat{\underline{X}}^I \Phi^I(\eta)\right)$$
$$= \sum_I \hat{\underline{X}}^I \cdot \frac{\partial \Phi^I}{\partial \eta}$$

Mit dieser Zelle gleich weiterrechnen

↳ Für 2D: $J = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial X_1^h}{\partial \eta_1}} & \frac{\partial X_1^h}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial X_2^h}{\partial \eta_1} & \frac{\partial X_2^h}{\partial \eta_2} \end{pmatrix}$

⑤



$\boxed{i}$ $\hat{=}$ Elementnummer

i $\hat{=}$ Globale Knotennummer

i $\hat{=}$ Lokale Knotennummer

$\textcircled{i}$ $\hat{=}$ Globaler Freiheitsgradindex

$\textcircled{i}$ $\hat{=}$ Lokaler Freiheitsgradindex

Berechnung mit zwei Freiheitsgraden pro Knoten

a) LGS : $\underset{14\times 14}{\underline{\underline{K}}} \cdot \overset{14\times 1}{\underline{u}} = \underset{14\times 1}{\underline{F}}$ (mit 14 Unbekannten)

b) ges !

$$[\overset{1}{u_{x1}} ; \overset{2}{u_{y1}} ; \overset{3}{u_{x2}} ; \overset{4}{u_{y2}} ; \overset{\dots}{\dots}]^T$$

Der Lösungsvektor enthält abwechselnd die Freiheitsgrade für die x- und y-Verschiebung, angefangen am 1. globalen Knoten.

x-Verschiebung am Knoten k:

$i_x(k) = 2k - 1$

Um die Position i_x bzw. i_y der Freiheitsgrade des k-ten Knotens in $\underline{u}$ zu bestimmen, können folgende Formeln verwendet werden.

y-Verschiebung am Knoten k

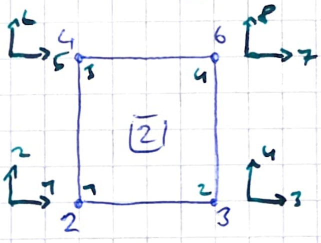
$i_y(k) = i_x(k) + 1 = 2k$

c) $\underline{\underline{k}}^e$ für Element 2 mit den Einträgen k_{ij} und lokalen Freiheitsgradindizes i, j

$\mathrm{Dim}(\underline{\underline{k}}^e) = n_{DOF} \cdot n_{Elementknoten} = 2 \cdot 4 = 8$

Am lokalen Knoten [redacted] 1 ist der Index für den x-Freiheitsgrad [redacted] ① und für den y-Freiheitsgrad ② usw. . .

Element 2 :



$$\hookrightarrow \underline{\underline{k}}^{2}_{\cancel{e}} = \begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \cdots & \textcircled{8} & \\ k^2_{11} & k^2_{12} & \cdots & k^2_{18} & \textcircled{1} \\ k^2_{21} & k^2_{22} & \cdots & k^2_{28} & \textcircled{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k^2_{81} & k^2_{82} & \cdots & k^2_{88} & \textcircled{8} \end{array}$$

$\mathbb{C} \hat{=}$ Materialtensor

Schwache Form

$$\underline{\underline{k}}^e = \int_E \varepsilon(v) \cdot \mathbb{C} \cdot \varepsilon(\underline{u})\, dV$$

Starke Form

$$= \int_E \sum_i \sum_j \underbrace{(\underline{\underline{B}}^I)^T \cdot [\mathbb{C}]^V \cdot \underline{\underline{B}}^J}_{(k^e)^{IJ} \leftrightarrow 2\times 2} dV$$

d) ges: $(k^e)_{ij}$

Beispiel : $i = 1, j = 1 \rightarrow I = 3, j = 3$

$i = 1, j = 2 \rightarrow I = 3, j = 4$

1 → 2 : ① → ③ ② → ④

2 → 3 : ③ → ⑤ ④ → ⑥

3 → 4 : ⑤ → ⑦ ⑥ → ⑧

4 → 6 : ⑦ → ⑪ ⑧ → ⑫

Einträge in globaler Steifigkeitsmatrix:

$$K = \begin{array}{cccccccccccccc|c}
\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} & \textcircled{10} & \textcircled{11} & \textcircled{12} & \textcircled{13} & \textcircled{14} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} \\
0 & 0 & k^2_{11} & k^2_{12} & k^2_{13} & k^2_{14} & k^2_{15} & k^2_{16} & 0 & 0 & k^2_{17} & k^2_{18} & 0 & 0 & \textcircled{3} \\
0 & 0 & k^2_{21} & k^2_{22} & k^2_{23} & k^2_{24} & k^2_{25} & k^2_{26} & 0 & 0 & k^2_{27} & k^2_{28} & 0 & 0 & \textcircled{4} \\
0 & 0 & k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{34} & k^2_{35} & k^2_{36} & 0 & 0 & k^2_{37} & k^2_{38} & 0 & 0 & \textcircled{5} \\
0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} & k^2_{45} & k^2_{46} & 0 & 0 & k^2_{47} & k^2_{48} & 0 & 0 & \textcircled{6} \\
0 & 0 & k^2_{51} & k^2_{52} & k^2_{53} & k^2_{54} & k^2_{55} & k^2_{56} & 0 & 0 & k^2_{57} & k^2_{58} & 0 & 0 & \textcircled{7} \\
0 & 0 & k^2_{61} & k^2_{62} & k^2_{63} & k^2_{64} & k^2_{65} & k^2_{66} & 0 & 0 & k^2_{67} & k^2_{68} & 0 & 0 & \textcircled{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{10} \\
0 & 0 & k^2_{71} & k^2_{72} & k^2_{73} & k^2_{74} & k^2_{75} & k^2_{76} & 0 & 0 & k^2_{77} & k^2_{78} & 0 & 0 & \textcircled{11} \\
0 & 0 & k^2_{81} & k^2_{82} & k^2_{83} & k^2_{84} & k^2_{85} & k^2_{86} & 0 & 0 & k^2_{87} & k^2_{88} & 0 & 0 & \textcircled{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{14}
\end{array}$$

FEM Rep. WiSe 24-25

1

①

a) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = A_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\, B^{km}_{\cancel{op}}(\underline{e}_k \otimes \underline{e}^{m}_{\cancel{p}})$

$= A_{ij} B_{km} \delta_{jk}\, \underline{(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)}$

$= A_{ij} B_{jm}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$ Brodi lässt das ⊗ hier weg

b) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = A_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot B_{km}(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ij} B_{km} \delta_{ik} \delta_{jm}$

$= A_{ij} B_{ij}$

$\underline{v}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}$ Eigentlich so, in Indexnotation aber egal

c) $\underline{v}\,\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}} = v_i \underbrace{\underline{e}_i\; B_{kj}(\underline{e}_j}_{\text{dann das}} \otimes \underbrace{\underline{e}_k)\, A_{mo}(\underline{e}_m}_{\text{zuerst}} \otimes \underline{e}_o)$

$= v_i B_{kj} A_{mo}\, \delta_{ij} \delta_{km}$

$= v_i B_{ki} A_{ko}\; \underline{e}_o$

Punkt setzen oder nicht spielt hier keine wirkliche Rolle, es impliziert nur die gleiche Zahl an Basen

e) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} \;\hat{=}\; \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} = A_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\, C_{kmop}(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{ij} C_{kmop} \delta_{ik} \delta_{jm}\, (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{ij} C_{ijop}\, (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

Bonus (als Aufgabe

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{A}} = C_{ijkm} \cancel{A_{op}}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)\, A_{op}\, (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= C_{ijkm} A_{km}$

f) $\operatorname{div}(\underline{v}) = v_{i,i} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}$

Komma steht für Ableitung

$\operatorname{grad}(\underline{v}) = v_{i,j} = \begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \dots & \partial v_1/\partial x_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial v_3/\partial x_1 & \dots & \partial v_3/\partial x_3 \end{pmatrix}$

d) $\underline{v} \cdot \underline{v} = v_i v_i$

c) In Absolutschreibweise

$v_i B_{ki} A_{ko}\; \underline{e}_o = \underline{v}\,\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}$

$\underline{v}\,\underline{\underline{B}}$ wäre $v_i B_{ij}$ -> Es muss ein ^{T} im Spiel sein

$(AB)^T = B^T A^T$

②

a) $\Phi(\underline{\underline{X}}) = 2\underline{\underline{X}}^2 + \underline{\underline{Y}}$

$D\Phi_{\underline{\underline{X}}} = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\Phi(\underline{\underline{X}} + \varepsilon\underline{\underline{u}})\right]_{\varepsilon=0}$ ε ist skalare Größe

$= \frac{d}{d\varepsilon}\left[(2(\underline{\underline{X}} + \varepsilon\underline{\underline{u}})(\underline{\underline{X}} + \varepsilon\underline{\underline{u}})\right]$

$= \frac{d}{d\varepsilon}\left[2(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{X}} + \varepsilon\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{X}} + \varepsilon\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{u}} + \varepsilon^2\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{u}})\right]_{\varepsilon=0}$

$= \left[2(\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{u}} + 2\varepsilon\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{u}}\right]_{\varepsilon=0}$

$= 2(\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{u}})$

$E = \frac{1}{2}(C - I) \approx E(0) + DE\,u$

b) $D\Phi_{\underline{\underline{X}}} = \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial X_{km}} U_{kl}$

$= \frac{\partial(2X_{im}X_{mj} + Y_{ij})}{\partial X_{kl}} U_{kl}$

$= (2\delta_{ik}\delta_{ml}X_{mj} + 2X_{im}\delta_{mk}\delta_{jl})U_{kl}$

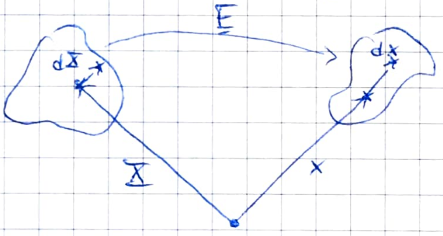
$= (2\delta_{ik}X_{lj} + 2X_{ik}\delta_{jl})U_{kl}$

$= 2X_{lj}U_{il} + 2X_{ik}U_{kj}$ In Indexschreibweise darf Reihenfolge getauscht werden (Summe von Skalaren)

$= 2U_{il}X_{lj} + 2X_{ik}U_{kj}$

$= 2(\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{u}})$

③



$d\underline{x} = \underline{\underline{F}}\,d\underline{X} \leftrightarrow \underline{\underline{F}} = \frac{d\underline{x}}{d\underline{X}}$

oder: $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})$

a) $\underline{q}_i = \underline{x}(\underline{Q}_i)$

$\underline{q}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $q_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ $q_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $q_4 = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

b) $F = \underbrace{\frac{dx}{dX}}_{x_{i,j}} = \begin{pmatrix}1+2t & -t & 0\\ t & 1+2t & 0\\ x_2 t & x_1 t & 1\end{pmatrix}$

FEM Rep WiSe 24-25

c) $\det(\underline{F}) = (2t+1)^2 + t^2$ Immer größer 0 !

d) Rechter Cauchy-Green Tensor

↳ $\underline{C} \to d\underline{x}\, d\underline{x} = d\underline{X}\, \underline{C}\, d\underline{X}$

$C = F^T F$

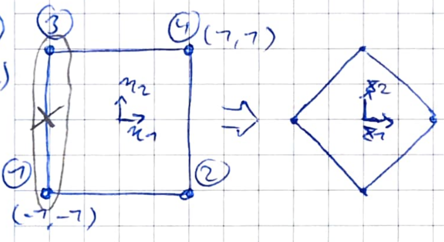
ges: $C(\underline{X} = \underline{0})$

$$F(\underline{X}=0) = \begin{pmatrix} 1+2t & -t & 0 \\ t & 1+2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

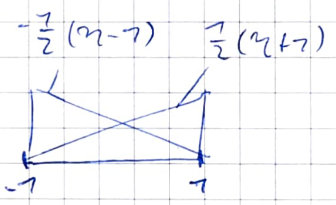
$$C(\underline{0}) = \begin{pmatrix} 5t^2+4t+1 & 0 & 0 \\ 0 & 5t^2+4t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nur Streckungen in Hauptrichtungen keine Scherung, weil nur Einträge auf Hauptdiagonalen.

④ a)



$\underline{X}(\eta)$



$\phi^1(\eta) = \frac{1}{4}(\eta_1-1)(\eta_2-1)$

$\phi^2(\eta) = -\frac{1}{4}(\eta_1+1)(\eta_2-1)$

$\phi^3(\eta) = -\frac{1}{4}(\eta_1-1)(\eta_2+1)$

$\phi^4(\eta) = \frac{1}{4}(\eta_1+1)(\eta_2+1)$

c) $\underline{X}(\eta) = \sum_I \underline{X}^I \Phi^I(\eta)$ knotenkoordinaten

ges: $P(\eta_1 = -1,\ \eta_2 = \frac{1}{2})$

Eingesetzt in Ansatzfunktionen:

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-1) + \frac{3}{4}\cdot 0 \\ \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Ander Ansatz für d):

Ableitung der Fkt. nach η_1

Ableitung der Fkt nach η_2

x-koordinaten der knoten

y-koordinaten der knoten

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}, & 0, & \frac{3}{4}, & 0 \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= J$

FEM Rep ~~[illegible]~~
WiSe 24-25

4

④

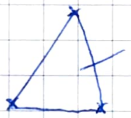
d) $\underline{\underline{J}} = \nabla_\xi (\underline{\underline{X}})$

$$= \begin{pmatrix} \underline{X}_{1,1} & \underline{X}_{1,2} \\ \underline{X}_{2,1} & \underline{X}_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}_{i,j} = \sum_I \overset{1}{\underline{X}}{}_i^I \cdot \frac{\partial \Phi^I}{\partial \xi_j}$$

$$\text{Bsp}: \frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial\left(\frac{1}{4}(\xi_1-1)(\xi_2-1)\right)}{\partial \xi_1} \qquad = \frac{1}{4}(\xi_2 - 1)$$

$$\boxed{A = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det(\underline{\underline{J}})\, d\xi_1 d\xi_2}$$



$\Phi^I \sim 1, x, y$

Jacobi-Matrix im ganzen Element konstant in Dreieckselementen

⑤ $-\Delta u = f$ für $\Omega \in \mathbb{R}^1$

$u = 0$ auf $\partial\Omega$ (Auf dem Rand)

Ansatzraum muss so aufgebaut sein, dass die $\overset{\text{Dirichlet}}{\downarrow}$ Randbedingungen erfüllt sind! (Das in Prüfung schreiben!)

a) $$\int_\Omega -u_{xx} \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot \check{v} \, dx \qquad \forall v \in H_0^1$$

$$\Leftrightarrow [u_x \cdot v]_{\partial\Omega} - \int -u_x v_x \, dx = \int f v \, dx$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int u_x v_x \, dx}_{a(\underset{\llcorner}{u}, v)} = \underbrace{\int f v \, dx - [u_x v]_{\partial\Omega}}_{\substack{L(v) \\ \text{linear}}}$$

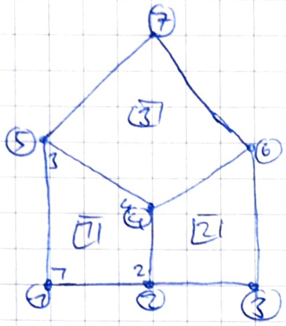
b) $$u \to u_h = \sum_I \overset{\overset{\text{Knotenwerte}}{\swarrow}}{\hat{u}} \Phi^I \Rightarrow \underline{\underline{K}}\, \underline{u} = \underline{L}$$

[Poisson - Vorlesung mit zwei Übungen!]

FEM Rep WiSe 24/25

5

(6)



a) Global : 14 Freiheitsgrade

~~(Jedes Element vier Knoten, acht Freiheitsgrade)~~

$\underline{\underline{K}} \in \mathbb{R}^{14 \times 14}$

$\underline{U}, \underline{F} \in \mathbb{R}^{14}$

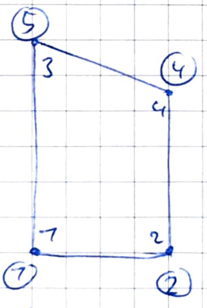
Lokal : 8 Freiheitsgrade

$\underline{\underline{k}} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$

b)

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} U_{x11} \\ U_{y11} \\ U_{x12} \\ U_{y12} \\ U_{x13} \\ U_{y13} \\ \vdots \\ U_{x17} \\ U_{y17} \end{pmatrix}$$

c)



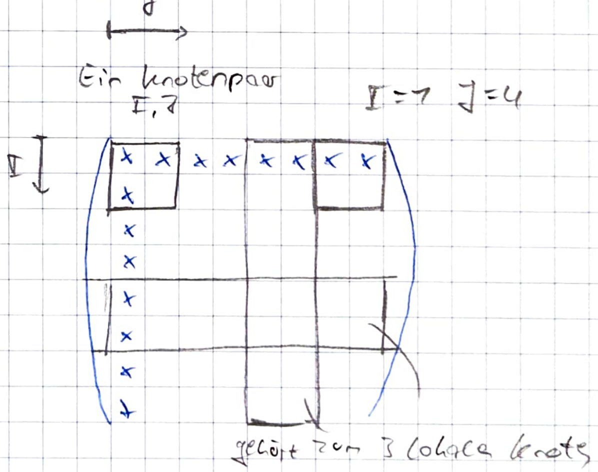
1 → ①

2 → ②

3 → ⑤

4 → ④

Lokal



d) $k^{l}_{55} \to k_{99}$

$k^{l}_{56} \to k_{9\,10}$

⑥

Globaler Knoten ④ : ~~[illegible]~~ drei lokale Knoten treffen sich

→ Überlappungen in der globalen Steifigkeitsmatrix durch Addition

Skript Kapitel 4.3 hat ähnliche Aufgabe! ∇ Klausur

Letzte Vortragsübung auch wichtig!

FEM SoSe 24 $\boxed{\text{II}}$

①

a) $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\cdot\underline{b} = A_{ji}(\underline{e}_i\otimes\underbrace{\underline{e}_j)\,A_{km}(\underline{e}_k}\otimes\underline{e}_m)\cdot b_o\underline{e}_o$

$= A_{ji}A_{jm}(\underline{e}_i\otimes\underbrace{\underline{e}_m)\cdot b_o\underline{e}_o}$

$= A_{ji}A_{jm}b_m\,\underline{e}_i$

b) $\frac{\delta \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}^T}{\delta\underline{\underline{A}}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}^T = A_{ji}(\underline{e}_i\otimes\underbrace{\underline{e}_j)\,A_{mn}(\underline{e}_n}\otimes\underline{e}_m)$

$= A_{ji}A_{mj}(\underline{e}_i\otimes\underline{e}_m)$

$\frac{\partial\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}^T}{\partial\underline{\underline{A}}} = \frac{A_{ji}A_{mj}}{A_{op}}(\underline{e}_i\otimes\underline{e}_m\otimes\underline{e}_o\otimes\underline{e}_p)$

$=(A_{ji}\delta_{mo}\delta_{jp}+A_{mj}\delta_{jo}\delta_{ip})(\underline{e}_i\otimes\underline{e}_m\otimes\underline{e}_o\otimes\underline{e}_p)$

$= A_{pi}\delta_{mo}+A_{mo}\delta_{ip}\;(\underline{e}_i\otimes\underline{e}_m\otimes\underline{e}_o\otimes\underline{e}_p)$

c) $=(\underline{\underline{A}}^T\otimes\underline{\underline{I}}^T)^{\overset{24}{T}}+(\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{A}}^T)^{\overset{24}{T}}$

d) $\underline{b}+\underline{c}(\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}})^{\overset{14}{T}}\cdot\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^T =$

$\underline{c}(\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}})^{\overset{14}{T}} = \delta_{mj}\delta_{ki}(\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j\otimes\underline{e}_k\otimes\underline{e}_m)$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^T = A_{ij}(\underline{e}_i\otimes\underbrace{\underline{e}_j)\,B_{mk}}(\underline{e}_k\otimes\underline{e}_m)$

$= A_{ij}B_{mj}(\underline{e}_i\otimes\underline{e}_m) = A_{op}B_{Rp}(\underline{e}_o\otimes\underline{e}_R)$

$\underline{c}(\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}})^{\overset{14}{T}} = c_t\underbrace{\underline{e}_t\;\delta_{mj}\delta_{ki}}(\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j\otimes\underline{e}_k\otimes\underline{e}_m)$

$= c_k\delta_{mj}(\underline{e}_j\otimes\underline{e}_k\otimes\underline{e}_m)$

$\underline{b}+\underline{c}(\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}})^{\overset{14}{T}}\cdot\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^T = b_v\underline{e}_v + c_k\delta_{mj}(\underline{e}_j\otimes\underbrace{\underline{e}_k\otimes\underline{e}_m)\cdot A_{op}B_{Rp}(\underline{e}_o\otimes\underline{e}_R})$

$= b_v\underline{e}_v + A_{op}B_{Rp}c_k\delta_{mj}\delta_{ko}\delta_{mR}\;\underline{e}_j$

$= b_v\underline{e}_v + A_{kp}B_{jp}c_k\,\underline{e}_j$

②

$W = \mu\varepsilon\cdot\varepsilon + \ln[(tr(\varepsilon)+1)^2]\,tr(\varepsilon)$

$\varepsilon = LIN(E)$

a) $T = \frac{\partial W}{\partial\varepsilon}$

$T = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\mu\varepsilon\cdot\varepsilon + \ln((tr(\varepsilon)+1)^2)\,tr(\varepsilon))$

② $\boxed{2}$

b) $\underline{\underline{T}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{P}}\, \underline{\underline{F}}^T$

FEM SoSe 24

3

③ a) Zeitliche Änderung des Impulses entspricht der Summe aller wirkenden Kräfte $I' = F$

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t)\, x''\, dv = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)\, b\, dv + \int_{\partial\Omega_t} t\, da$$

b) $\int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X})\, x''\, dV = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X})\, b + \nabla_{\underline{X}} \cdot (\underline{P})\, dV$ (ref. konf.)

$\int_{\Omega_t} \rho(x,t)\, x''\, dv = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)\, b + \nabla_x \cdot (T)\, dv$ (moment. konf.)

c) Skript hat nur Massenerhaltung: spezifisch ohne Quellterme...

FEM SoSe 24

④

④

a) 1 - Aufstellen der DGL mit Rand- / Anfangsbedingungen

2 - Herleitung der schwachen Form

3 - Diskretisieren des Gebiets Ω in endliche Zahl von Elementen

4 - Ansatzfunktionen, Testfunktionen wählen, gesuchte Lösung u durch Summe Basisfunktionen approximieren

$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x)$

5 - Ansatz in schwache Form einsetzen, GS der Form $AU = F$ aufstellen

A ≙ Steifigkeitsmatrix
F ≙ Lastvektor

6 - Gleichungssystem lösen

Anforderungen an Testfunktion: Muss Randbedingungen erfüllen, alle Integrale der schwachen Formulierung müssen definiert sein.

↳ dafür müsse die Funktionen in geeigneten Sobolev-Raum liegen

b) $u'' = \frac{-n}{EA}$

$u''\delta = -\frac{n}{EA}\delta$

$\int_0^1 u''\delta \, dx = -\int_0^1 \frac{n}{EA}\delta \, dx$

$\underbrace{[u'\delta]_0^1}_{=0?} - \int_0^1 u'\delta' dx = \quad = \int_0^1 u'\delta' dx = \int_0^1 \frac{n}{EA}\delta dx$

$= \left[-\frac{n}{EA}\delta x\right]_0^1$

c) Der Fehler $e = U - U_h$ stellt orthogonal zu alle Testfunktionen

↳ Fehler in Richtung der Basisfunktion minimiert

d) - Konvergenz: Bei Verfeinerung der Netzes $U_h \to U$

↳ $h \to 0$

- Lösung der schwachen Formulierung U_h auf Subräume stellt eine Effiziente Lösung dar.

FEM SoSe 24

⑤

a) - Lagrange-Funktion $\varphi_i(x)$ hat den Wert 1 am i-ten Knoten $(x=x_i)$ und 0 an allen anderen Knoten

- Grad der Polynomfunktion entspricht Zahl des Knoten des Elements −1

- Lokale Unterstützung (Basisfunktionen sind nur in ihrem Element aktiv)

b) $$\Phi_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq I}}^{k+1} \frac{\eta-\eta^j}{\eta^I-\eta^j} \qquad \eta^1=-1 \quad \eta^2=0 \quad \eta^3=1$$

$$\Phi^1(\eta_1) = \frac{\eta_1+1}{1+1}\,\frac{\eta_1-0}{1-0} = \frac{1}{2}(\eta_1+1)\eta_1$$

$$\Phi^1(\eta_2) = \frac{\eta_2+1}{0+1}\,\frac{\eta_2-1}{0-1} = -(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

$$\Phi^1(\eta) = -\frac{1}{2}\eta_1(\eta_1+1)(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

$$\Phi^4(\eta) = (\eta_1+1)(\eta_1-1)(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

c) $$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^h(\eta)\, d\eta_1\, d\eta_2$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u^h(\eta^i,\eta^j)\,\alpha_i\alpha_j \qquad \text{1-D Quadraturregel}$$

Quadraturpunkte

$\eta^i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Gewichtungen

$\alpha_h = 1$

FEM SoSe 24

⑥

a) Isoparametr. Konzept

notwendig, weil die Reale Struktur oft gekrümmte Geometrie ~~[illegible]~~ aufweist, die sich mit der Grundgeometrie eines Elements (Linie / Dreieck / Viereck) nicht ausreichend approximieren lässt. Umsetzung: Approximation eines Elements mittels der gleichen Ansatzfunktion, die auch für die Lösung / Testfunktion benutzt wird.

b)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\eta_2-1), & \frac{1}{4}(\eta_2-1), & \frac{1}{4}(\eta_2+1), & \frac{1}{4}(\eta_2+1) \\ \frac{1}{4}(\eta_1-1), & \frac{1}{4}(\eta_1+1), & \frac{1}{4}(\eta_1-1), & \frac{1}{4}(\eta_1+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3a & 0 \\ \frac{3}{2}a & 4b \\ \frac{9}{2}a & 4b \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{3a}{4}(\eta_2-1) + \frac{3a}{8}(\eta_2+1) + \frac{9a}{8}(\eta_2+1), & b(\eta_1+1) + b(\eta_2+1) \\ \frac{3a}{4}(\eta_1+1) + \frac{3a}{8}(\eta_1-1) + \frac{9a}{8}(\eta_1+1), & b(\eta_1-1) + b(\eta_1+1) \end{pmatrix}$$

bei $\eta = 0$:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + \frac{9a}{8} & b+b \\ \frac{3a}{4} - \frac{3a}{8} + \frac{9a}{8} & -b+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a & 2b \\ \frac{3}{2}a & 0 \end{pmatrix}$$

FEM SoSe 24

7

⑦

a) $\underline{\underline{k}}^e = \int_E \varepsilon(V) \cdot \mathbb{C} \cdot \varepsilon(\underline{U})\, dV$ (schwache Form)

$= \int_E \sum_i \sum_j \underbrace{(\underline{\underline{B}}^I)^T \cdot [\mathbb{C}]^v \cdot \underline{\underline{B}}^J}_{(\underline{k}^e)^{IJ} \Leftrightarrow 2\times 2} dV$ (starke Form)

$$[\mathbb{C}]^v = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $(k^e)^{1,1}$ bei $(\eta = 0 \quad \omega = 4)$ auswerten mit $\underline{\underline{B}}^I = \begin{pmatrix} \phi^I_{,1} & 0 \\ 0 & \phi^I_{,2} \\ \phi^I_{,2} & \phi^I_{,1} \end{pmatrix}$

$$= (\underline{\underline{B}}^1)^T \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B^1$$

$k^1 = [\;\dots\;]$ $k^2 = [\;\dots\;]$ $k^3 = [\;\dots\;]$

Alles überlagern in k^e ... Aber geht das auch eleganter?
oder stimmt das überhaupt? In der b) kennen wir ~~[illegible]~~ die Abbildung
Ja noch garnicht... → Lösen mit Formel

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

FEM WiSe 23-24

①

a) $\underline{A}^T \cdot \underline{B}^T = A_{ji}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot B_{mk}(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= \cancel{A_{ij} B_{mj}}$

$= A_{ji} B_{ji}$ ✓

b) $\dfrac{\partial \underline{A}^T \underline{B}^T}{\partial \underline{B}} \Rightarrow A^T B^T = A_{ji}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) B_{mk}(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ji} B_{mj} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$\dfrac{\partial A^T B^T}{\partial B} = \dfrac{\partial A_{ji} B_{mj}}{\partial B_{op}} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{ji}\, \delta_{mo} \delta_{jp} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{pi}\, \delta_{mo} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

c) $= (\underline{\underline{A}}^T \otimes \underline{I}^T)^{\overset{24}{T}}$ (vlt. auch $((A \otimes I)^{\overset{13}{T}})^{-1}$

d) $\underline{b} + \underline{\underline{C}} \cdot (I \otimes I)^{\overset{14}{T}} \cdot AB^T$

$(I \otimes I)^{\overset{14}{T}} = \delta_{ij} \delta_{mk} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_i)$

$AB^T = A_{ij} B_{mj} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

~~$(I \otimes I)^{\overset{14}{T}} \cdot AB^T = \delta_{ij} \delta_{mk}$ [illegible] $A_{ij} B_{mj} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_i)$ [illegible]~~

~~$= A_{ik} B_{ij} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_i)$~~

~~$\underline{\underline{C}} : (I \otimes I)^{\overset{14}{T}} AB^T =$~~

$\underline{\underline{C}} \cdot (I \otimes I)^{\overset{14}{T}} = C_{op}(\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p) \cdot \delta_{ij} \delta_{mk} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_i)$

$= C_{mi} (\underline{e}_m \otimes \underline{e}_i)$

$\underline{\underline{C}} \cdot (I \otimes I)^{\overset{14}{T}} \cdot AB^T = C_{mi}(\underline{e}_m \otimes \underline{e}_i) \cdot A_{xy} B_{zy} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z)$

$= C_{xz} A_{xy} B_{zy}$

$\underline{b} + \underline{\underline{C}} \cdot (I \otimes I)^{\overset{14}{T}} \cdot AB^T = b_i \underline{e}_i + C_{km} A_{kn} B_{on}$

(vlt. auch $b_i \underline{e}_i + C_{jk} A_{jr} B_{kr}$)

②

a) Für kleine Verschiebungen gilt $\underline{\underline{F}} \approx \underline{\underline{I}} + \text{grad}(\underline{u})$

~~F beschreibt wie sich ein infinitesimales Materialelement~~
~~unter einer Deformation verändert und enthält Informationen~~
~~über Streckung, Rotation und Scherung~~

F bildet ein Linienelement in Referenzkonfiguration dX auf das zugehörige Element dx in Momentankonfiguration ab

②

a) F ist nicht invariant gegenüber Koordinatentransformation

→ Nutzung vom rechten Cauchy-Green-Tensor und Green-Lagrange-Verzerrungstensor, welche unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind.

b) $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$

Für kleine Deformationen : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})$

$$\underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u}))^T (\underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u}))$$

$$\approx \text{~~[illegible]~~}\ \underbrace{I + I\,\mathrm{grad}(u) + \mathrm{grad}(u)^T I}_{= I + 2\cdot \varepsilon} + \underbrace{\mathrm{grad}(u)^T \mathrm{grad}(u)}_{\text{vernachlässigen}}$$

~~Green-Lagrange-Verzerrung~~

c) $K(u) = J\,C$

Linearisierung → Terme höherer Ordnung vernachlässigen

$$K(u) = J(I + 2\varepsilon)$$

$$= \underline{\underline{J}}(\underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u}) + \mathrm{grad}^T(\underline{u}))$$

Mit $C = F^T F$ und $J = \det(F)$: $\frac{\partial J}{\partial F} = J F^{-1}$

[illegible]

[illegible]

$$K(u) = \det(F)\, F^T F$$

Für kleine ∇u : $\det(I + \nabla u) \approx 1 + \mathrm{tr}(\nabla u)$

$$= \det(I + \nabla u)(I + 2\varepsilon)$$

$$\approx (1 + \mathrm{tr}(\nabla u))(I + 2\varepsilon)$$

$$\mathrm{LIN}(K(u)) = I + 2\varepsilon + \mathrm{tr}(\nabla u) I + 2\,\mathrm{tr}(\nabla u)\,\varepsilon$$

(vlt. auch anders... komische Aufgabe)

③ $\bar{x}_1 = 1 - 2\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2$

$\bar{x}_2 = 5 + 4\bar{x}_1 - 5\bar{x}_2$

$\bar{x}_3 = 2\bar{x}_3 + \bar{x}_1$

a) $C = F^T F$; $b = F F^T$

C bildet das Quadrat eines Linieninkrements in Referenz- auf Momentankonfiguration ab. - Inverse b tut dies zwischen Momentan- und Referenzkonfiguration

③

b) F ablesen : $F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -28 & 2 \\ -28 & 41 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} ✓$$

~~[illegible]~~

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\mathrm{grad}(\underline{u}) + \mathrm{grad}^T(\underline{u})) ✓$$

$$\mathrm{grad}(\underline{u}) = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 8 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ✓$$

④ $\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_T} \Phi \, dv$ mit $Y(t) = \int_{\Omega_T} \Phi \, dv$

a) gesucht: Materielle Zeitableitung $Y'(t)$ [nach Brodi Skript 2.36]

$$Y'(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_T} \Phi \, dv = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} J \Phi \, dV$$

$$= \int_{\Omega_0} J \frac{D\Phi}{Dt} + \frac{DJ}{Dt} \Phi \, dV$$

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{\partial J}{\partial F} : \frac{DF}{Dt} \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial F} = J F^{-T}$$

$$= \int_{\Omega_0} J \frac{D\Phi}{Dt} + J F^{-T} \frac{DF}{Dt} \Phi \, dV$$

$$= \int_{\Omega_0} J (\Phi' + \Phi \nabla_x \cdot (x')) \, dV$$

$$= \int_{\Omega_t} \Phi' + \Phi \nabla_x \cdot (x') \, dv \quad ✓$$

c) zeitliche Änderung der Impulses I entspricht der Summe aller wirkenden Kräfte $I' = F$

b) $\rho(x,t) x'$, also $\int_{\Omega_t} \rho(x,t) x' \, dv = \int_{\Omega_0} \rho_0(X)_{x'} \, dV$

d) $\int_{\Omega_0} \rho_0(X) x'' \, dV = \int_{\Omega_0} \rho_0(X) b + \nabla_X \cdot (P) \, dV$ (Ref. konfig)

$\int_{\Omega_t} \rho(x,t) x'' \, dv = \int_{\Omega_t} \rho(x,t) b + \nabla_x \cdot (T) \, dv$ (Mom. konfig)

⑤ $\boxed{4}$

a) 1 - Aufstellen der DGL mit Rand- / Anfangsbedingungen (starke Form)

2 - Herleitung der schwachen Form

3 - Diskretisierung des Gebietes Ω in eine endliche Zahl von Elementen

4 - Ansatzfunktionen, Testfunktionen wählen, gesuchte Lösung u durch Summe der Basisfunktionen approximieren $U_h = \sum_{i=1}^{N} U_i \varphi_i(x)$

5 - Ansatz in schwache Form einsetzen - GS der Form $AU = F$ aufstellen

6 - GS lösen.

Anforderung an Testfunktion:

- Randbedingungen erfüllen ← vermutlich das wichtigste
- Alle Integrale der schwachen Formulierung müssen definiert sein

↳ Dafür muss die Funktion in geeigneten Sobolev-Raum liegen

b) $EAU'' = -\frac{n}{EA}$

→ Galerkin-Orthogonalität

Der Fehler $e = U - U^h$ steht orthogonal zu alle Testfunktionen

a-Priori-Fehlerabschätzung (Lösung der schwache Formulierung V_h auf Subräumen stellt eine effizienteste Lösung dar)

$\|U - U_h\|_{H^1} \leq C h^k \|U\|_{H^{k+1}}$ (vlt. auch einfach $\|U - U_h\| \leq C h^k$)

↳ $\|U - U_h\| \mathrel{\hat{=}}$ Fehler zwischen exakter (U) und FEM Lösung U_h

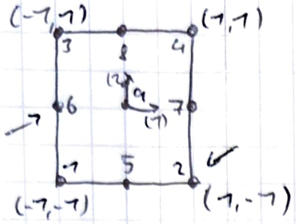
↳ $C \mathrel{\hat{=}}$ Konstante

↳ $h \mathrel{\hat{=}}$ Größe Finite-Elemente-Netz

↳ $p \mathrel{\hat{=}}$ Ordnung Ansatzfunktionen

FEM WiSe 23-24

⑥ b)



$\eta^1 = -1 \quad \eta^2 = 0 \quad \eta^3 = 1$

$$\Phi^I(\eta) = \prod_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{n+1} \frac{\eta - \eta^J}{\eta^I - \eta^J}$$

$$\Phi^2(\eta_1) = \frac{\eta_1 + 1}{1+1} \cdot \frac{\eta_1 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 + 1)$$

$$\Phi^2(\eta_2) = \frac{\eta_2 - 0}{-1 - 0} \cdot \frac{\eta_2 - 1}{-1 - 1} = +\frac{1}{2}\eta_2(\eta_2 - 1)$$

$$\Phi^2(\eta) = \frac{1}{4}\eta_1(\eta_1 + 1)\eta_2(\eta_2 - 1) \quad ✓$$

$$\Phi^6(\eta_1) = \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 - 1)$$

$$\Phi^6(\eta_2) = \frac{\eta_2 + 1}{0 + 1} \cdot \frac{\eta_2 - 1}{0 - 1} = -(\eta_2 + 1)(\eta_2 - 1)$$

$$\Phi^6(\eta) = -\frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 - 1)(\eta_2 + 1)(\eta_2 - 1) \quad ✓$$

a)
- Kontinuität (oder "Konformität"?)
- Interpolationseigenschaft
  - ↳ Knotenpunkte Element $= 1$, alle anderen $= 0$ $\quad \Phi^I(\eta^J) = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & I \neq J \end{cases}$
- Differenzierbarkeit

WiSe 23-24

⑦

a) Siehe andere Altklausur

b) ges: Jacobi-Matrix J der Transformation zw. isoparametrischen und physikalischen Raum. $\eta = 0$

$$\underline{X} = \left(0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}6a,\ 0,\ \tfrac{3}{2}a,\ 46,\ \tfrac{9}{2}a,\ 46\right)^T$$ ← sonst die Fehler?

$$\underline{X}^h(\underline{\eta}) = \xi \sum_{I=1}^{n_n} \underline{X}^I \, \Phi^I(\underline{\eta})$$

$$\frac{\partial \underline{X}^h}{\partial \eta_1} = \sum_{I=1}^{n_n} \underline{X}^I \frac{\partial \Phi^I(\eta)}{\partial \eta_1}$$

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial \eta_1} = \begin{pmatrix} \Phi^1_{,1} & 0 & \Phi^2_{,1} & 0 & \Phi^3_{,1} & 0 & \Phi^4_{,1} & 0 \\ 0 & \Phi^1_{,1} & 0 & \Phi^2_{,1} & 0 & \Phi^3_{,1} & 0 & \Phi^4_{,1} \end{pmatrix} \cdot \underline{X}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\eta_2-1) & 0 & -\frac{1}{4}(\eta_2-1) & 0 & -\frac{1}{4}(\eta_2+1) & 0 & \frac{1}{4}(\eta_2+1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(\eta_2-1) & 0 & -\frac{1}{4}(\eta_2-1) & 0 & -\frac{1}{4}(\eta_2+1) & 0 & \frac{1}{4}(\eta_2+1) \end{pmatrix} \cdot \underline{X}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{6}{8}a(\eta_2-1) - \frac{3}{8}a(\eta_2+1) + \frac{9}{8}a(\eta_2+1) \\ -6(\eta_2+1) + 6(\eta_2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2\,a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial \eta_2} = \begin{pmatrix} \Phi^1_{,2} & 0 & \Phi^2_{,2} & 0 & \Phi^1_{,2} & 0 & \Phi^2_{,4} & 0 \\ 0 & \Phi^1_{,2} & 0 & \Phi^2_{,2} & 0 & \Phi^3_{,2} & 0 & \Phi^4_{,2} \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4\,a \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow J = \begin{pmatrix} 3/2\,a & 3/4\,a \\ 0 & 26 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(J) = 0$$

⑧

$$a)\quad k^e = \begin{pmatrix} (k^e)^{1,1} & (k^e)^{1,2} & \cdots & (k^e)^{1,n_n} \\ (k^e)^{2,1} & (k^e)^{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (k^e)^{n_n,1} & \cdots & & (k^e)^{n_n,n_n} \end{pmatrix}$$

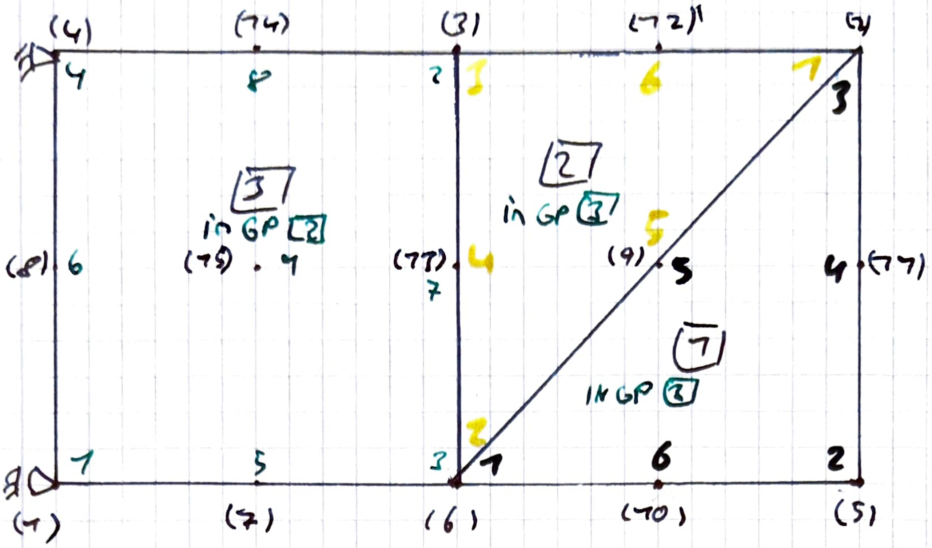
$$(k^e)^{I,J} = \int_{\Gamma e} (\underline{\underline{B}}^I)^T \cdot [\underline{\underline{C}}]^v \cdot \underline{\underline{B}}^J \, dV$$

$$\text{mit } \underline{\underline{B}}^I = \begin{pmatrix} \Phi^I_{,1} & 0 \\ 0 & \Phi^I_{,2} \\ \Phi^I_{,2} & \Phi^I_{,1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi^I_{,i} = \frac{\partial \Phi^I}{\partial x_i}$$

$$[\mathbb{C}]^v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$ gegeben in Aufgabenstellung

$$k^e = \sum_{i=1}^{n_n} \sum_{j=1}^{n_n} \int (\underline{\underline{B}}^I)^T [\underline{\underline{C}}]^v \cdot \underline{\underline{B}}^J \, dV$$

b) Bestimmen sie Eintrag $(k^e)^{I,J}$ mit $I=1$ $J=2$ $\eta=0$, $\omega=4$



$$\underline{\underline{k}}^1 = \left[\begin{array}{cccccccccccc}
\multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} & \multicolumn{2}{c}{5} & \multicolumn{2}{c}{6} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
k^1_{11} & k^1_{12} & \cdots & & & & & & & & & \\
 & & & & 5\,3 & 6\,4 & & & & & & \\
 & & & & k^1_{55} & k^1_{56} & 5\,3 & & & & & \\
 & & & & k^1_{65} & k^1_{66} & 6\,4 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & &
\end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 12 \end{array}$$

$$\underline{\underline{k}}^2 = \left[\begin{array}{cccccccccccc}
\multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} & \multicolumn{2}{c}{5} & \multicolumn{2}{c}{6} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
k^2_{11} & k^2_{12} & & & & & & & & & & \\
k^2_{21} & k^2_{22} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & &
\end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{k}}^3 = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\
k^3_{11} & k^3_{12} & & & & & & & & & & & & & & & & \\
k^3_{21} & k^3_{22} & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc}
 & J \rightarrow \\
I \downarrow & k^e =
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
k^3_{11} & k^3_{12} & k^1_{15} & k^1_{16} & \\
k^3_{21} & k^3_{22} & k^1_{25} & k^1_{26} & \\
 & & k^2_{11}+k^3_{55} & k^2_{12}+k^1_{56} & \\
 & & k^2_{21}+k^1_{65} & k^2_{22}+k^1_{66} & \\
 & & & &
\end{array}\right]\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array}$$

WiSe 23-24

c) Einträge bestimmen

Bsp $K_{17,3}$

$= k^3_{1,7} + k^1_{9,5}$

	global	lokal
Knoten 92	5 7	5 3
Indice 17,3	9 7	9 5

$k_{1,19} = 0$, da nicht im selben Element

1 10		
1,19		

$k_{12,12} = k^1_{22} + k^2_{44} + k^3_{66}$

$k_{12,12}$	1	2	3
6 6	11	22	33
12,12	22	44	66

SoSe
FEM ~~KS~~ 23

7

①

a) $\underline{\underline{A}}^T \underline{b} = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\, b_k\, \underline{e}_k$

$= A_{ji}\, b_i$

b) $\dfrac{\partial \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}^T}{\partial \underline{\underline{B}}} = \dfrac{\partial A_{ji} A_{mj}}{\partial B_{op}} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$A_{ij} B_{km}$
~~[illegible]~~
$A_{ji} A_{mk} \delta_{jk} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$= 0$?

Gabi Fragen ob er mir da zustimmt...
Vermutlich eigentlich $\underline{\underline{B}}$ oben oder $\underline{\underline{A}}$ unten

c) ϟ

d) $(\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \delta_{ij} \delta_{km} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_m) \cdot A_{op} B_{pR} (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_R)$

$= A_{op} B_{pR}\, \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ko} \delta_{mR} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

$= A_{Rp} B_{pR}\, \delta_{ij} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

② Deformationsgradient $\underline{\underline{F}}$ bildet ein Linienelement in Referenzkonfiguration

a) $d\underline{X}$ auf ~~[illegible]~~ das zugehörige Element in der Momentankonfiguration $d\underline{x}$ ab.

$\underline{\underline{F}}\, d\underline{X} = d\underline{x}$; $\underline{\underline{F}} = \dfrac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \approx \underline{\underline{I}} + \text{grad}(\underline{u})$

F ist nicht invariant gegenüber Koordinatentransformation

↳ Nutzung von Cauchy-Green und Green-Lagrange Tensoren, welche unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind.

b) $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$

$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$

$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$

wie E vereinfachen - Gabi fragen
↳ irgendwas mit ε vermutlich

FEM SoSe 23

$\boxed{2}$

③

$x_1 = 1 - 2X_1 + 4X_2$

$x_2 = 5 + 4X_1 - 5X_2$

$x_3 = 2X_3 + X_1$

a)

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & -28 & 2 \\ -28 & 41 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = F F^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & -28 & -2 \\ -28 & 41 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b wird benötigt um von der Momentane in die Referenzkonfiguration abzubilden

b)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}(u) + \mathrm{grad}^T(u))$$

$$\mathrm{grad}(u) = F - \underline{I}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 8 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

FEM SoSe 23

3

④

a) Φ skalare Transportgröße ρ Dichte Ω_0 Referenzkonfiguration

Ω_t Momentankonfiguration eines Gebietes

Materielle Zeitableitung $\frac{D}{Dt}\int_{\Omega_t} \rho \phi \, dv = Y'$

$$\rho \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_t} \phi \, dv = \rho \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_0} J \phi \, dV$$

$$= \rho \int_{\Omega_0} J \frac{D\phi}{Dt} + \frac{DJ}{Dt} \phi \, dV$$

$$Y' = \rho \int_{\Omega_0} J(\phi' + \phi \nabla_x \cdot (x')) \, dV = \rho \int_{\Omega_t} \phi' + \phi \nabla_x \cdot (x') \, dv$$

b)

Impulserhaltung in Momentankonfiguration

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t) x'' \, dv = \int_{\Omega_t} \rho(x,t) b + \nabla_x \cdot (T) \, dv$$

Referenzkonfiguration

$$\int_{\Omega_0} \rho_0(X) x'' \, dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 (X) b + \nabla_X \cdot (P) \, dV$$

c) Cauchy - Spannung T

- Wirkt auf momentane (deformierte) konf. Ω_t
- Gibt die kraft pro Flächeneinheit in der momentanen konf. an
- symmetr. da keine inneren Momente existieren

Piola - Kirchhoff - Spannung $P = J T F^{-1}$

- Bezogen auf Referenzkonf.
- Gibt die kraft in der Momentanen konfiguration pro Flächeneinheit in der Referenzkonf. an.
- Im allgemeinen nicht symmetr.

FEM SoSe 23 1 ④

⑤

a) - Aufstellen der DGL mit Rand-/Anfangsbedingungen

- Herleitung der schwachen Form
- Diskretisierung des Gebiets Ω in endliche Zahl von Elementen
- Ansatzfunktion / Testfunktion wählen, gesuchte u durch Summe der Basisfunktionen approximieren $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x)$
- Ansatz in schwache Form einsetzen, GS der Form $\underset{\text{Steifigkeitsmatrix}}{A}u = \underset{\text{Lastvektor}}{f}$ aufstellen
- GS lösen

Anforderung an Testfunktion: Muss Randbedingungen erfüllen, alle Integrale der schwachen Formulierung müssen definiert sein -> dafür müssen die Funktionen in geeigneten Sobolev-Raum liegen

$u'' = -\frac{n}{EA}$

b) Der Fehler $e = u - u_h$ steht orthogonal zu allen Testfunktionen

↳ Fehler in Richtung der Basisfunktionen minimiert

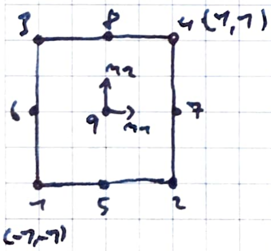
Konvergenz: Bei Verfeinerung des Netzes $(h \to 0)$ geht $u_h \to u$

a-Priori-Fehlerabschätzung: $\|u - u_h\| \leq Ch^k$

⑥

a) - Kontinuität, Interpolationseigenschaften (Knotenpunkte Element = 1, alle anderen = 0 $\Phi^I(\eta^J) = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & I \neq J \end{cases}$), Differenzierbarkeit

b)



$$\Phi^I(\eta) = \prod_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{k+1} \frac{\eta - \eta^J}{\eta^I - \eta^J}$$

$k = 2 \to k+1 = 3$ $\eta^1 = -1$ $\eta^2 = 0$ $\eta^3 = 1$

⑥ b)

$$\Phi^6_{1D}(\eta_1) = \frac{\eta_2+1}{0+1}\cdot\frac{\eta_2-1}{0-1} = -(\eta_2-1)(\eta_2+1)$$

$$\Phi^2_{1D}(\eta_1) = \frac{\eta_1+1}{+1+1}\cdot\frac{\eta_1-0}{1-0} = \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1+1)$$

$$\Phi^2_{1D}(\eta_2) = \frac{\eta_2-0}{-1-0}\cdot\frac{\eta_2-1}{-1-1} = +\frac{1}{2}\eta_2(\eta_2-1)$$

$$\phi^2(\eta) = \frac{1}{4}\eta_1(\eta_1+1)\eta_2(\eta_2-1)$$

$$\phi^6(\eta) = -\frac{1}{2}\eta_1(\eta_1-1)(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

$$\phi^9(\eta) = (\eta_1+1)(\eta_1-1)(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

c) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v^h(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2 \approx \sum_{i=1}^{n_q}\sum_{j=1}^{n_q} v^h(\eta_k)\,\alpha_k$

$\eta_k \mathrel{\hat{=}} (\eta_i, \eta_j) \quad \alpha_k \mathrel{\hat{=}} (\alpha_i, \alpha_j)$

⑦ a) Isoparametr. Konzept notwendig, weil die realen Struktur oft gekrümmte Geometrie aufweist, die sich mit der Grundgeometrie eines Elements (Linie / Dreieck / Viereck) nicht ausreichend approximieren lässt.

Umsetzung: Approximation eines Elements mittels der gleichen Ansatzfunktion, die auch für die Lösung / Testfunktion benutzt wird.

b)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\eta_2-1) & -\frac{1}{4}(\eta_2-1) & \frac{1}{4}(\eta_2+1) & \frac{1}{4}(\eta_2+1) \\ \frac{1}{4}(\eta_1-1) & -\frac{1}{4}(\eta_1+1) & -\frac{1}{4}(\eta_1-1) & \frac{1}{4}(\eta_1+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3a & 0 \\ \frac{3}{2}a & 4b \\ \frac{9}{2}a & 4b \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}a(\eta_2-1) - \frac{3}{8}a(\eta_2+1) + \frac{9}{8}a(\eta_2+1) & -b(\eta_2+1)+b(\eta_2+1) \\ -\frac{3}{4}a(\eta_1+1) - \frac{3}{8}a(\eta_1-1) + \frac{9}{8}a(\eta_1+1) & -b(\eta_1-1)+b(\eta_1+1) \end{pmatrix}$$

bei $\eta = 0$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a - \frac{3}{8}a + \frac{9}{8}a & 0 \\ -\frac{3}{4}a + \frac{3}{8}a + \frac{9}{8}a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a & 0 \\ \frac{3}{4}a & 2b \end{pmatrix}$$

c) $\text{Volumen}_t = 1{,}5 \cdot \text{Volumen}_0$ Gabi fragen ob er zustimmen würde...

FEM WS 22-23

①

a) $\underline{A}^T \underline{b} = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underbrace{\underline{e}_j)\, b_k}_{} \underline{e}_k$

$= A_{ji}\, b_k\, \delta_{jk}\, \underline{e}_i$

$= A_{ji}\, b_j\, \underline{e}_i$

b) $\dfrac{\partial \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}}}{\partial \underline{\underline{A}}} = \dots$

$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}} = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underbrace{\underline{e}_j)\, B_{km} (\underline{e}_k}_{} \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ji}\, B_{km}\, \delta_{jk}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ji}\, B_{jm}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$ NR

$\dfrac{\partial \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}}}{\partial \underline{\underline{A}}} = \dfrac{\partial A_{ji} B_{jm}}{\partial A_{op}} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= B_{jm}\, \delta_{jo}\, \delta_{ip}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= B_{om}\, \delta_{ip}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{B}})^{\overset{24}{T}}$

c) $(\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{B}})^{\overset{24}{T}} = \delta_{ij}\, B_{km}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_j)$

$= B_{km}\, \delta_{ij}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_j)$ ✓

d) $(\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})\underline{\underline{A}} =$ ~~$\delta_{ij}\, \delta_{km}\, A_{op} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_p)$~~ obwohl kein Vektorprod. ?

$= \delta_{ij}\, \delta_{km} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underbrace{\underline{e}_m)\, A_{op} (\underline{e}_o}_{} \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{op}\, \delta_{ij}\, \delta_{km}\, \delta_{mo}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{kp}\, \delta_{ij}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_p)$

$= \underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{I}}$ ↯ eig $tr(\underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{I}}$, aber weiß noch nicht warum...

② $S = 2\mu \underline{\underline{E}} + \lambda\, tr(\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{I}}$

a) $E = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$; $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$; $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \text{Grad}(\underline{u})$

b) $\text{Lin}(E) = E|_{u=0} + D_u E$

FEM WS 22-23

② b)

$$\mathrm{LIN}(\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{E}}|_{u=0} + D_u \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$$

Für kleine Verschiebungen: $\underline{\underline{F}} \simeq \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})$

$$E \approx \frac{1}{2}((\underline{\underline{I}}+\mathrm{grad}(\underline{u}))^T(\underline{\underline{I}}+\mathrm{grad}(\underline{u})) - \underline{\underline{I}}) \qquad (\underline{\underline{I}}^T = \underline{\underline{I}})$$

~~Höhere Ordnungen vernachlässigen~~

~~$E \approx \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}}\,\mathrm{grad}(u) + \underline{\underline{I}}\,\mathrm{grad}(u)^T$~~ $\qquad (\underline{\underline{I}}^T \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}})$

$$E \approx \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}}^T\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}}^T\mathrm{grad}(\underline{u}) + \mathrm{grad}(\underline{u})^T\underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})^T\mathrm{grad}(\underline{u}) - \underline{\underline{I}})$$

$$\approx \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u}) + \mathrm{grad}(\underline{u})^T + \underbrace{\mathrm{grad}(\underline{u})^T\mathrm{grad}(\underline{u})}_{\text{Höhere Ordnung der Verzerrung (quadratisch)}} - \underline{\underline{I}})$$

Linearisierung: wenn die Verzerrungen klein sind, dann sind die Terme höherer Ordnung gegenüber den linearen vernachlässigbar

$$E = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}(\underline{u}) + \mathrm{grad}(\underline{u})^T) = \varepsilon$$

c) $\underline{\underline{\sigma}} = \mathrm{LIN}(\underline{\underline{S}})$ mit $\mathrm{LIN}(\mathrm{tr}(\underline{\underline{E}})\cdot\underline{\underline{I}}) = \mathrm{div}(\underline{u})$

Anwendung der Linearisierung aus b)

$$\sigma = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\,\mathrm{div}(\underline{u})$$

③ a) Der Deformationsgradient bildet ein Linienelement in Referenzkonfiguration $d\underline{X}$ auf das zugehörige Element in der Momentankonfiguration $d\underline{x}$ ab.

$$F\,d\underline{X} = d\underline{x} \Rightarrow F = \frac{\partial x}{\partial \underline{X}} \simeq \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})$$

b) F enthält Informationen über Dehnung und Verzerrung, und Rotation und Starrkörperbewegung → kein geeignetes Maß für die tatsächliche Deformation (wäre bei reiner Rotation z.B. trotzdem nicht die Einheitsmatrix)

FEM WS 22-22

3

③

b) Für reine Verzerrung (keine Rotationsanteile) Cauchy-Green Tensor C oder Green-Lagrange-Verzerrungstensor verwenden

c) $C = F^T F$ eleminiert Rotation, misst Änderung der Länge, aber nicht Scherung

$E = \frac{1}{2}(C - I)$ misst Dehnung und Scherung unabhängig von Starrkörperbewegung

$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad}(u) + \text{grad}^T(u))$

d)

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad F^T = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 41 & -28 & 0 \\ -28 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \cancel{C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 40 & -28 & 0 \\ -28 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad}(u) + \text{grad}^T(u))$$

$$\text{grad}(u) = F - I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ $\frac{D}{Dt}\int_{\Omega_t} \Phi \, dv$ mit $Y(t) = \int_{\Omega_t} \Phi \, dv$

a) Materielle Zeitableitung Y' (Brodi Skript Seite 29 / 2.36)

$$Y' = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_t} \Phi \, dv = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_0} J \Phi \, dV \qquad J \hat{=} \det(F)$$

$$= \int_{\Omega_0} J \frac{D\Phi}{Dt} + \frac{DJ}{Dt}\Phi \, dV$$

$$\Rightarrow \frac{DJ}{Dt} = \frac{\partial J}{\partial F} \cdot \frac{DF}{Dt} \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial F} = J F^{-T}$$ ← ~~steht so im Skript, vllt 1-1~~ ?

Definition des Geschwindigkeitsgradienten / dessen Spur

$$L = \nabla_x(X') = F' F^{-1} \qquad \text{tr}(L) F'_{ik} F^{-1}_{ki} = x'_{i,i}$$

FEM WS 22-23

④

a) Einsetzen der vorherigen Gleichungen liefert:

$$\frac{DJ}{Dt} = J F_{ji}^{-T} F'_{km} \delta_{ik} \delta_{jm} = J F_{ji}^{-T} F'_{ij} = J x''_{i,i}$$

→ Materielle Zeitableitung von Y

$$Y' = \int_{\Omega_0} J \left(\Phi' + \Phi \nabla_x \cdot (x') \right) dV = \int_{\Omega_t} \Phi' + \Phi \nabla_x \cdot (x') \, dv$$

b) Impuls bilanz eines Kontinuums in Momentankonfiguration:

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t) x'' \, dv = \int_{\Omega_t} \rho(x,t) b + \nabla_x \cdot (T) \, dv$$

In Referenzkonfiguration:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0(X) x'' \, dV = \int_{\Omega_0} \rho_0(X) b + \nabla_X \cdot (P) \, dV$$

c) Cauchy - Spannung T:

- Wirkt auf momentane (deformierte) Konfiguration Ω_t
- Gibt die Kraft pro Flächeneinheit in der aktuellen Form an
- Symmetr, da keine inneren Momente existieren ($T_{ij} = T_{ji}$)

Piola-Kirchhoff Spannung P:

- Bezogen auf Referenzkonfiguration Ω_0
- Gibt die Kraft in der momentanen Konfiguration pro Flächeneinheit in der Referenzkonfiguration an
- Im allgemeinen nicht symmetrisch

$$P = J T F^{-T}$$

~~⑤~~ a)

~~schwache Form der DGL aufstellen~~

~~Gebiet Ω in endliche Anzahl von Elementen unterteilen (diskretisieren)~~

~~Unbekannte wird durch Summe von Basisfunktionen angenähert, [illegible]~~

~~[illegible] = $\Sigma_i u_i$ [illegible]~~

FEM WS 22-23

5

BECKELMANN

Arzneimittel-Großhandel
Diagnostika · Praxisbedarf · Fachberatung

Dr. Wolf, Beckelmann & Partner GmbH

⑤

a) ~~Ansatzfunktionen und Testfunktionen wählen~~

1 - Aufstellen der DGL mit Rand- / Anfangsbedingungen (Starke Form)

2 - Herleitung der schwachen Form

3 - Diskretisierung des Gebietes Ω in endliche Zahl von Elementen

4 - Ansatzfunktionen Testfunktionen wählen, ~~gesuchte Lösung [illegible]~~

gesuchte Lösung u durch Summe Basisfunktionen approximieren

$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \varphi_i(x)$

5 - Ansatz in schwache Form einsetzen - GS der Form $\overset{\text{Steifigkeitsmatrix}}{A}\,U = \overset{\text{Lastvektor}}{F}$ aufstellen

6 - Gleichungssystem lösen

Anforderungen an Testfunktion: muss Randbedingungen erfüllen

Alle Integrale der schwachen Formulierung müssen definiert sein

↳ dafür müssen die Funktionen in geeigneten Sobolev-Raum liegen.

b) Lösung erfüllt die Galerkin-Orthogonalität

Der Fehler $e = u - u_h$ steht orthogonal zu allen Testfunktionen v_h

a-priori-Fehlerabschätzung

$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C h^k \|u\|_{H^{k+1}}$

⑥

a) - Lagrangefunktion $\varphi_i(x)$ hat den Wert 1 an i-ten Knoten (bei $x = x_i$)

und 0 an allen anderen Knoten

$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ → $\varphi_i(x_j) = 1$ für $i = j$ und $\varphi_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$

- Grad der Polynomfunktion entspricht Anzahl der Knoten des Elements minus 1

- Lokale Unterstützung (Basisfunktionen sind nur in ihrem Element aktiv)

FEM WS 22-23

6

⑥ b) Lagrangische Ansatzfunktion :

$$\Phi^I(\eta) = \prod_{\substack{J=1 \\ J\neq I}}^{k+1} \frac{\eta - \eta^J}{\eta^I - \eta^J}$$

I ≙ Knotennr. k ≙ Ordnung der Ansatzfkt.

η ≙ Positionen des Knoten im Element

Viereckelement zweiter Ordnung → $k=2$, $k+1 = 3$

$\eta^1 = -1 \quad \eta^2 = 0 \quad \eta^3 = 1$ (Abgelesen aus Skript 3.31)

$$\phi^1(\eta_1) = \prod_{\substack{J=1 \\ J\neq I}}^{3} \frac{\eta_1 - \eta^J}{\eta^I - \eta^J} = \frac{\eta_1 - \eta^2}{\eta^1 - \eta^2} \cdot \frac{\eta_1 - \eta^3}{\eta^1 - \eta^3}$$

$$= \frac{\eta - 0}{-1-0} \cdot \frac{\eta - 1}{-1-1}$$

$$= \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 - 1)$$

$$\phi^1(\eta_2) = \frac{\eta_2 - \eta^2}{\eta^1 - \eta^2} \cdot \frac{\eta_2 - \eta^3}{\eta^1 - \eta^3} = \frac{1}{2}\eta_2(\eta_2 - 1)$$

$$\phi^1(\eta) = \frac{1}{4}\eta_1(\eta_1 - 1)\eta_2(\eta_2 - 1)$$

$$\phi^6(\eta_1) = \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 - 1)$$

$$\phi^6(\eta_2) = \frac{\eta_2 - \eta^1}{\eta^2 - \eta^1} \cdot \frac{\eta_2 - \eta^3}{\eta^2 - \eta^3}$$

$$= \frac{\eta_2 + 1}{+1} \cdot \frac{\eta_2 - 1}{-1}$$

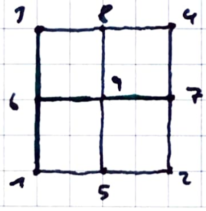
$$= -(\eta_2 + 1)(\eta_2 - 1)$$

$$\phi^6(\eta) = -\frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 - 1)(\eta_2 + 1)(\eta_2 - 1)$$

$$\phi^9(\eta_1) = -(\eta_1 + 1)(\eta_1 - 1)$$

$$\phi^9(\eta_2) = -(\eta_2 + 1)(\eta_2 - 1)$$

$$\phi^9(\eta) = (\eta_1 - 1)(\eta_1 + 1)(\eta_2 - 1)(\eta_2 + 1)$$



vert. und hor. seperat, dann Multiplizieren!

FEM WS 22-23

⑥ c) Knoten 1 : $\phi_1(x) = \frac{1}{4}(x_1(x_1-1)x_2(x_2-1))$

~~[illegible]~~

$u^h(x_h) = \sum_{i=1}^{n_h \text{, hier } 9} \hat{u}_i^I \Phi_i(x_h$

$\frac{\partial u^h}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{1} \hat{u}_i^I \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}$

hier : $x_h = (x_1, x_2) = (-1, -1)$

$\Phi_1(-1,-1) = 1$ (alle anderen Ansatzfunktionen hier gleich 0) "Lagrange Eigenschaft" der Ansatzfunktionen

$\Phi_2(-1,-1) = 0$

$\Phi_3(-1,-1) = 0$

$\vdots$

$\rightarrow u^h(-1,-1) = \hat{u}_1^I$

$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(-1,-1)$ hat bestimmten Wert

$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}\Big|_{i \neq 1} \approx 0$

$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{4}(2x_1-1)(x_2-1)x_2$

$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(-1,-1) = \frac{1}{4}(2\cdot(-1)-1)(-1-1)(-1) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

~~$\partial \Phi$~~

$\frac{\partial u^h}{\partial x_1}(-1,-1) = -\frac{3}{2}\hat{u}_1^I + \sum_{i=2}^{9} \hat{u}_i^I \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}(-1,-1)$

$\approx -\frac{3}{2}\hat{u}_1^I$

Keine Lösung zum Vergleichen bei dieser Aufgabe... aber vielleicht stimmt meine Lösung

FEM WS 22-23

⑧

⑦

a) Isoparametrisches Konzept:

notwendig, weil reale Strukturen oft gekrümmte Geometrien aufweisen, die sich mit der Grundgeometrie eines Elements (Linie / Dreieck / Viereck) nicht zureichend approximieren lassen.

Es werden mittels einer Koordinatentransformation J die physikalischen Koordinaten eines Elements in den isoparametrischen Koordinaten η ausgedrückt. Umsetzung : Umsetzung noch nachtragen

~~Koordinatentransformation~~

Aus Vorlesung : Approximation der Geometrie eines Elements mittels der selben Ansatzfunktion, die auch für die Lösung bzw. Testfunktion benutzt wird

- Approximation der physikalische Komponenten eines Elements
- Definition der Jacobi-Matrix
- Bestimmung der einzelnen Matrixeinträge
- Transformation der Integration über ein Element
- Transformation von Ableitungen (z.B. Ansatzfunktionen)

Anwendung der Jacobi-Transformation

FEM gute Vorlesung von einem Inder

7

BECKELMANN
Arzneimittel-Großhandel
Diagnostika · Praxisbedarf · Fachberatung

Dr. Wolf, Beckelmann & Partner GmbH

Weighted Integral and Weak formulations – youtube: Indian institute of technology kanpur

$-\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{du}{dx}\right] = g(x)$ for $0 < x < L$

$u(0) = u_0$ at $x = 0$ Essential Boundary condition

$\boxed{a\frac{du}{dx}\Big|_{x=L} = Q_0}$ Natural boundary condition

($a(x)$ $q(x)$ u_0 Q_0 L ~~gegeben~~ known)

x – independent Variable

u(x) - dependent Variable

~~Find~~
(0,L) - domain of the Problem

Aim : Find u(x)

Weak Formulation

Step 1 : $\int_0^L \underbrace{w\left[-\frac{d}{dx}a(x)\cdot u' - q\right]}_{} dx = 0$ ← Strong Form

Error (weighted) in an weighted integral sense
" " " residual sense

Step 2 : Integrate by parts to shift $\frac{d}{dx}$ operator from { } to w.

$\int_0^L \left[\left(\frac{dw}{dx}\right)a(x)u' - wq\right]dx - \left[w\,a(x)\,u'\right]_0^L = 0$ ← Weak Form

* Differentiability requirements on u get ~~[illegible]~~ reduced

* $\left[w\,a(x)u'\right]_0^L = \left[w\,a(x)u'\right]_{x=L} - \left[w\,a(x)u'\right]_{x=0}$

Step 3 : Choose $u = \sum_{j=1}^{\omega} U_j\,\phi_j(x)$ U_j - unknown constant

ϕ_j - known shape function
should satisfy essential bounding condition
has to be linearily independent

$\Rightarrow \int\left[\frac{dw}{dx}\left[a(x)\sum_{j=1}^{N} c_j\,\phi_j'(x)\right] - wq\right]dx - \left[w\,a'(x)\,u'(x)\right]_0^L$