

Numerische Integration

Rechteckregel

$$Q_h = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Mittelpunktsregel

$$Q_h = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Sehnentrapezregel

$$Q_h = \frac{b-a}{2} (f_0 + f_1)$$

Gewichtete Mittelwertformel

$$Q_h = \sum_{i=0}^n a_i f_i$$

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx$$

Lagrangesches Interpolationspolynom

So viele Brüche wie vorgegebene Punkte $\rightarrow n(x) = \sum_{i=0}^n L_i f_i$ \rightarrow Besitzt Kronecker-Delta-Eigenschaft
 Grad des Polynoms mindestens so groß wie vorgegebene Punkte $\rightarrow \phi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

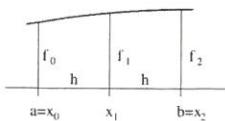
Quadraturformeln

Familie	E	k	n	$I = \int_a^b f(x) dx$	Name	$ R $
Abgeschlossene Newton-Cotes-Formeln	1	2	1	$\frac{h}{2} (f_0 + f_1)$	Sehnentrapez	$\frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$
	3	3	2	$\frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$		$\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$
	3	4	3	$\frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$		$\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$
	5	5	4	$\frac{2h}{45} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$		$\frac{8}{945} h^7 f^{(6)}(\xi)$
Offene Newton-Cotes-Formeln	1	1	2	$2hf_1$	Rechteck	$\frac{1}{3} h^3 f''(\xi)$
	1	2	3	$\frac{3h}{2} (f_1 + f_2)$		$\frac{3}{4} h^3 f''(\xi)$
	3	3	4	$\frac{4h}{3} (2f_1 - f_2 + 2f_3)$		$\frac{14}{45} h^5 f^{(4)}(\xi)$
	3	4	5	$\frac{5h}{24} (11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4)$		$\frac{95}{144} h^7 f^{(6)}(\xi)$
MacLaurin-Formeln	1	1	1	$hf_{\frac{1}{2}}$	Mittelpunkt	$\frac{1}{24} h^3 f''(\xi)$
	1	2	2	$h(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}})$		$\frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$
	3	3	3	$\frac{3h}{8} (3f_{\frac{1}{2}} + 2f_{\frac{3}{2}} + 3f_{\frac{5}{2}})$		$\frac{21}{640} h^5 f^{(4)}(\xi)$
	3	4	4	$\frac{h}{12} (13f_{\frac{1}{2}} + 11f_{\frac{3}{2}} + 11f_{\frac{5}{2}} + 13f_{\frac{7}{2}})$		$\frac{103}{1440} h^5 f^{(4)}(\xi)$

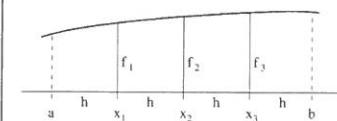
k Äquidistante Stützstellen | n Streifen | Exaktheitsgrad E

Newton-Cotes-Formeln

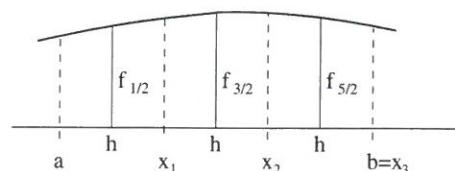
Abgeschlossen



Offen



MacLaurin-Formeln



Numerische Integration

Summierte Mittelwertformeln

Zusammengesetzte Simpson-Formel

$$Q_h = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + f_n), \quad k = 4$$

Zusammengesetzte Sehnentrapezregel

$$Q_h = h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right)$$

Gaußsche Integrationsformeln

$n = 1$

$$Q_h = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$n = 2$

$$Q_h = \frac{1}{9} \left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right)$$

Transformationsvorschrift

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}\right) dz$$

Genauigkeitsordnung k

$$|Q - Q_h| = \mathcal{O}(h^k) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Konvergenzordnung n

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{n_{eoc}} = \frac{E_1}{E_2}$$

Richardson-Extrapolation

Fehlerabschätzung

$$R_i \approx \alpha h_i^k = \frac{Q_2 - Q_1}{h_1^k - h_2^k} h_i^k \quad i \in \{1, 2\}$$

Fehlerkorrektur

$$Q_2^* = Q_2 - R_2 = \frac{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^k Q_2 - Q_1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^k - 1}$$

Romberg-Verfahren

Schrittw.	2.O	4.O	6.O	8.O	10.O
h_1	T_{11}				
$h_2 = \frac{1}{2}h_1$	$T_{21} \rightarrow T_{22}$				
$h_3 = \frac{1}{2}h_2$	$T_{31} \rightarrow T_{32} \rightarrow T_{33}$				
$h_4 = \frac{1}{2}h_3$	$T_{41} \rightarrow T_{42} \rightarrow T_{43} \rightarrow T_{44}$				
$h_5 = \frac{1}{2}h_4$	$T_{51} \rightarrow T_{52} \rightarrow T_{53} \rightarrow T_{54} \rightarrow T_{55}$				

$$T_{i,1} = h_i \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right)$$

$$T_{i,j} = T_{i,j-1} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{\left(\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)^{2(j-1)} - 1}$$

Bulirsch-Folge

$$h_i = \frac{h_0}{\nu_i}, \quad i \in \{2k-1, 2k\}, k = 1, 2, 3, \dots, \nu_i = \begin{cases} 2^k & \text{falls } i = 2k-1 \\ 3 \cdot 2^{k-1} & \text{falls } i = 2k \end{cases}$$

Numerische Differentiation

Differenzenformeln

Linksseitig

$$D^- f(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Zentral

$$Df(x) = \frac{1}{2} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

Rechtsseitig

$$D^+ f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Symmetrisch

k	i	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	R
y'_i	=	$\frac{1}{2h}($		-1		+1)	$\cdot y_k - \frac{h^2}{6} y'''$
	=	$\frac{1}{12h}($	+1	-8		+8	-1)	$+ \frac{h^4}{30} y^{(5)}$
	=	$\frac{1}{60h}($	-1	+9	-45		+45	-9	$+1) - \frac{h^6}{140} y^{(7)}$
y''_i	=	$\frac{1}{h^2}($		+1	-2	+1)	$\cdot y_k - \frac{h^2}{12} y^{(4)}$
	=	$\frac{1}{12h^2}($	-1	+16	-30	+16	-1)	$+ \frac{h^4}{90} y^{(6)}$
	=	$\frac{1}{180h^2}($	+2	-27	+270	-490	+270	-27	$+2) - \frac{h^6}{560} y^{(8)}$
y'''_i	=	$\frac{1}{2h^3}($	-1	+2		-2	+1)	$\cdot y_k - \frac{h^2}{4} y^{(5)}$
	=	$\frac{1}{8h^3}($	+1	-8	+13		-13	+8	$-1) + \frac{7h^4}{120} y^{(7)}$
$y_i^{(4)}$	=	$\frac{1}{h^4}($		+1	-4	+6	-4	+1	$) \cdot y_k - \frac{h^2}{6} y^{(6)}$
	=	$\frac{1}{6h^4}($	-1	+12	-39	+56	-39	+12	$-1) + \frac{7h^4}{240} y^{(7)}$

Unsymmetrisch

k	i	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	R
y'_i	=	$\frac{1}{h}($		-1	+1)	$\cdot y_k - \frac{h}{2} y''$
	=	$\frac{1}{2h}($		-3	+4	-1)	$+ \frac{h^2}{3} y'''$
	=	$\frac{1}{12h}($	-3	-10	+18	-6	+1)	$- \frac{h^4}{20} y^{(5)}$
	=	$\frac{1}{60h}($	+2	-24	-35	+80	-30	+8	$-1) + \frac{h^6}{105} y^{(7)}$
y''_i	=	$\frac{1}{h^2}($		+2	-5	+4	-1)	$\cdot y_k + \frac{11h^2}{12} y^{(4)}$
	=	$\frac{1}{12h^2}($		+11	-20	+6	+4	-1)
	=	$\frac{1}{180h^2}($	-13	+228	-420	+200	+15	-12	$+2) - \frac{h^5}{90} y^{(7)}$
y'''_i	=	$\frac{1}{2h^3}($	-3	+10	-12	+6	-1)	$\cdot y_k + \frac{h^2}{4} y^{(5)}$
	=	$\frac{1}{8h^3}($	-1	-8	+35	-48	+29	-8	$+1) - \frac{h^4}{15} y^{(7)}$

System ist hyperbolisch wenn El. λ_i verschieden und Element τ_k

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Euler-Cauchy-Verfahren

Sehnentrapezformeln

Normal

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

Verbessert

$$y_{i+1} = y_i + h f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

Schrittzahl κ

$$\kappa = h |f_y| < 2$$

EC-Stabilität

$$\kappa = h |f_y| < 1$$

Verfahren Von Heun

Prädiktor

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

Korrektor

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}))$$

Konsistenzordnung p

$$|\varepsilon_{i+1}| \leq Ch^{p+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Euler-Cauchy: 1

Verfahren von Heun: 2

Simpson-Regel

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} (f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

Lokaler Verfahrensfehler

$$\varepsilon_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

Globaler Verfahrensfehler

$$e_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

Konvergenzordnung p

$$\max_{i=1,2,\dots,n} |e_i| \leq Kh^p$$

Dreischrittverfahren
→ nicht selbststartend
→ zwei Schritte für Anlaufstücke

Adams-Bashforth-Verfahren

Typ: ABV 2. Ordnung:

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{23}{72} f(x_i, t_i) - \frac{4}{3} f(x_{i-1}, t_{i-1}) + \frac{5}{6} f(x_{i-2}, t_{i-2}) \right)$$

$h = \text{Schrittweite oder Zeitschritt}$

Konsistenzordnung $n+1$

Polynomgrad n

a_{i-6}	a_{i-5}	a_{i-4}	a_{i-3}	a_{i-2}	a_{i-1}		
$n = 1 :$					$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
$n = 2 :$				$\frac{5}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{23}{12}$	
$n = 3 :$			$-\frac{9}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{55}{24}$	
$n = 4 :$		$\frac{251}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{1901}{720}$	
$n = 5 :$	$-\frac{475}{1440}$	$\frac{2877}{1440}$	$-\frac{7298}{1440}$	$\frac{9082}{1440}$	$-\frac{7923}{1440}$	$\frac{4277}{1440}$	
$n = 6 :$	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{134472}{60480}$	$\frac{407139}{60480}$	$-\frac{688256}{60480}$	$\frac{705549}{60480}$	$-\frac{447288}{60480}$	$\frac{198721}{60480}$

Adams-Basforth
Adams-Moulton

Adams-Moulton-Verfahren

Polynomgrad n

a_{i-6}	a_{i-5}	a_{i-4}	a_{i-3}	a_{i-2}	a_{i-1}	a_i	a_{i+1}
$n = 2 :$					$-\frac{1}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{5}{12}$
$n = 3 :$				$\frac{1}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{9}{24}$
$n = 4 :$			$-\frac{19}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{646}{720}$	$\frac{251}{720}$
$n = 5 :$		$\frac{27}{1440}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{482}{1440}$	$-\frac{798}{1440}$	$\frac{1427}{1440}$	$\frac{475}{1440}$
$n = 6 :$	$-\frac{863}{60480}$	$\frac{6312}{60480}$	$-\frac{20211}{60480}$	$\frac{37504}{60480}$	$-\frac{46461}{60480}$	$\frac{65112}{60480}$	$\frac{19087}{60480}$
$n = 7 :$	$\frac{1375}{120960}$	$-\frac{11351}{120960}$	$\frac{41499}{120960}$	$-\frac{88547}{120960}$	$\frac{123133}{120960}$	$-\frac{121797}{120960}$	$\frac{279698}{120960}$

$$y_{i+1} = y_i + h \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_n(x) dx = y_i + h (a_{i-n} f_{i-n} + a_{i-n+1} f_{i-n+1} + \dots + a_{i-1} f_{i-1} + a_i f_i + a_{i+1} f_{i+1})$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Runge-Kutta-Verfahren Eintrittsverfahren

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^n a_j k_j$$

2. Ordnung

Variante a	Variante b
$k_1 = f(x_i, y_i)$	$k_1 = f(x_i, y_i)$
$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$	$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$
$y_{i+1} = y_i + hk_2$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$

3. Ordnung

Variante A	Variante B
$k_1 = f(x_i, y_i)$	$k_1 = f(x_i, y_i)$
$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$	$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1\right)$
	$k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2)$
	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$
	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$

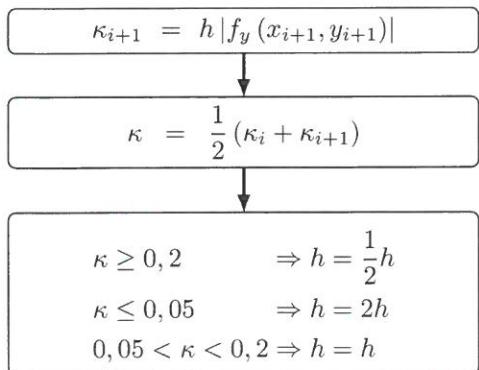
4. Ordnung

Variante A	Variante B (Klassisch)	Variante C (Gill)
$k_1 = f(x_i, y_i)$	$k_1 = f(x_i, y_i)$	$k_1 = f(x_i, y_i)$
$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1\right)$	$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$	$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$
$k_3 = f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i - \frac{h}{3}k_1 + hk_2\right)$	$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$	$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}(\sqrt{2}-1)k_1 + \frac{h}{2}(2-\sqrt{2})k_2\right)$
$k_4 = f(x_i + h, y_i + h(k_1 - k_2 + k_3))$	$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$	$k_4 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - \frac{h}{2}\sqrt{2}k_2 + \frac{h}{2}(2+\sqrt{2})k_3\right)$
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3(k_2 + k_3) + k_4)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + (2-\sqrt{2})k_2 + (2+\sqrt{2})k_3 + k_4)$

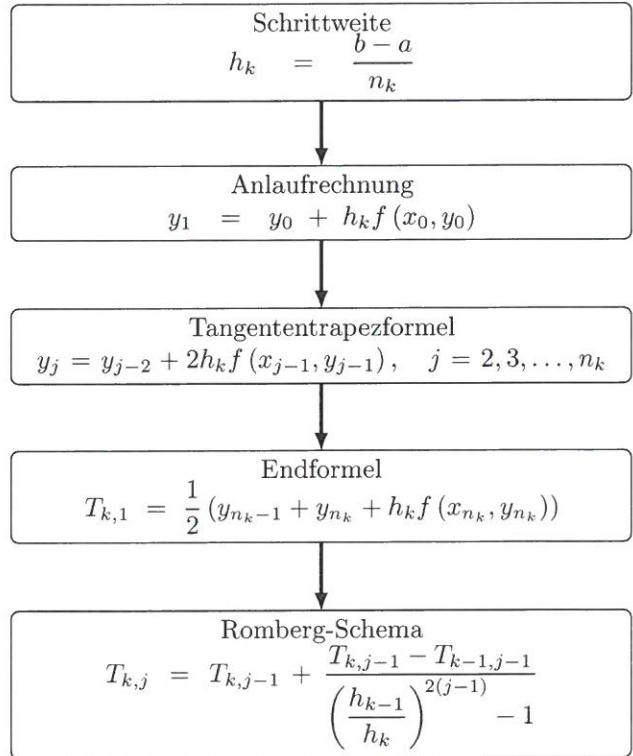
5. Ordnung (Butcher)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{h}{4}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{h}{8}(k_1 + k_2)\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - \frac{h}{2}k_2 + hk_3\right) \\ k_5 &= f\left(x_i + \frac{3h}{4}, y_i + \frac{3h}{16}(k_1 + 3k_4)\right) \\ k_6 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{h}{7}(3k_1 - 2k_2 - 12(k_3 - k_4) - 8k_5)\right) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{90}(7(k_1 + k_6) + 32(k_3 + k_5) + 12k_4) \end{aligned}$$

Schrittweitensteuerung



Extrapolationsverfahren

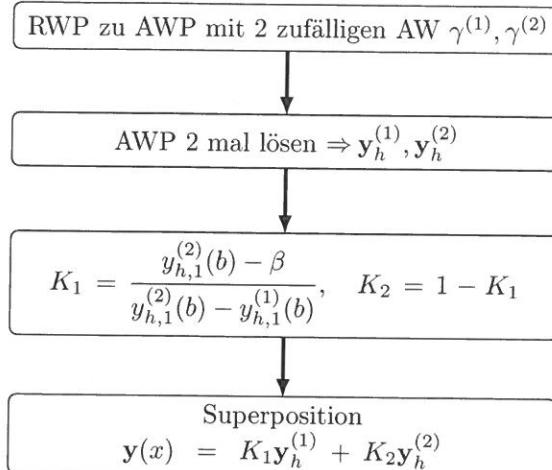


Gewöhnliche Differentialgleichungen

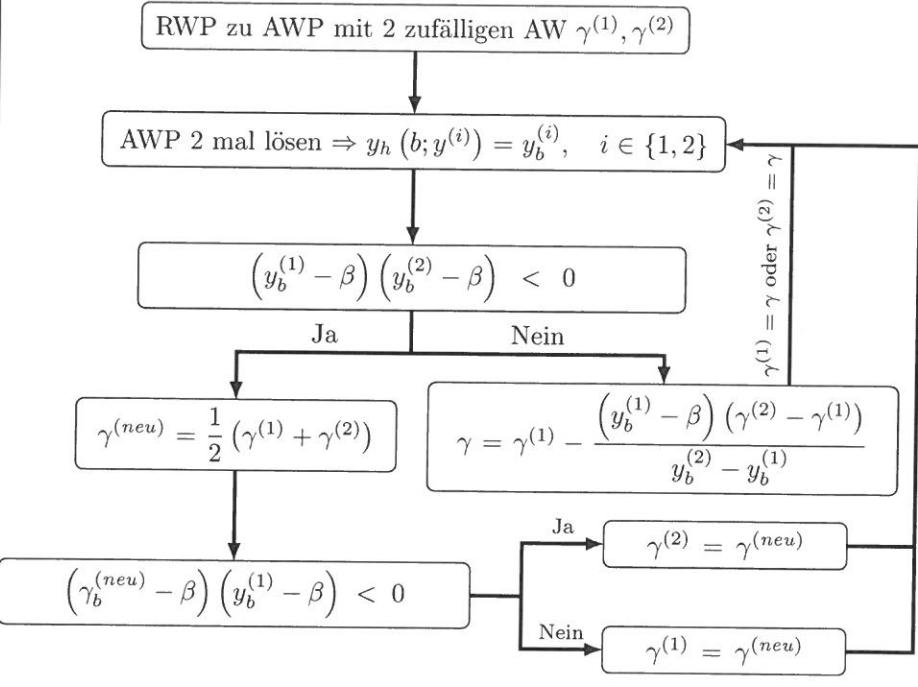
Schießverfahren

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Lineare Probleme

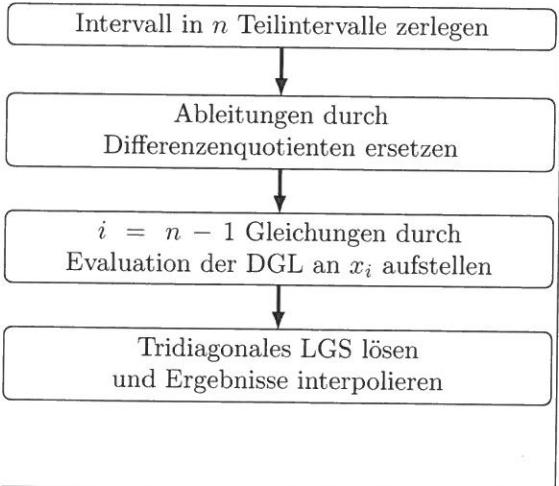


Nichtlineare Probleme

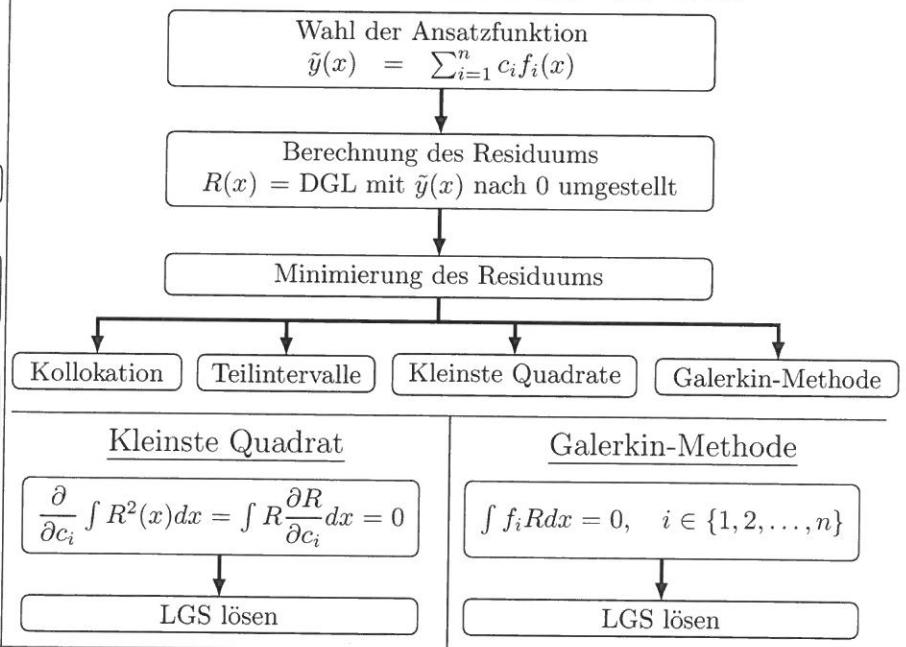


Differenzenverfahren

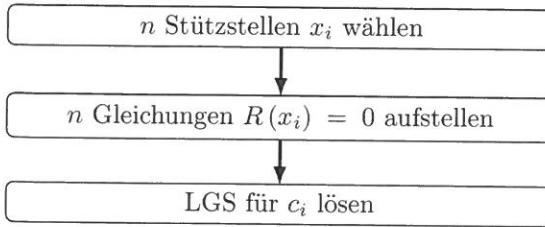
$$\begin{aligned} y'_i &\approx \frac{1}{2\Delta x}(y_{i+1} - y_{i-1}) \\ y''_i &\approx \frac{1}{\Delta x^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \end{aligned}$$



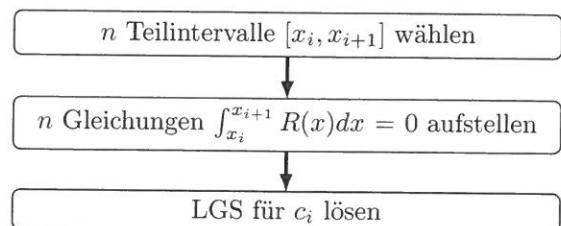
Methode Der Gewichteten Residuen



Kollokation

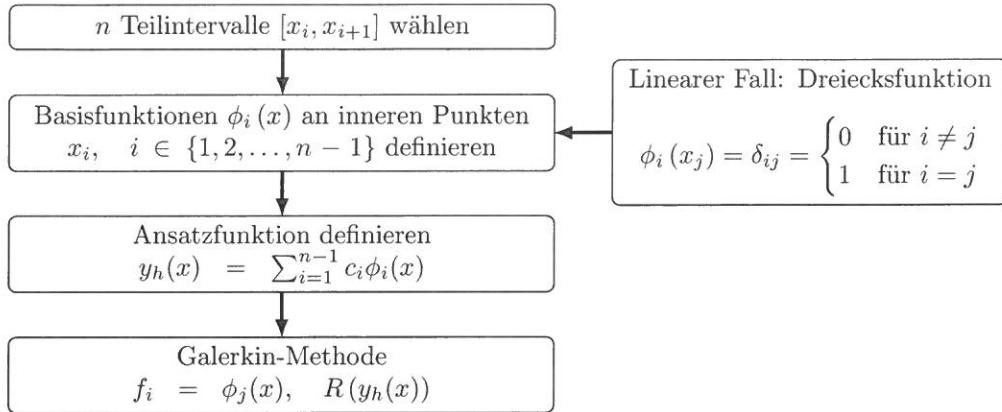


Integration Über Teilintervalle



Gewöhnliche Differentialgleichungen

Finite-Elemente-Methode



Thomas-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & r_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-1} & r_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m & b_m & r_m \end{array} \right)$$

Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} q &= \frac{a_i}{b_{i-1}} \\ b_i &= b_i - qc_{i-1} \\ r_i &= r_i - qr_{i-1} \\ i &= 2, \dots, m \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{r_m}{b_m} \\ x_i &= \frac{r_i - c_i x_{i+1}}{b_i} \\ i &= m-1, \dots, 1 \end{aligned}$$

Struktogramme

Struktogramme beschreiben die Grundstruktur eines Programms ohne auf eine bestimmte Programmiersprache einzugehen. Amhand eines Struktogrammes soll es möglich sein, den beschriebenen Algorithmus in jeder Programmiersprache umzusetzen.

1 Elemente eines Struktogramms

1.1 Einfache Anweisungen

$$c = a + b$$

Umfasst die Anweisung den Aufruf eines Unterprogramms, so wird dies mit Strichen an der Seite gekennzeichnet:

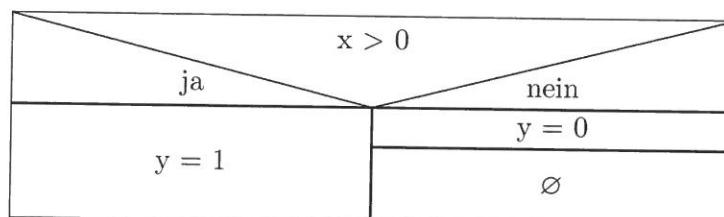
$$c = f(a) + b$$

1.2 Verzweigungen

In vielen Situationen ist es nötig, aufgrund eines Kriteriums das Vorgehen zu variieren. Ein Beispiel hierfür wäre eine abschnittsweise definierte Funktion:

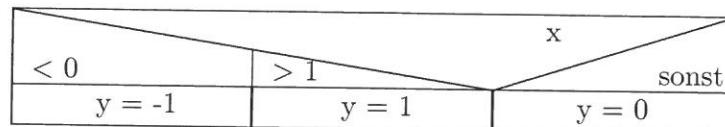
$$y = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

In einem Struktogramm wird dies folgendermaßen dargestellt:



Auf diese Art und Weise können auch mehrfache Verzweigungen dargestellt werden:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

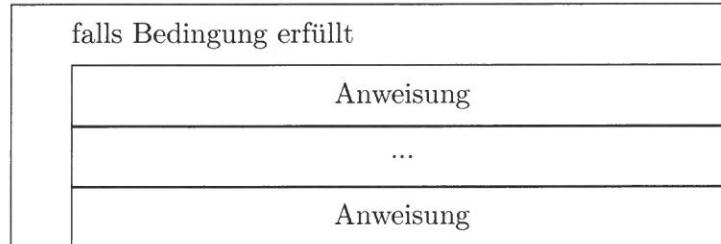


1.3 Wiederholungsschleifen

Wiederholungsschleifen sind das wichtigste Element in einem numerischen Verfahren. In Schleifen werden Anweisungen so lange wiederholt bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Es gibt verschiedene Arten von Schleifen:

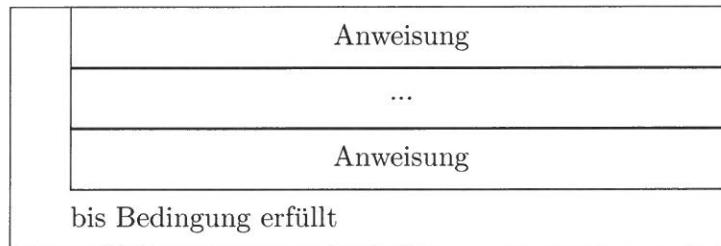
1.3.1 Abweisende Schleifen

Diese Schleifen überprüfen vor einem Durchlauf, ob die Abbruchbedingung erfüllt ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, werden sie gar nicht erst ausgeführt.



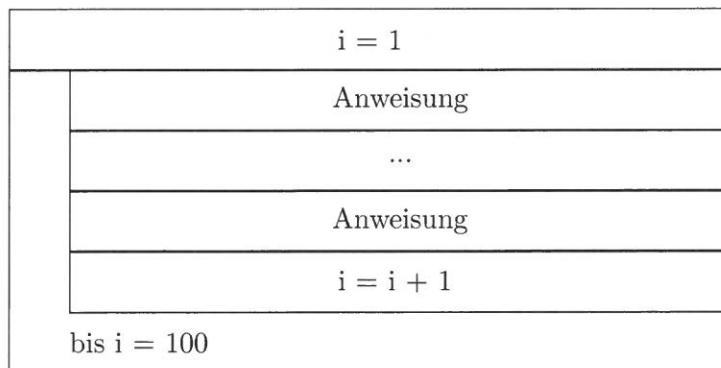
1.3.2 Annehmende Schleifen

Diese Schleifen überprüfen am Ende eines Durchlaufs, ob die Abbruchbedingung erfüllt ist. Dieser Schleifentypus wird immer mindestens einmal ausgeführt, auch dann, wenn die Abbruchbedingung schon vor dem ersten Durchlauf erfüllt wäre.



1.3.3 Zählschleifen

Zählschleifen haben kein eigenes Symbol, da sie durch die anderen beiden Schleifentypen dargestellt werden können:



2 Aufbau

Für numerische Verfahren lässt sich der Aufbau eines Struktogramms immer vier Abschnitte einteilen:

1. Variablen-deklaration

Hier müssen alle verwendeten Variablen und Funktionen entsprechen ihres Typs (Real oder Integer) deklariert werden.

2. Initialisierung der Variablen

Vor der Verwendung muss jeder Variable ein sinnvoller Wert zugewiesen werden. Dies kann auch durch eine Eingabe vom Benutzer geschehen.

3. Eigentlicher Algorithmus

Hier werden alle Berechnungen durchgeführt

4. Ausgabe

Zum Schluss sollten alle Ergebnisse ausgegeben werden. Dies kann allerdings auch schon in Punkt 3 passieren, falls nötig.

3 Funktionen und Unterprogramme

Unterprogramme sind bei der Entwicklung größerer Codes ein wichtiges Element, um effizient und übersichtlich programmieren zu können. Darüber hinaus ermöglichen Sie es, bereits erstellte Routinen einfach in neue Projekte zu integrieren.

3.1 Funktionen

Funktionen sind unterprogramme, die einen Wert zurückliefern, wie z.B. $y = \sin(x)$. Die Anwendung soll an einem einfachen Beispiel demonstriert werden:

Hauptprogramm:

..
y = quadrat(x)
..

Unterprogramm:

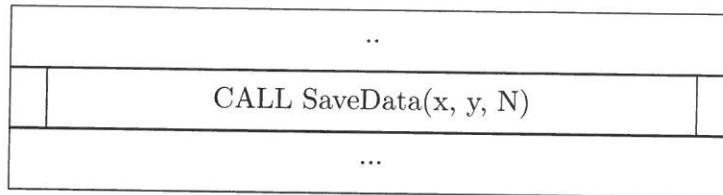
REAL Function quadrat(x)
REAL : x
Übernehme x
quadrat = x * x
Übergebe quadrat

Hervorzuheben ist hier, dass durch „Übernehme“ deutlich gemacht werden soll, welche Variablen tatsächlich aus dem aufrufenden Programm übernommen werden sollen. In „Übergebe“ stehen dann alle Variablen, die wieder an das aufrufenden Programm übergeben werden.

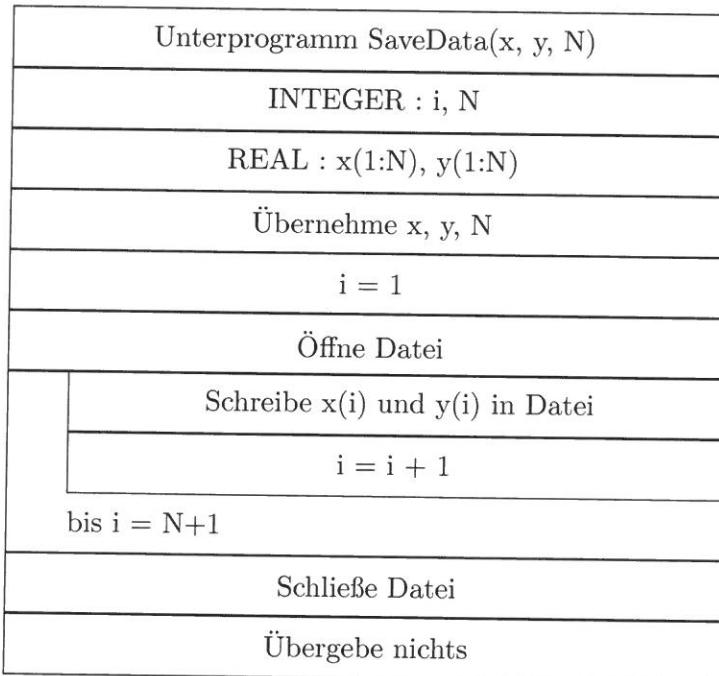
3.2 Unterprogramme

Unterprogramme müssen keinen Rückgabewert haben und werden auch anders aufgerufen. Sie können allgemeine Aufgaben umfassen, die aus dem Hauptprogramm ausgelagert werden sollen. Anzumerken ist, dass es Programmiersprachen wie C gibt, die nur Funktionen kennen. Hier ist es möglich, Funktionen mit „leerem“ Rückgabewert zu definieren, die dann eben „Unterprogramme“ sind. Fortran stellt aber beispielsweise beide Elemente zur Verfügung. Die Verwendung soll an einfachen Beispielen demonstriert werden:

Hauptprogramm:



Unterprogramm:



Hauptprogramm:

..
CALL GetYZ(x, y, z)
..

Unterprogramm:

Unterprogramm GetYZ(x, y, z)
REAL : x, y, z
Übernehme x
y = x*x
z = 3*x*sqrt(x)
Übergebe y,z

- $f(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$
mit $f_0 L_0(x) = (x+3)(x-7)$; $f_1, L_n(x) = \dots$
Stützstellen $x_i = \{-4, -3, 7\}$

Für koeffizienten Stützstellen in Polynom für x einsetzen, auflösen

$$f_i = \{5, -76, 20\}$$

- Effizienteste Integrationsformel mit möglichst wenigen Stützstellen und möglichst genauem Ergebnis: Gauß-Quadratur-Formeln
- X-Pos. und zugehöriges Gewicht aus Tabelle in Buch in der Form:

$$x_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{q_1 - q_2}{2}; \quad q_2 = \frac{6-9}{2} \frac{8}{9}$$

- Abgeschlossene Newton-Cotes-Formel bei Genauigkeitsordnung p

$$p=3: I = \frac{1}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$p=5: I = \frac{24}{45} (7f_0 + 32f_1 + 72f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

- Bei AWP hängt der Integrand in Allgemeinen von der Lösung selbst ab. Diese Beobachtung ist wesentlich für die Konstruktion von Verfahren zum Lösen von Anfangswertproblemen.

- $\frac{dy}{dx} = -y x^2, x \in [0, L], y(0) = y_0$
diskretisiert mit Euler-Cauchy, Intervall L in k Schritte unterteilt:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{h}{6} y_i x_i^2$$

- Exaktheitsgrad bei der Integration ist der Grad, bis zu dem Polynome erster integriert werden.

- AWP-Löser liefert mit versch. Schrittwerten h folgende Fehler:

h	E
0,4	0,064
0,7	0,007

$$0,7^{-} = 0,7 \not\leq 0,007 \quad \times$$

$$0,7^2 = 0,07 \not\leq 0,007 \quad \times$$

$$0,7^3 = 0,007 \leq 0,007 \quad \checkmark \rightarrow \text{Konvergenzordnung } 3$$

- Satz von Lax: die Lösung eines konsistenten, stabilen, Verfahrens konvergiert bei Reduzierung der Schrittwerte gegen die exakte Lösung.

- Die Stabilität eines numerischen Verfahrens kann von der Schrittwerte abhängig sein.

- ~~belegtes Interpolationspolynom: $x^2 - 2x + 6$~~

~~$$(x-1)(x-2) \\ (x-4)(x-6); \quad (x-2)(x-6); \quad (6-x)(6-x)$$~~

Newton'sches Interpolationspolynom:

$$P_2(x) = (-7) + \frac{7+7}{4-2} (x-2) + \left(\frac{6-6-7}{6-4} - \frac{7+7}{4-2} \right) \frac{7}{6-2} (x-2)(x-4)$$

~~$x \neq 2$~~

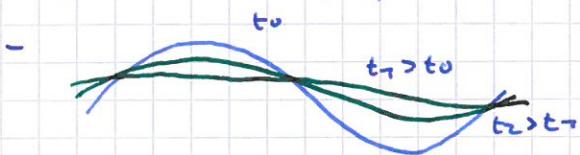
$$\frac{7}{2} (x^2 - 6x + 8)$$

$$= (x-3) + \left(\frac{7}{2} x^2 - 3x + 8 \right) = \frac{7}{2} x^2 - 2x + 1$$

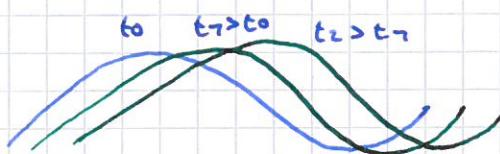
- Verfahren von Heun : Prädiktor-Korrektor-Verfahren
- Schwierigkeiten bei der numerischen Behandlung von Anfangswertproblemen mittels eines impliziten Verfahrens im Vergleich zu einem expliziten: Im allgemeinen ist die Lösung einer nicht-linearen Gleichung erforderlich.
- Extrapolationsverfahren kann nur effizient durchgeführt werden, wenn quadratische Entwicklung des Fehlers vorliegt.
- Einschrittverfahren ist schneller als Mehrschrittverfahren, wenn die Auswertung von f nicht viel Rechenaufwand benötigt.
- $U_{xx} + U_{yy} = 0$
linear
partiell
- $U_t + (U(a - bU))_x = 0$
nicht linear
partiell
- $U_{xx} + U_x + \alpha = 0$
linear
gewöhnlich

- CFL-Bedingung ist relevant für explizite Lösungsverfahren für hyperbolische Probleme.

- Elliptische DGLn bilden rein stationäre Vorgänge ab \rightarrow besitzen keine Zeitschrittbedingung



Wärmeleitung
Parabolisch



Linearer Transport
Hyperbolisch

- Konvergenzordnung eines num. Verfahrens zur Lösung der DGL lässt sich durch Reduzierung der Schrittwerte bestimmen, wenn eine exakte Lösung zur gegebenen DGL vorliegt.
- Differenzenverfahren sind zur Approximation von Problemen mit unstetigen Lösungen nicht geeignet, weil das Aufstellen der Differenzengleichungen unter der Annahme erfolgt, dass die Lösung differenzierbar ist.
- Das Gauß-Seidel-Verfahren erhält eine schnellere Konvergenz gegenüber den Jacobi-Verfahren, wenn die in der aktuellen Iteration bekannten Werte des Lösungsvektors eingesetzt werden.

L Gauß-Seidel-Verfahren für

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_i^{(M+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(M+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^{(M)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_1^{(M+1)} = \frac{1}{3} (2 - 0 - u_2^M - u_3^M)$$

$$u_2^{(M+1)} = \frac{1}{2} (-1 - u_1^{M+1} + u_3^M)$$

$$u_3^{(M+1)} = \frac{1}{3} (1 + u_1^{M+1} + u_2^{M+1} + 0)$$

- Numerische Lösung streift gegen exakte Lösung : Konvergenz
Robustheit bei Störung : Stabilität
~~Stabilität der Lösung bei größerer Konstanz erster Fehler in einem Rechenschritt~~ : Konsistenz

Nun im Fragenteil

Seite 3

- Euler explizit
bedingt stabil
 $O(\Delta t)$
 - Euler implizit
Stabil
 $O((\Delta t)^2)$
 - Differenzenquotient zur Approximation folgender Gleichung mit Upwind-Verfahren:
 $U_t - 7.5 U_x = 0$
 $\Rightarrow \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x}$
 - Beispiel für elliptische DGL mit Neumann-Randbedingungen:
 $U_{xx} + U_{yy} + kU = 0 \quad \partial_x U(0, y) = 0, \quad \partial_x U(1, y) = 0$
 - Korteweg-de-Vries-Gleichung $U_t + 6U U_{xx} + U_{xxx} = 0$
quasilinear, partiel, 3. Ordnung, homogen.
 - $U_{xx} = S(x)$: Elliptisch, Balkenbiegung
 $U_t = d \Delta U$: Parabolisch, Wärmeleitung
 $U_{tt} = c^2 U_{xx}$: Hyperbolisch, Akustik
 - Wenn eine elliptische Gleichung mit Differenzenverfahren diskretisiert wird, kann die Genauigkeit durch mehr Stützstellen für den Differenzenquotienten erhöht werden, ohne dass dabei die Anzahl der Gitterpunkte erhöht wird.
 - Crank-Nicolson-Verfahren: $\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = a \frac{U_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2 \Delta x}$
 $U_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_i^{n+1} + U_i^n)$
 - Stabilitätsgebiet von Euler-Cauchy für Testgleichung $U_t = Qu$
- Eigenwerte von Q müssen innerhalb der Stabilitätsgrenzen liegen, damit das Verfahren stabil ist.
- Differenzenverfahren benötigen ein strukturiertes Gitter
 - Idee hinter dem Upwind-Verfahren: Differenzenbildung entgegen der Richtung des Informationstransports.
 - Tetraeder Gitter sind im Allgemeinen unstrukturiert
 - Godunov Idee zu FV: Stückweise konstante Approximation, Lösung des Riemann-Problems bei $x_{i+\frac{1}{2}}$

Numism 2022 Klausur

$$\textcircled{1} \quad \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} \quad \text{ableiten}$$

$$\tilde{\gamma}' = \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \end{pmatrix} = \underline{f}(t, \gamma)$$

$$\gamma'' + 2\gamma' + \gamma = 0 \rightarrow \gamma'' = -2\gamma' - \gamma$$

$$\begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ -2\gamma_2 - \gamma_1 \end{pmatrix} = \underline{f}(t, \gamma)$$

$$b) Y_{i+1} = Y_i + h \left(\frac{2}{12} f(\gamma_i, t_i) - \frac{4}{3} f(\gamma_{i-1}, t_{i-1}) + \frac{5}{12} f(\gamma_{i-2}, t_{i-2}) \right)$$

ABV ist Dreischrittverfahren: Es werden die vorherige, beiden Stützstellen und die aktuelle benötigt.

↳ zwei Anlaufstützstellen mit Einschrittverfahren mind.
drittes Ordnung

$$d) \text{ Notieren: } \begin{matrix} \tilde{\gamma}^{(1)} \\ \tilde{\gamma}^{(2)} \\ h_1 \end{matrix} = \text{AWP-Wässer } (\gamma_0, y_0, t_0, t_{\text{end}}, N)$$

$$\begin{matrix} \tilde{\gamma}^{(2)} \\ y_0^{(2)} \\ \gamma_{\text{feld}} \end{matrix} = \begin{matrix} y_0 \\ y_0^{(2)} \\ \gamma_{\text{feld}} \end{matrix} = \dots$$

$$h_1 = \gamma_{\text{feld}} -$$

②

$$a) \frac{1}{2} \gamma'' + \gamma = \frac{1}{2} (x^2 - x + 7)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \left(\frac{1}{2} \gamma'' + \gamma \right) dx = \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \left(\frac{1}{2} (x^2 - x + 7) \right) dx$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \cdot \frac{1}{2} \gamma''(x) dx + \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \gamma(x) dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \cdot \frac{1}{2} x^2 dx - \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \cdot \frac{1}{2} x dx + \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$\Rightarrow \left[\Omega(x) \cdot \frac{1}{2} \gamma'(x) \right]_{x_0}^{x_6} - \int_{x_0}^{x_6} \Omega'(x) \cdot \frac{1}{2} \gamma'(x) dx + \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \gamma(x) dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \cdot \frac{1}{2} x^2 dx - \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \cdot \frac{1}{2} x dx + \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_6} \Omega(x) \left(\frac{1}{2} (x^2 - x + 7) \right) dx$$

mit $x_0 = 0$ und $x_6 = 2$

$= \phi_j$

b) Testfunktion durchläuft alle Basisfunktionen ψ_j mit $j = 1, \dots, N$.

Weiterrechnen mit schwacher Formulierung:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_i \left(\frac{1}{2} \left[\Omega(x) \gamma'(x) \right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \Omega'(x) \gamma'(x) dx + \int_0^2 \Omega(x) \gamma(x) dx \right) =$$

Randwerte \leq Steifigkeitsmatrix \leq Massamatr. \leq

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \Omega(x) (x^2 - x + 7) dx$$

Lastvektor f

$$\frac{1}{2} \tilde{\gamma} - \frac{1}{2} \sum \tilde{\gamma}_i + M \tilde{\gamma}_i = f$$

c) $L_i(x) = \prod_{j=0}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ $x_0=0; x_1=1; x_2=2$

$$\Phi_0 = \frac{x-1}{0-1} - \frac{x-2}{0-2} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$\Phi_1 = \frac{x-0}{1-0} - \frac{x-2}{1-2} = -1(x(x-2)) = -x(x-2)$$

$$\Phi_2 = \frac{x-0}{2-0} - \frac{x-1}{2-1} = \frac{1}{2}(x(x-1)) = \frac{1}{2}x(x-1)$$

Lagrange-Polygone besitzen Interpolator-Delta-Eigenschaft

$$\phi_i(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

d) $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$

$$y(0) = 0 = f_0$$

$$y(1) = 0 = f_1$$

$$y(2) = 1 = f_2$$

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$$

$$\tilde{x}_3 = 1$$

e) $M_{1,1}^{(i)} = \int_{x_i}^{x_i+h} \phi_1(x) \phi_1(r) dx$

$$= \int_{x_i}^{x_i+h} \left(1 - \frac{x-x_i}{h}\right) \left(1 - \frac{x-x_i}{h}\right) dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_i+h} \left(1 - \frac{x-x_i}{h}\right)^2 dx$$

$$= \frac{h}{3}$$

$$M_{2,2}^{(i)} = M_{1,1}^{(i)}$$
 wegen Symmetrie der Hohlkurve

f) Der globale Galerkin-Verfahren liefert die exakte Lösung, FE mit Hutfunktionen nicht.

Mit Quadratischen Basisfunktionen liefert FE ebenfalls die exakte Lösung

(3)

a) $\underline{U}_t + A \underline{U}_r = 0$ mit $\underline{U} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ und $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\chi_x(A) = (-2-\lambda)(-6-\lambda) + 4 = 0$

$$-12 + 2\lambda + 6\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 8\lambda + 72 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 72}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda_1 = -6 \quad \lambda_2 = -2$$

$$= -\frac{8 \pm 4}{2}$$

Die Lösung wurde mit anderen Zahlen gerechnet

Streng Hyperbolisch, weil $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ und $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

c) $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+ (U_i^n - U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^- (U_{i+1}^n - U_i^n)$

d) Eigenvektormatrix \underline{R} und ihre Inverse \underline{R}^{-1} aufstellen.

Eigenwertmatrizen aufstellen

$$\underline{\Lambda}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_M^+) \quad \text{mit} \quad \lambda_i^+ = \max(0, \lambda_i)$$

$$\underline{\Lambda}^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_M^-) \quad \text{mit} \quad \lambda_i^- = \min(0, \lambda_i)$$

$$\underline{A}^+ = \underline{R} \underline{\Lambda}^+ \underline{R}^{-1}$$

$$\underline{A}^- = \underline{R} \underline{\Lambda}^- \underline{R}^{-1}$$

e) EW hier beide kleiner 0

$$A^+ = 0$$

$$A^- = A$$

f) $\Delta t_{\max} = \frac{\Delta x}{\max(1/\lambda_1, 1/\lambda_2)} = \frac{\Delta x}{5}$

g) $U_t + \alpha U_x = 0$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

$$\exp(i\phi) = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

Ansatz: $U_i^{n+1} = U^n \exp(i\phi_i)$ und $U_{i\pm 1}^{n+1} = U^n \exp(i\phi_{i\pm 1})$

Einsetzen

$$\begin{aligned} & \frac{U^{n+1} \exp(i\phi_i) - U^n \exp(i\phi_i)}{\Delta t} + \alpha \frac{U^{n+1} \exp(i\phi_{i+1}) - U^{n+1} \exp(i\phi_{i-1})}{2\Delta x} = 0 \\ &= \exp(i\phi) \cdot \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{U^{n+1} \exp(i\phi) \cdot \exp(i\phi) - U^{n+1} \exp(i\phi) \cdot \exp(-i\phi)}{2\Delta x} = 0 \\ &= \exp(i\phi) \cdot \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \alpha \cdot \exp(i\phi) \frac{U^{n+1} \exp(i\phi) - U^{n+1} \exp(-i\phi)}{2\Delta x} = 0 \\ &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \alpha U^{n+1} \frac{(\exp(i\phi) - \exp(-i\phi))}{2\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

mit: $\sin \phi = \frac{\exp(i\phi) - \exp(-i\phi)}{2i}$

$$= U^{n+1} - U^n + \alpha U^{n+1} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\phi) \cdot 1 = 0$$

$$U^n = U^{n+1} + \alpha U^{n+1} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\phi) \cdot 1$$

$$U^{n+1} \left(-\frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\phi) \cdot 1 \right) = \alpha U^n$$

$$1 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\phi) \cdot 1$$

$$G = \frac{1}{1 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\phi) \cdot 1}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\gamma}{\gamma + \frac{\partial t}{\partial x} \sin \phi} \\
 &= \frac{\gamma - \frac{\partial t}{\partial x} \sin \phi}{(\gamma + \frac{\partial t}{\partial x} \sin \phi)(\gamma - \frac{\partial t}{\partial x} \sin \phi)} \\
 &= \frac{\gamma - \frac{\partial t}{\partial x} \sin \phi}{\gamma + (\frac{\partial t}{\partial x})^2 \sin^2 \phi}
 \end{aligned}$$

? ! ? !

$$G = \frac{\gamma + c^2 \sin^2 \phi}{(\gamma + c^2 \sin^2 \phi)^2} = \frac{1}{\gamma + c^2 \sin^2 \phi} \leq \gamma \quad ; \quad c = \frac{\partial t}{\partial x}$$

(4)

a) $U_t + C U U_x = 0$ standard: $U_t + A f(U) = 0$

$$U_t + f(U)_x = 0$$

$$C U U_x = f(U)_x$$

$$f(U) = \int C U U_x dx \quad U \text{ ist hier einfach eine konstante}$$

~~variable Flussfunktion~~

$$= C \frac{U^2}{2}$$

b)

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

Exakte Evolutionsgleichung für integrale Mittelwerte, d.h. noch keine Approximation erhalten. Für FV-Verfahren muss noch ein numerischer Fluss eingeführt werden, der durch die integrierten Mittelwerte links und rechts bestimmt wird

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(U_i^n, U_{i+1}^n)$$

c) Godunov-Verfahren:

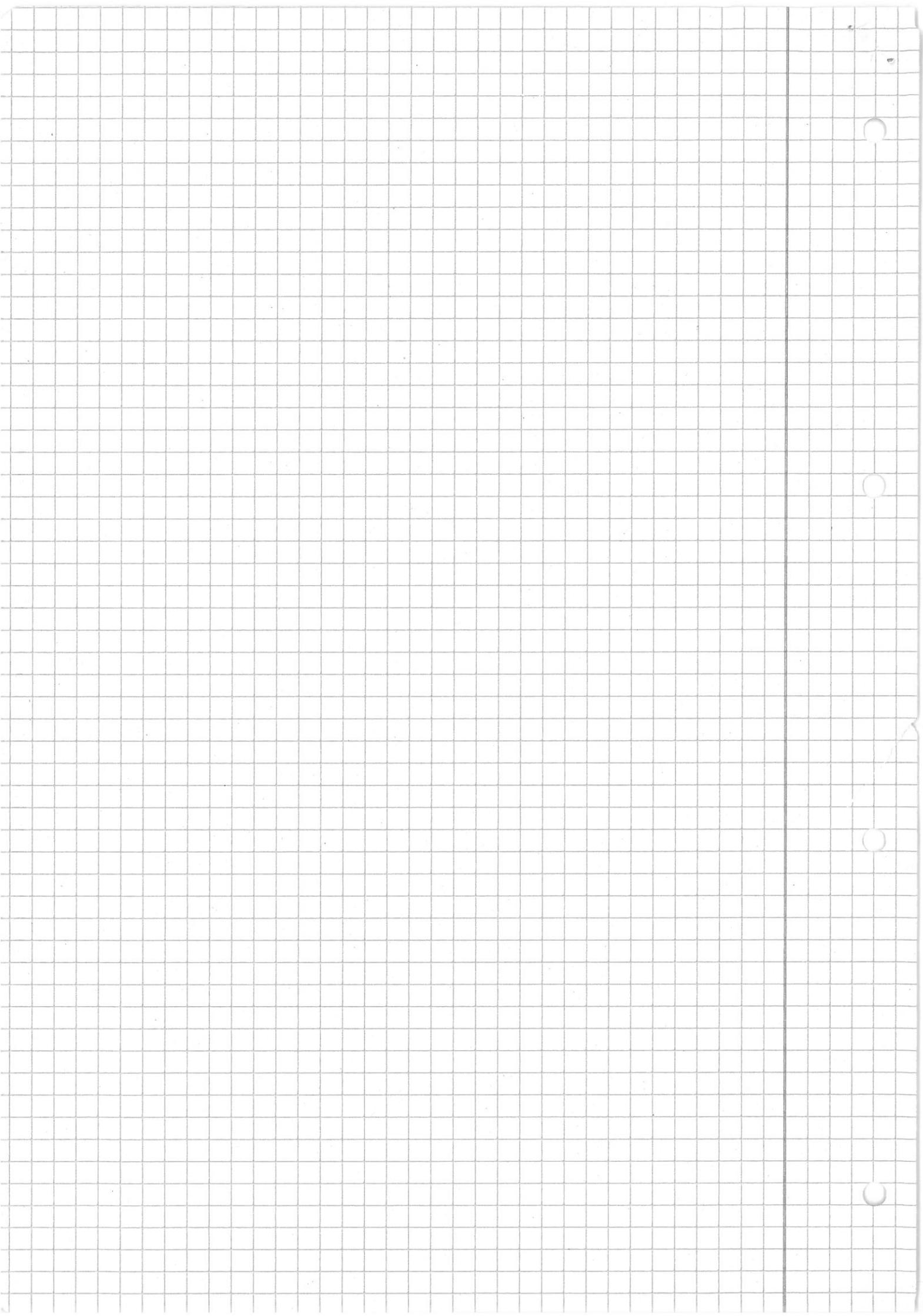
Approximation durch integrale Mittelwerte führt zu Sprüngen an den Zeitknoten, die jeweils als lokale Riemann-Probleme interpretiert werden. Dieses Riemannproblem wird exakt gelöst und der zugehörige physikalische Fluss ausgewertet. Dessen zeitliches Mittelwert wiederum bildet schließlich den numerischen Fluss

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n = g_{\text{god}}(U_i^n, U_{i+1}^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(U_{RP}(x=0, t; U_l=U_i^n, U_r=U_{i+1}^n)) dt$$

Mit der exakten Lösung des Riemann-Problems $U_{RP}(x, t; U_l, U_r)$

d) $\Delta t_{\max} = \frac{\Delta x}{\max_i \{ \alpha_i \}}$ mit $\alpha_i = C U_i$

e) Siehe Aufsatz im Buch Seite 205



Name: Franz

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (13.5 Punkte)

- Die mit Stern (*) gekennzeichneten Teilaufgaben lassen sich **unabhängig** von den vorhergehenden Teilaufgaben lösen.
- Bearbeiten Sie die nachfolgenden Teilaufgaben auf einem **separaten Blatt**, beschriftet mit Name und Matrikelnummer!
- Füllen Sie außerdem die **Lösungsfelder** auf diesem Aufgabenblatt aus!

Es wird die folgende gewöhnliche Differenzialgleichung (DGL) 2. Ordnung im Intervall $t \in [t_0, t_{\text{end}}]$ betrachtet:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y &= 0 \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) &= y'_0 \end{aligned} \tag{1}$$

a) *(2.0 Punkte) Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung um in ein DGL-System 1. Ordnung, wobei das resultierende Gleichungssystem die folgende Form annehmen soll:

$$\underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0. \tag{2}$$

b) *(2.5 Punkte) Um das AWP zu lösen, wird das Adams-Bashforth-Verfahren 3. Ordnung (AB3) verwendet. Geben Sie die Verfahrensvorschrift für einen Zeitschritt von t_i nach t_{i+1} an mit konstantem $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

Wie viele Anlauf-Stützstellen benötigt das Verfahren und wie können diese sinnvoll bestimmt werden?

c) (6.5 Punkte) Die numerische Lösung von AWP (1) mittels des Zeitintegrationsverfahrens aus Aufgabenteil b) soll nun in einem Struktogramm umgesetzt werden. Dieses besteht aus einer Hauptfunktion, der Funktion AB3 für das Adams-Bashforth-Verfahren und der Funktion ANLAUF für die Berechnung der Anlauf-Stützstellen.

Vervollständigen Sie das gegebene Struktogramm. Achten Sie darauf, dass die in der Hauptfunktion an AB3 und ANLAUF übergebenen Funktionsargumente konsistent sind mit den von Ihnen definierten Funktionssignaturen. Gehen Sie davon aus, dass die Auswertung der Funktion der rechten Seite über den Aufruf $\underline{f}(t, \underline{y})$ möglich ist.

Hinweis: Vervollständigen Sie das Struktogramm direkt auf dem Aufgabenblatt. Nicht alle Zeilen müssen dabei zwingend ausgefüllt werden.

Hauptfunktion

<i>Funktion $\underline{y}_{\text{Feld}} = \text{AWPLÖSER}(\underline{y}_0, \underline{y}'_0, t_0, t_{\text{end}}, N)$</i>

Speichere $\underline{y}_0 = [\underline{y}, \underline{y}']$

$t = t_0$

$\underline{y} = \underline{y}_0$

$\Delta t = \frac{t_{\text{end}} - t_0}{N}$

$i = 0$

solange $i < N$

$f_i = f(t, \underline{y})$

$i < 2$

WAHR

FALSCH

$d\underline{y} = \text{ANLAUF}(\underline{y}, t, \Delta t)$
--

$d\underline{y} = \text{AB3}(\Delta t, t, t + \Delta t, f, \dots)$
--

$i = i + 1$

$t = t + \Delta t$

$\underline{y} = \underline{y} + d\underline{y}$
--

Speichere $t_i = t, \underline{y}_i = \underline{y}$
--

Ausgabe: Feldlösung $\underline{y}_{\text{Feld}} = [\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_N]$
--

Name:

Matrikelnummer:

Integrationsverfahren für Anlaufstück

Funktion $\underline{dy} = \text{ANLAUF}(\dots, \dots, \Delta t \dots \dots \dots)$

$$h_1 = f(x_i, y_i)$$

$$h_2 = f\left(x_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2} h_1\right)$$

$$h_3 = f\left(x_i + \Delta t, y_i - \Delta t h_1 + 2 \Delta t h_2\right)$$

$$\underline{dy} = y_i + \frac{\Delta t}{6} (h_1 + 4h_2 + h_3)$$

Adams-Bashforth-Verfahren 3. Ordnung

Funktion $\underline{dy} = \text{AB3}(\Delta t, f_{-2}, f_{-1}, f)$

$$\underline{dy} = \Delta t \left(\frac{23}{24} f - \frac{9}{3} f_{-1} + \frac{5}{2} f_{-2} \right)$$

Im Folgenden wird das AWP (1) zu einem Randwertproblem (RWP) umformuliert:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y &= 0 \\ y(t_0) = y_0, \quad y(t_{\text{end}}) &= y_{\text{end}} \end{aligned} \tag{3}$$

Das RWP soll nun mit dem linearen Schießverfahren unter Verwendung des obigen AWP-Lösers gelöst werden. Für $y'(t_0)$ sollen als initiale Schätzung die beliebigen Werte $y_0^{(1)}$ und $y_0^{(2)}$ angenommen werden.

- d)** *(2.5 Punkte) Setzen Sie das lineare Schießverfahren im unten stehenden Struktogramm um. Rufen Sie dabei die Funktion AWPLÖSER aus Aufgabenteil c) auf und achten Sie auf die korrekte Wahl der Funktionsparameter.

Hinweis: Vervollständigen Sie das Struktogramm direkt auf dem Aufgabenblatt. Nicht alle Zeilen müssen dabei zwingend ausgefüllt werden.

Lineares Schießverfahren

Eingabe: $y_0, y_{\text{end}}, t_0, t_{\text{end}}, N$
--

Definiere $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}$

$y_{\text{Feld}}^{(1)} = \text{AWP-Löser}(y_0, y_0^{(1)}, t_0, t_{\text{end}}, N)$
--

$y_{\text{Feld}}^{(2)} = \text{AWP-Löser}(y_0, y_0^{(2)}, t_0, t_{\text{end}}, N)$
--

$K_1 = \frac{y_{\text{Feld}}^{(2)}(t_{\text{end}}) - y_{\text{end}}}{y_{\text{Feld}}^{(2)}(t_0) - y_{\text{Feld}}^{(1)}(t_0)}$
--

$K_2 = 1 - k_1$

$y(t) = k_1 \cdot y_{\text{Feld}}^{(1)}(t) + k_2 \cdot y_{\text{Feld}}^{(2)}(t)$
--

Ausgabe: Zeichne Näherungslösung $y(t)$

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 2 (14.5 Punkte)

- Die mit Stern (*) gekennzeichneten Teilaufgaben lassen sich **unabhängig** von den vorhergehenden Teilaufgaben lösen.
- Bearbeiten Sie die nachfolgenden Teilaufgaben auf einem **separaten Blatt**, beschriftet mit Name und Matrikelnummer!
- Füllen Sie außerdem die **Lösungsfelder** auf diesem Aufgabenblatt aus!

Das lineare Randwertproblem (RWP)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y'' + y &= \frac{1}{2}(x^2 - x + 1) \\ y(0) = 0, \quad y(2) &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

soll im Intervall $[0, 2]$ unter Verwendung des Galerkin-Verfahrens gelöst werden. Dabei wird die Lösung $y(x)$ zunächst durch eine Linearkombination von N globalen Basisfunktionen $\phi(x)$ approximiert:

$$y(x) \approx y_h = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i \phi_i(x). \tag{5}$$

- a) *(2.0 Punkte) Leiten Sie zunächst die schwache Formulierung der Differenzialgleichung (4) unter Verwendung einer allgemeinen Testfunktion $\psi(x)$ her.
- b) (3.5 Punkte) Wenden Sie das Galerkin-Verfahren auf Ihre Gleichung aus Aufgabenteil a) an. Setzen Sie dafür den Ansatz y_h für Ihre Näherungslösung ein. Welche Forderung stellt das Galerkin-Verfahren an die Wahl der Testfunktionen? Schreiben Sie die resultierende Gleichung in Matrix-Vektor Schreibweise und benennen Sie die Terme.
- c) *(2.5 Punkte) Als Basisfunktionen sollen nun Lagrange-Polynome für die $N = 3$ Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ verwendet werden. Geben Sie die Polynome ϕ_1 , ϕ_2 und ϕ_3 für die drei Stützstellen an. Welche besondere Eigenschaft haben Lagrange-Polynome?
- d) (1.5 Punkte) Die analytische Lösung der PDE lautet $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$. Vergleichen Sie die analytische Lösung mit den Basisfunktionen aus Teilaufgabe c). Geben Sie die Koeffizienten \hat{y}_1 , \hat{y}_2 und \hat{y}_3 an, für die die Näherungslösung der analytischen Lösung entspricht.

Nachdem die DGL mit einem globalen Galerkin-Verfahren gelöst wurde, soll nun ein Finite-Elemente-Verfahren verwendet werden. Die Lösung $y(x)$ wird wieder mit dem Ansatz $y(x) \approx y_h = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i \phi_i(x)$ approximiert, wobei $\phi_i(x)$ jetzt die Hutfunktionen bezeichnen.

Auf einem äquidistanten Gitter mit Schrittweite h sind die Hutfunktionen definiert im Intervall $[x_i, x_{i+1}] \equiv [x_i, x_i + h]$ als

$$\phi_i(x) = 1 - \frac{x - x_i}{h} \quad (6a)$$

$$\phi_{i+1}(x) = 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} = \frac{x - x_i}{h} \quad (6b)$$

- e) *(3.0 Punkte) Es soll nun die elementlokale Massematrizen aufgestellt werden:

$$\underline{\underline{M}}^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_l(x) \phi_m(x) dx \quad (7)$$

Ergänzen Sie die fehlenden Diagonaleinträge. Nutzen Sie dabei die Beziehung $x_{i+1} = x_i + h$.

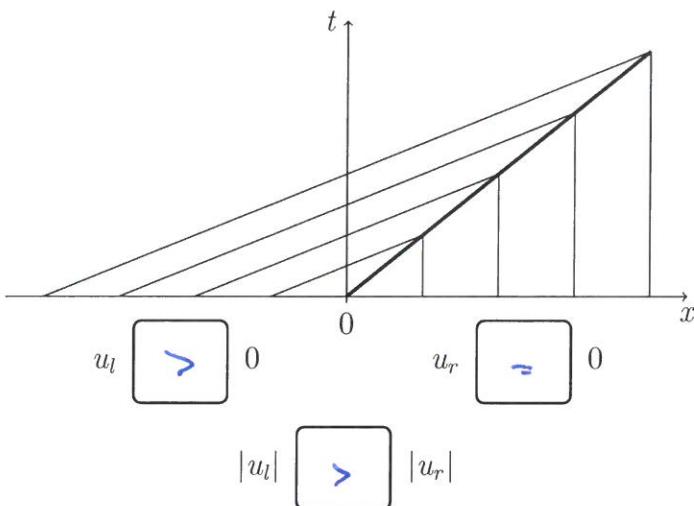
$$\underline{\underline{M}}^{(i)} = h \begin{bmatrix} & \begin{matrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \frac{1}{3} & \end{matrix} & \frac{1}{6} & \\ & \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} & \end{bmatrix}$$

- f) *(2.0 Punkte) Das obige Randwertproblem kann nun mit zwei Verfahren gelöst werden: mit dem *globalen Galerkin-Verfahren* oder dem *Finite-Elemente-Verfahren*. Welches Verfahren liefert im vorliegenden Fall das genauere Ergebnis? Wie würde sich der Fehler des Finite-Elemente-Verfahrens mit quadratischen Basisfunktionen anstelle der Hutfunktionen verhalten?

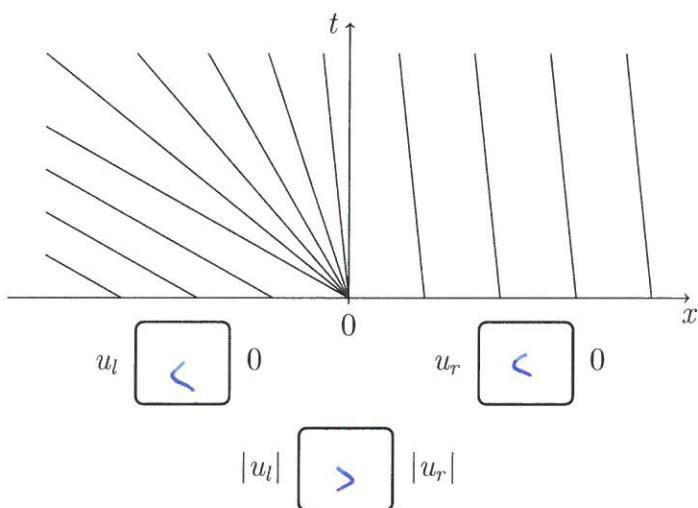
Name:

Matrikelnummer:

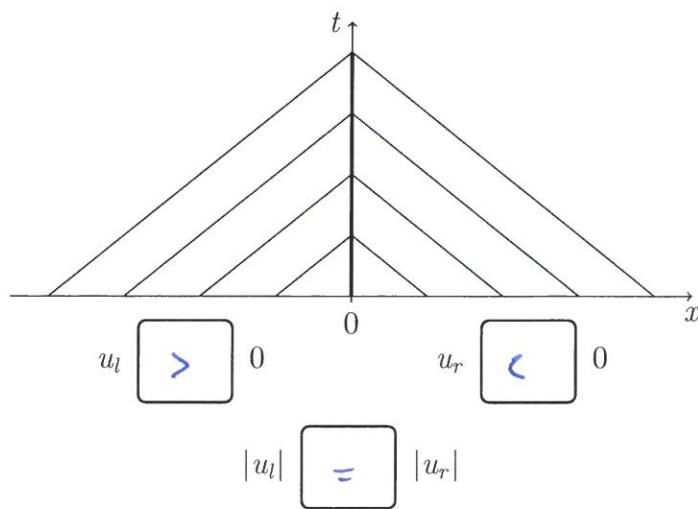
1)



2)



3)



Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 1 (16.5 Punkte)

- Die mit Stern (*) gekennzeichneten Teilaufgaben lassen sich **unabhängig** von den vorhergehenden Teilaufgaben lösen.
- Bearbeiten Sie die nachfolgenden Teilaufgaben auf einem **separaten Blatt**, beschriftet mit Name und Matrikelnummer!
- Füllen Sie außerdem die **Lösungsfelder** auf diesem Aufgabenblatt aus!

Die Lotka-Volterra Gleichungen

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_1(t) [\epsilon_1 - \gamma_1 y_2(t)], \quad (1a)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -y_2(t) [\epsilon_2 - \gamma_2 y_1(t)], \quad (1b)$$

beschreiben die Populationsdynamik zwischen einer Jäger- und einer Beutespezies durch ein gekoppeltes nichtlineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGL). Die Variablen und Koeffizienten sind wie folgt definiert:

- | | |
|------------------|--|
| $y_1(t) > 0$ | Anzahl der Beutespezies |
| $y_2(t) > 0$ | Anzahl der Jägerspezies |
| $\epsilon_1 > 0$ | Reproduktionsrate der Beutespezies |
| $\epsilon_2 > 0$ | Sterberate der Jägerspezies |
| $\gamma_1 > 0$ | Sterberate der Beutespezies pro Jäger |
| $\gamma_2 > 0$ | Reproduktionsrate der Jägerspezies pro Beute |

Im Folgenden soll nun ein Anfangswertproblem (AWP) der Form

$$\underline{\dot{y}} = \underline{f}(t, \underline{y}), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{mit } t \in [t_0, t_{\text{end}}] \quad (2)$$

gelöst werden.

- a) *(2.0 Punkte) Geben Sie den Lösungsvektor $\underline{y}(t)$ sowie die vektorwertige Funktion der rechten Seite $\underline{f}(t, \underline{y})$ für obiges DGL-System (1a)-(1b) an.
- b) *(2.5 Punkte) Zur numerischen Lösung von AWP (2) wird das Adams-Bashforth-Verfahren 3. Ordnung (AB3) verwendet. Geben Sie die Verfahrensvorschrift für einen Zeitschritt von t_i nach t_{i+1} an mit $(t_{i+1} - t_i) = h$ für alle i . Wie viele Anlauf-Stützstellen benötigt das Verfahren? Wie können diese sinnvoll bestimmt werden?
- c) *(2.5 Punkte) Eine Alternative stellt die Verwendung des Adams-Moulton-Verfahrens 3. Ordnung (AM) dar. Geben Sie die Verfahrensvorschrift für einen Zeitschritt von t_i nach t_{i+1} an mit $(t_{i+1} - t_i) = h$ für alle i . Wie viele Anlauf-Stützstellen benötigt dieses Verfahren? Welchen Unterschied gibt es außerdem zum AB3-Verfahren?

$$\textcircled{1} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \bar{y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ y_2 \end{pmatrix} = f(t, y)$$

~~Zeile 1:~~ $\begin{pmatrix} y_1(t)[E_1 - Y_1 Y_2(t)] \\ -Y_2(t)[E_2 - Y_2 Y_1(t)] \end{pmatrix} \approx f(t, y)$

b) ABV 3. Ordnung: $y_{i+1} = y_i (t_{i+1} - t_i) \left(\frac{23}{24} f(y_i, t_i) - \frac{16}{24} f(y_{i-1}, t_{i-1}) + \frac{5}{24} f(y_{i-2}, t_{i-2}) \right)$

Es werden zwei Stützstellen benötigt, sie müssen mit einem einschrittverfahren mind. dritter Ordnung bestimmt werden.
z.B. Runge-Kutta 3. Ordnung

c) $y_{i+1} = y_i + h \left(-\frac{1}{12} f_{i-1} + \frac{4}{12} f_i + \frac{5}{12} f_{i+1} \right)$

AMV: implizit ; ABV explizit, eine Anfangsstützstelle

d) Siehe Aufgabenblatt

e) Einsetzen Prädiktor in Korrektor:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(y_i) + f(y_i + h \cdot f(y_i)))$$

Einsetzen von $f = -\epsilon y(t)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left(-\epsilon y_i + \underbrace{\epsilon}_{-\epsilon y_i} + \epsilon \cdot (y_i + h \cdot f(y_i)) \right)$$

$$y_{i+1} = y_i \cdot \left(1 + \frac{h}{2} (-\epsilon - \epsilon \cdot (1 + \epsilon \cdot h)) \right)$$

$$y_{i+1} = y_i \cdot \left(1 + \frac{h}{2} (-\epsilon - \epsilon + \epsilon^2 h) \right)$$

$$y_{i+1} = y_i \cdot \underbrace{\left(1 - h\epsilon + h^2 \epsilon^2 / 2 \right)}_{\text{Zeitschrittbedingung}}$$

$$|1 - h\epsilon + h^2 \epsilon^2 / 2| < 1$$

Für maximale Zeitschrittweite nach h auflösen

\textcircled{2} a) $U'' + q U = -1 - x$ Allg. Testfkt., Integ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} U'' \psi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} q U \psi dx = \int_{-\pi}^{\pi} (-1 - x) \psi(x) dx \quad \text{Part. Integr.}$$

$$[U'(x) \psi(x)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} U'(x) \psi'(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} q U(x) \psi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (-1 - x) \psi(x) dx$$

b) Wesentliche Annahme! Testfkt. durchläuft alle Basisfkt.

$$\text{c) } \sum_{i=0}^{N+1} \left[\underset{\text{Randwertmatrix}}{\left(\hat{U}_i'(x) \phi_i'(x) \phi_i(x) \right)_{-\pi}^{\pi}} - \underset{\text{Steifigkeitsmatrix}}{\int_{-\pi}^{\pi} \hat{U}_i'(x) \phi_i'(x) \phi_i'(x) dx} + \underset{\text{Massenmatrix}}{\int_{-\pi}^{\pi} q \hat{U}_i(x) \phi_i(x) \phi_i(x) dx} \right] =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (-1 - x) \phi_j(x) dx \quad \rightarrow \underline{\underline{G}} \underline{\underline{\hat{U}}} - \underline{\underline{\hat{G}}} \underline{\underline{\hat{U}}} + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\hat{U}}} = \underline{\underline{f}} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

d) Hier: $\langle \phi_+, \phi_+ \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_+ \phi_+ dx$
 $= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x) \cdot \cos(\alpha x) dx = \frac{\pi}{\alpha}$

0 für alle Einträge die nicht auf Hauptdiagonalen liegen
 (Orthogonalität der Basisfunktion) Tabelle siehe Blatt.

e) Zerlegung in Elemente, Assemblierung

f) Geometrische Flexibilität

Höhere Genauigkeitsordnung einfacher

Einfachere Anwendung von Randbedingungen

(1)

a) $T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\Gamma \cdot T_{i-1,j} - 2 \cdot T_{ij} + \Gamma \cdot T_{i+1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (\Gamma \cdot T_{i,j-1} - 2 \cdot T_{ij} + \Gamma \cdot T_{i,j+1}) = 0$$

Folge zu

$$T_{i-1,j} - 2 \cdot T_{ij} + T_{i+1,j} + \frac{T_{i,j-1} - 2 \cdot T_{ij} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

b) $\frac{T_{i-1,j}^{(l+1)} - 2 \cdot T_{ij}^{(l+1)} + T_{i+1,j}^{(l+1)}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{(l+1)} - 2 \cdot T_{ij}^{(l+1)} + T_{i,j+1}^{(l+1)}}{\Delta y^2} = 0$

$$\tilde{T}_{ij}^{(l+1)} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left[\frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,j}^{(l+1)} + T_{i-1,j}^{(l+1)}) + \frac{1}{\Delta y^2} (T_{ij+1}^{(l+1)} + T_{ij-1}^{(l+1)}) \right]$$

$$T_{ij}^{(l+1)} = (\Gamma - \omega) \tilde{T}_{ij}^{(l+1)} + \omega (T_{ij}^{(l+1)})$$

$\omega \in (0, 1)$ Unterrelaxation

$\omega = \Gamma$ Gauß-Seidel-Verfahren

$\omega \in (1, 2)$ Überrelaxation

c) $\underline{A} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}, \underline{b}, \underline{x} \in \mathbb{R}^{N^2}$

d) $T_{xx}(x) = 0$

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ Änderung von Partiadiagonale auf tridiagonale Struktur Hier und bei c) nochmal nachfragen!

e) Thomas-Algorithmus erhält weil LGS mit Gauß aufgelöst wird (direktes Verfahren)
 SOR ist iteratives Verfahren \rightarrow nur Approximation der Lösung

f) Linker Rand: Dirichlet : $T(x=0) = T_0 = \bar{T}_0$

$$\text{Rechter Rand: Neumann} : q_b = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta x} \cdot (\lambda)$$

(4)

$$a) \rho_t + (\nu(\rho)\rho)_x = 0$$

$$\text{mit } \nu(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$$

$$\rho_t + \left(\rho v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right)_x = 0$$

$$\alpha(\rho) = \frac{\partial}{\partial x} (\nu(\rho)\rho) \approx$$

$$\rho_t + \alpha(\rho) \rho_x = 0$$

$$\alpha(\rho) = \frac{\partial}{\partial x} (\nu(\rho)\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \quad ?! ?!$$

$$b) \underbrace{\rho_t + (\nu(\rho)\rho)_x}_{f(\rho)} = 0$$

$$f(\rho) = \nu(\rho)\rho = v_{\max} \left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{\max}} \right)$$

Eindimensionale Erhaltungsgleichung bezgl. X und t über

$[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ integriert

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho_t(x, t) dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(\rho(x, t))_x dx dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\rho(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\rho(x_{i-1/2}, t)) dt = 0$$

Jetzt Definition integrierter Mittelwerte

$$\hat{\rho}_i := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, t) dx, \quad f_{i+1/2} := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\rho(x_{i+1/2}, t)) dt$$

→ Evolutionsgleichung integrierter Mittelwerte

$$\hat{\rho}_i^{n+1} := \hat{\rho}_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2})$$

→ Einführung Numerischer Flussfunktion $g_{i+1/2} \approx f_{i+1/2}$

$$\hat{\rho}_i^{n+1} := \hat{\rho}_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{i+1/2} - g_{i-1/2})$$



Gehört eigentlich Seite 4
noch etwas höher

- Rekonstruierte Zellmittlerste $\rho_{i+1/2}$
- Minmod - limitierte Steigungen je FV-Zelle
- Unlimitierte Steigung
- Zellmittlerste ρ_i

□ FV-Zellen

d) Berechnung links- und rechtsseitiger Gradienten

$$d\rho_i^L = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{\Delta x} ; d\rho_i^R = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\Delta x}$$

Limitierung der Steigung durch Minmod

$$d\rho_i = \text{Minmod}(d\rho_i^L, d\rho_i^R)$$

Rekonstruktion unter Erhaltung des Mittelwertes

$$\rho_i^L = \rho_i - d\rho_i \frac{\Delta x}{2}$$

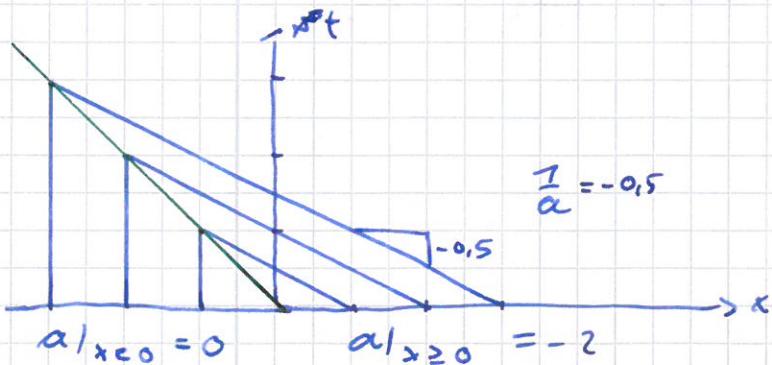
$$\rho_i^R = \rho_i + d\rho_i \frac{\Delta x}{2}$$

Verwendung in numerischen Fluss:

$$g_{i+1/2} = g(\rho_i^R, \rho_{i+1/2}^L)$$

$$g_{i-1/2} = g(\rho_{i-1/2}^R, \rho_i^L)$$

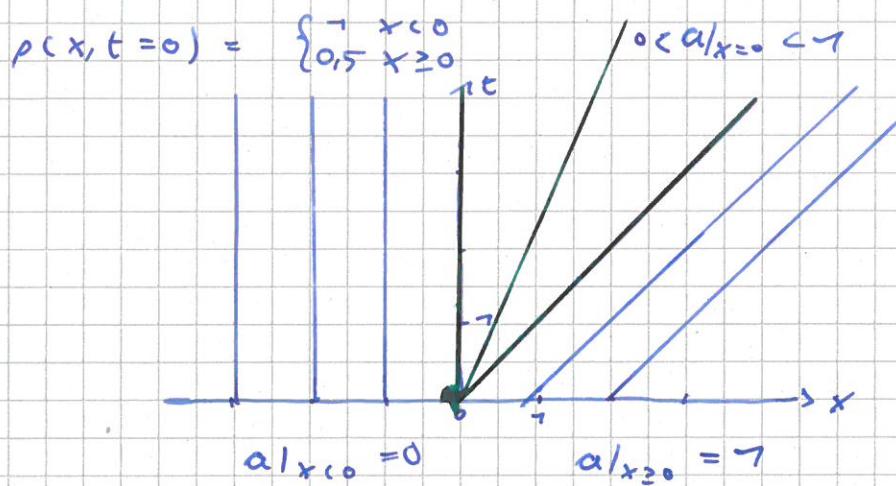
e) $v_{max} = 2$ $\rho_{max} = 2 \rightarrow a(\rho) = 2(1-\rho)$

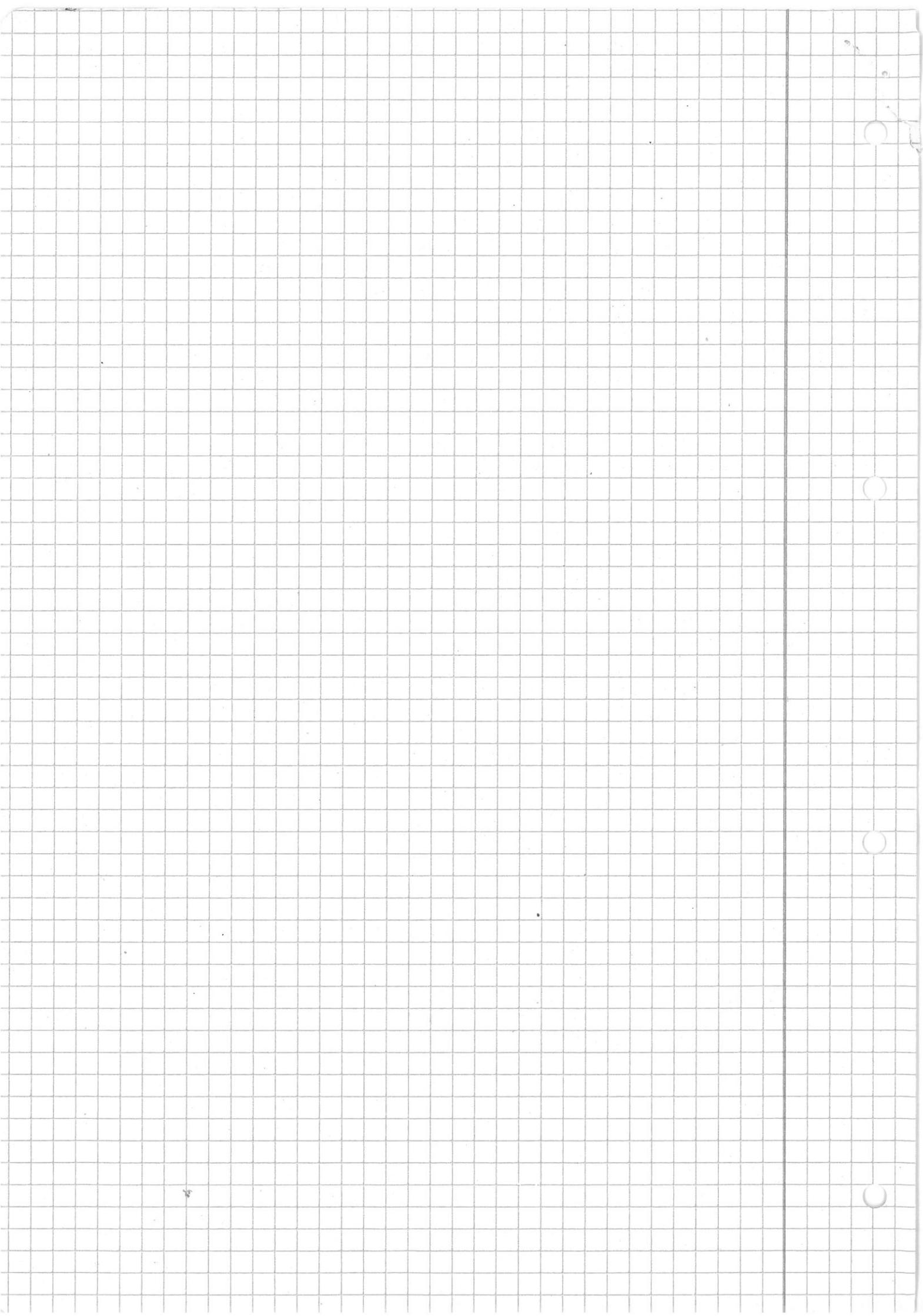


$$\begin{aligned} \rho_L &= 1 \\ \rho_R &= 2 \\ s &= \frac{f(\rho_L) - f(\rho_R)}{\rho_L - \rho_R} \\ a &= f, \Rightarrow f(\rho) = \int a(\rho) d\rho \\ &= -\rho(2 - \frac{\rho - 2}{2}) \\ s &= -1 \end{aligned}$$

s $\neq 0$, keine Verdünnungsquelle

f) Riemann-Problem mit Verdünnungsfächer: $\rho_L > \rho_r$





Name:

Matrikelnummer:

Hinweis: Nutzen Sie dabei die Orthogonalität der Basisfunktionen aus:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

- e) *(1.0 Punkte) Erläutern Sie die zwei wesentlichen Aspekte, um das globale Galerkin-Verfahren durch ein Finite-Elemente-Verfahren zu ersetzen.
- f) *(1.0 Punkte) Welche Vorteile bietet das Finite-Elemente-Verfahren gegenüber dem globalen Galerkin-Verfahren? Nennen Sie zwei Vorteile.

Aufgabe 2 (10.0 Punkte)

- Die mit Stern (*) gekennzeichneten Teilaufgaben lassen sich **unabhängig** von den vorhergehenden Teilaufgaben lösen.
- Bearbeiten Sie die nachfolgenden Teilaufgaben auf einem **separaten Blatt**, beschriftet mit Name und Matrikelnummer!
- Füllen Sie außerdem die **Lösungsfelder** auf diesem Aufgabenblatt aus!

Die eindimensionale Helmholtzgleichung

$$u'' + 9u = 1 - x, \quad u(-\pi) = 0, \quad u(\pi) = 0. \quad (5)$$

soll im Intervall $[-\pi, \pi]$ unter Verwendung des Galerkin-Verfahrens gelöst werden.

~~a)~~ ***(2.0 Punkte)** Leiten Sie zunächst allgemein die schwache Formulierung nach Galerkin der obigen Gleichung her. Verwenden Sie dabei allgemeine Testfunktionen $\psi(x)$.

~~b)~~ ***(1.0 Punkte)** Was ist die wesentliche Annahme des Galerkin-Verfahrens?

Die Lösung $u(x)$ wird nun durch die Linearkombination von drei **globalen** Basisfunktionen ϕ_i approximiert:

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i \phi_i(x). \quad (6)$$

~~c)~~ **(3.0 Punkte)** Wenden Sie das Galerkin-Verfahren auf Ihre schwache Formulierung aus Aufgabenteil a) an, indem Sie obigen Ansatz für die Lösung u_h verwenden. Bringen Sie die resultierende Gleichung in Matrixform und benennen Sie die auftretenden Terme bzw. Matrizen.

~~d)~~ ***(2.0 Punkte)** Wir nehmen an, dass die Massenmatrix folgende Form hat

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} < \phi_1, \phi_1 > & < \phi_1, \phi_2 > & < \phi_1, \phi_3 > \\ < \phi_2, \phi_1 > & < \phi_2, \phi_2 > & < \phi_2, \phi_3 > \\ < \phi_3, \phi_1 > & < \phi_3, \phi_2 > & < \phi_3, \phi_3 > \end{pmatrix} \quad (7)$$

mit $< \phi_i, \phi_j > = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_i \phi_j dx.$

Ferner verwenden wir die Basisfunktionen

$$\phi_1(x) = \cos(x), \quad \phi_2(x) = \cos(2x) \quad \text{und} \quad \phi_3(x) = \cos(3x).$$

Berechnen Sie nun alle Einträge dieser Massenmatrix.

Name:

Matrikelnummer:

(beliebiges) Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung

$$\text{FUNKTION } dy = RK3(\dots, x_i, y_i, h, \dots)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - h k_1 + 2 h k_2)$$

$$dy = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Prädiktor-Korrektor-Verfahren 3. Ordnung (AB3-AM3)

$$\text{FUNKTION } dy = ABAM3(t_i, y_i, h, f_{i-1}, f_{i-2}, f_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{23}{72} f_i - \frac{9}{3} f_{i-1} + \frac{3}{72} f_{i-2} \right)$$

$$dy = \frac{h}{2} (-f_{i-1} + 8f_{i-2} + 5f_{i+1})$$

$$\hookrightarrow f_{i+1} = f(t_i + h, y_{i+1})$$

Wir vereinfachen nun das DGL-System indem wir annehmen, dass es keine Beute mehr gibt, d.h. $y_1(t) = 0 = \text{konst.}$ Dadurch fällt Gl. (1a) weg und Gl. (1b) vereinfacht sich zu

$$y'_2(t) \frac{dy_2(t)}{dt} = -\epsilon_2 y_2(t) \quad f = -\epsilon_2 y_2(t) \quad (3)$$

Diese skalare DGL soll nun mit dem Heun-Verfahren

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(y_i), \text{ Prädiktor} \quad (4a)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(y_i) + f(\tilde{y}_{i+1})]. \text{ Korrektor} \quad (4b)$$

gelöst werden.

- e) *(4.0 Punkte) Führen Sie eine Stabilitätsanalyse durch und formulieren Sie die Bedingung, aus der die maximale Zeitschrittweite abgeleitet werden kann. Letztere muss nicht explizit nach h aufgelöst werden.

- d) *(5.5 Punkte) Zur Lösung von AWP (2) soll nun ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren 3. Ordnung zum Einsatz kommen. Als Prädiktor wird das AB3-Verfahren aus Aufgabenteil b) verwendet, als Korrektor das AM3-Verfahren aus Aufgabenteil c). Vervollständigen Sie das Struktogramm. Dieses besteht aus einem Hauptprogramm und den Funktionen RK3 und ABAM3 (nächste Seite). Achten Sie darauf, dass beim Aufruf der Funktionen RK3 und ABAM3 Werte übergeben werden müssen. Gehen Sie davon aus, dass die Auswertung der Funktion der rechten Seite mittels des Aufrufs $f(t, \underline{y})$ möglich ist.

Beachten Sie: Vervollständigen Sie das Struktogramm direkt auf dem Aufgabenblatt. Nicht alle Zeilen müssen dabei zwingend ausgefüllt werden.

Hauptprogramm

Eingabe: $\underline{y}_0, t_0, t_{\text{end}}, N$	
Speichere t_0, \underline{y}_0	
$h = \frac{t_0 - t_{\text{end}}}{N}$	
$t = t_0$	
$\underline{y} = \underline{y}_0$	
$i := 0$	
solange $i < N$	
$\underline{f}_i = f(t, \underline{y})$	
$i < 2$	
WAHR	FALSCH
$\underline{dy} = RK3(\dots)$	$\underline{dy} = ABAM3(\dots)$
$t = t + h$	
$\underline{y} = \underline{y} + d\underline{y}$	
$i = i + 1$	
Speichere $t_i \leftarrow t, \underline{y}_i \leftarrow \underline{y}$	
Ausgabe: Zeichne Näherungslösung $[t_i, \underline{y}_i]$ mit $i = 0, \dots, N$	

$$\textcircled{1} \quad a) \quad \dot{v} + a_1(t)v^2 + a_2(t) \frac{1}{v^2} = a_0(t)$$

ALP mit $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ mit $t \in [t_0, t_{end}]$

$$\dot{y}(t) = f(t, y)$$

$$y(t) = v(t)$$

$$f(t, y) = a_0(t) - a_1(t)y^2 - a_2(t)\frac{1}{y^2}$$

$$b) \quad (t_{i+1} - t_i) = h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}))$$

Konvergenzordnung 2

c) Konvergenzordnung Heun: 2

Schnenträger ist implizites Verfahren, Heun ist explizit \rightarrow Schrittweiten limitiert, bedingt stabil.

d) Siehe Aufgabenblatt

e) ~~A3c1~~ benötigt drei Anfangsstützstellen, welche zuvor mit ~~A3a~~^{Rk 4} berechnet werden. (Weil Verfahren ~~stetig~~^{4. Ordnung}, benötigt die drei vorliegenden Stützstellen) mit gleicher Konsistenzordnung wie A3a.

Globales Fehlern wird bei EC größer, Konvergenzordnung bleibt gleich.

$$\textcircled{2} \quad y'' + 2y = 3x^2 + 2, \quad y(a) = 1, \quad y(b) = 7 \quad \text{in } [a, b]$$

$$y(x) \approx y_h = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i \phi_i(x)$$

~~a)~~ Multiplikation mit Testfunktion und Integrale:

$$\int_a^b y'' \phi(x) dx + \int_a^b 2y \phi(x) dx = \int_a^b (3x^2 + 2) \phi(x) dx$$

Part. Integration: schwache Formulierung:

$$[y'(x) \phi(x)]_a^b - \int_a^b y(x) \phi'(x) dx + \int_a^b 2y(x) \phi(x) dx = \int_a^b (3x^2 + 2) \phi(x) dx$$

Ansatz für Lösung y_h :

$$\sum_{i=1}^N \left[\hat{y}_i ([\phi'_i(x) \phi_i(x)]_a^b - \int_a^b \phi'_i(x) \phi_i(x) dx) + \int_a^b 2\phi_i(x) \phi_i(x) dx \right] = \int_a^b (3x^2 + 2) \phi(x) dx$$

$\stackrel{!}{=} \quad \stackrel{!}{=} \quad \stackrel{!}{=}$

$$6) \underline{\underline{L}} \underline{\underline{Z}} + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{Z}} + \underline{\underline{G}} \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{f}}$$

Vektoren siehe Aufgabenblatt...

$$c) \int_{-1}^1 (\frac{7}{2}(3x^2 - 7))^2 dx = 98$$

$$\int_{-1}^1 (3x^2 + 2) \cdot 7 dx = 6$$

$$d) y(x) = \frac{1}{2}(7x^2 - 7)$$

$$\phi_1 = 7$$

$$\phi_2 = x$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}(x^2 - 3 - 7)$$

$$-\int_a^b \tilde{f}_1 \phi'_1(x) \phi'_2(x) dx \quad \tilde{f}_1 = 0 \quad \tilde{f}_2 = 0 \quad \tilde{f}_3 = 7 \quad ?/??$$

e) Lösung der ODE mit Gaußlin ist exakt, weil Lösung ein Polynom 2. Grades ist und ein Polynomisches Ansatz 2. Ordnung gewählt wurde.

Mit einem kubischen Polynom verändert sich die Lösung nicht, mit höheren Ansatz ist die Lösung nicht mehr exakt.

f) FE Verfahren ist selbst mit sehr hoher Auflösung nicht exakt \rightarrow neg.
 Mit linearem Ansatz (Hilfsfunktionen)

(2)

$$a) T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y) = q(x,y) \quad (x,y) \in \Omega = [a,b] \times [c,d]$$

Dirichlet-Ränder $T(x,y) = T_0(x,y)$ für $(x,y) \in \partial \Omega$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12\Delta x^2} (-T_{i-2,j} + 2T_{i-1,j} - 2T_{i+1,j} + T_{i+2,j}) + \\ & + \frac{1}{12\Delta y^2} (-T_{i,j-2} + 2T_{i,j-1} - 2T_{i,j+1} + T_{i,j+2}) = q_{ij} \end{aligned}$$

Richtig, aber falsche Zeile in Tabelle! Eigentlich:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12\Delta x^2} (-T_{i-2,j} + 76T_{i-1,j} - 10T_{ij} + 76T_{i+1,j} - T_{i+2,j}) + \\ & + \frac{1}{12\Delta y^2} (-T_{i,j-2} + 76T_{i,j-1} - 30T_{ij} + 76T_{i,j+1} - T_{i,j+2}) = q_{ij} \end{aligned}$$

$$b) \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2} \quad \underline{\underline{I}}, \underline{\underline{q}} \in \mathbb{R}^{N^2}$$

$$h = i + (j-1)N$$

c) 9 Diagonalen

$$A_{ii} = -\frac{10}{12\Delta x^2} - \frac{30}{12\Delta y^2}$$

d) $T_e - \kappa T_{xx} = 0$ Mit $\kappa = \text{konst} > 0$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1})$$

$$T_i^n = U^n e^{i\phi} \quad , \quad l^2 = -1$$

Es handelt sich um ein implizites Verfahren

e) $T_i^{n+1} = U^{n+1} e^{i\phi}$ und $T_{i\pm 1}^{n+1} = U^n e^{i\phi(i\pm 1)}$

Einsetzen:

$$U^{n+1} e^{i\phi} - U^n e^{i\phi} = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (U^{n+1} e^{i\phi(i-1)} - 2U^{n+1} e^{i\phi} + U^{n+1} e^{i\phi(i+1)})$$
 ~~$U^{n+1} e^{i\phi} - U^n e^{i\phi} = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (U^{n+1} e^{i\phi(i-1)} - 2U^{n+1} e^{i\phi} + U^{n+1} e^{i\phi(i+1)})$~~
 ~~$U^{n+1} e^{i\phi} - U^n e^{i\phi} = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (U^{n+1} e^{i\phi(i-1)} - 2U^{n+1} e^{i\phi} + U^{n+1} e^{i\phi(i+1)})$~~

~~Umstellen.~~

$$\begin{aligned} U^{n+1} e^{i\phi} - U^n e^{i\phi} &= \sigma U^{n+1} (e^{i\phi(i-1)} - 2e^{i\phi} + e^{i\phi(i+1)}) \quad | : U^{n+1} \\ -e^{i\phi} + \frac{U^n}{U^{n+1}} e^{i\phi} &= \sigma (e^{i\phi(i-1)} - 2e^{i\phi} + e^{i\phi(i+1)}) \end{aligned}$$

$$\frac{U^n}{U^{n+1}} = -1 + \sigma (e^{-i\phi} - 2 + e^{i\phi})$$

$$\frac{U^{n+1}}{U^n} = \frac{-1}{(e^{-i\phi} - 2 + e^{i\phi}) \sigma}$$

$$\frac{U^{n+1}}{U^n} = \frac{-1}{2(e^{-i\phi} + e^{i\phi}) - 1} \sigma$$

$$\left| \frac{U^{n+1}}{U^n} \right| = \left| \frac{-1}{(2 \cos \phi - 1) \sigma} \right| < 1$$

④ $\frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho(x,t)) = 0$

a) $f(\rho) = \rho v(\rho)$

$$v(\rho) = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{2} \right), \quad V_0 = \text{const}, \quad V_0 > 0$$

$$\rho = \rho_{BCR} \quad \rho = \rho_{BCL}$$

Rankine-Hugoniot - mit $s = \frac{f(\rho_L) - f(\rho_R)}{\rho_L - \rho_R}$
Bedingung

$$\begin{aligned} s &= \frac{\rho_L \cdot V_0 \left(1 - \frac{\rho_L}{2} \right) - \rho_R \cdot V_0 \left(1 - \frac{\rho_R}{2} \right)}{\rho_L - \rho_R} \\ &= -\frac{1}{2} V_0 (\rho_L + \rho_R - 2) \end{aligned}$$

b) Siehe Aufgabenblatt.

c) Zeitschritte mit CFL-Bedingung

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta x}{v_0(1 - \frac{c}{2})} \right)$$

d) Siehe Aufgabenblatt

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Hinweise: Die mit (*) gekennzeichneten Teilaufgaben können unabhängig von den anderen Teilaufgaben gelöst werden. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem eigenem Blatt bzw. Füllen Sie die Struktogrammgerüste auf den Aufgabenblättern aus!

Der Flug eines Flugzeugs in konstanter Höhe lässt sich beschreiben durch die nichtlineare gewöhnliche Differenzialgleichung (DGL)

$$\dot{v} + a_1(t)v^2 + a_2(t)\frac{1}{v^2} = a_0(t). \quad (1)$$

Die Koeffizienten $a_1(t)$ und $a_2(t)$ stammen aus Widerstands- bzw. Auftriebskraft und sind wegen der abnehmenden Flugzeugmasse (Treibstoffverbrauch) zeitabhängig. Der Koeffizient $a_0(t)$ gibt die Schubkraft an und ist entsprechend ebenfalls zeitabhängig.

Im Folgenden soll nun ein Anfangswertproblem (AWP) der Form

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{mit } t \in [t_0, t_{\text{end}}] \quad (2)$$

gelöst werden.

a*) (1 Punkt) Geben Sie die Lösungsvariable $y(t)$ sowie die Funktion der rechten Seite $f(t, y)$ für obige DGL (1) an.

b*) (1 Punkt) Zur numerischen Lösung von AWP (2) wird die Sehnentrapezregel verwendet. Geben Sie die Verfahrensvorschrift für einen Zeitschritt von t_i nach t_{i+1} an mit $(t_{i+1} - t_i) = h$. Welche Konvergenzordnung besitzt das Verfahren?

c) (2 Punkte) In seiner Form der Sehnentrapezregel sehr ähnlich ist das Heun-Verfahren:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \quad \text{mit } \tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

Welche Konvergenzordnung besitzt das Heun-Verfahren? Worin besteht der entscheidende Unterschied zur Sehnentrapezregel und welche Konsequenz hat dies für die Wahl des Zeitschritts?

Name:

Matr.-Nr.:

- (5 Punkte) Zur Lösung von AWP (2) soll nun unten skizziertes Verfahren vierter Ordnung zum Einsatz kommen. Vervollständigen Sie das Struktogramm. Dieses besteht aus einem Hauptprogramm und den Funktionen RK4 und AB4 (nächste Seite). Achten Sie darauf, dass beim Aufruf der Funktionen RK4 und AB4 Werte übergeben werden müssen. Gehen Sie davon aus, dass die Auswertung der Funktion der rechten Seite mittels des Aufrufs $f(t, y)$ möglich ist.

Beachten Sie: Nicht alle Zeilen müssen zwingend ausgefüllt werden.

Hauptprogramm

Eingabe: $y_0, t_0, t_{\text{end}}, N$
Speichere t_0, y_0
$h = \frac{t_{\text{end}} - t_0}{N}$
$y := y_0$
$t := t_0$
$i := 0$
solange $i < N$
$f_i = f(t, y)$ <div style="text-align: center;">$i < 3$</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">WAHR</div> <div style="text-align: center;">FALSCH</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;">$dy = RK4(h, \frac{t}{i}, y, \dots)$</div> <div style="width: 45%;">$dy = AB4(h, f_i, f_{i-1}, f_{i-2}, f_{i-3})$</div> </div>
$y := y + dy$
$t := t_0 + h$
$i := i + 1$
Speichere $t_i \leftarrow t, y_i \leftarrow y$
Ausgabe: Zeichne Näherungslösung $[t_i, y_i]$ mit $i = 0, \dots, N$

Name:

Matr.-Nr.:

klassisches Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung

FUNKTION $dy = RK4(\dots, x_i, y_i, \dots)$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{-\frac{h}{3} k_1 + \frac{2}{3} k_2}{h})$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h(k_1 - k_2 + k_3))$$

$$dy = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3(k_2 + k_3) + k_4)$$

Adams-Bashforth-Verfahren 4. Ordnung

FUNKTION $dy = AB4(\dots, f_i, f_{i-1}, f_{i-2}, f_{i-3}, \dots)$

$$dy = h(\frac{55}{24}f_i - \frac{59}{24}f_{i-1} + \frac{37}{24}f_{i-2} - \frac{9}{24}f_{i-3})$$

- e) (2 Punkte) Wozu dient die dargestellte Fallunterscheidung im Hauptprogramm in Aufgabenteil d)? Welche Konsequenz hätte das Ersetzen des RK4-Verfahrens durch das explizite Euler-Cauchy-Verfahren auf den globalen Fehler und die globale Konvergenzordnung?

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Hinweise: Die mit (*) gekennzeichneten Teilaufgaben können unabhängig von den anderen Teilaufgaben gelöst werden. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem eigenem Blatt bzw. füllen Sie die vorgegebenen Lösungsfelder auf dem Aufgabenblatt aus!

Das lineare Randwertproblem

$$y'' + 2y = 3x^2 + 2, \quad y(a) = 1, \quad y(b) = 1.$$

soll im Intervall $[a, b]$ unter Verwendung des Galerkin-Verfahrens gelöst werden. Die Lösung $y(x)$ wird dabei durch die Linearkombination von N globalen Basisfunktionen ϕ_i approximiert:

$$y(x) \approx y_h = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i \phi_i(x).$$

~~a*)~~ (3,5 Punkte) Leiten Sie zunächst allgemein die schwache Formulierung nach Galerkin der obigen Gleichung her. Setzen Sie dann den Ansatz für die Lösung y_h ein.

~~b*)~~ (3 Punkte) Das so gewonnene Gleichungssystem soll nun in die Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\underline{\underline{S}} \hat{\underline{y}} + \underline{\underline{M}} \hat{\underline{y}} + \underline{\underline{G}} \hat{\underline{y}} = \underline{f}$$

überführt werden. Dabei ist $\underline{\underline{S}}$ die Steifigkeitsmatrix, $\underline{\underline{M}}$ die Massematrice, $\underline{\underline{G}}$ die Randwertmatrix, \underline{f} der Lastvektor und $\hat{\underline{y}} = [\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_N]^T$ der Vektor der unbekannten Freiheitsgrade. Geben Sie für den Fall $N = 3$ an, wie die einzelnen Einträge in $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{M}}$ und \underline{f} lauten (für die spezifische Gleichung, aber für noch allgemeine Basisfunktionen). Verwenden Sie dabei die Schreibweise $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$.

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} -\langle \phi_1', \phi_1' \rangle & -\langle \phi_1', \phi_2' \rangle & -\langle \phi_1', \phi_3' \rangle \\ -\langle \phi_2', \phi_1' \rangle & -\langle \phi_2', \phi_2' \rangle & -\langle \phi_2', \phi_3' \rangle \\ -\langle \phi_3', \phi_1' \rangle & -\langle \phi_3', \phi_2' \rangle & -\langle \phi_3', \phi_3' \rangle \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 2\langle \phi_1, \phi_1 \rangle & 2\langle \phi_1, \phi_2 \rangle & 2\langle \phi_1, \phi_3 \rangle \\ 2\langle \phi_2, \phi_1 \rangle & 2\langle \phi_2, \phi_2 \rangle & 2\langle \phi_2, \phi_3 \rangle \\ 2\langle \phi_3, \phi_1 \rangle & 2\langle \phi_3, \phi_2 \rangle & 2\langle \phi_3, \phi_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \langle (3x^2 + 2), \phi_1 \rangle \\ \langle (3x^2 + 2), \phi_2 \rangle \\ \langle (3x^2 + 2), \phi_3 \rangle \end{pmatrix}$$

Name:	Matr.-Nr.:
-------	------------

- c) (2 Punkte) Es werden nun als Basisfunktionen drei Legendre-Polynome auf dem Intervall $[-1, 1]$ gewählt: $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$ und $\phi_3 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Berechnen Sie den dritten Diagonaleintrag der Massematrice sowie den ersten Eintrag des Lastvektors.

$$M_{3,3} = \boxed{0, 2}$$

$$f_1 = \boxed{6}$$

- d*) (1,5 Punkte) Die analytische Lösung der PDE lautet $y(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Für welche Koeffizienten \hat{y}_i entspricht die Näherungslösung y_h der analytischen Lösung, wenn die Legendre-Basis aus Aufgabe c) verwendet wird.

- e) (2 Punkte) Wie hoch ist der Fehler, der hier bei der Lösung der ODE mit dem Galerkin-Verfahren gemacht wurde? Wie verändert sich der Fehler, wenn anstelle von $N = 3$ mit $N = 2$ oder $N = 4$ Freiheitsgraden gerechnet wird.

Hinweis: gefragt ist eine qualitative Begründung ohne Rechnung

- f) (1 Punkt) Das obige Randwertproblem könnte alternativ mit der FE-Methode auf K äquidistanten Teilintervallen und den Hutfunktionen als Basisfunktionen gelöst werden. Ist es möglich mithilfe der Hutfunktionen als Basisfunktionen und einer Wahl der Auflösung K ein besseres Ergebnis als mit dem hier benutzten Galerkin-Verfahren mit $N = 3$ zu erzielen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Hinweise: Die mit (*) gekennzeichneten Teilaufgaben können unabhängig von den anderen Teilaufgaben gelöst werden. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem eigenem Blatt!

Wir betrachten die zweidimensionale stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = q(x, y) \quad (x, y) \in \Omega = [a, b] \times [c, d] \quad (3)$$

mit Dirichlet-Rändern

$$T(x, y) = T_0(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \partial\Omega.$$

Zur Lösung des Problems soll ein Finite-Differenzen-Verfahren verwendet werden. Dazu wird das Rechengebiet mit N Gitterpunkten je Richtung mit Δx und Δy als resultierenden Schrittweiten diskretisiert.

~~a*)~~ (2 Punkte) Zur Diskretisierung von Gl.(3) sollen zentrale Differenzen vierter Ordnung zum Einsatz kommen. Geben Sie die diskrete Form des Problems an

Im Folgenden soll die diskrete Gleichung aus Aufgabenteil a) in die Matrix-Vektor-Form $\underline{A} \cdot \underline{T} = \underline{q}$ gebracht werden.

~~b*)~~ (1 Punkt) Geben Sie die Dimensionen von \underline{A} , \underline{T} und \underline{q} an. Bringen Sie außerdem die zweidimensionalen Indizes i, j auf einen allgemeinen Index k .

~~c)~~ (1,5 Punkte) Wie viele Diagonale hat die resultierende Matrix \underline{A} ? Geben Sie den Diagonaleintrag A_{kk} an.

Nun wird die Wärmequelle ausgeschaltet und der zeitliche Verlauf der Temperaturänderung entlang der x-Achse betrachtet. Die beschreibende Differentialgleichung mit periodischen Rändern lautet

$$T_t - \kappa T_{xx} = 0 \quad \text{mit } \kappa = \text{const.} > 0.$$

Diese wird nun mit einem Verfahren 1. Ordnung in der Zeit und einer zentralen Differenz 2. Ordnung im Raum diskretisiert. Dabei ergibt sich die diskrete Gleichung

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}). \quad (4)$$

Dieses Verfahren soll nun auf seine Stabilität hin untersucht werden. Dazu soll eine Stabilitätsanalyse nach von Neumann durchgeführt werden.

~~d*)~~ (1,5 Punkte) Geben Sie den Ansatz an, der zu diesem Zweck in die diskrete Gleichung (Gl.(4)) eingesetzt wird. Handelt es sich hierbei um eine implizite oder explizite Zeitdiskretisierung?

~~e)~~ (4 Punkte) Führen Sie nun mit diesem Ansatz eine Stabilitätsanalyse durch. Nutzen Sie die Abkürzung $\sigma = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2}$. Unter welcher Bedingung ist das Verfahren stabil? Hinweis: $\cos \phi = \frac{1}{2}(e^{\phi I} + e^{-\phi I})$

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Hinweise: Die mit (*) gekennzeichneten Teilaufgaben können unabhängig von den anderen Teilaufgaben gelöst werden. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem eigenem Blatt bzw. Füllen Sie die Struktogrammgerüste auf den Aufgabenblättern aus!

Im Folgenden soll das Verhalten der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho(x, t)) = 0 \quad (5)$$

untersucht werden. Dabei ist der Fluss durch

$$f(\rho) = \rho v(\rho) \quad (6)$$

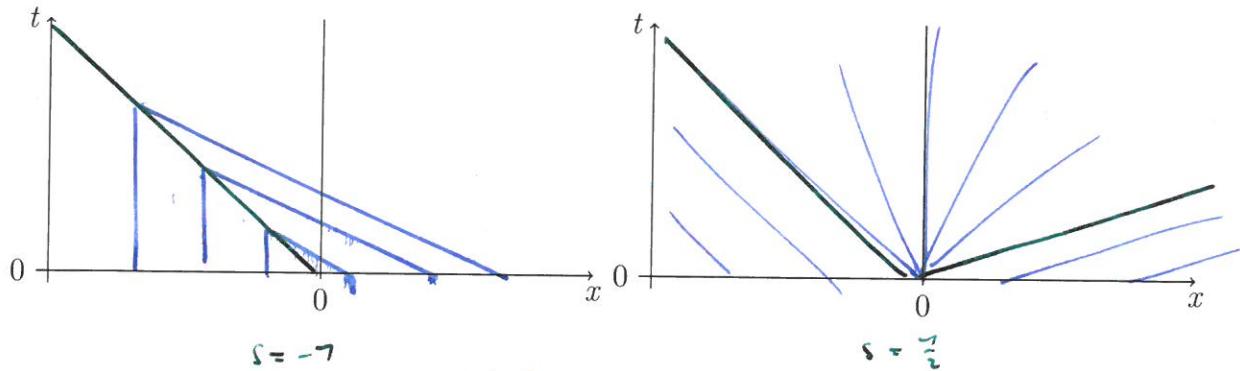
gegeben, wobei v mit

$$v(\rho) = v_0 \left(1 - \frac{\rho}{2}\right), \quad v_0 = \text{const}, v_0 > 0 \quad (7)$$

berechnet werden kann. Die Gleichung soll mittels des Finite-Volumen-Verfahrens gelöst werden. Am rechten und linken Rand gelten die Bedingungen $\rho = \rho_{BC_R}$ bzw. $\rho = \rho_{BC_L}$. Das Rechengebiet soll mit N äquidistanten Teilintervallen der Länge Δx diskretisiert werden.

a*) (2 Punkte) Geben Sie den Namen und die Formel der Bedingung an, mit welcher die Stoßgeschwindigkeit berechnet werden kann und berechnen Sie diese.

b) (2 Punkte) Zeichnen Sie qualitativ die Charakteristiken und eventuelle Stoßbilder für die Anfangsdaten $\rho(x, t = 0) = \rho_L$ für $x \leq 0$, $\rho(x, t = 0) = \rho_R$ für $x > 0$ und $v_0 = 1$.



c) (1 Punkt) Wie muss die Zeitschrittweite gewählt werden? Geben Sie die notwendige Bedingung für die oben betrachtete Gleichung an.

Name:	Matr.-Nr.:
-------	------------

d*) (4 Punkte) Nun soll die Genauigkeit der räumlichen Approximation verbessert werden. Dazu soll eine Rekonstruktion 2. Ordnung verwendet werden. Das FV-Verfahren mit 2. Ordnung im Raum und 1. Ordnung in der Zeit soll dafür in einem Struktogramm umgesetzt werden. Ergänzen Sie dazu die Funktion "FV-O2". Diese soll für jeden Zeitschritt Δt aufgerufen werden können und gibt ρ zum neuen Zeitpunkt zurück.

Die Funktion ist dabei so aufgebaut, dass zunächst der Fluss an jeder Elementgrenze berechnet wird. In einer zweiten Schleife wird dann für jedes FV-Element die Lösung inkrementiert. Nehmen Sie die Routinen zur Berechnung der Flüsse über jeweils die beiden randnächsten Elementgrenzen als gegeben an.

Beachten Sie: Nicht alle Zeilen müssen zwingend ausgefüllt werden.

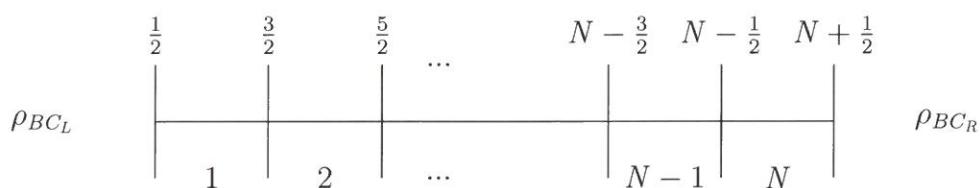


Abbildung 2: Schematischer Überblick über das Rechengebiet. Nummerierung der Elementgrenzen oben und Nummerierung der FV-Elemente unten.

Funktion $\rho = FV_O2(\rho, \Delta x, \Delta t, N, \rho_{BC_L}, \rho_{BC_R}, v_0)$	
Zähle i von 1 bis N	
WAHR	$i < 2$
calc($f_{\frac{1}{2}}$)	WAHR
calc($f_{\frac{3}{2}}$)	calc($f_{N-\frac{1}{2}}$)
\emptyset	calc($f_{N+\frac{1}{2}}$)
FALSCH	
	$i > N - 2$
	FALSCH
	$S_L = \frac{1}{\Delta x} \text{minmod}(\rho_{i+1} - \rho_i, \rho_i - \rho_{i-1})$
	$S_R = \frac{1}{\Delta x} \text{minmod}(\rho_{i+2} - \rho_{i+1}, \rho_{i+1} - \rho_i)$
	$\rho_L = \rho_i + S_L \frac{\Delta x}{2}$
	$\rho_R = \rho_{i+1} - S_R \frac{\Delta x}{2}$
	$f_{i+\frac{1}{2}} = \text{NumericalFlux}(\rho_L, \rho_R)$
Zähle i von 1 bis N	
$\rho_i = \rho_i + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}})$	

① $y'' + 3y' + 4yx = 0$ mit $y(x=a) = a$ und $y'(x=a) = \bar{y}$
in Intervall $[a, b]$

a) $\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m' \end{pmatrix}$

$$\tilde{y}(x=a) = \begin{pmatrix} a \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$f = y' = \begin{pmatrix} m' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3y - 4yx & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$$

Konvergenzordnung 2

c) Siehe Aufgabenblatt

d) $y(x=6) = \beta = y_1(x=6)$

$$|y(x=6) - \beta| \leq C$$

Siehe Aufgabenblatt

(2)

a) $3y'' + y = -10x$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ in $[a, b]$

Multiplication mit Basisfunktion + Integration

$$\int_a^b 3y''(x) \phi(x) dx + \int_a^b y(x) \phi(x) dx = \int_a^b -10x \phi(x) dx$$

Part. Integration

$$[3y'(x) \phi(x)]_a^b - \int_a^b 3y'(x) \phi'(x) dx + \int_a^b y(x) \phi(x) dx = \int_a^b -10x \phi(x) dx$$

$$\text{mit } y_n = \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i \phi_i(x) \approx y(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \left[[\tilde{y}_i \phi'_i(x) \cdot 3 \cdot \phi_j(x)]_a^b - \int_a^b \tilde{y}_i \cdot 3 \cdot \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx + \int_a^b \tilde{y}_i \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right] = \int_a^b -10x \phi_j(x) dx$$

b) $\underline{\underline{y}}_n + \overline{\overline{y}}_n = f$

Siehe Aufgabenblatt

c) $\phi_1 = \sin(x)$, $\phi_2 = \sin(2x)$, $\phi_3 = \sin(3x)$ auf $[0, 2\pi]$

$$M_{11} = \pi$$

$$M_{22} = \pi$$

$$M_{33} = \pi$$

$$f_n = -20\pi$$

d) Basisfunktionen stehen senkrecht aufeinander \rightarrow Nebeneinträge der Massenmatrix sind gleiche Null.

e) Mit der gewählten Ansatzfunktion lassen sich nur homogene Randwerte darstellen, weil die Basisfunktionen alle identisch 0 sind auf dem Rand.

• (3) $U_t + h U_{xx} = 0 \quad h = \text{const.}, h > 0$

a) $x \in [a, b] \quad t \in [t_0, t_{\text{end}}]$

$$U_i^{\ddagger}(x_i, t_i)_{xx} \approx \frac{1}{2h^2} (U_{i-2}^{\ddagger} + 2U_{i-1}^{\ddagger} - 2U_{i+1}^{\ddagger} + U_{i+2}^{\ddagger}) \quad (\text{mit } h = \Delta x)$$

b) $\frac{1}{\Delta t} (-U_i^{\ddagger} + U_{i+1}^{\ddagger}) + h \frac{1}{2\Delta x^2} (-U_{i-2}^{\ddagger} + 2U_{i-1}^{\ddagger} - 2U_{i+1}^{\ddagger} + U_{i+2}^{\ddagger}) = 0$

c) Es ist pentadiagonal

d) $C_i = \frac{1}{\Delta t} - h \frac{30}{\Delta x^2}$

$$d_i = h \frac{76}{\Delta x^2}$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta t} U_i^{\ddagger}$$

e) Ansatz: $U_i^{\ddagger} = U^{\ddagger} e^{i\varphi_i} \quad , \quad i^2 = -1$

f) $G = \frac{1}{2} + i \sigma \cos(2\varphi) \quad ; \quad \sigma = \frac{h \omega t}{\Delta x}$

$$\left| \frac{1}{2} + i \sigma \cos(2\varphi) \right| < 1$$

Reellteile von $\cos(2\varphi)$ variieren von -0,5

Reelle Teile von $\cos^2(2\varphi)$ variieren von 0 bis 1

$\frac{1}{4} + (\sigma \cos(2\varphi))^2 < 1^2$

$$\underbrace{\sigma^2 \cos^2(2\varphi)}_{\leq 1} < \frac{3}{4}$$

$$\sigma^2 < \frac{3}{4}$$

• (4) $\rho(x, t)_t + f(\rho(x, t))_x = 0 \quad (3)$

$$f(\rho) = \rho v(\rho) = v_0 (\rho^2 + \rho) \quad (4)$$

$$v(\rho) = v_0 (\rho + 1) \quad v_0 = \text{const.}, v_0 > 0$$

a) Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\begin{aligned} s &= \frac{f(p_r) - f(p_l)}{p_r - p_l} \\ &= \frac{((p_r^2 + p_r) - (p_l^2 + p_l)) \cdot v_0}{p_r - p_l} \\ &= (p_l + p_r + 1) \cdot v_0 \end{aligned}$$

b) ~~Stokesatzprinzip~~ $f(u) \rightarrow v_0(\rho^2 + \rho)$

$$f'(u) = 2v_0 > 0 \rightarrow \text{konvex}$$

Stoß bei $v_L > v_r$; $v_0 = 7$

$$f(u) = 2v_0 \cdot u = \alpha(u)$$

$$\nabla \alpha(\rho) = 2v_0 \rho + v_0$$

$$\alpha(p_r) = -6, -3 \quad \alpha(p_L) = 3$$

$$\alpha(4) = 8,5 \quad \alpha(p_L) = 8,2$$

Zeichnung: siehe Aufgabeblatt

c) $r(t, t)_{\dot{x}} + f(\rho(x, t))_x = 0$

$$I_i = [x_{i-\frac{\Delta}{2}}, x_{i+\frac{\Delta}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$$

Integration

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{\Delta}{2}}}^{x_{i+\frac{\Delta}{2}}} \rho(x, t)_{\dot{x}} dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{\Delta}{2}}}^{x_{i+\frac{\Delta}{2}}} f(\rho(x, t))_x dx dt = 0$$

$$\int_{x_{i-\frac{\Delta}{2}}}^{x_{i+\frac{\Delta}{2}}} \rho(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{i-\frac{\Delta}{2}}}^{x_{i+\frac{\Delta}{2}}} \rho(x, t_n) dx +$$

$$+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\rho(x_{i+\frac{\Delta}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\rho(x_{i-\frac{\Delta}{2}}, t)) dt = 0$$

Mit Abkürzungen

$$U_i^n := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{\Delta}{2}}}^{x_{i+\frac{\Delta}{2}}} \rho(x, t) dx, \quad f_{i+\frac{\Delta}{2}} := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\rho(x_{i+\frac{\Delta}{2}}, t)) dt$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+\frac{\Delta}{2}} - f_{i-\frac{\Delta}{2}})$$

\hookrightarrow Es ergibt sich das finite Volume Verfahren

d) Siehe Aufgabeblatt

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Hinweise: Die mit (*) gekennzeichneten Teilaufgaben können unabhängig von den anderen Teilaufgaben gelöst werden.

Im Folgenden soll das Verhalten der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho(x, t)) = 0 \quad (3)$$

untersucht werden. Dabei ist der Fluss durch

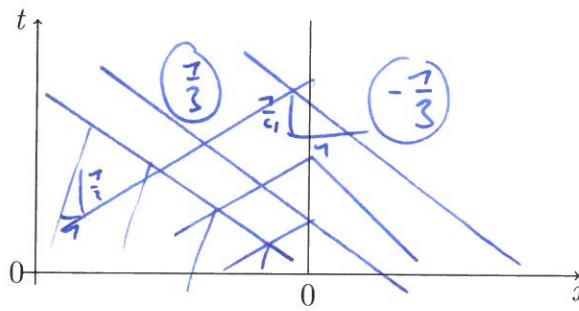
$$f(\rho) = \rho v(\rho) \quad (4)$$

gegeben, wobei v mit

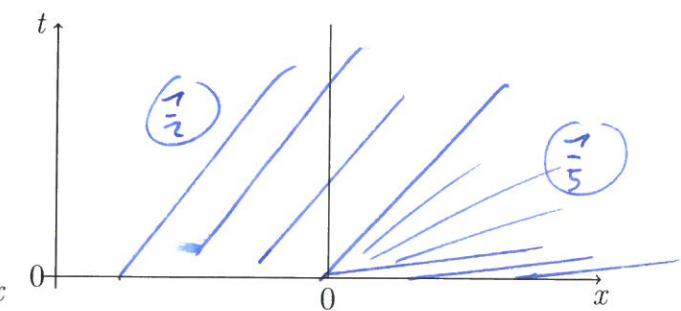
$$v(\rho) = v_0 (\rho + 1), \quad v_0 = \text{const}, v_0 > 0 \quad (5)$$

berechnet werden kann.

- ~~a*)~~ (2 Punkte) Geben Sie den Namen und die Formel der Bedingung an, mit welcher die Stoßgeschwindigkeit berechnet werden kann und berechnen Sie diese.
- ~~b*)~~ (3 Punkte) Wir betrachten das Riemannproblem für die Gleichung (3). Geben Sie die Bedingung an ρ an, unter der ein Stoß entsteht und berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit $a(\rho)$. Zeichnen Sie für die gegebenen Anfangsdaten die Charakteristiken qualitativ ein, gehen Sie dabei von $v_0 = 1$ aus.

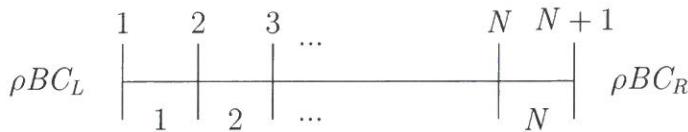


$$\rho_L = 1, \rho_R = -2$$



$$\rho_L = 0.5, \rho_R = 2$$

Nun soll die Gleichung mittels des Finite-Volumen-Verfahrens 1. Ordnung gelöst werden. Am rechten und linken Rand gelten die Bedingungen ρBC_R bzw. ρBC_L . Das Rechengebiet soll mit N äquidistanten Teilintervallen der Länge dx diskretisiert werden.



c*) (2 Punkte) Leiten Sie zunächst das Finite Volumen Verfahren her, indem Sie Gl. (3) mit dem Fluss aus Gl. (4) über das Kontrollvolumen C_i auf dem Intervall $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ und über einen Zeitschritt $[t_n, t_{n+1}]$ integrieren. Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannten Schreibweisen ρ_i^n für den integralen Mittelwert im Kontrollvolumen C_i zum Zeitpunkt n und $g_{i+1/2}^n$ für den numerischen Fluss über die Zellkante $x_{i+1/2}$.

d) (4 Punkte) Ergänzen Sie das Struktogramm für die Funktion "FV_O1". Diese soll für jeden Zeitschritt dt aufgerufen werden können und gibt ρ zum neuen Zeitpunkt zurück. Der Zellmittelwert zum neuen Zeitpunkt wird dann zunächst in einem temporären Vektor ρ_{temp} gespeichert. Nehmen Sie die Funktion "NumericalFlux" als gegeben an.

Beachten Sie: Nicht alle Zeilen müssen zwingend ausgefüllt werden.

Funktion $\rho = FV_O1(\rho, dx, dt, N, \rho BC_L, \rho BC_R, v_0)$		
Zähle i von 1 bis N		
ja	$i = 1$	nein
$\rho_{L0} = \rho BC_L$	$\rho_{L0} = \rho(i-1)$	$\rho_{L0} = \rho(i-1)$
$\rho_{R0} = \rho(i+1)$	$\rho_{R0} = \rho BC_R$	$\rho_{R0} = \rho(i+1)$
	\emptyset	
$f_L = \text{NumericalFlux}(\rho_{L0}, \rho(i), v_0)$		
$f_R = \text{NumericalFlux}(\rho_{R0}, \rho(i), v_0)$		
$\rho_{temp}(i) = \rho(i) - \frac{\Delta x}{\Delta t} (f_R - f_L)$		
to do		
$\rho = \rho_{temp}$		

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Hinweise: Die mit (*) gekennzeichneten Teilaufgaben können unabhängig von den anderen Teilaufgaben gelöst werden. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem eigenem Blatt bzw. Füllen Sie die Struktogrammgerüste auf den Aufgabenblättern aus!

Das Anfangswertproblem

$$\eta'' + 3\eta + 4\eta x = 0 \quad \text{mit} \quad \eta(x=a) = \alpha \quad \text{und} \quad \eta'(x=a) = \Gamma$$

soll im Intervall $[a, b]$ gelöst werden.

- ~~a*)~~ (2 Punkte) Zunächst soll das Anfangswertproblem in ein System 1. Ordnung der Form $\underline{y}'(x) = \underline{f}(x, \underline{y}(x))$ überführt werden. Geben sie für den Lösungsvektor

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}$$

die Anfangsbedingungen und den Vektor \underline{f} an.

- ~~b*)~~ (1 Punkt) Das Anfangswertproblem soll nun mittels des Verfahrens von Heun gelöst werden. Geben Sie die Verfahrensvorschrift für den Schritt von x_i auf x_{i+1} an. Welche Ordnung besitzt das Verfahren?

- ~~c)~~ (4 Punkte) Ergänzen Sie die Struktogramme zur Lösung des Anfangswertproblems mittels des Verfahrens von Heun. Dabei werden die Intervallgrenzen $x_1 = a$ und $x_N = b$, die Anfangsbedingungen α und Γ und die Anzahl der Stützstellen N der Funktion *AWP_Loeser* von außen übergeben. Gehen Sie davon aus, dass die Funktion *RHS*(x, y) die korrekte Funktionsauswertung von f zurück gibt.

- ~~d*)~~ (4 Punkte) Die Anfangsbedingung $\eta'(x=a) = \Gamma$ sei nun unbekannt. Am rechten Rand des Rechengebiets gilt nun $\eta(x=b) = \beta$. Dieses Randwertproblem soll mittels eines Schießverfahrens gelöst werden, dabei soll ein Bisektionsverfahren so lange ausgeführt werden bis für den errechneten Wert $\eta(x=b) = y_1(x=b)$ die Bedingung $|\eta(x=b) - \beta| \leq \epsilon$ gilt. Zur Lösung der sich ergebenden Anfangswertprobleme soll die Funktion *AWP_Loeser* verwendet werden. Ergänzen Sie hierzu die Funktion *Schiessverfahren* im Struktogramm.

Hinweise: Variablen müssen nicht deklariert (Formatzuweisung), aber initialisiert (Wertzuweisung) werden! Es müssen nicht alle Zeilen verwendet werden! Struktogrammgerüst auf der Rückseite und nächster Seite!

Struktogrammgerüst 1: Anfangswertproblemlöser mit Verfahren von Heun

```

function [yFeld] = AWP_Loeser(x1, xN, alpha, Gamma, N)
    h =  $\frac{x_n - x_1}{N-1}$ 
    %% ZEITSPANNEN
    %% x = x1
    %% ZEITINTERVALL
    %% RECHNSCHLEIFE
    for i = 1:N-1
        dy = Heun(y, x, h)
        y = y + dy
        x = x + h
    end
    %% Schreibe Lösung in Feld
    Gebe Feldlösung zurück

```

```

function [dy] = Heun(y, x, h)
    ya = y + h * RHS(t, y)
    dy = y +  $\frac{h}{2} (\text{RHS}(t, y) + \text{RHS}(t+h, ya))$ 
    return dy

```

Name:

Matr.-Nr.:

Struktogrammgerüst 2: Randwertproblemlöser mittels Schießverfahren

function Schiessverfahren()	
Eingabe: $\alpha, \beta, a, b, N, \epsilon$	
Eingabe: Γ_1, Γ_2	
$\Gamma_{\text{start}} = \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$	
$y_{\text{start}} = \text{AWP_Loeser}(a, b, \alpha, \Gamma_{\text{start}}, N)$	
$\eta_b = y_{\text{start}}(1, N)$	
while $ \eta_b - \beta > \epsilon$	
$y_{\Gamma_1} = \text{AWP-Löser}(\alpha, b, \alpha, \Gamma_1, N)$ $y_{\Gamma_2} = \text{AWP-Löser}(\alpha, b, \alpha, \Gamma_2, N)$ $(y_{\Gamma_1}(1, N) - \beta) \cdot (y_{\Gamma_2}(1, N) - \beta) < 0$	
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> Ja Nein </div>	
$\Gamma_{\text{neu}} = \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ $y_{\text{neu}} = \text{AWP-Löser}(\alpha, b, \alpha, \Gamma_{\text{neu}}, N)$	
$\eta_b = y_{\text{neu}}(1, N)$ $(y_{\Gamma_1}(1, N) - \beta) \cdot (\eta_b - \beta) < 0$	
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> Ja Nein </div>	
$\Gamma_2 = \Gamma_{\text{neu}}$ $\Gamma_1 = \Gamma_{\text{neu}}$	
Rückgabe von y_{neu}	

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Hinweise: Die mit (*) gekennzeichneten Teilaufgaben können unabhängig von den anderen Teilaufgaben gelöst werden. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem eigenem Blatt bzw. Füllen Sie die vorgegebenen Lösungsfelder auf dem Aufgabenblatt aus!

Das lineare Randwertproblem

$$3y'' + y = 10x, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

soll im Intervall $[a, b]$ unter Verwendung des Galerkin-Verfahrens gelöst werden. Die Lösung $y(x)$ wird dabei durch N globale Basisfunktionen ϕ_i approximiert:

$$y(x) \approx y_h = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i \phi_i(x).$$

a*) (3 Punkte) Leiten Sie zunächst allgemein die schwache Formulierung nach Galerkin der obigen Gleichung her. Setzen Sie dabei den Ansatz für die Lösung y_h ein.

b*) (3 Punkte) Das so gewonnene Gleichungssystem soll nun in die Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\underline{\underline{S}} \underline{\underline{y}}_h + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{y}}_h = \underline{f}$$

überführt werden. Dabei ist $\underline{\underline{S}}$ die Steifigkeitsmatrix, $\underline{\underline{M}}$ die Massenmatrix, \underline{f} der Lastvektor und $\underline{\underline{y}}_h = [\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_N]^T$ der Vektor der unbekannten Freiheitsgrade. Geben Sie für den Fall $N = 3$ an, wie die einzelnen Einträge in $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{M}}$ und \underline{f} lauten (für die spezifische Gleichung, aber für noch allgemeine Basisfunktionen). Verwenden Sie dabei die Schreibweise $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$.

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} -3\langle \phi_1', \phi_1' \rangle & -3\langle \phi_1', \phi_2' \rangle & -3\langle \phi_1', \phi_3' \rangle \\ -3\langle \phi_2', \phi_1' \rangle & -3\langle \phi_2', \phi_2' \rangle & -3\langle \phi_2', \phi_3' \rangle \\ -3\langle \phi_3', \phi_1' \rangle & -3\langle \phi_3', \phi_2' \rangle & -3\langle \phi_3', \phi_3' \rangle \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \langle \phi_1, \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \langle \phi_2, \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_3, \phi_1 \rangle & \langle \phi_3, \phi_2 \rangle & \langle \phi_3, \phi_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \langle 10x, \phi_1 \rangle \\ \langle 10x, \phi_2 \rangle \\ \langle 10x, \phi_3 \rangle \end{pmatrix}$$

- e) (4 Punkte) Es werden nun als Basisfunktionen drei trigonometrische Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ gewählt: $\phi_1 = \sin(x)$, $\phi_2 = \sin(2x)$ und $\phi_3 = \sin(3x)$. Berechnen Sie die Diagonaleinträge der Massmatrix sowie den ersten Eintrag des Lastvektors. Hinweis: Es gilt $\sin(r) * \sin(s) = \frac{1}{2}(\cos(r-s) - \cos(r+s))$.

$$M_{1,1} = \boxed{\pi}$$

$$M_{2,2} = \boxed{\pi}$$

$$M_{3,3} = \boxed{\pi}$$

$$f_1 = \boxed{-20\pi}$$

- d*) (1 Punkt) Aufgrund welcher Eigenschaft der Basisfunktionen lassen sich die Nebeneinträge der Massmatrix schnell bestimmen? Wie lauten diese Einträge?

- e*) (1 Punkt) Lassen sich mit der gewählten Ansatzfunktion auch noch inhomogene Randwerte darstellen? Begründung!

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Hinweise: Die mit (*) gekennzeichneten Teilaufgaben können unabhängig von den anderen Teilaufgaben gelöst werden. Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem eigenem Blatt bzw. Füllen Sie die vorgegebenen Lösungsfelder auf dem Aufgabenblatt aus!

Das lineare Randwertproblem

$$3y'' + y = 10x, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

soll im Intervall $[a, b]$ unter Verwendung des Galerkin-Verfahrens gelöst werden. Die Lösung $y(x)$ wird dabei durch N globale Basisfunktionen ϕ_i approximiert:

$$y(x) \approx y_h = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i \phi_i(x).$$

a*) (3 Punkte) Leiten Sie zunächst allgemein die schwache Formulierung nach Galerkin der obigen Gleichung her. Setzen Sie dabei den Ansatz für die Lösung y_h ein.

b*) (3 Punkte) Das so gewonnene Gleichungssystem soll nun in die Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\underline{\underline{S}} \underline{y}_h + \underline{\underline{M}} \underline{y}_h = \underline{f}$$

überführt werden. Dabei ist $\underline{\underline{S}}$ die Steifigkeitsmatrix, $\underline{\underline{M}}$ die Massenmatrix, \underline{f} der Lastvektor und $\underline{y}_h = [\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_N]^T$ der Vektor der unbekannten Freiheitsgrade. Geben Sie für den Fall $N = 3$ an, wie die einzelnen Einträge in $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{M}}$ und \underline{f} lauten (für die spezifische Gleichung, aber für noch allgemeine Basisfunktionen). Verwenden Sie dabei die Schreibweise $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$.

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} -3\langle \phi_1', \phi_1' \rangle & -3\langle \phi_1', \phi_2' \rangle & -3\langle \phi_1', \phi_3' \rangle \\ -3\langle \phi_2', \phi_1' \rangle & -3\langle \phi_2', \phi_2' \rangle & -3\langle \phi_2', \phi_3' \rangle \\ -3\langle \phi_3', \phi_1' \rangle & -3\langle \phi_3', \phi_2' \rangle & -3\langle \phi_3', \phi_3' \rangle \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \langle \phi_1, \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \langle \phi_2, \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_3, \phi_1 \rangle & \langle \phi_3, \phi_2 \rangle & \langle \phi_3, \phi_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \langle 10x, \phi_1 \rangle \\ \langle 10x, \phi_2 \rangle \\ \langle 10x, \phi_3 \rangle \end{pmatrix}$$

- e) (4 Punkte) Es werden nun als Basisfunktionen drei trigonometrische Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ gewählt: $\phi_1 = \sin(x)$, $\phi_2 = \sin(2x)$ und $\phi_3 = \sin(3x)$. Berechnen Sie die Diagonaleinträge der Massematrice sowie den ersten Eintrag des Lastvektors. Hinweis: Es gilt $\sin(r) * \sin(s) = \frac{1}{2}(\cos(r-s) - \cos(r+s))$.

$$M_{1,1} = \boxed{\pi}$$

$$M_{2,2} = \boxed{\pi}$$

$$M_{3,3} = \boxed{\pi}$$

$$f_1 = \boxed{-20\pi}$$

- d*) (1 Punkt) Aufgrund welcher Eigenschaft der Basisfunktionen lassen sich die Nebeneinträge der Massematrice schnell bestimmen? Wie lauten diese Einträge?

- e*) (1 Punkt) Lassen sich mit der gewählten Ansatzfunktion auch noch inhomogene Randwerte darstellen? Begründung!