

Algebra I – Prof. Christian Urech

Mitschrift: Franz Nowak

Herbstsemester 2025

Vorlesung 1

Definition 1. Eine **Gruppe** ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*: G \rightarrow G, (g, h) \rightarrow g * h$, sodass:

- (1) (Assoziativität) $\forall g, h, k \in G: (g * h) * k = g * (h * k)$
- (2) (Neutrales Element) $\exists e \in G: g * e = e * g = g \quad \forall g \in G$
- (3) (Inverses Element) $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G$ s.d. $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

Eine Gruppe ist **abelsch** (kommutativ), wenn $\forall g, h \in G, g * h = h * g$.

Wir schreiben oft 1 oder 1_G für e und gg' für $g * g'$ mit $g, g' \in G$. Wenn G kommutativ ist, dann schreiben wir $e = 0$ und $a + b$ für $a * b$. Des Weiteren sind $a^n := \overbrace{a \cdots a}^{\text{n-mal}}$ und $a^0 := 1$.

Bemerkung 1. Wenn G assoziativ ist, dann ist $g_1 g_2 \cdots g_n$ eindeutig definiert (für $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$).

Satz 1. (a) Das neutrale Element ist eindeutig.

(b) Das Inverse von jedem Element ist eindeutig.

Beweis: (a) Seien $e, e' \in G$ neutrale Elemente. Dann ist $e = ee' = e'$.

(b) Seien \bar{g}, g^{-1} Inverse von $g \in G$. Dann ist $\bar{g} = \bar{g}e = \bar{g}gg^{-1} = eg^{-1} = g^{-1}$.

□

Satz 2. Seien G eine Gruppe und $a, b, c \in G$, sodass $ab = ac$. Dann ist $b = c$.

Beweis:

$$ab = ac \implies \underbrace{a^{-1}a}_{e} b = \underbrace{a^{-1}a}_{e} c \implies b = c$$

□

Beispiele

- Ganze Zahlen mit Addition, $(\mathbb{Z}, +)$ oder \mathbb{Z}^+
- Reelle Zahlen mit Addition, $(\mathbb{R}, +)$ oder \mathbb{R}^+
- Körper K mit Addition, $(K, +)$ oder K^+ . (Bemerkung: Keine Gruppe mit Multiplikation, wenn 0 enthalten ist.)
- Vektorraum V mit Addition, $(V, +)$ oder V^+ .
- Allgemeine lineare Gruppe, $GL_n(K)$
- Spezielle lineare Gruppe, $SL_n(K) := \{A \in GL_n(K) \mid \det A = 1\}$
- Orthogonale Gruppe, O_n
- Unitäre Gruppe, U_n

Permutationsgruppen

Sei $\text{Sym}(M)$ die Menge der Bijektionen von einer Menge M zu sich selbst, zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen. Die **symmetrische Gruppe** $S_n := \text{Sym}(\{1, 2, \dots, n\})$ ist eine Gruppe mit $n!$ Elementen.

Bemerkung 2. Jedes Element in S_n ist ein Produkt von Transpositionen.

Erinnerung: Eine **Transposition** ist eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen gleich lässt.

Beispiel 1. S_3 , die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, 3\}$. Seien $\sigma, \tau \in S_3$,

$$\sigma: \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \end{cases} \quad \tau: \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases}$$

Dann sind $\sigma^2 = \text{id}$ und $\tau^3 = \text{id}$.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma\tau(1) = 1 \\ \tau\sigma(1) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \sigma\tau \neq \tau\sigma$$

D.h. S_3 ist nicht abelsch.

Untergruppen

Definition 2. Sei G eine Gruppe. Eine **Untergruppe** $H \leq G$ ist eine Teilmenge $H \subseteq G$ sodass

- $\forall a, b \in H, ab \in H$
- $1_G \in H$
- $\forall a \in H, a^{-1} \in H$

Bemerkung 3. Jede Untergruppe ist eine Gruppe $(H, *_H)$. $*_G$ induziert $*_H$.

Bemerkung 4. $H \subseteq G$ mit $H \neq \{\emptyset\}$ ist eine Untergruppe von G genau wenn $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

Beweis: “ \Rightarrow ”: klar.

“ \Leftarrow ”: Bedingung: Seien $a, b \in H$.

- (a) $\implies b^{-1} \in H$
 $\implies ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$
- (b) $\implies aa^{-1} \in H, d.h. 1_G \in H$
- (c) $\implies 1_G a^{-1} \in H$ d.h. $a^{-1} \in H$

□

Bemerkung 5. Jede Gruppe G hat als Untergruppen immer $\{1\}$ (die triviale Untergruppe) und G selbst. Andere Untergruppen heißen **echte** Untergruppen.

Beispiele

- $SL_n(K) \leq GL_n(K)$
- $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- Sei $S^1 := \{c \in \mathbb{C}^* \mid |c| = 1\}$. $S^1 \leq \mathbb{C}^*$. ($\mathbb{C}^* := (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$)
- $B_n(K) := \{A \in GL_n(K) \mid A \text{ obere Dreiecksmatrix}\}. B_n \leq GL_n(K)$.
- $O_n \leq GL_n(\mathbb{R})$
- Die alternierende Gruppe $A_n \leq S_n$ ist die Untergruppe aller Permutationen, die das Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen sind.

Bemerkung 6. Seien G eine Gruppe und $a \in G$. Dann ist

$$\langle a \rangle := \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a, a^2, \dots\}$$

eine Untergruppe von G , genannt die von a erzeugte **zyklische Gruppe**.

Bemerkung 7. $\langle a \rangle$ ist abelsch: $a^m a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n a^m$

Lemma 1. Sei $X \subseteq \mathbb{Z}$ die Menge der Zahlen n , sodass $a^n = 1$. Dann ist $X = m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.

Beweis: X ist eine Untergruppe von \mathbb{Z} :

- (a) Seien $m, n \in X$, dann ist $a^{m+n} = a^m a^n = 1_G \implies m + n \in X$
- (b) $a^0 = 1_G \implies 0 \in X$
- (c) $n \in X \implies a^{-n} = a^n a^{-n} = 1_G \implies -n \in X$

Gemäss Übung ist X von der Form $m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. \square

Falls $m \neq 0$:

Für $n \in \mathbb{Z}$ schreibe $n = km + r$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ s.d. $0 \leq r < m$. Dann ist $a^n = a^{km+r} = a^{km}a^r = a^r$. $\Rightarrow \langle a \rangle = \{1, a, \dots, a^{m-1}\}$ und all diese Elemente sind verschieden. (Falls $a^r = a^{r'}$ $\Rightarrow a^{r-r'} = 1 \Rightarrow r - r' \in m\mathbb{Z} \Rightarrow r = r' \quad 0 \leq r, r' < m$)

Falls $m = 0$:

Dann ist $\langle a \rangle = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \dots\}$ und alle Partitionen sind verschieden.

Vorlesung 2

Definition 3. Die **Ordnung** $|G|$ einer Gruppe G ist die Anzahl der Elemente in G (kann ∞ sein). Die **Ordnung des Elements** $a \in G$ ist $|\langle a \rangle|$, wobei $\langle a \rangle = \{1, a, \dots, a^{m-1}\}$ mit $m > 0$ die kleinste Zahl s.d. $a^m = 1$.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ hat Ordnung 6.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ hat Ordnung ∞ .

Homomorphismen

Definition 4. Seien G, G' zwei Gruppen. Ein **Homomorphismus** ist eine Abbildung $\phi: G \rightarrow G'$ s.d. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \forall a, b \in G$.

Definition 5. Ein **Isomorphismus** ist ein bijektiver Homomorphismus.

Beispiele

- $\det: GL_n(K) \rightarrow K^*$
- signum - sign: $S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 0 : & \text{gerade Anzahl von Transpositionen} \\ 1 : & \text{ungerade Anzahl von Transpositionen} \end{cases}$$
- Fixiere $a \in G$. $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow G$, $\phi(n) = a^n$. ϕ ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Ord}(a) = \infty$.
- $H \leq G$, die Inklusion $\iota: H \rightarrow G$, $\iota(x) = x$.

Satz 3.

- (1) Falls $\phi: G \rightarrow G'$ und $\psi: G' \rightarrow G''$ Homomorphismen sind, so auch $\psi \circ \phi: G \rightarrow G''$.

(2) Falls $\phi: G \rightarrow G'$ ein Isomorphismus ist, so auch $\phi^{-1}: G' \rightarrow G$.

Beweis: (1) $\psi \circ \phi(ab) = \psi(\phi(a)\phi(b)) = \psi \circ \phi(a)\psi \circ \phi(b)$

(2) zu zeigen: ϕ^{-1} ist ein Homomorphismus.

Seien $a', b' \in G'$. Dann gibt es $a, b \in G$ s.d. $\phi(a) = a', \phi(b) = b'$

Es gilt $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = a'b' \implies \phi^{-1}(a'b') = \phi^{-1}(a')\phi^{-1}(b')$

□

Bemerkung 8. Zwei zyklische Gruppen gleicher Ordnung sind immer isomorph.

Beweis: Seien $G = \langle a \rangle, G' = \langle b \rangle$ und $\phi: G \rightarrow G', \phi(a^n) \mapsto b^n$.

Falls $|G| = |G'|$ endlich ist, so ist $G = \{1, a, \dots, a^{m-1}\}, G' = \{1, b, \dots, b^{m-1}\}$. Somit ist ϕ wohldefiniert, bijektiv und ein Homomorphismus.

Falls $|G| = |G'| = \infty$, so ist ϕ wohldefiniert, bijektiv und ein Homomorphismus. □

Wir schreiben C_n für die zyklische Gruppe der Ordnung n .

Satz 4. Sei $\phi: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus. Dann sind $\phi(1_G) = 1_{G'}$ und $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1} \forall a \in G$

Beweis:

$$\begin{aligned} 1_G &= 1_G 1_G \\ \implies \phi(1_G) &= \phi(1_G 1_G) = \phi(1_G)\phi(1_G) \\ \implies 1_{G'} &= \phi(1_G) \end{aligned}$$

kürzen

Ausserdem:

$$\begin{aligned} \phi(a^{-1}\phi(a)) &= \phi(a^{-1}a) = \phi(1_G) = 1_{G'} \\ \implies \phi(a^{-1}) &= \phi(a)^{-1} \end{aligned}$$

□

Definition 6. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus $\phi: G \rightarrow G$ von einer Gruppe G zu sich selbst.

Beispiel 2. Für $f \in G$ definiere $\phi: G \rightarrow G, \phi(g) := f g f^{-1}$ ($f g f^{-1}$ ist das Konjugierte von g unter f). ϕ ist ein Automorphismus.

Beweis: Homomorphismus: $\phi(gh) = fghf^{-1} = fg(f^{-1}f)hf^{-1} = \phi(g)\phi(h)$. Bijektiv: $\phi^{-1}(g) = f^{-1}gf$ □

Definition 7. Für einen Homomorphismus $\phi: G \rightarrow G'$ definiere:

$$\text{Bild } \phi := \{x \in G' \mid x = \phi(a) \text{ für ein } a \in G\}$$

$$\text{Kern } \phi := \{a \in G \mid \phi(a) = 1\}$$

Übung: Zeige, dass beides Untergruppen von G' bzw. G sind.

Beispiele

- $\det: GL_n(K) \rightarrow K^*$, Kern $\det = SL_n(K)$
- $\text{sign}: S_N \rightarrow C_2$, Kern $\text{sign} = A_n$

Bemerkung 9. Seien $\phi: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus und $a \in \text{Kern } \phi$ und $b \in G$. Dann ist

$$\begin{aligned}\phi(bab^{-1}) &= \phi(b)\phi(a)\phi(b)^{-1} = 1 \\ \implies bab^{-1} &\in \text{Kern } \phi\end{aligned}$$

Definition 8. Eine Untergruppe $N \leq G$ heisst **Normalteiler**, falls $a \in N$ und $\forall b \in G : bab^{-1} \in N$.

$\stackrel{\text{Bem. } 9}{\implies}$ Kern ϕ ist immer ein Normalteiler.

Vorlesung 3

Erinnerung: Eine Untergruppe $N \leq G$ ist ein Normalteiler, falls:

$$\forall a \in N, \forall b \in G : bab^{-1} \in N$$

. Clicker-Frage zu Normalteilern \trianglelefteq :

1. $B_n(K) \leq GL_n(K)$ ist kein Normalteiler.
2. $Z^+ \trianglelefteq R^+$ ist Normalteiler (weil R^+ abelsch)
3. $SL_n(K) \trianglelefteq GL_n(K)$, weil $\det(ABA^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(A)^{-1} = \det(B)$, oder bemerke, dass $SL_n(K) = \text{Kern } \det$
4. $A_n \trianglelefteq S_n$ weil $A_n = \text{Kern } \text{sign}$.

Partitionen

Sei $\phi: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus. Für jedes Element $h \in H$ betrachte die **Faser** $\phi^{-1}(h) = \{g \in G \mid \phi(g) = h\}$ (Urbild von G in H). Die Fasern bilden eine Partition von G .

Beispiel 3. Sei $\phi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^*$, $\phi(z) \mapsto |z|$. Allgemein: $\phi^{-1} = \text{Kern } \phi$.

Satz 5. Sei $U: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus mit Kern N . Für $a, b \in G$ gilt $\phi(a) = \phi(b) \Leftrightarrow \exists n' \in N \text{ s.d. } b = an$, d.h. $a^{-1}b \in N$.

Beweis: “ \Rightarrow ”: Falls $\phi(a) = \phi(b)$, dann ist $U(a)^{-1}\phi(b) = \phi(a^{-1}b) = 1$, d.h. $\exists n \in N$, s.d. $a^{-1}b = n \implies b = an$.

“ \Leftarrow ” Falls $b = an$ für $n \in N$, dann ist $\phi(b) = \phi(a)\phi(n) = \phi(a)$. \square

Aus dem Satz folgt, dass die Fasern von ϕ alle von der folgenden Form sind:

$$aN = \{g \in G \mid g = an \text{ für ein } n \in N\}$$

Korollar 1. Ein Homomorphismus $\phi: G \rightarrow G'$ ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern } \phi = \{1\}$.

Beweis: “ \Rightarrow ” klar.

“ \Leftarrow ” Man nehme an, dass der Kern $\phi = \{1\}$. $\phi(a) = \phi(b) \Leftrightarrow a^{-1}b \in \text{Kern } \phi$, d.h. $a^{-1} + b = 1 \implies a = b$. \square

Nebenklassen

Erinnerung: Sei X eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf X ist eine binäre Relation \sim so dass:

- i) (Transitivität) Falls $a \sim b$ und $b \sim c$, dann ist $a \sim c$.
- ii) (Symmetrie) Falls $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- iii) (Reflexivität) $a \sim a$ für alle $a \in X$.

Gesehen: Jede Äquivalenzrelation definiert eine Partition von X . Diese besteht aus den Äquivalenzklassen, d.h. Teilmengen von der Form $[a] := \{b \in X \mid b \sim a\}$.

Sei \overline{X} die Menge der Äquivalenzklassen. Dann erhalten wir eine surjektive Abbildung $\pi: X \rightarrow \overline{X}$, $\pi(a) := [a]$. Dann ist $\pi^{-1}([a]) = \{b \in X \mid b \sim a\}$.

Gesehen: “Rechnen modulo m ”. \mathbb{Z} mit Äquivalenzrelation \equiv , wobei $a \equiv b$ falls $a - b \in m\mathbb{Z}$.

Menge der Äquivalenzklassen: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$.

Ausserdem können wir die Klassen in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ miteinander addieren, so dass $[a+b] = [a] + [b]$.

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit Addition ist somit eine Gruppe, und die Quotientenabbildung $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\pi(n) := [n]$ ist ein Homomorphismus.

Definition 9. Sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Eine **Linksnebenklasse** von H ist eine Teilmenge von der Form $aH = \{ah \mid h \in H\}$ für ein $a \in G$.

Beispiel 4. $m\mathbb{Z}^+ \leq \mathbb{Z}^+$. Dann sind die Linksnebenklassen $m\mathbb{Z}$ die Teilmengen von der Form $0 + m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \dots, (m-1) + m\mathbb{Z}$.

Wir schreiben $a \equiv b$, falls ein $h \in H$ existiert, so dass $b = ah$, d.h. falls $b \in aH$.

Satz 6. Die Relation “ \equiv ” ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: 1. Falls $a \equiv b$ und $b \equiv a \implies \exists h, h' \in H$, so dass $b = ah$ und $c = bh' \implies c = a \underbrace{hh'}_{\in H} \implies c \equiv a$.

2. falls $a \equiv b$, so $\exists h \in H$ s.d. $b = ah \implies a = b \underbrace{h^{-1}}_{\in H} \implies b \equiv a$.

3. $a = a \cdot 1$ und $1 \in H \implies a \equiv a$.

$\phi: X \rightarrow Y$ Abbildung $\phi^{-1}(y) = \{x \in X \mid \phi(x) = y\}$ für $y \in Y$. \square

Korollar 2. Die Linksnebenklassen bilden eine Partition von G .

Beweis: $aH = bH \Leftrightarrow a \equiv b$. \square

Definition 10. Die Anzahl der Linksnebenklassen von H in G ist der sogenannte **Index von H in G** . Wir schreiben $[G : H]$ für den Index. ($[G : H]$ kann ∞ sein.)

Beispiel 5. $m \geq 1$, $[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m$.

Satz 7. Sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$. Dann ist $|G| = |H|[G : H]$.

Beweis: Die Abbildung $\phi: H \rightarrow aH$, $\phi(h) = ah$.

ϕ ist eine Bijektion. $\implies |H| = |aH|$.

Die Linksnebenklassen bilden eine Partition von G . $\implies |G| = |H|[G : H]$ \square

Daraus folgt direkt:

Korollar 3 (Satz von Lagrange). Seien G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.

Bemerkung 10. Falls $a \in G$, dann folgt mit Lagrange, dass $|\langle a \rangle| \mid |G|$, d.h. $\text{Ord}(a)$ teilt die Ordnung von G .

Korollar 4. Sei G eine Gruppe, s.d. $|G|$ prim ist. Sei $a \in G, a \neq 1$, dann ist $G = \langle a \rangle$.

Beweis: $\text{ord } a \mid p$, da $\text{ord } a > 1$ ist, $\text{ord } a = p$, d.h. $|\langle a \rangle| = p \implies \langle a \rangle = G$. \square

Korollar 5. Seien G, G' endliche Gruppen und $\phi: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

$$|G| = |\text{Kern } \phi| \cdot |\text{Bild } \phi|$$

Beweis: Gesehen: Die Linksnabenklassen von $\text{Kern } \phi$ sind die Fasern von ϕ .

$$\begin{aligned} \implies |\text{Bild } \phi| &= [G : \text{Kern } \phi] \\ \implies |G| &= |\text{Kern } \phi| \cdot [G : \text{Kern } \phi] \\ &= |\text{Kern } \phi| \cdot |\text{Bild } \phi| \end{aligned}$$

□

Definition 11. Sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Die **Rechtsnabenklassen** von H in G sind die Mengen $Ha := \{ha \mid h \in H\}$.

Definiere $a \equiv_R b$, falls es ein $h \in H$ gibt, sodass $b = ha$.

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf G und die Rechtsnabenklassen sind die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation. \rightsquigarrow Partition von G .

Satz 8. Eine Untergruppe $H \leq G$ ist ein Normalteiler \Leftrightarrow jede Linksnabenklasse ist auch eine Rechtsnabenklasse. In diesem Fall ist $aH = Ha$.

Beweis: “ \Rightarrow ” H Normalteiler. Sei $h \in H$ und $a \in G$.

$$\begin{aligned} \implies ah &= (\underbrace{aha^{-1}}_{=:k \in H})a = ka \\ \implies aH &\subseteq Ha \end{aligned}$$

Analog zeigt man $Ha \subseteq aH$. $\implies aH = Ha$.

“ \Leftarrow ” Man nehme an, H ist kein Normalteiler.

$$\begin{aligned} \implies \exists h \in H, g \in G \text{ s.d. } aha^{-1} \notin H, \text{ d.h. es gibt kein } h' \in H \text{ s.d. } ah = h'a. \\ \implies ah \in aH, \text{ aber } ah \notin Ha, \text{ d.h. } aH \neq Ha. \end{aligned}$$

Gleichzeitig ist $a \in aH \cap Ha \neq \emptyset$

$\implies aH$ ist in keiner anderen Rechtsnabenklasse enthalten. D.h. Rechts- und Linksnabenklassen definieren zwei verschiedene Partitionen. □

Vorlesung 4

Clicker-Frage zu Homomorphismen $\phi: G \rightarrow G'$:

- Gesehen in Übung: $\text{Bild } \phi \leq G'$.
- Dann folgt mit Kor. 3: $|\text{Bild } \phi| \mid |G'|$
- Und mit Kor. 5: $|\text{Bild } \phi| \mid |G|$.

Seien G eine Gruppe und $H \leq G \rightsquigarrow G/H$ Linksnabenklassen von H in G . Können wir auf G/H eine Gruppenstruktur definieren, so dass die Abbildung $\pi: G \rightarrow G/H, \pi(g) = gH$ ein Gruppenhomomorphismus ist?

Ja, wenn $H \trianglelefteq G$ (siehe Übung).

Faktorgruppen

Lemma 2. Seien G eine Gruppe und X eine Menge mit einer Verknüpfung. Sei $\phi: G \rightarrow X$ eine surjektive Abbildung, so dass $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \forall a, b \in G$. Dann ist X eine Gruppe.

Beweis: (i) Seien $u, v, w \in X$. $\exists a, b, c \in G$ s.d. $\phi(a) = u, \phi(b) = v, \phi(c) = w$. Dann ist

$$\begin{aligned} u(vw) &= \phi(a)(\phi(b)\phi(c)) = \phi(a)\phi(bc) \\ &= \phi(abc) = \phi(ab)\phi(c) \\ &= (\phi(a)\phi(b))\phi(c) = (uv)w \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Assoziativität der Verknüpfung auf X .

(ii) Sei $e := \phi(1)$ und $u \in X$. Dann

$$\exists u \in G, \text{s.d. } u = \phi(a) \implies eu = \phi(1)\phi(a) = \phi(1a) = \phi(a) = u.$$

Analog: $ue=u$. $\rightsquigarrow e$ ist ein neutrales Element.

(iii) Sei $u \in X \implies \exists a \in G$ s.d. $u = \phi(a)$. Sei $u' := \phi(a^{-1})$. Dann ist

$$u'u = \phi(a^{-1}\phi(a)) = \phi(a^{-1}a) = \phi(1) = e.$$

Analog: $uu' = e$. \rightsquigarrow es existieren Inverse.

□

Notation: Seien G eine Gruppe, $A, B \subseteq G$. Dann definieren wir

$$AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\} \subseteq G.$$

Lemma 3. Seien G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $a, b \in G$. Dann ist $(aN)(bN) = abN$. Das Produkt von zwei Nebenklassen ist also wieder eine Nebenklasse.

Beweis: In Vorlesung 3 gesehen:

$$Nb = bN \quad \forall b \in G$$

Da N eine Untergruppe ist, ist $NN = N$ (Übung).

$$\implies (aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = abNN = abN.$$

□

Wir erhalten also eine Verknüpfung auf die Nebenklassen. Falls $K_1, K_2 \in G/N$: Sei $a \in K_1, b \in K_2 \implies K_1 = aN, K_2 = bN$. Dann ist $K_1K_2 = abN$ (gemäss Lemma), d.h. K_1K_2 ist die Nebenklasse, die das Element ab enthält.

Satz 9. Seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$. Mit dieser Verknüpfung bildet $G/N =: \bar{G}$ eine Gruppe und die Abbildung $\pi: G \rightarrow G/N = \bar{G}$ $a \mapsto aN =: \bar{a}$ ist ein Homomorphismus.

Beweis: Bereits beobachtet: $\pi(a)\pi(b) = (aN)(bN) = abN = \pi(ab)$.

Aus Lem. 2 folgt, dass $\bar{G} = G/N$ eine Gruppe ist und daher π ein Homomorphismus ist. \square

Korollar 6. Jeder Normalteiler $N \trianglelefteq G$ ist Kern von einem Homomorphismus. Nämlich vom Homomorphismus $\pi: G \rightarrow G/N$.

Beweis: Das neutrale Element von G/N ist N . $\rightsquigarrow \text{Kern } \pi = N$ \square

Satz 10 (erster Isomorphiesatz). Sei $\phi: G \rightarrow G'$ ein surjektiver Homomorphismus und $N := \text{Kern } \phi$. Dann ist die Gruppe G/N isomorph zur Gruppe G' unter dem Homomorphismus $\bar{\phi}: G/N \rightarrow G'$ $\bar{a} = aN \mapsto \phi(a)$

Beweis: 1. $\bar{\phi}$ ist wohldefiniert: $\phi(an) = \phi(a)\phi(n) = \phi(a)$, d.h. $\bar{\phi}(aN)$ hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.

2. $\bar{\phi}$ ist ein Homomorphismus:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}((aN)(bN)) &= \bar{\phi}(abN) \\ &= \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \\ &= \bar{\phi}(aN)\bar{\phi}(bN)\end{aligned}$$

3. $\bar{\phi}$ ist bijektiv: $\bar{\phi}$ ist surjektiv, da ϕ surjektiv ist. $\bar{\phi}$ ist injektiv, da $\text{Kern } \bar{\phi} = \{N\}$ und N ist das neutrale Element in G/N . $\implies \bar{\phi}$ ist injektiv. \square

Definition 12. Seien G, G' Gruppen, dann ist $G \times G'$ eine Gruppe mit der Verknüpfung $(a, a')(b, b') = (ab, a'b')$. Neutrales Element: $(1_G, 1_{G'})$. Inverses Element: $(a, a')^{-1} = (a^{-1}, a'^{-1})$. Es heißt das **direkte Produkt** von G und G' .

Vorlesung 5

Clicker-Frage: Sei $S^1 \leq \mathbb{C}^*$ die Untergruppe der komplexen Zahlen bestehend aus den Elementen mit Betrag 1. Dann ist der Quotient \mathbb{C}^*/S^1 isomorph zu $\mathbb{R}_{>0}^*$. (Wahr)

Begründung: Die Abbildung $\phi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^*$, $z \mapsto |z|$ ist ein surjektiver Homomorphismus. $\text{Kern } \phi = S^1 \stackrel{\text{1. Isosatz}}{\implies} \mathbb{C}^*/S^1 \simeq \mathbb{R}_{>0}^*$

Clicker-Frage: Sei G eine Gruppe und $H_1, H_2 \leq G$ Untergruppen. Dann ist $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe von G . (Wahr)

Begründung:

$$\begin{aligned} 1 &\in H_1 \cap H_2 \\ a, b \in H_1 \cap H_2 &\implies ab \in H_1 \cap H_2 \\ a^{-1} &\in H_1 \cap H_2 \end{aligned}$$

Allgemein: Falls $H_i \leq G, i \in I$ eine Familie von Untergruppen ist, so ist $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$ eine Untergruppe (selber Beweis).

Definition 13. Sei $S \subseteq G$ eine Teilmenge. Dann ist $\langle S \rangle := \bigcap_{\substack{H \leq G \\ s.d. S \subseteq H}} H$ die von S erzeugte Untergruppe.

Erinnerung: G, G' Gruppen $\rightsquigarrow G \times G'$ ist Gruppe mit Verknüpfung $(a, a')(b, b') = (ab, a'b')$.

Bsp: Kleinsche Vierergruppe (die "Matratzengruppe").

$$C_2 \times C_2 = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

Bsp: $m, n > 0$ s.d. $\text{ggT}(m, n) = 1$ dann ist $C_{mn} \simeq C_m \times C_n$

Wir haben vier Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccccc} G & & & & G \\ & \searrow i & & \nearrow p & \\ & & G \times G' & & \\ & \swarrow i' & & \searrow p' & \\ G' & & & & G' \end{array}$$

$$\begin{aligned} i(x) &= (x, 1) \\ i'(x) &= (1, x') \\ p(x, x') &= x \\ p'(x, x') &= x' \end{aligned}$$

Bemerkung 11. i, i' sind injektiv, d.h.

$$\begin{aligned} G \times 1 &= \text{Bild } i \simeq G \\ 1 \times G' &= \text{Bild } i' \simeq G' \end{aligned}$$

p und p' sind surjektiv

$$\text{Kern } p = 1 \times G', \text{Kern } p' = G \times 1$$

Sei H eine Gruppe und $\phi: H \rightarrow G, \phi': H \rightarrow G'$ Homomorphismen. Dann ist $\Phi: H \rightarrow G \times G' \quad \Phi(h) = (\phi(h), \phi'(h))$ ein Homomorphismus.

Umgekehrt ist jeder Homomorphismus $\Phi: H \rightarrow G \times G'$ von dieser Form mit $\phi = \Phi \circ p$ und $\phi' = \Phi \circ p'$.

Bemerkung 12. $\Phi(h) = (1, 1) \Leftrightarrow \phi(h) = 1$ und $\phi'(h) = 1$ d.h. $\text{Kern } \Phi = \text{Kern } \phi \cap \text{Kern } \phi'$.

Seien $H, K \leq G$. Betrachte $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. Wann ist HK eine Untergruppe? Wann ist $\pi: H \times K \rightarrow G \quad \pi(h, k) = hk$ ein Homomorphismus?

Satz 11. (a) Ist $H \cap K = \{1\}$, so ist π injektiv.

(b) Ist H oder K ein Normalteiler, so ist $HK = KH$ und HK ist eine Untergruppe von G .

(c) Sind H und K Normalteiler und gilt $H \cap K = \{1\}$ und $HK = G$ so ist $\pi: H \times K \rightarrow G$ ein Isomorphismus.

Beweis: (a) Seien $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ s.d. $h_1k_1 = h_2k_2$.

$$\begin{aligned} &\implies \underbrace{k_1 k_2^{-1}}_{\in K} = \underbrace{h_1^{-1} h_2}_{\in H} \stackrel{H \cap K = \{1\}}{=} 1 \\ &\implies k_1 = k_2 \text{ und } h_1 = h_2 \\ &\implies \pi \text{ ist injektiv.} \end{aligned}$$

(b) oBdA. H ist Normalteiler. Seien $h \in H, k \in K$.

$$\begin{aligned} &\implies kh = \underbrace{(khk^{-1})}_{} k \in HK \\ &\implies KH \subseteq HK \end{aligned}$$

Analog: $HK \subseteq KH \implies KH = HK$. **Z.z:** HK ist Untergruppe.

(i) Seien $hk, h'k' \in HK$.

$$\begin{aligned} &\implies (hk)(h'k') = h \underbrace{(kh')}_{\in KH = HK} k' \\ &= h(h''k'')k' \\ &= (hh'')(k''k') \in HK \end{aligned}$$

(ii) $1 \in HK$

$$(iii) \quad hk \in HK \implies (hk) = k^{-1}h^{-1} \in kh = HK$$

(c) Seien $h \in H, k \in K$

$$\implies \underbrace{(hkh^{-1})k^{-1}}_{\in k} = h \underbrace{(kh^{-1}k^{-1})}_{\in H}$$

$$\implies hkh^{-1}k^{-1} = 1$$

$$\implies hk = kh$$

$$\implies \pi(h_1, k_1)\pi(h_2, k_2) = h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1k_2 = \pi((h_1, k_1)(h_2, k_2))$$

$\implies \pi$ ist Homomorphismus. Gemäss (a) ist π injektiv. Da $HK = G$ ist π surjektiv $\implies \pi$ ist Isomorphismus.

□

Beispiele

- Gruppen von der Ordnung 1: nur $\{1\}$
- Gruppen von der Ordnung 2: nur C_2
- Gruppen von der Ordnung 3: nur C_3
- Gruppen von der Ordnung 4: $C_4, C_2 \times C_2$ (s. Übung).
- Gruppen von der Ordnung 5: C_5

Behauptung 1. Die einzigen Gruppen von Ordnung 6 sind C_6 und S_3 (bis auf Isomorphie).

Beweis: Sei G eine Gruppe mit $|G| = 6$. Falls G ein Element der Ordnung 6 enthält, so ist $G \simeq C_6$. Ansonsten 3 mögliche Fälle:

- Alle $g \in G, g \neq 1$ haben Ordnung 2
- Alle $g \in G, g \neq 1$ haben Ordnung 3
- Es gibt $g \in G$ von Ordnung 2 und $h \in G$ von Ordnung 3.

Falls (a), so ist G abelsch. Sei $g \in G$

$$\begin{aligned} \implies \langle g \rangle &= \{1, g\} \trianglelefteq G \\ \implies |G/\langle g \rangle| &= 3 \\ \implies G/\langle g \rangle &\simeq C_3 \end{aligned}$$

$\pi: G \rightarrow G/\langle g \rangle$ Quotient

$\forall g \in G$ ist $\pi(g)^2 = \pi(g^2) = 1$. Widerspruch zu $|G/\langle g \rangle| = 3$.

Falls (b), so gilt $g = g^{-1}$ nur wenn $g = 1$. $\implies G = \{1, g, g^{-1}, h, h^{-1}, \dots\}$. Nicht möglich, da G eine gerade Ordnung hat.

D.h. wir sind im Fall (c). G enthält $1, g, h, h^2, gh, gh^2$. (kleine Übung: Diese Elemente sind alle verschieden.) $\implies G = \{1, g, h, h^2, gh, gh^2\}$.

Wir haben $hg = gh$ oder $hg = gh^2$. Falls $hg = gh$, so hat (gh) Ordnung 6. Das haben wir aber ausgeschlossen. Also ist $hg = gh^2$.

Die Relation $gh = h^2g$ definiert die Verknüpfung auf G eindeutig. Jedes Produkt in g und h lässt sich mit dieser Regel in die Form $g^i h^j$ bringen, wobei $0 \leq i \leq 1, 0 \leq j \leq 2$.

Im Fall (c) gibt es also höchstens eine Gruppe. Diese muss S_3 sein. \square

Bemerkung 13. Seien $g, h \in S_3$, mit

$$g: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases} \quad h: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$$

Dann ist $S_3 = \{1, g, h, h^2, gh, gh^2\}$.

Bemerkung 14. Jede echte Untergruppe von S_3 ist zyklisch (da von Ordnung 2 oder 3).

Bemerkung 15. $A_3 = \langle h \rangle$

Symmetrie

Isometrien von \mathbb{R}^n

Definition 14. Eine **Isometrie** von \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Form $f(X) = BX + a$ wobei $B \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ die Gruppe der Isometrien von \mathbb{R}^n .

Bemerkung 16. Man kann zeigen, dass Isometrien genau die Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind, welche die Distanzen erhalten.

Zwei wichtige Untergruppen:

- (1) $\mathcal{T}_n \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$: Die Untergruppe der **Translationen**, d.h. Abbildung von der Form $t_a: X \mapsto X + a$ für $a \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $t_a t_{a'} = t_{a+a'}$.
- (2) $O \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$: Die Untergruppe der Isometrien von der Form $d_B: X \mapsto BX$ für $B \in O(n)$. Es gilt $d_B d_{B'} = d_{BB'}$.

Jedes $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich eindeutig schreiben als $t_a d_B$ für $B \in O(n), a \in \mathbb{R}^n$. Falls $f(X) = BX + a, g(X) = B'X + a'$, dann ist

$$\begin{aligned} f \circ g(X) &= B(B'X + a') + a \\ &= BB'X + Ba' + a \end{aligned}$$

D.h. falls $F = t_a d_B, g = t_{a'} + d_{B'}$, so ist

$$\begin{aligned} f \circ g &= t_a d_B t_{a'} d_{B'} \\ &= t_{Ba'+a} d_{BB'}. \end{aligned}$$

Wir haben also insbesondere Homomorphismus $\psi: \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \rightarrow O, \psi(t_a d_B) = d_B$.

Kern $\psi = \mathcal{T}_n$.

Bemerkung 17. Die Abbildung $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{T}_n, t_a d_B \mapsto t_a$ ist kein Homomorphismus.

Vorlesung 6

Gestern: $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Form $f(x) = t_a d_B(x) = BX + a$ $B \in O(n), a \in \mathbb{R}^n$.

$O \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$: Isometrien, die den Ursprung fixieren, d.h. von der Form $f(X) = d_B(X) = BX$.

$\mathcal{T}_n \trianglelefteq \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ Translationen

Orientierung

Falls $n = 2$:

$$\text{Erinnerung: } SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

$$O(2)/SO(2) = \{\pm 1\} \simeq C_2$$

$$\implies SO(2) \text{ hat zwei Nebenklassen: } O(2) = SO(2) \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO(2).$$

Definition 15. Sei $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, $f = t_a d_B$.

Falls $B \in SO(2)$ ist, heisst f **orientierungserhaltend**.

Falls $B \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO(2)$, so heisst f **orientierungsumkehrend**.

Bemerkung 18. Falls $B \in SO(2)$, so ist d_B eine Drehung um O um den Winkel θ .

Bemerkung 19. Falls $B \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, so definiert d_B eine Spiegelung an der Geraden mit Winkel $\theta/2$ zur x-Achse.

Satz 12. Die Untergruppe von $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ der Elemente, die einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ fixieren, ist die Konjugierte Untergruppe $O' = t_p O t_p^{-1} \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(p) = p &\Leftrightarrow t_p^{-1}f(p) = t_p^{-1}(p) = 0 \\
&\Leftrightarrow t_p^{-1}f(t_p(0)) = 0 \\
&\Leftrightarrow t_p^{-1}ft_p \in O \\
&\Leftrightarrow f \in t_pOt_p^{-1}
\end{aligned}$$

□

Satz 13. Sei $G \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ eine endliche Untergruppe. So hat G einen Fixpunkt.

Beweis: Sei $m = |G|$, sei $G = \{f_1, \dots, f_m\}$. Sei $q \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachte die Bilder $q_i := f_i(q)$ für $i \in 1, \dots, m$. Sei $p := \frac{1}{m}(q_1 + \dots + q_m)$.

Behauptung: $f_j(p) = p \quad \forall f_j \in G$.

Beweis: Schreibe $f_j(X) = B_jX + a_j$.

$$\begin{aligned}
\implies f_j(p) &= B_j\left(\frac{1}{m}(q_1 + \dots + q_m)\right) + a_j \\
&= \frac{1}{m}(B_jq_1 + \dots + B_jq_m + ma_j) \\
&= \frac{1}{m}((B_jq_1 + a_j) + \dots + (B_jq_m + a_j)) \\
&= \frac{1}{m}(f_j(q_1) + \dots + f_j(q_m)) \\
&= \frac{1}{m}(f_jf_1(q) + \dots + f_jf_m(q)) \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{m}(q_1 + \dots + q_m) = p
\end{aligned}$$

$$(*) : \{f_1, \dots, f_m\} = \{f_jf_1, \dots, f_jf_m\}$$

□

Korollar 7. Sei $G \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ eine endliche Untergruppe. So gibt es ein $a \in \mathbb{R}^n$ so dass $t_a^{-1}Gt_a \leq O$.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ der Fixpunkt von G . Dann ist $G \leq t_aOt_a^{-1}$

$$\implies t_a^{-1}Gt_a \leq O.$$

□

Satz 14. Sei $n = 2$ und sei $G \leq O$ eine endliche Untergruppe. So ist G eine der folgenden Gruppen:

- (a) Die zyklische Gruppe der Ordnung n erzeugt von der Drehung um den Winkel $\theta = 2\pi/n$.

- (b) Die **Diedergruppe** D_n von Ordnung $2n$ erzeugt von zwei Elementen: der Drehung um den Winkel $\theta = 2\pi/n$ und einer Spiegelung S an einer geraden durch den Nullpunkt.

Beweis: **1. Fall:** Alle Elemente in G sind in $\text{SO}(2)$, d.h. Drehungen.

Behauptung: G ist zyklisch.

Beweis: Falls $G = \{1\}$, klar. Sonst: Sei θ der kleinste positive Drehwinkel der Elemente in G . Sei $d_\theta \in G$ diese Drehung.

Z.z: $\langle d_\theta \rangle = G$.

Sei $d_\alpha \in G$ eine Drehung um den Winkel $\alpha > 0$. Schreibe $\alpha = n\theta + \beta$ mit $0 \leq \beta < \theta$ und $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} d + B = d_\alpha d_{-n\theta} &= d_\alpha (d_\theta^{-1})^n \in G \\ &\implies \beta = 0 \\ &\implies d_\alpha (d_\theta^{-1})^n = 1 \\ &\implies d_\alpha = (d_\theta)^n \in \langle d_\theta \rangle \end{aligned}$$

Sei $n \in \mathcal{N}$ minimal, s.d. $n\theta \geq 2\pi$.

D.h. $2\pi \leq n\theta < 2\pi + \theta$. Da θ der kleinste Drehwinkel in G ist, folgt daraus:
 $\implies 2\pi = n\theta \implies \theta = 2\pi/n$.

2. Fall: G enthält Spiegelung. Betrachte $\phi: G \rightarrow \{\pm 1\}$ gegeben durch Det.
 $\stackrel{1.\text{Fall}}{\implies}$ Kern ϕ ist zyklisch erzeugt von Drehung $\implies G = \text{Kern } \phi + S \text{ Kern } \phi$ mit S Spiegelung. \square

Vorlesung 7

$|D_3| = 6$ und D_3 ist nicht zyklisch $\implies D_3 \simeq S_3$

Die Diedergruppe D_n von Ordnung $2n$ enthält die Symmetrien vom n-gon.

$D_n \subseteq \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ bestehend aus allen $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ s.d. $gP = P$.

Bemerkung 20. Sei x eine Drehung um den Winkel $2\pi/n \implies \text{ord } x = n$

Sei y eine Spiegelung $\implies \text{ord } y = 2$. Dann ist xy wieder eine Spiegelung.

$$\begin{aligned} &\implies 1 = (xy)^2 = xyxy \\ &\implies xy = yx^{-1} = yx^{n-1} \end{aligned}$$

Dies definiert alle Relationen in D_n .

Satz 15. D_n ist erzeugt von zwei Elementen x, y , die die Relationen $x^n = 1, y^2 = 1, xy = yx^{-1}$ erfüllen, d.h.

$$D_n = \{1, x, \dots, x^{n-1}, y, xy, \dots, x^{n-1}y\}$$

Wir überspringen die unendlichen diskreten Untergruppen der **Gitter** (siehe Artin).

Gruppenoperationen

Gruppe der Gruppenautomorphismen.

Definition 16. Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine (**Links-**)**Operation** oder **Aktion** oder **Wirkung** von G auf X ist eine Abbildung

$$G \times X \rightarrow X \quad (g, x) \mapsto gx$$

so dass

- (a) $1x = x \quad \forall x \in X$
- (b) $(gg')x = g(g'(g'x)) \quad \forall g, g' \in G, x \in X$

X heisst **G-Menge**. Wir schreiben $G \curvearrowright X$ für "G operiert auf X".

Für jedes $g \in G$ erhalten wir eine Abbildung

$$m_g: X \rightarrow X \quad m_g(x) = gx$$

m_g heisst **Linksmultiplikation** mit g .

Bemerkung 21. m_g ist bijektiv und $(m_g)^{-1} = m_{g^{-1}}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} m_{g^{-1}}(m_g(x)) &= g^{-1}(gx) \\ &= g^{-1}gx = 1x = x \end{aligned}$$

Analog: $m_g(m_{g^{-1}}(x)) = x$

□

Definition 17. Für zwei $x \in X$ ist die **Bahn** oder das **Orbit** von x :

$$B_x := \{y \in X \mid y = gx \text{ für ein } g \in G\} = Gx$$

Bemerkung 22. Für $x, y \in X$ definieren wir $x \sim y$ falls $y = gx$ für ein $g \in G$. Dann ist \sim eine Äquivalenzrelation (kleine Übung) und die Bahnen sind genau die Äquivalenzklassen von \sim .

Beispiel 6. • Isom(\mathbb{R}^2) operiert auf \mathbb{R}^2 . (Hat nur einen Orbit)

- Sei $D = \{\text{Dreiecke in } \mathbb{R}^2\}$ Isom(\mathbb{R}^2) operiert auf D .
- Zwei Dreiecke Δ, Δ' sind **kongruent**, falls es ein $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ gibt, so dass $g\Delta = \Delta'$. Die Bahn B_Δ ist die Menge aller zu Δ kongruenten Dreiecke.

Definition 18. Eine Operation $G \curvearrowright X$ heisst *transitiv*, falls es nur eine Bahn gibt. D.h.

$$\forall x, x' \in X \exists g \in G \text{ s.d. } gx = x'$$

Definition 19. Der *Stabilisator* von $x \in X$ ist $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$

Bemerkung 23. $G_x \leq G$ ist eine Untergruppe.

Bemerkung 24. Für $g, h \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} gx = hx &\Leftrightarrow h^{-1}gx = x \\ &\Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \end{aligned}$$

Beispiel 7. • $\text{Isom}(\mathbb{R}^2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ Der Stabilisator von O ist die Untergruppe $O \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. $O \simeq O(2)$.

• $\text{Isom}(\mathbb{R}^2) \curvearrowright D$. Sei Δ ein gleichseitiges Dreieck. Dann ist der Stabilisator von Δ isomorph zu der Diedergruppe D_3 von Ordnung 6.

Operation auf Nebenklassen

Beobachtung: $H \leq G \rightsquigarrow G$ operiert auf G/H .

Für $K \in G/H$ definieren wir

$$gK := \{gk \mid k \in K\}$$

Das heisst, falls $K = aH$, so ist $gK = gaH$.

Bemerkung 25. • Diese Operation ist transitiv, denn $B_H = G/H$.

• Sei $g \in G$, dann gilt $gH = H \Leftrightarrow g \in H$. D.h., der Stabilisator von H ist H : $D_H = H$.

Beispiel 8. D_3 , erzeugt von x, y und $x^3 = y^2 = 1$ sowie $yx = x^2y$. Sei $H = \langle y \rangle = \{1, y\}$. Nebenklassen:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1, y\} \\ K_2 &= \{x, xy\} \\ K_3 &= \{x^2, x^2y\} \\ G/H &= \{K_1, K_2, K_3\} \end{aligned}$$

Beobachtung: $m_x: G/H \rightarrow G/H \quad K_i \mapsto xK_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}$

$$m_x: \begin{cases} K_1 \mapsto K_2 \\ K_2 \mapsto K_3 \\ K_3 \mapsto K_1 \end{cases} \quad m_y: \begin{cases} K_1 \mapsto K_1 \\ K_2 \mapsto K_3 \\ K_3 \mapsto K_2 \end{cases}$$

↪ Wir erhalten einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \text{Sym}(G/H) \quad g \mapsto m_g$

Satz 16. Sei X eine G -Menge und $x \in X$. Sei $H = G_x \leq G$. Dann ist die Abbildung

$$\phi: G/H \rightarrow B_x \quad aH \mapsto ax$$

eine Bijektion und $\forall K \in G/H$ und $\forall g \in G$ gilt $\phi(gK) = g\phi(K)$.

Beweis: • ϕ ist wohldefiniert. Seien $a, b \in G$ s.d. $aH = bH \Leftrightarrow b = ah$ für ein $h \in H \implies bx = a \underbrace{hx}_x = ax$.

- ϕ ist surjektiv: klar, da B_x genau aus den Elementen der Form ax besteht, $a \in G$.
- ϕ ist injektiv: falls $ax = bx \implies x = a^{-1}bx \implies a^{-1}b \in H \implies aH = bH$.
- Die letzte Aussage folgt aus der Definition von ϕ .

□

Bemerkung 26. Sei $x \in X$ und $y = ax$ für $a \in G$. Dann

$$(a) \{g \in G \mid gx = y\} = aG_x$$

$$(b) \quad G_y = aG + xa^{-1}$$

Beweis: (a) $gx = y = ax \Leftrightarrow a^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow g \in aG_x$

(b)

$$\begin{aligned} gy = y &\Leftrightarrow gax = ax \\ &\Leftrightarrow a^{-1}yax = x \\ &\Leftrightarrow a^{-1}ya \in G_x \\ &\Leftrightarrow g \in aG_xa^{-1} \end{aligned}$$

□

Korollar 8 (Bahnformel). $|G| = |G_x| \cdot |B_x|$

(Ordnung G) = (Ordnung des Stabilisators) · (Ordnung der Bahn)

Beweis: Wir haben $|G| = |G_x| \cdot [G : G_x]$. Die Bahnformel folgt nun direkt aus Satz 16. □

Bemerkung 27. • Es folgt direkt, dass $|Bx| = [G : G_x]$. Die Länge jeder Bahn muss die Gruppenordnung teilen.

- Falls X endlich ist: Seien B_1, \dots, B_k die Bahnen. Dann ist

$$|X| = |B_1| + \dots + |B_k|$$

Beispiel: Dodekaeder

$D \subseteq R^3$ Dodekaeder. Sei $G \leq \text{Isom } \mathbb{R}^3$ die orientierungserhaltenden Symmetrien g , so dass $gD = D$. D.h., die Elemente in G sind gegeben durch Matrizen in $SO(3)$. Diese sind Drehungen um Achsen. Was ist $|G|^2$?

G operiert auf den Seiten von D . Sei S eine Seite. G_S besteht aus den Drehungen um Vielfache von $2\pi/5$.

$$\implies |G_S| = 5.$$

G operiert transitiv auf den Seiten. Es gibt 12 Seiten.

$$\implies |G| = |G_S| \cdot 12 = 60.$$

G_S fixiert zwei Seiten \rightsquigarrow zwei Bahnen von Länge 1 + zwei von Länge 5.

$$\rightsquigarrow 1 + 1 + 5 + 5 = 12$$

Definition 20. G heisst die *Ikosaeder Gruppe*.

Vorlesung 8

Satz 17. Sei G eine Gruppe, $H \leq G, K \leq G$ Untergruppen. Dann gilt $[H : H \cap K] \leq [G : K]$.

Beweis: Sei $X = G/K$ und sei $x = K \in X$. D.h. $|X| = [G : K]$ und $G \curvearrowright X$. Dann ist $G_x = K$. Betrachte die Operation $H \curvearrowright X$. Dann ist $H_x = H \cap K$. Sei B die Bahn von x unter H . Dann ist $|B| \leq |X|$. Gemäss Bahnformel ist $|B| = [H : H \cap K] \implies [H : H \cap K] \leq |X| = [G : K]$. \square

Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Jede Operation $G \curvearrowright X$ liefert einen Homomorphismus $\phi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ $\phi(g) := m_g$.

ϕ ist tatsächlich ein Homomorphismus:

$$\phi(gh) = m_{gh}$$

$$\phi(g)\phi(h) = m_g m_h \text{ und } m_g h(x) = (gh)x = g(hx) = m_g(m_h(x)) \quad \forall x \in X.$$

$$\text{d.h. } \phi(gh) = \phi(g)\phi(h).$$

Umgekehrt definiert jeder Homomorphismus $\phi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ eine Operation $G \curvearrowright X$ durch $gx := \phi(g)(x)$.

Mit dieser Beobachtung zeigt man:

Satz 18. Es gibt eine Bijektion

$$\{\text{Operationen } G \curvearrowright X\} \leftrightarrow \{\text{Homomorphismen } G \rightarrow \text{Sym}(X)\}$$

$$G \curvearrowright X \mapsto \phi: G \rightarrow \text{Sym}(X) \quad g \mapsto m_g$$

Definition 21. Eine Operation $G \curvearrowright X$ heisst **treu**, falls der entsprechende Homomorphismus $\phi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ injektiv ist. D.h., falls für ein $g \in G$ gilt $gx = x \quad \forall x$, dann ist $g = 1$.

Satz 19. Sei \mathbb{F}_2 der Körper mit 2 Elementen. Dann ist $G = GL_2(\mathbb{F}_2)$ isomorph zu S_3 .

Beweis: Sei $V = \mathbb{F}_2^2$, $V = \{0, e_1, e_2, e_1 + e_2\}$.

$G \curvearrowright V$ durch Linksmultiplikation. 0 ist Fixpunkt. $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ bildet eine weitere Bahn. Das gibt einen Homomorphismus $\phi: G \rightarrow S_3$. Für $P \in GL_2(\mathbb{F}_2)$ s.d. $Pe_1 = e_1$ und $Pe_2 = e_2 \Leftrightarrow P = 1$, d.h. Diese Operation ist treu und somit effektiv. G ist nicht abelsch $\Rightarrow |G| \geq 6$. $\Rightarrow \phi$ ist ein Isomorphismus. \square

Satz 20. Für $g \in S_3$ sei $k_g: S_3 \rightarrow S_3$ $k_g(a) = gag^{-1}$ ist ein Automorphismus von S_3 . Dann ist $f: S^3 \rightarrow \text{Aut}(S_3)$ $f(g) = k_g$ ein Isomorphismus.¹

Beweis: • f ist Homomorphismus:

$$\begin{aligned} k_{gh}(x) &= (gh)x(gh)^{-1} \\ &= ghxh^{-1}g^{-1} \\ &= k_gk_h(x) \end{aligned}$$

D.h. $k_{gh} = k_gk_h$. $\Rightarrow f(gh) = f(g)f(h)$.

- f ist injektiv: Falls $gag^{-1} = a \quad \forall a \in S_3$ so ist $g = 1$ (kleine Übung).
- f ist surjektiv: Beobachtung: $\text{Aut}(S_3)$ operiert auf die Menge der Elemente von Ordnung 2 $\{y, xy, x^2y\}$:

$$y: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases} \quad x: \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$$

- Die Operation $\text{Aut}(S_3) \curvearrowright \{y, xy, x^2y\}$ ist treu: Falls $\alpha \in \text{Aut}(S_3)$ s.d. $\alpha(y) = y$ und $\alpha(xy) = xy$, so ist auch $\alpha(x) = \alpha(xyy0) = xyy = x$. Da x und $y \in S_3$ erzeugen, ist $\alpha = id$.

D.h., die Abbildung $\text{Aut}(S_3) \rightarrow \text{Sym}(\{y, xy, x^2y\})$ ist injektiv

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |\text{Aut}(S_3)| \leq 6 \\ &\Rightarrow |\text{Aut}(S_3)| = 6 \\ &\Rightarrow S_3 \rightarrow \text{Aut}(S_3) \text{ ist bijektiv, d.h. ein Isomorphismus.} \end{aligned}$$

\square

¹Gilt für fast alle symmetrischen Gruppen .

Satz 21. Die endlichen Untergruppen von $SO(3)$ sind die folgenden:

- C_k : Die zyklische Gruppe der Drehungen um Vielfache von $2\pi/k$ um eine Achse.
- D_k : Die Diedergruppe, also die Symmetrien eines regelmässigen k -Ecks in einer Ebene gegeben durch räumliche Drehungen.
- T : Die Tetraedergruppe, also die 12 Drehungen, die ein Tetraedron erhalten.
- W : Die Würfelgruppe, also die 24 Drehungen, die den Würfel erhalten.
- I : Ikosaedergruppe, also die 60 Drehungen, die ein Dodekaeder/Ikosaeder erhalten.

Beweis: Siehe Artin. □

Vorlesung 9

Mehr über Gruppen

Eine Gruppe operiert auf sich selbst durch Linksmultiplikation:

$$G \times G \rightarrow G \quad (g, x) \mapsto gx$$

. Diese Operation ist transitiv. Sei $x \in G$, dann ist der Stabilisator $G_x = \{1\}$. Insbesondere ist der Homomorphismus injektiv:

$$G \rightarrow \text{Sym}(G) \quad g \mapsto m_g$$

⇒ die Operation ist treu.

Satz 22 (Cayley). Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_n , wobei $n = |G|$.

Beweis: Der Homomorphismus

$$\phi: G \rightarrow \text{Sym}(G) \simeq S_n \quad g \mapsto m_g$$

ist injektiv. ⇒ G ist isomorph zu Bild $\phi \leq \text{Sym}(G) \simeq S_n$. □

G operiert auch auf sich selbst durch Konjugation:

$$G \times G \rightarrow G \quad (g, x) \mapsto gxg^{-1}$$

Sei $x \in G$.

Definition 22. Der Stabilisator von x bezüglich Konjugation heisst **Zentralisator**. Wir schreiben $Z(x)$ mit

$$\begin{aligned} Z(x) &= \{g \in G \mid g x g^{-1} = x\} \\ &= \{g \in G \mid g x = x g\} \end{aligned}$$

Die Bahn von x unter Konjugation heisst **Konjugiertenklasse** oder **Konjugationsklasse** von x in G . Wir schreiben $K(x)$ mit

$$K(x) = \{x' \in G \mid x' = g x g^{-1} \text{ für ein } g \in G\}$$

Bemerkung 28.

- Aus der Bahnformel folgt $|G| = |K(x)| |Z(x)|$.
- $|K(1)| = 1$.

Falls $|G|$ endlich ist, so gilt die sog. **Klassengleichung**:

$$|G| = \sum_{K \text{ Konj. Klasse}} |K| = |K_1| + \cdots + |K_l|$$

Bemerkung 29. Die Zahlen auf der rechten Seite sind Teiler von $|G|$ und mindestens eine davon ist 1.

Beispiel 9. Konjugationsklassen in D_3 . Erzugende: x (Drehung) und y (Spiegelung). $\{1\}, \{x, x^2\}, \{y, xy, x^y\}$. (Kleine Übung). $\xrightarrow{\text{Klassengleichung}} |G| = 1 + 2 + 3$.

Definition 23. Das **Zentrum** Z einer Gruppe G ist der Normalteiler

$$Z = \{x \in G \mid gx = xg \quad \forall g \in G\}$$

Bemerkung 30.

- $x \in Z \Leftrightarrow Z(x) = G$
- $x \in Z \Leftrightarrow |K(x)| = 1$

Definition 24. Sei p eine Primzahl. Eine **p -Gruppe** ist eine Gruppe G , sodass $|G| = p^e$ für ein $e \geq 1$.

Beispiel 10.

- $C_p, C_{p^2}, C_{p^3}, \dots$ sind p -Gruppen
- $C_p \times C_p \times \cdots \times C_p$
- $U_3(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\} \leq GL_3(\mathbb{F}_p)$ ist eine p -Gruppe von Ordnung p^3 .

Satz 23. Das Zentrum von einer p -Gruppe ist strikt grösser als die triviale Gruppe $\{1\}$.

Beweis: Klassengleichung:

$$|G| = p^e = \sum_{KKonj.\text{klassen}} |K| = 1 + \sum_{KKonj.\text{klassen}} |K|$$

alle $|K|$ sind Teiler von p^e .

\implies es gibt weitere Konjugationsklassen mit nur einem Element.

\implies es gibt $x \in G \setminus \{1\}$ sodass $x \in Z$. \square

Beispiel 11. Das Zentrum von $U_3(\mathbb{F}_p)$ ist die Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_p \right\} \simeq \mathbb{F}_p$$

Satz 24. Sei G eine p -Gruppe und X eine endliche Menge, sodass $p \nmid |X|$. Falls $G \curvearrowright X$, dann gibt es ein $x \in X$ sodass $gx = x \quad \forall g \in G$.

Beweis: Seien B_1, \dots, B_k die Bahnen von G . Dann ist $|X| = |B_1| + \dots + |B_k|$. Gemäss Bahnformel gilt $|B_i||G_i| \quad \forall i = 1, \dots, k$. Da $p \nmid |X|$, ist $|B_i| = 1$ für mindestens ein i . \square

Satz 25. Jede Gruppe G der Ordnung p^2 ist abelsch.

Beweis: Nehmen wir an, dass G nicht abelsch ist. Dann gibt es ein $x \in G$, sodass $x \notin Z$ und somit $Z \subsetneq Z(x)$. Wir wissen, dass $|Z| \geq p$. Da $|Z(x)| \mid |G|$, d.h. $|Z(x)| = p^2 \implies Z(x) = G$, damit folgt aber, dass $x \in Z$. \square

$\implies G$ ist abelsch. \square

Bemerkung 31. Es gibt nichtabelsche Gruppen von Ordnung p^3 , z.B. $|U_3(\mathbb{F}_p)| = p^3$ und $|D_4| = 8 = 2^3$.

Korollar 9. Sei G eine Gruppe mit p^2 Elementen. Dann ist entweder $G \simeq C_{p^2}$ oder $G \simeq C_p \times C_p$.

Beweis: Jedes Element in G hat Ordnung 1, p oder p^2 .

1. Fall: G enthält ein Element von Ordnung p^2 . $\implies G$ ist zyklisch.

2. Fall: Alle Elemente in $G \setminus \{1\}$ haben Ordnung p . Sei $x \in G \setminus \{1\}$ und $H_1 = \langle x \rangle$. Sei $y \in G \setminus H$, und $H_2 = \langle y \rangle$. Dann ist $H_1 \cap H_2 \leq H_2$ und somit $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

G ist abelsch $\implies H_1$ und H_2 sind Normalteiler. $\implies H_1 H_2 \leq G$.

Da $H_1 \leq H_1 H_2$ ist, ist $|H_1 H_2| = p^2 \implies H_1 H_2 = G$. Wir haben gesehen, dass daraus folgt:

$$G \simeq H_1 \times H_2$$

□

Ikosaedergruppe

Erinnerung: $I \leq SO(3)$ die Untergruppe der Drehungen, die das Dodekaeder $D \subseteq \mathbb{R}^3$ erhalten.

Gesehen: $|I| = 60$

- Identität (Ord. 1)
- Drehungen, die Eckpunkte von D fixieren: Es gibt 20 Ecken, also 10 Drehachsen $\implies 2 \cdot 10 = 20$ solche Drehungen $\neq id$. (Ord. 3) Sind alle konjugiert zueinander (s. unten).
- Drehungen um Mittelpunkte von Seiten. Es gibt 12 Flächen, also 6 mögliche Drehachsen. $\implies 6 \cdot 4 = 24$ solche Drehungen $\neq id$. (Ord. 5)
- Drehungen um Mittelpunkte von Kanten. Es gibt 30 Kanten, also 15 mögliche Drehachsen. $\implies 15$ solche Drehungen. (Ord. 2)

$60 = 1 + 20 + 24 + 15 \rightsquigarrow$ Das sind alle möglichen Elemente in I .

Was sind die Konjugationsklassen?

Bemerkung 32. Seien $g, x \in G$, so ist $ord(gxg^{-1}) = ord(x)$.

- Die Identität bildet eine Konjugationsklasse.
- Alle Rotationen um $2\pi/3$ (im Gegenuhrzeigersinn) um Achsen durch Ecken sind konjugiert.
- Alle Rotationen um $2\pi/5$ um Achsen durch Seiten sind konjugiert zueinander und zu den Rotationen um den Winkel $-2\pi/5 = 8\pi/5$.
- Alle Rotationen um Achsen durch Seiten um $4\pi/5$ und um $-4\pi/5 = 6\pi/5$ sind konjugiert.
- Alle Rotationen um Achsen durch Kanten um den Winkel π sind konjugiert.

\implies 5 Konjugationsklassen. Klassengleichung: $60 = 1 + 20 + 12 + 12 + 15$.

Vorlesung 10

Einfache Gruppen

Definition 25. Eine Gruppe G ist *einfach*, falls $\{1\}$ und G die einzigen Normalteiler von G sind.

Bemerkung 33. G ist einfach \Leftrightarrow für alle surjektiven Homomorphismen $\phi: G \rightarrow G'$ gilt $G = G'$ oder $G' = \{1\}$.

Bemerkung 34. Einfache Gruppen sind die "Bausteine" von Gruppen.

Bemerkung 35. $\{1\}$ ist nicht einfach.

Beispiel 12. C_p für p prim.

Satz 26. Die Ikosaedergruppe I ist einfach.

Beweis: Klassengleichung von I :

$$60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$$

Sei $N \trianglelefteq G \implies gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$.

\implies falls $x \in N$, so ist auch die Konjugationsklasse $K(x) \subseteq N$. Das heisst $N = \bigcup_{x_i \in N} K(x_i)$. $|N|$ teilt 60.

Es folgt:

$$\begin{aligned} N &= 1 + \text{ Terme aus } \{15, 20, 12, 12\} \\ &\implies |N| = 1 \text{ oder } |N| = 60 \\ &\implies N = \{1\} \text{ oder } |N| = I \\ &\implies I \text{ ist einfach.} \end{aligned}$$

□

Satz 27. I ist isomorph zu A_5 .

Beweis: Wir suchen eine Menge mit 5 Elementen, auf welche I operiert. Es gibt 5 Möglichkeiten, einen Würfel in ein Dodekaeder D einzubetten, sodass die Ecken auch Ecken von D sind und die Kanten in den Seiten von D sind. Jede Seite von D enthält genau eine Würfekante. Die Wahl von einer solchen Kante definiert die Einbettung.

\rightsquigarrow 5 mögliche Einbettungen vom Würfel. I operiert darauf.

$\rightsquigarrow \phi: I \rightarrow S_5$.

$\implies \text{Kern } \phi = I \text{ oder } \text{Kern } \phi = \{I\}$ einfach.

$\text{Kern } \phi = I$ ist nicht möglich, da die Operation nicht trivial ist.

$\implies \text{Kern } \phi = \{1\}$ und ϕ injektiv.

Betrachte $I \xrightarrow{\phi} S_5 \xrightarrow{\text{sign}} \{\pm 1\}$.

Dann ist $\text{Kern sign} \phi = I$ da I keine Normalteiler von Ordnung 30 enthält.

$\implies \phi(I) \subseteq A_5$.

Da $|I| = |A_5| = 60$, folgt: $\phi: I \rightarrow A_5$ ist ein Isomorphismus. \square

Korollar 10. $A + 5$ ist einfach.²

Operationen auf Teilmengen

Falls $G \curvearrowright X$, so operiert G auch auf die Menge der Teilmengen $\mathcal{P}(X)$ von X .

$G \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ für $U \subseteq X$, $gU = \{gu \mid u \in U\} \subseteq X$.

Dies definiert eine Gruppenoperation.

Bemerkung 36. $|gU| = |U|$, das heisst, wir können auch auf Teilmengen von gegebener Grösse beschränken.

Sei $U \subseteq X$. Der Stabilisator G_U von U besteht aus den $g \in G$ sodass $gU = U$, das heisst, $gu \in U \forall u \in U$.

Vorlesung 11

Gesehen: Wenn $G \curvearrowright X$, dann operiert G auch auf die Menge der Teilmengen von X . Für $U \subseteq X$ ist der Stabilisator $\text{Stab}(U) = G_U = \{g \in G \mid gU = U\}$

Satz 28. $G \curvearrowright X$. Sei $U \subseteq X$ und $H \leq G$. Dann ist $H \leq \text{Stab}(U) \Leftrightarrow U$ ist die Vereinigung von allen H -Bahnen.

Beweis: H stabilisiert U

\Leftrightarrow die H -Bahn B_x ist in U enthalten $\forall x \in U$

$$\Leftrightarrow U = \bigcup_{x \in U} B_x. \quad \square$$

$G \curvearrowright \{\text{Teilmengen von } G\}$ durch Linksmultiplikation.

Satz 29. Sei $U \subseteq G$. Dann ist $|\text{Stab}(U)|$ ein Teiler von $|U|$.

Satz 30. Sei $H = \text{Stab}(U)$. Dann operiert H auf U . $\implies U$ ist eine Vereinigung von H -Bahnen. Diese sind von der Form $H_g, g \in U \implies U$ ist eine Vereinigung von Rechtsnebenklassen von $H \implies |U|$ ist Vielfaches von $|H|$.

$G \curvearrowright \{\text{Teilmengen von } G\}$ durch Konjugation.

²Tatsächlich sind alle alternierenden Gruppen ausser A_4 einfach.

Definition 26. Sei $H \leq G$. Dann ist die Bahn von H unter dieser Operation die Menge der zu H konjugierten Untergruppen. Das heisst

$$B_H = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$$

Der Stabilisator von H unter dieser Operation heisst **Normalisator von H** .

$$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Bemerkung 37.

- $H \leq N(H)$
- $N(H) = G \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$ ist Normalteiler.

Bahnformel: $|G| = |N(H)| \cdot |\{\text{zu } H \text{ konjugierte Untergruppen}\}|$.

Die Sylow Sätze

Gesehen: Sei G Gruppe, $H \leq G \implies |H||G|$.

Clicker-Frage: Sei G eine Gruppe und d ein Teiler von $|G|$. Folgt daraus dass eine Untergruppe $H \leq G$ existiert, mit $|H| = d$? **Nein.**

Beispiel: $|I|=60$, aber I hat keine Untergruppe von Ordnung 30.

Behauptung 2. $H \leq G, [G : H] = 2$, dann ist H normal.

Beweis: Sei $g \in G \setminus H$.

$G = H \cup gH$ und $G = H \cup Hg$ d.h.

$$gH = G \setminus H = Hg$$

\implies Links- und Rechtsnebenklassen stimmen überein. $\implies H \trianglelefteq G$. \square

Sei p prim und G eine endliche Gruppe, s.d. $|G| = n = p^e m$, wobei $e \geq 0, p \nmid m$.

Satz 31 (Sylow I). Es gibt eine Untergruppe $H \leq G$ sodass $|H| = p^e$.

Definition 27. Eine solche Untergruppe H heisst **p -Sylowuntergruppe** (" p -Sylow").

Korollar 11. Wenn $p \mid |G|$, dann existiert ein $x \in G$ von Ordnung p .

Beweis: Gemäss Sylow I: $\exists H \leq G$, s.d. $|H| = p^e$

Sei $y \in H \setminus \{1\}$.

Dann hat y Ordnung p^r für $1 \leq r \leq e$. $\implies y^{p^{r-1}}$ hat Ordnung p . \square

Satz 32 (Sylow II). Sei G eine endliche Gruppe.

- (a) Alle p -Sylowuntergruppen in G sind konjugiert zueinander. D.h. falls $H, H' \leq G$ p -Sylow sind, so $\exists g \in G$, s.d. $gHg^{-1} = H'$.
- (b) Sei $K \leq G$ eine Untergruppe, sodass $|K| = p^d$, so ist K in einer p -Sylow von G enthalten.

Satz 33 (Sylow III). Sei s die Anzahl der p -Sylows in G . Dann gilt $s|m$ und $s \equiv 1 \pmod{p}$. ($|G| = p^e m$)

Anwendungen von Sylowsätzen

Satz 34. Jede Gruppe der Ordnung 15 istzyklisch.

Beweis: Sei G eine Gruppe, sodass $|G| = 15 = 5 \cdot 3$.

\implies Die Anzahl der 5-Sylows ist Teiler von 3 und $\equiv 1 \pmod{5}$.
Sylow III

\implies Es gibt nur eine Untergruppe $H \leq G$ mit $|H| = 5$. Insbesondere ist $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$. D.h. $H \trianglelefteq G$.

Die Anzahl von 3-Sylows ist Teiler von 5 und $\equiv 1 \pmod{3}$.

\implies Es gibt eine eindeutige Untergruppe $K \leq G$ von Ordnung 3.

Insbesondere ist K normal.

$$H \cap K = \{1\}$$

$HK \leq G$ ist eine Untergruppe. Da $|HK| > 5$, gilt $HK = G$.

\implies $G \simeq H \times K$. Wir haben $H \simeq C_5, K \simeq C_3$ (Gruppen von Ordnung p sind zyklisch).
Satz

$\implies G \simeq C_5 \times C_3 \simeq C_{15}$. □

Satz 35. Sei G eine Gruppe, sodass $|G| = 10$. Dann ist $G \simeq C_5 \times C_2 \simeq C_{10}$ oder $G \simeq D_5$.

Beweis: Die Anzahl der 5-Sylows teilt 2 und ist $1 \pmod{5}$.

\implies Es gibt nur eine 5-Sylow $K \leq G$ und diese ist somit normal.

$K \simeq C_5$. Sei $x \in K$ sodass $K = \langle x \rangle$.

Sei H eine 2-Sylow. Sei $y \in H$, sodass $H = \langle y \rangle$. Da K normal ist, ist $yxy^{-1} = x^r$ für $1 \leq r \leq 4$ d.h. $yx = x^ry$.

Da $K \cap H = \{1\}$, folgt, dass die $x^i y^j$ alle verschieden sind

$$\begin{aligned} (x^i y^j &= x^{i'} y^{j'}) \\ \implies x^{i-i'} &= y^{j-j'} \\ \implies i - i' &= j - j' \end{aligned}$$

Das heisst $G = \{x^i y^j \mid 0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 1\}$ und die Relationen $x^5 = 1, y^2 = 1, xy = x^r y$ definieren die Gruppenstruktur eindeutig.

Welche Werte kann r annehmen?

Falls $yx = x^r y$:

$$\implies x = yyx = yx^r y = x^{r^2} yy = x^{r^2}$$

$$\implies r^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\implies r = 2 \text{ und } r = 3 \text{ nicht möglich!}$$

Falls $r = 1$, dann ist $yx = xy$, insbesondere ist $H \trianglelefteq G$ normal.

Da $HK = G$ und $H \cap K = \{1\}$

$$\implies G \simeq H \times K \simeq C_2 \times C_5 = C_{10}.$$

Falls $r = 4$, dann ist $yx = x^4 y = x^{-1} y \implies G \simeq D_5$. \square

Satz 36. Sei G eine Gruppe, sodass $|G| = pq$ für p, q prim. Sei $p > q$. Falls $p \not\equiv 1 \pmod{q}$, so ist $G \simeq C_{pq}$.

Falls $p \equiv 1 \pmod{q}$, so ist $G \simeq C_{pq}$ oder G ist nicht abelsch. (Selbe Beweisidee wie oben).

Lemma 4. Sei $n = p^e m$, $p \nmid m$, p prim, $e \geq 0$. Dann teilt p nicht $N = \binom{n}{p^e}$.

Beweis:

$$N = \binom{n}{p^e} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p^e+1)}{p^e(p^e-1) \cdots 1}$$

Sei $0 \leq k \leq n-1$. Schreibe $k = p^i l$, $p \nmid l$.

Dann gilt $p^i \mid (n-k)$ und $p^i \mid (p^e - k)$, aber $p^{i+1} \nmid (n-k)$ und $p^{i+1} \nmid (p^e - k)$.

Das heisst, Zähler und Nenner sind gleich oft durch p teilbar.

$$\implies p \nmid N. \quad \square$$

Satz 37 (Wiederholung Sylow I). Sei G eine Gruppe, sodass $|G| = p^e m$, dann existiert $H \leq G$, $|H| = p^e$. Beweis von Sylow 1;

Beweis: Sei X die Menge aller Teilmengen von G mit p^e Elementen.

Betrachte $G \curvearrowright X$ durch Linksmultiplikation.

$$|X| = \binom{n}{p^e} =: N$$

$$\text{Wir haben } N = |X| = \sum_{B \text{ Bahnen}} |B|$$

Da $p \nmid N$, gibt es ein $U \in X$, sodass $p \nmid |B_U|$.

Bahnformel: $|\text{Stab}(U)| \cdot |B_U| = |G| = p^e m$

$$\implies p^e |\text{Stab}(U)|.$$

Vorher gesehen: $|\text{Stab}(U)| | |U| = p^e$.

$$\implies |\text{Stab}(U)| = p^e$$

$\implies \text{Stab}(U) \leq G$ ist eine p-Sylow. \square

Vorlesung 12

Satz 38 (Erinnerung: Sylow II).

(a) Alle p-Sylows in G sind konjugiert zueinander

(b) Sei $K \leq G$ eine Untergruppe, sodass $|K| = p^d$, so ist K in einer p-Sylow enthalten.

Beweis Sylow II. Sei $H \leq G$ eine p-Sylow. Betrachte $G \curvearrowright X = G/H$ durch Linksmultiplikation.

$$|X| = [G : H] = m$$

Sei $K \leq G, |K| = p^d, d \leq e$.

Behauptung: $\exists a \in G$, s.d. $a^{-1}Ka \subseteq H$. Die Behauptung impliziert (a) und (b): Falls $d = e$, so ist $a^{-1}Ka = H$. Falls $d \leq e$, so ist K in der p-Sylow aHa^{-1} enthalten.

Beweis der Behauptung: Betrachte $K \curvearrowright X = G/H$, d.h. für $k \in K, a \in G$ ist $k(aH) = kaH$. Wir haben:

$$m = |X| = \sum_{\text{K-Bahnen } B} |B|$$

$$|B| | |K| = p^d \text{ für alle Bahnen } B.$$

Da $p \nmid m$, folgt, dass eine Bahn B existiert, sodass $|B| = 1$.

Das heisst, es gibt eine Nebenklasse $aH \in G/H$, sodass $kaH = aH, \forall k \in K$.

$$\implies a^{-1}kaH = H$$

$$\implies a^{-1}ka \in H$$

und somit $a^{-1}Ka \leq H$. \square

Satz 39 (Erinnerung: Sylow III). Sei s die Anzahl der p-Sylows in G . Dann:

$$s|m \text{ und } s \equiv 1 \pmod{p}$$

Beweis Sylow III. Sei Y die Menge der p-Sylows in G . G operiert auf Y durch Konjugation:

$$H \mapsto gHg^{-1}$$

Gemäss Sylow II gibt es nur eine Bahn.

Bahnformel:

$$\begin{aligned} |G| &= |Y||\text{Stab}(H)| \\ &= |Y||N(H)| \end{aligned}$$

D.h., $|Y| = [G : N(H)]$.

Da $H \leq N(H)$, ist $|H| = p^e$ ein Teiler von $|N(H)| = p^e c$.

$$|G| = p^e m = |Y| \cdot {}^e c \implies |Y| \mid m$$

Sei H eine p-Sylow. Betrachte $H \curvearrowright Y$ durch Konjugation. Sei $H' \in Y$ sodass H' von H stabilisiert wird. $\implies H \leq N(H')$.

Da $|N(H')| \mid |G|$, ist p^e die höchste Potenz von p , die $|N(H')|$ teilt.

$\implies H$ und H' sind p-Sylows in $N(H')$.

$\implies \exists g \in N(H')$, sodass $H' = gH'g^{-1} = H$.

Das heisst, H ist der einzige Fixpunkt der Operation $H \curvearrowright Y$. Die Längen der anderen Bahnen sind Vielfache von p (da sie $|H| = p^e$ teilen).

$\implies |Y| \equiv 1 \pmod{p}$. □

Satz 40. Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann ist G isomorph zu dem Produkt $G_{p_1} \times \cdots \times G_{p_r}$, wobei die G_{p_i} p_i -Gruppen für Primzahlen p_1, \dots, p_r sind.

Beweis: Schreibe $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$ (Primfaktorisierung).

Sei H_i eine p_i -Sylow für $i = 1, \dots, n$. Alle H_i sind normal. $H_1 H_2$ ist Untergruppe von G und $H_1 H_2$ ist isomorph zu $H_1 \times H_2$, da $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

Per Induktion zeigt man ähnlich, dass $H_1 H_2 \cdots H_s$ eine Untergruppe ist und isomorph zu $H_1 \times \cdots \times H_s$:

$$H_1 \cdots H_{s-1} \simeq H_1 \times \cdots \times H_{s-1}$$

$(H_1 \cdots H_{s-1}) H_s$ ist Untergruppe

$$H_1 \cdots H_{s-1} \cap H_s = \{1\}.$$

$$\implies H_1 \times \cdots \times H_n \simeq H_1 \cdots H_n.$$

Da $H_1 \times \cdots \times H_n$ genau $|G|$ Elemente enthält, folgt $G = H_1 \cdots H_n \simeq H_1 \times H_1 \times \cdots \times H_n$. □

Definition 28. Eine Gruppe G heisst **endlich erzeugt**, wenn es eine endliche Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq G$ gibt, sodass $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

Satz 41. Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann ist G isomorph zu $\mathbb{Z}^n \times C_{p_1^{r_1}} \times \dots \times C_{p_n^{r_n}}$, wobei p_1, \dots, p_n Primzahlen sind (nicht unbedingt verschieden) und $r_i \geq 0$.

Beweis: Siehe Algebra II. □

Vorlesung 13

Freie Gruppen

Sei X eine Menge von **Zeichen**.

Beispiel 13. $X = \{a, b, c\}$

Ein **Wort** ist eine endliche Folge von Zeichen.

Beispiel 14. $X = \{a, b\}$

$a, b, aa, bababb$ sind Wörter in X .

Sei W die Menge aller Wörter in X . Wir können Wörter zusammenhängen.

Beispiel 15. $aa, ba \mapsto aaba$.

Dies definiert eine assoziative Verknüpfung, somit haben wir eine **Semigruppe** (Menge mit assoziativer Verknüpfung).

$W \times W \rightarrow W \quad v, w \mapsto vw$.

Das leere Wort ist das neutrale Element bezüglich dieser Verknüpfung. Wir bezeichnen es mit 1. Somit erhalten wir ein **Monoid** (Semigruppe mit neutralem Element).

Dieses oben definierte Monoid nennt sich das **freie Monoid**.

Um eine Gruppe zu definieren, brauchen wir auch noch Inverse.

Wir fügen zu jedem Zeichen $a \in X$ noch ein Zeichen a^{-1} hinzu. Diese neue Menge nennen wir X' .

Beispiel 16. $X = \{a, b\} \implies X' = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$

Sei W' die Menge der Wörter mit Zeichen in X' .

Beispiel 17. $X' = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$

$aa^{-1}b \in W', b \in W', b^{-1}b \in W'$

Falls in einem Wort $w \in W'$ für ein $x \in X$ der Abschnitt $\dots xx^{-1} \dots$ oder $\dots x^{-1}x \dots$ vorkommt, so kürzen wir die zwei Symbole x, x^{-1} weg und erhalten ein kürzeres Wort.

Definition 29. Ein Wort ist **reduziert**, wenn man keine solche Kürzung mehr möglich ist.

Bemerkung 38. Ein gegebenes Wort $w \in W'$ lässt sich endlich oft kürzen, bis wir ein reduziertes Wort w_0 enthalten. Ein solches w_0 heisst **reduzierte Form** von w .

Beispiel 18. $babb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca$

Mögliche Kürzungen:

- $babb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca \rightarrow baa^{-1}c^{-1}ca \rightarrow bc^{-1}ca \rightarrow ba$
- $babb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca \rightarrow babb^{-1}a^{-1}a \rightarrow babb^{-1} \rightarrow ba$

Satz 42. Jedes Wort $w \in W'$ hat genau eine reduzierte Form.

Beweis: Induktion über die Länge von w .

Base case ist klar für $|w| = 0$.

Falls w reduziert ist, sind wir fertig.

Falls w nicht reduziert ist:

$w = \dots xx^{-1} \dots$ für ein $x \in X'$

Behauptung: Wir erreichen jede reduzierte Form von w , indem wir zuerst $\dots xx^{-1} \dots$ kürzen. Dies impliziert den Satz per Induktion.

Beweis der Behauptung: Sei w_0 eine reduzierte Form von w .

Fall 1: xx^{-1} wird irgendwann einmal weggekürzt. Dann können wir xx^{-1} auch direkt kürzen.

Fall 2: $x^x - 1$ wird nicht gekürzt. Das Paar $x^x - 1$ kommt nicht in w_0 vor, d.h. irgendwann ist entweder $\dots x^{-1}xx^{-1} \dots$ oder $\dots xx^{-1}x \dots$

Diese Vereinfachung hat jedoch denselben Effekt wie wenn man xx^{-1} kürzt \rightsquigarrow
Fall 1. \square

Für zwei Wörter $w, w' \in W$ definiere $w \sim w'$, falls w und w' dieselbe reduzierte Form haben.

\rightsquigarrow Äquivalenzrelation auf W' .

Satz 43. Seien $v, v', w, w' \in W'$. Aus $w \sim w'$ und $v \sim v'$ folgt $wv \sim w'v'$.

Beweis: $wv \underset{\text{vereinfachen}}{\rightsquigarrow} w_0v_0 \rightsquigarrow$ weiter vereinfachen.

Ähnlich $w'v' \underset{\text{vereinfachen}}{\rightsquigarrow} w_0v_0 \rightsquigarrow$ weiter vereinfachen.

$\Rightarrow wv$ und $w'v'$ haben dieselbe reduzierte Form. \square

Satz 44. Die Menge F der Äquivalenzklassen von Wörtern in W' bildet mit der von W' induzierten Verknüpfung eine Gruppe.

Beweis: Die von W' induzierte Verknüpfung ist wohldefiniert gemäss obigem Satz.

Assoziativität ist klar.

Neutrales Element: 1; folgt auch aus der Verknüpfung.

Inverse: Für die Klasse von $w = xy \dots z$ ist die Klasse von $z^{-1} \dots y^{-1}x^{-1}$ ein Inverses. \square

Definition 30. Diese Gruppe F ist die **freie Gruppe** auf der Menge X .

Bemerkung 39. Jedes Element in F entspricht genau einem reduzierten Element. Verknüpfung: hintereinander schreiben, dann reduzieren.

Beispiel 19. Sei F die freie Gruppe auf $\{a, b, c\}$.

$$(abc^{-1})(cb) = abc^{-1}cb = abb$$

Bemerkung 40. Wir verwenden Produktschreibweise:

$$aaab^{-1}b^{-1} = a^3b^{-2}$$

Beispiel 20. Sei F die freie Gruppe auf $X = \{a\}$. Dann ist $F = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$

Sobald $|X| \geq 2$, wird F sehr kompliziert.

Satz 45. Sei F die freie Gruppe auf X und G eine Gruppe.

Jede Abbildung $f: X \rightarrow G$ lässt sich in eindeutiger Weise zu einem Homomorphismus $\phi: F \rightarrow G$ fortsetzen.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow & \swarrow \exists! \phi & \\ F & & \end{array}$$

Beweis: Sei $w = x_1 \dots x_n$ ein Wort in W' . Wir definieren $\phi(w) = f(x_1) \dots f(x_n)$, wobei $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

ϕ ist wohldefiniert: Zwei äquivalente Wörter werden auf dasselbe Element in G abgebildet.

ϕ ist offensichtlich ein Homomorphismus und eindeutig. \square

Bemerkung 41. Seien G eine Gruppe, $X \subseteq G$ und F die freie Gruppe auf X . Dann existiert ein Homomorphismus $\phi: F \rightarrow G$.

Falls $X \subseteq G$ Erzeugende von G sind, dann ist ϕ surjektiv.

$\xrightarrow[1. \text{ Isosatz}]{} G \simeq F/N$, wobei $N = \text{Kern } \phi$.

Die Elemente in N heissen **Relationen** zwischen den Erzeugenden.

D.h., $w \in F$ ist eine Relation $\Leftrightarrow \phi(w) = 1$, d.h. $w = 1$ in G .

Umgekehrt, falls F die freie Gruppe auf X ist und $N \trianglelefteq F$, so ist $G = F/N$ die Gruppe, in der die Relationen $N = 1$ gelten $\forall n \in N$.

Definition 31. Eine Teilmenge $R \subseteq N$ heisst Menge von **definierenden Relationen** für G , falls N der kleinste Normalteiler ist, der R enthält, d.h.

$$N = \bigcap_{\substack{H \trianglelefteq G \\ R \subseteq H}} H$$

X und R definieren G . Wir schreiben $G = \langle X \mid R \rangle$.

$\langle X \mid R \rangle$ heisst **Präsentation** von G .

Satz 46. Seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$, und $\pi: G \rightarrow \overline{G} = G/N$ Quotient, $a \mapsto \bar{a} = aN$.

Sei $\phi: G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus mit $N \subseteq \text{Kern } \phi$. Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\bar{\phi}: \overline{G} \rightarrow G'$, sodass $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & G' \\ \pi \searrow & \swarrow \text{Q} & \\ & \overline{G} & \end{array}$$

$$\exists! \bar{\phi}$$

Beweis: Wir definieren $\bar{\phi}(\bar{a}) := \phi(a)$.

Da $\bar{\phi}(\pi(a)) = \phi(a)$ sein soll, gibt es keine andere Wahl.

$\bar{\phi}$ ist wohldefiniert: Seien $a, a' \in G$ s.d. $\bar{a} = \bar{a}' \implies \exists n \in N \text{ s.d. } a' = an$.
 $\underset{N \in \text{Kern } \phi}{\implies} \phi(a') = \phi(a)\phi(a) = \phi(a)$.

$\bar{\phi}$ ist ein Homomorphismus: $\bar{\phi}(\bar{a})\bar{\phi}(\bar{b}) = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = \bar{\phi}(\bar{ab})$. \square

Satz 47. Diedergruppe $D_n = \langle x, y \mid x^n, y^2, xyxy \rangle$.

Beweis: Wir haben gesehen, dass D_n von der Drehung x und der Spiegelung y erzeugt ist und dass gilt: $x^n = 1, y^n = 1, xyxy = 1$.

Sei F die freie Gruppe auf $\{x, y\} \implies \exists$ surjektiver Homomorphismus

$$\phi: F \rightarrow D_n \text{ s.d. } R = \{x^n, y^n, xyxy\} \subseteq \text{Kern } \phi.$$

Sei N der kleinste Normalteiler, der R enthält.

$$\implies N \subseteq \text{Kern } \phi.$$

$$\underset{\text{satz}}{\implies} \exists \text{ Homomorphismus } \bar{\phi}: F/N \rightarrow D_n, \text{ s.d. } \bar{\phi} \circ \pi = \phi,$$

wobei $\pi: F \rightarrow F/N$.

Zu zeigen: $\bar{\phi}$ ist ein Isomorphismus.

- $\bar{\phi}$ ist surjektiv, da ϕ surjektiv ist.

- in F/N gilt $\bar{x}^n = 1, \bar{y}^2 = 1, \bar{xyxy} = 1$

\implies Wir können jedes Element in F/N auf die Form $\bar{x}^i \bar{y}^j$ bringen, mit $0 \leq i \leq n - 1$ und $0 \leq j \leq 1$.

$\implies F/N$ enthält $\leq 2n$ Elemente.

Da $|D_n| = 2n$, folgt, dass $\bar{\phi}$ bijektiv sein muss.

□

Satz 48. Die Gruppe $G = \langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ ist abelsch.

Beweisidee.

- x, y, x^{-1}, y^{-1} kommutieren alle miteinander.
- Alle Wörter kommutieren.

□

Vorlesung 14

Ringe (Kapitel 10 in Artin)

Definition 32. Ein **Ring** R ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und \cdot , Addition und Multiplikation, sodass die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (a) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Bezeichne das neutrale Element mit 0 .
- (b) Die Multiplikation ist assoziativ und hat ein neutrales Element $1 \in R$.
- (c) Für alle $a, b, c \in R$ gilt: $(a + b)c = ac + bc$ und $c(a + b) = ca + cb$ (Distributivgesetz).

Beispiele

- Die ganzen Zahlen \mathbb{Z}
- Der Nullring $R = \{0\}$
- $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \left\{ \frac{a}{2^k} \mid a, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Die Gaußschen Zahlen: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\text{Mat}_{n \times n}$, der Ring der $(n \times n)$ -Matrizen über einem Körper K . (Hier ist die Multiplikation nicht kommutativ.)

Bemerkung 42. Ein **kommutativer Ring** ist ein Ring, in dem die Multiplikation kommutativ ist. In dieser Vorlesung: Ring = kommutativer Ring.

Bemerkung 43. In manchen Quellen ist die Existenz eines neutralen Elements nicht Teil der Definition eines Rings.

Satz 49. Sei R ein Ring. Dann gilt $0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in R$.

Beweis: Sei $x \in R$. Dann ist $xa = (0 + x)a = 0a + xa \implies 0a = 0$. □

Daraus folgt direkt:

Korollar 12. Sei R ein Ring. Falls $1 = 0$, so ist R der Nullring.

Bemerkung 44. $(-1)a = -a$ für alle $a \in R$.

Beweis: $a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = 0 \implies (-1)a = -a$ □

Definition 33. Ein Ring R ist ein **Körper**, falls R nicht der Nullring ist und jedes Element in $R \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses hat.

Definition 34. Seien R, R' Ringe. Ein **Homomorphismus** $\phi: R \rightarrow R'$ ist eine Abbildung, s.d. $\forall a, b \in R$:

- (1) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$
- (2) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$
- (3) $\phi(1_R) = 1_{R'}$

Falls ϕ ausserdem bijektiv ist, so ist ϕ ein **Isomorphismus**.

Bemerkung 45. Ein Ringhomomorphismus ist immer auch ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der additiven Gruppe. $\implies \phi(0_R) = 0_{R'}$.

Beispiele

- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Ringhomomorphismus.
- Sei R der Nullring. Es gibt keinen Homomorphismus $\phi: R \rightarrow R'$, wenn R' nicht auch der Nullring ist.

Definition 35. Sei $\phi: R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus. Der **Kern** von ϕ ist $\text{Kern } \phi = \{a \in R \mid \phi(a) = 0\}$

Bemerkung 46. Ein Ringhomomorphismus $\phi: R \rightarrow R'$ ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern } \phi = 0$, da ϕ ein Homomorphismus von den additiven Gruppen ist.

Definition 36. Sei R ein Ring. Ein **Unterring** $S \subseteq R$ ist eine Teilmenge, s.d.

- (1) S ist eine Untergruppe bezüglich Addition
- (2) S ist abgeschlossen bezüglich Multiplikation
- (3) $1 \in S$

Bemerkung 47.

- Falls $R \neq 0$, so ist $\text{Kern } \phi$ kein Unterring (da $1 \notin \text{Kern } \phi$).
- Falls $a \in \text{Kern } \phi$ und $r \in R$, so ist auch $ra \in \text{Kern } \phi$.

Definition 37. Ein **Ideal** $I \subseteq R$ ist eine Teilmenge s.d.

- (i) $I \subseteq R$ ist eine additive Untergruppe
- (ii) Ist $a \in I$, dann ist für alle $r \in R$ auch $ra \in I$.

Bemerkung 48.

- $\text{Kern } \phi \subseteq R$ ist ein Ideal
- $I \subseteq R$ ist ein Ideal genau dann, wenn $I \neq \emptyset$ und für alle $a_1, \dots, a_n \in I$ und $r_1, \dots, r_n \in R$ (und alle n) gilt, dass $r_1a_1 + \dots + r_na_n \in I$.

Beweis: Kleine Übung. □

Vorlesung 15

Definition 38. Sei R ein Ring. Ein **Unterring** $S \subseteq R$ ist eine Teilmenge, s.d. $S \subseteq R$ ist eine Teilmenge, sodass

- (1) S ist Untergruppe bezüglich Addition
- (2) S ist abgeschlossen bezüglich Multiplikation
- (3) $1 \in S$

Definition 39. Sei R ein Ring. Ein **Ideal** $I \subseteq R$ ist eine Teilmenge, s.d.

(a) I ist eine Untergruppe bezüglich Addition.

(b) Ist $n \in R$ und $a \in I$, so ist $ra \in I$.

Bemerkung 49. Sei $\phi: R \rightarrow R'$ ein Homomorphismus. $\implies \text{Bild } \phi \subseteq R'$ ist ein Unterring.

Beweis: Bild ϕ ist eine Untergruppe, da ϕ auch Gruppenhomomorphismus ist.

$$a = \phi(r), b = \phi(s) \text{ für } r, s \in R$$

$$\implies ab = \phi(r)\phi(s) = \phi(rs), \text{ d.h. } ab \in \text{Bild } \phi.$$

\implies abgeschlossen bez. Multiplikation.

$$1_{R'} \in \text{Bild } \phi \text{ da } \phi(1_R) = \phi(1_{R'}).$$

□

Beispiel

- Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $n\mathbb{Z}$ ein Ideal.
- Allgemein, für $a \in R$ ist $aR = Ra = \{ra \mid r \in R\} = (a)$ ein Ideal.

Definition 40. Ein Ideal von der Form (a) für ein $a \in R$ heisst **Hauptideal**.

Definition 41. Seien $a_1, \dots, a_n \in R$. Das Ideal $(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in R \right\}$ heisst das **Ideal erzeugt von** a_1, \dots, a_n .

Definition 42. Sei R ein Ring. Ein $a \in R$ ist eine **Einheit**, falls es ein $b \in R$ gibt, s.d. $ab = 1$.

Ticker Frage: Sei R ein Ring und $a \in R$ eine Einheit. Dann ist $(a) = R$. (wahr, da $1 = ba \in (a) \implies r \cdot 1 = r \in (a) \quad \forall r \in R$).

Satz 50. Jedes Ideal in \mathbb{Z} ist ein Hauptideal.

Beweis: Jede Untergruppe von \mathbb{Z}^+ ist von der Form $n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Dies sind alles Ideale. □

Satz 51. (a) Sei K ein Körper. Dann sind 0 und (1) die einzigen Ideale.

(b) Hat ein Ring R genau zwei Ideale, so ist R ein Körper.

Beweis: (a) Sei $I \subseteq K$ ein Ideal. Falls $I \neq (0)$, so enthält I ein Element $a \neq 0$. Da K ein Körper ist, ist a eine Einheit.

$$\implies (a) = (1) = K.$$

(b) $R \neq 0$, da R zwei Ideale enthält, d.h. $1 \neq 0$. Sei $0 \neq a \in R$, dann ist $(a) \neq (0)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a) &= (1) = R \\ \Rightarrow \exists b \in R \text{ s.d. } ba &= 1 \\ \Rightarrow b &= a^{-1}. \text{ D.h. } R \text{ ist ein Körper.} \end{aligned}$$

□

Korollar 13. Seien K ein Körper und $R \neq \{0\}$ ein Ring. Jeder Homomorphismus $\phi: K \rightarrow R$ ist injektiv.

Beweis: $\text{Kern } \phi \subseteq K$ ist ein Ideal.

Falls $\text{Kern } \phi = (1)$, so ist $R = 0$. Ansonsten ist $\text{Kern}(\phi) = (0)$.

$\Rightarrow \phi$ ist injektiv. □

Definition 43. Sei S ein Ring, $R \subseteq S$ ein Unterring und $\alpha \in S$. Wir bezeichnen mit $R[\alpha] \subseteq S$ den kleinsten Unterring, der R und α enthält.

Bemerkung 50.

$$R[\alpha] = \{s \in S \mid \exists n \text{ und } r_0, \dots, r_n \in R \text{ s.d. } s = r_0 + r_1\alpha + \dots + r_n\alpha^n\} =: R'$$

Beweis: R' ist Unterring und $R \subseteq R'$, $\alpha \in R' \Rightarrow R[\alpha] \subseteq R'$.

Offensichtlich ist auch $R[\alpha] \supseteq R'$. □

Beispiele

- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$

Polynomringe

Sei R ein Ring und x eine Variable. Der **Polynomring** $R[x]$ ist der Ring der Polynome

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid n \geq 0, a_i \in R \right\}$$

mit der üblichen Addition und Multiplikation.

Bemerkung 51. $R[x]$ ist im Allgemeinen nicht dasselbe wie der Ring der polynomialen Abbildungen $R \rightarrow R$.

Beispiel 21. Wenn R endlich ist, so gibt es nur endlich viele Abbildungen $R \rightarrow R$ und somit nur endlich viele polynomiale Abbildungen. Aber der Ring der Polynome $R[x]$ ist unendlich.

Bemerkung 52. Die Inklusionsabbildung $\iota: R \hookrightarrow R[x] \quad a \mapsto a + 0x + \dots$ ist ein Ringhomomorphismus. Wir können R somit als Unterring von $R[x]$ anschauen.

Definition 44. Seien R ein Ring und x_1, \dots, x_n Variablen. Der **Polynomring** $R[x_1, \dots, x_n]$ in n Variablen ist der Ring der Polynome

$$\left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid \begin{array}{l} a_{i_1 \dots i_n} \in R, (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \\ \text{nur endlich viele der } a_{i_1 \dots i_n} \text{ sind nicht 0} \end{array} \right\}$$

mit der üblichen Addition und Multiplikation.

Elemente von der Form $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ heißen **Monome**.

Bemerkung 53. Oft schreibt man $i = (i_1, \dots, i_n)$ und dann $a_i x^i = a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ (Multiindex Schreibweise).

In dieser Schreibweise gilt, für $i = (i_1, \dots, i_n), j = (j_1, \dots, j_n)$: $x^i x^j = x^{i+j}$.

Beobachtung 1. Ein $a \in R$ induziert einen Homomorphismus $R[x] \rightarrow R \quad p(x) \mapsto p(a)$.

Satz 52 (Einsetzungsprinzip). Sei $\phi: R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus zu gegebenen Elementen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R'$, gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\Phi: R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow R'$, so dass die Einschränkung von Φ auf die konstanten Polynome mit ϕ übereinstimmt und sodass $\Phi(x_i) = \alpha_i$ für $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & R' \\ & \searrow i & \swarrow \Phi \\ & \mathcal{Q} & \\ & \downarrow & \\ R[x] & & \end{array}$$

Beweis: Multindex-Schreibweise

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \\ \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ i &= (i_1, \dots, i_n) \end{aligned}$$

Für $r \in R$, schreiben wir $r' := \phi(r)$.

Falls Φ existiert, so muss gelten

$$\begin{aligned}\Phi\left(\sum nx^i\right) &= \sum \phi(r_i)\alpha^i \\ &= \sum r'_i\alpha^i\end{aligned}$$

(da Φ ein Homomorphismus ist). D.h. Φ ist eindeutig.

Es genügt zu zeigen: Die Abbildung $\Phi: R[x] \rightarrow R \quad \sum r_i x^i \mapsto \sum r'_i \alpha^i$ ist ein Homomorphismus.

Wir haben:

$$\begin{aligned}\Phi\left(\sum r_i x^i + \sum s_i x^i\right) &= \Phi\left(\sum (r_i + s_i)x^i\right) \\ &= \sum (r_i + s_i)\alpha^i \\ &= \sum (r'_i + s'_i)\alpha^i \\ &= \sum r'_i\alpha^i + \sum s'_i\alpha^i \\ &= \Phi\left(\sum r_i \alpha^i\right) + \Phi\left(\sum s_i \alpha^i\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi\left(\left(\sum r_i x^i\right) \left(\sum s_j x^j\right)\right) &= \Phi\left(\sum r_i s_j x^{i+j}\right) \\ &= \sum (r_i s_j)' \alpha^{i+j} \\ &= \sum r'_i s'_j \alpha^{i+j} \\ &= \left(\sum r'_i \alpha^i\right) \left(\sum s'_j \alpha^j\right) \\ &= \Phi\left(\sum r_i \alpha^i\right) \Phi\left(\sum s_j \alpha^j\right)\end{aligned}$$

und $\Phi(1) = 1$ (per Definition). \square

Bemerkung 54. Sei $\psi: R \rightarrow R'$ ein Homomorphismus \rightsquigarrow Homomorphismus

$$R \xrightarrow{\quad} R' \xleftarrow{\quad} R'[x]$$

ϕ

Gemäss Satz können wir ϕ eindeutig zu einem Homomorphismus $\Phi: R[x] \rightarrow R'[x]$ fortsetzen, sodass x auf x abgebildet wird.

Φ bildet ein Polynom $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ auf das Polynom $\phi(a_0) + \phi(a_1)x + \cdots + \phi(a_n)x^n$ ab.

Beispiel 22. $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ Reduktion modulo p .

$\rightsquigarrow \Phi: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{F}_p[x] \quad f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n \mapsto \overline{a_0} + \cdots + \overline{a_n} x^n$

$\overline{f}(x)$ ist die Restklasse von $f(x)$ modulo p .

(Bemerkung: $\text{Kern } \Phi = (p)$).

$$R[x][y] \underset{\substack{\simeq \\ \text{wollen wir zeigen}}}{\sim} R[x, y]$$

Beispiel 23.

$$x^2 y^2 + 4x^3 - 3x^2 y - 4y^2 + 2 = (x^2 - 4)y^2 - (3x^2)y + (4x^3 + 2)$$

Satz 53. Seien $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m)$ zwei Mengen von Variablen. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $\Phi: R[x, y] \rightarrow R[x][y]$ s.d. Φ auf R die Identität ist und Φ die Variablen auf sich selbst abbildet.

Beweis: Es gibt einen eindeutigen Homomorphismus $\Phi: R[x, y] \rightarrow R[x][y]$ s.d. Φ auf R die Identität ist und Φ die Variablen auf sich selbst schickt.

Zu zeigen: Φ ist ein Isomorphismus.

Betrachten wir die Inklusion $\psi: R[x] \hookrightarrow R[x, y]$

$\rightsquigarrow \psi$ lässt sich eindeutig fortsetzen zu einem Homomorphismus

$\Psi: R[x][y] \rightarrow R[x, y]$ so dass die y_i 's auf sich selbst abgebildet werden.

$\Psi \circ \Phi: R[x, y] \rightarrow R[x, y]$ ist die Identität auf R und schickt die Variablen auf sich selbst.

$\xrightarrow{\text{Einsetzungsprinzip}} \Psi \circ \Phi = \text{id}_{R[x, y]}$, Ähnlich: $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{R[x][y]}$

□

Vorlesung 16

Sei R ein Ring. Es gibt einen eindeutigen Homomorphismus $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow R$ gegeben durch

$$\phi(n) = \underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{n\text{-mal}} \quad \text{falls } n \geq 0$$

$$\phi(-n) = \underbrace{-(1_R + 1_R + \cdots + 1_R)}_{n\text{-mal}}$$

Falls $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Homomorphismus ist, so ist $\psi(1) = 1_R$

$\implies \psi = \phi$, d.h. ϕ ist eindeutig.

Zu zeigen: ϕ ist ein Homomorphismus.

$$\phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n)$$

$$\phi(mn) = \underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{mn\text{-mal}} = \underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{m\text{-mal}} \underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{n\text{-mal}} = \phi(m)\phi(n)$$

Definition 45. $\text{Kern } \phi \subseteq \mathbb{Z}$ ist Ideal $\implies \text{Kern } \phi = n\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 0$. Dieses n ist die **Charakteristik** von R .

Gestern: R Ring $\rightsquigarrow R[x]$

$$f \in R[x]$$

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$\deg(f) := n$ heisst der **Grad** von f .

a_n ist der **Leitkoeffizient**.

Ist $a_n = 1$, so heisst f **normiert**.

Beispiel 24. $f = 2x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ hat Grad 3 und Leitkoeffizient 2. f ist nicht normiert.

Satz 54. Seien R ein Ring und $f, g \in R[x]$, s.d. der Leitkoeffizient von f eine Einheit ist. Dann gibt es Polynome $q, r \in R[x]$ s.d. $g = fq + r$ wobei $\deg(r) < \deg(f)$.

Beweis: Induktion über $\deg(g)$.

Falls $\deg(g) < \deg(f)$, dann ist $g = 0f + r$.

Falls $\deg(g) \geq \deg(f) = m$:

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} g &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n & a_n \neq 0 \\ f &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m & b_m \stackrel{b_m \neq 0}{\text{Einheit}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } g_1 &= g - b_m^{-1} a_n x^{n-m} f \\ &= a_0 + \cdots + a_{n-m} x^{n-m} - b_m^{-1} a_n b_0 - \cdots - \cancel{b_m^{-1} a_n b_m x^n} \end{aligned}$$

d.h. $\deg(g_1) < \deg(g)$

Induktion: $\exists q_1, r_1 \in R[x]$ s.d. $g_1 = f q_1 + r_1 \quad \deg(r_1) < \deg(q_1)$

$$g_1 = f(\underbrace{b_m^{-1} a_n x^{n-m} + q_1}_{:=q}) + \underbrace{r_1}_{:=r}$$

□

Korollar 14. Sei $g \in R[x]$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$ s.d. $g(\alpha) = 0$. Dann gilt $g = (x - \alpha)q$ für ein $q \in R[x]$.

Beweis: Wir schreiben $g = (x - \alpha)q + r$

$$\deg(r) < \deg(x - \alpha) = 1$$

$$\implies r \in R$$

$$\implies r = 0$$

□

Bemerkung 55. Sei K ein Körper. Jedes $f \in K[x] \setminus \{0\}$ hat eine Einheit als Leitkoeffizient.

Satz 55. Sei K ein Körper. Jedes Ideal in $K[x]$ ist ein Hauptideal.

Beweis: Sei $I \subseteq K[x]$ ein Ideal.

Falls $I = (0)$ sind wir fertig.

Ansonsten: Sei $f \in I \setminus \{0\}$ vom kleinsten Grad.

Behauptung: $I = (f)$.

Beweis: Sei $g \in I$. Wir schreiben $g = fq + r$, $\deg(r) < \deg(f)$.

$$\implies r = g - fq \in I$$

Da aber $\deg(g) < \deg(f)$, folgt $r = 0$.

$$\implies g \in (f).$$

□

Restklassenringe

Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal.

$\rightsquigarrow I$ ist eine additive Untergruppe mit Nebenklassen $r + I \quad r \in R$.

Die Menge der Nebenklassen R/I bildet eine Gruppe.

$\pi: R \rightarrow R/I$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Satz 56. (a) Es gibt eine eindeutige Ringstruktur auf $\overline{R} = R/I$ so dass

$$\pi: R \rightarrow \overline{R}, \quad r \mapsto r + I \text{ ein Ringhomomorphismus ist.}$$

(b) $\text{Kern } \pi = I$

Beweis: Für $(r + I), (s + I) \in \overline{R}$ definieren wir $(r + I)(s + I) := (rs + I)$

Diese Multiplikation ist wohldefiniert:

Seien u und v jeweils Repräsentanten von $s + I$ und $r + I$.

$$\implies \text{es gibt } a, b \in I, \text{ s.d. } u = s + a, v = r + b.$$

$$\implies vu = (r+b)(s+a) = rs + \underbrace{(ra+bs+ba)}_{\in I}$$

$$\implies vu + I = rs + I$$

Man überprüfe direkt, dass \bar{R} mit dieser Multiplikation alle Ringaxiome erfüllt und dass π ein Homomorphismus mit Kern I ist (kleine Übung).

R/I heisst **Restklassenring** von R modulo I oder auch **Faktorring**. \square

Vorlesung 17

Gesehen: Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal. $\rightsquigarrow \bar{R} = R/I$ hat eindeutige Ringstruktur, s.d. $\pi: R \rightarrow \bar{R}$ $r \mapsto r + I$ ein Homomorphismus ist.

Satz 57 (Abbildungseigenschaft). *Sei $\phi: R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus und $I \subseteq R$ ein Ideal, s.d. $I \subseteq \text{Kern } \phi$. Dann existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\bar{\phi}: \bar{R} = R/I \rightarrow R'$ mit $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & R' \\ & \searrow \pi & \swarrow \exists! \bar{\phi} \\ & \bar{R} = R/I & \end{array}$$

(Quiver diagram)

Beweis: Aus der Abbildungseigenschaft für Gruppen folgt, dass ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\bar{\phi}: \bar{R} \rightarrow R'$ existiert, s.d. $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$, gegeben durch $\bar{\phi}(\bar{a}) := \phi(a)$, $\bar{a} = a + I$. Man überprüfe direkt, dass $\bar{\phi}$ auch ein Ringhomomorphismus ist. \square

Beispiel 25. $\phi: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $\phi(n\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Q}$ ist kein Ideal, falls $n \neq 0$.

Behauptung 3 (Clicker-Frage). *Sei $\phi: R \rightarrow R'$ ein surjektiver Homomorphismus mit $I \subseteq R$ Ideal $\implies \phi(I) \subseteq R'$ ist Ideal.*

Beweis: $\phi(I) \subseteq R'$ ist eine additive Untergruppe (da es das Bild einer Untergruppe unter ϕ ist).

Sei $r' \in R'$ und $a' \in \phi(I)$

$$\implies \exists r \in R \text{ und } a \in I \text{ s.d. } \phi(r) = r' \text{ und } \phi(a) = a'$$

$$\implies r'a' = \phi(r)\phi(a) = \phi(ra) \in \phi(I)$$

\square

Behauptung 4 (Clicker-Frage). *Seien $\phi: R \rightarrow R'$ ein Homomorphismus und $J \subseteq R'$ ein Ideal. Dann gilt: $\phi^{-1}(J) \subseteq R$ ist ein Ideal.*

Beweis: Seien $a, b \in \phi^{-1}(J)$

$$\begin{aligned} &\implies \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b) \in J \\ &\implies a+b \in \phi^{-1}(J), \quad 0 \in \phi^{-1}(J) \end{aligned}$$

Sei $r \in R$

$$\begin{aligned} &\implies \phi(ra) = \phi(r)\phi(a) \in J \\ &\implies ra \in \phi^{-1}(J). \end{aligned}$$

□

Satz 58 (Entsprechungssatz). *Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, $\pi: R \rightarrow R/I = \bar{R}$ Quotient.*

Dann gilt:

(a) Die Abbildung $\Phi: \{\text{Ideale } J \subseteq R \mid I \subseteq J\} \rightarrow \{\text{Ideale in } R\}$

$$J \mapsto \pi(J) \text{ ist eine Bijektion } \pi^{-1}(H) \leftarrow H.$$

(b) Falls $J \subseteq R$ ein Ideal ist mit $I \subseteq J$, so gilt $R/J \simeq \bar{R}/\pi(J)$

Beweis: (a) $\pi(J) \subseteq R$ ist ein Ideal, da π surjektiv ist. Ist $H \subseteq \bar{R}$ ein Ideal, so ist $\pi^{-1}(H) \subseteq R$ ein Ideal, das I enthält (da $\pi^{-1}(0) = I$). D.h., beide Abbildungen sind wohldefiniert.

Z.z:

- $\pi^{-1}(\pi(J)) = J$ und
- $\pi(\pi^{-1}(H)) = H$

für alle $I \subseteq R$ und $H \subseteq \bar{R}$.

Wir haben $\pi(\pi^{-1}(H)) = H$, da π surjektiv ist.

Ausserdem gilt $\pi^{-1}(\pi(J)) \supseteq J$.

Sei $x \in \pi^{-1}(\pi(J))$, d.h. $\pi(x) \in \pi(J)$

$$\implies \exists y \in J \text{ s.d. } \pi(x) = \pi(y).$$

$$\implies \pi(x-y) = 0$$

$$\implies x-y \in \text{Kern } \pi = I.$$

Da $y \in J$ und $x-y \in I \subseteq J$, folgt $x = (x-y) + y \in J$

$$\implies \pi^{-1}(\pi(J)) = J$$

(b) Sei $\phi: \bar{R} \rightarrow \bar{R}/\pi(J)$ Quotient.

Man betrachte $R \xrightarrow{\pi} \bar{R} \xrightarrow{\phi} \bar{R}/\pi(J)$.

Dann ist $\text{Kern } \pi \circ \phi = \pi^{-1}(\pi(J)) \stackrel{(a)}{=} J$

$$\implies R/\pi(J) \simeq R/J.$$

□

Sei R ein Ring und $a \in R$. Wir können $R/(a)$ interpretieren als den Ring, in welchem zusätzlich die Relation $a = 0$ gilt.

Beispiel 26. $R = \mathbb{Z}$ und außerdem soll gelten $3 \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow 11 = 0$.

$$\rightsquigarrow \mathbb{Z}/(11) = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}.$$

Beispiel 27. Sei $R = \mathbb{Z}[i]$ der Ring der Gaußschen Zahlen. Sei \bar{R} der Ring, den man durch Einführung der Relation $1+3i = 0$ erhält, d.h. $\bar{R} = \mathbb{Z}[i]/(1+3i)$.

Wir haben $-i(1+3i) \in (1+3i)$,

d.h. in \bar{R} gilt $\overline{-i(1+3i)} = 0$

$$\implies \overline{-i} + \overline{3} = 0$$

d.h. in \bar{R} gilt $\overline{i} = \overline{3}$

$$\implies \overline{1+3i} = \overline{1} + \overline{9} = \overline{10} = 0$$

Behauptung 5. $\bar{R} := \mathbb{Z}[i]/(1+3i) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

Beweis: Man betrachte den Homomorphismus $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \bar{R}$ (es gibt genau einen).

Jedes Element in \bar{R} ist von der Form $\overline{a+bi} = \overline{a} + \overline{bi} = \overline{a} + \overline{b}\overline{i}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$

$\implies \phi$ ist surjektiv.

Da $\overline{10} = 0$ gilt in \bar{R} , folgt $10\mathbb{Z} \subseteq \text{Kern } \phi$.

Sei $n \in \text{Kern } \phi$. Dann ist $n \in (1+3i) \subseteq \mathbb{Z}[i]$,

d.h. $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ sodass $n = (a+bi)(1+3i) = (a-3b) + \underbrace{(3a+b)i}_{=0}$

$$\implies b = -3a$$

$$\implies n = a(1+3i)(1+3i) = 10a \implies n \in 10\mathbb{Z}$$

$$\implies \text{Kern } \phi = 10\mathbb{Z}$$

$$\implies \bar{R} \simeq \mathbb{Z}/\text{Kern } \phi = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

□

Adjunktion von Elementen

Hinzufügen von Elementen zu einem Ring, die bestimmte Relationen erfüllen.

Beispiel 28. $\pi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ s.d. $\pi/\mathbb{R}: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ und $\pi(x) = i$.

Dann ist $\text{Kern } \pi = (x^2 + 1)$.

(Beweis $(x^2 + 1) \subseteq \text{Kern } \pi$:

Falls $f \in \mathbb{R}[x]$ s.d. $f(i) = 0 \implies (x-i)|f$ aber auch $f(-i) = 0 \implies (x+i)|f$
 $\implies (x^2+1)|f \implies f \in (x^2+1).$
 $\implies \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$

Allgemein: Sei S ein Ring, $R \subseteq S$ Unterring, $\alpha \in S$.

Man betrachte $\pi: R[x] \rightarrow R[\alpha]$ sodass π/R bildet R auf R ab und $\pi(x) = \alpha$.

Dann ist $R[\alpha] \simeq R[x]/\text{Kern } \pi$.

Sei R ein Ring und $f \in R[x]$. $f = c_n x^n + \dots + c_0$.

Wir bezeichnen mit α die Restklasse von x modulo (f) . Dann erfüllt α in $R[x]/(f)$ die Relation

$$\bar{c}_n \alpha^n + \bar{c}_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + \bar{c}_0 = 0$$

wobei \bar{c}_i die Restklasse von c_i modulo (f) ist.

Definition 46. Oft bezeichnet man den Ring $R[x]/(f)$ durch $R[\alpha]$ und man nennt ihn den Ring, den man durch **Adjunktion** von α zu R erhält.

Satz 59. Seien R ein Ring und $f \in R[x]$ ein normiertes Polynom, s.d. $\deg f =: n > 0$. Dann ist die Abbildung

$$\Phi: R^n \rightarrow R[\alpha] = R[x]/(f)$$

$$(r_0, \dots, r_{n-1}) \mapsto r_0 + r_1 \alpha + \dots + r_{n-1} \alpha^{n-1}$$

eine Bijektion.

Beweis: Jedes Element in $R[\alpha]$ ist von der Form $g(\alpha)$ für ein $g(x) \in R[x]$.

Division mit Rest:

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x) \text{ mit } \deg r(x) < \deg f(x).$$

Da $f(\alpha) = 0$, folgt $g(\alpha) = r(\alpha) \implies \Phi$ surjektiv.

Um zu zeigen, dass Φ injektiv ist, zeigen wir

$$r_0 + r_1 \alpha + \dots + r_{n-1} \alpha^{n-1} \neq 0 \text{ für alle } r_0, \dots, r_{n-1} \in R, \text{ nicht alle null.}$$

Dazu zeigen wir, dass $(f) \setminus \{0\}$ keine Elemente von Grad $< n$ enthält.

Sei $g \in (f) \setminus \{0\}$. Dann ist $g = hf$ für ein $h \in R[x]$

$$h = b_0 + \dots + b_m x^m, b_m \neq 0$$

$$\implies hf = b_m x^{m+n} + \dots$$

$$\implies \deg g = \deg(hf) \geq n.$$

□

Beispiel 29. $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[x]/(x^3 + 3x + 1)$

$\underset{\text{Satz}}{\implies}$ Jedes Element in $\mathbb{Z}[\alpha]$ ist von der Form $r_0 + r_1\alpha + r_2\alpha^2$, $r_i \in \mathbb{Z}$.

Wir haben z.B.

$$(2 + \alpha - \alpha^2) + (1 + \alpha) = 3 + 2\alpha - \alpha^2$$

$$\begin{aligned}(2 + \alpha - \alpha^2)(1 + \alpha) &= 2 + 3\alpha - \alpha^3 \\ &= \underbrace{(1 + 3\alpha + \alpha^3)(-1)}_{=0} + (3 + 6\alpha) \\ &= 3 + 6\alpha\end{aligned}$$

Wir nutzen meist normierte Polynome, um leicht verständliche Ringe zu erhalten. Hier ein Beispiel mit einem nicht normierten Polynom:

Beispiel 30. Für $a \in R$ betrachten wir $R[x]/(ax - 1) = R[\alpha]$

Dann ist $a\alpha = 1$, d.h. a ist invertierbar in $R[\alpha]$.

Sei $\beta \in R[\alpha]$. Wir schreiben

$$\beta = r_0 + r_1\alpha + \cdots + r_m\alpha^m$$

für ein $m \geq 0$. Dann ist $\beta = \alpha^m(r_0a^m + r_1a^{m-1} + \cdots + r_m)$.

Das heisst, Elemente in $R[\alpha]$ sind von der Form $\alpha^k r$ für $r \in R, k \geq 0$.

Beispiel 31 (Spezialfall). $R = K[t]$. Wir betrachten $R' = K[t, x]/(xt - 1)$.

Dann ist R' der Ring der **Laurentpolynome**, d.h. Polynome in t und t^{-1} .

$$f(t) = \sum_{i=-n}^n a_i t^i = t^{-n} \left(\sum_{i=-m}^n a_i t^{i+n} \right)$$

Wir bezeichnen oft $R' = K[t, t^{-1}]$.

Vorlesung 18

Gestern: Sei R ein Ring.

$R[\alpha] = R[x]/(f)$ mit $f \in R[x]$. α ist die Restklasse von x .

Dies nennen wir die Adjunktion von α zu R , s.d. α die Relation $f(\alpha) = 0$ erfüllt.

Beispiel 32. $f = x^2$

$\implies R[\alpha] = R + R\alpha$ und es gilt $\alpha^2 = 0$.

Der Homomorphismus $\phi: R \rightarrow R[\alpha]$ ist nicht immer injektiv.

Falls f normiert ist, so ist ϕ injektiv (folgt aus dem Satz von gestern).

Im Allgemeinen ist $\text{Kern } \phi = R \cap (f)$.

Beispiel 33. $R[x]/(x \cdot 0 - 1) = 0$

Integritätsbereiche & Quotientenkörper

Sei R ein Ring.

Definition 47. Ein $a \in R \setminus \{0\}$ heisst **Nullteiler**, falls ein $b \in R \setminus \{0\}$ existiert, s.d. $ab = 0$.

Beispiel 34. In $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ gilt $\bar{5} \cdot \bar{2} = \bar{0}$.

Definition 48. Ein **Integritätsbereich (IB)** ist ein Ring R , der nicht der Nullring ist und der keine Nullteiler enthält.

D.h. in einem IB gilt $1 \neq 0$ und aus $ab = 0$ folgt immer $a = 0$ oder $b = 0$.

Beispiel 35. Jeder Unterring von einem Körper ist ein IB.

Bemerkung 56. Sei R ein IB. Falls $ab = ac$ für ein $a \neq 0$, so folgt $b = c$.

Beweis: $ab = ac \implies a(b - c) = 0 \implies (b - c) = 0 \implies (b = c)$ \square

Satz 60. Sei R ein IB, dann ist auch $R[x]$ ein IB.

Beweis: Seien $f, g \in R[x] \setminus \{0\}$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f &= a_0 + \cdots + a_n x^n & a_n \neq 0 \\ g &= b_0 + \cdots + b_m x^m & b_m \neq 0 \\ \implies fg &= \underbrace{a_n b_n}_{\neq 0 \text{ da } R \text{ IB}} x^{m+n} + \cdots \\ \implies fg &\neq 0 \end{aligned}$$

Satz 61. Sei R ein IB mit endlich vielen Elementen, dann ist R ein Körper.

Beweis: Sei $a \in R \setminus \{0\}$.

Man betrachte: $m_a: R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}$

$b \mapsto ab$

Falls $ab = ac$, so ist $b = c$, d.h. m_a ist injektiv.

$\underset{R \text{ endlich}}{\implies} m_a$ ist surjektiv.

$\implies \exists b \in R \text{ s.d. } m_a(b) = ab = 1$

$\implies a$ ist eine Einheit. \square

Satz 62. Sei R ein IB. Dann gibt es einen Körper K und einen injektiven Ringhomomorphismus $i: R \hookrightarrow K$.

Beispiel 36. $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$

Beweis/Konstruktion. Ein **Bruch** ist ein Symbol $\frac{a}{b}$, wobei $a, b \in R$ und $b \neq 0$.

Wir definieren $\frac{a_1}{b_1} \approx \frac{a_2}{b_2}$, falls $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Reflexivität und Symmetrie sind klar.

Transitivität:

$$\begin{aligned} &\text{Falls } \frac{a_1}{b_1} \approx \frac{a_2}{b_2} \approx \frac{a_3}{b_3} \\ &\implies a_1 b_2 = a_2 b_1 \text{ und } a_2 b_3 = a_3 b_2 \\ &\implies a_1 b_2 b_3 = a_2 b_1 b_3 = a_3 b_2 b_1 \\ &\stackrel{b_2 \neq 0}{\implies} a_1 b_3 = a_3 b_1 \\ &\implies \frac{a_1}{b_1} \approx \frac{a_3}{b_3}. \end{aligned}$$

Der **Quotientenkörper** K von R ist die Menge der Äquivalenzklassen von Brüchen. Wir schreiben $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, falls $\frac{a_1}{b_1} \approx \frac{a_2}{b_2}$.

Wir definieren Addition und Multiplikation auf K .

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \end{aligned}$$

Zu überprüfen:

- Addition und Multiplikation sind wohldefiniert.
- Alle Körperaxiome sind erfüllt.

\rightsquigarrow kleine Übung.

Wir haben ausserdem

$$i: R \rightarrow K$$

$$a \mapsto \frac{a}{1}$$

Dies ist ein Ringhomomorphismus (klar)

$$\text{und inkettiv: } \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a \cdot 1 = b \cdot 1. \quad \square$$

Beispiel 37. Sei K ein Körper. Der Quotientenkörper $K(x)$ von $K[x]$ heisst **Körper der rationalen Funktionen** in x über K .

$$K(x) = \left\{ \text{Äquivalenzklassen } \frac{f}{g}, \text{ wobei } f, g \in K[x], g \neq 0 \right\}$$

Vorlesung 19

Satz 63. Sei R ein IB mit Quotientenkörper K . Sei K' ein Körper und $\phi: R \rightarrow K'$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\Phi: K \rightarrow K'$ s.d. $\phi = \Phi \circ i$.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & K' \\ & \searrow i & \nearrow \exists! \Phi \\ & K & \end{array}$$

Beweis: Wir definieren $\Phi\left(\frac{a}{b}\right) := \phi(a)\phi(b)^{-1}$

Φ ist eindeutig.

Φ ist wohldefiniert:

$$\text{Falls } \frac{a_1}{b_1} \approx \frac{a_2}{b_2} \implies a_1 b_2 = b_1 a_2$$

$$\begin{aligned} &\implies \phi(a_2)\phi(b_1) = \phi(a_1)\phi(b_2) \\ &\implies \Phi\left(\frac{a_2}{b_2}\right) = \phi(a_2)\phi(b_2)^{-1} \\ &\quad = \phi(a_1)\phi(b_1)^{-1} \\ &\quad = \Phi\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \end{aligned}$$

Man überprüft direkt, dass das ein Homomorphismus ist. \square

Maximale Ideale

Definition 49. Sei R ein Ring. Ein Ideal $I \subseteq R$ ist **maximal**, falls $I \neq R$ und falls I in keinem anderen Ideal ausser I und R enthalten ist.

Beispiel 38. Sei K ein Körper. Dann ist $(0) \subseteq K$ maximal.

Beispiel 39. Die maximalen Ideale in \mathbb{Z} sind die Ideale von der Form $p\mathbb{Z}$ für p prim.

Beweis: Alle Ideale in \mathbb{Z} sind von der Form $n\mathbb{Z}$.

Wir haben $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m|n$.

D.h. falls $p\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$, so gilt $n|p \implies n = p$ oder $n = 1$. \square

Satz 64. Ein Ideal $I \subseteq R$ ist maximal $\Leftrightarrow R/I$ ist ein Körper.

Beweis: R/I ist ein Körper $\Leftrightarrow R/I$ hat genau zwei Ideale: (0) und R/I .

Entsprechungssatz:

$$\{ \text{Ideale } I \subseteq R \text{ s.d. } I \subseteq J \} \xrightarrow{1:1} \{ \text{Ideale in } R/I \}$$

d.h. R/I hat genau zwei Ideale $\Leftrightarrow I$ ist maximal. \square

Beispiel 40. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Körper $\Leftrightarrow n$ ist prim.

Satz 65. Die maximalen Ideale in $\mathbb{C}[x]$ sind die Hauptideale von der Form $(x - a)$, $a \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 57. $(x - a)$ ist genau der Kern des Einsetzungshomomorphismus $e_a: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C} \quad f \mapsto f(a)$

D.h. es gibt eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\sim} \{ \text{maximale Ideale in } \mathbb{C}[x] \} \\ a &\mapsto \text{Kern } e_a \end{aligned}$$

Beweis: Sei $I \subseteq \mathbb{C}[x]$ maximal. Gesehen: $I = (f)$, wobei $f \in I$ von minimalem Grad in (f) ist. Da $(0) \neq I \neq \mathbb{C}[x]$, ist f nicht konstant.

$$\implies \exists a \in \mathbb{C} \text{ s.d. } f(a) = 0$$

$$\implies x - a | f$$

$$\implies f \in (x - a)$$

$$\implies I \subseteq (x - a)$$

$$\underset{I \text{ maximal}}{\implies} I = (x - a)$$

Umgekehrt:

$$\mathbb{C}[x]/(x - a) = \mathbb{C}[x]/\text{Kern } e_a \simeq \mathbb{C} \implies (x - a) \text{ ist maximal (da } \mathbb{C} \text{ ein Körper ist).} \quad \square$$

Beispiel 41. $(x^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[x]$ ist maximal, da $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$

Beispiel 42. Sei $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, dann ist das Ideal $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ maximal.

Beweis: Übung. \square

Satz 66 (Hilbert Nullstellenatz). *Jedes maximale Ideal in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ist von dieser Form.*

Beweis: Siehe Artin. □

Das ist der Beginn der Algebraischen Geometrie.

Geometrie von $\mathbb{C}^n \leftrightarrow$ maximale Ideale in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

Satz 67. *Sei R ein Ring. Jedes Ideal $I \subseteq R, I \neq (1)$ ist in einem maximalen Ideal enthalten.*

Beweis: Siehe Übungen. Benötigt Lemma von Zorn / Auswahlaxiom. □

Definition 50. *Ein Ideal $I \subseteq R$ heisst **Primideal**, falls $I \neq (1)$ und falls für alle $a, b \in R$ gilt: falls $ab \in I$, so ist $a \in I$ oder $b \in I$.*

Übung: $I \subseteq R$ ist Primideal $\Leftrightarrow R/I$ ist Integritätsbereich.

Faktorzerlegung

Ganze Zahlen

Gesehen: Jedes Ideal in \mathbb{Z} ist von der Form $n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Wir haben:

$$\begin{aligned} a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} &= \{ar + bs \mid r, s \in \mathbb{Z}\} \\ &= d\mathbb{Z} \text{ für ein } d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

d heisse der **größte gemeinsame Teiler** von a und b . Wir schreiben $d = \text{ggT}(a, b)$.

Satz 68. $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, d = \text{ggT}(a, b)$. Dann gilt:

- (a) $\exists r, s \in \mathbb{Z}$ s.d. $d = ar + bs$
- (b) $d|a$ und $d|b$
- (c) Sei $e \in \mathbb{Z}$ sodass $e|a$ und $e|b$, dann gilt $e|d$.

Beweis: (a) Klar, da $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

(b) folgt, da $a, b \in d\mathbb{Z}$

(c) $e|a$ und $e|b$

$$\implies a, b \in e\mathbb{Z}$$

$$\implies ar + bs \in e\mathbb{Z} \text{ für alle } r, s \in \mathbb{Z}$$

$$\implies d \in e\mathbb{Z}.$$

□

Lemma 5. Seien $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $a, b \in \mathbb{Z}$. Falls $p|ab$, dann gilt entweder $p|a$ oder $p|b$.

Beweis: Man nehme an $p|ab$, aber $p \nmid a$.

$$\implies \text{ggT}(p, a) = 1$$

$$\implies \exists r, s \in \mathbb{Z} \text{ s.d. } rp + sa = 1$$

$$\implies \underbrace{rpb + sab}_{\text{durch } p \text{ teilbar}} = b$$

$$\implies p|b.$$

□

Satz 69. Sei $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$. Dann gibt es ein $k \geq 0$ und Primzahlen $p_1, \dots, p_k > 0$ s.d. $a = cp_1 \cdots p_k$ mit $c = \pm 1$.

Diese Faktorisierung ist eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren).

Beweis: Induktion über a .

Anfang: $a = 1$ stimmt (keine Primfaktoren).

Induktionsschritt:

Falls a prim ist, sind wir fertig.

Sonst $a = bb'$ für $b, b' < a$.

$$\stackrel{\text{IH}}{\implies} b \text{ und } b' \text{ haben Primfaktorisierung.}$$

$$\implies a \text{ hat eine solche Faktorisierung.}$$

Eindeutigkeit: Man nehme an $\pm p_1 \cdots p_n = \pm q_1 \cdots q_m$ zwei solche Faktorisierungen.

Vorzeichen stimmen überein.

Wir haben $p_1|q_1 \cdots q_m$

$$\stackrel{p_1 \text{ prim}}{\implies} p_1|q_i \text{ für ein } i. \text{ oBdA } i = 1.$$

$$\implies p_1 = q_1 \implies p_2 \cdots p_n = q_2 \cdots q_m \text{ durch Induktion über } n.$$

□

Kleine Übung: Analoge Resultate gelten für $K[x]$ wenn K ein Körper ist.

Faktorielle Ringe

Definition 51. Seien R ein IB und $a, b \in R$.

- a teilt b , falls $b = aq$ für ein $q \in R$. Wir schreiben $a|b$.
- a ist ein echter Teiler von b , falls $b = aq$, sodass weder a noch q eine Einheit sind.
- a und b sind assoziiert, falls $a|b$ und $b|a$.
- a ist irreduzibel, falls a keine Einheit ist, $a \neq 0$ und falls a keine echten Teiler hat.
- $p \in R$ ist ein Primelement, falls p keine Einheit ist, $p \neq 0$, und falls $p|ab$, so gilt $p|a$ oder $p|b$.

Bemerkung 58. a und b sind assoziiert $\Leftrightarrow b = ua$ für eine Einheit u .

Beweis: “ \Rightarrow ”

$$a = qb \text{ und } b = q'a$$

$$\Rightarrow a = qq'a$$

$$\Rightarrow 1 = qq', \text{ d.h. } q \text{ ist eine Einheit.}$$

“ \Leftarrow ” klar. \square

Bemerkung 59.

- a teilt $b \Leftrightarrow (a) \supseteq (b)$
- a ist ein echter Teiler von $b \Leftrightarrow (b) \subsetneq (a) \subsetneq (1)$
- a und a' sind assoziiert $\Leftrightarrow (a) = (a')$
- a ist irreduzibel $\Leftrightarrow (a) = (0), (a) \subsetneq (1)$ und es gibt kein Hauptideal (c) , sodass $(a) \subsetneq (c) \subsetneq (1)$.
- $p \neq 0$ ist prim \Leftrightarrow aus $ab \in (p)$ folgt $a \in (p)$ oder $b \in (p)$.
 $\Leftrightarrow (p)$ ist Primideal.

Bemerkung 60. Falls $p \in R$ prim ist, so ist p auch irreduzibel.

Beweis: Falls $p = ab \Rightarrow p|a$ oder $p|b$.

oBdA $p|b$.

$$\Rightarrow b = rp \text{ für } r \in R$$

$$\Rightarrow p = arp$$

$$\Rightarrow 1 = ar$$

$$\Rightarrow a \text{ ist Einheit, d.h. } p \text{ hat keine echten Teiler.} \quad \square$$

Vorlesung 20

Sei R ein Integritätsbereich.

- (1) Können wir jedes $a \in R$ als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben?
- (2) Falls ja, ist diese Zerlegung eindeutig?

Wir müssen annehmen, dass $a \neq 0$ und a keine Einheit ist.

Idee zu (1): $a \in R, a \neq 0, a$ keine Einheit. Falls a irreduzibel ist, sind wir fertig.

Ansonsten ist $a = a_1 b_1, a_1, b_1$ keine Einheit.

Wir wiederholen diesen Prozess nun mit a_1 und b_1 .

Endet dieser Prozess für alle $a \in R, a \neq 0, a$ keine Einheit, so sagen wir, dass in R **Faktorisierung** endet.

Satz 70. *Sei R ein Integritätsbereich. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

- (a) Faktorisierung endet in R
- (b) R enthält keine unendliche aufsteigende Kette von Hauptidealen: $(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq (a_3) \subsetneq \dots$

Beweis: Man nehme an, R hat eine solche Kette $(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq (a_3) \subsetneq \dots$

Dann ist $(a_n) \subsetneq (1) \forall n$, d.h. a_n ist ein echter Teiler von a_{n-1} , d.h. $a_{n-1} = a_n b_n$, a_n, b_n keine Einheiten.

$$\implies a_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 b_2 = a_4 b_4 b_3 b_2$$

\implies Faktorisierung endet nicht in R .

Umgekehrt liefert eine solche unendliche Folge von Zerlegungen $a_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 b_2 = \dots$ eine unendliche Folge von Hauptidealen. Dann haben wir eine unendliche Kette $(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq (a_3) \subsetneq \dots$ \square

Beispiel 43. *Man nehme den Polynomring $K[x_1]$ und anjungiere alle 2^k -ten Wurzeln von x_1 zu $K[x_1]$:*

$$K[x_1, x_2, x_3, \dots] / (\{x_k^{2^k} - x_1 \mid k \geq 2\})$$

In R :

$$x_1 = x_2^2 = x_3^4 = x_4^8 = \dots$$

das heisst

$$(x_1) \subsetneq (x_2) \subsetneq (x_3) \subsetneq \dots$$

\rightsquigarrow In der Praxis treten solche Ringe selten auf.

Falls eine Faktorisierung in irreduzible Elemente existiert, so ist diese nicht immer eindeutig.

Beispiel 44. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subseteq \mathbb{C}$

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

Man kann zeigen: $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ sind alle irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Definition 52. Sei R ein IB. R heisst **faktoriell**, wenn Folgendes erfüllt ist:

(i) Faktorisierung endet

(ii) Die Faktorisierung in irreduzible Faktoren ist eindeutig im folgenden Sinn:

Falls $a \neq 0, a$ keine Einheit, geschrieben werden kann als

$$a = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$$

für irreduzible p_i und q_i ist $m = n$ und — nach Umordnung der Faktoren — ist p_i assoziiert zu q_i für $i = 1, \dots, n$.

Satz 71. Sei R ein IB, in dem Faktorisierung endet. Dann ist R faktoriell \Leftrightarrow jedes irreduzible Element ist prim.

Beweis: “ \Leftarrow ” Man nehme an, jedes irreduzible Element ist auch prim. Sei $a \in R$ und seien

$$a = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$$

zwei Zerlegungen in irreduzible Elemente.

Falls $n = 1$, so ist auch $m = 1$ und $p_1 = q_1$ (da p_1 irreduzibel).

Falls $n > 1$: p_1 ist prim, d.h. $p_1 | q_i$ für ein i . OBdA $i = 1$.

Da q_1 irreduzibel ist, folgt, dass p_1 und q_1 assoziiert sind.

$$\stackrel{\rightsquigarrow}{\text{kürzen}} p_2 \cdots p_n = q_2 \cdots q_m.$$

Behauptung folgt per Induktion über n .

“ \Rightarrow ” Man nehme an, es gibt ein $p \in R$, das irreduzibel aber nicht prim ist.

$$\Rightarrow \exists a, b \in R, \text{s.d. } p | ab \text{ aber } p \nmid a \text{ und } p \nmid b.$$

Das heisst, $pc = ab$ für ein $c \in R$. Faktorisiere a, b, c in irreduzible Faktoren $c = c_1 \cdots c_r, a = a_1 \cdots a_m, b = b_1 \cdots b_n$.

$\rightsquigarrow pc_1 \cdots c_r = a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n$ sind zwei verschiedene Faktorisierungen $\Rightarrow R$ ist nicht faktoriell. \square

Vorlesung 21

Letzte Woche

Sei R ein Integritätsbereich

- $r \in R$ ist **irreduzibel**, falls r keine echten Teiler hat, d.h. falls $r = ab \implies a$ oder b ist eine Einheit
- $r \in R$ ist **prim**, falls aus $r|ab$ folgt, dass $r|a$ oder $r|b$.

prim \implies irreduzibel, aber im Allgemeinen irreduzibel $\not\implies$ prim.

Beispiel 45. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}], 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$

$\rightsquigarrow 2$ ist irreduzibel aber nicht prim, da $2 \nmid (1 + \sqrt{-5}), 2 \nmid (1 - \sqrt{-5})$

Ein IB R ist **faktoriell**, falls jedes $r \in R$ eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen geschrieben werden kann. In faktoriellen Ringen:

prim \Leftrightarrow irreduzibel.

Clicker-Frage: Sei R ein Integritätsbereich und seien $a, b \in R$, so dass $a|b$. Falls c assoziiert ist zu a , so gilt $c|b$.

Beweis: c ist assoziiert zu a : Falls $a|c$ und $c|a$, $\Leftrightarrow a = uc$ für $u \in R$ Einheit.

Dann haben wir $a|b \Leftrightarrow b = aq = cuq \implies c|b$. □

Satz 72. Sei R faktoriell und seien $a, b \in R$. Seien $a = p_1 \cdots p_r$ und $b = q_1 \cdots q_s$ Primfaktorzerlegungen.

Dann gilt $a|b \Leftrightarrow s \geq r$ und (nach Umordnung) p_i ist assoziiert zu q_i für $i = 1, \dots, r$.

Beweis: “ \implies ”

Falls $a|b$, so folgt $p_1|b$.

$\implies p_1|q_i$ für ein i . OBdA $i = 1$.

$\implies p_1$ und q_1 sind assoziiert.

\implies wir haben $p_1 p_2 \cdots p_r c = q_1 q_2 \cdots q_s$ für ein $c \in R$.

$\implies p_2 \cdots p_r c = q'_2 \cdots q_s$ für q'_2 assoziiert zu q_2 .

$\implies p_2 \cdots p_r | q_2 \cdots q_s$

\rightsquigarrow per Induktion $s \geq r$ und p_i ist assoziiert zu q_i für $i = 1, \dots, r$.

“ \Leftarrow ” ist klar. □

Korollar 15. Sei R faktoriell und seien $a, b \in R$, nicht beide null. Dann gibt es ein $d \in R$ s.d.

(i) $d|a$ und $d|b$

(ii) $\forall e \in R$, s.d. $e|a$ und $e|b \implies e|d$

Ein solches d heisst **grösster gemeinsamer Teiler (ggT)** von a und b .

Beweis: Übung. □

Bemerkung 61. Zwei verschiedene ggT sind assoziiert.

Bemerkung 62. Im Allgemeinen ist ein ggT von a und b nicht von der Form $ar + bs$ für $r, s \in R$.

Definition 53. Ein IB, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heisst **Hauptidealring**.

Satz 73. Seien R ein Hauptidealring und $a, b \in R$, nicht beide null. Dann ist $d \in R$, sodass $(d) = (a) + (b)$ ein ggT von a und b ist. Außerdem existieren $r, s \in R$ s.d. $d = ar + bs$.

Beweis: Da $a, b \in (d)$, folgt $d|a$ und $d|b$.

Falls $e|a$ und $e|b$, so ist $a \in (e)$ und $b \in (e)$

$$\implies (d) = (a) + (b) \subseteq (e)$$

$$\implies e|d.$$

Da $d \in (a) + (b)$, existieren $r, s \in R$ s.d. $d = ar + bs$. □

Korollar 16. Sei R ein Hauptidealring. Dann

(a) Ein $r \in R$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow r$ ist prim

(b) Die maximalen in R sind genau die Hauptideale, die von einem irreduziblen Element erzeugt werden.

Beweis:

(a) gesehen: Primelemente sind irreduzibel. Sei $r \in R$ irreduzibel und man nehme an, dass $r|ab$ und $r \nmid a$.

Z.z: $r|b$.

Sei d ein ggT von a und r .

r ist irreduzibel $\implies d$ ist Einheit oder d ist assoziiert zu r . Da $r \nmid a$ ist d nicht assoziiert zu r , d.h. d ist eine Einheit.

$$\implies (a) + (r) = (d) = (1).$$

$$\implies \exists s, t \in R \text{ s.d. } 1 = sr + ta$$

$$\implies b = \underbrace{sr + ta}_{\text{durch } r \text{ teilbar}}$$

$$\implies r|b$$

(b) Sei $q \in R$ irreduzibel.

\implies alle Teiler von q sind assoziiert zu q oder Einheiten.

Falls $(q) \subseteq (p)$, so ist $(q) = (p)$ oder $(p) = (1)$.

$\implies (q)$ ist maximal.

Falls $q \in R$ nicht irreduzibel ist: Sei a ein echter Teiler von q .

$\implies (q) \subsetneq (a) \subsetneq (1)$, d.h. (q) ist nicht maximal. \square

Satz 74. Ein Hauptidealring R ist faktoriell.

Beweis: Gesehen: Jedes irreduzible Element in R ist prim.

Z.z: Faktorisierung endet in R .

Man nehme an, es gibt eine unendliche aufsteigende Kette von Hauptidealen

$(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq \dots$

Behauptung: $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i) = I \subseteq R$ ist ein Ideal. *Beweis:* Seien $a, b \in I, r \in R$. Dann sind $a, b \in (a_n)$ für ein $n \implies a + b \in (a_n) \subseteq I$ und $ra \in (a_n) \subseteq I$.

R ist Hauptidealring, d.h. $I = (1)$ für ein $b \in R$. Da $b \in I$, folgt, dass $b \in (a_n)$ für ein $n \implies (b) \subseteq (a_n)$.

Aber auch $(a_n) \subsetneq (a_{n+1})$ (Widerspruch). \square

Bemerkung 63. Gesehen: K Körper $\implies K[x]$ ist ein Hauptidealring.

Die Einheiten sind genau die Elemente in K^* .

Jedes Polynom in $K[x] \setminus \{0\}$ ist assoziiert zu einem eindeutigen normierten Polynom.

Satz 75. Seien $f, g \in K[x]$. Dann:

- (a) Es existiert ein eindeutiger normierter ggT $d \in K[x]$ und $r, s \in K[x]$ s.d. $rf + sg = d$.
- (b) Falls f und g keinen nicht-konstanten gemeinsamen Faktor haben, so existieren $r, s \in K[x]$ s.d. $rf + sg = 1$.
- (c) Jedes irreduzible $p \in K[x]$ ist auch prim.
- (d) Sei $f \in K[x]$ normiert, dann ist $f = p_1 \cdots p_k$, $p_i \in K[x]$ normiert. Diese Faktorisierung ist eindeutig bis auf eine Permutation der p_i .

Beweis: Kleine Übung (folgt aus all den Resultaten von heute). \square

Gesehen: Sei R ein Ring, $\alpha \in R$, $f \in R[x]$. Dann ist $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha) | f$.

Beispiel 46. Sei $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f \geq 2$. Dann $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ s.d. $f(\alpha) = 0$.

$\implies (x - \alpha) | f$, d.h. f ist nicht irreduzibel.

Die einzigen irreduziblen Elemente in $\mathbb{C}[x]$ sind also $(x - a)$, $a \in \mathbb{C}$.

\implies Jedes normierte $f \in \mathbb{C}[x]$ hat eine eindeutige Faktorisierung $f = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ $\alpha_i \in \mathbb{C}$

Satz 76. Sei K ein Körper. Ein Polynom $f \in K[x]$ mit $\deg(f) = n$ hat höchstens n Nullstellen.

Beweis: Ein $\alpha \in K$ ist eine Nullstelle von $f \Leftrightarrow (x - \alpha) | f$.

Ist dies der Fall, so ist $f(x) = (x - \alpha)q(x)$, $\deg(q) < \deg(f)$.

Falls $\beta \in K$ s.d. $f(\beta) = 0$, so ist $(\beta - \alpha)q(\beta) = 0 \implies \alpha = \beta$ oder β ist Nullstelle von q .

Gemäss Induktion hat q höchstens $n - 1$ Nullstellen. \square

Um zu zeigen, dass \mathbb{Z} und $K[x]$ Hauptidealringe sind, verwenden wir Division mit Rest.

$$a = bq + r$$

Definition 54. Sei R ein IB. Eine **Größenfunktion** ist eine Funktion $\sigma: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definition 55. R ist ein **euklidischer Ring**, falls es eine Größenfunktion $\sigma: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt, so dass ein Divisionsalgorithmus existiert:

Für alle $a, b \in R$, $b \neq 0$ gibt es $q, r \in R$ mit $a = bq + r$ sodass entweder $r = 0$ ist oder $\sigma(r) < \sigma(b)$.

Vorlesung 22

Letztes Mal: Euklidische Ringe.

Beispiel 47.

- \mathbb{Z} mit Größenfunktion $|\cdot|$
- $K[x]$ mit Größenfunktion \deg

Satz 77. Der Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ ist euklidisch mit Größenfunktion $\sigma(x + iy) = x^2 + y^2$.

Beweis: Seien $a = m_1 + in_1$ und $b = m_2 + in_2$, $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ und $b \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a\bar{b}}{|b|^2} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{m_2^2 + n_2^2} + i \frac{n_1m_2 - m_1n_2}{m_2^2 + n_2^2} \\ &= \underbrace{q_1 + iq_2}_{=:q \in \mathbb{Z}[i]} + (r_1 + ir_2)\end{aligned}$$

s.d. $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\implies a = bq + \underbrace{b(r_1 + ir_2)}_{=:r}$$

$$r = a - bq \in \mathbb{Z}[i]$$

$$|r|^2 = |b|^2(r_1^2 + r_2^2) \leq |b|^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}|b|^2 \leq |b|^2$$

$$\implies a = bq + r \text{ s.d. } |r|^2 < |b|^2$$

□

Satz 78. Ein euklidischer Ring R ist ein Hauptidealring.

Beweis: R ist IB.

Sei $I \subseteq R$ ein Ideal.

(0) ist Hauptideal. Wir nehmen an, $I \neq (0)$.

Sei $b \in I$, s.d. $\sigma(b)$ minimal ist (σ die Größenfunktion auf R).

Z.z: $(b) = I$.

Sei $a \in I$.

Teilen mit Rest: $a = bq + r$, s.d. $\sigma(r) < \sigma(b)$ oder $r = 0$.

$$r = a - bq \in I.$$

$\sigma(r) < \sigma(b)$ nicht möglich, da $\sigma(b)$ minimal.

$$\implies r = 0 \implies a = bq \implies a \in (b) \implies I = (b)$$

□

Korollar 17. Die Ringe \mathbb{Z} , $K[x]$ (für K Körper) und $\mathbb{Z}[i]$ sind Hauptidealringe.

Übersicht über bisher gesehene Ringe

euklidische Ringe \subseteq Hauptidealringe \subseteq faktorielle Ringe \subseteq Integritätsbereiche

Das Gaußsche Lemma

Sei R ein faktorieller Ring.

Ziel: Studieren der Faktorisierung in $R[x]$.

In diesem Abschnitt: $R = \mathbb{Z}$. Aber der allgemeine Fall ist sehr ähnlich.

Wir verstehen die Faktorisierung in \mathbb{Z} und in $\mathbb{Q}[x]$.

Beispiel 48. $f(x) = 6x^3 + 9x^2 + 9x + 3$

$$\underbrace{=}_{\text{in } \mathbb{Z}[x]} 3(2x+1)(x^2+x+1)$$

$$\underbrace{=}_{\text{in } \mathbb{Q}[x]} \frac{3}{2}(x+\frac{1}{2})(x^2+x+1)$$

Vorlesung 23

Ziel: Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$.

$$\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$$

Definition 56. Ein Polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ ist **primativ**, falls der ggT aller Koeffizienten 1 ist und $a_n > 0$.

Lemma 6. Jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig schreiben als $f(x) = cf_0(x)$ für ein $c \in \mathbb{Q}$ und ein $f_0(x) \in \mathbb{Z}[x]$ primativ.

Definition 57. Die Zahl $x \in \mathbb{Q}$ heisst der **Inhalt** von f .

Beweis:

Existenz: Multipliziere f mit $n \in \mathbb{Z}$ sodass $nf \in \mathbb{Z}[x]$.

Sei $m \in \mathbb{Z}$ der ggT aller Koeffizienten von f_1 mit geeignetem Vorzeichen, s.d. $f_1 = mf_0, f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primativ.

$$\implies f = \frac{m}{n}f_0$$

Eindeutigkeit: Seien $cf_0(x) = dg_0(x)$, $c, d \in \mathbb{Q}, f_0, g_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primativ. Nach Multiplikation mit ganzer Zahl können wir annehmen, dass $c, d \in \mathbb{Z}$ Sei $f_0(x) = a_nx^n + \dots + a_0, g_0(x) = b_nx^n + \dots + b_0$

$$\implies ca_i = db_i$$

Da f_0 und g_0 primativ sind, ist der ggT von $\{ca_0, \dots, ca_n\}c$ und der ggT von $\{db_0, \dots, db_n\}$ ist d

$$\implies c = \pm d \text{ und somit } f_0 = \pm g_0.$$

Aber f_0 und g_0 haben positive Leitkoeffizienten.

$$\implies f_0 = g_0 \text{ und } c = d.$$

□

Gesehen: Es gibt einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{F}_p[x]$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \mapsto \overline{a_n} x^n + \cdots + \overline{a_0} = \bar{f}(x)$$

Bemerkung 64. Falls $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv ist, so ist $\bar{f}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ nicht null, da mindestens einer der Koeffizienten von $f(x)$ nicht durch p teilbar ist.

Satz 79 (Gauss-Lemma). Seien $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv. Dann ist auch $h := fg$ primitiv.

Beweis: Die Leitkoeffizienten von f und g sind positiv \implies Leitkoeffizient von $h = fg$ ist positiv.

Z.z: Es gibt keine Primzahl p , die alle Koeffizienten von h teilt.

Sei p eine Primzahl. Man betrachte den Homomorphismus $\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{F}_p[x]$

Da f und g primitiv sind, ist $\bar{f} \neq 0$ und $\bar{g} \neq 0$.

$$\underset{\mathbb{F}_p[x] \text{ ist IB}}{\implies} \bar{h} = \bar{f}\bar{g} \neq 0$$

$\implies p$ teilt nicht alle Koeffizienten von h . □

Satz 80. (a) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ und $f_0, g_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv s.d. $f = cf_0, g = dg_0$. Falls f ein Teiler von g in $\mathbb{Q}[x]$ ist, so ist f_0 ein Teiler von g_0 in $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv und $g \in \mathbb{Z}[x]$ beliebig. Falls $g = fq$ für $q \in \mathbb{Q}[x]$, dann ist $q \in \mathbb{Z}[x]$

(c) Seien $f, g \in \mathbb{Z}[x]$. Falls f und g einen gemeinsamen nicht konstanten Teiler h in $\mathbb{Q}[x]$ haben, so haben sie auch in $\mathbb{Z}[x]$ einen gemeinsamen nicht konstanten Teiler.

Beweis:

(b) Wir schreiben $q = cq_0$ mit $c \in \mathbb{Q}, q_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv. $\underset{\text{Gauss}}{\implies} f_0$ ist primitiv.

Wir haben $g = cfq_0$, daher muss gelten, dass $c \in \mathbb{Z}$ und somit $q \in \mathbb{Z}[x]$.

a Falls f Teiler von g in $\mathbb{Q}[x]$ ist, so ist auch f_0 ein Teiler von g_0 in $\mathbb{Z}[x]$.

$\underset{(b)}{\implies} f_0$ ist ein Teiler von g_0 in $\mathbb{Z}[x]$.

(c): Wir schreiben $h = ch_0, c \in \mathbb{Q}, h_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv.

$f = ch_0f_1$ und $g = ch_0g_1$ für $f_1, g_1 \in \mathbb{Q}[x]$.

$\underset{(b)}{\implies} h_0$ teilt f und h_0 teilt g in $\mathbb{Z}[x]$. □

Korollar 18. Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ nicht konstant. Falls f in $\mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist, so ist, f auch in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

Beweis: f hat keine echten Teiler in $\mathbb{Q}[x]$

$\xrightarrow{\text{Satz}}$ f hat keine echten Teiler in $\mathbb{Z}[x]$. \square

Satz 81. Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mit positivem Leitkoeffizienten. Das Polynom f ist genau dann irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$, wenn entweder

- (i) f ist eine Primzahl.
- (ii) f ist primitiv und in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

Beweis: “ \implies ” Sei f irreduzibel. Wir schreiben $f = cf_0$ für f_0 primitiv.

Da f irreduzibel ist, muss c oder f_0 eine Einheit sein.

D.h. entweder $c = 1$ oder $f_0 = 1$.

Falls $f_0 = 1$, dann ist f konstant und somit eine Primzahl.

Falls $c = 1$, so ist $f = f_0$ primitiv und somit irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ gemäss Korollar.

“ \Longleftarrow ” klar. \square

Satz 82. Jedes irreduzible Element in $\mathbb{Z}[x]$ ist ein Primelement.

Beweis: Sei f irreduzibel und seien $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ sodass $f | gh$.

Z.z: $f | g$ oder $f | h$.

1. Fall: $f = p$ ist eine Primzahl. Wir schreiben $g = cg_0$ und $h = dh_0$. g_0, h_0 primitiv, $c, d \in \mathbb{Z}$.

$\xrightarrow[\text{Gauss}]{} h_0g_0$ primitiv.

\implies es gibt einen Koeffizienten a von g_0h_0 , der nicht durch p teilbar ist.

Da aber $p | gh$ und $gh = cdg_0h_0$

$\implies p | cda$

$\implies p | c$ oder $p | d$

$\implies p | g$ oder $p | h$.

2. Fall: f ist primitiv und irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

$\xrightarrow[\mathbb{Q}[x]\text{ ist faktoriell}]{} f$ ist prim in $\mathbb{Q}[x]$.

$\implies f$ ist Teiler von g oder von h in $\mathbb{Q}[x]$

$\xrightarrow[\text{Satz}]{} f$ ist Teiler von g oder h in $\mathbb{Z}[x]$. \square

Satz 83. $\mathbb{Z}[x]$ ist faktoriell. Insbesondere lässt sich jedes $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ eindeutig (bis auf Permutation der Faktoren) schreiben als $f(x) = \pm p_1 \cdots p_m q_1(x) \cdots q_n(x)$ wobei p_i positive Primzahlen sind und q_i irreduzible primitive Polynome.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$ endet, da irreduzible Elemente prim sind.

Sei $(p_1) \subsetneq (p_2) \subsetneq \cdots$ eine aufsteigende Kette von Hauptidealen, d.h. p_{i+1} ist echter Teiler von $p_i, i = 1, 2, \dots$

$$\implies \deg P_{P_{i+1}} \leq \deg p_i$$

$$\implies \deg p_n = \deg p_{n+k} \text{ für } n \text{ gross genug und für alle } k \geq 0 \text{ schreibe } p_n = c_n p_{n,0}$$

$$p_{n+k} = c_{n+k} p_{n+k,0}$$

$$p_{n,0}, p_{n+k,0} \text{ primitiv.}$$

Da $p_{n+k} | p_k$ gilt $p_{0,n+k} = p_{0,n}$ und somit $c_{n+k} | c_n$ in \mathbb{Z} .

Da c_n nur endlich viele Teile hat, erhalten wir $(p_{n+k}) = (p_{n+k+1}) = \cdots$ für k gross genug.

\implies es gibt keine solchen Ketten. \square

Satz 84. Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K . Dann gilt:

- (a) Seien $f, g \in R[x]$ nicht konstant. Falls f und g in $K[x]$ einen nicht-konstanten gemeinsamen Teiler haben, so haben sie auch in $R[x]$ einen nicht-konstanten gemeinsamen Teiler.
- (b) Sei $f \in R[x]$ nicht konstant. Falls f in $R[x]$ irreduzibel ist, so ist es auch in $K[x]$ irreduzibel.
- (c) $R[x]$ ist faktoriell.

Beweis: Beweise analog zum Fall $R = \mathbb{Z}$. (\rightsquigarrow etwas komplizierter wegen Einheiten). \square

Korollar 19. Die Polynomringe $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]K[x_1, \dots, x_n]$, für K Körper, sind faktoriell.

Beweis: Falls R faktoriell ist, so erhalten wir induktiv, dass auch $R[x_1, \dots, x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ faktoriell ist. \square

Vorlesung 24

Kriterien für Irreduzibilität

Wie zeigt man, dass $f \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist?

Satz 85. Sei $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Sei p eine Primzahl, sodass $p \nmid a_n$.

Ist die Restklasse $\bar{f} \pmod{p}$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[x]$, so ist f irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

Beweis: Man nehme an $f = gh$, für $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ echte Faktoren, d.h. insbesondere $\deg g, \deg h < \deg f$.

Gemäss Satz von gestern können wir annehmen, dass $g, h \in \mathbb{Z}[x]$.

Reduktion \pmod{p} .

$$\bar{f} = \bar{g}\bar{h} \text{ in } \mathbb{F}_p[x]$$

Da $p \nmid a_n$, ist $\deg \bar{f} = n$.

Ausserdem haben wir $\deg \bar{g} < n, \deg \bar{h} < n$.

aber $\deg(\bar{g}\bar{h}) = n$

$$\implies \deg \bar{g} > 0, \deg \bar{h} > 0$$

$\implies \bar{g}$ ist ein echter Teiler von \bar{f} .

$\implies \bar{f}$ ist nicht irreduzibel. □

Bemerkung 65. Man kann so nicht zeigen, dass ein Polynom reduzibel ist. Es gibt Polynome $f \in \mathbb{Z}[x]$, sodass f irreduzibel ist, aber die Restklasse $\bar{f} \pmod{p}$ ist nicht irreduzibel für alle Primzahlen p (z.B. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$).

Sieb des Eratosthenes

Das Sieb des Eratosthenes um Primzahlen zu finden.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Diese Methode funktioniert auch für $\mathbb{F}_p[x]$.

Wir schreiben alle Polynome Grad für Grad nebeneinander und streichen die Vielfachen weg.

$\mathbb{F}_2[x]$:

Grad 1:

$x, x + 1$

Grad 2:

$x^2, x^2 + x, x^2 + x + 1, x^2 + 1$

Grad 3:

$x^3, x^3 + x^2, x^3 + x^2 + x, x^3 + x^2 + x + 1, \dots$

Nach dem Sieb bleiben $x, x + 1, x^2 + x + 1, \dots$

Beispiel 49. $x^2 + x + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[x]$

$\xrightarrow{\text{Satz}}$ $3x^2 + x + 7 \in \mathbb{Z}[x]$ ist auch irreduzibel.

Satz 86 (Eisenstein Kriterium). Sei p eine Primzahl.

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ sodass

- (i) $p \nmid a_n$
- (ii) $p | a_i$ für $i = 0, \dots, n-1$
- (iii) $p^2 \nmid a_0$

Dann ist f irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

Beispiel 50. $x^4 + 50x^2 + 30x + 20$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ (und auch $\mathbb{Z}[x]$, da es primitiv ist.)

Beweis: Sei \bar{f} die Restklasse von $f \pmod{p}$.

$$\implies \bar{f} = \bar{a}_n \bar{x}^n, \bar{a}_n \neq 0.$$

Wir nehmen an, $f \in \mathbb{Q}[x]$ ist reduzibel, d.h. $f = gh$, mit g, h echten Teilern.

Wir können annehmen $g, h \in \mathbb{Z}[x]$.

$$\implies \bar{g} \text{ und } \bar{h} \text{ teilen } \bar{a}_n \bar{x}^n$$

$$\implies \bar{g} \text{ und } \bar{h} \text{ sind Monome.}$$

\implies alle Koeffizienten von g und h ausser dem Leitkoeffizienten sind durch p teilbar.

Sei b_0 der konstante Koeffizient von g und c_0 der konstante Koeffizient von h .

$$\implies \text{der konstante Koeffizient von } f \text{ ist } a_0 = b_0 c_0.$$

Da $p | b_0$ und $p | c_0$, folgt $p^2 | a_0$ (widerspruch zu (iii)).

$$\implies f \text{ ist irreduzibel.} \quad \square$$

Definition 58. Sei p eine Primzahl.

Betrachte $x^p - 1 = (x - 1) \underbrace{(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)}_{f(x)}$.

$f(x)$ heisst **Kreisteilungspolynom**.

Korollar 20. Sei p eine Primzahl. $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

Beweis: $(x - 1)f(x) = x^p - 1$.

Substituiere $x = y + 1$

$$\implies yf(y+1) = (y+1)^p - 1 = y^p + \binom{p}{1} y^{p-1} + \binom{p}{2} y^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} y$$

Wir haben $\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$

$i < p \implies p \nmid i!$

$$\implies p \mid \binom{p}{i} \text{ für } i = 1, \dots, p-1.$$

Aber $\binom{p}{p-1} = p$, d.h. $p^2 \nmid \binom{p}{p-1}$

$\implies f(y+1)$ erfüllt das Eisenstein-Kriterium.

$f(y+1)$ ist irreduzibel.

$f(y)$ ist irreduzibel. \square

Vorlesung 25

Körper

Definition 59. Ein **Körper** ist ein Ring, der nicht der Nullring ist, und in dem jedes Element ausser 0 invertierbar ist.

Bemerkung 66. Körper sind euklidisch: $\forall a, b \in K^* \exists q \in K^*$ sodass $a = qb + 0$.

Beispiel 51. Teilkörper von \mathbb{C} (d.h. Unterringe, die auch Körper sind). Diese heißen **Zahlkörper**.

Beispiel 52. Endliche Körper, z.B. $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p prim (es gibt auch andere!).

Definition 60. Eine **Körpererweiterung** ist ein Paar von Körpern $L \supseteq K$. Wir schreiben oft L/K (L ist eine Erweiterung von K).

Beispiel 53. \mathbb{C} ist eine Erweiterung von \mathbb{R} .

Bemerkung 67. Wenn L/K eine Körpererweiterung ist, dann ist L ein K -Vektorraum.

Definition 61. Sei L/K eine Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ heisst **algebraisch über K** , falls es ein Polynom $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ gibt, sodass $f(\alpha) = 0$.

Bemerkung 68. Wir können immer annehmen, dass f normiert ist.

Definition 62. Ein $\alpha \in L$ heisst **transzendent über K** , wenn es nicht algebraisch ist.

Beispiel 54. \mathbb{C}/\mathbb{Q} , dann ist

- $\sqrt{2}$ ist algebraisch über \mathbb{Q} .
- π ist transzendent über \mathbb{Q} .

- i ist algebraisch über Q .

Beispiel 55. \mathbb{C}/\mathbb{R} , dann ist π algebraisch über R .

$$(f(x) = x - \pi \in \mathbb{R} \implies f(\pi) = 0).$$

Sei L/K eine Körpererweiterung. Wir betrachten den Homomorphismus $\phi: K[x] \rightarrow L$ $f \mapsto f(\alpha)$.

Dann ist α transzendent genau dann, wenn $\text{Kern } \phi = 0 \Leftrightarrow \phi$ injektiv.

Falls α algebraisch ist, so ist $\text{Kern } \phi \subseteq K[x]$ ein Ideal.

$\xrightarrow[K[x] \text{ ist HIR}]{} \text{Kern } \phi = (f)$, wobei f das normierte Polynom vom kleinsten Grad in $\text{Kern } \phi$ ist.

Dieses Polynom heisst das **Minimalpolynom** von α .

Bemerkung 69. Dieses f ist das einzige normierte irreduzible Polynom in $\text{Kern } \phi$.

Beweis:

- f ist irreduzibel: Falls $f = gh$ in $K[x]$
 - $\implies f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha) = 0$
 - $\implies g(\alpha) = 0$ oder $h(\alpha) = 0$
 - $\implies g$ oder h ist konstant.
- Sei $g \in \text{Kern } \phi = (f)$, $g \neq f$, dann ist $g = fh$
 - $\implies g$ nicht irreduzibel (falls $\deg g > \deg f$) oder g ist nicht normiert.

□

Bemerkung 70. Das Minimalpolynom f hängt sowohl von α als auch von K ab.

Beispiel 56. Sei $K = \mathbb{Q}[i] \subseteq \mathbb{C}$ und $\alpha = \sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$. Das Minimalpolynom von α über \mathbb{Q} ist $x^4 + 1$. Über K ist aber $x^4 + 1 = (x^2 + i)(x^2 - i)$.

Das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}[i]$ ist $x^2 - i$.

Definition 63. Seien L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Wir bezeichnen mit $K(\alpha) \subseteq L$ den kleinsten Körper, der K und α enthält.

Ähnlich für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ ist $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der kleinste Körper, der K und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ enthält.

Bemerkung 71. Wir hatten $K[\alpha] = \{a_n\alpha^n + \dots + a_0 \mid a_i \in K\} \subseteq L$.

$K(\alpha)$ ist isomorph zum Quotientenkörper von $K[\alpha]$.

Beweis: Kleine Übung. □

Bemerkung 72. Falls $\alpha \in L$ ein transzendentes Element ist, so ist $K[\alpha] \simeq K[x]$ und somit $K(\alpha) \simeq K(x)$.

Satz 87. Seien L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K mit Minimalpolynom $f \in K[x]$.

- (a) Der Homomorphismus $\phi: K[x] \rightarrow K[\alpha]$ $g \mapsto g(\alpha)$ induziert einen Isomorphismus

$$K[x]/(f) \xrightarrow{\sim} K[\alpha]$$

und $K[\alpha]$ ist ein Körper. Insbesondere ist $K(\alpha) = K[\alpha]$.

- (b) Seien allgemeiner $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ algebraisch über K . Dann ist $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Beweis:

- (a) ϕ ist surjektiv $\implies \phi$ induziert den Isomorphismus

$$K[x]/(f) + K[x]/\text{Kern } \phi \xrightarrow{\sim} K[\alpha]$$

Da f irreduzibel ist, ist (f) maximal

$\implies K[\alpha]$ ist ein Körper.

- (b) Das folgt per Induktion:

$$\begin{aligned} K[\alpha_1, \dots, \alpha_n] &= K[\alpha_1, \dots, \alpha_n][\alpha_n] \\ &= K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)[\alpha_n] \\ &= K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

□

Wir haben gesehen, dass für ein normiertes $f \in R[x]$ so ist

$$K^n \xrightarrow{\sim} K[\alpha] = K[x]/(f)$$

$$(r_0, \dots, r_{n-1}) \mapsto r_0 + r_1\alpha + \dots + r_{n-1}\alpha^{n-1}$$

eine Bijektion. Daraus folgt direkt:

Satz 88. Sei α algebraisch über K mit Minimalpolynom f . Falls $\deg f = n$, so ist $(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ eine Basis von $K[\alpha]$ als Vektorraum über K .

Der Grad von einer Körpererweiterung

Definition 64. Sei L/K eine Körpererweiterung. Der **Grad** $[L : K]$ von L/K ist die Dimension von L als K -Vektorraum.

L/K heisst **endlich**, falls $[L : K]$ endlich ist.

Beispiel 57. $(1, i)$ ist eine Basis von \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum. $\Rightarrow [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

Satz 89. Ist α algebraisch über K , so ist $[K(\alpha) : K]$ der Grad vom Minimalpolynom über α .

Beweis: Folgt direkt aus Satz 88. □

Sei $f \in K[x]$ das Minimalpolynom von α .

$$\deg f = 1 \Leftrightarrow f(x) = x - a \Leftrightarrow \alpha \in K$$

Bemerkung 73. Grad α ist $\infty \Leftrightarrow \alpha$ ist transzendent über K .

Satz 90. Seien $K \subseteq L \subseteq M$ Körper. Dann gilt:

$$[M : K] = [M : L][L : K]$$

Beweis: Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine K -Basis von L und β_1, \dots, β_m eine L -Basis von M .

Behauptung: $(\alpha_i \beta_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ ist eine K -Basis von M .

Bew: Sei $x \in M$

$$\Rightarrow x = \sum_{j=1}^m a_j \beta_j, \quad a_j \in L$$

$$a_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i, \quad a_{ij} \in K$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \beta_j$$

$\Rightarrow (\alpha_i \beta_j)$ erzeugt M als K -Vektorraum.

Wir nehmen an, dass $\sum a_{ij} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_j \right) \beta_i = 0$

$$\stackrel{(\beta_1, \dots, \beta_m) \text{ ist Basis}}{\Rightarrow} \sum a_{ij} \alpha_j = 0 \quad \forall i$$

$$\stackrel{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ ist Basis}}{\Rightarrow} a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$\Rightarrow (\alpha_i \beta_j)$ ist linear unabhängig.

$\Rightarrow (\alpha_i \beta_j)$ ist Basis.

Falls $[M : L]$ oder $[L : K]$ unendlich ist, geht der Beweis ähnlich. □

Vorlesung 26

Korollar 21. Sei L/K eine Körpererweiterung von endlichem Grad n (d.h. eine **endliche** Körpererweiterung).

Sei $\alpha \in L$. Dann ist α algebraisch über K und der Grad von α teilt n .

Beweis: Betrachte $K \subseteq K(\alpha) \subseteq L$

$$\Rightarrow \underbrace{[L : K]}_{=n} = [K(\alpha) : K][L : K(\alpha)]$$

$\Rightarrow [K(\alpha) : K]$ ist endlich und ein Teiler von n . □

Korollar 22. Jedes irreduzible Polynom $g \in \mathbb{R}[x]$ hat Grad 1 oder 2.

Beweis: OBdA ist g normiert. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von g . Da g irreduzibel ist, ist g das Minimalpolynom von α

\Rightarrow Grad α ist $\deg g$.

Da $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2 \Rightarrow \deg g \in \{1, 2\}$. □

Beispiel 58. Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}, \beta = \sqrt[4]{5}$ und $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

Behauptung: $[L : \mathbb{Q}] = 12$

Beweis: Grad α über \mathbb{Q} ist 3 und Grad β über \mathbb{Q} ist 4, da $x^3 - 2$ und $x^4 - 5$ irreduzibel sind über \mathbb{Q} (Eisenstein).

$\Rightarrow 3|[L : \mathbb{Q}]$ und $4|[L : \mathbb{Q}]$

$\Rightarrow [L : \mathbb{Q}] \geq 12$.

Der Grad von β über $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist höchstens 4, da β eine Nullstelle von $x^4 - 5 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ ist.

$\Rightarrow [L : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq 4$

$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$

$\Rightarrow [L : \mathbb{Q}] \leq 12$

$\Rightarrow [L : \mathbb{Q}] = 12$

Satz 91. Sei L/K eine Körpererweiterung. Die Menge aller Elemente in L , die über K algebraisch sind, bilden einen Teilkörper von L .

Beweis: Seien $\alpha \in L$ und $\beta \in L$ algebraisch über K .

Z.z: $\alpha + \beta, \alpha\beta, -\alpha, \alpha^{-1}$ falls $\alpha \neq 0$ sind algebraisch.

Wir haben $[K(\alpha) : K] < \infty$, β ist algebraisch über $K(\alpha)$.

$\Rightarrow [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] < \infty$

$$\implies [K(\alpha, \beta)] < \infty$$

\implies alle Elemente in $K(\alpha, \beta)$ sind algebraisch. Insbesondere also $\alpha + \beta, \alpha\beta, -\alpha$ und α^{-1} . \square

Beispiel 59. Sei $\alpha = \sqrt{2}$ und $\beta = \sqrt{3}$ und $\gamma = \alpha + \beta$.

Finde das Polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$ sodass $g(\gamma) = 0$

Wir wissen, dass $1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^n$ linear abhängig sind über \mathbb{Q} für n gross genug.

Wir rechnen:

$$\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\gamma^4 = 49 + 20\sqrt{6}$$

$$\gamma^4 - 10\gamma^2 + 1 = 0$$

$$\implies \gamma \text{ ist Nullstelle von } g(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$$

$g(x)$ ist irreduzibel (Übung ;-))

Definition 65. Eine Körpererweiterung L/K heisst **algebraisch**, wenn alle Elemente von L/K algebraisch sind.

Satz 92. Seien $K \subseteq L \subseteq M$ Körper. Ist M algebraisch über L und L algebraisch über K , so ist M algebraisch über K .

Beweis: Sei $\alpha \in M$.

Z.z: α ist algebraisch über K .

Wir wissen, dass α algebraisch ist über L .

Das heisst, $\exists a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in L$ s.d. $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0$.

$\implies \alpha$ ist algebraisch über dem Körper $K(a_0, \dots, a_n)$. Jedes der a_i ist algebraisch über K .

Betrachte

$$K \subseteq K(a_0) \subseteq K(a_0, a_1) \subseteq \dots \subseteq K(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \subseteq K(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha)$$

Jede Erweiterung in dieser Kette ist Endlich

$\implies K(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha)$ ist endlich.

$\implies \alpha$ ist algebraisch über K . \square