
MISURE RIPETUTE DI LUNGHEZZA E TEMPO

Francesco Pasa, Davide Bazzanella, Andrea Miani
Gruppo A11

28 febbraio 2013 - 11 marzo 2013



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Sommario

Misura della lunghezza di un gruppo di 25 cilindri di metallo e della durata del periodo di oscillazione di un pendolo semplice. Analisi dei valori ottenuti dagli esperimenti del singolo gruppo e dei valori raccolti dagli esperimenti di tutti i gruppi di laboratorio.

Indice

1	Introduzione	3
2	Cilindretti	3
2.1	Descrizione della procedura di misura	3
2.1.1	Metro a nastro	3
2.1.2	Calibro ventesimale	3
2.1.3	Micrometro	3
2.2	Analisi dei dati	4
2.2.1	Dati raccolti con il metro	4
2.2.2	Dati raccolti con calibro e micrometro	5
2.3	Analisi dei dati a livello globale di laboratorio	6
2.3.1	Dati misurati col metro	8
2.3.2	Dati misurati con calibro e micrometro	8
3	Pendolo	9
3.0.3	Predizione teorica	9
3.1	Descrizione della procedura di misura	9
3.1.1	Apparato sperimentale	9
3.1.2	Processo di acquisizione dei dati sperimentali	10
3.1.3	Errori sistematici	10
3.2	Analisi dei dati	11
3.2.1	Compatibilità delle misure di diversi sperimentatori.	11
3.2.2	Analisi dei dati dei tre sperimentatori	14
3.2.3	Analisi dei dati dello sperimentatore singolo	15
3.2.4	Distribuzione dei valori medi campionari	17
4	Conclusioni	17

1 Introduzione

Questa relazione sarà divisa in due sezioni, una dedicata al primo esperimento in cui verrà misurata la lunghezza di una popolazione di 25 cilindri metallici con tre diversi strumenti (metro a nastro, calibro ventesimale, micrometro), l'altra dedicata alla misura del periodo di un pendolo semplice (costruito con un cavo inestensibile e un peso) effettuata da tutti i componenti del gruppo. La prima esperienza verrà integrata dai dati raccolti dagli altri gruppi del corso di laboratorio. La seconda si propone di evidenziare la presenza di eventuali errori sistematici, dovuti alla differente prontezza di riflessi dei componenti dell'equipe. Per altri dettagli sullo scopo degli esperimenti eseguiti rimandiamo ai paragrafi introduttivi delle rispettive sezioni.

2 Cilindretti

2.1 Descrizione della procedura di misura

Lo scopo dell'esperienza è quello di familiarizzare con i vari tipi di incertezza che si incontrano nella normale vita di laboratorio. L'accento va posto principalmente sull'errore di risoluzione. Un altro scopo importante è lo studio degli isogrammi al fine di individuare popolazioni distinte di cilindretti. Per concludere ci siamo occupati di verificare la compatibilità di misure effettuate con strumenti diversi.

2.1.1 Metro a nastro

Abbiamo misurato i 25 cilindretti con un metro a nastro la cui risoluzione di misura è 1 millimetro, in quanto abbiamo ritenuto di non poter distinguere un intervallo di mezzo millimetro. Per questo motivo abbiamo approssimato le misure alla tacca da un millimetro più vicina al bordo del cilindretto. Poiché la lunghezza dei cilindretti era di circa 15 mm abbiamo incontrato delle difficoltà nell'allineare i cilindri con lo 0 dello strumento. Per questo motivo abbiamo allineato un'estremità di ogni cilindro con la tacca dei 10 cm del metro e abbiamo sottratto questa quantità al valore della misura così ottenuta. E' importante evidenziare che anche in questa operazione abbiamo riscontrato una certa difficoltà nell'allineare correttamente i cilindri anche con la tacca dello strumento, ma ci è sembrato che la misura così ottenuta fosse più precisa di quella riscontrata allineandoli con lo 0 dello strumento. Ciò nonostante abbiamo tentato di evitare eventuali errori di parallasse durante la lettura dello strumento.

2.1.2 Calibro ventesimale

Il calibro che abbiamo utilizzato ha una risoluzione di misura di 0.05 millimetri. La misura con il calibro ventesimale è stata effettuata avendo cura di disporre i cilindri in modo perpendicolare ai becchi del calibro, a tal fine abbiamo sfruttato le scanalature presenti sullo strumento. In questo modo abbiamo tentato di misurare l'asse del cilindro, tuttavia non abbiamo potuto evitare nella maniera più assoluta errori di posizione dei cilindri. La lettura dei ventesimi di millimetro è stata effettuata cercando quale tacca della scala mobile ventesimale si allineasse meglio con le tacche sovrastanti della scala millimetrata. Questa operazione è stata eseguita da tutti i membri del gruppo per evitare eventuali problemi di parallasse dovuti ad una singola valutazione della misura.

2.1.3 Micrometro

Il micrometro è uno strumento con una risoluzione di misura di 0.01 millimetro. Anche in questo caso la misura dei cilindri è stata effettuata prestando attenzione che i campioni fossero

Metro [mm]					Lunghezza dei cilindretti Calibro [mm]					Micrometro [mm]				
14	14	14	14	14	13.70	13.85	13.95	13.80	13.95	13.94	13.92	13.84	13.93	13.79
14	14	14	14	14	13.70	13.95	13.90	13.90	13.90	13.94	13.93	13.89	13.92	13.91
14	14	14	14	14	13.70	13.95	13.90	13.95	13.85	13.93	13.93	13.84	13.90	13.74
14	14	14	14	14	13.70	13.95	13.90	13.90	13.90	13.70	13.85	13.91	13.79	13.70
13	14	14	14	14	13.75	13.90	13.80	13.85	13.90	13.71	13.92	13.91	13.94	13.70

Tabella 1: Misure della lunghezza dei 25 cilindretti ottenute con i tre strumenti a nostra disposizione. È riportato il valore di lettura degli strumenti.

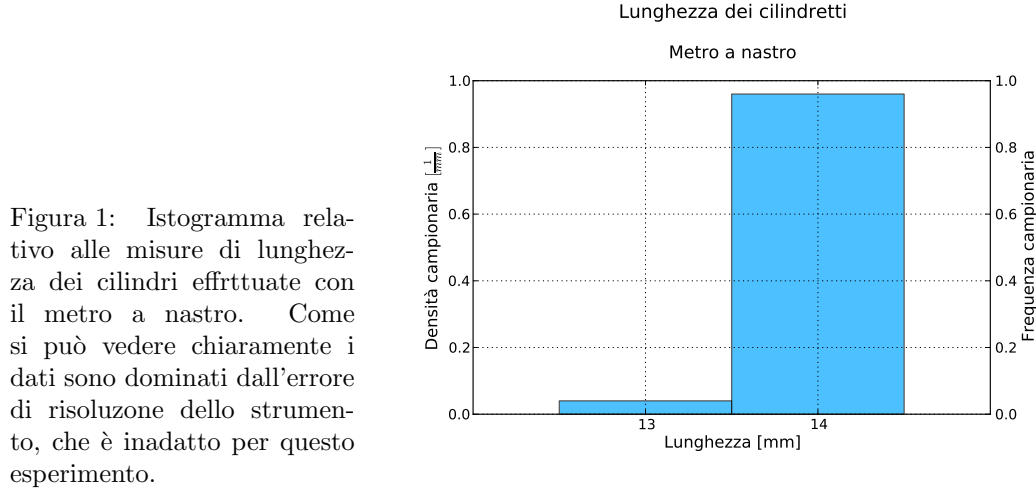


Figura 1: Istogramma relativo alle misure di lunghezza dei cilindri effettuate con il metro a nastro. Come si può vedere chiaramente i dati sono dominati dall'errore di risoluzione dello strumento, che è inadatto per questo esperimento.

perpendicolari alle aste di misurazione, per evitare lo stesso tipo di errore descritto sopra. Come nel caso del calibro non possiamo essere sicuri del perfetto allineamento dei cilindri, ma abbiamo tentato di ridurre al minimo questa problematica.

2.2 Analisi dei dati

2.2.1 Dati raccolti con il metro

La tabella 1 riporta tutte le 25 misure di lunghezza dei cilindri effettuate con ognuno dei tre strumenti a nostra disposizione. L'istogramma in figura 1 rappresenta la distribuzione della lunghezza della popolazione dei cilindretti ottenuta con il metro a nastro. Per costruire questo istogramma abbiamo deciso di utilizzare come binnaggio la risoluzione di misura dello strumento e quindi di 1 millimetro, poichè tutte le misure effettuate sono risultate essere 14 ± 0.5 mm tranne una che ha valore 13 ± 0.5 mm. Come si può osservare dal grafico non siamo riusciti ad apprezzare la distribuzione non uniforme della lunghezza dei cilindri, in quanto la risoluzione dello strumento non è stata sufficiente per apprezzare le variazioni di lunghezza da un corpo all'altro. I parametri statistici ottenuti relativi alle misure dei cilindri sono i seguenti:

- Media campionaria:

$$m^*[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i) \simeq \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j p_j^*) = 13.96 \text{ mm} \quad (1)$$

- Varianza campionaria:

$$\tilde{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*[x])^2 = 0.04 \text{ mm}^2 \quad (2)$$

- Deviazione standard campionaria:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*[x])^2} = 0.2 \text{ mm} \quad (3)$$

Possiamo concludere dicendo che il valore di deviazione standard trovato non ha senso, poiché è molto minore all'errore di risoluzione. Il metro non è uno strumento adatto per compiere queste misure; infatti l'errore di risoluzione domina su tutte le altre cause di incertezza, impedendo di ottenere risultati significativi dall'esperimento.

2.2.2 Dati raccolti con calibro e micrometro

Gli istogrammi figura 2 rappresentano rispettivamente la distribuzione delle misure della lunghezza dei cilindri ottenute con il calibro ventesimale e con il micrometro.

Per l'istogramma relativo al calibro ventesimale la scelta del binning è legata alla risoluzione dello strumento e quindi la larghezza di ogni singolo bin è di 0.05 mm. I dati sono infatti abbastanza numerosi per avere un numero di conteggi sufficienti per ogni colonna.

Per l'istogramma relativo al micrometro, invece, si è scelto di utilizzare lo stesso binning utilizzato per il calibro. Abbiamo effettuato questa scelta poiché se avessimo diminuito la larghezza dei bin avremmo ottenuto un numero di colonne troppo alto e per ognuna di esse un numero di conteggi insufficiente. Al contrario se avessimo scelto di aumentare la larghezza dei bin allora lo scopo di misurare i 25 cilindretti con il micrometro sarebbe risultato vano in quanto non si sarebbe nemmeno apprezzata la buona risoluzione dello strumento. D'altra parte questa scelta rende i grafici confrontabili direttamente.

Come si può notare i due istogrammi si assomigliano: infatti in entrambi i casi siamo riusciti ad apprezzare la presenza di un picco della popolazione in corrispondenza

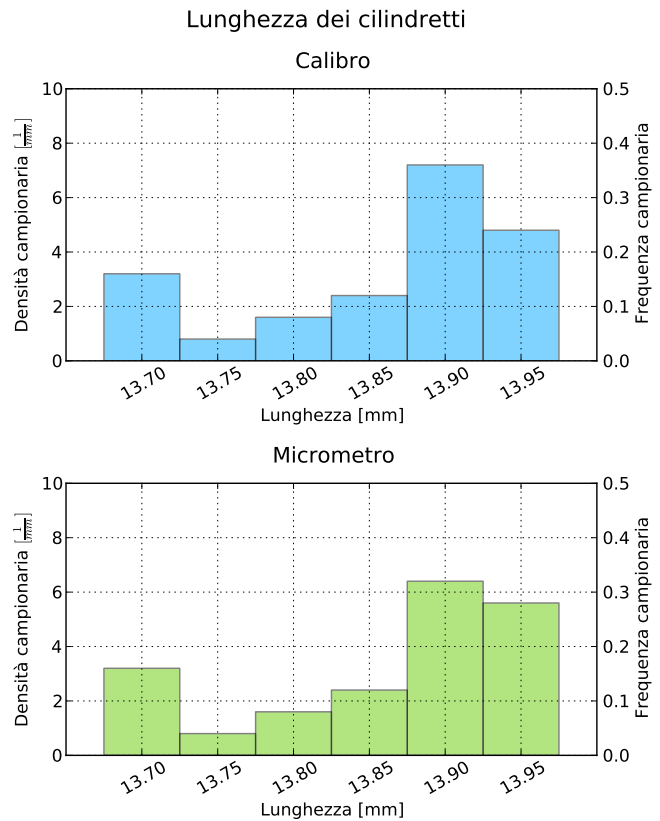


Figura 2: I due grafici riportano le lunghezze dei cilindri, misurati con calibro ventesimale e micrometro. Come si può notare i grafici sono identici a parte le ultime due colonne, dove un dato ha cambiato bin.

del valore 13.90 mm. La distribuzione dei cilindretti è stabile nei due istogrammi ottenuti con strumenti diversi, a parte le ultime due colonne che sono leggermente diverse. C'è un buon accordo tra le misure effettuate con calibro e micrometro.

Tuttavia, nonostante le misure risultino essere più accurate rispetto a quelle eseguite con il metro a nastro e la risoluzione degli strumenti usati sia adeguata, non ci sono abbastanza campioni per poter affermare l'esistenza di due popolazioni distinte di cilindretti, come sembra suggerire la colonna centrata in (13.70 mm). Affermiamo questo perchè, considerando l'incertezza delle colonne, la colonna si confonde con la coda del picco principale.

L'errore su ogni colonna è $\sqrt{n_j}$, dove n_j è il numero di dati che cadono nel bin j -esimo. Il conteggio della prima colonna (quella centrata in 13.70 mm) è $n_1 = 4$, la sua incertezza è $\sqrt{4} = 2$, mentre la seconda colonna (centrata in 13.75 mm) ha un solo conteggio $n_2 = 1$, con errore uguale a 1. Tenendo conto di questo, gli intervalli di incertezza delle colonne si toccano, e quindi la prima colonna può semplicemente essere una fluttuazione casuale della coda.

Più nel dettaglio possiamo dire che i dati statistici riguardanti le misure con il calibro ventesimale e il micrometro sono:

- Media campionaria:

$$m_{cal}^*[x] \simeq 13.86 \text{ mm} \quad m_{mic}^*[x] \simeq 13.86 \text{ mm}$$

- Varianza campionaria:

$$\tilde{D}_{cal} = 0.0077 \text{ mm}^2 \quad \tilde{D}_{mic} = 0.0076 \text{ mm}^2$$

- Deviazione standard campionaria:

$$\tilde{\sigma}_{cal} = 0.09 \text{ mm} \quad \tilde{\sigma}_{mic} = 0.09 \text{ mm}$$

Come già notato sopra, le misure effettuate con calibro e micrometro sono compatibili. I valori medi campionari delle lunghezze e le deviazioni tipo campionarie sono uguali per entrambi gli strumenti.

Altri parametri statistici includono:

- Mediana:

$$m_{cal}[x] \simeq 13.90 \text{ mm} \quad m_{mic}[x] \simeq 13.91 \text{ mm}$$

- Quantile 10%:

$$q_{10\%cal} = 13.70 \text{ mm} \quad q_{10\%mic} = 13.70 \text{ mm}$$

- Quantile 90%:

$$q_{90\%cal} = 13.95 \text{ mm} \quad q_{90\%mic} = 13.94 \text{ mm}$$

2.3 Analisi dei dati a livello globale di laboratorio

Oltre all'analisi dei dati raccolti dal gruppo, abbiamo analizzato anche i dati ottenuti dagli altri gruppi del lunedì. Non abbiamo informazioni per quanto riguarda gli errori sistematici commessi in quanto le misure non sono state raccolte da noi e siamo ignoranti per quanto riguarda le modalità di acquisizione. Ci limiteremo ad un'analisi della forma dell'istogramma e al calcolo dei parametri statistici principali.

I dati ottenuti sono mostrati negli istogrammi delle figure 3 e 4. Le tabelle dei dati non sono riportate per motivi di spazio; avevamo infatti 367 misure differenti.

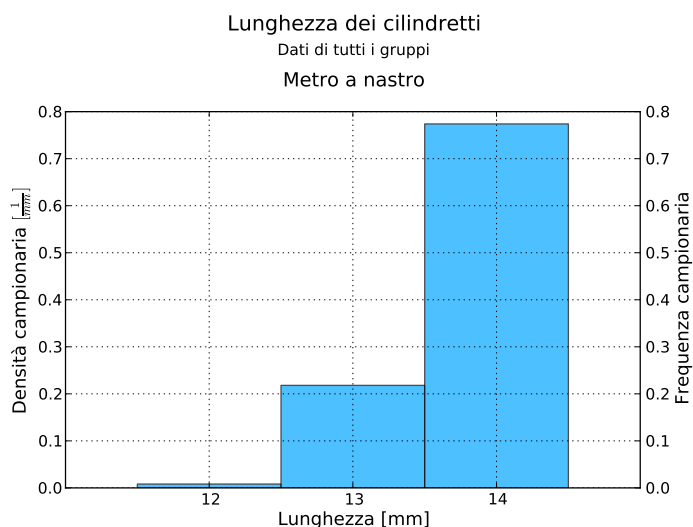


Figura 3: Misure della lunghezza dei cilindretti ottenute da tutti i gruppi del laboratorio (gruppi del lunedì). L'istogramma riporta le misure effettuate con il metro a nastro. Come si può vedere la risoluzione dello strumento è insufficiente per fare una qualsiasi analisi qualitativa dei dati ottenuti.

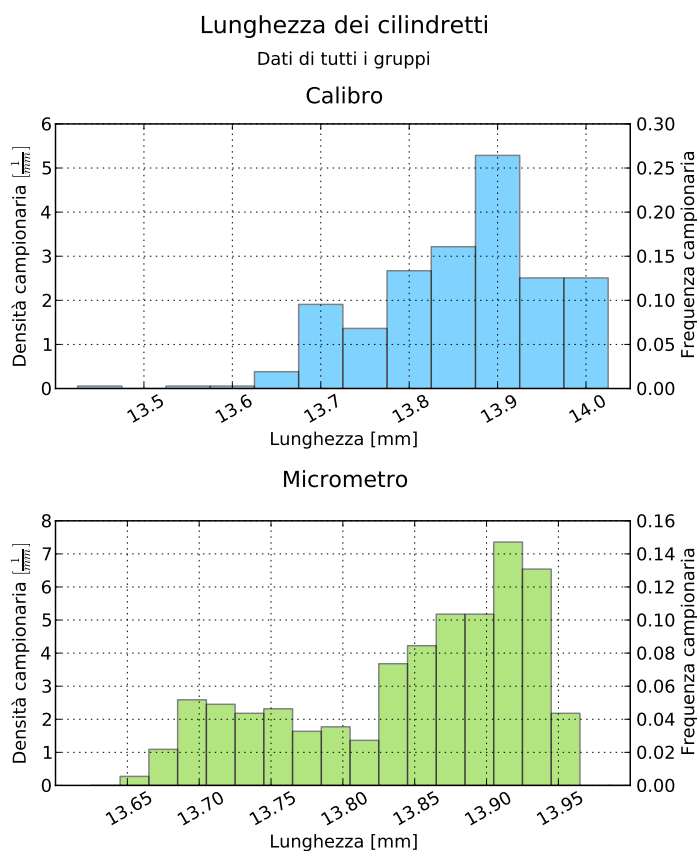


Figura 4: Lunghezza dei cilindretti ottenute da tutti i gruppi (del lunedì) del corso di laboratorio. L'istogramma relativo alle misure con il calibro ha binning di 0.05 mm, mentre nell'istogramma delle misure effettuate con il micrometro i bin sono da 0.02 mm. Si può notare con facilità, nel grafico delle misure con il micrometro, che esiste una seconda popolazione di cilindretti più corti che si distacca nettamente dalla coda del picco principale. Questa popolazione è molto meno visibile nel grafico relativo al calibro, dove si notano anche degli evidenti errori di misura.

2.3.1 Dati misurati col metro

Come sopra, i dati raccolti con il metro a nastro non ci permettono di affermare nulla sulla natura dei cilindri, in quanto la risoluzione dello strumento è ampiamente insufficiente allo scopo. Questo è evidente dal grafico e per questo motivo non ci dilungheremo oltre sull'argomento.

2.3.2 Dati misurati con calibro e micrometro

Contrariamente a quanto abbiamo potuto ricavare dai dati raccolti dal nostro singolo gruppo con i tre strumenti, i dati relativi a tutti i gruppi ci permettono di evidenziare l'esistenza di due popolazioni distinte di cilindri.

Queste due popolazioni non sono distinguibili nell'istogramma riguardante il calibro in figura 4. Potrebbe sembrare che la colonna centrata in 13.70 mm si distacchi dalla coda del picco, ma come sopra, procediamo a dimostrare che in realtà potrebbe essere dovuta a fluttuazioni causali. Nel bin centrato in 13.70 mm cadono 35 misure, mentre nel bin accanto (13.75 mm) ne cadono 25. Gli errori sulle colonne sono rispettivamente $\sqrt{35} \simeq 6$ e $\sqrt{25} = 5$. Gli intervalli di incertezza si toccano e per questo la colonna si può considerare una fluttuazione.

Nel secondo istogramma in figura 4 invece, sono ben distinguibili due picchi, che corrispondono alle due diverse popolazioni di cilindretti. Anche in questo caso in realtà si può dimostrare che, tenendo conto delle incertezze sulle colonne, le colonne si confondono. Tuttavia la deviazione dalla coda è ben accentuata in diversi bin e quindi possiamo ragionevolmente supporre l'esistenza di due popolazioni distinte di cilindretti, una centrata nel valore 13.70 mm circa e l'altra centrata nel valore 13.90 mm circa.

Evidentemente la risoluzione di misura ed il numero di misurazioni sono stati determinanti per individuare le popolazioni distinte. I parametri statistici principali sono:

- Media campionaria

$$m_{cal}^*[x] \simeq 13.86 \text{ mm} \quad m_{mic}^*[x] \simeq 13.85 \text{ mm}$$

- Deviazione standard campionaria:

$$\tilde{\sigma}_{cal} = 0.10 \text{ mm} \quad \tilde{\sigma}_{mic} = 0.08 \text{ mm}$$

Come si può facilmente vedere, i dati sono tra loro compatibili poiché:

$$|R| := |m_{cal}^*[x] - m_{mic}^*[x]| = 0.01 \text{ mm}$$

$$\sigma_R := \sqrt{\tilde{\sigma}_{cal}^2 + \tilde{\sigma}_{mic}^2} = 0.13 \text{ mm}$$

$$|R| \leq \sigma_R$$

3 Pendolo

La seconda parte di questa relazione tratta l'esperienza di misura del periodo di un pendolo. Lo scopo dell'esperienza è imparare a trattare gli errori casuali, dovuti alla procedura di misurazione del periodo con un cronometro, che introduce inevitabilmente fluttuazioni casuali nelle misure effettuate, e gli errori sistematici, dovuti alla diversa prontezza di riflessi degli sperimentatori. In questo ultimo caso sorge il problema della compatibilità delle misure effettuate dai tre diversi membri del gruppo.

Ci siamo anche posti il problema di verificare sperimentalmente la correttezza della legge del pendolo semplice, cosa che ogni studente di fisica dovrebbe fare almeno una volta nella sua vita!

3.0.3 Predizione teorica

Per il calcolo teorico del periodo di un pendolo è stato utilizzato il modello del pendolo semplice, che abbiamo considerato adeguato alla situazione. La massa m_c del cavo è stata considerata trascurabile poichè $m_c \ll m$ e quindi si è posto $m_c = 0$. Inoltre, dato che in realtà il cilindro non è puntiforme, lo abbiamo approssimato ad un punto materiale posizionato nel suo baricentro, che si trova ad una distanza $\frac{h}{2}$ dal punto di sospensione del corpo. Nel modello del pendolo semplice, la lunghezza del cavo è quindi $l = l_c + \frac{h}{2} = (55.8 \pm 0.2 \text{ cm}) + (2.5 \pm 0.025 \text{ cm}) = 58.3 \pm 0.225 \text{ cm} = 0.583 \pm 0.00225 \text{ m}$. Il valore di g , l'accelerazione di gravità, non è stato da noi misurato, quindi abbiamo considerato $g = 9.8 \pm 0.02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ che è un valore molto prudente. Con questi valori di l e g si ottiene un periodo:

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1.533 \pm 0.009 \text{ s} \quad (4)$$

dove l'incertezza è stata stimata propagando le incertezze su l e g .

La formula (4) può essere riscritta come $\mathcal{T} = 2\pi \cdot l^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}}$. La propagazione dell'incertezza per una funzione non lineare di più variabili, come nel nostro caso $\mathcal{T}(l, g)$, può essere calcolata effettuando un'approssimazione lineare della funzione:

$$\mathcal{T}(l, g) \simeq \mathcal{T}(l_0, g_0) + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial l}(l_0, g_0)(l - l_0) + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial g}(l_0, g_0)(g - g_0)$$

ed utilizzando la formula per la propagazione degli errori nel caso delle funzioni lineari. In questa formula $l_0 = 0.583 \text{ m}$ o $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$ sono i valori medi delle misure. Troviamo quindi:

$$\sigma(\mathcal{T}) \simeq \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial l}(l_0, g_0)\right)^2 \sigma(l)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial g}(l_0, g_0)\right)^2 \sigma(g)^2} = \pi \sqrt{\frac{1}{l_0} \sigma(l)^2 + \frac{1}{g_0^3} \sigma(g)^2} = 0.009 \text{ s}$$

Il (4) è quindi il valore atteso di periodo del pendolo. Lo scopo dell'esperimento è quello di verificare sperimentalmente se questa predizione è corretta.

3.1 Descrizione della procedura di misura

3.1.1 Apparato sperimentale

Il pendolo è stato realizzato con un filo da pesca, che si può considerare inestensibile, fissato con un morsetto al supporto del tavolo da laboratorio. All'altra estremità del cavo è stato appeso, attraverso un gancio, un corpo cilindrico di metallo di massa $m = 205 \text{ g}$. Il pendolo si può

schematizzare, trascurando il gancio, come un cavo di lunghezza $l_c = 55.8 \pm 0.2$ cm unito ad un cilindro omogeneo di altezza $h = 5.1 \pm 0.05$ cm. Le incertezze riportate nelle misure sono dovute a difficoltà incontrate nella misurazione e alla risoluzione del metro a nastro che abbiamo usato. Non abbiamo ritenuto di poter fare meglio di così.

3.1.2 Processo di acquisizione dei dati sperimentali

Per le misurazioni è stato utilizzato un comune cronometro con risoluzione di misura $\Delta\mathcal{T}_s$ pari a 0.01 s, e con un errore di risoluzione massimo pari a 0.005 s. Ogni componente del gruppo ha cronometrato 20 volte il tempo impiegato dal pendolo per compiere 10 periodi. I valori grezzi misurati, riportati nella tabella 2, sono stati divisi per 10 per ottenere il valore medio del periodo del pendolo. Questo ci ha permesso di diminuire gli errori sistematici dovuti alla prontezza di riflessi dei diversi operatori, che verranno trattati più approfonditamente nella sezione di analisi dei dati, e di migliorare la risoluzione del cronometro fino a 1 millisecondo.

Successivamente un componente del gruppo ha eseguito 100 misurazioni di periodi singoli dell'apparato, riportate nella tabella 3. L'acquisizione di dati è stata effettuata con la seguente procedura:

1. Il pendolo è stato fatto oscillare prestando attenzione al piano di oscillazione e all'ampiezza dell'oscillazione.
2. Si è misurato un periodo, annotato il valore ottenuto e azzerato il cronometro.
3. Le misurazioni sono state intervallate da 1-2 periodi non misurati.
4. Ogni 10 misurazioni, che equivale a meno di 30 periodi, il pendolo è stato fermato e fatto ripartire, per evitare lo smorzamento dovuto all'attrito con l'aria.

Non è stata utilizzata la funzione “giro” del cronometro, al fine di evitare di introdurre dipendenza tra le varie misure, azzerando il cronometro ogni volta le misure risultano statisticamente indipendenti.

3.1.3 Errori sistematici

Al fine di evitare errori sistematici riguardanti il modello teorico, cioè errori causati dal fatto che il modello teorico non rispecchia l'apparato sperimentale usato, sono state prese le seguenti precauzioni:

- Si è tentato di contenere le oscillazioni del pendolo in un unico piano verticale. Abbiamo notato che a causa delle vibrazioni al momento del rilascio, il pendolo tende a seguire una traiettoria ellittica, invece che compiere la sua oscillazione su di un piano. Nei casi in cui la traiettoria si discostasse significativamente dal piano si è quindi proceduto a ripetere da capo la misura.
- Durante le operazioni di misura abbiamo mantenuto il massimo numero di oscillazioni entro il valore 20-30 affinché l'attrito con l'aria non influisse in modo significativo sul periodo del pendolo.
- Ci siamo accertati che l'ampiezza massima delle oscillazioni non superasse i 10° dalla verticale, in modo che l'approssimazione lineare $\sin(\vartheta) \simeq \vartheta$ che viene utilizzata per calcolare la legge del pendolo sia accettabile. Infatti, per un angolo $\vartheta = 10^\circ = 0.175$ rad si ha che:

$$\sin(\vartheta) = 0.174 \quad \frac{\vartheta}{\sin(\vartheta)} = 1.005 \quad (5)$$

Possiamo provare a stimare l'errore sistematico commesso. Poichè nella (5) abbiamo ottenuto un errore del 5 per mille, l'errore sistematico dovuto a tutte le cause elencate sopra è sicuramente maggiore di questo valore. Ci sentiamo pertanto abbastanza sicuri stimando l'errore come il doppio dell'errore dovuto all'approssimazione $\sin(\vartheta) \simeq \vartheta$ e otteniamo:

$$\sigma_{sys} = 2 \cdot \frac{\vartheta}{\sin(\vartheta)} = 1\% \quad (6)$$

Questo valore dovrebbe comprendere, verosimilmente, tutte le cause dell'incertezza sistematica descritte sopra.

Tra gli errori sistematici segnaliamo, inoltre, il fatto che le misure sono state effettuate da sperimentatori diversi, che introducono degli errori sistematici che variano da persona a persona. Questi errori saranno trattati nella sezione di analisi dei dati, e non sono stati inclusi nella (6).

Le precauzioni prese quindi dovrebbero essere sufficienti a ridurre l'errore sistematico entro limiti accettabili. Tuttavia è risaputo che gli errori sistematici sono i più difficili da scovare ed eliminare.

3.2 Analisi dei dati

La Tabella 2 e la Figura 5 riguardano i 60 dati relativi alla misura del periodo del pendolo da parte di tutti e tre i componenti del gruppo.

Periodo del pendolo [s]											
Francesco				Davide				Andrea			
15.04	14.99	14.99	14.97	14.91	14.97	15.06	15.04	14.98	14.98	15.05	15.01
14.99	14.99	15.01	15.08	14.92	15.06	15.08	15.02	14.85	14.99	14.98	15.00
15.04	15.00	15.06	14.98	15.06	15.02	15.04	15.00	15.04	14.99	14.99	14.94
14.93	14.98	14.98	15.04	15.06	15.06	15.02	14.91	15.01	15.00	15.13	14.99
14.99	14.91	15.03	15.03	15.03	15.02	15.06	15.02	14.88	15.01	15.02	14.96

Tabella 2: Tabella delle misure del periodo del pendolo ottenute dai 3 membri del gruppo. Ogni sperimentatore ha raccolto 20 misure di 10 periodi. Sono riportati i dati grezzi di lettura del cronometro, riferiti a 10 periodi.

3.2.1 Compatibilità delle misure di diversi sperimentatori.

La prima cosa che ci proponiamo di dimostrare è la compatibilità tra i dati misurati da ognuno di noi. Fissiamo a priori un fattore di copertura $k = 2$. Date due misure $x_a \pm \sigma_a$ e $x_b \pm \sigma_b$, esse verranno considerate compatibili se soddisferanno la seguente condizione:

$$|m[x_a] - m[x_b]| =: |R| \leq k\sigma_R = k\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

I dati raccolti ci permettono di esprimere tre diverse misure di periodo:

$$\begin{aligned} m_{Francesco}^* \pm \tilde{\sigma}_{Francesco} &= 1.500 \pm 0.004 \text{ s} \\ m_{Davide}^* \pm \tilde{\sigma}_{Davide} &= 1.502 \pm 0.005 \text{ s} \\ m_{Andrea}^* \pm \tilde{\sigma}_{Andrea} &= 1.499 \pm 0.006 \text{ s} \end{aligned}$$

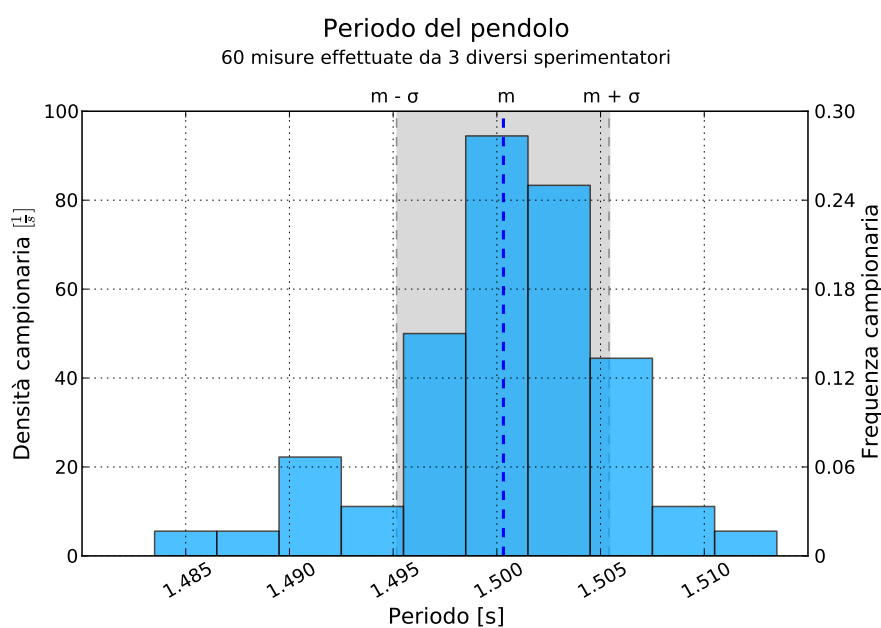


Figura 5: L'istogramma mostra le misure effettuate da tutti e tre gli sperimentatori. È indicato l'intervallo di incertezza tipo e la media campionaria. La larghezza dei bin dell'istogramma è 0.003 s. Come si può notare la forma dell'istogramma assomiglia ad una distribuzione gaussiana, come era prevedibile sapendo che gli errori dominanti delle misure sono casuali.

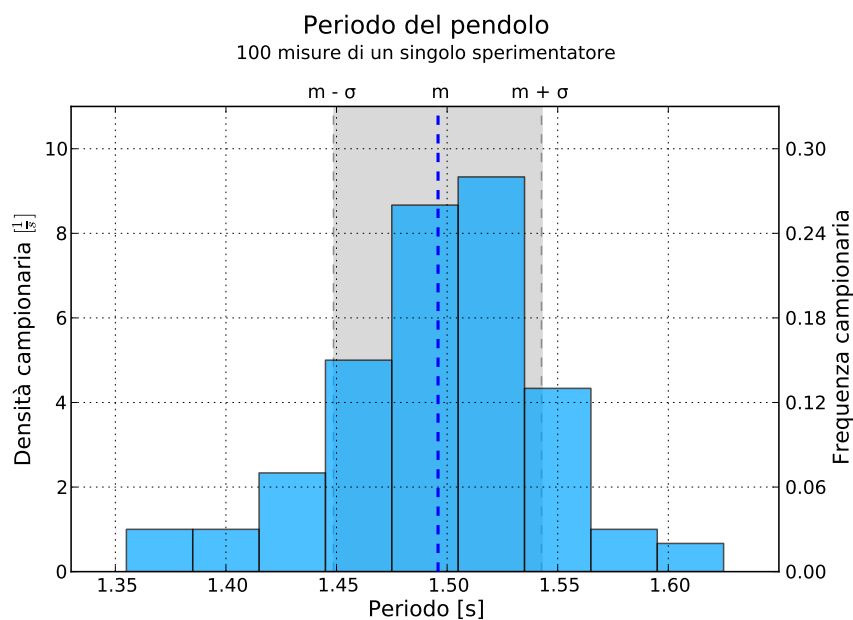


Figura 6: Istogramma delle 100 misure di periodo del pendolo ottenute da un membro del gruppo. Sono evidenziate la media campionaria e l'intervallo di incertezza tipo. Come notato nella figura 5 anche qui la distribuzione somiglia ad una distribuzione normale, a causa degli errori casuali.

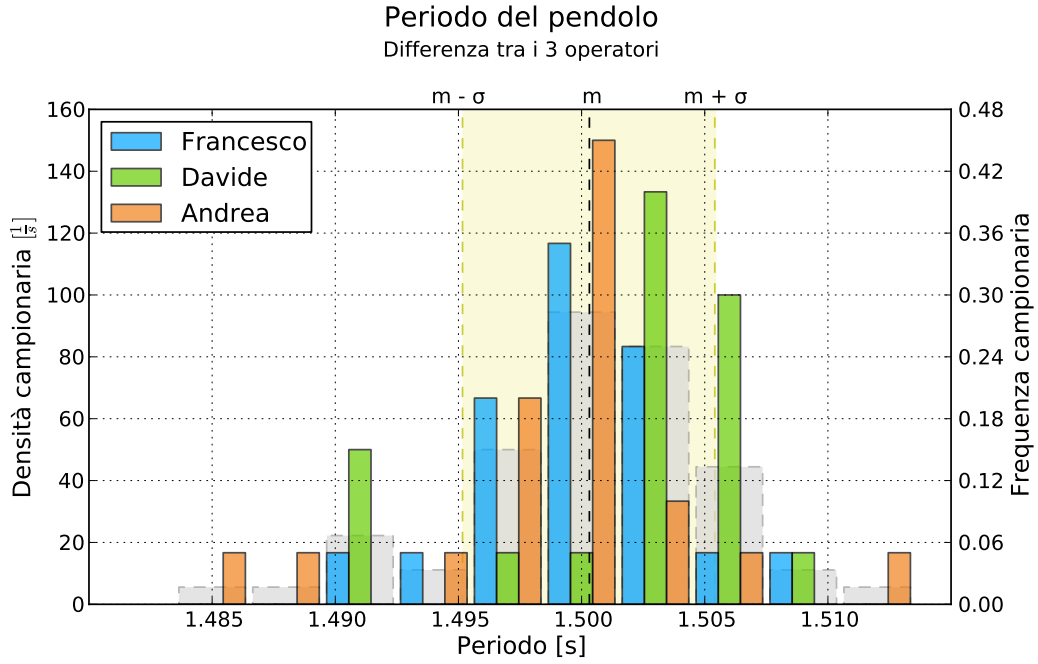


Figura 7: Il grafico illustra le misure di periodo del pendolo ottenute dai 3 diversi membri del gruppo, mettendo in risalto gli errori sistematici commessi. Da notare il fatto che Davide ha registrato più misure nel bin centrato in 1.503 e ha media campionaria più alta, mentre gli altri sperimentatori hanno picchi nel bin centrato in 1.500. In sottoimpresione è disegnato l'istogramma con i dati di tutti e 3 i componenti del gruppo, riportato anche in figura 5.

Da queste possiamo ottenere la differenza tra le medie campionarie:

$$R_1 = m_{Davide}^* - m_{Francesco}^* = 0.001 \text{ s}$$

$$R_2 = m_{Andrea}^* - m_{Francesco}^* = 0.002 \text{ s}$$

$$R_3 = m_{Andrea}^* - m_{Davide}^* = 0.001 \text{ s}$$

L'errore standard campionario relativo a queste tre differenze è (con $k = 2$):

$$\sigma_{R_1} = k \sqrt{\tilde{\sigma}_{Davide}^2 - \tilde{\sigma}_{Francesco}^2} = k 0.003 = 0.006$$

$$\sigma_{R_2} = k \sqrt{\tilde{\sigma}_{Andrea}^2 - \tilde{\sigma}_{Francesco}^2} = k 0.004 = 0.008$$

$$\sigma_{R_3} = k \sqrt{\tilde{\sigma}_{Andrea}^2 - \tilde{\sigma}_{Davide}^2} = k 0.003 = 0.006$$

Poichè risulta che:

$$R_1 \leq k\sigma_{R_1} \quad R_2 \leq k\sigma_{R_2} \quad R_3 \leq k\sigma_{R_3}$$

possiamo concludere che le misure effettuate sono compatibili tra di loro.

Dal momento che le misure risultano essere compatibili tra di loro le misure ripetute del periodo di un pendolo mostrano che le fluttuazioni delle misure sono dovute principalmente ad errori casuali, poichè il periodo \mathcal{T} di oscillazione di un pendolo semplice è isocrono per ampiezze di oscillazioni abbastanza piccole, nel nostro caso contenute entro i dieci gradi.

3.2.2 Analisi dei dati dei tre sperimentatori

Procediamo ora con l'analisi complessiva dei dati relativi alla misura del periodo del pendolo eseguita da tutti e tre i componenti del gruppo e otteniamo che:

- La media campionaria é:

$$m^*[\mathcal{T}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i = 1.500 \text{ s}$$

- La varianza campionaria del periodo di oscillazione del pendolo è:

$$\tilde{D}[\mathcal{T}] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2 = 0.00003 \text{ s}^2$$

- La deviazione standard campionaria risulta essere:

$$\tilde{\sigma}[\mathcal{T}] = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2} = 0.005 \text{ s}$$

- La mediana, il quantile 10% e il quantile 90% sono relativamente:

$$M = 1.501 \text{ s} \quad q_{10\%} = 1.493 \text{ s} \quad q_{90\%} = 1.506 \text{ s}$$

Vogliamo ora esprimere il periodo del pendolo come un'unica misura del tipo $\mathcal{T}_0 \pm \delta\mathcal{T}$. La miglior stima del valore \mathcal{T}_0 è la media campionaria:

$$\mathcal{T}_0 = m^*[\mathcal{T}] = 1.500 \text{ s}$$

Per l'incertezza $\delta\mathcal{T}$ ci poniamo invece di comporre le diverse incertezze ricavate durante l'esperimento.

Errore sistematico: Come si può notare dall'analisi fatta non abbiamo riscontrato particolari errori sistematici dovuti all'operatore, in quanto la media campionaria dei dati di ogni operatore è compatibile con la media di tutti i valori entro la deviazione standard campionaria. Inoltre se le misure di uno sperimentatore fossero state affette da un errore sistematico i suoi valori medi sarebbero risultati significativamente differenti da quelli degli altri due componenti del gruppo.

Nella sezione 3.1.3 abbiamo analizzato gli altri errori sistematici e abbiamo stimato l'errore sistematico totale come $\sigma_{sys} = 1\%$ della media $m^*[\mathcal{T}]$. Quindi il valore numerico é:

$$\sigma_{sys} = 0.01 \cdot m^*[\mathcal{T}] = 0.015 \text{ s}$$

Errore casuale o di tipo A: Il valore degli errori casuali è contenuto grazie al fatto che abbiamo deciso di misurare il periodo di 10 oscillazioni consecutive e quindi il loro valore è stato ridotto di un fattore dieci. Infatti abbiamo che:

$$\tilde{\sigma}[\mathcal{T}] = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2} = 0.005 \text{ s}$$

Periodo del pendolo - Misure di un operatore [s]									
1.46	1.54	1.55	1.57	1.41	1.45	1.52	1.45	1.37	1.53
1.57	1.50	1.52	1.50	1.48	1.49	1.44	1.49	1.43	1.53
1.50	1.50	1.56	1.61	1.45	1.38	1.52	1.41	1.60	1.49
1.48	1.53	1.52	1.55	1.54	1.46	1.51	1.51	1.49	1.52
1.52	1.50	1.48	1.46	1.41	1.48	1.45	1.48	1.52	1.51
1.55	1.52	1.55	1.49	1.51	1.50	1.52	1.49	1.54	1.52
1.45	1.49	1.47	1.47	1.48	1.48	1.53	1.51	1.52	1.47
1.54	1.42	1.43	1.45	1.49	1.42	1.47	1.36	1.50	1.55
1.58	1.52	1.45	1.48	1.44	1.52	1.51	1.50	1.54	1.52
1.52	1.52	1.47	1.52	1.44	1.56	1.50	1.49	1.52	1.56

Tabella 3: Misure di periodo effettuate da uno dei tre componenti del gruppo. Sono riportati i valori di lettura del cronometro riferiti a singole oscillazioni (periodi) dell'apparato.

Errore di risoluzione tipo: Al fine di stimare un errore complessivo sulla misura del periodo del pendolo è doveroso prendere in considerazione anche l'errore di risoluzione standard dovuto allo strumento. Per questo motivo utilizzando le conoscenze acquisite in classe dire che:

$$\sigma_{ris} = \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta \mathcal{T}_m$$

dove $\Delta \mathcal{T}_m$ rappresenta l'errore di risoluzione dovuto alla procedura di misura e quindi $\frac{\Delta \mathcal{T}_s}{10}$. Poiché $\Delta \mathcal{T}$, è la risoluzione dello strumento, che ricordiamo vale 0.01 s, otteniamo che:

$$\sigma_{ris} = 0.0003 \text{ s}$$

Unione dei vari errori: Quindi grazie ai risultati così ottenuti possiamo dire che l'errore complessivo sulla misura del periodo del pendolo risulta essere:

$$\delta \mathcal{T} = \sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \tilde{\sigma}[\mathcal{T}]^2 + \sigma_{ris}^2} = 0.016 \text{ s}$$

Grazie a questo risultato possiamo concludere riportando che il periodo del pendolo risulta essere:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \pm \delta \mathcal{T} = 1.500 \pm 0.016 \text{ s} \quad (7)$$

Come si può notare, gli errori casuali e di risoluzione non sono stati significativi. L'incertezza dominante è l'errore sistematico dovuto al fatto che il modello teorico è troppo semplicistico per spiegare con precisione il fenomeno osservato e anche a problemi pratici di realizzazione dell'esperimento.

3.2.3 Analisi dei dati dello sperimentatore singolo

La Tabella 3 e la Figura 6 invece sono relativi alla misura del periodo del pendolo da parte di un singolo membro del gruppo. Procediamo ora con l'analisi dei dati relativi alle cento misurazioni del periodo:

- La media campionaria è:

$$m^*[\mathcal{T}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i = 1.50 \text{ s}$$

- La varianza campionaria del periodo di oscillazione del pendolo è:

$$\tilde{D}[\mathcal{T}] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2 = 0.0022 \text{ s}^2$$

- La deviazione standard campionaria risulta essere:

$$\tilde{\sigma}[\mathcal{T}] = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2} = 0.05 \text{ s}$$

- La mediana, il quantile 10% e il quantile 90% sono relativamente:

$$M = 1.50 \text{ s} \quad q_{10\%} = 1.44 \text{ s} \quad q_{90\%} = 1.55 \text{ s}$$

Innanzitutto, si può notare che le cento misure di oscillazione di un singolo periodo hanno una precisione fino al centesimo di secondo, mentre quelle relative a tutti e tre i componenti avevano una precisione fino al millesimo. Infatti la deviazione standard di queste misure è di un ordine di grandezza maggiore rispetto al dato relativo alle misure precedenti. Ci aspettiamo quindi che in questo caso non sia l'errore sistematico ad essere dominante, come nel caso precedente.

Volendo esprimere, come abbiamo fatto per le 60 misure di tre diversi sperimentatori, con un unico risultato i dati ottenuti, possiamo dire che:

$$\mathcal{T}_0 = m^*[\mathcal{T}] = 1.50 \text{ s}$$

Inoltre:

- **Errore sistematico:** l'errore sistematico presente sulle cento misure è esattamente lo stesso che avevamo per le sessanta misure analizzate precedentemente. Quindi

$$\sigma_{sys} = 0.01 \text{ m}^*[\mathcal{T}] = 0.015 \text{ s}$$

- **Errore casuale o di tipo A:** l'errore casuale grazie all'analisi appena fatta risulta essere

$$\tilde{\sigma}[\mathcal{T}] = 0.05 \text{ s}$$

- **Errore di risoluzione tipo:** l'errore di risoluzione tipo risulta essere:

$$\sigma[\mathcal{T}]_{ris} = \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta\mathcal{T}_s = 0.003 \text{ s}$$

Quindi anche in questo caso possiamo concludere dicendo che l'errore totale sul periodo di oscillazione del pendolo risulta essere:

$$\delta\mathcal{T} = \sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \tilde{\sigma}[\mathcal{T}]^2 + \sigma_{ris}^2} = 0.05 \text{ s}$$

e pertanto otteniamo che:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \pm \delta\mathcal{T} = 1.50 \pm 0.05 \text{ s} \quad (8)$$

Come previsto, in questo caso l'incertezza dominante è l'errore casuale. Le altre cause di incertezza spariscono, praticamente, nel calcolo dell'errore totale.

3.2.4 Distribuzione dei valori medi campionari

Concludiamo ora con una breve analisi più approfondita dei dati ottenuti dalle cento misure. Raggruppandoli in dieci gruppi di dieci misure ciascuno, possiamo calcolare la media campionaria di ogni singolo gruppo:

$$m_k^* \quad \text{con } K \in \{1, 2, \dots, 10\}$$

dove k indica il numero del gruppo considerato. Ottenute queste misure possiamo considerarle come singoli dati e farne una media campionaria ($m[m_k^*]$):

$$m[m_k^*] = \sum_{k=1}^{10} (m_k^*) = 1.50 \, s$$

che risulta essere uguale, come previsto dalla teoria, alla media campionaria delle cento misure prese singolarmente. Calcolando la deviazione standard delle medie ($\sigma[m_k^*]$):

$$\sigma[m_k^*] = \sqrt{\frac{10}{10-1} \sum_{k=1}^{10} (m_k^* - m[m_k^*])^2} = 0.020 \, s$$

otteniamo che il rapporto tra $\frac{\sigma[m_k^*]}{\tilde{\sigma}[\mathcal{T}]}$ risulta essere circa 0.42 che è un risultato attendibile dal momento che la predizione teorica ci dice che:

$$\frac{\sigma[m_k^*]}{\tilde{\sigma}[\mathcal{T}]} = \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0.32$$

4 Conclusioni

In questa esperienza abbiamo potuto osservare due differenti approcci analitici per due differenti esperimenti. Infatti nel primo esperimento abbiamo voluto studiare la distribuzione di lunghezza di un certo numero di cilindretti metallici: oggetti diversi a cui corrispondono misure effettivamente diverse. Nel secondo esperimento, invece, abbiamo ripetuto misure diverse e indipendenti dello stesso fenomeno.

I risultati del primo esperimento evidenziano, nel caso del gruppo singolo, un'evidente distribuzione incentrata su un singolo valore, predicendo l'esistenza di una sola famiglia di cilindretti. Nel caso dei dati di tutti i gruppi, invece, viene evidenziata anche l'esistenza di una seconda famiglia di cilindretti. È inoltre sottolineato il fatto che se lo strumento è inadatto al tipo di esperimento (come il metro a nastro), è difficile cavare un ragno dal buco e l'esperimento diventa inutile.

Nel secondo esperimento, i risultati ottenuti misurando 10 oscillazioni del pendolo evidenziano che il metodo è particolarmente buono in quanto permette di ridurre gli errori casuali di un ordine di grandezza inferiore alla risoluzione dello strumento. I risultati ottenuti dalle misure di oscillazioni singole, invece, hanno lo stesso ordine di grandezza della risoluzione dello strumento e sono più affette dagli errori casuali.

Per quanto riguarda la compatibilità tra misure e predizione teorica possiamo dire che, nel caso delle 100 misure effettuate da uno solo dei tre sperimentatori, c'è un sostanziale accordo entro i margini d'errore delle misure con il modello teorico. Nel caso delle misure effettuate da tutti e tre i membri del gruppo, invece, la predizione teorica non è in accordo con la misura sperimentale. Abbiamo interpretato questo fatto come un effetto della procedura di misurazione. Essendo le misure effettuate dai tre sperimentatori dieci volte meno soggette ad errori casuali

e di risoluzione delle altre 100 misure, l'incertezza che emerge è quella sistematica dovuta all'inadeguatezza del modello teorico e dagli errori pratici che emergono durante le misurazioni. Da questo punto di vista ci si poteva aspettare una situazione del genere.

Tuttavia vorremmo segnalare che c'è un'altra possibile spiegazione alla discrepanza. La nostra misura della lunghezza del filo è stata fatta in modo non rigoroso, poiché l'abbiamo un po' trascurata. Un errore di trascrizione o di misura potrebbe essere la causa di questo problema. Promettiamo di stare più attenti la prossima volta!