Deformazione elastica e studio del moto di un oscillatore armonico

Francesco Pasa, Davide Bazzanella, Andrea Miani
Gruppo A11

18 marzo 2013 - 1 aprile 2013

unitn_logo.png

Università degli studi di Trento

Sommario

Misura della costante elastica di una molla elicoidale mediante due procedure diverse: misurazione statica e dinamica. Test del chi al quadrato.

Indice

1 Introduzione

La legge sperimentale che lega una forza applicata ad una molla e la sua deformazione rispetto alla sua posizione di equilibrio fu formulata da Robert Hooke nel 1675 ed è la seguente:

$$F_{el} = -k\,x \tag{1}$$

In questo esperimento lo scopo principale è quello di calcolare la costante elastica di una molla conoscendo, grazie alle misure effettuate, la deformazione della molla in funzione della forza applicata ad essa. [Inoltre abbiamo verificato la correttezza della legge di Hooke e quindi la linearità della risposta della molla ai carichi applicati, entro l'intervallo di]

Un secondo metodo che adotteremo per calcolare questa costante elastica sarà quello di calcolarla conoscendo la relazione che lega il periodo di oscillazione della molla e ω ($\sqrt{\frac{k}{m}}$). La relazione è la seguente:

$$\mathcal{T} = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2}$$

Una seconda parte della relazione verterà sullo studio del moto oscillatorio e nell'esecuzione del test del chi al quadrato.

2 Ricerca della costante elastica della molla: metodo statico

2.1 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale utilizzato è costituito da:

- una base ad A che sosteneva un asta verticale dotata di gancio di sospensione per le molle e asta millimetrata scorrevole. L'asta millimetrata aveva sul lato sinistro una scala con una risoluzione di mezzo millimetro, mentre sul lato destro c'era una scala con una risoluzione di un millimetro.
- quattro molle elicoidali con costanti elastiche differenti tra di loro: nello specifico una particolarmente "morbida", una "dura" e due con caratteristiche intermedie.
- un piattello portapesi di massa $m_{piattello} = 25.2\ g \pm 0.1\ g$, quattro pesi cilindrici neri rispettivamente di massa nominale 5, 10, 25 e 50 grammi e quattro pesi argentei analoghi a quelli neri, con le stesse masse nominali.
- una bilancia a un piattello con una risoluzione di 0.1 grammi. (???)

2.2 Procedura di aquisizione dei dati

Ritenendo essere noto che una forza F di trazione o compressione applicata, nel nostro caso, ad una molla elicoidale provoca una deformazione del corpo abbiamo deciso di sfruttare come forza agente la forza peso F_p delle masse cilindriche a nostra disposizione. Per fare questo ricordiamo che la relazione tra una massa inerziale e la forza peso è la seguente:

$$F_p = mg \tag{3}$$

dove g rappresenta l'accelerazione di gravità che assumiamo avere un valore $g = 9.806\ m\,s^{-2}$.

Innanzitutto abbiamo deciso di applicare alla molla 13 masse da 5 g a 125 g, suddividendo l'intervallo in modo equispaziato. Sono quindi state selezionate tredici combinazioni di cilindri

Masse delle combinazioni di cilindri [g]

Nominali	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
Pesate	5.0	15.1	24.9	35.0	45.2	55.1	65.2	75.0	85.1	95.2	105.0	115.2	125.3

Tabella 1: Masse usate per misurare l'allungamento della molla. Le masse erano composte da combinazioni di cilindri da 5, 10, 25 e 50 grammi. Nella seconda riga sono riportati i pesi rilevati con la bilancia, che in alcuni casi differiscono da quelli nominali, riportate nella prima riga.

aventi le masse scelte. Per evitare di dover propagare gli errori sulla massa delle combinazioni, invece di misurare la massa di ogni singolo cilindro, si è misurata la massa complessiva di ogni combinazione. Abbiamo annotato quali cilindri facevano parte di ogni combinazione, in modo da poter ricomporre le combinazioni in un secondo momento. Le combinazioni sono riportate nella tabella 1.

Completata la classificazione dei pesi, abbiamo scelto la molla di cui calcolare la costante elastica. Abbiamo notato che una di esse era molto "morbida" per i carichi che saremmo andati ad applicare, e si deformava in maniera visibile anche con carichi piccoli, rendendo impossibili le misure di deformazione dei carichi più grandi per questioni si spazio. La abbiamo quindi scartata, anche perché sarebbe stata suscettibile di deformazione plastica che avrebbe compromesso la buona riuscita dell'esperimento. Un'altra molla è stata scartata in quanto troppo rigida. Le sue deformazioni non sarebbero state apprezzabili con carichi leggeri. Per questi motivi la scelta è ricaduta sulla molla tra le due restanti che permetteva una migliore lettura della deformazione in relazione ai pesi.

Per effettuare le misure, abbiamo agganciato il sistema molla-piattello al gancio di sospensione dell'asta verticale, lungo l'asta millimetrata. Atteso che l'oscillazione della molla si smorzasse, il bordo inferiore del piattello agganciato alla molla, è stato allineato con la tacca dei 50 cm dell'asta graduata. In questo modo la posizione di equilibrio della molla risulta essere:

$$z_{eq} = z_0 \,\pm\, \delta z_0 = 50.0\,cm \,\pm\, 0.1\,cm$$

Infine abbiamo misurato l'allungamento della molla al variare delle combinazioni di cilindretti scelte. Ad ogni variazione del carico si è aspettato che le oscillazioni del sistema si smorzassero prima di effettuare la lettura dell'asta graduata. La lettura è stata effettuata sul lato dell'asta con risoluzione di un millimetro, poiché non siamo riusciti ad apprezzare i mezzi millimetri a causa delle oscillazioni della molla, che per quanto piccole erano sempre presenti. Così facendo abbiamo ottenuto una serie di misure delle varie posizioni di equilibrio della molla:

$$z_i = z_i \,\pm\, \delta z_i$$

dalle quali possiamo ricavare l'allungamento della stessa:

$$x_i = |z_i \,-\, z_0|$$

e quindi l'incertezza sugli allungamenti (δx_i) si ottiene applicando la regola per la propagazione delle incertezze sulla differenza di misure indipendenti:

$$\delta x_i = \sqrt{\delta z_i^2 \,-\, \delta z_0^2}$$

2.3 Elaborazione dei dati

2.3.1 Considerazioni inziali:

Come detto precedentemente pe misurare la massa dei dischetti a nostra disposizione abbiamo utilizzato una bilancia a un piattello con una risoluzione di 0.1 grammi. Abbiamo osservato che lo strumento era abbastanza sensibile da rilevare variazioni nella pressione dell'aria circostante. Lo abbiamo apurato soffiandoci sopra e notando che il valore rilevato dalla bilancia aumentava in modo considerevole. Per questo motivo per trovare le varie masse dei nostri pesi ci siamo premuniti di stare quato più lontani dalla bilancia ci fosse concesso e di evitare di cuotere il tavolo di lavoro. E' importante sottoineare che la massa dei nostri tredici pesi è data da una composizione dei dischetti a nostra disposizione, e ogni dischetto è affetto da un errore sulla sua massa, dovuto principamente alla risoluzione dello strumento:

$$\delta m_i = \frac{\Delta m}{2} = 0.05g$$

abbiamo deciso di non usare l'incertezza tipo sull'errore di misurazione in quanto, come detto sopra, le misure potevano non risultare così fedeli in quanto soggette anche a variazioni repentine dell'ambiente esterno. Quindi per evitare di dover propagare le incertezze delle singole masse alle loro somme, abbiamo misurato in aticipo la massa di ogni composizione così che risultasse affetta soltanto dall'errore di risoluzione dello strumento. Dal momento che per calcolare la costante elastica della molla siamo costretti a passare per la relazionie $F_{el} = -k\,x$ e poichè nel nostro caso la $F_{el} = F_p = m\;g$ allora dobbiamo propagare l'incertezza derivante dalla isura della massa usata anche sul calcolo della forza peso applicata alla molla ottenendo quindi una relazione di questo tipo:

$$\delta F_p \;=\; g\,\delta m_i$$

Per quanto riguarda gli errori relativi all'errore di misura dell'allungamento della molla rispetto alla sua posizione di equilibrio le considerazioni sono quelle esposte nel paragrafo precedente. C'è però da aggiungere che la osizione iniziale della molla è stata calcolata con il piattello portapesi già agganciato ad essa. Precisiamo che la relzione

$$\delta x_i = \sqrt{\delta z_i^2 \;-\; \delta z_0^2}$$

è valida in quanto le misure effettuate sono indipndenti le une dalle altre poichè a ogni cambio della massa applicata alla molla il piattelo portapesi veniva sganciato dalla molla e caricato con la massa successiva. E' importante sottolineare che abbiamo deciso di rilevare l'allungamento della molla sulla scala millimetrata con risoluzione del millimetro in quanto abbiamo ritenuto di non riuscire a sfruttare la scala con risoluzione di mezzo millimetro. Questo è dovuto principalmente al fatto che nella lettura della riga la molla non era completamente ferma ma era soggetta ad uan leggere oscillazione. Questa continuo moto oscillatorio unito anche al probabile errore di parallasse commesso nella lettura dello strumento ci ha convito a porre come incertezza sulle varie miure dell'allungamento un delta di un millimetro. Questo giustifica anche la stima fatta della posizione di equilibrio della molla z_0 che risulta anch'essa affetta da un errore di un millimetro.s

2.3.2 Analisi di dati:

Nella **??** sono riportate le masse applicate alla molla con la loro relativa posizione di equilibrio.Stessa cosa vale per la **??**. La **??** mostra la posizione di equilibrio per alcune masse applicate ed è stata realizzata con una procedura di carico e scarico della molla. Ovvero: per le masse scelte si è deciso di caricare la molla e rilevare le varie posizioni di equilibrio, stessa cosa si è fatta nello scariare la molla. Questa procedura è stata ripetuta due volte. Come si può intuire da una prima anlsi superficiale delle tabelle risulta evidente che le misure sono compatibili tra di loro e questo quindi ci porta a dire che la molla non è stata affeta da una deformazione dovuta ad un carico eccessivo. Si può inoltre osservare che i risultati non dipendono dalla procedura con cui è stato misurato l'allungamento (carico o scarico) e che sono riproducibili entro il carico massimo della molla oltre ilquale si avrebbe una deformazione permanente della stessa. Affermiamo questo perchè prendendo per esempio la mssa da 55 g possiamo oservare che le varie misure sono le seguenti:

- primo allungamento $x_{all_1} = (5.7 \pm 0.1)cm$
- secondo allungamento $x_{all_2} = (5.6 \pm 0.1)cm$
- terzo allungamento $x_{all_3} = (5.6 \pm 0.1)cm$
- quarto allungamento $x_{all_4} = (5.5 \pm 0.1)cm$
- quinto allungamento $x_{all_5} = (5.6 \pm 0.1)cm$

quindi facendo una media gli ultimi quattro allungamenti, che sono stati ricavati dalla proceura di carico e scarico ricaviamo che

$$m^*[x_{all_i}] = \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{5}(x_{all_i}) = 5.6cm$$

e l'incertezza su questo valore è il seguente:

$$\sigma^*[m^*[x_{all_i}]] = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{5}(x_{all_i} - m^*[x_{all_i}])^2} = 0.1cm \tag{4}$$

Quindi con questi valori possiamo valutare se la media delle misure ottenute dalla procedura di carico e scarico è compatibile con la misura ottenuta durante il primo ciclo di misurazione. Posto a priori un fattore di copertura k = 1.5 andiamo a verificare che il resto tra la differenza fra $m^*[x_{all_i}]$ e x_{all_1} risulti essere minore dell'errore relatovo al resto moltiplicato per il fattore di copertura. Otteniamo quindi:

$$R = x_{all_1} - m^*[x_{all_i}] = 0.1\ cm$$

$$\sigma_R = k\ \sqrt{(\sigma[x_{all_1}])^2 + (\sigma[m^*[x_{all_i}]])} = 0.2\ cm$$

Da questo quindi possiamo dire che $m^*[x_{all_i}]$ e x_{all_1} risultano essere compatibili, e compatibii sono anche le misure che abbiamo ottenuto per fare la media dei cicli di scarico e carico, sempre utilizzando come fattore di copertura il k scelto in precednza. Questo discorso e procedura si può estendere anche a tutte le misure relative alle masse differeni da 55 g e quindi possiamo concludere che le misure sono tra di loro compatibili e non ci sono state deformazioni nella molla. Un importante osservazione che si può fare analizzando **??** e **??** è che per lo stesso carico applicato alla molla le misue dell'allungamento differiscono tra di loro per 0.1 cm. Abbiamo ipotizzato che questa differenza possa essere dovuta principalmente a due elementi:

1. dal momento che prima di effetuare i cicli di carico e scarico la molla era stata tolta dal supporto assieme al piattello portapesi,è probabile che nel riposizionare l'apparato l'allineamento del piattello portapesi, nella sua posizione di equilibrio, con la tacca dei 50 cm non sia stato perfetto ma sia risultato errato di 0.1 cm;

2. un'altra possibilità è data da eventuali errori di parallasse, che non sono da escdere, in quanto riuscire a traguardare correttamente tra il bordo inferiore e l'asta millimtrata non è un operazione così elementare come può sembrare;

3 Ricerca della costante elastica della molla: metodo dinamico

3.1 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale utilizzato per compiere le misurazioni del periodo di oscillazione della molla elicoidale è lo stesso utilizzato durante per la procedura del metodo dinamico. La configurazione dei pesi è la stessa utilizzata pecedentemente come anche la molla. Da notare che in questo caso il valore delle masse applicate alla molla è stato calcolato misurando assieme la massa del gancio e della massa applicata. Inoltre per questa procedura c'era a nostra disposizione un cronometro con risoluzione di misura pari a un centesimo di secondo ovvero: 0.01 s.

3.2 Procedura di acquisizione dei dati

Per calcolare la costante elastica mediante il metodo dinamico dobbiamo avvalerci della rezazione che sussiste tra il periodo di oscillazione di una molla e il rapporto tra la massa applicata e la costante elastica della stessa il tutto sotto radice quadrata. Ovvero:

$$\mathcal{T} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5}$$

Come si può notare il periodo di oscillazione della molla risulta essere in una proporzionalità quadratica iversa rispetto alla massa applicata alla suddetta. Dal momento che la costante elatica della molla (K) è una costane, appunto, allora ci si dovrebbe aspettare che il periodo cresca al crescere della massa appesa, ma non con una proporzionalità diretta poichè la massa risulta essere sotto radice.
Per ottenere quidi il periodo di oscillazione della molla abbiamo agito come segue:

- abbiamo deciso di cronometrare il perido di dieci oscillazioni della molla poichè abbiamo ritenuto di non essere in grado di rilevare con una precisione accettabile il periodo di una singoa oscilazione;
- ogni componente del gruppo ha cronometrato per ogni massa cinque cicli di dieci oscillazioni, in modo che alla fine per ogni massa ci siano quindici misure indipendeni di un ciclo di dieci oscillazioni. In questo modo abbiamo ritenuto di poter ottenere una precisione maggiore sulla stima del periodo di oscillazione della molla e anche di evitare possibilierrori sistematici dovuti all azione di un unico sperimentatore.

3.3 Primo studio qualitativo del moto oscillatorio