

ESPERIENZE DI LABORATORIO di FISICA 1

Trento, a.a. 2012-13

6 Pendolo semplice: dipendenza del periodo dalla massa e dalla lunghezza e misurazione dell'accelerazione di gravità

6.1 Scopi dell'esperienza:

- Studio della dipendenza del periodo di oscillazione dalla massa del pendolo.
- Ricerca di una relazione funzionale tra lunghezza del pendolo e periodo di oscillazione.
- Uso di grafici logaritmici.
- Applicazioni della propagazione dell'incertezza.
- Applicazioni della regressione lineare e del test del chi quadrato.
- Applicazioni del calcolo dimensionale.
- Calcolo dell'accelerazione di gravità a partire dalle misure di lunghezza e periodo del pendolo.
- Confronto del valore misurato con valori tabulati.
- Confronto con i risultati degli altri gruppi di laboratorio.

6.2 Materiale a disposizione:

- cilindri di masse diverse per costruire pendoli;
- 1 metro a nastro (risoluzione 1 mm);
- 1 calibro a cursore (risoluzione 0.05 mm);
- 1 cronometro manuale (risoluzione di lettura 0.01 s);
- 1 bilancia elettronica (risoluzione 0.1 g).

6.3 Introduzione

Un pendolo oscilla intorno alla sua posizione di equilibrio con periodo \mathcal{T} . È facile verificare *qualitativamente* che il periodo \mathcal{T} dipende dalla lunghezza ℓ : al crescere della lunghezza il periodo cresce.

In questa esperienza studieremo in modo *quantitativo* come il periodo \mathcal{T} dipende dalla massa m del pendolo e dalla lunghezza ℓ . Cercheremo di esprimere queste relazioni nel modo più semplice possibile: mediante un limite superiore per la dipendenza dalla massa e una relazione linearizzata per la dipendenza dalla lunghezza.

6.4 Esecuzione dell'esperienza: 2 sessioni di laboratorio

6.4.1 Analisi dimensionale

Supponiamo che il periodo di oscillazione del pendolo \mathcal{T} possa dipendere dalla massa appesa m , dalla lunghezza del filo ℓ e dall'accelerazione di gravità g secondo una relazione del tipo $\mathcal{T} \propto m^\alpha \ell^\beta g^\gamma$. Tenendo conto delle dimensioni di \mathcal{T} , M , ℓ e g , si verifichi che l'equazione dimensionale corrispondente è

$$[T]^1 = [M]^\alpha [L]^{\beta+\gamma} [T]^{-2\gamma} \quad (1)$$

soddisfatta per

$$\alpha = 0; \quad \gamma = -1/2; \quad \beta = -\gamma = 1/2$$

per cui

$$\mathcal{T} = C\sqrt{\ell/g}, \quad (2)$$

dove C è una costante il cui valore non può essere determinato dal calcolo dimensionale. Il periodo di oscillazione *non* dipende quindi dalla massa m . Si noti che un'eventuale dipendenza dall'ampiezza di oscillazione non può essere messa in luce dal calcolo dimensionale, poichè gli angoli sono grandezze adimensionali.

6.4.2 Dipendenza del periodo del pendolo dalla massa

Si studi la *dipendenza del periodo dalla massa appesa*, a parità di lunghezza ℓ .

Si misurino le diverse masse disponibili. Si appendano al filo le diverse masse (almeno 4), e per ognuna si misuri il periodo di oscillazione, avendo cura di mantenere inalterate per tutte le masse la lunghezza del pendolo e l'ampiezza di oscillazione. Si faccia attenzione che la *lunghezza* del pendolo è definita come la distanza tra il punto di sospensione e il centro di massa del pendolo e se ne valuti l'incertezza. Va verificato che rimanga costante la lunghezza ℓ del pendolo sospeso, che ricordiamo è definita come $\ell = d + h/2$ dove d è la lunghezza del filo e h è l'altezza del cilindretto. Se necessario, agite opportunamente sulla lunghezza del filo tramite il sistema di sospensione. Si suggerisce di utilizzare una lunghezza $\ell \sim 1$ m ed una ampiezza di oscillazione non superiore a circa 10° . Il metodo di misurazione del periodo \mathcal{T} deve essere scelto in modo da stimare gli errori casuali e rendere piccola l'incertezza totale di misura, compatibilmente con il tempo a disposizione.

Si riportino i risultati delle misurazioni in un grafico, ponendo in ascissa le masse, in ordinata i periodi.

- a) Si trovino le rette di massima e minima pendenza con il metodo grafico. Sono compatibili con una costante? Che conclusioni si possono trarre dall'analisi del grafico?

- b) Si calcoli la media pesata delle misure \mathcal{T}_i e si sfrutti il test del chi quadrato per verificarne la compatibilità. Sulla base del risultato si discuta se la media pesata è accettabile o come eventualmente dovrebbe essere modificata la sua incertezza.
- c) Si assuma una dipendenza lineare fra periodo \mathcal{T} e massa m . Si calcolino mediante regressione lineare (metodo dei minimi quadrati) l'intercetta, la pendenza e loro incertezze. Si verifichi con il test del chi quadrato se queste stime sono attendibili. La pendenza della retta è compatibile con 0? Che limite superiore al valore assoluto della pendenza potete stabilire con le vostre misure, specificando il fattore di copertura?

6.4.3 Misurazione di lunghezze e periodi

Si scelga un cilindretto e se ne misuri l'altezza h . Si sospenda il pendolo in modo che la sua lunghezza sia la massima possibile compatibilmente con lo spazio a disposizione.

Si misuri la *lunghezza* ℓ del pendolo (distanza tra il punto di sospensione e il centro di massa del pendolo) e se ne valuti l'incertezza.

Si misuri il *periodo* \mathcal{T} e se ne valuti l'incertezza nel modo che si ritiene più opportuno.

Si ripetano le misurazioni di lunghezza e periodo (e se ne valutino le incertezze) per una decina di diversi valori di lunghezza del pendolo. La lunghezza minima sia circa 1/10 della lunghezza massima.

Si abbia sempre cura di far oscillare il pendolo in un piano verticale e di mantenere costante e piccola l'ampiezza delle oscillazioni (cioè l'angolo di massima apertura). Stimare l'incertezza sull'ampiezza di oscillazione, tenendo conto eventualmente dell'effetto dovuto allo smorzamento delle oscillazioni.

6.4.4 Grafico lineare

Si riportino gli \mathcal{N} risultati delle misure in un grafico, ponendo in ascissa la lunghezza $\ell = d + h/2$, in ordinata il periodo \mathcal{T} . Si rappresentino le incertezze $\delta\ell$ e $\delta\mathcal{T}$ mediante barre, rispettivamente orizzontali e verticali, in corrispondenza di ogni punto.

Si verifichi che i punti *non* sono compatibili con una relazione lineare tra lunghezza e periodo. Probabilmente si avrà un andamento simile a quello del periodo di oscillazione della molla in funzione della massa appesa, trovato in una precedente esperienza. Considerazioni di natura dimensionale (punto 6.4.1, Dispensa, §2.5) portano infatti alla proporzionalità tra periodo \mathcal{T} e $\ell^{1/2}$. Si potrebbe quindi seguire la stessa metodologia usata per la molla, e graficare \mathcal{T}^2 in funzione di ℓ . Seguiremo invece seguire una metodologia alternativa, applicabile ad una più vasta gamma di relazioni funzionali.

6.4.5 Grafico logaritmico

Osserviamo che i dati sperimentali sembrano essere compatibili con una legge del tipo

$$\mathcal{T} = a\ell^b \quad (3)$$

con parametri a, b incogniti.

Per verificare la fondatezza dell'ipotesi (3) ed eventualmente determinare il valore dei parametri a e b , conviene cercare di linearizzare l'eq. (3). Allo scopo è utile passare dal grafico con scale lineari ad un grafico con scale logaritmiche.

Si considerino le due nuove variabili

$$X = \log(\ell); \quad Y = \log(\mathcal{T}). \quad (4)$$

(Qui e nel seguito indicheremo con “log” e “ln” i logaritmi rispettivamente in base 10 e in base e .)
Se la relazione tra \mathcal{T} e ℓ è correttamente espressa dall’eq. (3), allora la relazione tra Y e X è lineare:

$$\log(\mathcal{T}) = \log(a) + b \log(\ell), \quad \text{cioe' } Y = A + BX, \quad (5)$$

con

$$A \equiv \log(a), \quad \text{cioe' } a \equiv 10^A; \quad B \equiv b \quad (6)$$

Si faccia attenzione alle unità di misura (vedere punto 6.6.2).

Per verificare la compatibilità dei dati sperimentali con la relazione lineare data dall’eq. (5) si possono rappresentare:

- a) $Y = \log(\mathcal{T})$ in funzione di $X = \log(\ell)$ in un grafico con scale lineari. Le incertezze sui valori Y e X dovranno essere calcolate a partire dalle incertezze su \mathcal{T} e ℓ applicando le regole per la propagazione:

$$\delta Y = \left| \frac{dY}{d\mathcal{T}} \right| \delta \mathcal{T} = \frac{\log(e)}{\mathcal{T}} \delta \mathcal{T} = \frac{0.434}{\mathcal{T}} \delta \mathcal{T} \quad (7)$$

$$\delta X = \left| \frac{dX}{d\ell} \right| \delta \ell = \frac{\log(e)}{\ell} \delta \ell = \frac{0.434}{\ell} \delta \ell \quad (8)$$

- b) \mathcal{T} in funzione di ℓ in un grafico con scale logaritmiche (realizzato selezionando entrambi gli assi logaritmici anziché lineari). In questo caso le barre d’errore corrisponderanno alle incertezze originali $\delta \ell$ e $\delta \mathcal{T}$.

6.4.6 Calcolo dei parametri A e B

Il calcolo dei parametri a e b dell’eq. (3) si riconduce al calcolo dei parametri A e B dell’eq. (5).

$A \equiv \log(a)$ e $B \equiv b$ sono, rispettivamente, l’intercetta e il coefficiente angolare della retta che meglio approssima l’andamento dei punti sperimentali nel grafico di $\log(\mathcal{T})$ in funzione di $\log(\ell)$. Si determinino i valori di A e di B *in modo grafico*

$$A \equiv \log(a) = \log(\mathcal{T}) \quad \text{per } \log(\ell) = 0; \quad b \equiv B = \frac{\log(\mathcal{T}_2) - \log(\mathcal{T}_1)}{\log(\ell_2) - \log(\ell_1)} \quad (9)$$

e, se possibile, se ne valuti l’incertezza considerando le rette di massima e minima pendenza compatibili con le barre d’errore.

Questa procedura approssimata è utile per trasformare l’incertezza su $X = \log(\ell)$ in un contributo all’incertezza su $Y = \log(\mathcal{T})$:

$$(\delta Y)_{\text{tr}} = \left| \frac{dY}{dX} \right| \delta X = |B| \delta X.$$

Il contributo $(\delta Y)_{\text{tr}}$ andrà poi sommato quadraticamente all’incertezza originaria δY .

Si calcolino ora i parametri A e B dell’eq. (5) applicando la tecnica della *regressione lineare*: la migliore stima dei parametri A e B è data dai valori che minimizzano la discrepanza tra punti (X_i, Y_i) e retta $Y = A + BX$. Come misura della discrepanza si considera la sommatoria

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{(Y_i - A - BX_i)^2}{(\delta Y_i)^2}. \quad (10)$$

I valori di A e B che minimizzano la sommatoria (10) sono dati da

$$A = \frac{(\sum_i w_i X_i^2)(\sum_i w_i Y_i) - (\sum_i w_i X_i)(\sum_i w_i X_i Y_i)}{\Delta} \quad (11)$$

$$B \equiv b = \frac{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i X_i Y_i) - (\sum_i w_i Y_i)(\sum_i w_i X_i)}{\Delta} \quad (12)$$

dove il denominatore Δ è

$$\Delta = (\sum_i w_i)(\sum_i w_i X_i^2) - (\sum_i w_i X_i)^2 \quad (13)$$

ed i *pesi* w_i sono legati alle incertezze dalla relazione

$$w_i = \frac{1}{(\delta Y_i)^2}. \quad (14)$$

Le incertezze sui parametri A e B si possono calcolare, applicando le regole di propagazione, mediante le relazioni

$$(\delta A)^2 = \frac{\sum_i w_i X_i^2}{\Delta}; \quad (\delta B)^2 \equiv (\delta b)^2 = \frac{\sum_i w_i}{\Delta}. \quad (15)$$

Si risalga infine ad $a \pm \delta a$:

$$a = 10^A; \quad \delta a = \left| \frac{da}{dA} \right| \delta A = 10^A \ln(10) \delta A = 2.3 \times 10^A \delta A. \quad (16)$$

Che unità di misura devo assegnare ai parametri a e b ?

Ovviamente, dovete valutare la compatibilità delle eq. (3) e (4) con i dati sperimentali mediante il test del chi quadrato, discutendone le conseguenze.

6.4.7 Valutazione critica delle incertezze

Si analizzino gli effetti delle incertezze nella determinazione della relazione tra lunghezza e periodo. È più influente l'incertezza sulle misure di lunghezza o quella sulle misure di periodo?

Un pendolo semplice è idealmente costituito da un punto materiale (cioè un corpo di dimensioni trascurabili) appeso ad una fune inestensibile di massa trascurabile. Per un pendolo semplice ci si aspetta una relazione particolarmente semplice tra lunghezza e periodo. In quali configurazioni (per piccole o grandi lunghezze) ci si aspetta che il nostro pendolo reale si discosti di più dall'approssimazione ideale di pendolo semplice?

6.5 Misurazione dell'accelerazione di gravità

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni il periodo \mathcal{T} di un *pendolo semplice* dipende dalla lunghezza ℓ e dall'accelerazione di gravità g secondo la relazione

$$\mathcal{T} = 2\pi \sqrt{\ell/g}. \quad (17)$$

L'eq. (17) mostra che dalle misure della lunghezza e del periodo del pendolo è possibile ricavare l'accelerazione di gravità g :

$$g = (2\pi/\mathcal{T})^2 \ell. \quad (18)$$

6.5.1 Determinazione di g a partire dai dati: tabella

Si riconsiderino i valori delle misure di lunghezza ℓ e periodo \mathcal{T} fin qui raccolte. Per ogni riga della tabella, cioè per ogni coppia di valori $(\ell_i \pm \delta\ell, \mathcal{T}_i \pm \delta\mathcal{T})$ si calcoli l'accelerazione di gravità g_i utilizzando l'eq. (18). Per ogni valore g_i si valuti l'incertezza δg_i utilizzando la formula generale per la propagazione:

$$(\delta g)^2 \simeq \left(\frac{\partial g}{\partial \ell}\right)^2 (\delta \ell)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \mathcal{T}}\right)^2 (\delta \mathcal{T})^2 \simeq \left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}}\right)^4 (\delta \ell)^2 + \left(\frac{8\pi^2 \ell}{\mathcal{T}^3}\right)^2 (\delta \mathcal{T})^2 \quad (19)$$

È più influente l'incertezza su ℓ o l'incertezza su \mathcal{T} nel determinare l'incertezza su g ?

I valori g_i saranno in generale diversi tra loro. È plausibile attribuire le differenze solo all'influenza degli errori casuali, oppure ci sono anche variazioni di natura sistematica, ad esempio dipendenti dalla lunghezza del pendolo?

Per chiarire questo punto, conviene fare un grafico dei valori g_i in funzione dei corrispondenti valori di lunghezza ℓ_i . È evidente una dipendenza di g da ℓ ? In caso affermativo, saranno da considerare più affidabili i valori di g misurati per grandi o piccoli valori di ℓ ? Si tenga presente che le eq. (19) e (18) si basano su due approssimazioni: pendolo semplice (massa priva di dimensioni, filo inestensibile privo di massa) e piccole oscillazioni. Per quali valori di ℓ queste approssimazioni sono più valide? Per ottenere un valore unico $g \pm \delta g$ che sintetizzi convenientemente l'esito delle misurazioni effettuate, si considerino criticamente le due seguenti procedure, valutandone pregi e difetti.

a) Si calcoli la *media pesata* dei valori g_i tabulati e la corrispondente incertezza

$$g = \frac{\sum g_i w_i}{\sum w_i} \quad \delta g = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} \quad \text{dove} \quad w_i = \frac{1}{(\delta g_i)^2}. \quad (20)$$

b) Si consideri la *distribuzione* dei valori g_i , se ne calcoli il valor medio $\langle g_i \rangle$ e si stimi lo scarto quadratico medio della distribuzione dei valori medi $\sigma[\langle g \rangle]$. Si ponga infine $g \pm \delta g = \langle g_i \rangle \pm \sigma[\langle g_i \rangle]$.

In entrambi i casi si valuti l'incertezza dovuta all'eventuale dipendenza di g_i da ℓ_i .

6.5.2 Determinazione di g a partire dai dati: grafico

L'accelerazione di gravità g può essere ricavata anche dal *grafico* del periodo \mathcal{T} in funzione della lunghezza ℓ .

Al punto 6.4.5 la relazione tra periodo e lunghezza era stata espressa nella forma

$$\mathcal{T} = a\ell^b; \quad (21)$$

i valori di a e b e le rispettive incertezze δa e δb erano stati ricavati mediante una procedura di regressione lineare applicata al grafico logaritmico.

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni, il periodo del pendolo semplice è dato da

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g} \quad (22)$$

per cui il parametro a dell'eq. (21) vale $a = 2\pi/\sqrt{g}$. Dal valore di a possiamo quindi agevolmente risalire a g :

$$g = (2\pi/a)^2, \quad \delta g = \left|\frac{dg}{da}\right| \delta a = \frac{8\pi^2}{a^3} \delta a. \quad (23)$$

Si confronti il valore $g \pm \delta g$ così ottenuto con i valori ottenuti al punto 6.5.1 con due diversi metodi a partire dalla tabella. Si discuta l'influenza dell'eventuale dipendenza dei valori g_i dai valori ℓ_i .

6.5.3 Confronto con i valori tabulati

Si confrontino i valori di g ottenuti dalle misurazioni di periodo e lunghezza del pendolo con i valori disponibili in letteratura (si leggano in proposito i Punti 6.6.7÷6.6.9 più sotto). Si valuti se la discrepanza tra valori sperimentali e valori tabulati è compatibile con l'incertezza, tenendo conto del significato probabilistico dell'*incertezza tipo*.

Se il valore sperimentale risulta incompatibile con il valore tabulato, si cerchi di valutare l'errore sistematico e individuare le possibili cause. Più specificamente, si cerchi di capire se l'errore sistematico sul valore di g possa essere indotto da errori sistematici nelle misure di lunghezza e di periodo, e quale delle due misure contribuisca eventualmente in modo più significativo.

Allo scopo, può essere utile considerare la formula generale per la propagazione dell'incertezza, applicata all'eq. (18):

$$\left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 \simeq \left(\frac{\delta \ell}{\ell}\right)^2 + 4 \left(\frac{\delta \mathcal{T}}{\mathcal{T}}\right)^2, \quad (24)$$

attribuendo però ai valori δg , $\delta \ell$ e $\delta \mathcal{T}$ il significato di errore sistematico. L'eq. (24) consente quindi di collegare l'errore sistematico su g agli eventuali errori sistematici sulle misure di ℓ e \mathcal{T} .

Ovviamente non è possibile calcolare le due incognite $\delta \ell$ e $\delta \mathcal{T}$ a partire da una sola equazione. Si possono comunque fare delle considerazioni approssimate. Ad esempio, se si pone $\delta \ell = 0$, l'eq. (24) consente di calcolare l'errore sistematico $\delta \mathcal{T}$ sulla misura di periodo che darebbe origine all'errore sistematico osservato su g . È plausibile avere commesso un tale errore sistematico? Analogo ragionamento si può fare imponendo $\delta \mathcal{T} = 0$ e valutando se un errore sistematico $\delta \ell$ è plausibile.

6.5.4 Relazione

Discutete i risultati ottenuti con il pendolo in un'unica relazione.

6.6 Discussione e approfondimenti

6.6.1 Logaritmi e scale logaritmiche

I logaritmi di un numero reale positivo possono essere calcolati rispetto a qualsiasi base reale e positiva.

Nella pratica si utilizzano due tipi di logaritmi:

a) logaritmi *decimali*, con base 10:

$$x = \log y \quad \text{se} \quad y = 10^x;$$

b) logaritmi *naturali*, con base il numero irrazionale $e=2.7182\dots$:

$$x = \ln y \quad \text{se} \quad y = e^x.$$

I logaritmi decimali e naturali di uno stesso numero sono legati da relazioni di diretta proporzionalità

$$\log y = \log e \ln y = 0.434 \ln y; \quad \ln y = \ln(10) \log y = 2.3 \log y.$$

Le derivate dei logaritmi naturali e decimali rispetto ai loro argomenti sono

$$\frac{d(\ln y)}{dy} = \frac{1}{y}; \quad \frac{d(\log y)}{dy} = \frac{0.434}{y}.$$

Una funzione del tipo $y = ax^b$ (vedi eq. (3)) è linearizzabile usando indifferentemente logaritmi decimali (come nell'eq. (5))

$$\log y = \log a + b \log x, \quad \text{cioe'} \quad Y = A + bX$$

oppure logaritmi naturali

$$\ln y = \ln a + b \ln x, \quad \text{cioe'} \quad Y' = A' + bX'.$$

I parametri A e A' sono diversi:

$$A = \log a; \quad A' = \ln a = 2.3A.$$

6.6.2 Logaritmi e dimensioni

L'argomento delle funzioni trascendenti deve essere una grandezza adimensionale. Nell'espressione $\log(\mathcal{T})$, \mathcal{T} non rappresenta la grandezza fisica *periodo del pendolo*, bensì il suo valore numerico (dipendente dall'unità di misura). Analoga considerazione vale per $\log(\ell)$. In altre parole, l'argomento della funzione \log sarà il valore numerico del rapporto fra la grandezza e l'unità di misura scelta per quella grandezza. Di conseguenza, i valori di $\log(\mathcal{T})$ e $\log(\ell)$ ottenuti sono adimensionali ma dipendono dalla nostra scelta delle unità di misura, e così anche i risultati calcolati a partire da $\log(\mathcal{T})$ e $\log(\ell)$.

Per calcolare le grandezze fisiche che ci interessano, applicheremo la funzione inversa (ad es. 10^A , eq. (16)) e allo stesso tempo sarà necessario recuperare le informazioni dimensionali, assegnando le stesse unità di misura di partenza.

6.6.3 Espressione teorica del periodo del pendolo semplice

La soluzione esatta dell'equazione del moto per il pendolo semplice mostra che il periodo \mathcal{T} dipende non solo dalla lunghezza ℓ e dall'accelerazione di gravità g , ma anche dall'ampiezza di oscillazione θ_0 secondo uno sviluppo in serie i cui primi termini sono

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]. \quad (25)$$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni, cioè per piccoli valori dell'ampiezza θ_0 , l'eq. precedente si riduce alla formula più semplice

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (26)$$

6.6.4 Moto oscillatorio: confronto tra molla e pendolo semplice

Nel caso della *molla* la variabile cinematica è l'elongazione x rispetto alla posizione di equilibrio. L'equazione del moto è

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (27)$$

La costante elastica k misura l'entità della forza di richiamo, la massa m misura l'inerzia. Nel caso del *pendolo* la variabile cinematica è la coordinata curvilinea s lungo la traiettoria circolare; tenendo conto che $s = \ell\theta$, possiamo considerare come variabile cinematica l'angolo θ . L'equazione del moto è

$$m\ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta. \quad (28)$$

La presenza della massa m in entrambi i membri dell'equazione consente la semplificazione:

$$\ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta. \quad (29)$$

Si noti che al crescere della lunghezza ℓ si riduce l'accelerazione angolare $d^2\theta/dt^2$. Se l'ampiezza di oscillazione del pendolo è sufficientemente piccola, in modo da poter fare l'approssimazione $\sin \theta \simeq \theta$ (*approssimazione di piccole oscillazioni*), l'eq. (29) diviene

$$\ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g\theta. \quad (30)$$

che è formalmente simile all'equazione del moto della molla (27). L'eq. (25) consente di valutare l'entità dell'errore sistematico commesso con l'approssimazione di piccole oscillazioni.

6.6.5 Moto armonico semplice: legge oraria e periodo

Le equazioni del moto della molla e del pendolo (per piccole oscillazioni), rispettivamente (27) e (30) hanno la stessa forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 y \quad (31)$$

con $\omega_0^2 = k/m$ nel caso della molla, $\omega_0^2 = g/\ell$ nel caso del pendolo in approssimazione di piccole oscillazioni.

L'eq. (31) è la legge del *moto armonico semplice*.

È facile verificare che l'eq. (31) ha come soluzione la legge oraria

$$y = y_0 \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (32)$$

dove y_0 è l'ampiezza del moto armonico semplice, ϕ la *fase iniziale*. La legge oraria (32) è una funzione periodica del tempo:

$$y(t + \mathcal{T}) = y(t) \quad \Rightarrow \quad y_0 \sin(\omega_0 t + \omega_0 \mathcal{T} + \phi) = y_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

da cui si ricava che il periodo \mathcal{T} deve valere

$$\mathcal{T} = 2\pi/\omega_0.$$

6.6.6 Pendolo semplice e pendolo fisico

Un *pendolo semplice* è costituito da un punto materiale appeso ad una fune inestensibile priva di massa. Si tratta evidentemente di un'idealizzazione.

Un *pendolo fisico* è costituito da un corpo rigido (quindi ancora inestensibile, ma non puntiforme) appeso ad un punto fisso. Per un pendolo fisico omogeneo l'equazione del moto è

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ell \sin \theta \quad (33)$$

dove I è il *momento d'inerzia* rispetto all'asse di rotazione passante per il punto di sospensione, m è la massa totale e ℓ la distanza del centro di massa dal punto di sospensione. L'eq. (33) corrisponde all'eq. (28) del pendolo semplice. Nell'approssimazione di piccole oscillazioni, l'eq. (33) diviene

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ell\theta. \quad (34)$$

L'eq. (34) è l'equazione di un oscillatore armonico, con $\omega_0^2 = mg\ell/I$ (eq. (31)). Il periodo è pertanto

$$\mathcal{T} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}}. \quad (35)$$

Nel caso del pendolo semplice, $I = m\ell^2$, e l'eq. (35) si riduce all'eq. (26).

Nel caso della nostra esperienza il pendolo è costituito da un cilindro di metallo di raggio R , altezza h e massa m e da una fune di lunghezza $d = \ell - h/2$ e massa μ . Il pendolo fisico è cioè composto da due oggetti di diversa densità e massa.

Nell'ipotesi realistica che $m \gg \mu$, l'equazione del moto per piccole oscillazioni può essere scritta come

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ell\theta. \quad (36)$$

Calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione utilizzando il teorema di Steiner:

$$I = m\ell^2 + \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2. \quad (37)$$

Il periodo \mathcal{T} può pertanto venire espresso come

$$\mathcal{T} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sqrt{1 + R^2/4\ell^2 + h^2/12\ell^2}. \quad (38)$$

Considerare un pendolo fisico come un pendolo semplice comporta un errore sistematico nel calcolo del periodo \mathcal{T} . L'eq. (38) consente di valutare, nel nostro caso, l'entità dell'errore sistematico.

6.6.7 Gravità e gravitazione universale

Se la Terra fosse una sfera perfettamente omogenea di raggio R e massa M , l'accelerazione di gravità g_0 a livello del mare, misurata in un *sistema di riferimento inerziale*, sarebbe espressa come

$$g_0 = GM/R^2 \quad (39)$$

dove G è la costante di interazione gravitazionale. La *costante gravitazionale* G si misura in laboratorio utilizzando bilance di torsione oscillanti (*balance di Cavendish*); il suo valore è attualmente noto con l'incertezza dello 0.15%, ovvero di 1500 p.p.m. (parti per milione): $G = 6.673(10) \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ (Rapporto CODATA 1998).

Nota: Quando l'incertezza δX è molto piccola rispetto al valore centrale X_0 , spesso le sue cifre significative (generalmente 1 o 2) vengono scritte tra parentesi immediatamente dopo il valore centrale X_0 ; si sottintende che l'incertezza va applicata alle corrispondenti ultime cifre significative del valore centrale X_0 . Ad esempio,

$$G = 6.673(10) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \text{ sta per } G = (6.673 \pm 0.010) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

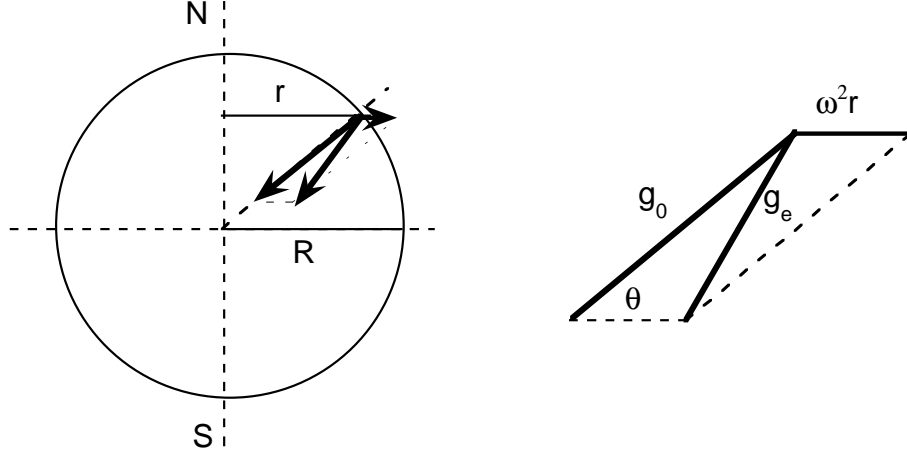
L'incertezza relativa $\delta X/X_0$, moltiplicata per il fattore 10^6 , dà l'incertezza espressa in *parti per milione* (p.p.m.). (Si veda anche la Dispensa, § D.2).

La forma della Terra non è perfettamente sferica. La superficie terrestre è con buona approssimazione un ellissoide di rotazione schiacciato ai poli. La misurazione accurata dell'accelerazione di gravità in funzione della posizione è uno dei metodi utilizzati dalla geodesia per determinare l'andamento della superficie terrestre.

Il raggio medio terrestre è $R = 6370.9$ km. La conoscenza di G , g_0 e R consente, attraverso l'eq. (39), di determinare la massa M della Terra.

6.6.8 Riferimenti inerziali e non

La misurazione dell'accelerazione di gravità viene effettuata in un sistema di riferimento solidale con la Terra, cioè in un *sistema di riferimento non inerziale*.



Indichiamo con g_0 e g_e l'accelerazione di gravità misurata rispettivamente in un riferimento inerziale e nel riferimento solidale con la Terra. Per un punto materiale in quiete rispetto alla Terra l'accelerazione di trascinamento è puramente centripeta; con semplici considerazioni trigonometriche è facile vedere che

$$g_e^2 = g_0^2 - 2g_0\omega^2 R \cos^2 \theta + \omega^4 R^2 \cos^2 \theta \quad (40)$$

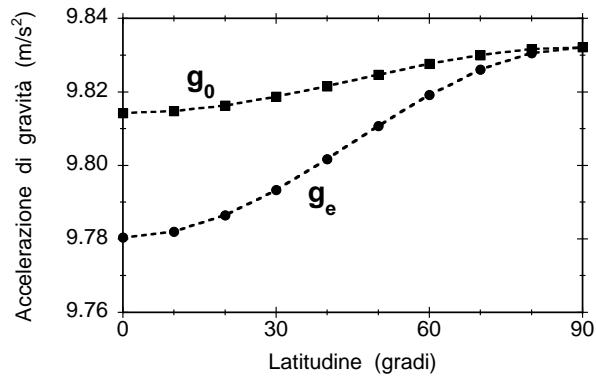
dove θ è la latitudine. Poiché $\omega^2 R \ll g_0$, si può fare l'approssimazione

$$g_e \simeq g_0 \left[1 - \frac{2\omega^2 R \cos^2 \theta}{g_0} \right]^{1/2} \simeq g_0 - \omega^2 R \cos^2 \theta. \quad (41)$$

Nella Tabella seguente sono riportati i valori dell'accelerazione di gravità g_e a livello del mare in funzione della latitudine, misurati nel sistema di riferimento solidale con la Terra ed i corrispondenti valori g_0 calcolati mediante l'eq. (41).

L'incertezza relativa è dell'ordine di $0.1 \div 0.2$ p.p.m., cioè influisce sulla sesta cifra dopo la virgola.

Latitudine (gradi)	g_e m/s^2	g_0 m/s^2
0	9.78039	9.81424
10	9.78195	9.81478
20	9.78641	9.81630
30	9.79329	9.81867
40	9.80171	9.82157
50	9.81071	9.82469
60	9.81918	9.82764
70	9.82608	9.83004
80	9.83059	9.83161
90	9.83217	9.83217



La residua diminuzione di g_0 dai poli all'equatore è dovuta al fatto che la Terra ha la forma di un ellissoide schiacciato ai poli: il raggio polare è all'incirca 21 km minore del raggio equatoriale. Variazioni minori di g_0 sono dovute a variazioni locali di forma e densità.

6.6.9 Dipendenza da latitudine e altitudine

L'esperimento di laboratorio è stato effettuato alla latitudine di Trento, cioè 46° . Interpolando linearmente i valori di g_e della tabella tra 40° e 50° si ottiene, per la latitudine di 46° , il valore 9.8071 m/s^2 .

L'accelerazione di gravità g diminuisce al crescere dell'altitudine. Differenziando l'eq. (39) è facile vedere che

$$dg/g = -2dR/R. \quad (42)$$

L'esperimento è stato effettuato a $\Delta R = 400$ metri sul livello del mare. La corrispondente variazione di g rispetto al valore a livello del mare può essere calcolata a partire dall'eq. (42), tenendo conto che $\Delta R \ll R$:

$$\Delta g \simeq -2g\Delta R/R \simeq -1 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2. \quad (43)$$

6.6.10 Costanti fisiche del pianeta Terra

Raggio equatoriale	R_e	$= 6.3781 \times 10^6$	m
Raggio polare	R_p	$= 6.3567 \times 10^6$	m
Raggio medio	$\langle R \rangle$	$= 6.3709 \times 10^6$	m
Massa terrestre	M	$= 5.974 \times 10^{24}$	Kg
Velocità angolare di rotazione	ω	$= 7.2921 \times 10^{-5}$	rad/s
Costante gravitazionale	G	$= 6.67259 (85) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3/(\text{s}^2 \text{ Kg})$

Nota: Per calcolare la velocità angolare ω della Terra è necessario ricordare che una rotazione completa avviene in un *giorno siderale* e che il giorno siderale è più corto del *giorno solare*. Un anno corrisponde infatti a 365.2422 giorni solari (passaggi del sole allo zenith) e 366.2422 giorni siderali (rotazioni della Terra intorno al suo asse). Un giorno solare dura 86400 secondi, un giorno siderale 86164 secondi.

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7.2921 \times 10^{-5} \text{ rad/s}.$$