
MISURE RIPETUTE DI LUNGHEZZA E TEMPO

Francesco Pasa, Davide Bazzanella, Andrea Miani
Gruppo A11

28 febbraio 2013 - 11 marzo 2013

Sommario

Misura della lunghezza di un gruppo di 25 cilindri di metallo e della durata del periodo di oscillazione di un pendolo semplice. Analisi dei valori ottenuti dagli esperimenti del singolo gruppo e dei valori raccolti dagli esperimenti di tutti i gruppi di laboratorio.

Indice

1 Introduzione

Questa relazione sarà divisa in due sezioni, una dedicata al primo esperimento in cui verrà misurata la lunghezza di una popolazione di 25 cilindri metallici con tre diversi strumenti (metro a nastro, calibro ventesimale, micrometro). L'altra dedicata alla misura del periodo di un pendolo semplice (costruito con un cavo inestensibile e un peso) effettuata da tutti i componenti del gruppo al fine di evidenziare la presenza di eventuali errori sistematici, dovuti alla differente prontezza di riflessi dei componenti dell'equipe. Entrambe le sezioni saranno integrate con l'analisi dei dati ottenuti dagli esperimenti, in particolare la prima conterrà anche lo studio dei dati ottenuti da tutti gli altri gruppi del corso di laboratorio.

2 Cilindretti

2.1 Descrizione della procedura di misura

Procediamo ora con la descrizione della procedura operativa con cui abbiamo misurato i 25 cilindri di metallo con i tre strumenti di misura a nostra disposizione:

2.1.1 Metro a nastro

Abbiamo misurato i 25 cilindretti con un metro a nastro la cui risoluzione di misura è 1 millimetro, in quanto abbiamo ritenuto di non poter distinguere un intervallo di mezzo millimetro. Per questo motivo abbiamo approssimato le misure alla tacca da un millimetro più vicina al bordo del cilindretto. Poiché la lunghezza dei cilindretti era di circa 15 mm abbiamo incontrato delle difficoltà nell'allineare i cilindri con lo 0 dello strumento. Per questo motivo abbiamo allineato un'estremità di ogni cilindro con la tacca dei 10 cm del metro e abbiamo sottratto questa quantità al valore della misura così ottenuta. E' importante evidenziare che in questa operazione abbiamo riscontrato una difficoltà nell'allineare correttamente i cilindri anche con la tacca dei 10 cm, inoltre abbiamo tentato di evitare eventuali errori di parallasse durante la lettura dello strumento.

2.1.2 Calibro ventesimale

Il calibro che abbiamo utilizzato ha una risoluzione di misura di 0.05 millimetri. La misura con il calibro ventesimale è stata effettuata avendo cura di disporre i cilindri in modo perpendicolare ai becchi del calibro. [In questo modo abbiamo tentato di misurare l'asse del cilindro e non una sua proiezione], a tal fine abbiamo sfruttato le scanalature presenti sullo strumento; tuttavia non abbiamo potuto evitare nella maniera più assoluta errori di questo tipo. La lettura dei ventesimi di millimetro è stata effettuata cercando quale tacca della scala mobile ventesimale si allineasse meglio con le tacche sovrastanti della scala millimetrata. Questa operazione è stata eseguita da tutti i membri del gruppo per evitare eventuali problemi di parallasse dovuti ad una singola valutazione della misura.

2.1.3 Micrometro

Il micrometro è uno strumento con una risoluzione di misura di 0.01 millimetro. Anche in questo caso la misura dei cilindri è stata effettuata prestando attenzione che i campioni fossero perpendicolari alle aste di misurazione, per evitare lo stesso tipo di errore descritto sopra. Come nel caso del calibro non possiamo essere sicuri del perfetto allineamento dei cilindri, ma abbiamo tentato di ridurre al minimo questo handicap [questa problematica].

Metro [mm]					Lunghezza dei cilindretti Calibro [mm]					Micrometro [mm]				
14	14	14	14	14	13.70	13.85	13.95	13.80	13.95	13.94	13.92	13.84	13.93	13.79
14	14	14	14	14	13.70	13.95	13.90	13.90	13.90	13.94	13.93	13.89	13.92	13.91
14	14	14	14	14	13.70	13.95	13.90	13.95	13.85	13.93	13.93	13.84	13.90	13.74
14	14	14	14	14	13.70	13.95	13.90	13.90	13.90	13.70	13.85	13.91	13.79	13.70
13	14	14	14	14	13.75	13.90	13.80	13.85	13.90	13.71	13.92	13.91	13.94	13.70

Tabella 1: Misure della lunghezza dei 25 cilindretti ottenute con i tre strumenti a nostra disposizione. È riportato il valore di lettura degli strumenti.

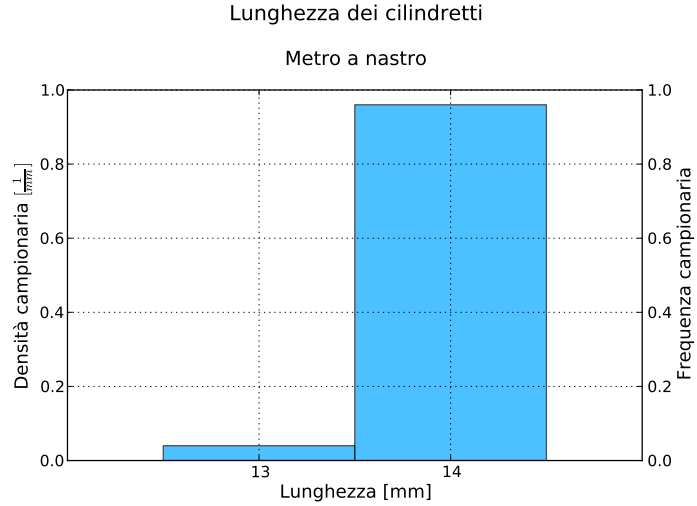


Figura 1: Istogramma relativo alle misure di lunghezza dei cilindri con il metro a nastro

2.2 Analisi dei dati

La seguente tabella (Tabella 1) riporta tutte le 25 misure di lunghezza dei cilindri effettuate con i tre strumenti a nostra disposizione:

L'istogramma (Figura 1) rappresenta la distribuzione della lunghezza della popolazione dei cilindretti ottenuta con il metro a nastro. Per costruire questo istogramma abbiamo deciso di utilizzare come binnaggio la risoluzione di misura dello strumento e quindi di 1 millimetro, poichè tutte le misure effettuate sono risultate essere 14 ± 0.5 mm tranne una che ha valore 13 ± 0.5 mm. Come si può osservare dal grafico non siamo riusciti ad apprezzare la distribuzione non uniforme della lunghezza dei cilindri, in quanto la risoluzione dello strumento non è stata sufficiente per apprezzare le variazioni di lunghezza da un corpo all'altro.

I parametri statistici ottenuti relativi alle misure dei cilindri sono i seguenti:

- Media campionaria:

$$m^*[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i) \simeq \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j p_j^*) = 13.96 \text{ mm} \quad (1)$$

- Varianza campionaria:

$$\tilde{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*[x])^2 = 0.04 \text{ mm}^2 \quad (2)$$

- Deviazione standard campionaria:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*[x])^2} = 0.2 \text{ mm} \quad (3)$$

Gli istogrammi Figura 2 rappresentano rispettivamente la distribuzione delle misure della lunghezza dei cilindri ottenute con il calibro ventesimale e con il micrometro.

Per l'istogramma relativo al calibro ventesimale la scelta del binning è legata alla risoluzione dello strumento e quindi la larghezza di ogni singolo bin è di 0.05 mm. Infatti grazie a questo binnaggio abbiamo un numero conteggi sufficienti per ogni colonna.

Per l'istogramma relativo al micrometro si è scelto di utilizzare lo stesso binnaggio utilizzato per il calibro poiché: se avessimo diminuito la larghezza dei bin avremmo ottenuto un numero di colonne troppo alto e per ognuna di esse un numero di conteggi insufficiente. Al contrario se avessimo scelto di aumentare la larghezza dei bin allora lo scopo di misurare i 25 cilindretti con il micrometro sarebbe risultato vano in quanto non si sarebbe nemmeno apprezzata la buona risoluzione dello strumento.

Come si può notare i due istogrammi si assomigliano: infatti in entrambi i casi siamo riusciti ad apprezzare la presenza di un picco della popolazione in corrispondenza del valore 13.90 mm. Nonostante le misure risultino essere più accurate rispetto a quelle eseguite con il metro a nastro non ci sono abbastanza campioni per poter affermare l'esistenza di due popolazioni di cilindri differenti in quanto l'altro picco, quello riferito al valore ... , non è distinguibile da una coda relativa al picco preponderante. Affermiamo questo perché l'errore [sulla colonna] è $\sqrt{n_j}$ e il numero di campioni per questa misura risulta essere inferiore a 5.

Più nel dettaglio possiamo dire che la media campionaria relativa all'istogramma (1.2) è la seguente: ... la varianza campionaria risulta essere: ... e la fluttuazione standard campionaria ottenuta è: ... Per l'istogramma (1.3) abbiamo ottenuto che la media campionaria risulta essere: ... la varianza campionaria é: ... e la fluttuazione standard campionaria ottenuta è: ...

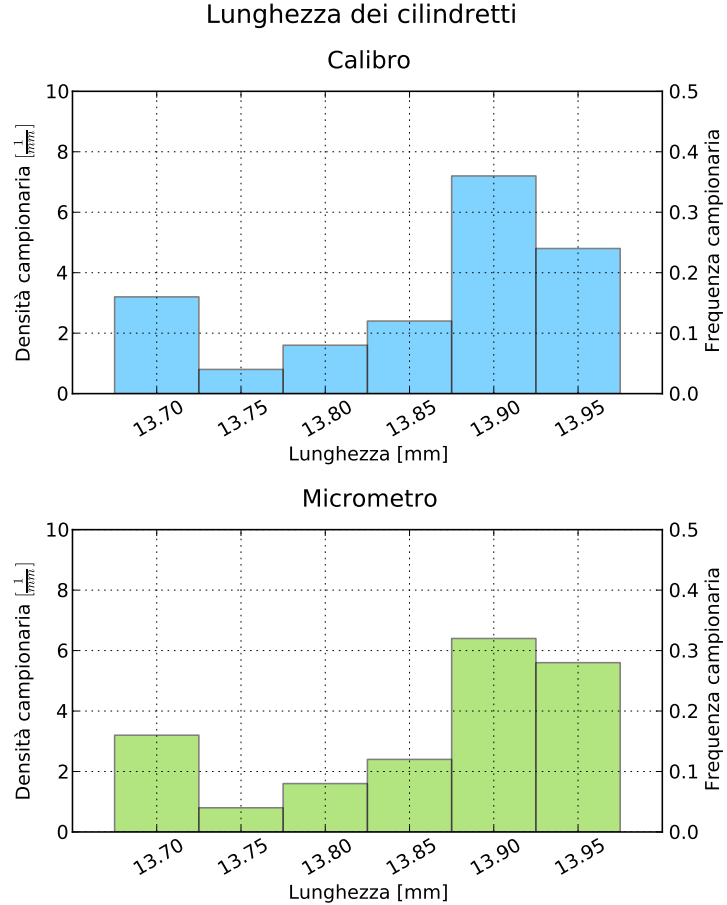
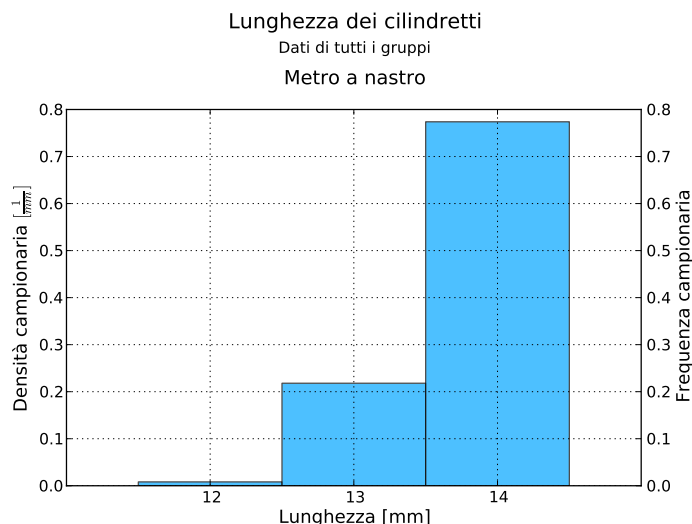
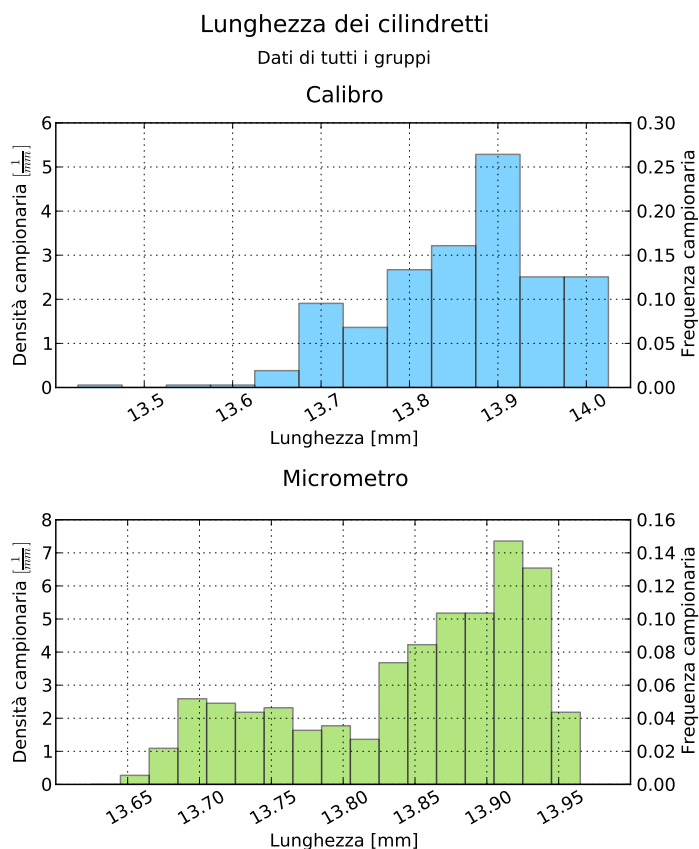


Figura 2: Istogrammi relativi alle misure di lunghezza dei cilindri con il calibro e con il micrometro

Figura 3: Misure della lunghezza dei cilindretti ottenute da tutti i gruppi del laboratorio (gruppi del lunedì). L'istogramma riporta le misure effettuate con il metro a nastro.



2.3 Analisi dei dati a livello globale di laboratorio



Contrariamente a quanto abbiamo potuto osservare e ipotizzare tramite i dati raccolti dal nostro singolo gruppo con i tre strumenti, unendo i dati relativi a tutti i gruppi di laboratorio, si può evidenziare l'esistenza di due popolazioni distinte di cilindri. Infatti nell'istogramma (1.3) sono ben distinguibili due picchi, che corrispondono alle due rispettive medie campionarie di lunghezza delle due popolazioni di cilindretti.

Figura 4: Lunghezza dei cilindretti ottenute da tutti i gruppi (del lunedì) del corso di laboratorio. L'istogramma relativo alle misure con il calibro ha binning di 0.05 mm, mentre nell'istogramma delle misure effettuate con il micrometro i bin sono da 0.02 mm

3 Pendolo

La seconda parte di questa relazione tratta l'esperienza di misura del periodo di un pendolo. Lo scopo dell'esperienza è imparare a trattare gli errori casuali, dovuti alla procedura di misurazione del periodo con un cronometro, che introduce inevitabilmente fluttuazioni casuali nelle misure effettuate, e gli errori sistematici, dovuti alla diversa prontezza di riflessi degli sperimentatori. In questo ultimo caso sorge il problema della compatibilità delle misure effettuate dai tre diversi membri del gruppo.

Ci siamo anche posti il problema di verificare sperimentalmen-

te la correttezza della legge del pendolo semplice, cosa che ogni studente di fisica dovrebbe fare almeno una volta nella sua vita!

3.1 Descrizione della procedura di misura

3.1.1 Apparato sperimentale

Il pendolo è stato realizzato con un filo da pesca, che si può considerare inestensibile, fissato con un morsetto al supporto del tavolo da laboratorio. All'altra estremità del cavo è stato appeso, attraverso un gancio, un corpo cilindrico di metallo di massa $m = 205 \text{ g}$. Il pendolo si può schematizzare, trascurando il gancio, come un cavo di lunghezza $l_c = 55.8(???) \pm 0.2(???) \text{ cm}$ unito ad un cilindro omogeneo di altezza $h = 5.1 \pm 0.05 \text{ cm}$ (???)

3.1.2 Predizione teorica (??? spostare? ???)

Per il calcolo teorico del periodo è stato utilizzato il modello del pendolo semplice, che abbiamo considerato adeguato alla situazione. La massa m_c del cavo è stata considerata trascurabile, o meglio poiché $m_c \ll m$ si è posto $m_c = 0$. Inoltre, dato che in realtà il cilindro non è puntiforme, lo abbiamo approssimato ad un punto materiale posizionato nel suo baricentro, che si trova ad una distanza $\frac{h}{2}$ dal punto di sospensione del corpo. Nel modello del pendolo semplice, la lunghezza del cavo è quindi $l = l_c + \frac{h}{2} = 55.8 \pm \square \text{ cm} + 2.5 \pm \square \text{ cm} = 58.3 \pm \square \text{ cm} = 0.583 \pm \square \text{ m}$. Con questo valore di l e con $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ si ottiene un periodo:

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1.499 \text{ s} \quad (4)$$

Questo valore è quindi il valore atteso di periodo del pendolo. Lo scopo dell'esperimento è quello di verificare sperimentalmente se questa predizione è corretta.

Francesco				Periodo del pendolo [s] Davide				Andrea			
15.04	14.99	14.99	14.97	14.91	14.97	15.06	15.04	14.98	14.98	15.05	15.01
14.99	14.99	15.01	15.08	14.92	15.06	15.08	15.02	14.85	14.99	14.98	15.00
15.04	15.00	15.06	14.98	15.06	15.02	15.04	15.00	15.04	14.99	14.99	14.94
14.93	14.98	14.98	15.04	15.06	15.06	15.02	14.91	15.01	15.00	15.13	14.99
14.99	14.91	15.03	15.03	15.03	15.02	15.06	15.02	14.88	15.01	15.02	14.96

Tabella 2: Tabella delle misure del periodo del pendolo ottenute dai 3 membri del gruppo. Ogni sperimentatore ha raccolto 20 misure di 10 periodi. Sono riportati i dati grezzi di lettura del cronometro, riferiti a 10 periodi.

3.1.3 Errori sistematici (spostare???)

Al fine di evitare errori sistematici riguardanti il modello teorico, cioè errori causati dal fatto che il modello teorico non rispecchia l'apparato sperimentale usato, sono state prese le seguenti precauzioni:

- Si è tentato di contenere le oscillazioni del pendolo in un unico piano verticale. Abbiamo notato che a causa delle vibrazioni al momento del rilascio, il pendolo tende a seguire una traiettoria ellittica, invece che compiere la sua oscillazione su di un piano. Nei casi in cui la traiettoria si discostasse significativamente dal piano si è quindi proceduto a ripetere da capo la misura.
- Durante le operazioni di misura abbiamo mantenuto il massimo numero di oscillazioni entro il valore 20-30 affinché l'attrito con l'aria non influisse in modo significativo sul periodo del pendolo.
- Ci siamo accertati che l'ampiezza massima delle oscillazioni non superasse i 10° dalla verticale, in modo che l'approssimazione lineare $\sin(\vartheta) \simeq \vartheta$ che viene utilizzata per calcolare la legge del pendolo sia accettabile. Infatti, per un angolo $\vartheta < 10^\circ = 0.175 \text{ rad}$ si ha che:

$$\sin(\vartheta) = 0.174 \quad \frac{\vartheta}{\sin(\vartheta)} = 1.005 \quad (5)$$

Possiamo stimare l'errore sistematico commesso ...

$$\delta x_{sys} = \quad (6)$$

[Tramite il disegno dell'angolo massimo su un foglio di carta appositamente posizionato vicino al punto di sospensione del filo.]

Tra gli errori sistematici segnaliamo, inoltre, il fatto che le misure sono state effettuate da sperimentatori diversi, che introducono degli errori sistematici che variano da persona a persona. Questi errori saranno trattati nella sezione di analisi dei dati.

Le precauzioni prese dovrebbero essere sufficienti a ridurre l'errore sistematico entro limiti accettabili. Tuttavia è risaputo che gli errori sistematici sono i più difficili da scovare ed eliminare.

Tabella 3: Misure di periodo effettuate da uno dei tre componenti del gruppo. Sono riportati i valori di lettura del cronometro riferiti a singole oscillazioni (periodi) dell'apparato.

Periodo del pendolo - Misure di un operatore [s]										
1.46	1.54	1.55	1.57	1.41	1.45	1.52	1.45	1.37	1.53	
1.57	1.50	1.52	1.50	1.48	1.49	1.44	1.49	1.43	1.53	
1.50	1.50	1.56	1.61	1.45	1.38	1.52	1.41	1.60	1.49	
1.48	1.53	1.52	1.55	1.54	1.46	1.51	1.51	1.49	1.52	
1.52	1.50	1.48	1.46	1.41	1.48	1.45	1.48	1.52	1.51	
1.55	1.52	1.55	1.49	1.51	1.50	1.52	1.49	1.54	1.52	
1.45	1.49	1.47	1.47	1.48	1.48	1.53	1.51	1.52	1.47	
1.54	1.42	1.43	1.45	1.49	1.42	1.47	1.36	1.50	1.55	
1.58	1.52	1.45	1.48	1.44	1.52	1.51	1.50	1.54	1.52	
1.52	1.52	1.47	1.52	1.44	1.56	1.50	1.49	1.52	1.56	

3.1.4 Processo di acquisizione dei dati sperimentali

Per le misurazioni è stato utilizzato un comune cronometro con risoluzione di misura pari a 0.01 s. [errore di risoluzione??] Ogni componente del gruppo ha cronometrato 20 volte il tempo impiegato dal pendolo per compiere 10 periodi. I valori grezzi misurati, riportati nella tabella ??, sono stati divisi per 10 per ottenere il valore medio del periodo del pendolo. Questo ci ha permesso di diminuire gli errori sistematici dovuti alla prontezza di riflessi dei diversi operatori, che verranno trattati più approfonditamente nella sezione di analisi dei dati, e di aumentare la risoluzione del cronometro fino a 1 millisecondo.

Successivamente un componente del gruppo ha eseguito 100 misurazioni di periodi singoli dell'apparato, riportate nella tabella ?. L'acquisizione di dati è stata effettuata con la seguente procedura:

1. Il pendolo è stato fatto oscillare prestando attenzione al piano di oscillazione e all'ampiezza dell'oscillazione.
2. Si è misurato un periodo, annotato il valore ottenuto e azzerato il cronometro.
3. Le misurazioni sono state intervallate da 1-2 periodi non misurati.
4. Ogni 10 misurazioni, che equivale a meno di 30 periodi, il pendolo è stato fermato e fatto ripartire, per evitare lo smorzamento dovuto all'attrito con l'aria.

Non è stata utilizzata la funzione «giro» del cronometro, al fine di evitare di introdurre dipendenza tra le varie misure. Azzerando il cronometro ogni volta le misure risultano statisticamente indipendenti.

3.2 Analisi dei dati

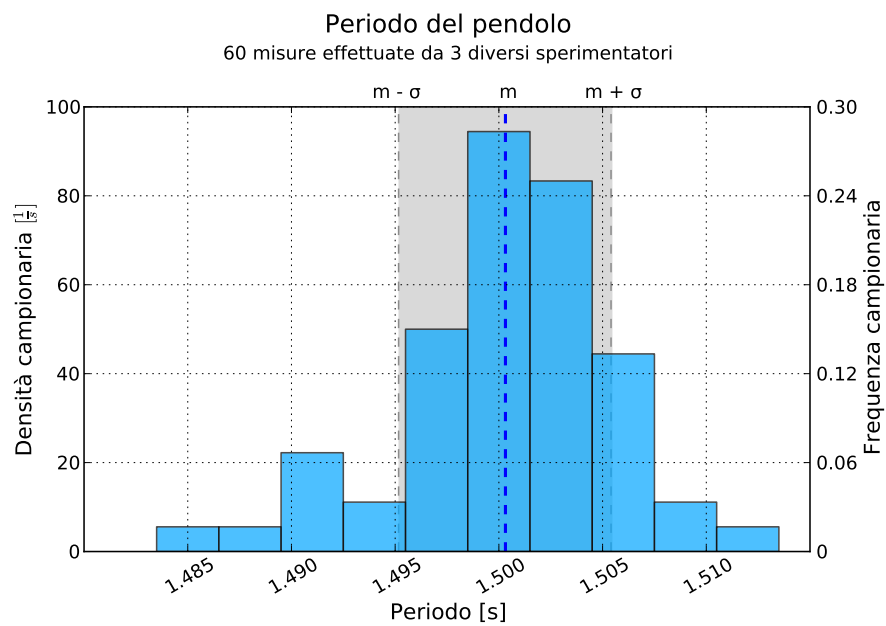
La Tabella ?? e la Figura ?? (l'istogramma) riguardano la distribuzione dei dati relativi la misura del singolo periodo del pendolo da parte di tutti e tre i componenti del gruppo.

Analizzando parzialmente i dati sopra riportati possiamo ricavare che la media campionaria e gli altri parametri della distribuzione dei dati relativi a ogni singolo sperimentatore sono:

$$m_{Francesco}^* = 1.500 \text{ s} \pm 0.004 \text{ s}$$

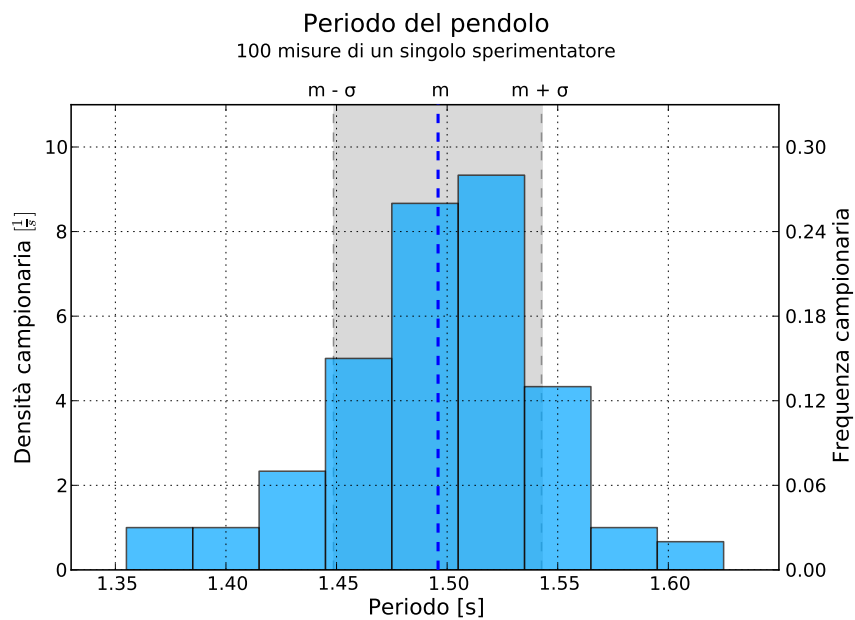
$$m_{Davide}^* = 1.502 \text{ s} \pm 0.005 \text{ s}$$

$$m_{Andrea}^* = 1.499 \text{ s} \pm 0.006 \text{ s}$$



[p]

Figura 5: Istogramma relativo alle misure effettuate da tutti e tre gli sperimentatori



[p]

Figura 6: Istogramma delle 100 misure singole di periodo

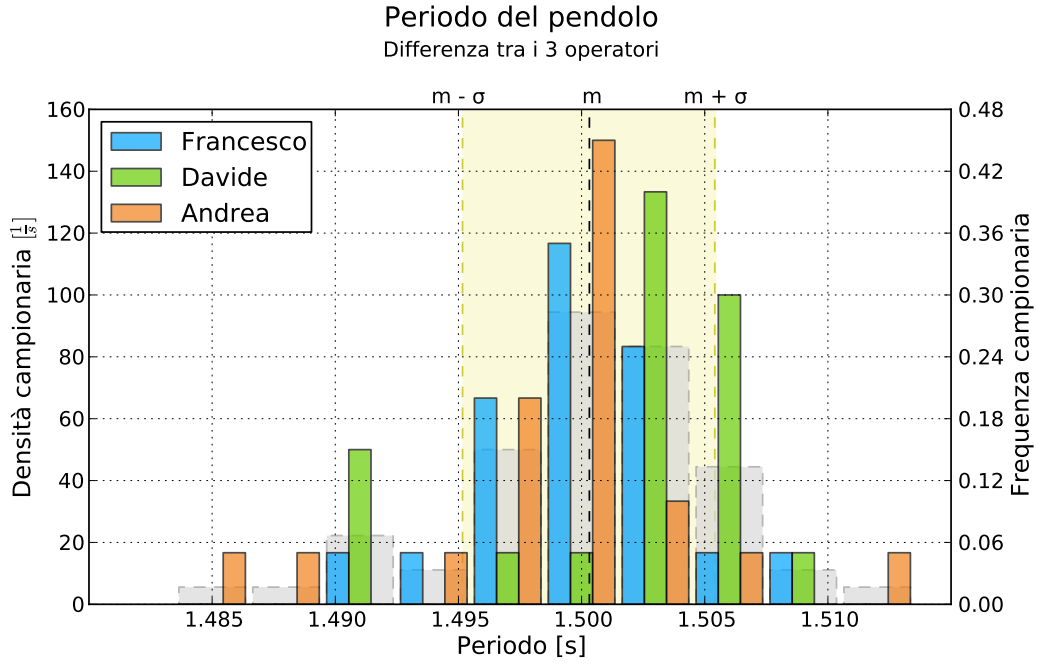


Figura 7: didascalia

$$\tilde{\sigma}_{Francesco} = 0.004 \text{ s}$$

$$\tilde{\sigma}_{Davide} = 0.005 \text{ s}$$

$$\tilde{\sigma}_{Andrea} = 0.006 \text{ s}$$

$$\tilde{\sigma}_{ris-std} = 0.0003 \text{ s}$$

[Le misure sono COMPATIBILI ?????????]

Le misure ripetute del periodo di un pendolo mostrano che le fluttuazioni delle misure sono dovute principalmente ad errori casuali, poichè il periodo \mathcal{T} di oscillazione di un pendolo semplice è isocrono per ampiezze di oscillazioni abbastanza piccole, nel nostro caso contenute entro i dieci gradi. Per questo motivo è importante sottolineare che l'incertezza standard sulla misura del periodo risulta essere molto minore (circa dieci volte) dell'incertezza dovuta a errori di tipo A, quindi terremo conto principalmente di quest'ultima.

Procediamo ora con l'analisi complessiva dei dati relativi alla misura del periodo del pendolo eseguita da tutti e tre i componenti del gruppo e otteniamo che:

- La media campionaria é:

$$m^*[\mathcal{T}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i = 1.500 \text{ s} \quad (7)$$

- La varianza campionaria del periodo di oscillazione del pendolo è:

$$\tilde{D}[\mathcal{T}] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2 = 0.00003 \text{ s} \quad (8)$$

- la deviazione standard campionaria risulta essere:

$$\tilde{\sigma}[\mathcal{T}] = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2} = 0.005 s \quad (9)$$

- la mediana, il quantile 10% e il quantile 90% sono relativamente:

$$m = 1.501 s \quad q_{10\%} = 1.493 s \quad q_{90\%} = 1.506 s$$

Pertanto, applicando le necessarie approssimazioni e gli errori relativi ad ogni misura si ottiene

$$m^*[\mathcal{T}] = 1.500 \pm 0.005 s$$

$$m = 1.500 \pm 0.005 s \quad q_{10\%} = 1.495 \pm 0.005 s \quad q_{90\%} = 1.505 \pm 0.005 s$$

Come si può notare dall'analisi fatta non abbiamo riscontrato particolari errori sistematici dovuti all'operatore, in quanto la media campionaria dei dati di ogni operatore è compatibile con la media di tutti i valori entro la deviazione standard campionaria. Inoltre se le misure di uno sperimentatore fossero state affette da un errore sistematico i suoi valori medi sarebbero risultati significativamente differenti da quelli degli altri due componenti del gruppo. Come si può notare dagli istogrammi sono invece evidenti gli errori casuali. Ciononostante il loro valore è contenuto grazie al fatto che abbiamo deciso di misurare il periodo di 10 oscillazioni consecutive.

Quindi grazie ai risultati così ottenuti possiamo dire che il periodo del pendolo risulta essere:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \pm \delta\mathcal{T} = 1.500 s \pm 0.005 s \quad (10)$$

La Tabella 2 e la Figura 2 invece sono relativi alla misura del periodo del pendolo da parte di un singolo membro del gruppo.

Procediamo ora con l'analisi dei dati relativi alle cento misurazioni del periodo:

- la media campionaria é:

$$m^*[\mathcal{T}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i = 1.50 \text{ s} \quad (11)$$

- la varianza campionaria del periodo di oscillazione del pendolo è:

$$\tilde{D}[\mathcal{T}] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2 = 0.0022 \text{ s} \quad (12)$$

- la deviazione standard campionaria risulta essere:

$$\tilde{\sigma}[\mathcal{T}] = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*[\mathcal{T}])^2} = 0.05 \text{ s} \quad (13)$$

$$\tilde{\sigma}_{ris-std} = 0.003 \text{ s} \quad (14)$$

- la mediana, il quantile 10% e il quantile 90% sono relativamente:

$$m = 1.50 \text{ s} \quad q_{10\%} = 1.44 \text{ s} \quad q_{90\%} = 1.55 \text{ s}$$

Innanzitutto, si può notare che le cento misure di oscillazione di un singolo periodo hanno una precisione fino al centesimo di secondo, mentre quelle relative a tutti e tre i componenti avevano una precisione fino al millesimo. Infatti la deviazione standard di queste misure è di un ordine di grandezza maggiore rispetto al dato relativo alle misure precedenti.

Se procediamo ora con un'analisi più approfondita dei dati e li raggruppiamo in dieci gruppi di dieci misure ciascuno, possiamo calcolare la media campionaria di ogni singolo gruppo:

$$m_k^* \quad \text{con } K \in \{1, 2, \dots, 10\} \quad (15)$$

dove k indica il numero del gruppo considerato. Ottenute queste misure possiamo considerarle come singoli dati e farne una media campionaria ($m[m_k^*]$):

$$m[m_k^*] = \sum_{k=1}^{10} (m_k^*) = 1.50 \text{ s} \quad (16)$$

che risulta essere uguale alla media campionaria delle cento misure prese singolarmente. Calcolando la deviazione standard delle medie ($\sigma[m_k^*]$):

$$\sigma[m_k^*] = \sqrt{\frac{10}{10-1} \sum_{k=1}^{10} (m_k^* - m[m_k^*])^2} = 0.020 \text{ s} \quad (17)$$

otteniamo che il rapporto tra $\frac{\tilde{\sigma}[\mathcal{T}]}{\sigma[m_k^*]}$ risulta essere circa 0.42 che è un risultato attendibile dal momento che la predizione teorica ci dice che:

$$\frac{\tilde{\sigma}[\mathcal{T}]}{\sigma[m_k^*]} = \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0.32 \quad (18)$$

4 Conclusioni

[i cilindretti fanno cacare]

$$\tilde{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*[x])^2 \quad (19)$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*[x])^2} \quad (20)$$

$$m^*[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i) \simeq \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j p_j^*) \quad (21)$$

$$p_j^* = \frac{n_j^*}{N} \quad (22)$$

$$f_j^* = \frac{n_j^*}{N \Delta x} \quad (23)$$

$$D^* = \langle (x - m^*)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*[x])^2 \simeq \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 p_j^* \quad (24)$$

$$m^*[\mathcal{T}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i \quad (25)$$

$$\sigma^*[\mathcal{T}] = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*)^2} \quad (26)$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \pm \delta \mathcal{T} \quad (27)$$

$$\mathcal{T}_0 = m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i \quad (28)$$

$$\delta \mathcal{T}_{cas} = \tilde{\sigma}[m^*] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^*[\mathcal{T}] = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_i - m^*)^2} \quad (29)$$