
DEFORMAZIONE ELASTICA E STUDIO DEL MOTO DI UN OSCILLATORE ARMONICO

Francesco Pasa, Davide Bazzanella, Andrea Miani
Gruppo A11

18 marzo 2013 - 1 aprile 2013



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Sommario

Misura della costante elastica di una molla elicoidale mediante due procedure diverse: misurazione statica e dinamica. Test del chi al quadrato.

Indice

1	Introduzione	3
2	Ricerca della costante elastica della molla: metodo statico	3
2.1	Apparato sperimentale	3
2.2	Procedura di acquisizione dei dati	3
2.3	Elaborazione dei dati	4
2.3.1	Considerazioni iniziali:	4
2.3.2	Analisi di dati:	5
3	Ricerca della costante elastica della molla: metodo dinamico	7
3.1	Apparato sperimentale	7
3.2	Procedura di acquisizione dei dati	7
3.3	Primo studio qualitativo del moto oscillatorio	7

1 Introduzione

La legge sperimentale che lega una forza applicata ad una molla e la sua deformazione rispetto alla sua posizione di equilibrio fu formulata da Robert Hooke nel 1675 ed è la seguente:

$$F_{el} = -k x \quad (1)$$

In questo esperimento lo scopo principale è quello di calcolare la costante elastica di una molla conoscendo, grazie alle misure effettuate, la deformazione della molla in funzione della forza applicata ad essa. Un secondo metodo che adotteremo per calcolare questa costante elastica sarà quello di calcolarla conoscendo la relazione che lega il periodo di oscillazione della molla e $\omega (\sqrt{\frac{k}{m}})$. La relazione è la seguente:

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2)$$

Una seconda parte della relazione verterà sullo studio del moto oscillatorio e nell'esecuzione del test del chi al quadrato.

2 Ricerca della costante elastica della molla: metodo statico

2.1 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale utilizzato è costituito da:

- una base ad A sulla quale sono installati verticalmente un supporto con gancio di sospensione delle molle e asta millimetrata scorrevole. L'asta millimetrata presenta sul lato sinistro una scala millimetrata con una risoluzione di mezzo millimetro, mentre sul lato destro una scala millimetrata con una risoluzione del millimetro;
- quattro molle elicoidali con caratteristica elastica differente tra di loro: nello specifico una particolarmente morbida, una dura e due con caratteristiche medie;
- un piattello portapesi di massa $m_{\text{piattello}} = 25.2 \text{ g} \pm 0.1 \text{ g}$, quattro pesi cilindrici neri rispettivamente di massa nominale 5, 10, 25 e 50 grammi e quattro pesi argentei identici a quelli neri, con stesse masse nominali;
- una bilancia a un piattello con una risoluzione di 0.1 grammi;

2.2 Procedura di acquisizione dei dati

Ritenendo essere noto che una forza F di trazione o compressione applicata, nel nostro caso, ad una molla elicoidale provoca una deformazione del corpo abbiamo deciso di sfruttare come forza agente la forza peso F_p delle masse cilindriche a nostra disposizione. Per fare questo ricordiamo che la relazione tra una massa inerziale e la forza peso è la seguente:

$$F_p = m g \quad (3)$$

dove g rappresenta l'accelerazione di gravità che assumiamo avere un valore di: $g = 9.806 \text{ m s}^{-2}$. Innanzitutto abbiamo verificato il peso nominale delle otto masse cilindriche a nostra disposizione. Successivamente abbiamo raggruppato i vari pesi per formare tredici masse che variano da circa cinque grammi a centoventicinque grammi con intervalli di dieci verificando, gruppo

per gruppo, i pesi.

[tabella per i pesi singoli (8)]

[tabella per i pesi raggruppati (13)]

Completata la classificazione dei pesi, abbiamo scelto la molla di cui calcolare la costante elastica. A questo scopo abbiamo notato che una di esse è risultata essere troppo morbida per i carichi che saremmo andati ad applicare e quindi suscettibile di una probabile deformazione che avrebbe compromesso la buona riuscita dell'esperimento. Un'altra molla è stata scartata in quanto troppo poco elastica e quindi non ci avrebbe permesso di apprezzare una deformazione utile alla lettura per carichi troppo leggeri. Per questi motivi la scelta è ricaduta sulla molla tra le due restanti che permetteva una migliore lettura della sua deformazione in relazione ai pesi che potevamo applicare.

Al fine di calcolare l'allungamento di una delle due molle elicoidali mediante il metodo statico abbiamo posizionato il sistema molla e piattello lungo l'asta millimetrata, appendendo un'estremità della molla al gancio di supporto. Atteso che l'oscillazione della molla si smorzasse il più possibile abbiamo allineato il bordo inferiore del piattello, agganciato alla molla, con la tacca dei 50 cm dell'asta graduata, cercando di evitare eventuali errori di parallasse. In questo modo la posizione di equilibrio della molla risulta essere:

$$z_{eq} = z_0 \pm \delta z_0 = 50.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$$

Infine abbiamo misurato il differente allungamento della molla man mano che variavamo il carico applicato ad essa, attendendo sempre che le oscillazioni del sistema si smorzassero il più possibile. Così facendo abbiamo ottenuto una serie di misure delle varie posizioni di equilibrio della molla:

$$z_i = z_i \pm \delta z_i$$

dalle quali possiamo ricavare l'allungamento della stessa:

$$x_i = |z_i - z_0|$$

e quindi l'incertezza sugli allungamenti (δx_i) si ottiene applicando la regola per la propagazione delle incertezze sulla differenza di misure indipendenti:

$$\delta x_i = \sqrt{\delta z_i^2 - \delta z_0^2}$$

2.3 Elaborazione dei dati

2.3.1 Considerazioni iniziali:

Come detto precedentemente per misurare la massa dei dischetti a nostra disposizione abbiamo utilizzato una bilancia a un piattello con una risoluzione di 0.1 grammi. Abbiamo osservato che lo strumento era abbastanza sensibile da rilevare variazioni nella pressione dell'aria circostante. Lo abbiamo apurato soffiandoci sopra e notando che il valore rilevato dalla bilancia aumentava in modo considerevole. Per questo motivo per trovare le varie masse dei nostri pesi ci siamo premuniti di stare quato più lontani dalla bilancia ci fosse concesso e di evitare di cuotere il tavolo di lavoro. E' importante sottoineare che la massa dei nostri tredici pesi è data da una composizione dei dischetti a nostra disposizione, e ogni dischetto è affetto da un errore sulla sua massa, dovuto principalmente alla risoluzione dello strumento:

$$\delta m_i = \frac{\Delta m}{2} = 0.05g$$

abbiamo deciso di non usare l'incertezza tipo sull'errore di misurazione in quanto, come detto sopra, le misure potevano non risultare così fedeli in quanto soggette anche a variazioni repentine dell'ambiente esterno. Quindi per evitare di dover propagare le incertezze delle singole masse alle loro somme, abbiamo misurato in anticipo la massa di ogni composizione così che risultasse affetta soltanto dall'errore di risoluzione dello strumento. Dal momento che per calcolare la costante elastica della molla siamo costretti a passare per la relazione $F_{el} = -kx$ e poichè nel nostro caso la $F_{el} = F_p = m g$ allora dobbiamo propagare l'incertezza derivante dalla misura della massa usata anche sul calcolo della forza peso applicata alla molla ottenendo quindi una relazione di questo tipo:

$$\delta F_p = g \delta m_i$$

Per quanto riguarda gli errori relativi all'errore di misura dell'allungamento della molla rispetto alla sua posizione di equilibrio le considerazioni sono quelle esposte nel paragrafo precedente. C'è però da aggiungere che la posizione iniziale della molla è stata calcolata con il piattello portapesi già agganciato ad essa. Precisiamo che la relazione

$$\delta x_i = \sqrt{\delta z_i^2 - \delta z_0^2}$$

è valida in quanto le misure effettuate sono indipendenti le une dalle altre poichè a ogni cambio della massa applicata alla molla il piattello portapesi veniva sganciato dalla molla e caricato con la massa successiva. È importante sottolineare che abbiamo deciso di rilevare l'allungamento della molla sulla scala millimetrata con risoluzione del millimetro in quanto abbiamo ritenuto di non riuscire a sfruttare la scala con risoluzione di mezzo millimetro. Questo è dovuto principalmente al fatto che nella lettura della riga la molla non era completamente ferma ma era soggetta ad una leggera oscillazione. Questa continuo moto oscillatorio unito anche al probabile errore di parallasse commesso nella lettura dello strumento ci ha convinto a porre come incertezza sulle varie misure dell'allungamento un delta di un millimetro. Questo giustifica anche la stima fatta della posizione di equilibrio della molla z_0 che risulta anch'essa affetta da un errore di un millimetro.

2.3.2 Analisi di dati:

Nella ?? sono riportate le masse applicate alla molla con la loro relativa posizione di equilibrio. Stessa cosa vale per la ?. La ? mostra la posizione di equilibrio per alcune masse applicate ed è stata realizzata con una procedura di carico e scarico della molla. Ovvero: per le masse scelte si è deciso di caricare la molla e rilevare le varie posizioni di equilibrio, stessa cosa si è fatta nello scaricare la molla. Questa procedura è stata ripetuta due volte. Come si può intuire da una prima analisi superficiale delle tabelle risulta evidente che le misure sono compatibili tra di loro e questo quindi ci porta a dire che la molla non è stata affetta da una deformazione dovuta ad un carico eccessivo. Si può inoltre osservare che i risultati non dipendono dalla procedura con cui è stato misurato l'allungamento (carico o scarico) e che sono riproducibili entro il carico massimo della molla oltre il quale si avrebbe una deformazione permanente della stessa. Affermiamo questo perchè prendendo per esempio la massa da 55 g possiamo osservare che le varie misure sono le seguenti:

- primo allungamento $x_{all_1} = (5.7 \pm 0.1)cm$
- secondo allungamento $x_{all_2} = (5.6 \pm 0.1)cm$

- terzo allungamento $x_{all_3} = (5.6 \pm 0.1)cm$
- quarto allungamento $x_{all_4} = (5.5 \pm 0.1)cm$
- quinto allungamento $x_{all_5} = (5.6 \pm 0.1)cm$

quindi facendo una media gli ultimi quattro allungamenti, che sono stati ricavati dalla procedura di carico e scarico ricaviamo che

$$m^*[x_{all_i}] = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 (x_{all_i}) = 5.6cm$$

e l'incertezza su questo valore è il seguente:

$$\sigma^*[m^*[x_{all_i}]] = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 (x_{all_i} - m^*[x_{all_i}])^2} = 0.1cm \quad (4)$$

Quindi con questi valori possiamo valutare se la media delle misure ottenute dalla procedura di carico e scarico è compatibile con la misura ottenuta durante il primo ciclo di misurazione. Posto a priori un fattore di copertura $k = 1.5$ andiamo a verificare che il resto tra la differenza fra $m^*[x_{all_i}]$ e x_{all_1} risulti essere minore dell'errore relativo al resto moltiplicato per il fattore di copertura. Otteniamo quindi:

$$R = x_{all_1} - m^*[x_{all_i}] = 0.1 \text{ cm}$$

$$\sigma_R = k \sqrt{(\sigma[x_{all_1}])^2 + (\sigma[m^*[x_{all_i}]])^2} = 0.2 \text{ cm}$$

Da questo quindi possiamo dire che $m^*[x_{all_i}]$ e x_{all_1} risultano essere compatibili, e compatibili sono anche le misure che abbiamo ottenuto per fare la media dei cicli di scarico e carico, sempre utilizzando come fattore di copertura il k scelto in precedenza. Questo discorso e procedura si può estendere anche a tutte le misure relative alle masse differenti da 55 g e quindi possiamo concludere che le misure sono tra di loro compatibili e non ci sono state deformazioni nella molla. Un'importante osservazione che si può fare analizzando ?? e ?? e che per lo stesso carico applicato alla molla le misure dell'allungamento differiscono tra di loro per 0.1 cm. Abbiamo ipotizzato che questa differenza possa essere dovuta principalmente a due elementi:

1. dal momento che prima di effettuare i cicli di carico e scarico la molla era stata tolta dal supporto assieme al piattello portapesi, è probabile che nel riposizionare l'apparato l'allineamento del piattello portapesi, nella sua posizione di equilibrio, con la tacca dei 50 cm non sia stato perfetto ma sia risultato errato di 0.1 cm;
2. un'altra possibilità è data da eventuali errori di parallasse, che non sono da escludere, in quanto riuscire a riguardare correttamente tra il bordo inferiore e l'asta millimetrata non è un'operazione così elementare come può sembrare;

3 Ricerca della costante elastica della molla: metodo dinamico

3.1 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale utilizzato per compiere le misurazioni del periodo di oscillazione della molla elicoidale è lo stesso utilizzato durante per la procedura del metodo dinamico. La configurazione dei pesi è la stessa utilizzata precedentemente come anche la molla. Da notare che in questo caso il valore delle masse applicate alla molla è stato calcolato misurando assieme la massa del gancio e della massa applicata. Inoltre per questa procedura c'era a nostra disposizione un cronometro con risoluzione di misura pari a un centesimo di secondo ovvero: 0.01 s.

3.2 Procedura di acquisizione dei dati

Per calcolare la costante elastica mediante il metodo dinamico dobbiamo avvalerci della relazione che sussiste tra il periodo di oscillazione di una molla e il rapporto tra la massa applicata e la costante elastica della stessa il tutto sotto radice quadrata. Ovvero:

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5)$$

Come si può notare il periodo di oscillazione della molla risulta essere in una proporzionalità quadratica inversa rispetto alla massa applicata alla suddetta. Dal momento che la costante elastica della molla (K) è una costante, appunto, allora ci si dovrebbe aspettare che il periodo cresca al crescere della massa appesa, ma non con una proporzionalità diretta poichè la massa risulta essere sotto radice.

Per ottenere quindi il periodo di oscillazione della molla abbiamo agito come segue:

- abbiamo deciso di cronometrare il periodo di dieci oscillazioni della molla poichè abbiamo ritenuto di non essere in grado di rilevare con una precisione accettabile il periodo di una singola oscillazione;
- ogni componente del gruppo ha cronometrato per ogni massa cinque cicli di dieci oscillazioni, in modo che alla fine per ogni massa ci siano quindici misure indipendenti di un ciclo di dieci oscillazioni. In questo modo abbiamo ritenuto di poter ottenere una precisione maggiore sulla stima del periodo di oscillazione della molla e anche di evitare possibili errori sistematici dovuti all'azione di un unico sperimentatore.

3.3 Primo studio qualitativo del moto oscillatorio