ESPERIENZE DI LABORATORIO di FISICA 1

Trento, a.a. 2012-13

4 DEFORMAZIONE ELASTICA: misura della costante elastica

4.1 Scopi dell'esperienza:

- Uso della bilancia per la misurazione della massa.
- Misura della costante elastica di una molla mediante due procedure diverse: misurazione statica e dinamica.
- Introduzione alla propagazione dell'incertezza e alla media pesata.
- Introduzione all'uso dei grafici.
- Introduzione alla procedura di regressione lineare e al test del chi quadrato.

4.2 Materiale a disposizione:

- molle di diverse caratteristiche elastiche;
- un supporto con gancio di sospensione delle molle e asta millimetrata scorrevole;
- un piattello portapesi (del peso di 0.25 N) da appendere alle molle;
- una serie di pesi cilindrici da caricare sul piattello portapesi;
- una bilancia elettronica (risoluzione di lettura 0.1 g);
- un cronometro con risoluzione di lettura 0.01 s.

4.3 Introduzione

Una forza $\vec{F}$ di trazione o compressione provoca la deformazione di un corpo. Se il corpo non viene deformato oltre il suo limite di elasticità, la deformazione x è proporzionale alla forza applicata: $F = kx$ (nota come *legge di Hooke*). La costante k è detta la *costante elastica*, e si misura in N/m (Newton per metro). Più precisamente, per il principio di azione e reazione, alla forza $\vec{F}$ applicata al corpo corrisponde una forza $\vec{F}_e = -\vec{F}$ esercitata dalla molla, detta *forza elastica*. La relazione tra forza elastica e deformazione è $F_e = -kx$. In questa esperienza metteremo in luce il comportamento elastico di una molla elicoidale con due metodologie di misura diverse: la misura della sua deformazione all'equilibrio statico applicando una forza costante e la misura di caratteristiche dinamiche (il suo periodo di oscillazione per piccole perturbazioni dall'equilibrio) applicando una massa inerziale. Riprodurremo e analizzeremo criticamente la procedura con cui si passa dall'osservazione di un fenomeno e dalla misurazione delle grandezze fisiche rilevanti all'enunciazione di una legge fisica ($F = kx$).

4.4 Esecuzione dell'esperienza: 2 sessioni di laboratorio

4.4.1 Misurazione della forza applicata

La forza F applicata alla molla è rappresentata dal peso P dei dischetti metallici appoggiati sul piattello appeso alla molla. Variando il numero di dischetti si varia l'intensità della forza applicata. Si misurino preventivamente le masse m_i dei dischetti in dotazione, e si verifichino eventuali discrepanze rispetto ai valori nominali.
Si verifichi se le incertezze sulle misure di massa dipendono solo dalla risoluzione di lettura Δm della bilancia e non dall'influenza di errori casuali. Si valuti l'incertezza tipo: se l'incertezza è dovuta solo alla risoluzione, $\delta m_i = \Delta m/\sqrt{12}$ (Dispensa, § 4.2). Per evitare di dover propagare le incertezze dai valori di massa dei singoli dischetti alle loro somme, converrà poi misurare preventivamente la massa globale dei vari insiemi di dischetti che si appenderanno poi in successione alla molla. I valori di massa misurati avranno in questo modo tutti la medesima incertezza. Per ottimizzare l'esperimento si raccomanda di scegliere almeno una dozzina di configurazioni di pesi con valori di massa ragionevolmente equispaziati.
I pesi P_i si ottengono dalle masse m_i tramite la relazione $P_i = m_i g$, dove g è l'accelerazione di gravità. Si assuma per g il valore 9.806 m s^{-2}, e se ne trascuri l'incertezza. L'incertezza sui pesi è pertanto $\delta P_i = g\,\delta m_i$.

4.4.2 Misurazione della deformazione con metodo statico

Si scelga una delle quattro molle in dotazione (le molle hanno proprietà elastiche diverse; per rendere più facile e significativa l'esperienza converrà scegliere una molla con proprietà elastiche intermedie). Si appenda un'estremità della molla al gancio di supporto. Si appenda all'altra estremità il piattello portapesi. Una volta che le oscillazioni della molla si siano convenientemente smorzate, si legga sull'asta millimetrata la posizione $z_0 \pm \delta z$ dell'estremo inferiore della molla (per ridurre l'incertezza da parallasse può essere più conveniente considerare l'estremo inferiore del piattello porta-dischetti). Si aggiungano gradualmente i dischetti sul piattello. Per ogni nuovo dischetto aggiunto si attenda che le oscillazioni della molla siano sufficientemente smorzate e quindi si misuri la nuova posizione $z_i \pm \delta z$ sull'asta millimetrata e il corrispondente allungamento $x_i = |z_i - z_0|$. Si valuti l'incertezza tipo δz sulla misura delle posizioni z_0 e z_i. Se si ritiene che l'incertezza dipenda solo dalla risoluzione di lettura Δz della scala millimetrata, si ponga $\delta z = \Delta z/\sqrt{12}$ (Dispensa, § 4.2).
L'incertezza sugli allungamenti x_i si ottiene applicando la regola per la propagazione delle incertezze sulla differenza di misure indipendenti (Dispensa, § 4.6):

$$\delta x_i \;=\; \sqrt{(\delta z_0)^2 \;+\; (\delta z_i)^2} \;=\; \sqrt{2}\,\delta z. \tag{1}$$

Tutti i valori x_i hanno quindi la stessa incertezza.

4.4.3 Tabella e grafico

Man mano che l'esperienza procede, si riportino in una *tabella* sul quaderno di laboratorio i valori dei pesi applicati $P_i \pm \delta P_i$ e dei corrispondenti allungamenti $x_i \pm \delta x_i$ (sull'uso delle tabelle, si veda il § A.2 della Dispensa).
Contemporaneamente, o immediatamente dopo, si riportino i risultati delle misure in un *grafico*, ponendo in ascissa i pesi P_i applicati, in ordinata i corrispondenti allungamenti x_i. Si rappresentino

le incertezze δP_i e δx_i mediante barre, rispettivamente orizzontali e verticali, in corrispondenza di ogni punto (sull'uso dei grafici, si veda il § A.3 della Dispensa).
Se il grafico è stato prodotto al calcolatore, si stampi il grafico facendo uso della stampante in dotazione al Laboratorio.
Si verifichi a occhio se i punti riportati sul grafico (barre d'incertezza incluse) sono compatibili con la prevista relazione di proporzionalità diretta tra peso applicato e allungamento:

$$x \;=\; b\,P \qquad \text{ovvero} \qquad P \;=\; k\,x \qquad\qquad (b = 1/k). \tag{2}$$

4.4.4 Riproducibilità dell'esperimento

Si modifichi il carico della molla per ricontrollare le misure di deformazione z_0 e di allungamento x_i per alcuni valori di peso applicato. Si ripeta alcune volte la procedura di carico e scarico della molla, sempre misurando gli allungamenti in funzione del peso applicato. Si rappresentino graficamente tutti i risultati.
I risultati dipendono dalla procedura con cui è stato misurato l'allungamento (caricando oppure scaricando la molla)? I risultati sono riproducibili entro la risoluzione di misura? Vi è qualche evidenza di deformazione permanente della molla indotta dal carico?

4.4.5 Calcolo della costante elastica k a partire dalla tabella

Nel seguito vengono suggeriti e commentati criticamente diversi metodi per il calcolo della costante elastica k.
Per ogni valore P_i di peso applicato si calcoli il rapporto $k_i = P_i/x_i$ e lo si indichi in una terza colonna della tabella. Per ogni valore k_i si calcoli la corrispondente incertezza δk_i applicando la regola per la propagazione delle incertezze sui rapporti di misure indipendenti (si veda il punto 4.5.1 più avanti, e il § 4.6 della Dispensa):

$$\left(\frac{\delta k_i}{k_i}\right)^2 \;=\; \left(\frac{\delta P_i}{P_i}\right)^2 \;+\; \left(\frac{\delta x_i}{x_i}\right)^2 . \tag{3}$$

Si riportino le incertezze stimate δk_i in una ulteriore colonna della tabella. Si noti che le incertezze δk_i non sono tutte uguali. Si osservi anche il diverso contributo che le due incertezze relative $\delta x_i/x_i$ e $\delta P_i/P_i$ danno all'incertezza su k_i; una delle due incertezze potrebbe essere trascurata nel secondo membro dell'eq. (3)?
Ogni risultato $k_i \pm \delta k_i$ è stato quindi ottenuto con una misurazione in condizioni diverse di sollecitazione.
Per ottenere un unico valore $k_0 \pm \delta k$ che sintetizzi convenientemente l'esito di tutte le misurazioni effettuate, si possono considerare e confrontare due differenti procedure.

(a) Si calcola la *media pesata* dei valori k_i tabulati e la corrispondente incertezza (si veda il punto 4.5.2 più sotto e il § 4.4 della Dispensa) utilizzando le formule:

$$k_0 \;=\; \frac{\sum k_i w_i}{\sum w_i}, \qquad \delta k \;=\; \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}, \qquad \text{dove} \qquad w_i \;=\; \frac{1}{(\delta k_i)^2}. \tag{4}$$

La procedura di media pesata tiene conto solo delle incertezze δk_i valutate per i singoli valori e riconducibili, in questo caso, solo alla risoluzione delle misure. La procedura non è in grado di tenere conto di eventuali altre sorgenti di incertezza, ad es. errori sistematici.

(b) Si considera la *distribuzione* dei valori k_i, se ne calcola la media campionaria m_k^* e si stima lo scarto quadratico medio della distribuzione delle medie $\sigma\,[m_k^*]$. Si pone infine

$$k_0 \;=\; m_k^*, \qquad \delta k \;=\; \sigma\,[m_k^*]. \tag{5}$$

Questa seconda procedura tiene conto degli effetti di alcuni eventuali errori sistematici, ma perde memoria delle incertezze δk_i delle singole misure.

Si confrontino criticamente le due procedure. Quale procedura fornisce il valore centrale k_0 più ragionevole nel vostro caso, e perché?
Quale valore di incertezza δk converrà scegliere, e perché?

4.4.6 Calcolo della costante elastica k a partire dal grafico

La costante elastica k è inversamente proporzionale alla pendenza b della retta che rappresenta la relazione tra forza applicata e deformazione: $k = 1/b$ eq. (2). Si può pertanto pertanto pensare di ottenere k misurando la pendenza b del grafico. Poiché però i punti sperimentali sono affetti da incertezza, trovare la retta che meglio interpreta il loro andamento non è banale. Allo scopo, si considerino due procedure, che daranno comunque un intervallo di valori $b_0 \pm \delta b$ per la pendenza b.

(a) La procedura più semplice e veloce, anche se meno precisa, si basa sul *metodo grafico*. Per determinare la pendenza media b_0 e l'incertezza δb, si considerano le due rette di minima e massima pendenza passanti per l'origine e compatibili con le barre d'errore; se ne misura quindi sulla carta il coefficiente angolare usando una riga millimetrata o un goniometro.

Talora, se le barre d'incertezza sono piccole, non è possibile distinguere a occhio le rette di minima e massima pendenza. Il metodo grafico consente comunque anche in questo caso almeno una valutazione di b_0.

(b) Una procedura più precisa è costituita dalla *regressione lineare*, basata sul metodo dei *minimi quadrati* (si veda il punto 4.5.3 più sotto): la migliore stima del coefficiente angolare b è data dal valore che minimizza la discrepanza tra punti sperimentali (P_i, x_i) e retta $x = bP$. Come misura della discrepanza si considera la sommatoria estesa a tutti gli N punti del grafico

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i \,-\, bP_i)^2}{(\delta x_i)^2} \tag{6}$$

nell'ipotesi che le incertezze sull'asse delle ascisse (δP_i) siano trascurabili rispetto alle incertezze sull'asse delle ordinate (δx_i). Nel caso presente quest'ipotesi può essere considerata plausibile; inoltre le incertezze δx_i sono tutte uguali. In tal caso si può dimostrare che il valore di b che minimizza la sommatoria (6) e la relativa incertezza sono dati da

$$b_0 \;=\; \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i^2}, \qquad \delta b \;=\; \frac{\delta x}{\sqrt{\sum P_i^2}}. \tag{7}$$

L'incertezza sulla costante elastica $k = 1/b$ si ottiene applicando ancora la regola per la propagazione sul quoziente, che nel caso specifico dà

$$\frac{\delta k}{k} \;=\; \frac{\delta b}{b} \tag{8}$$

Si confrontino il valore e l'incertezza della costante elastica $k = 1/b$ ottenuti dal grafico con i valori e le incertezze ottenute dall'analisi della tabella (al punto 4.4.5). Si evidenzino le eventuali differenze e se ne discutano i possibili motivi.

4.4.7 Test del chi quadrato

La compatibilità dei valori sperimentali con la legge della diretta proporzionalità tra forza e deformazione è stata valutata esaminando qualitativamente il grafico (vedi punto 4.4.3).
Esiste anche la possibilità di una valutazione di tipo quantitativo, basata sul test detto del *chi quadrato chi* è il nome della lettera greca χ utilizzata convenzionalmente in questo test). Il test del chi quadrato si basa sul confronto, per ogni punto, della discrepanza tra valori sperimentali e curva teorica, in questo caso $(x_i - b_0 P_i)^2$, con l'incertezza dei valori sperimentali, in questo caso $(\delta x_i)^2$. Per questa esperienza, la grandezza χ^2 è definita come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - b_0 P_i)^2}{(\delta x_i)^2}.$$

Nota: La discrepanza viene calcolata sui valori in ordinata. Il test del chi quadrato presuppone che l'incertezza sulla grandezza in ascissa sia trascurabile. Inoltre, l'incertezza sulla grandezza in ordinata deve essere un'incertezza tipo, espressa mediante uno scarto quadratico medio.

Una trattazione approfondita del test del χ^2 richiede una buona conoscenza della teoria delle probabilità, e verrà affrontata più avanti (§ 7.6 della Dispensa). Per ora ci limiteremo ad un uso qualitativo del test, per imparare a comprenderne progressivamente potenzialità e limiti.
È bene comunque avere sempre presente che il test del χ^2 ha carattere meramente probabilistico: non può dare quindi risposte certe, e va utilizzato con molta attenzione. Tornando al caso della molla, se la legge di diretta proporzionalità è giusta e se le incertezze sono state valutate correttamente, ci si aspetta che la discrepanza per ogni punto sia mediamente paragonabile con l'incertezza, ovvero

$$(x_i - b_0 P_i)^2 \simeq (\delta x_i)^2 \tag{9}$$

dove b_0 è il coefficiente angolare determinato mediante regressione lineare. Considerando l'insieme degli N punti sperimentali, ci si aspetta quindi che

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - b_0 P_i)^2}{(\delta x_i)^2} \simeq N - 1. \tag{10}$$

Nel membro di destra dell'eq. (10) si è posto $N - 1$ anziché N per tener conto che un parametro della curva teorica, cioè b_0, è stato ricavato a partire dai punti sperimentali.

Nota: Un valore approssimato del χ^2 può essere facilmente ottenuto osservando con attenzione il grafico e valutando a occhio, per ogni punto, il rapporto tra discrepanza teoria-esperimento e incertezza.

In generale, una volta calcolato il χ^2 a partire dai dati sperimentali, si possono fare le seguenti considerazioni.

A) Se l'eq. (10) è soddisfatta con buona approssimazione ($\chi^2 \simeq N-1$), e se le incertezze sono state valutate correttamente, è molto probabile che la legge $P = kx$ interpreti bene i dati sperimentali.

B) Se $\chi^2 \gg N - 1$, i dati sperimentali non sono compatibili con la legge ipotizzata, oppure si sono sottostimate le incertezze δx_i (ad esempio, non si è tenuto conto degli errori casuali).

C) Se $\chi^2 \ll N - 1$, probabilmente si sono sovrastimate le incertezze δx_i.

Nel caso particolare di questa esperienza, la legge di diretta proporzionalità $P = kx$ dovrebbe essere valida se le deformazioni sono state limitate entro il *regime elastico* della molla, cioè non hanno superato il limite oltre cui la molla viene deformata permanentemente dal carico. Il test del χ^2 consente quindi di verificare se le incertezze sono state valutate correttamente.
Se si trova che $\chi^2 \gg N-1$, si verifichi per prima cosa se ciò è dovuto all'influenza di uno o due punti particolari (ad es. i primi o gli ultimi). Se i contributi al χ^2 sono distribuiti su tutti i punti, si può valutare a posteriori un'incertezza media δx, invertendo l'eq. (10):

$$(\delta x)^2 \;\simeq\; \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - b_0 P_i)^2\,. \tag{11}$$

4.4.8 Studio qualitativo del moto oscillatorio

Si appendano al supporto e si pongano in oscillazione le diverse molle a disposizione.
Si valuti qualitativamente come varia il *periodo di oscillazione* $\mathcal{T}$ in funzione della *massa* appesa m e in funzione della *costante elastica* k (misurata in una precedente esperienza): il periodo cresce o diminuisce al crescere della massa? e al crescere della costante elastica?
Il periodo sembra dipendere da altre grandezze oltre alla massa m e alla costante elastica k? In particolare, sembra dipendere dall'ampiezza dell'oscillazione?

4.4.9 Analisi dimensionale applicata al moto oscillatorio

È possibile ottenere informazioni più dettagliate sulla relazione tra periodo, massa e costante elastica a partire da considerazioni di tipo dimensionale (Dispensa, § 2.5). Si supponga che il periodo $\mathcal{T}$ possa dipendere dalla massa m, dalla costante elastica k e anche dall'ampiezza A dell'oscillazione secondo una relazione del tipo $\mathcal{T} \;\propto\; m^\alpha k^\beta A^\gamma$. Tenendo conto delle dimensioni di T, m, k, A si verifichi che l'equazione dimensionale corrispondente è

$$[T]^1 \;=\; [M]^{\alpha+\beta}\,[L]^\gamma\,[T]^{-2\beta}$$

soddisfatta per

$$\gamma = 0; \quad \beta = -1/2; \quad \alpha = -\beta = 1/2$$

per cui

$$\mathcal{T} = C\sqrt{m/k}, \tag{12}$$

dove C è una costante il cui valore non può essere determinato dal calcolo dimensionale.

4.4.10 Studio quantitativo della relazione tra massa e periodo

Si riprenda la molla utilizzata per le misure statiche (punto 4.4.2); si appendano alla molla masse diverse e si misurino i corrispondenti periodi di oscillazione. Si valutino le incertezze tipo sulle misure di massa e di periodo secondo le modalità che si ritengono più opportune (in entrambi i casi si confronti la risoluzione di misura con l'eventuale influenza degli errori casuali). Si riportino i risultati delle misure in un grafico, ponendo in ascissa i valori della massa m, in ordinata i valori del periodo $\mathcal{T}$; non si dimentichino le barre d'incertezza per i singoli punti!

Se l'eq. (12) è corretta, i punti sul grafico non dovrebbero essere compatibili con un andamento lineare.
Un andamento lineare può essere ottenuto riportando in ordinata i valori $\mathcal{T}^2$ anziché $\mathcal{T}$. L'incertezza dei valori $\mathcal{T}^2$ può essere calcolata usando le regole di propagazione (Dispensa, § 4.6): $\delta(\mathcal{T}^2) = 2\,\mathcal{T}\,\delta\mathcal{T}$. Si verifichi se il grafico di $\mathcal{T}^2$ in funzione di m è compatibile con l'eq. (12).

4.4.11 Massa efficace della molla

Si osservi che una molla può oscillare anche se non è collegata ad alcuna massa; la molla infatti possiede una sua inerzia intrinseca. Questo effetto è generalmente evidente nel grafico di $\mathcal{T}^2$ in funzione di m: la retta che meglio interpreta i punti sperimentali *non* passa per l'origine, ma interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza di un valore negativo $-m_e$.
Possiamo interpretare il valore m_e come una *massa efficace* della molla. La massa efficace misura l'inerzia della molla. L'eq. (12) va pertanto modificata sostituendo m con $M = m + m_e$, per cui:

$$\mathcal{T}^2 \;=\; \frac{C^2}{k}\,M \;=\; \frac{C^2}{k}\,m_e \;+\; \frac{C^2}{k}\,m. \tag{13}$$

4.4.12 Calcolo dei parametri C e m_e mediante regressione lineare

L'eq. (13) è del tipo

$$y \;=\; A \;+\; B\,x, \tag{14}$$

con $x \equiv m$, $y \equiv \mathcal{T}^2$, $A \equiv C^2 m_e/k$, $B \equiv C^2/k$.
Si determinino i valori di A e B nell'eq. (14) utilizzando la tecnica della regressione lineare: la migliore stima dei parametri A e B è data dai valori che minimizzano la discrepanza tra punti sperimentali $(x_i, y_i) \equiv (m_i, \mathcal{T}_i^2)$ e retta $y = A + Bx$. Come misura della discrepanza si considera la sommatoria estesa a tutti i punti del grafico

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i \,-\, A - Bx_i)^2}{(\delta y_i)^2}, \tag{15}$$

nell'ipotesi che le incertezze sull'asse delle ascisse ($\delta x_i \equiv \delta m_i$) siano trascurabili rispetto alle incertezze sull'asse delle ordinate ($\delta y_i \equiv \delta\mathcal{T}_i^2$). (Se questa ipotesi non è verificata, si può seguire la procedura suggerita nella Nota in calce a questo punto 4.4.12).

Si può dimostrare (Dispensa, § 4.7) che i valori di A e B che minimizzano la sommatoria (15) sono dati da

$$A = \frac{\left(\sum_i w_i x_i^2\right)\left(\left(\sum_i w_i y_i\right) - \left(\sum_i w_i x_i\right)\left(\sum_i w_i x_i y_i\right)\right.}{\Delta} \tag{16}$$

$$B = \frac{\left(\sum_i w_i\right)\left(\sum_i w_i x_i y_i\right) - \left(\sum_i w_i y_i\right)\left(\sum_i w_i x_i\right)}{\Delta} \tag{17}$$

dove il denominatore Δ è

$$\Delta \;=\; (\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i^2) - (\sum_i w_i x_i)^2 \tag{18}$$

ed *pesi* w_i sono legati alle incertezze dalla relazione

$$w_i \;=\; \frac{1}{(\delta y_i)^2}. \tag{19}$$

Le incertezze sui parametri A e B si possono calcolare mediante le relazioni

$$(\delta A)^2 \;=\; \frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta}; \qquad (\delta B)^2 \;=\; \frac{\sum_i w_i}{\Delta}, \tag{20}$$

basate sulle regole di propagazione.
Una volta noti i valori $A \pm \delta A$ e $B \pm \delta B$, si risalga ai valori C e m_e dell'eq. (13) e alle rispettive incertezze usando il valore di k misurato staticamente in una precedente esperienza.

Nota: Se le incertezze δx_i non sono trascurabili rispetto alle incertezze δy_i, è possibile "trasferire" l'incertezza da x a y (Dispensa, § 4.7). Allo scopo, è necessario prima valutare approssimativamente la pendenza B della retta: si può usare semplicemente il metodo grafico, oppure applicare il metodo dei minimi quadrati avendo posto w_i=1 nelle eq. (5-6-7). L'incertezza δx_i può essere allora trasformata in un'incertezza δy_i mediante propagazione:

$$(\delta y_i)_{\mathrm{tr}} \;=\; |B|\,\delta x_i .$$

L'incertezza totale su y si ottiene infine sommando quadraticamente il contributo sperimentale δy_i al contributo "trasferito" $(\delta y_i)_{\mathrm{tr}}$.

4.4.13 Test del chi quadrato

Si valuti la compatibilità delle eq. (13) e (14) con i dati sperimentali mediante il test del chi quadrato. Valgono ancora le considerazioni fatte al punto 4.4.7, che si consiglia di rileggere.
Poiché i 2 parametri A e B sono stati determinati, nelle eq. (16) e (17), a partire dai dati sperimentali, il problema ha in questo caso $N-2$ *gradi di libertà*, e quindi ci si aspetta che

$$\chi^2 \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{(\delta y_i)^2} \;\simeq\; N-2. \tag{21}$$

Se l'eq. (21) è soddisfatta con buona approssimazione ($\chi^2 \simeq N-2$), e se le incertezze sono state valutate correttamente, i dati sperimentali possono essere considerati compatibili con la legge $y = A + Bx$.
Se $\chi^2 \gg N-2$, i dati sperimentali non sono compatibili con la legge ipotizzata, oppure si sono sottostimate le incertezze δy_i. In questo secondo caso si può valutare a posteriori un'incertezza media $(\delta y)^2$ invertendo opportunamente l'eq. (21).
Se $\chi^2 \ll N-2$, probabilmente si sono sovrastimate le incertezze δy_i.

Nota: Si ricordi che il test del chi quadrato presuppone che l'incertezza sulla grandezza in ascissa sia trascurabile, e che l'incertezza sulla grandezza in ordinata sia espressa mediante uno scarto tipo.

4.4.14 Determinazione dinamica della costante elastica k

La procedura di regressione lineare ha consentito di determinare i 2 parametri $A = C^2 m_e/k$ e $B = C^2/k$. Al punto 4.4.12 abbiamo utilizzato il valore di k misurato alla precedente esperienza per ricavare C e m_e.
Dalla teoria dell'oscillatore armonico si trova che $C = 2\pi$, per cui il periodo di oscillazione per una molla perfettamente elastica è

$$\mathcal{T} \;=\; 2\pi\,\sqrt{M/k} \tag{22}$$

dove $M = m + m_e$.
Imponendo $C = 2\pi$, è possibile calcolare k e m_e a partire dai parametri A e B della regressione lineare. Si può così ottenere una misura *dinamica* della costante elastica k basata sulle misure di massa e periodo.
Si confronti il valore k ottenuto dinamicamente in questa procedura con il valore ottenuto staticamente nella procedura precedente. I due valori sono compatibili? (Si tenga conto anche delle incertezze con cui i due valori sono stati misurati).

4.4.15 Relazione sui risultati

Sintetizzare in una relazione l'esperienza svolta.

4.5 Discussione e approfondimenti

4.5.1 Propagazione dell'incertezza

Nella pratica sperimentale succede spesso che una grandezza Q sia misurata *indirettamente*, sfruttando relazioni analitiche che la legano ad altre grandezze $X, Y, \ldots$ misurate direttamente. Ad esempio: $Q = X + Y$, $Q = X/Y$, etc. Si pone il problema di valutare l'incertezza δQ a partire dalle incertezze δX, δY, ..., cioè di *propagare l'incertezza*. Il problema è piuttosto complesso, ed è affrontato nella Dispensa al § 4.6 e nel Cap. 7. Riportiamo qui le regole più importanti, applicabili quando le incertezze delle grandezze misurate direttamente sono tra loro indipendenti.

a) Caso generale: $Q = f(X, Y, Z, \ldots)$:

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Z}\right)_0^2 (\delta Z)^2 + \ldots \tag{23}$$

Nota: Il simbolo $\partial Q/\partial X$ rappresenta la *derivata parziale* di Q rispetto a X. Data una funzione di più variabili $Q = f(X, Y, Z, \ldots)$, la derivata parziale prima di Q rispetto ad una qualsiasi variabile, ad es. X, si calcola come una normale derivata, considerando le altre variabili come parametri costanti. Nell'eq. (23) l'indice 0 significa che i valori delle derivate vanno calcolati per $X = X_0$ e $Y = Y_0$.

L'eq. (23) mostra che l'incertezza δQ si ottiene sommando quadraticamente le incertezze (indipendenti) δX, δY, ... Il contributo di ogni singola incertezzaè pesato dalla corrispondente derivata parziale. Il simbolo $\simeq$ indica che l'eq. (23) è in genere approssimata. A partire dall'eq. (23) si possono ricavare le regole per alcuni casi particolarmente semplici.

b) Nel caso di *addizioni*, $Q = X + Y$, e *sottrazioni*, $Q = X - Y$, si sommano quadraticamente le incertezze assolute, e la relazione è esatta:

$$(\delta Q)^2 = (\delta X)^2 + (\delta Y)^2 . \tag{24}$$

b) Nel caso di *moltiplicazioni*, $Q = XY$, e *divisioni*, $Q = X/Y$, si sommano quadraticamente le incertezze relative, e la relazione è approssimata:

$$\left(\frac{\delta Q}{Q_0}\right)^2 \simeq \left(\frac{\delta X}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{Y_0}\right)^2 . \tag{25}$$

4.5.2 Medie semplici e medie pesate

Dati due valori numerici x_a e x_b, la *media semplice* è data da:

$$\bar{x} \;=\; \frac{x_a + x_b}{2}. \tag{26}$$

Nel calcolo della media semplice (26) entrambi i valori contribuiscono nello stesso modo. Se si vuole che i due valori contribuiscano in modo diverso, cioè che abbiano diversi *pesi*, rispettivamente w_a e w_b, si ricorre alla procedura di *media pesata*:

$$\bar{x}_w \;=\; \frac{x_a w_a + x_b w_b}{w_a + w_b}. \tag{27}$$

Se $w_a = w_b$, l'eq. (27) si riduce alla (26).
Se i valori x_a e x_b sono risultati di misura affetti da incertezze differenti δx_a e δx_b, è ragionevole che la misura con incertezza minore dia un contributo maggiore alla media. Si ricorre pertanto alla media pesata (27); in base a considerazioni di natura probabilistica (Dispensa, Cap. 7) i pesi vengono presi inversamente proporzionali ai quadrati delle incertezze:

$$w_a \;=\; 1/\left(\delta x_a\right)^2 ; \qquad\qquad w_b \;=\; 1/\left(\delta x_b\right)^2 . \tag{28}$$

La media pesata di due misure, essendo calcolata a partire da valori affetti da incertezza, è anch'essa affetta da incertezza. Utilizzando le regole per la propagazione dell'incertezza (Dispensa, § 4.6) si può dimostrare che l'incertezza sulla media pesata è legata all'incertezza delle misure di partenza dalla relazione

$$\delta \bar{x}_w \;=\; \frac{1}{\sqrt{w_a + w_b}}. \tag{29}$$

Le eq. (27) e (29) possono essere facilmente generalizzate al caso della somma di più di due valori. L'eq. (4) ne è un esempio.

4.5.3 Regressione lineare (caso della diretta proporzionalità)

Supponiamo di avere N coppie di valori $(x_i,\, y_i)$, e che i valori x_i abbiano incertezza trascurabile rispetto all'incertezza δy_i dei valori y_i. Supponiamo anche di sapere che tra Y e X esiste una relazione di diretta proporzionalità: $Y = BX$. Vogliamo determinare il valore del parametro B (pendenza) della retta che meglio si adatta alle N coppie$(x_i,\, y_i)$.
La procedura che si utilizza in genere si chiama *regressione lineare* e consiste nel trovare il valore di B che rende minima la sommatoria

$$\chi^2 \;=\; \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{(y_i - Bx_i)^2}{(\delta y_i)^2} \;=\; \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} w_i\,(y_i - Bx_i)^2. \tag{30}$$

Nell'ultimo membro si è posto

$$w_i = 1/\left(\delta y_i\right)^2$$

per semplificare la notazione. Ogni termine della sommatoria (30) contiene il quadrato della distanza tra un punto e la retta teorica, diviso per il quadrato dell'incertezza del punto stesso. In questo modo i punti con incertezza minore contribuiscono maggiormente alla determinazione di B.
La procedura si basa quindi sul metodo detto dei *minimi quadrati*, la cui giustificazione teorica può essere trovata al Cap. 7 della Dispensa.

La sommatoria (30) contiene una sola variabile, il parametro B della retta. Il valore di B che minimizza la sommatoria corrisponde al valore che rende nulla la derivata prima $d\chi^2/dB$:

$$B \;=\; \frac{\sum_i\, w_i x_i y_i}{\sum_i\, w_i x_i^2}. \tag{31}$$

(È immediato verificare che la derivata seconda è sempre positiva).
Il parametro B, ottenuto a partire da misure affette da incertezza, è anch'esso affetto da incertezza δB. L'incertezza δB si calcola applicando le regole per la propagazione dell'incertezza all'eq. (31):

$$(\delta B)^2 \;=\; \frac{1}{\sum_i\, w_i x_i^2}. \tag{32}$$

4.5.4 Effetto del peso sulle oscillazioni

Per un corpo soggetto alla sola forza elastica di richiamo della molla ($F_e = -kx$) l'equazione differenziale del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} \;=\; -\,\frac{k}{m}\,x; \tag{33}$$

le oscillazioni avvengono intorno alla posizione di equilibrio $x = 0$, che coincide con la posizione a riposo dell'estremo libero della molla.
Nel nostro caso la molla è disposta verticalmente e sul corpo agisce, oltre alla forza elastica della molla, anche la forza peso, per cui l'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} \;=\; -\,\frac{k}{m}\,x \;+\; g, \tag{34}$$

evidentemente diversa dall'eq. (33).
La forza elastica e la forza peso si equilibrano se $mg - kx = 0$, cioè quando $x = mg/k$. Consideriamo la nuova coordinata $y = x - mg/k$, e sostituiamola nell'eq.(34); otteniamo

$$\frac{d^2y}{dt^2} \;=\; -\,\frac{k}{m}\,y, \tag{35}$$

cioè un'equazione del moto identica all'eq. (33): le oscillazioni avvengono intorno alla posizione di equilibrio $y = 0$, cioè $x = mg/k$, che in questo caso non coincide con la posizione a riposo dell'estremo libero della molla.

4.5.5 Massa efficace della molla

Vogliamo trovare una relazione tra la massa efficace m_e e la massa reale μ di una molla.
Consideriamo una molla di massa μ, lunghezza a riposo L e costante elastica k. Facciamo oscillare la molla mantenendone fisso un estremo, e calcoliamo la sua l'energia cinetica in funzione della massa reale μ e della velocità v dell'estremo libero.
A questo scopo, consideriamo prima un generico elemento della molla, a distanza ℓ dall'estremo fisso. La massa dell'elemento è $\mu\, d\ell/L$. Facciamo l'ipotesi che la sua velocità sia proporzionale alla distanza dall'estremo fisso, $v\ell/L$. Integrando su tutta la lunghezza della molla si ottiene allora

$$E_k \;=\; \frac{\mu v^2}{2L^3}\,\int_0^L \ell^2\, d\ell \;=\; \frac{1}{6}\mu v^2. \tag{36}$$

D'altra parte, per definizione stessa di massa efficace,

$$E_k \; = \; \frac{1}{2}\, m_e \, v^2. \tag{37}$$

Confrontando le equazioni (36) e (37) si ottiene $m_e = \mu/3$. Questo risultato è valido nella misura in cui la velocità di un generico elemento della molla è effettivamente proporzionale alla distanza dall'estremo fisso.