

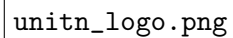
---

# DEFORMAZIONE ELASTICA E STUDIO DEL MOTO DI UN OSCILLATORE ARMONICO

---

Francesco Pasa, Davide Bazzanella, Andrea Miani  
Gruppo A11

18 marzo 2013 - 1 aprile 2013



unitn\_logo.png

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

## Sommario

Misura della costante elastica di una molla elicoidale mediante due procedure diverse: misurazione statica e dinamica. Test del chi al quadrato.

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ricerca della costante elastica della molla: metodo statico</b>	<b>3</b>
2.1	Apparato sperimentale . . . . .	3
2.2	Procedura di acquisizione dei dati . . . . .	3
2.3	Elaborazione dei dati . . . . .	4
2.3.1	Considerazioni iniziali: . . . . .	4
2.3.2	Analisi di dati: . . . . .	5
2.3.3	Calcolo della costante elastica K a partire dalla tabella . . . . .	6
2.3.4	Calcolo della costante elastica K a partire dal grafico . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Ricerca della costante elastica della molla: metodo dinamico</b>	<b>9</b>
3.1	Apparato sperimentale . . . . .	9
3.2	Procedura di acquisizione dei dati . . . . .	9
3.3	Primo studio qualitativo del moto oscillatorio . . . . .	9

# 1 Introduzione

La legge sperimentale che lega una forza applicata ad una molla e la sua deformazione rispetto alla sua posizione di equilibrio fu formulata da Robert Hooke nel 1675 ed è la seguente:

$$F_{el} = -k x \quad (1)$$

In questo esperimento lo scopo principale è quello di calcolare la costante elastica di una molla conoscendo, grazie alle misure effettuate, la deformazione della molla in funzione della forza applicata ad essa. Un secondo metodo che adotteremo per calcolare questa costante elastica sarà quello di calcolarla conoscendo la relazione che lega il periodo di oscillazione della molla e  $\omega (\sqrt{\frac{k}{m}})$ . La relazione è la seguente:

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2)$$

Una seconda parte della relazione verterà sullo studio del moto oscillatorio e nell'esecuzione del test del chi al quadrato.

## 2 Ricerca della costante elastica della molla: metodo statico

### 2.1 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale utilizzato è costituito da:

- una base ad A sulla quale sono installati verticalmente un supporto con gancio di sospensione delle molle e asta millimetrata scorrevole. L'asta millimetrata presenta sul lato sinistro una scala millimetrata con una risoluzione di mezzo millimetro, mentre sul lato destro una scala millimetrata con una risoluzione del millimetro;
- quattro molle elicoidali con caratteristica elastica differente tra di loro: nello specifico una particolarmente morbida, una dura e due con caratteristiche medie;
- un piattello portapesi di massa  $m_{piattello} = 25.2 \text{ g} \pm 0.1 \text{ g}$ , quattro pesi cilindrici neri rispettivamente di massa nominale 5, 10, 25 e 50 grammi e quattro pesi argentei identici a quelli neri, con stesse masse nominali;
- una bilancia a un piattello con una risoluzione di 0.1 grammi;

### 2.2 Procedura di acquisizione dei dati

Ritenendo essere noto che una forza  $F$  di trazione o compressione applicata, nel nostro caso, ad una molla elicoidale provoca una deformazione del corpo abbiamo deciso di sfruttare come forza agente la forza peso  $F_p$  delle masse cilindriche a nostra disposizione. Per fare questo ricordiamo che la relazione tra una massa inerziale e la forza peso è la seguente:

$$F_p = mg \quad (3)$$

dove  $g$  rappresenta l'accelerazione di gravità che assumiamo avere un valore di:  $g = 9.806 \text{ m s}^{-2}$ . Innanzitutto abbiamo verificato che la massa degli otto cilindri a nostra disposizione fosse uguale a quella nominale riportata sugli stessi, scoprendo così delle discrepanze dell'ordine di qualche decimo di grammo. Per evitare di dover propagare gli errori sono state scelte tredici combinazioni di cilindri e si è misurata la massa complessiva di ogni combinazione.

Masse delle combinazioni di cilindri [g]

Nominali	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
Pesate	5.0	15.1	24.9	35.0	45.2	55.1	65.2	75.0	85.1	95.2	105.0	115.2	125.3

Tabella 1: Masse usate per misurare l'allungamento della molla. Le masse erano composte da combinazioni di cilindri da 5, 10, 25 e 50 grammi. Nella seconda riga sono riportati i pesi rilevati con la bilancia, che in alcuni casi differiscono da quelli nominali, riportate nella prima riga.

Abbiamo annotato quali cilindri facevano parte di ogni combinazione, in modo da poter ricomporre le combinazioni in un secondo momento. Le combinazioni sono riportate nella tabella 1.

Completata la classificazione dei pesi, abbiamo scelto la molla di cui calcolare la costante elastica. A questo scopo abbiamo notato che una di esse è risultata essere troppo morbida per i carichi che saremmo andati ad applicare e quindi l'abbiamo scartata in quanto suscettibile di deformazione plastica che avrebbe compromesso la buona riuscita dell'esperimento. Un'altra molla è stata scartata in quanto troppo rigida e perciò le sue deformazioni non sarebbero state apprezzabili con carichi leggeri. Per questi motivi la scelta è ricaduta sulla molla tra le due restanti che permetteva una migliore lettura della deformazione in relazione ai pesi.

Al fine di calcolare l'allungamento di una delle due molle elicoidali mediante il metodo statico abbiamo posizionato il sistema molla e piattello lungo l'asta millimetrata, appendendo un'estremità della molla al gancio di supporto. Atteso che l'oscillazione della molla si smorzasse il più possibile abbiamo allineato il bordo inferiore del piattello, agganciato alla molla, con la tacca dei 50 cm dell'asta graduata, cercando di evitare eventuali errori di parallasse. In questo modo la posizione di equilibrio della molla risulta essere:

$$z_{eq} = z_0 \pm \delta z_0 = 50.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$$

Infine abbiamo misurato il differente allungamento della molla man mano che variavamo il carico applicato ad essa, attendendo sempre che le oscillazioni del sistema si smorzassero il più possibile. Così facendo abbiamo ottenuto una serie di misure delle varie posizioni di equilibrio della molla:

$$z_i = z_i \pm \delta z_i$$

dalle quali possiamo ricavare l'allungamento della stessa:

$$x_i = |z_i - z_0|$$

e quindi l'incertezza sugli allungamenti ( $\delta x_i$ ) si ottiene applicando la regola per la propagazione delle incertezze sulla differenza di misure indipendenti:

$$\delta x_i = \sqrt{\delta z_i^2 - \delta z_0^2}$$

## 2.3 Elaborazione dei dati

### 2.3.1 Considerazioni iniziali:

Come detto precedentemente per misurare la massa dei dischetti a nostra disposizione abbiamo utilizzato una bilancia a un piattello con una risoluzione di 0.1 grammi. Abbiamo osservato che lo strumento era abbastanza sensibile da rilevare variazioni nella pressione dell'aria circostante. Lo abbiamo apurato soffiandoci sopra e notando che il valore rilevato dalla bilancia aumentava

in modo considerevole. Per questo motivo per trovare le varie masse dei nostri pesi ci siamo assicurati di stare quato più lontani dalla bilancia ci fosse concesso e di evitare di scuotere il tavolo di lavoro. E' importante sottolineare che la massa dei nostri tredici pesi è data da una composizione dei dischetti a nostra disposizione, e ogni dischetto è affetto da un errore sulla sua massa, dovuto principalmente alla risoluzione dello strumento:

$$\delta m_i = \frac{\Delta m}{2} = 0.05g$$

abbiamo deciso di non usare l'incertezza tipo sull'errore di misurazione in quanto, come detto sopra, le misure potevano non risultare così fedeli in quanto soggette anche a variazioni repentine dell'ambiente esterno. Quindi per evitare di dover propagare le incertezze delle singole masse alle loro somme, abbiamo misurato in anticipo la massa di ogni composizione così che risultasse affetta soltanto dall'errore di risoluzione dello strumento. Dal momento che per calcolare la costante elastica della molla siamo costretti a passare per la relazione  $F_{el} = -kx$  e poichè nel nostro caso la  $F_{el} = F_p = mg$  allora dobbiamo propagare l'incertezza derivante dalla misura della massa usata anche sul calcolo della forza peso applicata alla molla ottenendo quindi una relazione di questo tipo:

$$\delta F_p = g \delta m_i$$

Per quanto riguarda gli errori relativi all'errore di misura dell'allungamento della molla rispetto alla sua posizione di equilibrio le considerazioni sono quelle esposte nel paragrafo precedente. C'è però da aggiungere che la posizione iniziale della molla è stata calcolata con il piattello portapesi già agganciato ad essa.

E' importante sottolineare che abbiamo deciso di rilevare l'allungamento della molla sulla scala millimetrata con risoluzione del millimetro in quanto abbiamo ritenuto di non riuscire a sfruttare la scala con risoluzione di mezzo millimetro. Questo è dovuto principalmente al fatto che nella lettura della riga la molla non era completamente ferma ma era soggetta ad una leggera oscillazione. Questa continuo moto oscillatorio unito anche al probabile errore di parallasse commesso nella lettura dello strumento ci ha convinto a porre come incertezza sulle varie misure dell'allungamento un delta di un millimetro. Questo giustifica anche la stima fatta della posizione di equilibrio della molla  $z_0$  che risulta anch'essa affetta da un errore di un millimetro.

### 2.3.2 Analisi di dati:

Nella ?? sono riportate le masse applicate alla molla con la loro relativa posizione di equilibrio. Stessa cosa vale per la ?. La ? mostra la posizione di equilibrio per alcune masse applicate ed è stata realizzata con una procedura di carico e scarico della molla. Ovvero: per le masse scelte si è deciso di caricare la molla e rilevare le varie posizioni di equilibrio, stessa cosa si è fatta nello scaricare la molla. Questa procedura è stata ripetuta due volte. Come si può intuire da una prima analisi superficiale delle tabelle risulta evidente che le misure sono compatibili tra di loro e questo quindi ci porta a dire che la molla non è stata affetta da una deformazione dovuta ad un carico eccessivo. Si può inoltre osservare che i risultati non dipendono dalla procedura con cui è stato misurato l'allungamento (carico o scarico) e che sono riproducibili entro il carico massimo della molla oltre il quale si avrebbe una deformazione permanente della stessa. Affermiamo questo perchè prendendo per esempio la massa da 55 g possiamo osservare che le varie misure sono le seguenti:

- primo allungamento  $x_{all_1} = (5.7 \pm 0.1)cm$
- secondo allungamento  $x_{all_2} = (5.6 \pm 0.1)cm$

- terzo allungamento  $x_{all_3} = (5.6 \pm 0.1)cm$
- quarto allungamento  $x_{all_4} = (5.5 \pm 0.1)cm$
- quinto allungamento  $x_{all_5} = (5.6 \pm 0.1)cm$

quindi facendo una media gli ultimi quattro allungamenti, che sono stati ricavati dalla procedura di carico e scarico ricaviamo che

$$m^*[x_{all_i}] = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 (x_{all_i}) = 5.6cm$$

e l'incertezza su questo valore è la seguente:

$$\sigma^*[m^*[x_{all_i}]] = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 (x_{all_i} - m^*[x_{all_i}])^2} = 0.1cm \quad (4)$$

Quindi con questi valori possiamo valutare se la media delle misure ottenute dalla procedura di carico e scarico è compatibile con la misura ottenuta durante il primo ciclo di misurazione. Posto a priori un fattore di copertura  $k = 1.5$  andiamo a verificare che il resto tra la differenza fra  $m^*[x_{all_i}]$  e  $x_{all_1}$  risulti essere minore dell'errore relativo al resto moltiplicato per il fattore di copertura. Otteniamo quindi:

$$R = x_{all_1} - m^*[x_{all_i}] = 0.1 \text{ cm}$$

$$\sigma_R = k \sqrt{(\sigma[x_{all_1}])^2 + (\sigma[m^*[x_{all_i}]]^2)} = 0.2 \text{ cm}$$

Da questo quindi possiamo dire che  $m^*[x_{all_i}]$  e  $x_{all_1}$  risultano essere compatibili, e compatibili sono anche le misure che abbiamo ottenuto per fare la media dei cicli di scarico e carico, sempre utilizzando come fattore di copertura il  $k$  scelto in precedenza. Questo discorso e procedura si può estendere anche a tutte le misure relative alle masse differenti da 55 g e quindi possiamo concludere che le misure sono tra di loro compatibili e non ci sono state deformazioni nella molla. Un'importante osservazione che si può fare analizzando ?? e ?? è che per lo stesso carico applicato alla molla le misure dell'allungamento differiscono tra di loro per 0.1 cm. Abbiamo ipotizzato che questa differenza possa essere dovuta principalmente a due elementi:

1. dal momento che prima di effettuare i cicli di carico e scarico la molla era stata tolta dal supporto assieme al piattello portapesi, è probabile che nel riposizionare l'apparato l'allineamento del piattello portapesi, nella sua posizione di equilibrio, con la tacca dei 50 cm non sia stato perfetto ma sia risultato errato di 0.1 cm;
2. un'altra possibilità è data da eventuali errori di parallasse, che non sono da escludere, in quanto riuscire a tracciare correttamente tra il bordo inferiore e l'asta millimetrata non è un'operazione così elementare come può sembrare;

### 2.3.3 Calcolo della costante elastica $K$ a partire dalla tabella

Per calcolare la costante elastica della molla abbiamo deciso di procedere in questo modo:

Abbiamo calcolato la  $F_{p_i}$  delle masse applicate alla molla, come riportato nella quinta colonna della tabella, e anche il rapporto  $k_i = \frac{F_{p_i}}{x_i}$ . Abbiamo anche stimato l'incertezza  $\delta_{k_i}$

riguardante la costante elastica relativa ai vari pesi mediante la regola per la propagazione delle incertezze sui rapporti di misure indipendenti:

$$\left(\frac{\delta k_i}{k_i}\right)^2 = \left(\frac{\delta F_{p_i}}{F_{p_i}}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_i}{x_i}\right)^2$$

Queste incertezze sono riportate sulla sesta colonna della tabella e come si può osservare queste non risultano essere tutte uguali. In particolar modo abbiamo che il contributo dell'incertezza relativa al peso sull'incertezza complessiva è trascurabile.

Ottenuti quindi tutti questi valori differenti di  $k$  per riunirli in un unico valore che riassume l'esito complessivo di queste misurazioni abbiamo deciso di adottare due procedure differenti e verificare quelle ci avrebbe dato il risultato più reciso e perchè.

Il primo metodo che prendiamo in considerazione è quello di calcolare la media pesata dei valori  $k_i$  e per farlo ci serviremo delle seguenti formule:

$$k_0 = \frac{\sum(k_i w_i)}{\sum(w_i)}, \quad \delta k_0 = \frac{1}{\sqrt{\sum(w_i)}}, \quad \text{dove } w_i = \frac{1}{(\delta k_i)^2} \quad (5)$$

in particolare  $k_0$  appresenta il risultato della media pesata delle varie costanti elastiche ( $k_i$ ) ottenute,  $\delta k_0$  simboleggia l'errore relativo a  $k_0$  e  $w_i$  è il peso relativo alla misura  $k_i$ , ovvero quanto quella misura contribuisce nella media complessiva. E' importante sottolineare che la procedura non è in grado di tenere conto di eventuali altre sorgenti di incertezza come ad esempio l'errore sistematico.

Quindi con i dati a nostra disposizione abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

- $k_0 = (9.64 \pm 0.0143) \text{ N/m}$
- $\delta k_0 = 0.0143 \text{ N/m}$

Il secondo metodo che adottiamo per il calcolo della costante elastica della molla eliocidale è quello di considerare la distribuzine dei valori  $K_i$ , ovvero se ne deve calcolare la media campionaria  $m_k^*$  e stimarne lo scarto quadratico medio. In questo modo otteniamo:

$$k_0 = m_k^* = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (k_i) = 9.58 \text{ N/m}$$

$$\delta k_0 = \sigma_{k_0} = \sqrt{\frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (k_i - m_k^*)^2} = 0.156 \text{ N/m}$$

Quindi mettendo a confronto queste due procedure e aiutandoci con i dati riportati in tabella possiamo osservare che la media pesata sembrerebbe essere la procedura che meglio approssima il risultato dell'esperimento. Affermiamo questo perchè dalla tabella si può osservare che le prime quattro misurazioni fatte risultano avere un'incertezza sulla costante elastica dieci volte superiore alle altre misure effettuate, e quindi ci sembra doveroso che nel calcolo di  $k_0$  si tenga in considerazione della differente accuratezza delle misure dando più importanza a quelle con un'incertezza inferiore rispetto alle altre.

Una spiegazione al perchè in queste prime quattro misure l'incertezza risulti essere maggiore rispetto alle altre si può trovare nel fatto che i carichi appesi alla molla non fossero sufficientemente importanti, e quindi la molla non [ha lavorato correttamente.]. Nonostante questo però non possiamo dire che la legge di Hooke non sia valida nel regime di carichi relativamente bassi: infatti per quanto si può osservare dai dati raccolti l'allungamento della molla ha avuto un andamento lineare sin dall'inizio delle misurazioni.

### 2.3.4 Calcolo della costante elastica K a partire dal grafico

Ricordando le seguenti relazioni:

$$x = bF_p \text{ ovvero } F_p = kx \text{ pertanto } b = \frac{1}{k} \quad (6)$$

possiamo procedere al calcolo della costante elastica  $k$  a partire direttamente dal grafico. Per farlo però è necessario stare attenti al fatto che i punti sperimentali sono affetti da incertezza, pertanto per trovare la retta che meglio approssima il loro andamento i possono seguire due procedure distinte:

#### Prima procedura: Metodo della retta minima e massima

Come suggerisce il titolo si tratta di una procedura molto semplice e molto veloce, ma anche abbastanza imprecisa in quanto consiste nel misurare la pendenza della retta massima e della retta minima direttamente dal grafico e successivamente calcolarne la media per ottenere il valore medio  $k_0$ . Per ottenere l'incertezza su  $k_0$  basta fare la differenza tra i due valori massimo e minimo e dividere per due.

Nel caso in cui le barre d'errore risultassero troppo piccole da rendere impossibile distinguere le due rette [come nel nostro caso] allora il calcolo di  $k_0$  risulterebbe immediato in quanto sarebbe la pendenza della retta.

Pertanto seguendo questa procedura otteniamo:

[Vediamo cosa otteniamo]

#### Seconda procedura: Regressione lineare

Questa procedura risulta essere più precisa della precedente e si basa sul metodo dei minimi quadrati.

La stima migliore del coefficiente angolare  $b$  è data dal valore che rende minima la discrepanza tra i punti sperimentali  $F_{p_i}$  e  $x_i$  e la retta  $x = bF_p$ .

Procediamo operativamente in questo modo:

- procediamo con la misura della discrepanza:

$$discrepanza = \sum_{i=1}^{13} \frac{(x_i - bF_{p_i})^2}{(\delta x_i)^2} =$$

ricordando che consideriamo le incertezze  $\delta F_{p_i}$  trascurabili rispetto alle incertezze  $\delta x_i$ .  
[non sono sicuro su quale sia trascurabile] Notiamo inoltre che le incertezze su  $x_i$  hanno tutte lo stesso valore

- a



### 3 Ricerca della costante elastica della molla: metodo dinamico

#### 3.1 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale utilizzato per compiere le misurazioni del periodo di oscillazione della molla elicoidale è lo stesso utilizzato durante per la procedura del metodo dinamico. La configurazione dei pesi è la stessa utilizzata precedentemente come anche la molla. Da notare che in questo caso il valore delle masse applicate alla molla è stato calcolato misurando assieme la massa del gancio e della massa applicata. Inoltre per questa procedura c'era a nostra disposizione un cronometro con risoluzione di misura pari a un centesimo di secondo ovvero: 0.01 s.

#### 3.2 Procedura di acquisizione dei dati

Per calcolare la costante elastica mediante il metodo dinamico dobbiamo avvalerci della relazione che sussiste tra il periodo di oscillazione di una molla e il rapporto tra la massa applicata e la costante elastica della stessa il tutto sotto radice quadrata. Ovvero:

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (7)$$

Come si può notare il periodo di oscillazione della molla risulta essere in una proporzionalità quadratica inversa rispetto alla massa applicata alla suddetta. Dal momento che la costante elastica della molla ( $K$ ) è una costante, appunto, allora ci si dovrebbe aspettare che il periodo cresca al crescere della massa appesa, ma non con una proporzionalità diretta poichè la massa risulta essere sotto radice.

Per ottenere quindi il periodo di oscillazione della molla abbiamo agito come segue:

- abbiamo deciso di cronometrare il periodo di dieci oscillazioni della molla poichè abbiamo ritenuto di non essere in grado di rilevare con una precisione accettabile il periodo di una singola oscillazione;
- ogni componente del gruppo ha cronometrato per ogni massa cinque cicli di dieci oscillazioni, in modo che alla fine per ogni massa ci siano quindici misure indipendenti di un ciclo di dieci oscillazioni. In questo modo abbiamo ritenuto di poter ottenere una precisione maggiore sulla stima del periodo di oscillazione della molla e anche di evitare possibili errori sistematici dovuti all'azione di un unico sperimentatore.

#### 3.3 Primo studio qualitativo del moto oscillatorio