
DEFORMAZIONE ELASTICA E STUDIO DEL MOTO DI UN OSCILLATORE ARMONICO

Francesco Pasa, Davide Bazzanella, Andrea Miani
Gruppo A11

18 marzo 2013 - 1 aprile 2013



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Sommario

Misura della costante elastica di una molla elicoidale mediante due procedure diverse: misurazione statica, tramite misura degli allungamenti con diversi carichi, e dinamica, tramite misura del periodo di oscillazione.

Indice

1	Introduzione	3
2	Ricerca della costante elastica della molla: metodo statico	3
2.1	Apparato sperimentale	3
2.2	Procedura di acquisizione dei dati	3
2.3	Elaborazione dei dati	5
2.3.1	Considerazioni iniziali	5
2.3.2	Analisi di dati:	5
2.3.3	Calcolo della costante elastica K a partire dalla tabella	7
2.3.4	Calcolo della costante elastica K a partire dal grafico	8
2.4	Test del chi quadro	9
3	Ricerca della costante elastica della molla: metodo dinamico	12
3.1	Apparato sperimentale	12
3.2	Procedura di acquisizione dei dati	12
3.3	Studio qualitativo del moto oscillatorio	13
3.4	Studio quantitativo del moto oscillatorio	13
3.5	Massa efficace della molla	13
3.6	Calcolo dei parametri \mathcal{C} e m_e mediante il metodo della regressione lineare	14
3.7	Test del chi quadro	15

1 Introduzione

La legge sperimentale che lega una forza applicata ad una molla e la sua deformazione rispetto alla sua posizione di equilibrio fu formulata da Robert Hooke nel 1675 ed è la seguente:

$$F_{el} = -k x \quad (1)$$

In questo esperimento lo scopo principale è quello di calcolare la costante elastica di una molla conoscendo, grazie alle misure effettuate, la deformazione della molla in funzione della forza applicata ad essa. [Inoltre abbiamo verificato la correttezza della legge di Hooke e quindi la linearità della risposta della molla ai carichi applicati, entro l'intervallo che va da 5 grammi a 125 grammi]

Un secondo metodo che adotteremo per calcolare questa costante elastica sarà quello di calcolarla conoscendo la relazione che lega il periodo di oscillazione della molla e ω ($\sqrt{\frac{k}{m}}$). La relazione è la seguente:

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2)$$

Una seconda parte della relazione verterà sullo studio del moto oscillatorio e nell'esecuzione del test del chi al quadrato per entrambe le procedure.

2 Ricerca della costante elastica della molla: metodo statico

2.1 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale utilizzato è costituito da:

- una base ad A che sostiene un'asta verticale dotata di gancio di sospensione per le molle e asta millimetrata scorrevole. L'asta millimetrata ha sul lato sinistro una scala con una risoluzione di mezzo millimetro, mentre sul lato destro una scala con una risoluzione di un millimetro.
- quattro molle elicoidali con costanti elastiche differenti tra di loro: nello specifico una particolarmente "morbida", una "dura" e due con caratteristiche intermedie.
- un piattello portapesi di massa $m_{piattello} = 25.2 \text{ g} \pm 0.1 \text{ g}$, quattro pesi cilindrici neri rispettivamente di massa nominale 5, 10, 25 e 50 grammi e quattro pesi argentei analoghi a quelli neri, con le stesse masse nominali.
- una bilancia a un piattello con una risoluzione di 0.1 grammi. (???)

2.2 Procedura di acquisizione dei dati

Ritenendo essere noto che una forza F di trazione o compressione applicata, nel nostro caso, ad una molla elicoidale provoca una deformazione del corpo abbiamo deciso di sfruttare come forza agente la forza peso F_p delle masse cilindriche a nostra disposizione. Per fare questo ricordiamo che la relazione tra una massa inerziale e la forza peso è la seguente:

$$F_p = mg \quad (3)$$

dove g rappresenta l'accelerazione di gravità che assumiamo avere un valore $g = 9.806 \text{ m s}^{-2}$.

Masse delle combinazioni di cilindri [g]

Nominali	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
Pesate	5.0	15.1	24.9	35.0	45.2	55.1	65.2	75.0	85.1	95.2	105.0	115.2	125.3

Tabella 1: Masse usate per misurare l'allungamento della molla. Le masse erano composte da combinazioni di cilindri da 5, 10, 25 e 50 grammi. Nella seconda riga sono riportati i pesi (con incertezza di 0.1 grammi) rilevati con la bilancia, che in alcuni casi differiscono da quelli nominali, riportate nella prima riga.

Innanzitutto abbiamo deciso di applicare alla molla 13 masse da 5 g a 125 g, suddividendo l'intervallo in modo equispaziato. Sono quindi state selezionate tredici combinazioni di cilindri aventi le masse scelte. Abbiamo annotato quali cilindri facevano parte di ogni combinazione, in modo da poter ricomporre gli accoppiamenti in un secondo momento. Le masse delle combinazioni sono riportate nella tabella 1.

Completata la classificazione dei pesi, abbiamo scelto la molla di cui calcolare la costante elastica. Abbiamo notato che una di esse era molto “morbida” per i carichi che saremmo andati ad applicare e si deformava visibilmente anche con carichi piccoli, rendendo impossibili le misure di deformazione dei carichi più grandi per questioni di spazio. La abbiamo quindi scartata, anche perché sarebbe stata suscettibile di deformazione plastica che avrebbe compromesso la buona riuscita dell'esperimento. Un'altra molla è stata scartata in quanto troppo rigida: le sue deformazioni infatti non sarebbero state apprezzabili con carichi leggeri. Per questi motivi la scelta è ricaduta sulla molla tra le due restanti che permetteva una migliore lettura della deformazione in relazione ai pesi.

Per effettuare le misure, abbiamo agganciato il sistema molla-piattello al gancio di sospensione dell'asta verticale, lungo l'asta millimetrata. Atteso che l'oscillazione della molla si smorzasse, il bordo inferiore del piattello agganciato alla molla, è stato allineato con la tacca dei 50 cm dell'asta graduata. In questo modo la posizione di equilibrio della molla risulta essere:

$$z_{eq} = z_0 \pm \delta z_0 = 50.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$$

Infine abbiamo misurato l'allungamento della molla al variare delle combinazioni di cilindretti scelte. Ad ogni variazione del carico si è aspettato che le oscillazioni del sistema si smorzassero prima di effettuare la lettura dell'asta graduata. La lettura è stata effettuata sul lato dell'asta con risoluzione di un millimetro, poiché non siamo riusciti ad apprezzare i mezzi millimetri a causa delle oscillazioni della molla, che per quanto piccole erano sempre presenti. Così facendo abbiamo ottenuto una serie di misure delle diverse posizioni di equilibrio della molla:

$$z_i = z_i \pm \delta z_i$$

dalle quali possiamo ricavare l'allungamento della stessa:

$$x_i = |z_i - z_0|$$

e quindi l'incertezza sugli allungamenti (δx_i) si ottiene applicando la regola per la propagazione delle incertezze sulla differenza di misure indipendenti:

$$\delta x_i = \sqrt{\delta z_i^2 - \delta z_0^2}$$

2.3 Elaborazione dei dati

2.3.1 Considerazioni iniziali

Come detto precedentemente, per misurare la massa dei dischetti a nostra disposizione abbiamo utilizzato una bilancia elettronica con una risoluzione di 0.1 grammi. Abbiamo osservato che lo strumento era abbastanza sensibile da rilevare variazioni nella pressione dell'aria circostante. Lo abbiamo appurato soffiandoci sopra e notando che il valore rilevato dalla bilancia aumentava in modo considerevole. Per questo motivo per trovare le varie masse dei nostri pesi ci siamo assicurati di stare quato più lontani dalla bilancia ci fosse concesso e di evitare di scuotere il tavolo di lavoro. E' importante sottolineare che la massa dei nostri tredici pesi è data da una composizione dei dischetti a nostra disposizione e ogni dischetto è affetto da un errore sulla sua massa, dovuto principalmente alla risoluzione dello strumento:

$$\delta m_i = \frac{\Delta m}{2} = 0.05g$$

abbiamo deciso di non usare l'incertezza tipo sull'errore di misurazione in quanto, come detto sopra, le misure potevano non risultare così fedeli poichè soggette anche a variazioni repentine dell'ambiente esterno.

Inoltre per evitare di dover propagare le incertezze delle singole masse alle loro somme, abbiamo misurato in anticipo la massa di ogni composizione cosicché risultasse affetta soltanto dall'errore di risoluzione dello strumento. Dal momento che, per calcolare la costante elastica della molla, siamo costretti a passare per la relazione $F_{el} = -kx$ e poichè nel nostro caso la $F_{el} = F_p = mg$ allora dobbiamo propagare l'incertezza derivante dalla misura della massa usata anche sul calcolo della forza peso applicata alla molla ottenendo quindi una relazione di questo tipo:

$$\delta F_p = g \delta m_i$$

Per quanto riguarda gli errori di misura dell'allungamento della molla rispetto alla sua posizione di equilibrio le considerazioni sono quelle esposte nel paragrafo precedente. Bisogna però aggiungere che la posizione iniziale della molla è stata calcolata con il piattello portapesi già agganciato ad essa.

E' importante sottolineare che abbiamo deciso di rilevare l'allungamento della molla sulla scala millimetrata con risoluzione del millimetro in quanto abbiamo ritenuto di non riuscire a sfruttare la scala con risoluzione di mezzo millimetro. Questo è dovuto principalmente al fatto che nella lettura della riga la molla non era completamente ferma ma era soggetta ad una leggera oscillazione. Questo continuo moto oscillatorio unito anche al probabile errore di parallasse commesso nella lettura dello strumento ci ha convinto a porre come incertezza sulle varie misure dell'allungamento un delta di un millimetro. Questo giustifica anche la stima fatta della posizione di equilibrio della molla z_0 che risulta anch'essa affetta da un errore di un millimetro.

2.3.2 Analisi di dati:

Nella ?? sono riportate le masse applicate alla molla con la loro relativa posizione di equilibrio. Stessa cosa vale per la ?. La ? mostra la posizione di equilibrio per alcune masse applicate ed è stata realizzata con una procedura di carico e scarico della molla. Ovvero: per le masse scelte si è deciso di caricare la molla e rilevare le varie posizioni di equilibrio, stessa cosa si è fatta nello scariare la molla. Questa procedura è stata ripetuta due volte. Come si può intuire da una prima analisi superficiale delle tabelle risulta evidente che le misure sono compatibili tra di loro e questo quindi ci porta a dire che la molla non è stata affetta da una deformazione dovuta ad un

carico eccessivo. Si può inoltre osservare che i risultati non dipendono dalla procedura con cui è stato misurato l'allungamento (carico o scarico) e che sono riproducibili entro il carico massimo della molla oltre il quale si avrebbe una deformazione permanente della stessa. Affermiamo questo perchè prendendo per esempio la massa da 55 g possiamo osservare che le varie misure sono le seguenti:

- primo allungamento $x_{all_1} = (5.7 \pm 0.1)cm$
- secondo allungamento $x_{all_2} = (5.6 \pm 0.1)cm$
- terzo allungamento $x_{all_3} = (5.6 \pm 0.1)cm$
- quarto allungamento $x_{all_4} = (5.5 \pm 0.1)cm$
- quinto allungamento $x_{all_5} = (5.6 \pm 0.1)cm$

quindi facendo una media gli ultimi quattro allungamenti, che sono stati ricavati dalla procedura di carico e scarico ricaviamo che

$$m^*[x_{all_i}] = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 (x_{all_i}) = 5.6 \text{ cm}$$

e l'incertezza su questo valore è la seguente:

$$\sigma^*[m^*[x_{all_i}]] = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 (x_{all_i} - m^*[x_{all_i}])^2} = 0.1 \text{ cm}$$

Con questi valori possiamo pertanto valutare se la media delle misure ottenute dalla procedura di carico e scarico è compatibile con la misura ottenuta durante il primo ciclo di misurazione. Posto a priori un fattore di copertura $k = 1.5$ andiamo a verificare che il resto tra la differenza fra $m^*[x_{all_i}]$ e x_{all_1} risulti essere minore dell'errore relativo al resto moltiplicato per il fattore di copertura. Otteniamo quindi:

$$R = x_{all_1} - m^*[x_{all_i}] = 0.1 \text{ cm}$$

$$\sigma_R = k \sqrt{(\sigma[x_{all_1}])^2 + (\sigma[m^*[x_{all_i}]]^2)} = 0.2 \text{ cm}$$

Da questo quindi possiamo dire che $m^*[x_{all_i}]$ e x_{all_1} risultano essere compatibili, e compatibili sono anche le misure che abbiamo ottenuto per fare la media dei cicli di scarico e carico, sempre utilizzando come fattore di copertura il k scelto in precedenza. Poiché tale procedura si può estendere anche a tutte le altre misure relative alle masse ottenendo le stesse conclusioni, possiamo desumere che le misure sono tra di loro compatibili e non ci sono state deformazioni della molla. Un'importante osservazione che si può fare analizzando ?? e ?? è che per lo stesso carico applicato alla molla le misure dell'allungamento differiscono tra di loro per 0.1 cm. Abbiamo ipotizzato che questa differenza possa essere dovuta principalmente a due elementi:

1. dal momento che prima di effettuare i cicli di carico e scarico la molla era stata tolta dal supporto assieme al piattello portapesi, è probabile che nel riposizionare l'apparato l'allineamento del piattello portapesi, nella sua posizione di equilibrio, con la tacca dei 50 cm non sia stato perfetto ma sia risultato errato di 0.1 cm;
2. un'altra possibilità è data da eventuali errori di parallasse, che non sono da escludere, in quanto riuscire a riguardare correttamente tra il bordo inferiore e l'asta millimetrata non è un'operazione così elementare come può sembrare;

2.3.3 Calcolo della costante elastica K a partire dalla tabella

Per calcolare la costante elastica della molla abbiamo deciso di procedere in questo modo:

Abbiamo calcolato la F_{p_i} delle masse applicate alla molla, come riportato nella quinta colonna della tabella, e anche il rapporto $k_i = \frac{F_{p_i}}{x_i}$. Abbiamo anche stimato l'incertezza δ_{k_i} riguardante la costante elastica relativa ai vari pesi mediante la regola per la propagazione delle incertezze sui rapporti di misure indipendenti:

$$\left(\frac{\delta k_i}{k_i}\right)^2 = \left(\frac{\delta F_{p_i}}{F_{p_i}}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_i}{x_i}\right)^2$$

Queste incertezze sono riportate sulla sesta colonna della tabella [(!) che tabella?] e come si può osservare queste non risultano essere tutte uguali. In particolar modo abbiamo che il contributo dell'incertezza relativa al peso [ma è corretto?] sull'incertezza complessiva è trascurabile.

Ottenuti quindi tutti questi valori differenti di k per riunirli in un unico valore che riassume l'esito complessivo di queste misurazioni abbiamo deciso di adottare due procedure differenti e verificare quelle ci avrebbe dato il risultato più preciso e perchè.

Primo metodo

Il primo metodo che prendiamo in considerazione è quello di calcolare la media pesata dei valori k_i e per farlo ci serviremo delle seguenti formule:

$$k_0 = \frac{\sum(k_i w_i)}{\sum(w_i)}, \quad \delta k_0 = \frac{1}{\sqrt{\sum(w_i)}}, \quad \text{dove } w_i = \frac{1}{(\delta k_i)^2}$$

in particolare k_0 rappresenta il risultato della media pesata delle varie costanti elastiche (k_i) ottenute, δk_0 simboleggia l'errore relativo a k_0 e w_i è il peso relativo alla misura k_i , ovvero quanto quella misura contribuisce nella media complessiva. E' importante sottolineare che la procedura non è in grado di tenere conto di eventuali altre sorgenti di incertezza come ad esempio l'errore sistematico.

Quindi con i dati a nostra disposizione abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

- $k_0 = N/m$
- $\delta k_0 = N/m$

che portano alla misura della costante elastica:

$$k = \pm N/m \quad (4)$$

Secondo metodo

Il secondo metodo che adottiamo per il calcolo della costante elastica della molla elicoidale è quello di considerare la distribuzione dei valori K_i , ovvero se ne deve calcolare la media campionaria m_k^* e stimarne l'errore casuale. In questo modo otteniamo:

$$k_0 = m_k^* = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (k_i) = N/m$$
$$\sigma_{k_0} = \sqrt{\frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (k_i - m_k^*)^2} = N/m$$

poichè sappiamo che ottenendo la misura

$$k = \pm N/m \quad (5)$$

Quindi mettendo a confronto queste due procedure e aiutandoci con i dati riportati in tabella possiamo osservare che la media pesata sembrerebbe essere la procedura che meglio approssima il risultato dell'esperimento. Affermiamo questo perchè dalla tabella si può osservare che le prime quattro misurazioni fatte risultano avere un'incertezza sulla costante elastica dieci volte superiore alle altre misure effettuate, e quindi ci sembra doveroso che nel calcolo di k_0 si tenga in considerazione della differente accuratezza (o precisione?) delle misure dando più importanza a quelle con un'incertezza inferiore rispetto alle altre.

Una spiegazione al perchè in queste prime quattro misure l'incertezza risulti essere maggiore rispetto alle altre si può trovare nel fatto che i carichi appesi alla molla non fossero sufficientemente importanti, e quindi la molla non [ha lavorato correttamente.]. Nonostante questo però non possiamo dire che la legge di Hooke non sia valida nel regime di carichi relativamente bassi: infatti per quanto si può osservare dai dati raccolti l'allungamento della molla ha avuto un andamento lineare sin dall'inizio delle misurazioni.

2.3.4 Calcolo della costante elastica K a partire dal grafico

Ricordando le seguenti relazioni:

$$x = bF_p \text{ ovvero } F_p = kx \text{ pertanto } b = \frac{1}{k} \quad (6)$$

possiamo procedere al calcolo della costante elastica k a partire direttamente dal grafico. Per farlo però è necessario stare attenti al fatto che i punti sul grafico sono ricavati sperimentalmente e di conseguenza sono affetti da incertezza, pertanto, per trovare la retta che meglio approssima il loro andamento, si possono seguire due procedure distinte:

Prima procedura: Metodo della retta minima e massima

Come suggerisce il titolo si tratta di una procedura molto semplice e molto veloce, ma anche abbastanza imprecisa in quanto consiste nel misurare la pendenza della retta massima e della retta minima direttamente dal grafico e successivamente calcolarne la media per ottenere il valore medio k_0 . Per ottenere l'incertezza su k_0 basta fare la differenza tra i due valori massimo e minimo e dividere per due.

Nel caso in cui le barre d'errore risultassero troppo piccole da rendere impossibile distinguere le due rette - come nel nostro caso - allora il calcolo di k_0 risulterebbe immediato in quanto sarebbe la pendenza della retta.

Seguendo questa prima procedura otteniamo:

[Vediamo cosa otteniamo] WTF ????

Seconda procedura: Regressione lineare

Questa procedura risulta essere più precisa della precedente e si basa sul metodo dei minimi quadrati.

La stima migliore del coefficiente angolare b è data dal valore che rende minima la discrepanza tra i dati sperimentali F_{p_i} e x_i e la retta $x = bF_p$.

Procediamo operativamente in questo modo:

- misura della discrepanza:

$$discrepanza = \sum_{i=1}^{13} \frac{(x_i - bF_{p_i})^2}{(\delta x_i)^2} =$$

ricordando che consideriamo le incertezze δF_{p_i} trascurabili rispetto alle incertezze δx_i . [non sono sicuro su quale sia trascurabile] Notiamo inoltre che le incertezze di x_i hanno tutte lo stesso valore.

- quindi otteniamo le seguenti relazioni:

$$b_0 = \frac{\sum F_{p_i} x_i}{\sum F_{p_i}^2} = 0.104(00) m/N \quad e \quad \delta b = \frac{\delta x_i}{\sqrt{\sum F_{p_i}^2}} = 0.00015(4) m/N$$

e quindi sfruttando la regola della propagazione dell'incertezze sul quoziente abbiamo

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta b}{b}$$

in modo da ottenere:

$$k = 9.640 \pm 0.015 N/m < - - \text{come hai fatto a ottenerlo?}$$

Possiamo notare che la costante elastica così ottenuta è uguale a quella ottenuta con la media pesata. Questo è dovuto al fatto che le due procedure sono equivalenti.

2.4 Test del chi quadro

Fino a questo punto noi abbiamo valutato la compatibilità dei valori sperimentali con la legge di Hooke esaminando qualitativamente il grafico. Possiamo però valutare la compatibilità dei dati anche con un metodo quantitativo che si basa sul test del chi quadro. Questo test confronta punto per punto la discrepanza tra i valori sperimentali e la retta teorica (!) $((x_i - b - 0F_{p_i}))$ questo è da sistemare! e ci si dovrebbe aspettare che questa, per ogni (punt =?) dato sperimentale, sia mediamente paragonabile con l'incertezza (δx_i). Ricordiamo che la discrepanza viene calcolata sui valori dell'ordinata, inoltre questa verifica presuppone che l'errore sui valori in ascissa sia trascurabile. (!) da riformulare (!) Pertanto in base alla nostra analisi noi abbiamo che l'icertezza sul peso risulta essere trascurabile rispetto a quella sull'allungamento, come richiesto dal test, e grazie a (4) sull'ordinata del nostro grafico sono riportati i valori dell'allungamento della molla. (!) da riformulare (!)

Procediamo quindi col test del chi quadro:

- calcoliamo il chi quadro (osservato):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{13} \frac{(x_i - b_0 F_{p_i})^2}{(\delta x_i^2)} = 28.9$$

dove b_0 rappresenta il coefficiente angolare determinato mediante la regressione lineare

- se il test va a buon fine ci si aspetterebbe che:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{13} \frac{(x_i - b_0 F_{p_i})^2}{(\delta x_i^2)} \simeq N - 1 = 12$$

dove N rappresenta l'insieme di tutti i punti sperimentali. Abbiamo N-1 in quanto dobbiamo tener conto che un parametro della curva (retta) teorica, ovvero b_0 , che è stato ricavato a partire da punti sperimentali

Nel nostro caso il chi quadro non è compatibile con il valore N-1, anzi risulta essere più del doppio. Per questo motivo abbiamo come prima cosa verificato che questo non fosse dovuto all'influenza di particolari punti ad esempio il primo o l'ultimo. A tal fine abbiamo controllato che:

$$\frac{(x_i - b_0 F_{p_i})^2}{(\delta x_i)^2} \text{ non fosse } \gg 1$$

[dal momento che non si è verificata questa eventualità siamo sicuri che tutti i nostri dati sono stati presi con sufficiente accuratezza...] Per questo motivo le soluzioni possibili sono due: la prima è che i dati sperimentali non sono compatibili con la legge di Hooke, caso che ci sentiamo di escludere in quanto è stato provato ripetutamente che la legge in questione è valida. Perciò non rimane che ammettere di aver sottostimato le incertezze della grandezza x_i che rappresenta l'allungamento.

Quindi abbiamo deciso di procedere ad aggiustare l'incertezza relativa a x_i . Abbiamo operato nel seguente modo:

- Abbiamo deciso di ricalcolare a posteriori le incertezze, così facendo cerchiamo di avvicinarci al chi quadro osservato (χ_{oss}^2) al chi quadro teorico (χ_{teo}^2) il più possibile
- Abbiamo deciso di considerare uguali tra di loro tutte le varianze in modo da poter procedere con la seguente operazione:

$$\chi_{oss}^2 = \sum_{i=1}^{13} \frac{(x_i - b_0 F_{p_i})^2}{(\delta x_i^2)} = \chi_{teo}^2$$

e così facendo troviamo un coefficiente che moltiplicato per il precedente δx_i ci restituisce una nuova varianza grazie alla quale i due chi risulteranno uguali. Infatti abbiamo ottenuto:

$$\chi_{oss}^2 = \frac{1}{\delta x_i^2} \sum_{i=1}^{13} (x_i - b_0 F_{p_i})^2 = \chi_{teo}^2$$

poiché sappiamo che:

$$\chi_{teo}^2 = \nu \quad \text{con} \quad \nu = N - 1 \quad \text{e} \quad \delta x_{iposteriori}^2 = \frac{\chi_{oss}^2}{\nu} \delta x_{ipriori}^2 = 0.000633 \, m^2$$

con ν che rappresenta i gradi di libertà. Quindi si ottiene che:

$$\delta x_{iposteriori} = 0.00155 \, m = 1.5 \, mm$$

Quindi grazie a tutto questo abbiamo ottenuto che il χ_{oss}^2 combacia con χ_{teo}^2 soltanto dopo aver modificato l'incertezza relativa alle misure dell'allungamento della molla aumentandola di mezzo millimetro cioè portandola dal doppio dell'incertezza massima di misura pari ad 1 millimetro ad un'incertezza di 1 millimetro e mezzo. Crediamo che questa variazione sia più che accettabile in quanto, pur avendo già cercato di arginare gli errori di tipo A e B di misura, raddoppiando l'incertezza massima di misura sembra non sia stato sufficiente. Infatti come accennato all'inizio dell'analisi dei dati quando si cercava di leggere lo strumento la misura poteva non risultare così precisa a causa delle continue oscillazioni della molla, che è a tutti gli effetti un oscillatore armonico, e un probabile errore di parallasse [potremmo provare a stimarlo?].

Dal momento che abbiamo variato l'errore sulla misura dell'allungamento otteniamo come nuovo valore della costante elastica della molla il seguente risultato:

$$k_0 = 9.64 \pm 0.0222 \text{ N/m}$$

dove ovviamente l'unico cambiamento riguarda l'incertezza sulla misura che risulta essere maggiore di quella calcolata in precedenza per ovvi motivi.

3 Ricerca della costante elastica della molla: metodo dinamico

3.1 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale e la strumentazione utilizzata per compiere questo secondo esperimento, è la stessa utilizzata per la procedura del metodo statico, eccezion fatta per il cronometro. Il cronometro da noi utilizzato è un normale cronometro con risoluzione di misura di 0.01 s.

3.2 Procedura di acquisizione dei dati

Per calcolare la costante elastica mediante il metodo dinamico ci siamo avvalsi della relazione che sussiste tra il periodo e la massa appesa della stessa, ovvero

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (7)$$

dove \mathcal{T} indica il periodo e m la massa appesa alla molla.

[Come si può notare dalla formula (7) il periodo di oscillazione della molla è proporzionale alla radice di m . Se la costante elastica k della molla è una costante e la legge è corretta, allora ci si dovrebbe aspettare che il periodo cresca al crescere della massa appesa, ma non con una proporzionalità diretta poichè la massa risulta essere sotto radice.]

Per le misurazioni sono state usate le stesse masse e le stesse combinazioni di cilindri scelte nell'esperimento precedente, con una sola differenza: è stata aggiunta una nuova configurazione di pesi di massa complessiva 135 g. Il numero totale delle configurazioni è quindi salito a 14. Nella formula (7), m indica la massa complessiva che viene agganciata alla molla, quindi in questo caso si è dovuto tener conto della massa del piattello portapesi. Per evitare di dover propagare gli errori, abbiamo quindi misurato nuovamente la massa delle combinazioni con l'aggiunta del piattello. Le masse nominali e pesate sono riportate nella tabella 2.

Abbiamo quindi appeso le masse scelte alla molla e la abbiamo fatta oscillare. Per ottenere il periodo di oscillazione abbiamo agito come segue:

- Si è deciso di cronometrare dieci oscillazioni della molla poichè abbiamo ritenuto di non essere in grado di rilevare con una precisione accettabile il periodo di una singola oscillazione. Questo metodo ha inoltre il pregio di un fattore dieci la risoluzione dello strumento.
- Per ogni massa sono state rilevate 15 misure di periodo. Ogni componente del gruppo ha cronometrato cinque cicli di dieci oscillazioni. In questo modo gli errori sistematici dovuti alla prontezza di riflessi degli operatori dovrebbero essere misurabili o quantomeno visibili.

I valori di lettura del cronometro sono stati divisi per dieci per ottenere i valori reali di periodo dell'oscillatore. I dati rilevati sono riportati nella tabella 3.

Masse delle combinazioni di cilindri [g]

Nominali	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
Pesate	30.3	40.3	50.2	60.3	70.4	80.3	90.5	100.3	110.4	120.4	130.4	140.4	150.5	160.5

Tabella 2: La tabella riporta le masse nominali e le masse rilevate con la bilancia delle combinazioni di pesi scelte per l'esperimento. Le masse includono il piattello portapesi e i cilindri delle combinazioni.

Periodi

Massa [g]	Periodi di oscillazione della molla [s]														
30.3	3.84	3.90	3.95	3.95	3.99	3.91	3.91	3.93	3.90	3.94	4.04	3.92	4.00	3.98	3.95
40.3	4.38	4.43	4.43	4.45	4.41	4.54	4.45	4.49	4.50	4.56	4.49	4.52	4.47	4.49	4.41
50.2	4.84	4.76	4.85	4.92	4.87	4.93	4.88	4.78	4.83	4.82	4.95	5.02	4.93	4.99	4.78
60.3	5.29	5.33	5.27	5.24	5.30	5.27	5.30	5.21	5.25	5.27	5.30	5.34	5.34	5.31	5.34
70.4	5.65	5.65	5.64	5.63	5.59	5.63	5.64	5.63	5.66	5.63	5.81	5.67	5.63	5.63	5.65
80.3	5.98	5.98	5.95	5.98	5.95	6.01	6.08	6.02	5.98	5.95	5.98	5.99	6.06	6.09	6.07
90.5	6.33	6.34	6.32	6.34	6.32	6.33	6.26	6.31	6.31	6.31	6.34	6.35	6.37	6.34	6.34
100.3	6.58	6.63	6.56	6.59	6.56	6.63	6.69	6.64	6.58	6.63	6.63	6.68	6.63	6.57	6.69
110.4	6.86	6.96	6.93	6.94	6.84	6.91	6.86	6.99	6.96	6.94	6.99	6.84	6.94	6.95	6.88
120.4	7.24	7.20	7.22	7.23	7.20	7.18	7.23	7.13	7.24	7.23	7.24	7.21	7.27	7.26	7.24
130.4	7.53	7.51	7.45	7.52	7.56	7.53	7.52	7.57	7.52	7.52	7.56	7.55	7.53	7.46	7.50
140.4	7.81	7.78	7.76	7.74	7.74	7.73	7.79	7.82	7.81	7.74	7.79	7.79	7.73	7.78	7.79
150.5	8.02	7.94	8.04	8.06	8.07	8.12	8.02	8.05	7.98	8.04	7.99	7.93	8.02	7.99	8.02
160.5	8.30	8.27	8.15	8.29	8.25	8.24	8.35	8.31	8.41	8.27	8.36	8.34	8.34	8.31	8.31

Tabella 3: Periodi di oscillazione misurati con masse diverse. Ogni riga riporta le 15 misure effettuate per la massa riportata nella prima colonna della riga stessa. Sono riportati i valori di lettura del cronometro, relativi a 10 periodi.

3.3 Studio qualitativo del moto oscillatorio

Come ci si aspetta dall'equivalenza (5) provando a mettere in oscillazione le quattro molle elicoi-dali a nostra disposizione soggette allo stesso carico il periodo di un'oscillazione è abbastanza differente tra l'una e l'altra. Infatti il periodo di oscillazione delle quattro molle, per piccole ampiezze, è differente perchè la loro costante elastica è diversa e questo risulta particolarmente evedente confrontando il periodo di oscillazione tra la molla più dura e quella più morbida. Lo steso discoso vale se alla stessa molla erano applicate masse differenti. Al contrario se il nostro apparato sperimentle non si potesse semplificare al modello di pendolo semplice per piccole oscillazioni allora si dovrebbe tenere conto anche dell'ampiezza delle oscillazioni e quindi risul-terebbe che: $\mathcal{T} \propto m^\alpha k^\beta A^\gamma$. Facendo una semplice analisi dimensionale si otterrebbe il seguente risultato:

$$\mathcal{T} = \mathcal{C} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

dove \mathcal{C} rappresenta una costante differente da 2π che non si può determinare mediante una semplice analisi dimensionale, ma che sicuramente terrà conto anche dell'ampiezza.

3.4 Studio quantitativo del moto oscillatorio

[principalmente servono grafici e tabelle. la parte di commento è molto ridotta]

3.5 Massa efficace della molla

Grazie ai grafici del paragrafo precedente possiamo notare che la retta che meglio interpreta i punti sperimentali nel grafico che rappresenta \mathcal{T}^2 in funzione della massa non passa per l'origine, ma interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza di un valore negativo che definiamo come $-m_e$, che è la massa efficace della molla. Noi sappiamo che un molla in sospensione a riposo è comunque soggetta a uno sforzo in quanto, avendo un propria massa, le spire sono sottoposte alla forza peso dovuta alla molla stessa. Questo effetto apparentemente complicato si può semplificare affermando che lo sforzo compiuto dalla molla può essere paragonato all'effetto che darebbe una massa di valore (m_e) appesa alla molla. Pertanto grazie allo studio del grafico abbiamo trovato un valore della massa efficace che risulta essere:

$$m_e = 8\text{grammi}$$

Per questo motivo è doveroso modificare l'equazione

$$\mathcal{T} = \mathcal{C} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

sostituendo a m (la massa applicata) con $M = m + m_e$ per cui noi otteniamo quanto segue:

$$\mathcal{T} = \mathcal{C} \sqrt{\frac{M}{k}}$$

e quindi la legge lineare che dipende da \mathcal{T}^2 e dalla massa (M) data dalla somma dei carichi applicati (m) e la massa efficace della molla (m_e).

3.6 Calcolo dei parametri \mathcal{C} e m_e mediante il metodo della regressione lineare

Prendiamo in considerazione la seguente legge:

$$\mathcal{T}^2 = \frac{\mathcal{C}^2}{k} m_e + \frac{\mathcal{C}^2}{k} m$$

la cui scrittura può essere semplificata nel seguente modo:

$$y = A + Bx$$

dove $x \equiv m$ (massa appesa) $y \equiv \mathcal{T}^2$, $A \equiv \frac{\mathcal{C}^2}{k} m_e$ e $B \equiv \frac{\mathcal{C}^2}{k}$. Vogliamo quindi determinare i valori di A e B che minimizzano la discrepanza mediante la tecnica della regressione lineare pertanto procediamo con il metodo utilizzato anche nella sezione due.

- calcoliamo la discrepanza:

$$discrepanza = \sum_{i=1}^{13} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{(\delta y_i)^2}$$

ricordando che l'incertezza sull'asse delle ascisse è la stessa incertezza sulla massa ovvero δm_i che in questa analisi poniamo uguali a δx_i e che risulta trascurabile [è vero????] rispetto all'incertezza che dell'asse delle ordinate $\delta y_i \equiv \delta \mathcal{T}^2$

- quindi per quanto studiato in classe abbiamo che:

$$A = \frac{(\sum_i w_i x_i^2)(\sum_i w_i y_i) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i x_i y_i)}{\Delta} =$$

$$B = \frac{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i y_i)}{\Delta} =$$

dove:

$$\Delta = (\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i^2) - (\sum_i w_i x_i)^2 \quad e \quad w_i = \frac{1}{(\delta y_i)^2}$$

- di conseguenza abbiamo che le incertezze relative su A e B sono:

$$(\delta A)^2 = \frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta} \quad e \quad (\delta B)^2 = \frac{\sum_i w_i}{\Delta} =$$

Quindi possiamo riassumere i risultati di questa procedura in questo modo:

$$A \pm \delta A = \pm e \quad B \pm \delta B = \pm$$

Perciò noti questi parametri possiamo risalire ai valori di C e k risolvendo l'equazione in (... inizio ...) e utilizzando come valore di k quello trovato nell'analisi dati della sezione precedente ovvero $K = \dots$

3.7 Test del chi quadro

Procediamo ora a verificare che i valori sopra ottenuti siano compatibili con i dati sperimentali mediante il test del chi quadro. Ricordiamo che il numero di gradi di libertà in questo caso non è più $N - 1$, ma risulta essere $N - 2$ in quanto due dati sono stati utilizzati per calcolare i dati sperimentali A e B . Pertanto ci aspettiamo che:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{(\delta y_i)^2} \simeq N - 2$$