Métodos de Regresión

Ciencias y Técnicas Estadísticas

Soluciones ejercicios: Regresión Lineal Múltiple

Versión 3

Emilio Letón

1. Demostrar que la suma de cuadrados de los residuos $\sum_{i=1}^{n} \widehat{\epsilon}_i^2$ viene dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\epsilon}_i^2 = \widehat{\epsilon}^t \widehat{\epsilon} = y^t y - 2\widehat{\beta}^t \left(X^t y\right) + \widehat{\beta}^t \left(X^t X\right) \widehat{\beta}$$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\epsilon}_i^2 = \widehat{\epsilon}^t \widehat{\epsilon} = (y - \widehat{y})^t (y - \widehat{y}) = \left(y - X\widehat{\beta}\right)^t \left(y - X\widehat{\beta}\right)$$

$$= y^t y - y^t X\widehat{\beta} - \left(X\widehat{\beta}\right)^t y + \left(X\widehat{\beta}\right)^t X\widehat{\beta} = y^t y - \left(y^t X\widehat{\beta}\right)^t - \widehat{\beta}^t X^t y + \widehat{\beta}^t X^t X\widehat{\beta}$$

$$= y^t y - \widehat{\beta}^t X^t y - \widehat{\beta}^t X^t y + \widehat{\beta}^t X^t X\widehat{\beta} = y^t y - 2\widehat{\beta}^t X^t y + \widehat{\beta}^t X^t X\widehat{\beta}$$

2. A partir del criterio mínimo cuadrático determinar que la ecuación normal del modelo de regresión lineal múltiple viene dada por

$$X^t X\widehat{\beta} = X^t y$$

SOLUCIÓN:

El criterio mínimo cuadrático busca $\underset{\beta}{min}\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon}$, con lo que en primer lugar hay que encontrar los puntos estacionarios a partir de la ecuación normal, con lo que hay que plantear la ecuación

$$0 = \frac{\partial}{\partial\widehat{\beta}} \widehat{\epsilon}^t \widehat{\epsilon}$$

(a) que lleva, teniendo en cuenta que $X^t X$ es simétrica, a que

$$0 = \frac{\partial}{\partial\widehat{\beta}} \widehat{\epsilon}^t \widehat{\epsilon} = \frac{\partial}{\partial\widehat{\beta}} \left(y^t y - 2\widehat{\beta}^t X^t y + \widehat{\beta}^t X^t X\widehat{\beta}\right) = -2X^t y + 2\left(X^t X\right)\widehat{\beta} = -2\left(X^t y - X^t X\widehat{\beta}\right)$$

$$0 = X^t y - X^t X\widehat{\beta}$$

$$X^t X\widehat{\beta} = X^t y$$

3. Demostrar que en las hipótesis de que $Y = X\beta + \epsilon$ con $rg\,(X) = p+1$, la resolución de la ecuación normal del modelo de regresión lineal múltiple viene dada por

$$\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y$$

SOLUCIÓN:

Dado que $rg\,(X) = rg\,(X^t X) = rg\,(X X^t)$ se tiene que $rg\,(X^t X) = p+1$ y al ser X una matriz de dimensiones $(p+1)$x$(p-1)$ se verifica que $X^t X$ es de rango completo y admite inversa por lo que

$$\left(X^t X\right)^{-1} X^t X \widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y$$

$$\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y$$

4. Comprobar que la solución anterior cumple la condición de mínimo.

SOLUCIÓN:

Se trata de probar que la matriz

$$\frac{\partial^2}{\partial \widehat{\beta}^2} \widehat{\epsilon}^t \widehat{\epsilon}$$

particularizada en $\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y$ es definida positiva.

Para ello se observa que

$$\frac{\partial^2}{\partial \widehat{\beta}^2} \widehat{\epsilon}^t \widehat{\epsilon} = \frac{\partial}{\partial \widehat{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial \widehat{\beta}} \widehat{\epsilon}^t \widehat{\epsilon} \right) = \frac{\partial}{\partial \widehat{\beta}} \left(-2 \left(X^t y - X^t X \widehat{\beta} \right) \right) = 2 X^t X$$

con lo que hay que probar que la matriz $2X^t X$ particularizada en $\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y$ es definida positiva.

Para ello basta probar que $(X^t X)$ es definida positiva siempre, es decir que $d^t\,(X^t X)\,d > 0$ para todo $d \neq 0$. Sea $d \neq 0$, si se define $c = Xd$ se tiene que $c \neq 0$, ya que en el caso de que $c = 0$ se tendría que habría una dependencia lineal entre las columnas de X lo que entraría en contradicción con que el rango de X es completo $(p+1)$. Por tanto $c^t c = d^t\,(X^t X)\,d > 0$ (al ser $c \neq 0$) y $(X^t X)$ es definida positiva siempre, en particular en $\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y$.

5. Demostrar que en las hipótesis de que $Y = X\beta + \epsilon$ con $rg\,(X) = p+1$, el criterio mínimo cuadrático garantiza las siguientes propiedades:

   (a) $X^t \widehat{\epsilon} = 0$.

   (b) $\widehat{y}^t \widehat{\epsilon} = 0$.

   (c) $\sum_{i=1}^{n} \widehat{\epsilon}_i = 0$ y por tanto $\overline{\widehat{\epsilon}} = 0$.

   (d) $\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \widehat{\epsilon}_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_{i2} \widehat{\epsilon}_i = 0$, ..., $\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \widehat{\epsilon}_i = 0$

   (e) $\overline{\widehat{y}} = \overline{y}$.

SOLUCIÓN:

xxx.

6. Particularizar los resultados matriciales de $\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y$ para $p = 1$ y comprobar que se obtienen los resultados del tema anterior de Regresión Lineal Simple.

   SOLUCIÓN:

   xxx.

7. En el modelo de Regresión Lineal Múltiple con p variables se supone que

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$$

   con ϵ_i v.a.i.i.d según una $N(0, \sigma)$.

   (a) Determinar que para cada $x_{i1}, ..., x_{ip}$ fijos se verifica que

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - ... - \beta_p x_{ip}\right)^2\right)$$

   utilizando que si $W \sim N(\mu, \sigma)$ se tiene que $f(w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(w-\mu)^2\right)$.

   (b) Determinar a partir del apartado anterior la función de verosimiltud

$$l\left(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p, \sigma^2 | y_1, ...y_n\right).$$

   (c) Determinar los estimadores máximo verosímiles $\widehat{\beta}_{MV}$ y $\widehat{\sigma}^2_{MV}$ (sin demostrar la condición de máximo).

   (d) ¿Por qué $\widehat{\beta}_{MV}$ coincide con el estimador mínimo cuadrático $\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y$?

   SOLUCIÓN:

   (a) Por ser $\epsilon_i \sim N(0, \sigma)$, para cada $x_{i1}, ..., x_{ip}$ fijos se tiene, al ser $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$, que

$$y_i \sim N\left(E\left[\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i\right], \sqrt{V\left[\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i\right]}\right)$$

$$y_i \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_p x_{ip} + E\left[\epsilon_i\right], \sqrt{V\left[\epsilon_i\right]}\right)$$

$$y_i \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_p x_{ip} + 0, \sqrt{\sigma^2}\right)$$

$$y_i \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_p x_{ip}, \sigma\right)$$

   por lo que $f(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - ... - \beta_p x_{ip}\right)^2\right)$.

   (b) La función de verosimilitud viene dada por

$$l\left(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p, \sigma^2 | y_1, ...y_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - ... - \beta_p x_{ip}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - ... - \beta_p x_{ip}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - X\beta\right)^t\left(y - X\beta\right)\right).$$

(c) El logaritmo neperiano de la función de verosimilitud viene dado por

$$Lnl\left(\beta,\sigma^2|y_1,...y_n\right) = -\frac{n}{2}Ln\left(2\pi\right) - \frac{n}{2}Ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y-X\beta\right)^t\left(y-X\beta\right)$$

$$= -\frac{n}{2}Ln\left(2\pi\right) - \frac{n}{2}Ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y^ty - 2\beta^t\left(X^ty\right) + \beta^tX^tX\beta\right)$$

con lo que los puntos críticos son solución del sistema dado por

$$\frac{\partial}{\partial\beta}Lnl\left(\beta,\sigma^2|y_1,...y_n\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}Lnl\left(\beta,\sigma^2|y_1,...y_n\right) = 0$$

y al ser X^tX simétrica por

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2X^ty + 2X^tX\beta\right) = 0$$

$$-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(y-X\beta\right)^t\left(y-X\beta\right) = 0$$

y, por tanto, al ser $rg\left(X\right) = p+1$, por

$$\widehat{\beta}_{MV} = \left(X^tX\right)^{-1}X^ty$$

$$\widehat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n}\left(y-X\beta\right)^t\left(y-X\beta\right)$$

(d) Al ser

$$Lnl\left(\beta,\sigma^2|y_1,...y_n\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-X\beta\right)^t\left(y-X\beta\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon}\right)$$

se tiene que maximizar la exponencial negativa del exponente, equivale a minimizar el exponente.

8. Demostrar que la interpretación geométrica de considerar a $\widehat{y}$ como la proyección sobre el espacio generado por los vectores $1, X_1, ..., X_p$ conlleva a que $X^t\widehat{\epsilon} = 0$.

SOLUCIÓN:

xxx.

9. Si se define la matriz "hat" H como $H = X\left(X^tX\right)^{-1}X^t$ y su complementaria M como $M = Id - H$ demostrar las siguientes propiedades:

(a) Los elementos h_{ii} de la diagonal de la matriz H verifican que $h_{ii} = x_i^t\left(X^tX\right)^{-1}x_i$, siendo $x_i^t = (1, x_{i1}, ..., x_{ip})$.

(b) H y M tienen de dimensión n por n.

(c) $HX = X$.

(d) $MX = 0$.

(e) $\widehat{\epsilon} = My$.

(f) $\widehat{\epsilon} = M\epsilon$.

(g) $H^t = H$ y $M^t = M$ (H y M son simétricas).

(h) $HH = H$ y $MM = M$ (H y M son idempotentes).

(i) $tr\,(H) = p + 1$ y $tr\,(M) = n - p - 1$.

(j) $rg\,(H) = p + 1$ y $rg\,(M) = n - p - 1$.

(k) $\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon} = \epsilon^t M\epsilon = y^t My = y^t y - \widehat{\beta}^t X^t y$.

(l) $\epsilon^t H\epsilon = \epsilon^t\epsilon - \widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon}$.

SOLUCIÓN:

(a) La matriz H es la matriz "hat", que es la que pone el gorro a la y, es decir $\widehat{y} = Hy$. Por otra parte $\widehat{y} = X\widehat{\beta} = X\left(X^tX\right)^{-1}X^ty$. Por tanto, se verifica que $H = X\left(X^tX\right)^{-1}X^t$.

Si se denota por $(q_{ij}) = \left(X^tX\right)^{-1}$, que tiene dimensión $(p+1)\,x\,(p+1)$ y se realiza el producto matricial, se tiene que

$$H = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & ... & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & ... & x_{2p} \\ .. & ... & ... & ... \\ 1 & x_{n1} & ... & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & ... & q_{1p+1} \\ q_{21} & q_{22} & ... & q_{2p+1} \\ .. & ... & ... & ... \\ q_{p+11} & q_{p+12} & ... & q_{p+1p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_{11} & x_{21} & ... & x_{n1} \\ .. & ... & ... & ... \\ x_{1p} & x_{2p} & ... & x_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^tq_1 & x_1^tq_2 & ... & x_1^tq_{p+1} \\ x_2^tq_1 & x_2^tq_2 & ... & x_2^tq_{p+1} \\ .. & ... & ... & ... \\ x_n^tq_1 & x_n^tq_2 & ... & x_n^tq_{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_{11} & x_{21} & ... & x_{n1} \\ .. & ... & ... & ... \\ x_{1p} & x_{2p} & ... & x_{np} \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$h_{ii} = \begin{pmatrix} x_i^tq_1 & x_i^tq_2 & ... & x_i^tq_{p+1} \end{pmatrix} x_i = x_i^t \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & ... & q_{p+1} \end{pmatrix} x_i = x_i^t\left(X^tX\right)^{-1}x_i$$

(b) Como $\left(X^tX\right)^{-1}$ es de dimensión $(p+1)\,x\,(p+1)$ y X de dimensión $(n)\,x\,(p+1)$, se tiene que H es de dimensión nxn y, al ser $M = Id - H$, se tiene que M también es de dimensión nxn

(c) $HX = X$.

(d) $MX = 0$.

(e) $\widehat{\epsilon} = My$.

(f) $\widehat{\epsilon} = M\epsilon$.

(g) H y M son simétricas ya que $H^t = H$ y $M^t = M$:

$$H^t = \left(X\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)^t = \left[X^t\right]^t\left[\left(X^tX\right)^{-1}\right]^tX^t = X\left[\left(X^tX\right)^t\right]^{-1}X^t$$

$$= X\left[X^tX\right]^{-1}X^t = H$$

$$M^t = (I-H)^t = I^t - H^t = I - H = M$$

(h) H y M son idempotentes ya que $HH = H$ y $MM = M$:

$$HH = \left(X\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)\left(X\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right) = X\left(X^tX\right)^{-1}X^tX\left(X^tX\right)^{-1}X^t$$

$$= X\left(X^tX\right)^{-1}X^t = H$$

$$MM = (I - H)(I - H) = I - H - H + HH = I - H - H + H = I - H = M$$

(i) Al verificarse que $tr\,(ABC) = tr\,(CAB) = tr\,(BCA)$, se tiene que

$$tr\,(H) = tr\left(X\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right) = tr\left(\left(X^tX\right)^{-1}X^tX\right) = tr\,(I_{p+1}) = p + 1$$

$$tr\,(M) = tr\,(I_n - H) = tr\,(I_n) - tr\,(H) = n - p - 1$$

(j) Al ser H y M simétricas e idempotentes se tiene que su rango es igual a su traza.

(k) $\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon} = \epsilon^tM\epsilon = y^tMy = y^ty - \widehat{\beta}^tX^ty$.

$$\widehat{\epsilon} = y - \widehat{y} = y - Hy = (I - H)\,y = My$$

$$\widehat{\epsilon} = y - \widehat{y} = My = M\,(X\beta + \epsilon) = MX\beta + M\epsilon = (I - H)\,X\beta + M\epsilon$$

$$= (X - HX)\,\beta + M\epsilon = (X - X) + M\epsilon = 0 + M\epsilon = M\epsilon$$

Por lo que

$$\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon} = (M\epsilon)^t\,M\epsilon = \epsilon^tMM\epsilon = \epsilon^tM\epsilon$$

$$\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon} = (My)^t\,My = y^tMMy = y^tMy$$

$$y^tMy = y^t\,(I - H)\,y = y^ty - y^tHy = y^ty - y^tX\widehat{\beta} = y^ty - \left(y^tX\widehat{\beta}\right)^t = y^ty - \widehat{\beta}^tX^ty$$

(l) $\epsilon^tH\epsilon = \epsilon^t\epsilon - \widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon}$.

10. Si se define la matriz de ortogonalización C como $C = (X^tX)^{-1}\,X^t$ demostrar las siguientes propiedades:

(a) $\widehat{\beta} = Cy$.

(b) $CX = Id$.

(c) $CC^t = (X^tX)^{-1} = (q_{ij})$.

(d) $\widehat{\beta} = \beta + C\epsilon$.

SOLUCIÓN:

(a) xxx.

(b) $CX = (X^tX)^{-1}\,X^tX = Id$.

(c) Se tiene que

$$CC^t = \left(X^tX\right)^{-1}X^t\left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)^t = \left(X^tX\right)^{-1}X^t\left(\left(X^t\right)^t\left(\left(X^tX\right)^{-1}\right)^t\right)$$

$$= \left(X^tX\right)^{-1}X^t\left(X\left(\left(X^tX\right)^t\right)^{-1}\right) = \left(X^tX\right)^{-1}X^t\left(X\left(X^tX\right)^{-1}\right)$$

$$= \left(X^tX\right)^{-1}X^tX\left(X^tX\right)^{-1} = \left(X^tX\right)^{-1}$$

(d) $\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t y = Cy = C\left(X\beta + \epsilon\right) = CX\beta + C\epsilon = \beta + C\epsilon$.

11. Demostrar que en las hipótesis de que $Y = X\beta + \epsilon$ con $rg\left(X\right) = p+1$ y ϵ v.a. con $E\left[\epsilon\right] = 0$, se tiene que $\widehat{\beta}$ es centrado para β.

    SOLUCIÓN:

    xxx.

12. Demostrar que en las hipótesis de que $Y = X\beta + \epsilon$ con $rg\left(X\right) = p+1$ y ϵ v.a. con $E\left[\epsilon\right] = 0$ y $V\left[\epsilon\right] = \sigma^2 Id$ se tiene que $V\left[\widehat{\beta}\right] = \sigma^2\left(X^t X\right)^{-1}$.

    SOLUCIÓN:

    xxx.

13. Particularizar los resultados matriciales de $V\left[\widehat{\beta}\right] = \sigma^2\left(X^t X\right)^{-1}$ para $p = 1$ y comprobar que se obtienen los resultados del tema anterior de Regresión Lineal Simple.

    SOLUCIÓN:

    xxx.

14. Demostrar que $CM = 0$.

    SOLUCIÓN:

    xxx.

15. Enunciar y demostrar el Teorema de Gauss-Markov.

    SOLUCIÓN:

    xxx.

16. Demostrar que en las hipótesis de que $Y = X\beta + \epsilon$ con $rg\left(X\right) = p+1$ y ϵ v.a.$N\left(0, \sigma^2 Id\right)$ se tiene que $\widehat{\beta} \sim N\left(\beta, \sigma^2\left(X^t X\right)^{-1}\right)$.

    SOLUCIÓN:

    xxx.

17. Demostrar que en las hipótesis de que $Y = X\beta + \epsilon$ con $rg\left(X\right) = p+1$ y ϵ v.a. con $E\left[\epsilon\right] = 0$, se tiene que $E\left[\widehat{\epsilon}\right] = 0$.

    SOLUCIÓN:

    xxx.

18. Demostrar que en las hipótesis de que $Y = X\beta + \epsilon$ con $rg\left(X\right) = p+1$ y ϵ v.a. con $E\left[\epsilon\right] = 0$ y $V\left[\epsilon\right] = \sigma^2 Id$ se tiene que:

    (a) $E\left[\widehat{\epsilon}\widehat{\epsilon}^t\right] = \sigma^2 M$.

    (b) $E\left[\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon}\right] = \sigma^2 tr\left(M\right)$.

    (c) $V\left[\widehat{\epsilon}\right] = \sigma^2 M$.

    (d) $V\left[\widehat{\epsilon}_i\right] = \sigma^2\left(1 - h_{ii}\right)$ siendo $h_{ii} = Diag\left(H\right)$.

SOLUCIÓN:

xxx

19. Demostrar que en las hipótesis de que $Y = X\beta + \epsilon$ con $rg\left(X\right) = p+1$ y ϵ v.a.$N\left(0, \sigma^2 Id\right)$ se tiene que $\frac{1}{\sigma^2}\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon} \sim \chi^2_{n-p-1}$.

    SOLUCIÓN:

    xxx

20. ¿Qué hipótesis son las mínimas necesarias para demostrar que $\widehat{s}^2_{\widehat{\epsilon}} = \frac{1}{n-p-1}\widehat{\epsilon}^t\widehat{\epsilon}$ es centrado para σ^2?

21. Demostrar que $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\epsilon}$ son independientes.

22. Deducir que el $IC\left(1-\alpha\right)\%\left(\beta_i\right)$ viene dado por $\left(\widehat{\beta}_i \pm t_{n-p-1,\alpha/2}\widehat{s}_{\widehat{\epsilon}}\sqrt{q_{ii}}\right)$.

23. Deducir que el $IC\left(1-\alpha\right)\%\left(\sigma^2\right)$ viene dado por $\left(\frac{(n-p-1)\widehat{s}^2_{\widehat{\epsilon}}}{\chi^2_{n-p-1,\alpha/2}}, \frac{(n-p-1)\widehat{s}^2_{\widehat{\epsilon}}}{\chi^2_{n-p-1,1-\alpha/2}}\right)$.

24. Demostrar que $SCT = SCE + SCR$.

25. Ejercicios Peña (2002) Temas 7,8,9,11,13.