Dimensionality Reduction

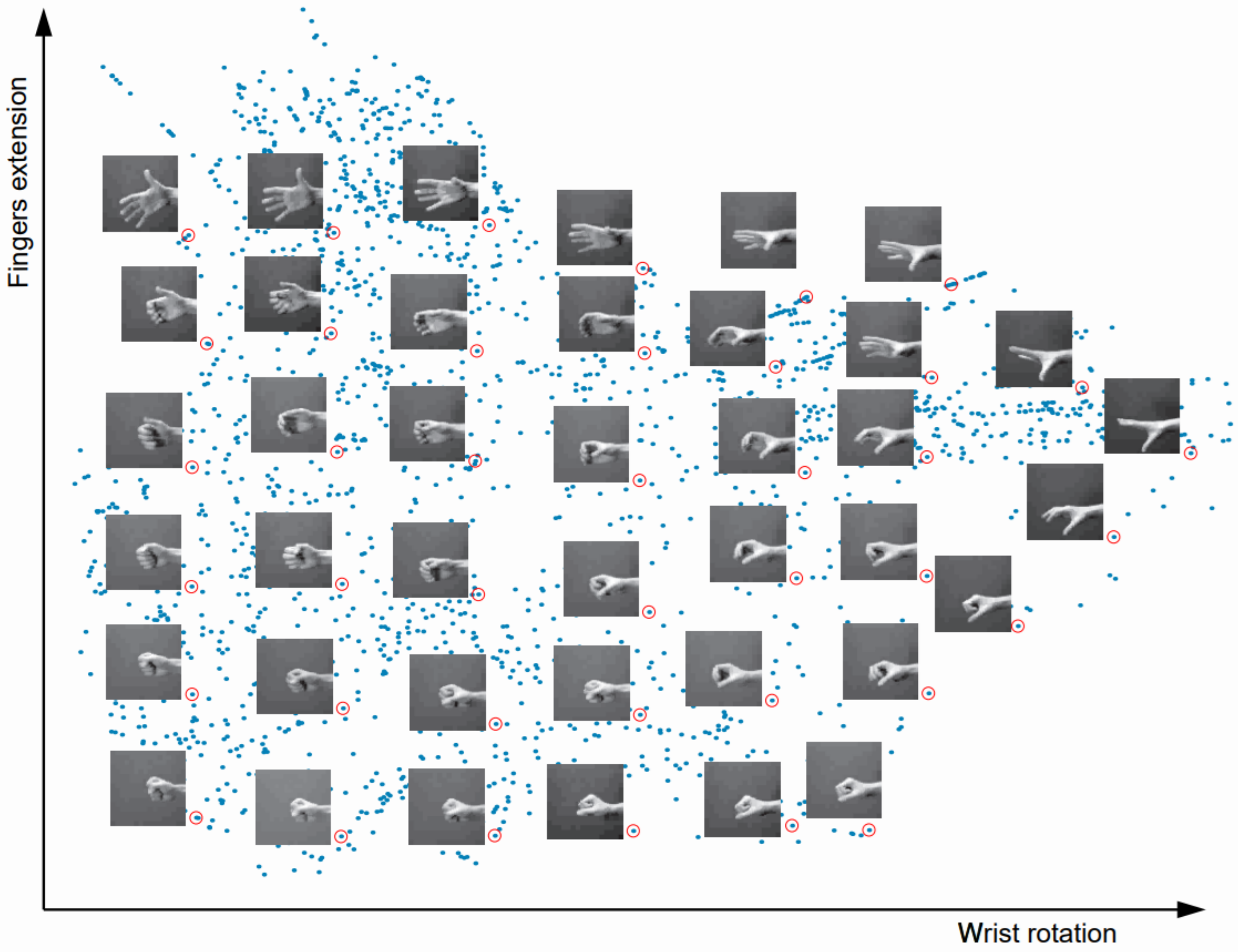
Alessandro Minoli
Flavio Perini
Francesco Torgano

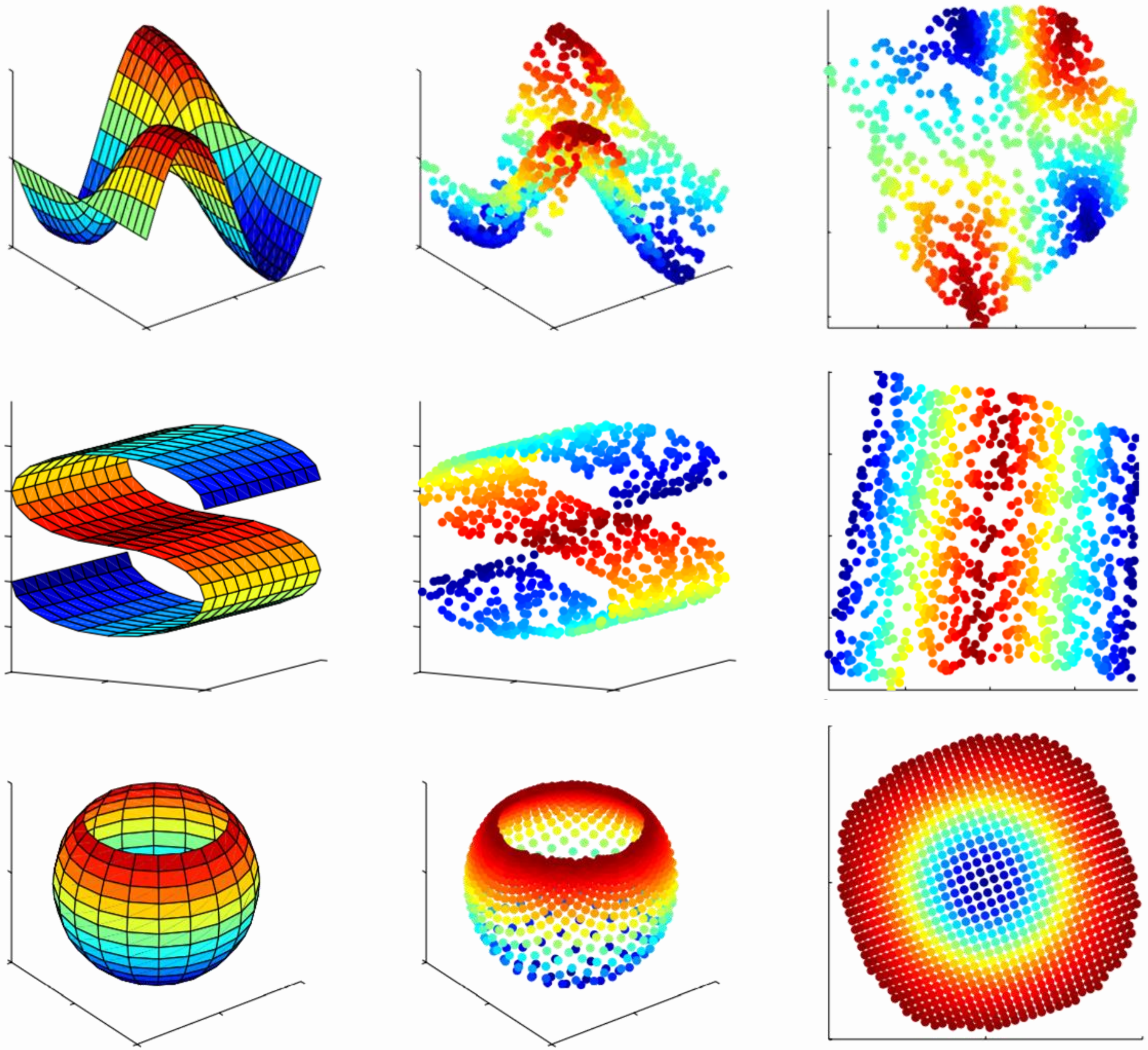
SciViz A.A. 2020-21

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI MILANO

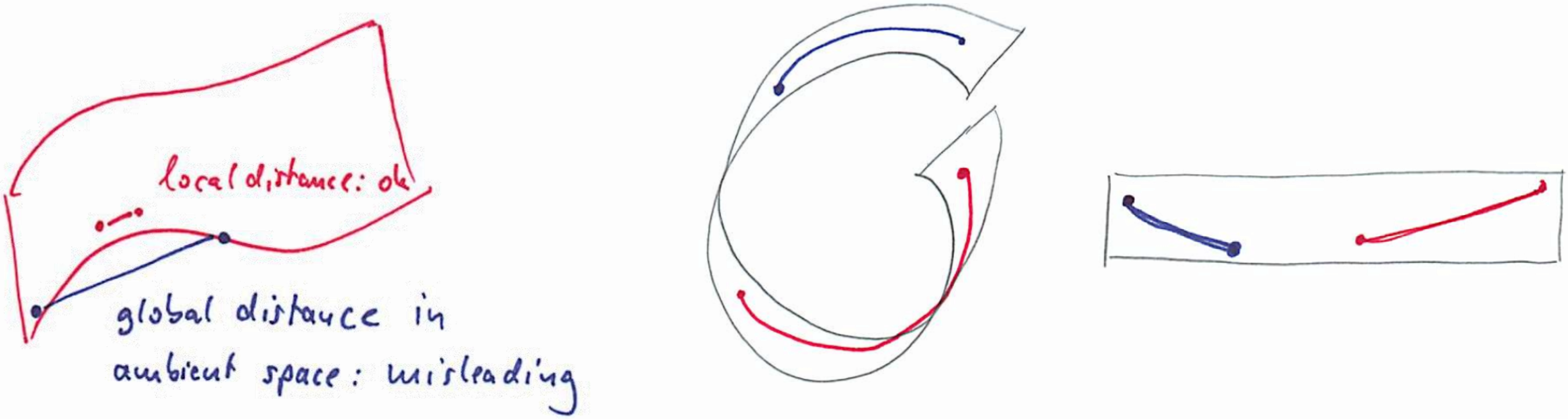
ISOMAP

Cosa significa ridurre la dimensionalità?

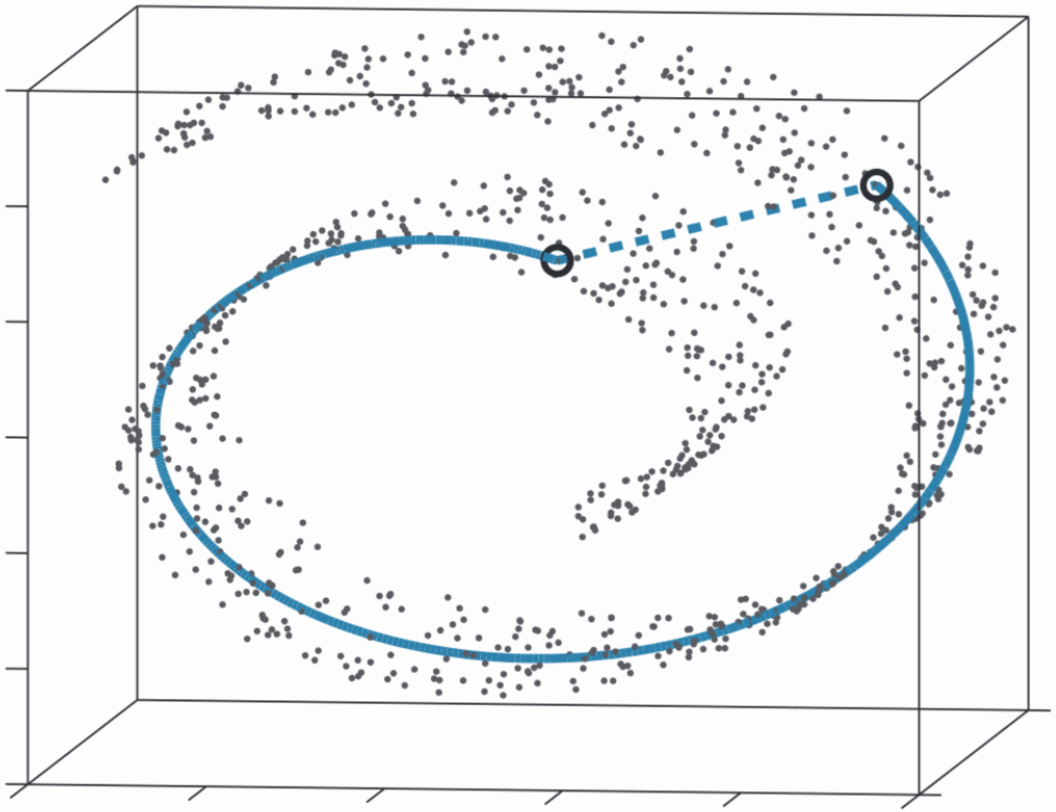




L’intuizione



Algoritmo di ISOMAP



Input:

- $\boldsymbol{X}$ (ad alta dimensionalità)
- una funzione di **distanza** $d(x_i, x_j)$, scegliamo la euclidea

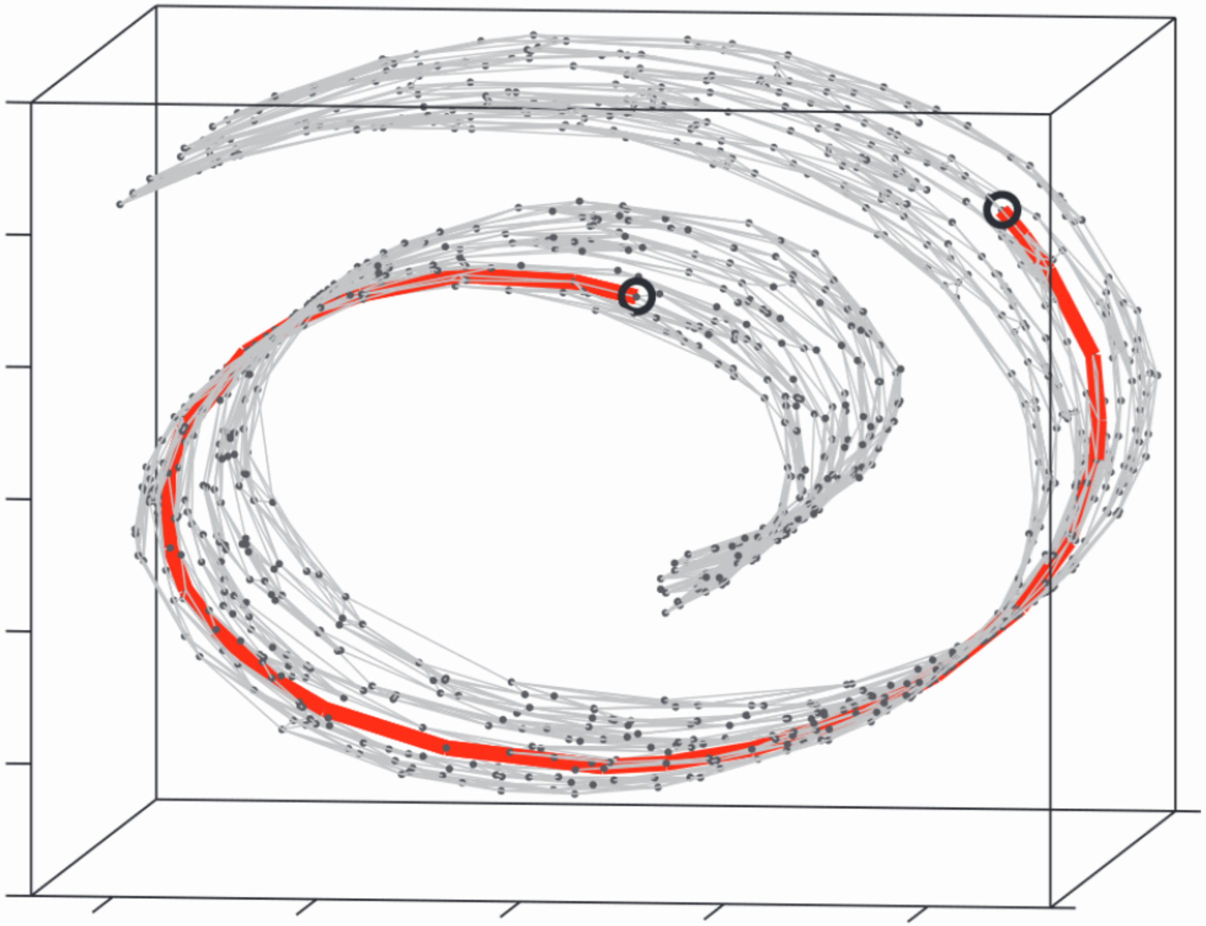
1) Costruzione del grafo pesato

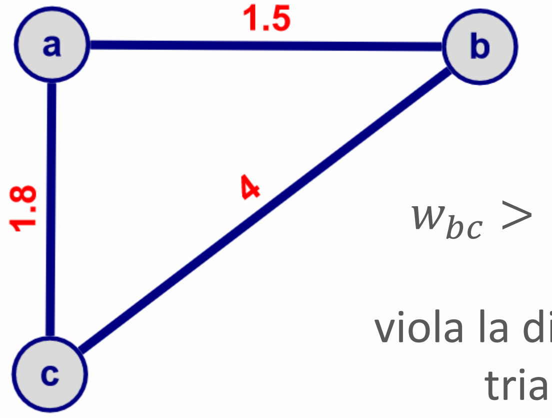
Troviamo i neighbors $\mathcal{N}_i$ di ogni punto x_i

K-nearest neighbors $\Rightarrow |\mathcal{N}_i| = k$
Fixed radius $\Rightarrow \mathcal{N}_i = \{ j \mid \|x_j - x_i\| \leq r \}$

Uniamo i neighbors $\mathcal{N}_i$ a x_i con archi di peso

$w_{ij} = \|x_j - x_i\|, \forall j \in \mathcal{N}_i$ (distanze **locali**)





$$w_{bc} > w_{ba} + w_{ac}$$
$$\Downarrow$$

viola la disuguaglianza triangolare

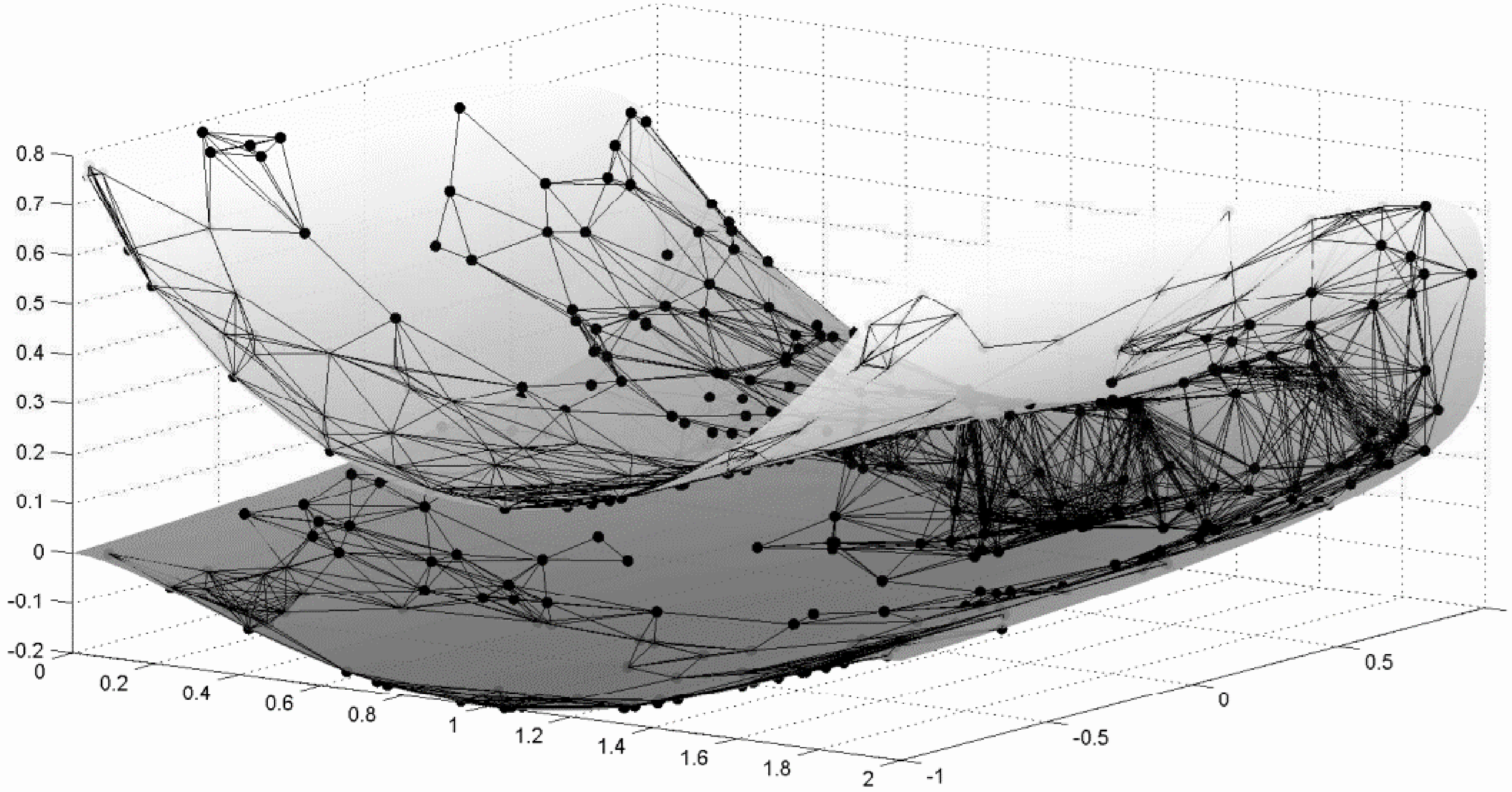
- grafo **connesso**
- vale la **disuguaglianza triangolare**

2) Ricava la matrice di distanze D

calcolando le distanze d_{sp} dei cammini minimi fra tutte le coppie di punti usando l'algoritmo di Dijkstra o di Floyd-Warshall

(distanze **geodesiche**)

Come scegliere k



3) Applica metric MDS con D come input per ottenere X (a bassa dimensionalità),
cioè un embedding del dataset che preserva le distanze geodesiche

Data $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $d_{ij} = \left\| x_i - x_j \right\|$ ricava i punti $(x_i)_{i=1\ldots n} \in \mathbb{R}^d$

Questo problema di embedding è chiamato **(metric) multi-dimensional scaling**

Più generalmente il problema è:

Dati gli oggetti $x_1, \ldots, x_n \in X$ (ad alta dimensionalità),
trova un embedding $\Phi : X \to \mathbb{R}^d$ t.c. $\left\| \Phi(x_i) - \Phi(x_j) \right\| = d_{ij}$

Per una generale D, **non possiamo** ottenere un tale embedding **senza distorsione** dei dati

Classic MDS

Data una D di **distanze euclidee** possiamo esprimere in termini di entrate di D la **matrice di Gram S** con entrate $s_{ij} = \left(\langle x_i, x_j \rangle\right)_{ij=1\ldots n}$ in questo modo:

$$ {d_{ij}}^2 = \left\| x_i - x_j \right\|^2 = \langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle = \langle x_i, x_i \rangle + \langle x_j, x_j \rangle - 2\langle x_i, x_j \rangle $$

$$ \boldsymbol{s_{ij}} = \langle x_i, x_j \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle x_i, x_i \rangle + \langle x_j, x_j \rangle - {d_{ij}}^2\right) = \frac{1}{2}\left(d(0, x_i)^2 + d(0, x_j)^2 - {d_{ij}}^2\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left({d_{1i}}^2 + {d_{1j}}^2 - {d_{ij}}^2\right)} $$

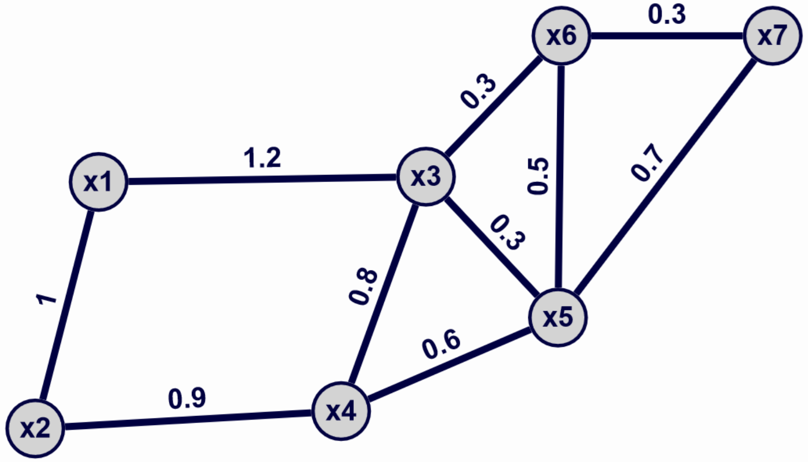
S è una matrice definita positiva, perciò possiamo decomporla nella forma $S = XX^t,\ X \in \mathbb{R}^{n \times d}$

L' i-esima riga di X sarà l'embedding del punto x_i in $\mathbb{R}^d$

Per trovare X calcoliamo la decomposizione spettrale di $S = V\Lambda V^t$ e poniamo $X = V\sqrt{\Lambda}$.
Tipicamente, scegliamo una dimensione $d \leq n$ e poniamo:

- V_d uguale alle prime d colonne di V
- Λ_d uguale alla matrice diagonale $d \times d$ con i primi d autovalori sulla diagonale
- $X = V_d\sqrt{\Lambda_d}$

Un esempio numerico
(ci sto lavorando ma escono risultati non belli ☹)



	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	0	1	1.2	1.9	1.5	1.5	1.8
x2	1	0	1.7	0.9	1.5	2.0	2.2
x3	1.2	1.7	0	0.8	0.3	0.3	0.6
x4	1.9	0.9	0.8	0	0.6	1.1	1.3
x5	1.5	1.5	0.3	0.6	0	0.5	0.7
x6	1.5	2.0	0.3	1.1	0.5	0	0.3
x7	1.8	2.2	0.6	1.3	0.7	0.3	0

$k = 2$

Metric MDS

Se D non è di sole distanze euclidee non riusciremo a ricavare un embedding perfetto.

Perciò definiamo una funzione di **stress**, ad esempio:

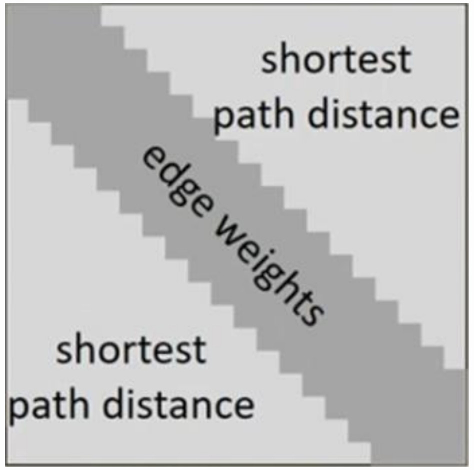
$$stress(embedding) = \frac{\sum_{ij} \left(\left\|x_i - x_j\right\| - d_{ij}\right)^2}{\sum_{ij} \left\|x_i - x_j\right\|}$$

Cercheremo di trovare un embedding $x_1, \ldots, x_n$ che minimizzi lo stress tramite un algoritmo standard di ottimizzazione non convessa (es. discesa del gradiente).

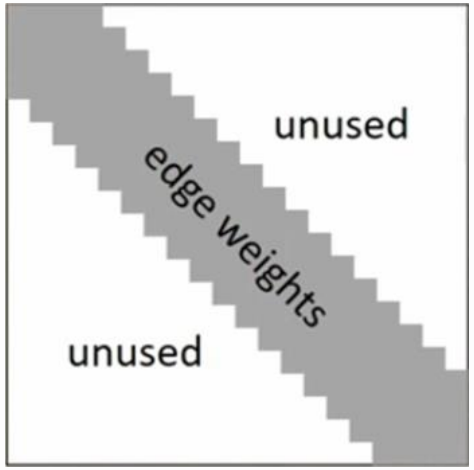
- Garanzia teorica che, con $x_1, \ldots, x_n$ campioni presi uniformemente da un manifold "buono" , per $n \to \infty$ e $k \approx \log n$ i cammini minimi sul grafo pesato convergono alle distanze geodesiche fra i campioni

- $O[D\log(k)N\log(N)] + O[N^2(k + \log(N))] + O[dN^2]$

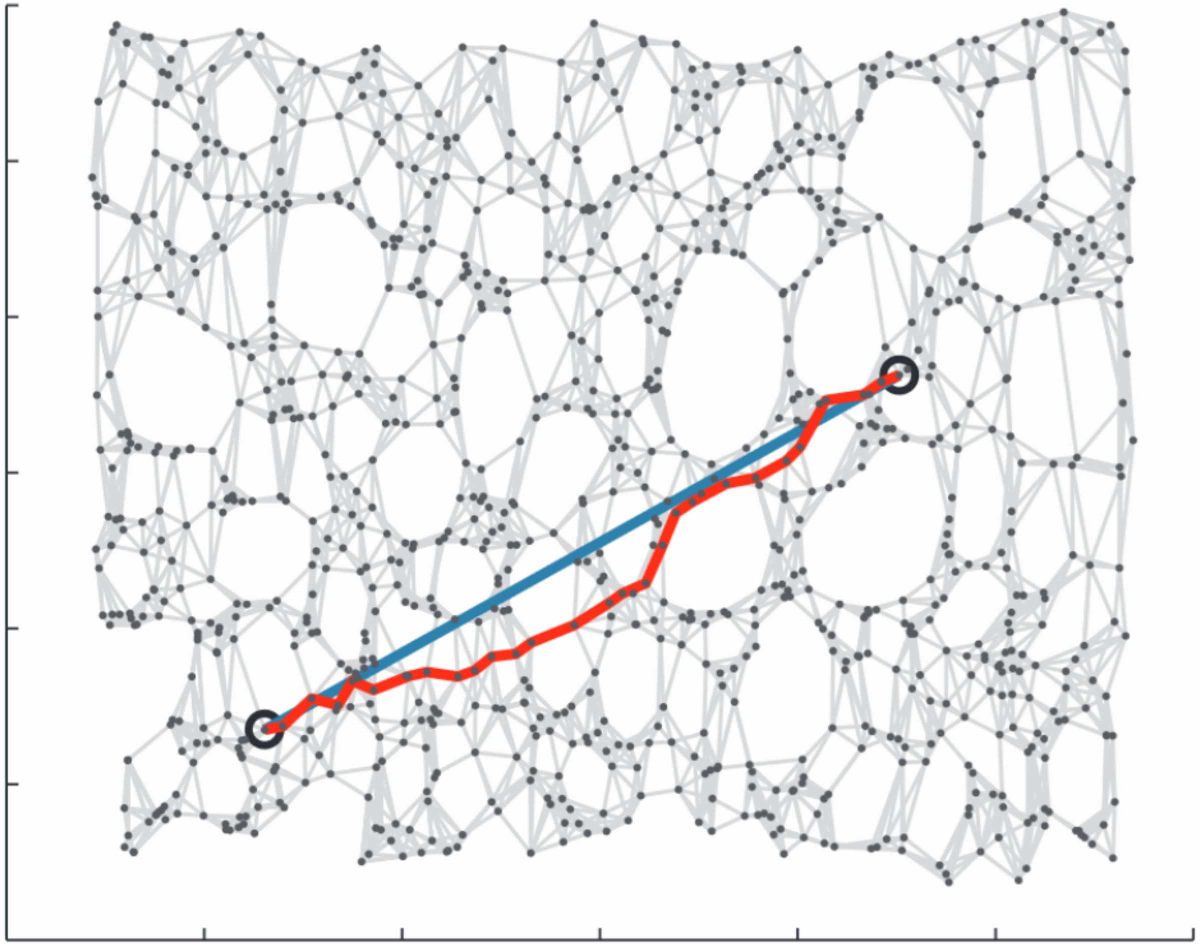
- Problema dei buchi nel manifold



ISOMAP (global)



LLE (local)



ISOMAP sul dataset di cifre MNIST