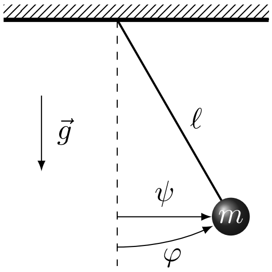
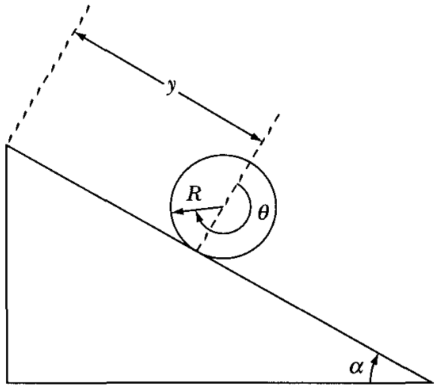
Fuerzas de ligadura | Multiplicadores de Lagrange

1. **Péndulo rígido ideal**
Calcule la tensión de la cuerda con el método de multiplicadores de Lagrange. La restricción es que la pesa se mantiene siempre en $\vec{r} = \ell\hat{\rho}$, ergo la función que expresa esto es $f(\rho) = \rho - \ell = 0$.



2. **Cilindro que rueda por un plano inclinado** [Marion (e) ex. 7.5]

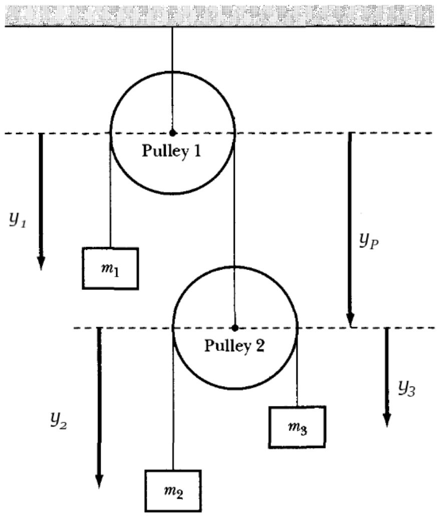


   (a) Encuentre las ecuaciones de movimiento,

   (b) la aceleración angular,

   (c) y la fuerzas de ligadura.

3. **Doble máquina de Atwood** [Marion (e) ej. 7.8 y 7-37]
Utilice el sistema de coordenadas indicadas. Para este sistema de poleas determine:

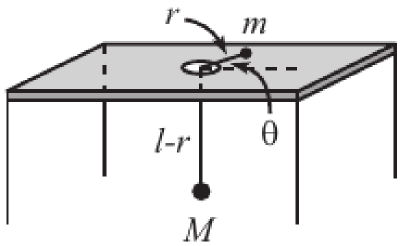


   (a) las ecuaciones de movimiento,

   (b) y las tensiones de ambas cuerdas utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

   Resultados:
   $Q_1 = \frac{g\left(32m_1m_2m_3+8m_1m_2m_p+20m_1m_3m_p+4m_1m_p^2+8m_2m_3m_p+2m_2m_p^2+4m_3m_p^2+m_p^3\right)}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+6m_2m_p+14m_3m_p+3m_p^2}$
   $Q_2 = \frac{gm_3\cdot\left(16m_1m_2+6m_1m_p+4m_2m_p-m_p^2\right)}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+6m_2m_p+14m_3m_p+3m_p^2}$

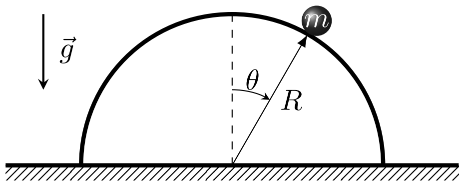
4. **Pesos enlazados por una cuerda** [Taylor 7.50]
Una partícula de de masa m posada sobre una mesa horizontal está atada a otra de masa M con una cuerda de longitud l que atraviesa un hueco en una mesa que no ofrece fricción. La última pende vertical con una distancia a la mesa $y = \ell - \rho$ función de la distancia de la primera al hueco ρ.



   (a) Asumiendo que θ no es necesariamente constante obtenga las ecuaciones de Lagrange para ρ e y. Resultado:
   $-Mg + M\ddot{y} + \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_1 - m\rho\dot{\theta}^2 + m\ddot{\rho} = 0$

   (b) Resuélva el sistema para ρ, y y el multiplicador de Lagrange λ_1 encontrando las fuerzas de tensión sobre ambas masas.
   Resultado: $Q_\rho = \frac{Mm\left(g+\rho\dot{\theta}^2\right)}{M+m}$

5. **Partícula deslizando sobre una semi-esfera** [Marion (e) ex. 7.10]
La partícula de masa m, considerada puntual, desliza sobre una semi-esfera de radio R sin fricción.



   (a) Encuentre la fuerza de la ligadura.
   Resultado: $F_\rho^{\text{ligadura}} = m\left(-R\dot{\theta}^2 + g\cos(\theta)\right)$

   (b) Calcule el ángulo en que la partícula se despega de la semi-esfera.
   Resultado: $\approx 48.19°$

Para llegar al ángulo de despegue debe resolver la ecuación diferencial a la que arribará tras resolver la problemática de las fuerzas de ligadura, que será $\ddot{\theta} = \frac{g\sin(\theta)}{R}$. Esta expresión es integrable para el recorrido que hace la partícula. Para facilitar esto se intercala por regla de la cadena derivaciones en función de θ en la definición de la aceleración.

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Como la partícula parte de $\theta(t=0) = 0$ con $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} &= \frac{g}{R}\sin(\theta) \\
\dot{\theta}d\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\sin(\theta)d\theta \\
\int_0^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} \dot{\theta}d\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\int_0^{\theta_{\text{despegue}}} \sin\theta d\theta \\
\left.\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right|_0^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} &= \frac{g}{R}(-\cos\theta)\Big|_0^{\theta_{\text{despegue}}} \\
\frac{\dot{\theta}^2_{\text{despegue}}}{2} &= \frac{g}{R}(-\cos(\theta_{\text{despegue}}) + 1)
\end{aligned}$$

Con esto hay que substituir $\dot{\theta}^2$ en una expresión de F_ρ^{ligadura}, que debe ser nula en el momento de despegue.