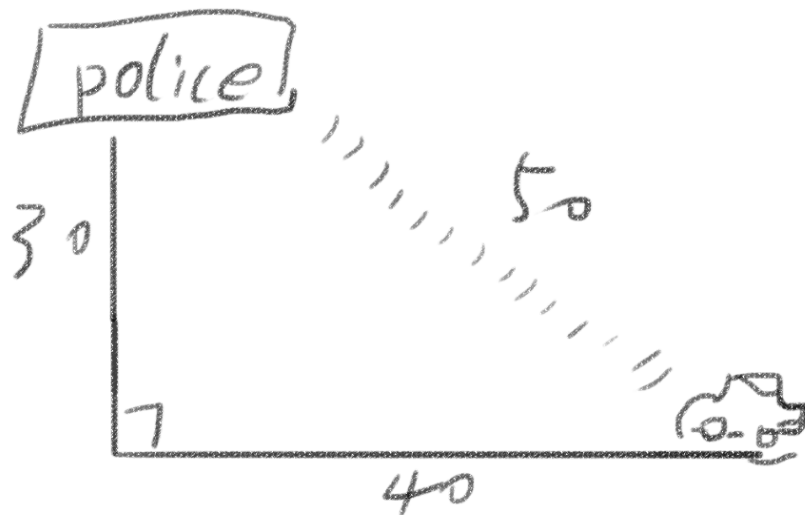


例1：有一个警察，离道路30英尺。他有一个雷达，正在测速。这时，你开着车过来，他发现你离他有50英尺，他还知道你的车沿雷达方向以每秒80英尺的速度逼近，问题是你超速了吗？

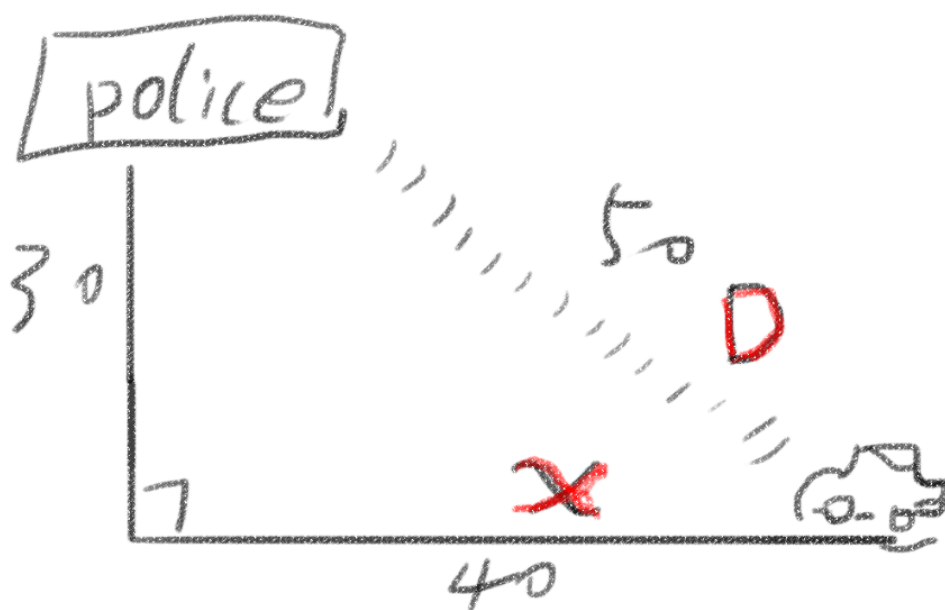
超速为高于每秒95英尺，即每小时65英里。

数形结合是解决问题的关键：



现在问题是，我们应当如何设变量，才能算出车速呢？

首先，要了解什么在变化（changing），什么是恒定的。我们用 t 表示时间，我们将车到警察与路面的垂线的距离设为 x 。 x 是一个随 t 变化的变量。实际上，要求的就是 $\frac{dx}{dt}$ 是否大于95；雷达测试的距离也是变化的，我们设它为 D ，则： $\frac{dD}{dt} = -80$



可以得出如下的表达式：

$$x^2 + 30^2 = D^2; \frac{dD}{dt} = -80$$

使用隐函数微分，也就是直接对等式两边关于时间求微分：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2 + 30^2) &= \frac{d}{dt}D^2 \\ 2x \frac{dx}{dt} &= 2D \frac{dD}{dt} \end{aligned}$$

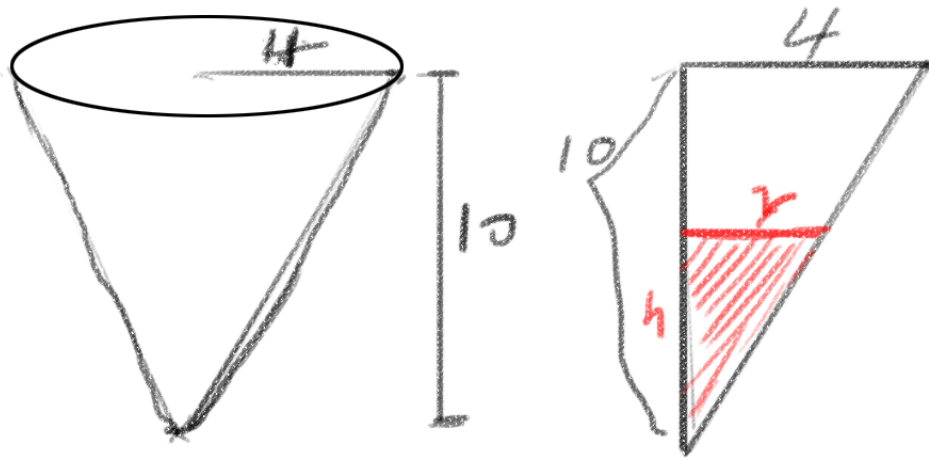
代入值：

$$\begin{aligned} 2 \cdot 40 \frac{dx}{dt} &= 2 \cdot 50(-80) \\ \frac{dx}{dt} &= -100 \end{aligned}$$

汽车每秒的速度为100m/s，所以超速了。

例2：有一个圆锥形的罐子，它顶部的半径是4英尺，10英尺深，正在注满水。注水的速度是每分钟2立方英尺，问题是当水深5英尺时水面上升的速度是多少？

首先，画图与设变量：



h : 5英尺

r : 5英尺深时的半径

根据相似三角形的性质，得出如下：

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{10}$$

圆锥体的体积公式：

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

注水的速度是每分钟2立方英尺，即：

$$\frac{dV}{dt} = 2$$

通过对图形的分析得到了数学式。我们接下来要做的是将 r 看做是 h 的表达式，并代入体积公式：

$$r = \frac{2}{5}h$$
$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}h\right)^2 h$$

等式两边做关于 t 的隐函数微分：

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}\right)^2 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}\right)^2 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

现在求出了变化率，可以代入数值了：

$$2 = \frac{1}{\cancel{3}}\pi\left(\frac{2}{\cancel{5}}\right)^2 \cancel{3} \cdot 5^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}$$

解题步骤： 文字题->画图设变量-> 列出数学式->.....

相关变率问题：已知一个变量V，表示水的体积，还有一个变量，表示圆锥中水的深度，要求的是这两者相关的变率，它们之间的关系可以用链式法则来描述：

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$ ，所以可以通过其中一个求另一个。这些就是相关变率，表示一样东西相对于另一样东西的变化率。