今天，我们开始学习导数的应用（applications of differentiation）

1. 线性近似（linear approximations）

在数学中,使用线性函数对一般函数进行近似处理的方法称为线性近似。线性近似公式如下：

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

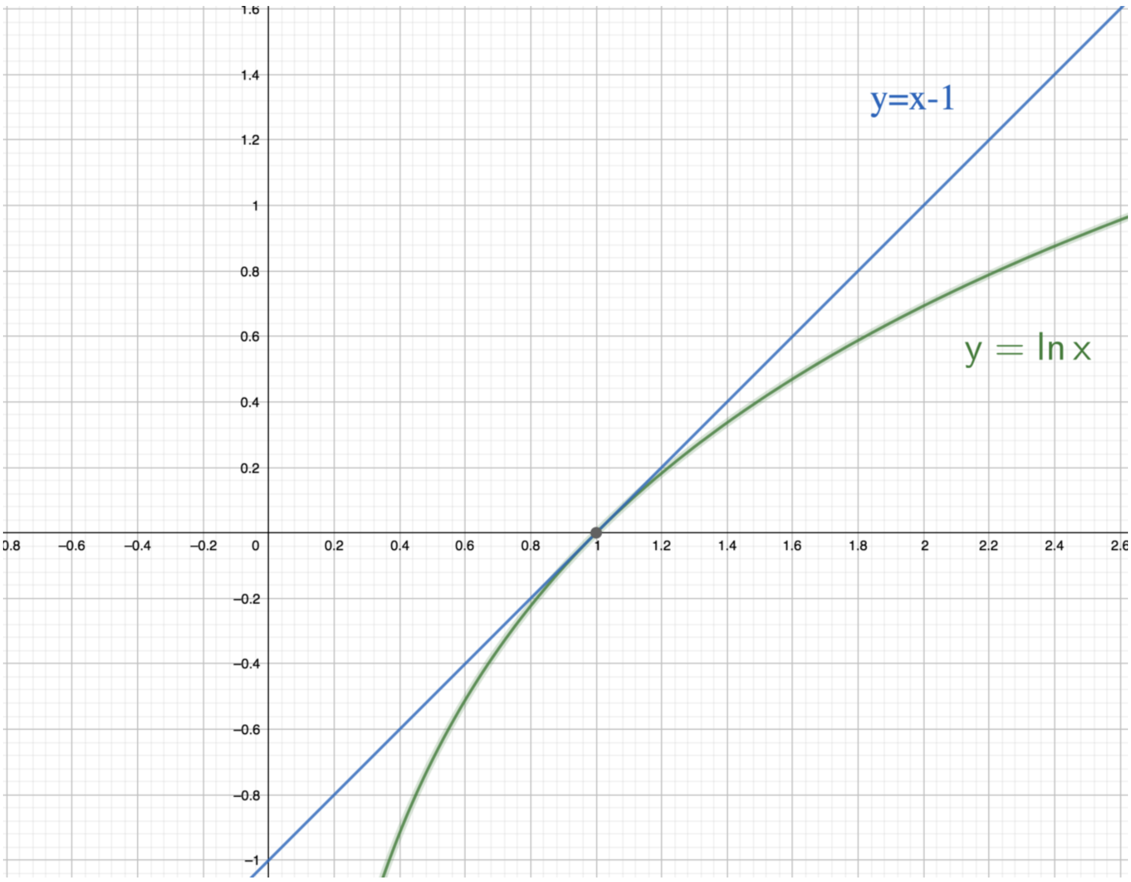
先解释一下它的意义（meaning）。首先，假设有一条曲线$y = f(x)$,那么它在切点处近似于其切线（it's approximately the same as its tangent line）,也就是说公式另一边表示其切线。

$$\boxed{\begin{array}{l} curve \quad y = f(x) \\ \approx y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{array}}$$

例如：$f(x) = \ln x$,它的导数则是：$f'(x) = \frac{1}{x}$。取$x_0 = 1$将具体的值打入：
$f(1) = \ln 1 = 0, f'(1) = 1$。于是得到近似公式：

$$\boxed{\ln x \approx 0 + 1 \cdot (x - 1)}$$

也就是说: $\ln x \approx x - 1$。画出它的图像：



它们仅当x在1附近时才接近，即当x近似于1时，公式y=x-1才成立。一旦离远一点，直线与曲线就分开了，但在邻近x=1的区域，它们相近。

接下来，我们从另一角度来解释它。这里涉及到导数的定义：

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

这个公式可以逆向使用，当知道函数的导数就可以借助它求出特定的极限：

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)}$$

所以，当$\Delta \to 0$时：

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x_0)}$$

这个公式的左侧表示平均变化率，右边表示无穷小段的变化率。这个公式于开头时定义的线性近似公式基本相等。证明如下：

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\Delta f}{\Delta x}\approx f'(x_0)\\ \Leftrightarrow\ &\Delta f\approx f'(x_0)\Delta x \qquad \#\text{两边同乘}\Delta x\\ \Leftrightarrow\ &f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0)\\ \Leftrightarrow\ &f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\end{aligned}}$$

接下来，通过几个线性近似的例子，对其进行系统的讨论。当进行系统讨论时，我们希望形式越简单越好，平时我们把x_0作为基点，但接下来要用的公式都会以$x_0=0$为基点：

$$\boxed{(x_0=0)\qquad f(x)\approx f(0)+f'(0)x}$$

求$\sin x, \cos x, e^x$的线性近似。

f(x)	f'	f(0)	f'(0)
$\sin x$	$\cos x$	0	1
$\cos x$	$-\sin x$	1	0
e^x	e^x	1	1

所以：

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x&\approx x\\ \cos x&\approx 1\\ e^x&\approx 1+x\end{aligned}}$$

求$\ln(1+x), (1+x)^r$的线性近似。

f(x)	f'	f(0)	f'(0)
$\ln(1+x)$	$\frac{1}{1+x}$	0	1
$(1+x)^r$	$r(1+x)^{r-1}$	1	r

> 对于对数来讲，$\ln 0$没有解，所以，表示为:ln(1+x)

所以：

$$\boxed{\begin{aligned}&\ln(1+x)\approx x\\&(1+x)^r\approx 1+rx\end{aligned}}$$

求得了上面几种函数的线性近似函数，进行具体运算时，就可以使用上面的公式了。例如：

$$\boxed{\ln 1.1\approx \frac{1}{10}}$$

> 从上面的论述，我们知道线性近似的最主要作用就是简化函数，一个合理的近似常可以帮助解决问题。

我们来看一个复杂的案例：当x接近0时，求$\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}}$的线性近似。我们可以综合运用上面求得的线性近似函数来求解：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}}&=e^{-3x}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}\\&\approx(1-3x)(1-\frac{1}{2}x)\\&=1-3x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^2\qquad\#\text{因为x接近零，它的二次方更小，可以摒弃该二次项}\\&\approx 1-3x-\frac{1}{2}x\\&\approx 1-\frac{7}{2}x\end{aligned}}$$

上面介绍的数学中的运用。接下来介绍实际生活中的运用。看看线性近似是如何走入我们的生活。

例：计算卫星上时间与我们省上手表之间的时间差。根据时间膨胀公式：

$$\boxed{T'=\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

> T： 卫星上的时间
> T' : 手表的时间
> v : 卫星的速度
> c : 光速

$$\boxed{\begin{aligned}&let\ u = \frac{v^2}{c^2}\\&(1-u)^{-\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}u\\&\therefore T' \approx T(1+\frac{1}{2}u) \approx T(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})\end{aligned}}$$

> 光速为3×10^5km/s,如果卫星的速度为4km/s,那么$\frac{v^2}{C^2}$约为10^{-10},现在，当我们追踪GPS定位带来的误差时，发现只有几毫米的差距，可以忽略不计

上面的式子可以转换为:

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad \#\Delta T = T' - T}$$

这意味着，若有一颗速度为v的卫星，那么地表上时钟读数的变化量和卫星上的时间之比，与后面的比例成正比关系，它具有物理意义。这就是我们要找的比例函数，某个量关于其他量的改变率。误差在这类问题中可以忽略，我们只需要处理简化后的较简单的式子

在工程学中线性近似应用非常广泛，人们只需要关心输入量与输出量之间的线性关系

2. 二阶近似（quadratic approxiamtion）

相比于线性近似，二阶近似更精确一点，更详细一点。换句话说，它是线性近似的拓展。

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}$$

例如：$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$。那么：

$$\boxed{\ln(1.1) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{2}(\frac{1}{10})^2 \approx 0.95}$$

求$\sin x, \cos x, e^x$的二阶近似。

f(x)	f'	f''	f(0)	f'(0)	f''(0)
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	0	1	0
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	1	0	-1
e^x	e^x	e^x	1	1	1

所以：

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x \approx x\\&\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}\\&e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}\end{aligned}}$$

求变换了基点的 $\ln(1+x), (1+x)^r$的二阶近似。

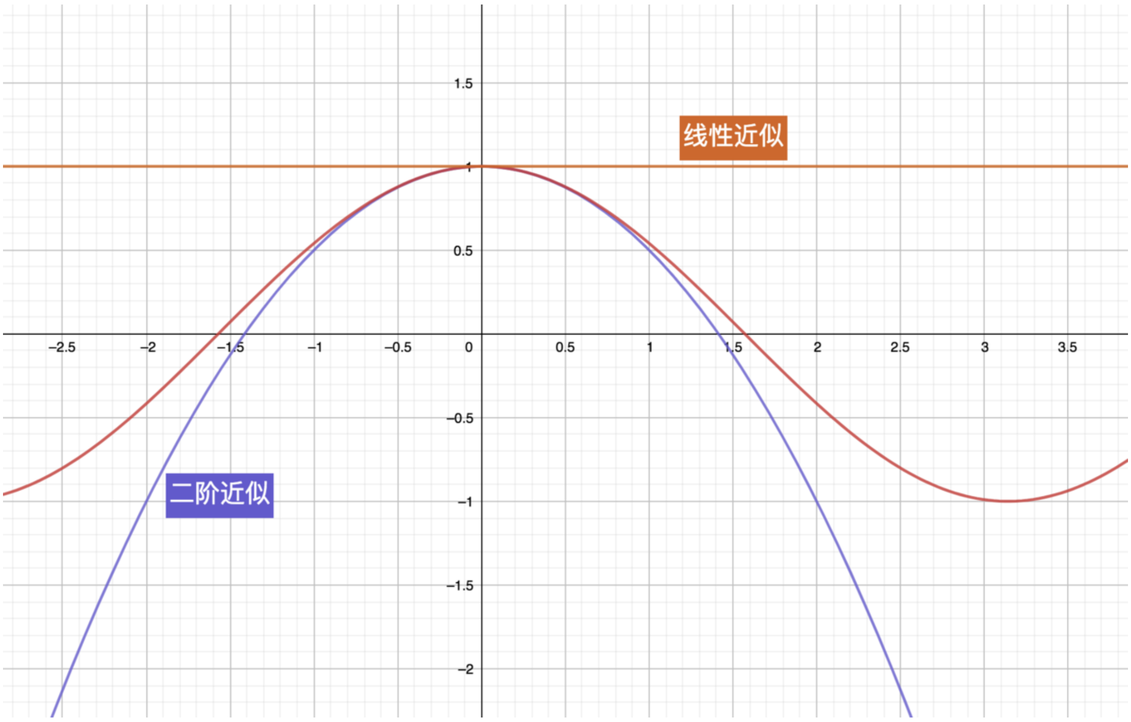
-	-	at x=0
f	$\ln(1+x)$	0
f'	$\frac{1}{1+x}$	1
f''	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	-1

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x-\frac{1}{2}x^2}$$

-	-	at x=0
f	$(1+x)^r$	1
f'	$r(1+x)^{r-1}$	r
f''	$r(r-1)(1+x)^{r-2}$	r(r-1)

$$\boxed{(1+x)^r \approx 1+rx+\frac{r(r-1)}{1}x^2}$$

二阶近似的几何意义。以cos x为例，图形如下：



线性近似从直观上并没有表明函数是在1上面还是下面，没有给出很多信息；二阶近似给出了函数在该点附近的更多信息。这就是二阶表达式的作用，它是位于函数下方的一条曲线，比水平线更逼近原曲线,是最逼近曲线的抛物线。

最后，我们研究一个问题，二阶近似方程的最后一项系数为什么是$\frac{1}{2}$呢？举例来说，抛物线是曲线的，二阶近似越逼近二次函数，越接近二次函数自身。对于二次函数，通过近似公式求出的结果必须与自身是吻合。例如：

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=a+bx+cx^2 \\ f'(x)=b+2cx \\ f''(x)=2c \end{array}}$$

a,b,c 需要用函数在0处的导数值重新求出（recover thes numbers）

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=a \\ f'(x)=b \\ \frac{1}{2}f''(x)=c \end{array}}$$

所以，二阶近似方程的最后一项系数是$\frac{1}{2}$。这就是对公式的理解。

> 二阶近似只有在线性精确度不够时才用得到。

案例1：$a_k = (1+\frac{1}{k})^k$

$$
\begin{aligned}
a_k &= (1+\frac{1}{k})^k \\
\ln a_k &= k(\ln(1+\frac{1}{k})) \\
&\approx k(\frac{1}{k}) \qquad \# \ln(1+x) \approx x \\
&\approx 1 \\
a_k &\approx e^1
\end{aligned}
$$

案例2：$e{-}3x(1+x)^{-1/2}$

$$
\begin{aligned}
&e{-}3x(1+x)^{-1/2} \approx (1+(-3x)+\frac{(3x)^2}{2})(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(\frac{-3}{2})x^2) \\
&\approx 1-3x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{8}x^2 \qquad (drop\ x^3, x^4\ etc\ items) \\
&\approx 1-\frac{7}{2}x+\frac{51}{8}x^2
\end{aligned}
$$

定义->内涵（意义）->用途