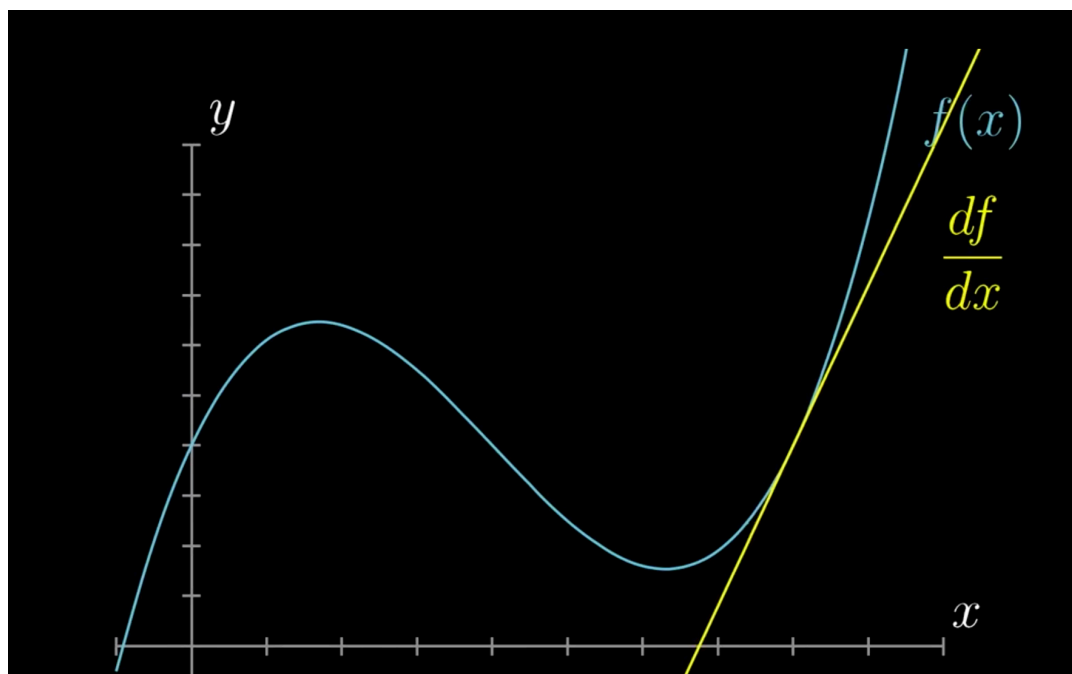
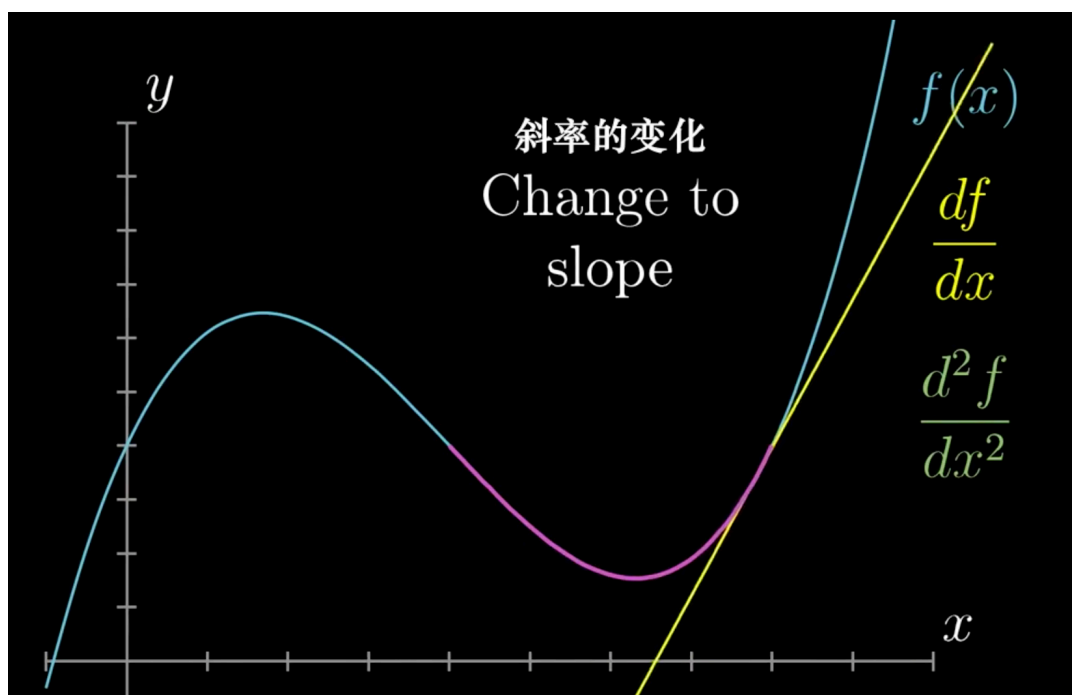


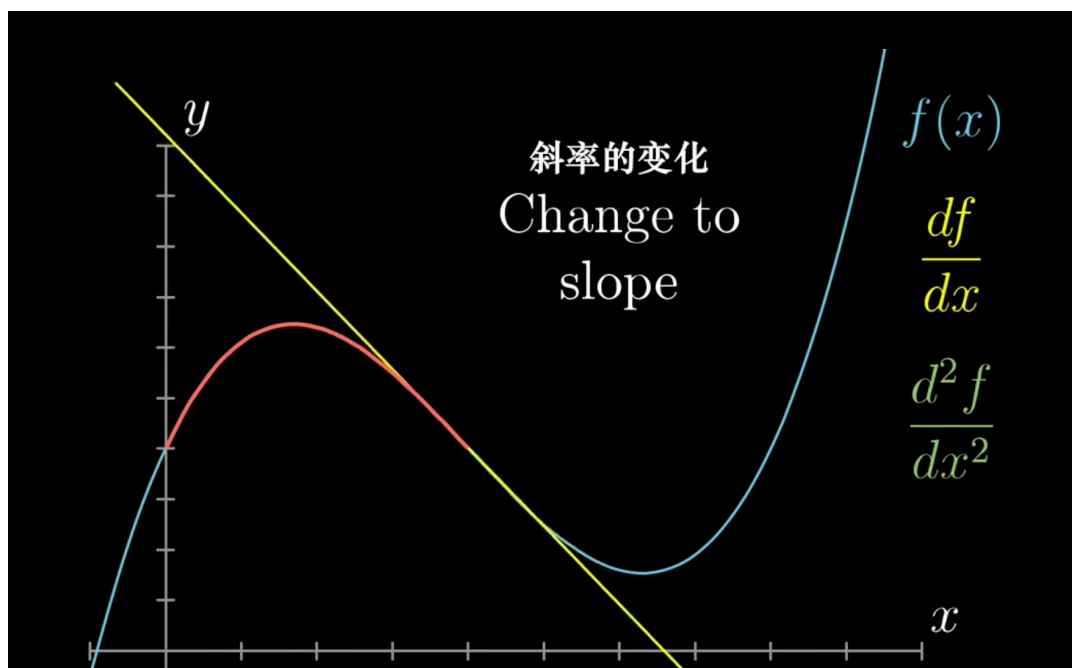
设函数为 $f(x)$ ，那么导数就可以解释为某个 $x$ 值所对应的图像的斜率



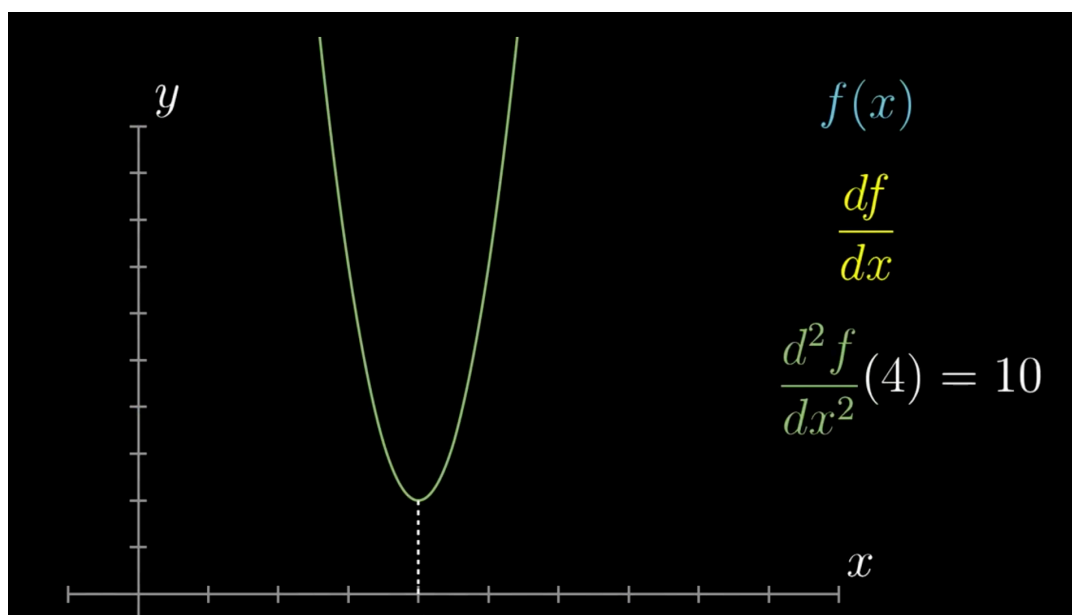
二阶导数是导数的导数，它表示了斜率的变化。最直观的就是观察 $f(x)$ 曲线的弯曲方向，当它向上弯曲，斜率增加，二阶导数就是正的



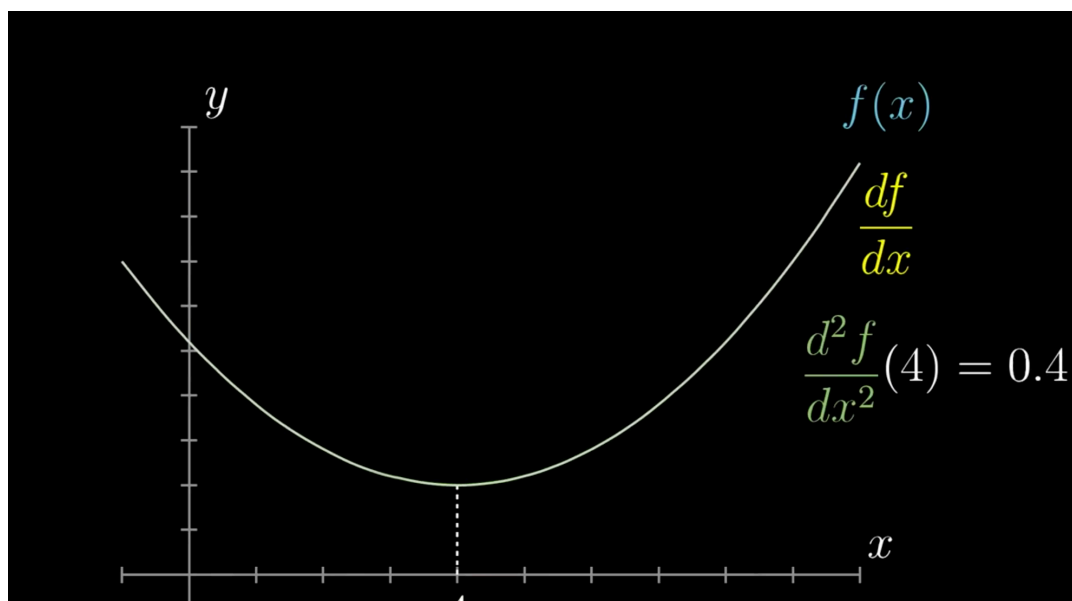
当它向下弯曲，斜率在减少，二阶导数就是负的



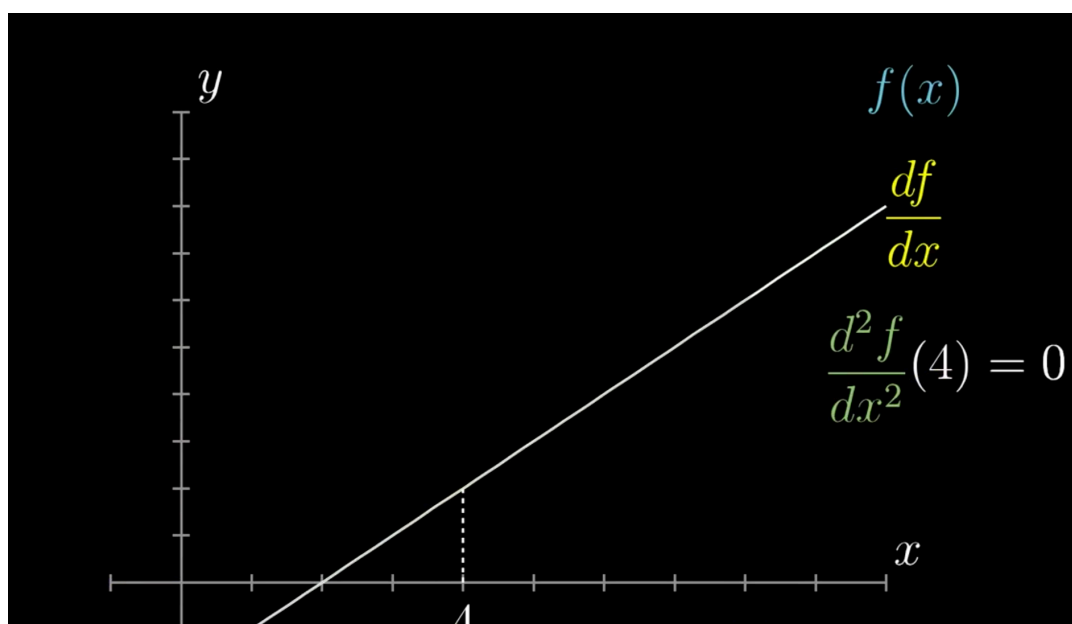
二阶导数如果值很大，表示斜率变化大，如下图：



上面的这个函数图像，在 $x=4$ 时，有一个很大的二阶导数值。而下面的函数的二阶导数依然为正，但值就略小。因为斜率增加的很慢



在图像没有弯曲的地方，二阶导数就是0：



书写的符号：

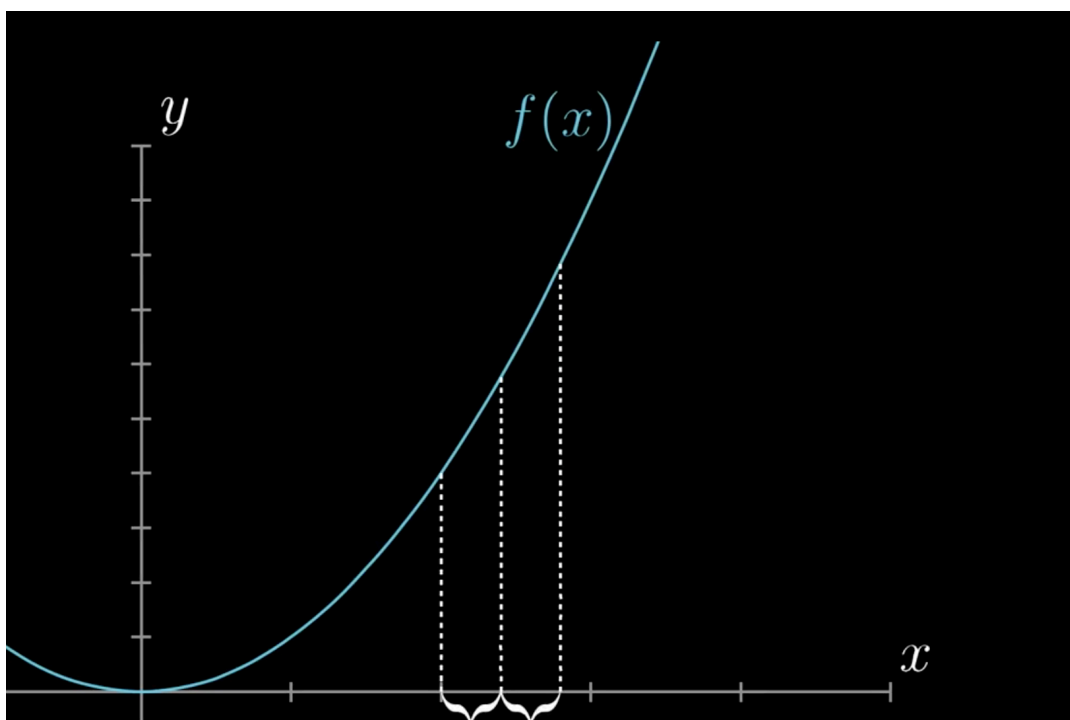
$$\frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx}$$

或者更加常用的：

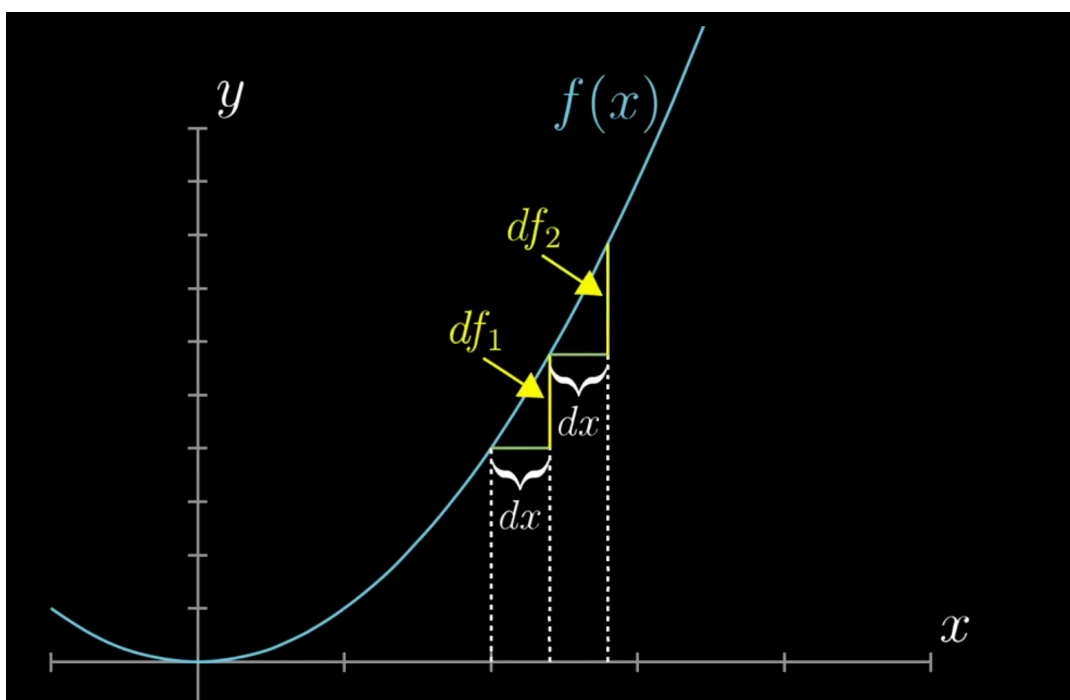
$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

这个符号如何解读呢？

考虑函数的一个取值 $x$ ，然后向右连续增加两个小量 $dx$ ：



第一个增量使得函数产生了一个变化量，叫做 $df_1$ ，同理，第二个 $dx$ 使函数产生的变化量叫做 $df_2$ ：



这两个变化量之间的差，即函数值变化量的变化量就叫做 $d(df)$ ，

$$d(df) \leftarrow \underbrace{df_1 + df_2}$$

这是一个微小的量，和 $(dx)^2$ 成正比：

$$d(df) \approx \text{某常数} (\text{Some constant}) (dx)^2$$

二阶导数就是变化量的变化量 与 $(dx)^2$ 的比

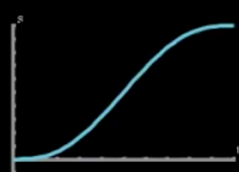
$$\frac{d(df)}{(dx)^2} \approx \text{某常数} (\text{Some constant})$$

更确切的说，是 $dx$ 趋近于0时，这个比值的极限。

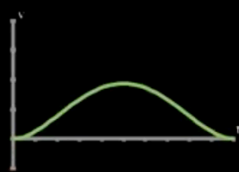
尽管 $d$ 不是一个能和 $f$ 直接相乘的变量，但是为了使记号简单，我们写成了：

$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

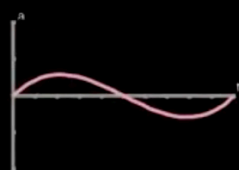
在汽车行驶中，二阶导数就是加速度，三阶导数就是急动度（如果不为0，说明加速度有变化）



$s(t) \Leftrightarrow$  Displacement  
位移



$\frac{ds}{dt}(t) \Leftrightarrow$  Velocity  
速度



$\frac{d^2 s}{dt^2}(t) \Leftrightarrow$  Acceleration  
加速度



$\frac{d^3 s}{dt^3}(t) \Leftrightarrow$  Jerk  
急动度

高阶导数的最大作用就是帮忙我们得到函数的近似。