牛顿迭代法是计数器很重要的工作原理。

例：可以用来求任何平方根，如$x^2=5$

首先，要让问题更复杂，定义函数：$\boxed{f(x)=x^2-5}$

然后，解：$\boxed{f(x)=0}$。这是求解的标准步骤。

> 你可以取任何复杂或简单的关于x的函数。

接下来，看看如何做。

先画函数

先进行初始化猜测（initial guess），即第一个猜测。距离5最近的x^2是4，也就是x是2。然后，我们假设函数是线性的，找出横坐标为2的点，在点(2,f(x))处做切线。x1将成为我们新的猜测点。

> 想法就是：2离目标比x_1离目标更远点，然后我们不断重复来看多久才能找到我们想要找的点。

有了猜测，有了切线，我们还知道切线的通式：

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

当y值为0时，即可以得到x_1的值，根据切线公式：

$$\boxed{\begin{aligned}&0-y_0=m(x_1-x_0)\\&-y_0/m=x_1-x_0\\&x_1=x_0-\frac{y_0}{m}\\&x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\end{aligned}}$$

上面的公式就可以帮我们解任何方程的根，得出牛顿迭代法公式：

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

接下来，我们就可以解上面的例子了

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 2; f(x) = x^2 - 5; f'(x) = 2x \\ x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5}{2x_0} \\ x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2x_0} \end{array}}$$

所以：

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} + \frac{5}{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{161}{72} \\ x_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{161}{72} + \frac{5}{2} \cdot \frac{161}{72} \end{array}}$$

迭代次数与误差：

n	$\sqrt{5} - x_n$
0	2×10^{-1}
1	10^{-2}
2	4×10^{-5}
3	4×10^{-10}

从上面的表格我们知道，当迭代到第三次时，这个数字精确度在10^{-10}数量级，它超过了实际中需要的精度，这也是我们在这里计算的极限了。

牛顿迭代法的性质很好，第n+1次的误差是第n次的平方倍，记作：$E_{n+1} = E_n^2$。例如：

迭代次数	误差
0	10^{-1}
1	10^{-2}
2	10^{-4}
3	10^{-8}
4	10^{-16}