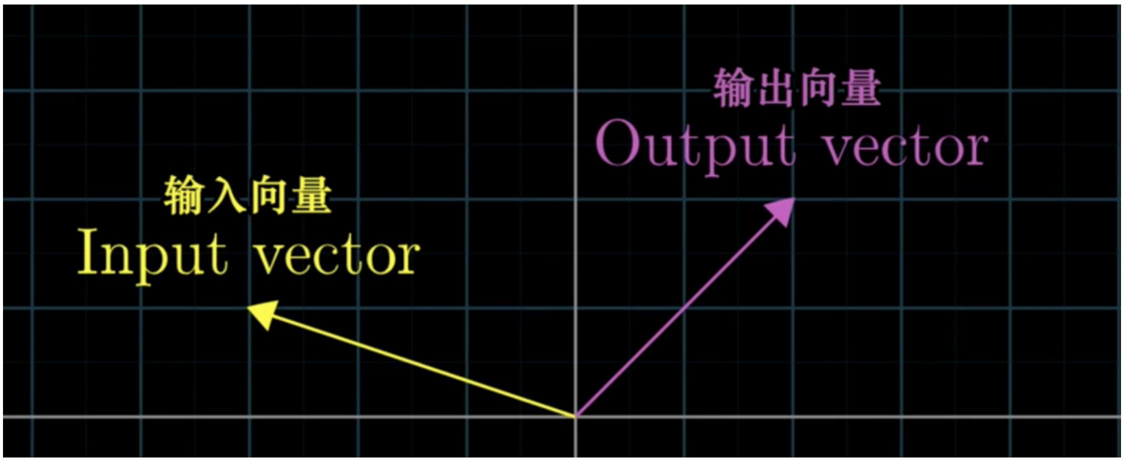
线性变换与矩阵向量乘法

4.1.线性变换

线性变换（linear transformation）中的变换一词本质上是“函数”的一种花哨（fancy）的说法，它接收输入内容，并输出相应结果。在线性代数中，我们考虑的是接收一个向量并且输出一个变换后的向量

变换暗示了以某种特定方式可视化这一输入输出关系。

> The word "transformation" suggests that you think using movement.



如果一个变换接收一个向量并输出一个向量，我们想象这个输入向量移动到输出向量的位置

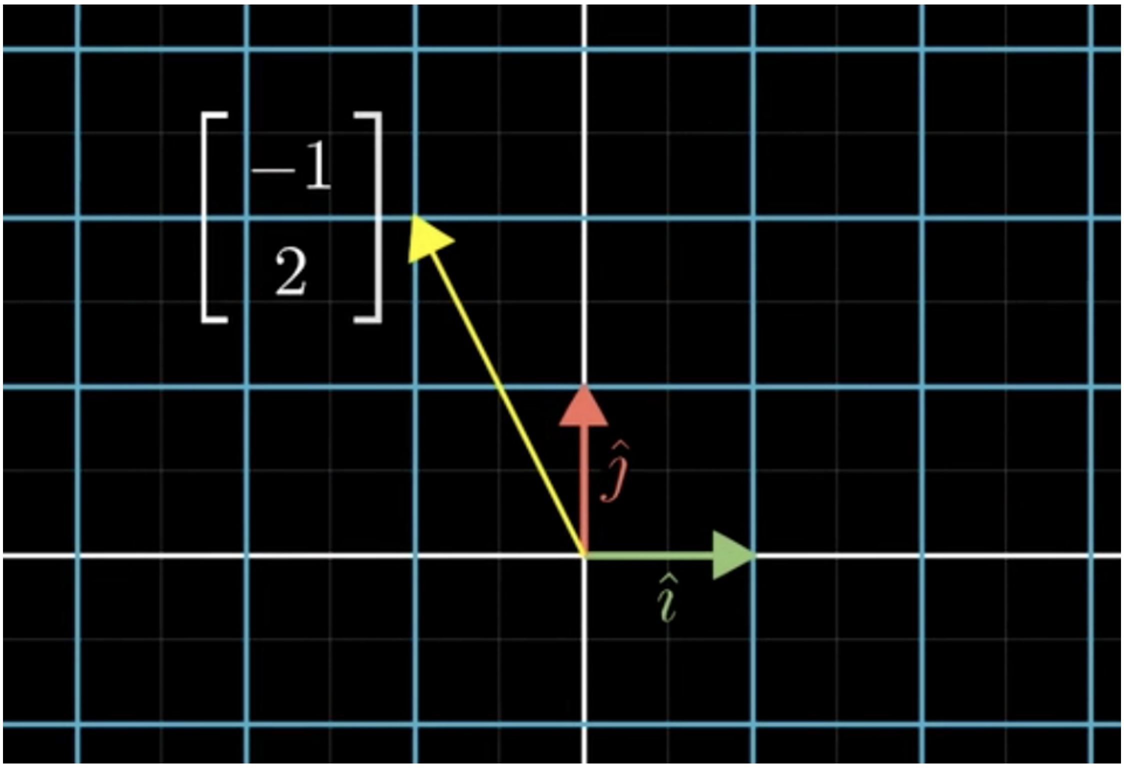
如果一个变换具有以下两条性质就说它是线性的：

- 直线在变换后仍然保持直线，不能有弯曲；（对角线也不能弯曲）
- 原点保持固定

总的来说，线性变换是保持网格线平行且等距分布的变换。

那么，应该如何用数值去描述这些线性变换呢？应该用什么样的公式，使得你给它一个向量的坐标，它能给你变换后向量的坐标呢？ 实际结果是，你只需要记录两个基向量i帽和j帽变换后的位置，其他向量都会随之而动。

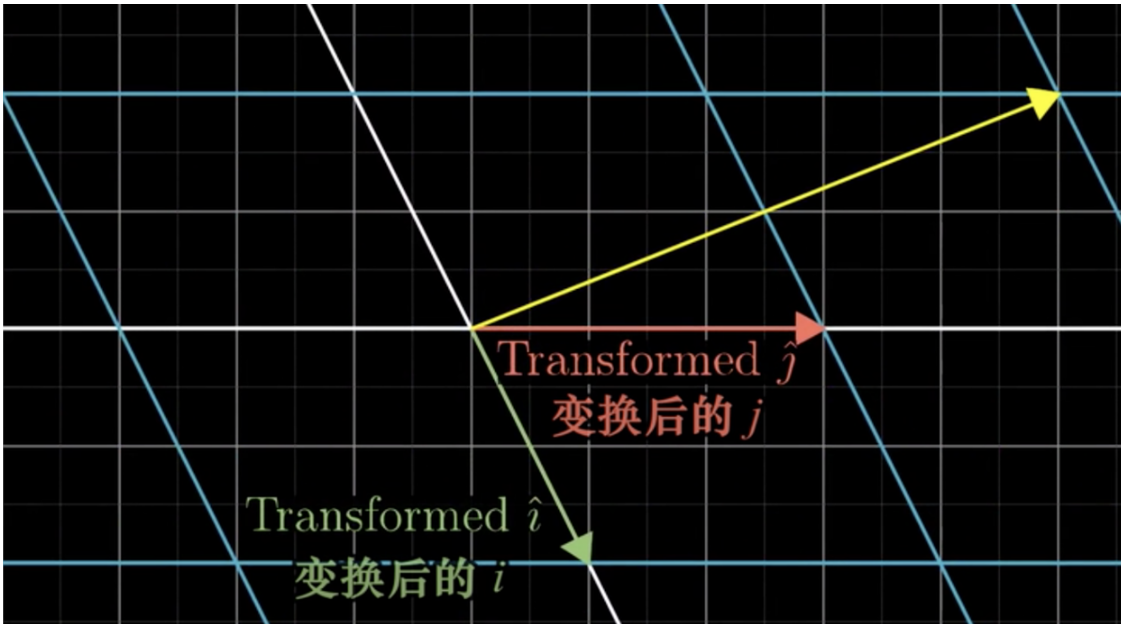
比如，考虑一个(-1,2)的向量：



这个向量是：

$$\hat{v} = -1\hat{i} + 2\hat{j}$$

如果我们运用某种变换，并且跟随这三个向量的运动。根据网格线保持平行且等距分布的性质有一个重要的推论：变换后的向量v的位置，是-1与变换后的i帽的积，加上2与变换后的j帽之积。换句话说，向量v是i帽和j帽的一个特定线性组合，那么变换后的向量v也是变换后i帽和j帽的同样的线性组合。这意味着，可以只根据变换后的i帽和j帽就可以推断出变换后的v 如上图中的向量经过变换后：

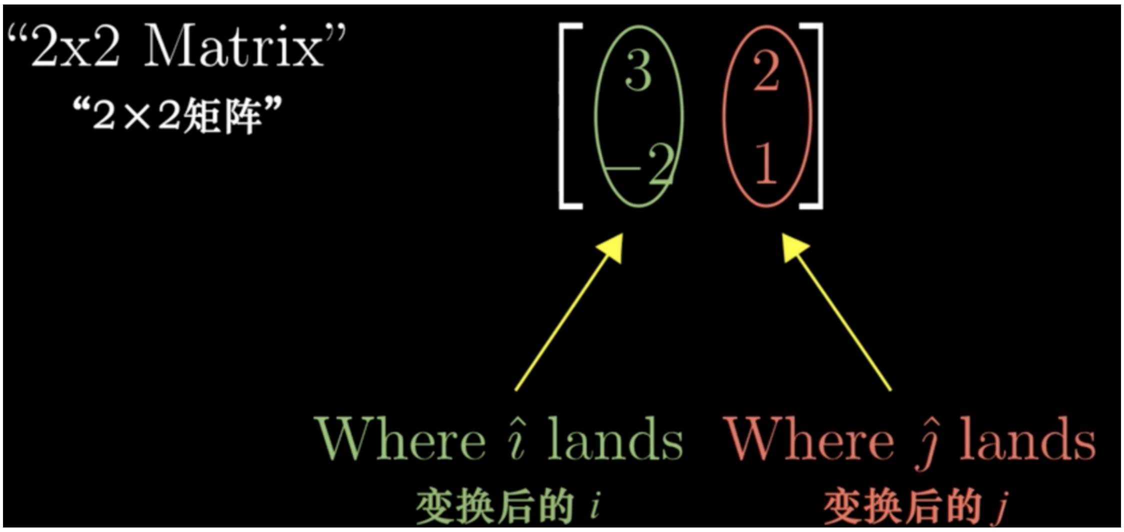


变换后的i帽在(1,-2)上，j帽在(0,3)上，所以变换后的向量v：

$$\hat{v} = -1\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

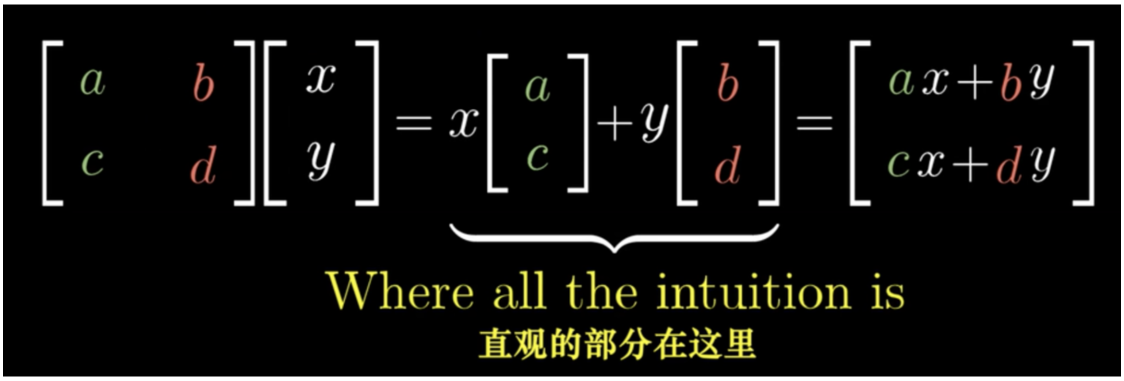
很酷的是：只需要记录了变换后的i帽和j帽的位置就可以推断出任何向量在变换之后的位置，完全不必观察变换本身是什么样。

二维线性变换通过4个数字就可以描述出变换，我们将它分装到一个2×2的格子中，称为2×2的矩阵



4.2. 线性变换与矩阵向量乘法的关系

任何向量的线性变换可以定义为矩阵向量乘法。我们将2×2的矩阵放在向量左边，类似一个函数。矩阵与向量相乘的结果就是向量变换后的位置：



我们把矩阵的列看做变换后的基向量；把矩阵乘法看做它们的线性组合

练习1： 向量逆向旋转90度

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

练习1： 向量逆向旋转90度

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

> 矩阵向量乘法就是计算线性变换作用于给定向量的一种途径

当看到一个矩阵时，就可以把它解读为对空间的一种特定变换。

“线性”的严格定义如下：

若一个变换L满足以下两条性质

$$L(\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}) = L(\vec{\mathbf{v}}) + L(\vec{\mathbf{w}}) \qquad \text{(1)“可加性”}$$

$$L(c\vec{\mathbf{v}}) = cL(\vec{\mathbf{v}}) \qquad \text{(2)“成比例”（一阶齐次）}$$

则称L是线性的。

后续我会讨论这些性质，但是我对“首先形象地理解事物”这一点深信不疑。一旦你做到了，为什么这两条性质合乎情理也就变得更加直观。就目前来说，你完全可以认为线性变换就是保持网格线