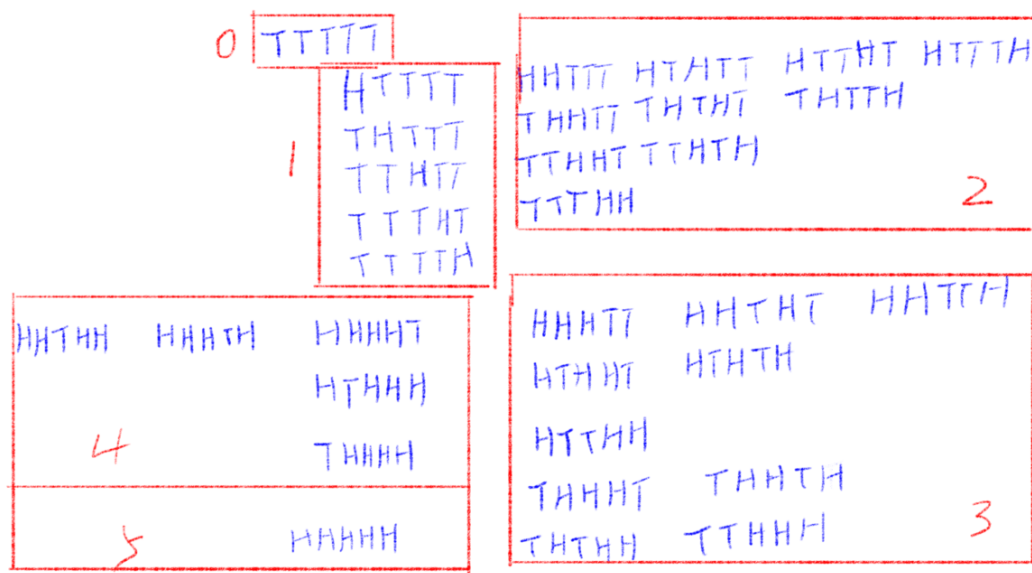


例题：投掷5枚硬币，统计正面出现次数的概率。

首先，我们看一下所有可能情况：



投掷5次硬币，总共有32种可能情况。因为每一次有两种可能，所以投5次的可能就是 $2^5 =$

从上图中可以知道，出现0次正面的概率为 $\frac{1}{32}$ 。从排列组合上说：

$$P(X = 0) = \frac{5!}{0!5!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

出现1次的概率为 $\frac{5}{32}$ 。从排列组合上说：

$$P(X = 1) = \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

出现2次的概率为 $\frac{10}{32}$ 。从排列组合上说：

$$P(X = 2) = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32}$$

出现3次的概率为 $\frac{10}{32}$ 。从排列组合上说：

$$P(X = 3) = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32}$$

出现4次的概率为 $\frac{5}{32}$ 。从排列组合上说：

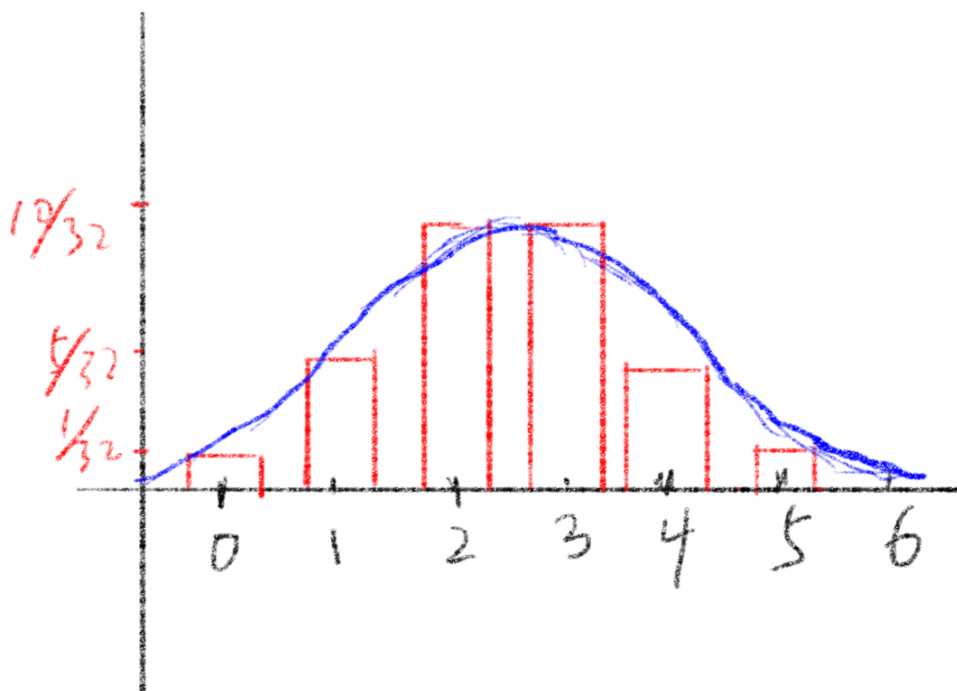
$$P(X = 4) = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

出现5次的概率为 $\frac{1}{32}$.从排列组合说:

$$P(X = 1) = \frac{5!}{5!0!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

还可以从直观上看,例如,5次投掷的所有32个结果中,第一个H出现的位置有5种,第二个出现的位置有4种,去除重复,也就是 $(5 \times 4)/2 = 10$,每一种情况的概率为 $\frac{1}{32}$,所以出现两次正面的概率为 $\frac{10}{32}$ 。

知道了概率,我们来画概率分布:



当X取值越多,越趋近于正态分布。

上面的例子叫做二项式分布 (binomial probability distribution)。之所以叫二项式分布,是因为所有概率可以通过二项式系数确定。二项分布的每次试验只能有两种结果。

再来看一个例子:投篮6次,每次投中的概率为30%。

首先定义一个变量: $X =$ 投中的次数。这里的情况更复杂,因为投中与没投中的概率是不一样的。

一球不中的概率:

$$P(x = 0) = 0.7 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7 = 0.118 = 11.8\%$$

投中一球的概率：

$$P(x=1) = \binom{6}{1} \times 0.7^5 \times 0.3 = \frac{6!}{1!5!} \times 0.7^5 \times 0.3 = 30.2\%$$

$\binom{6}{1}$ 表示的是6个结果选择1个。

投中两球的概率：

$$P(x=2) = \binom{6}{2} \times 0.7^4 \times 0.3^2 = \frac{6!}{2!4!} \times 0.7^4 \times 0.3^2 = 32.4\%$$

投中三球的概率：

$$P(x=3) = \binom{6}{3} \times 0.7^3 \times 0.3^3 = \frac{6!}{3!3!} \times 0.7^3 \times 0.3^3 = 18.5\%$$

投中四球的概率：

$$P(x=4) = \binom{6}{4} \times 0.7^2 \times 0.3^4 = \frac{6!}{4!2!} \times 0.7^2 \times 0.3^4 = 6\%$$

投中五球的概率：

$$P(x=5) = \binom{6}{5} \times 0.7 \times 0.3^5 = \frac{6!}{5!1!} \times 0.7 \times 0.3^5 = 1\%$$

投中六球的概率：

$$P(x=6) = \binom{6}{6} \times 0.3^6 = \frac{6!}{6!0!} \times 0.3^6 = 0.07\%$$

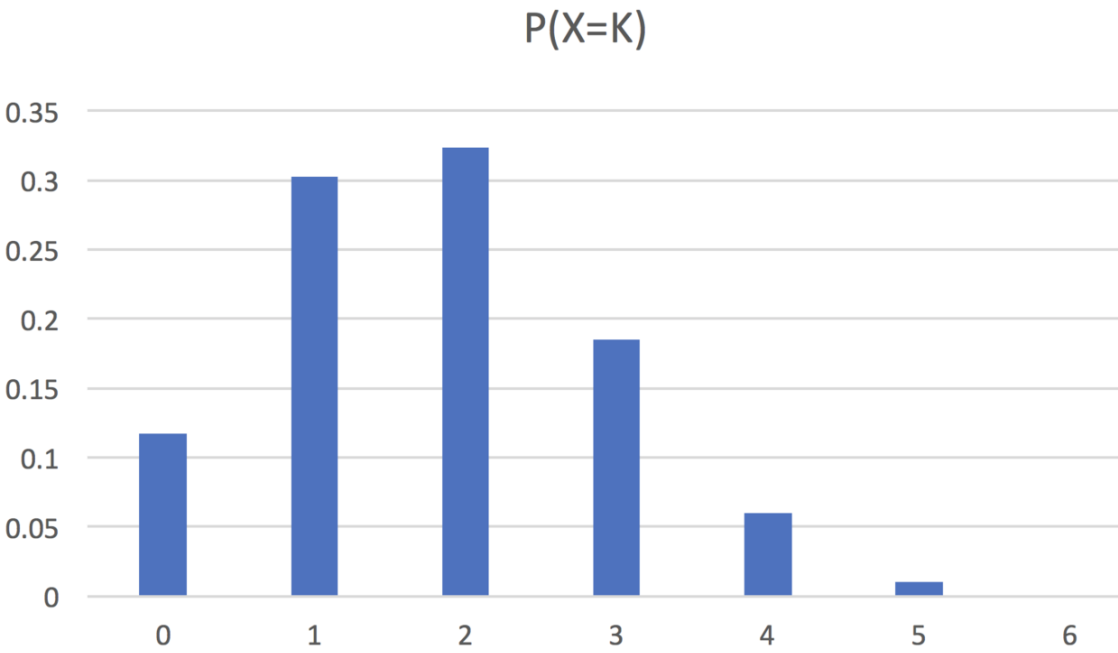
用excel统计如下：

投篮次数(N)	6	命中率(Y)	0.3	未命中(M)	0.7
命中数(K)	概率(P)	N个选择K	P(X=K)		
0	0.117649	1	0.117649		
1	0.050421	6	0.302526		
2	0.021609	15	0.324135		
3	0.009261	20	0.18522		
4	0.003969	15	0.059535		
5	0.001701	6	0.010206		
6	0.000729	1	0.000729		

概率公式： $Y^k \times M^{1-k}$
N中选择K个： $\frac{N!}{K!(N-K)!}$
 $P(X=K)$ = 概率乘上 (N个选择K)

在二项分布中，选中的情况是对称的，而概率是不对称的（除非概率为0.5）。

概率分布图表如下：



二项式的一般公式：

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

