证明：当$a=\frac{m}{n}, m\&n$是整数时：$\frac{d}{dx}x^a=ax^{a-1}$成立。

$$
\boxed{\begin{aligned}
&y=x^{\frac{m}{n}}\\
&y^n=x^m\\
&\frac{d}{dx}y^n=\frac{d}{dx}x^m\\
&(\frac{d}{dy}y^n)\frac{dy}{dx}=mx^{m-1} &&\#\text{左侧为链式法则}\\
&ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}\\
\\
&\frac{dy}{dx}=\frac{mx^{m-1}}{nyn-1}\\
&=\frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{(x^{m/n})^{n-1}} &&\#\text{代入}\\
&=\frac{m}{n}x^{m-1-(n-1)\frac{m}{n}}\\
&=\frac{m}{n}x^{m-1-m+\frac{m}{n}}\\
&=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\\
&=ax^{a-1}
\end{aligned}}
$$

1. 隐函数

如果方程F(x,y)=0能确定y是x的函数，那么称这种方式表示的函数是隐函数。 如：$\boxed{x^2+y^2=1}$。其显函数为：$\boxed{y=\pm\sqrt{1-x^2}}$。

隐函数有两种解法。第一种解法就是将隐函数转换为显函数，再求导。先考虑上半圆：$\boxed{y=\sqrt{1-x^2}}$。

其导数:

$$
\boxed{\begin{aligned}
&y'=(1-x^2)^{1/2} &&\#\text{根号形式转换为平方形式，这是含有根的求导的第一步}\\
&=\frac{1}{2}(\ldots)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x) &&\#\text{根据链式法则求导}\\
&=\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x)\\
&=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}}
$$

第二种：分别对隐函数两边求导。这是可以快速获得斜率的方法

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}1\\&\Rightarrow 2x+\frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx}=0\\&\Rightarrow 2x+2yy'=0\\&\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}\end{aligned}}$$

这两种解法的结果是一致的：因为 $y=\sqrt{1-x^2}$

例：$y^4+xy^2-2=0$
我们先将其转化为显函数：

$$\boxed{\begin{aligned}&y^2=\frac{-x\pm\sqrt{x^2-4(-2)}}{2} \qquad \#\text{可以将四阶方程看做是}(y^2)^2\text{的二次方程。可以用一元二次方程的求根公式解}\\&y=\pm\sqrt{\frac{-x\pm\sqrt{x^2-4(-2)}}{2}}\end{aligned}}$$

用上面的显函数来求导，会非常复杂。我们可以直接用隐函数求导：

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}y^4+\frac{d}{dx}xy^2-\frac{d}{dx}2=\frac{d}{dx}0\\&\Rightarrow \frac{d}{dy}(y^4)\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}x\cdot y^2+x\frac{d}{dx}y^2-0=0\\&\Rightarrow 4y^3y'+1\cdot y^2+x(2yy')-0=0\\&\Rightarrow y'(4y^3+2xy)=-y^2\\&\Rightarrow y'=\frac{-y^2}{4y^3+2xy}\end{aligned}}$$

用隐函数解方程的意义在于当知道某点的位置后，可以直接代入值求得其导数。如上面的例子，求P(1,1)的导数。代入公式可以知道其导数值为：$-\frac{1}{6}$
如果我们不知道函数上的某一点的位置。例如，只知道x位置，不知道y的位置，情况就复杂了。根据显函数，可以知道x可以确定多个y，也就是有多个P(x,y)，求导数也就需要一个个值分别处理。

---

2. 反函数

如果$y=f(x)$，有另一个函数:$g(y)=x$，则称g函数是f函数的反函数，或者f函数是g函数的反函数，记作：
$f^{-1}=g,g^{-1}=f$

用隐函数微分可以快速的求反函数的导数。例如y是$\sin x$的反函数，记作：$y=\sin^{-1}x$。求反函数的导数过程：

$$\boxed{\begin{aligned}
&y = \sin^{-1} x \\
&\Rightarrow \sin y = x \\
&\Rightarrow (\cos y) y' = 1 \\
&\Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}}$$