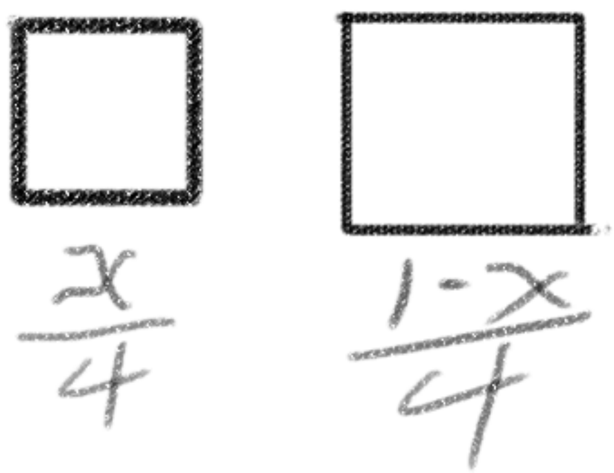
> 找最大值和最小值的关键思路：找到驻点、端点以及不连续点

例1：将一根长度为1的绳子剪成两段，每一段圈成一个正方形，求所能得到的最大面积？

在很多情况下，我们遇到的是文字描述，我们的工作是作图。作图时，有两个主要的任务： 画图与设变量。示意图如下：

这样，两个四边形的边长分别为：$\frac{x}{4}$与$\frac{1-x}{4}$：



两个四边形的面积和（A）为：

$$\boxed{A=(\frac{x}{4})^2+(\frac{1-x}{4})^2}$$

接下来需要求导函数，并找出驻点，

$$\boxed{\begin{aligned} A' &= \frac{x}{8}-\frac{1-x}{8} \qquad \#\text{链式法则求} \\ &= \frac{2x-1}{8} \end{aligned}}$$

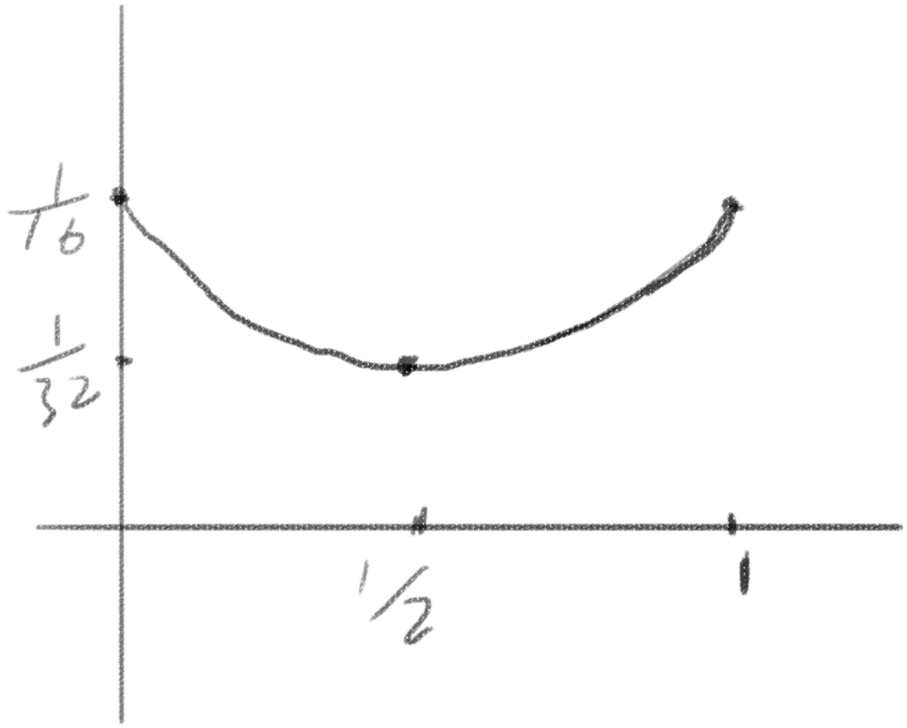
当且仅当$x = \frac{1}{2}$时，A'为0，也就是驻点为$\frac{1}{2}$,代入函数A中，求得驻点值为$\frac{1}{32}$.

我们还需要检查端点（end points）。这个案例中，端点已经被截断了，它在0到1之间，这是截断的可能长度，所以我们计算的是一个极限。

当x趋于0时A的右极限：$\boxed{A(0^+) = 0 + (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}}$

当x趋于1时A的左极限：$\boxed{A(1^-) = (\frac{1}{4})^2 + 0 = \frac{1}{16}}$

所以，得到的函数图像是这样的:



我们找到驻点的是时候，我们得到的不是能围成的最大面积，我们得到的是最小的面积。如果不注意函数图形性质的话，半数情况下，可能得到是完全相反的答案，

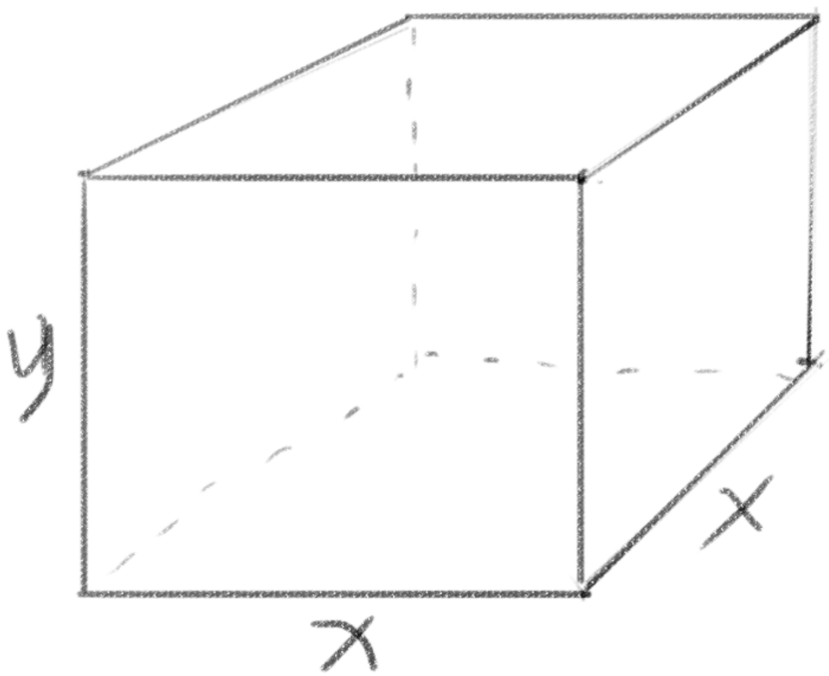
在这个案例中，当从中截断时，得到最小的面积：$\frac{1}{32}$。当只有一个正方形时面积最大，这是个极限情况，此时的最大面积为：$\frac{1}{16}$

> 术语说明：
> 什么是最小值（what is the minimum）？指的是minimum value，在上面案例中即$\frac{1}{32}$
> 哪里是最小值（where is the minimum）?指的是minimum point。在上面案例中即$x = \frac{1}{2}$

例2：找出固定容积的无顶盖的盒子，使其表面积最小值。

解题步骤：1.画图。2.设变量

最好的盒子，底部是正方形，可以帮助我们省略一个变量，画图如下：



盒子的容积：

$$\boxed{V = x^2 y}$$

无顶盖的盒子的表面积：

$$\boxed{A = x^2 + 4xy}$$

根据容积公式，我们可以把y写出x的表达式：

$$\boxed{y = \frac{V}{x^2}}$$

代入方程求A：

$$\boxed{A = x^2 + 4x(\frac{V}{x^2}) = x^2 + \frac{4V}{x}}$$

现在，我们有了A的方程，接下来我们需要找驻点。 首先，求导函数:

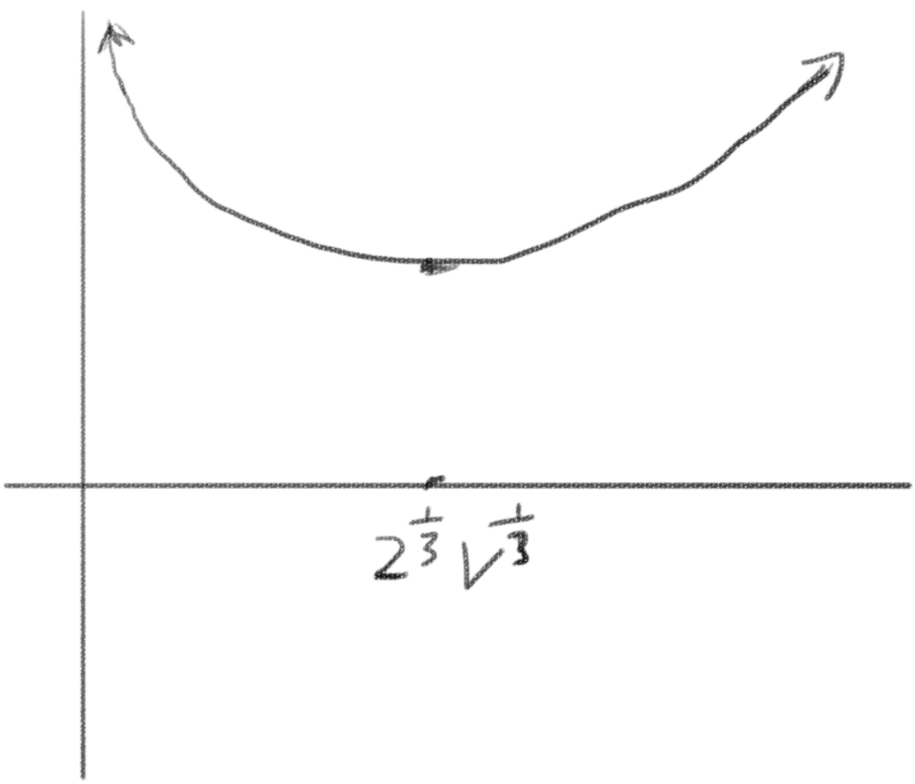
$\boxed{A' = 2x - \frac{4V}{x^2}}$。令其为0，得到驻点x：

$$\boxed{\begin{aligned}&2x=\frac{4V}{x^2}\\&x^3=2V\\&x=2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}}\end{aligned}}$$

知道了驻点，我们还不能确定它是最优的还是最差的解，不知道这是表面积最大，还是表面积最小，所以，需要检查一下边界处的值。这里：$0<x<\infty$。所以：

$$\boxed{\begin{aligned}&A(0^+)=x^2+\frac{4V}{x}|_{x=0^+}=\infty\\&A(\infty)=x^2+\frac{4V}{x}|_{x=\infty}=\infty\end{aligned}}$$

我们得到了如下图形：



从中，我们可以得到最小值点：$2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}}$

我们可以用二阶导数进行检验：

$$\boxed{A''=2+\frac{8V}{x^3}>0,\ \therefore curve\ is\ concave\ up}$$

所以，驻点值是最小值点。

知道了驻点值，我们就可以求最小面积，获得最节省的盒子制造方案：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&y=\frac{V}{(2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}})^2}=2^{\frac{-2}{3}}V^{\frac{1}{3}}\\
&A=(2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}})^2+\frac{4V}{2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}}}=3\cdot 2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
}
$$

上面的公式很繁杂，不够直观，我们可以从一个更有意义的角度来解释这个答案。我们找到无量纲的比例：

$$
\boxed{\frac{x}{y}=\frac{2^{\frac{1}{3}}V^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{-2}{3}}V^{\frac{1}{3}}}=2}
$$

也就是说，当x与y的宽高比是2:1时，同容积下盒子表面积最小。实际上，这才是这个问题最优的答案。

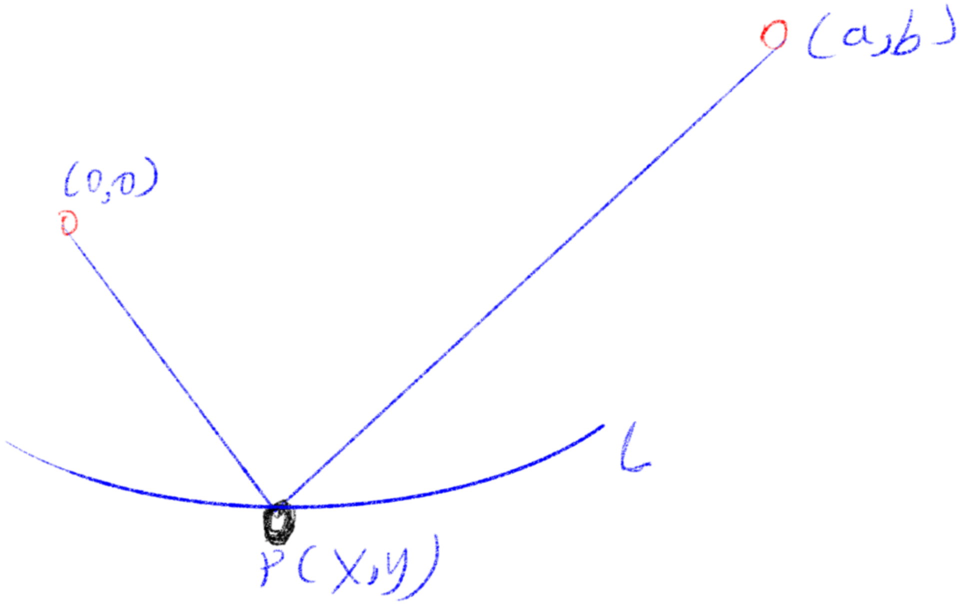
例3： 用隐函数微积分解例2的问题

前几步的步骤是一样的： $\boxed{V=x^xy,\quad A=x^2+4xy}$

要做的是，求V固定时A的最小值。我们要做的是直接求导：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(V=x^2y)\implies 0=2xy+x^2y'\\
&y'=\frac{-2xy}{x^2}=\frac{-2y}{x}\\
&\frac{dA}{dx}=2x+4y+4xy'=2x+4y+4x(\frac{-2y}{x})=2x+4y+(-8y)\qquad \#\text{将y'代入}\\
&2x+4y-8y=0\\
&\Rightarrow 2x=4y\\
&\frac{x}{y}=2
\end{aligned}
}
$$

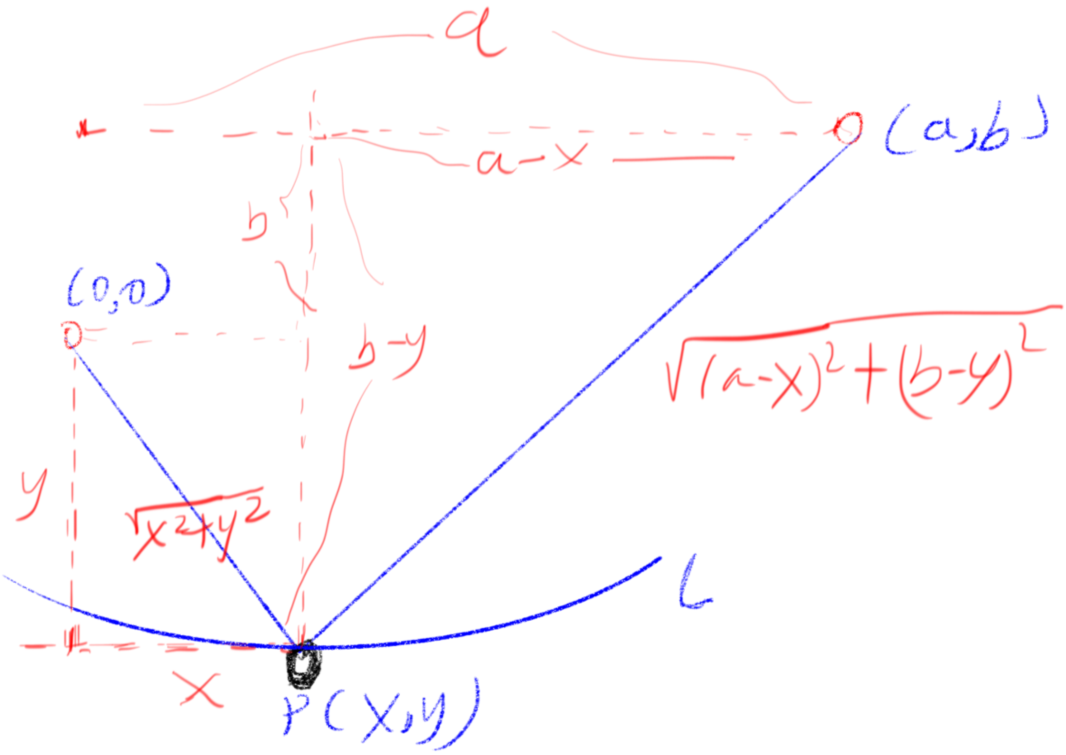
例4：斜拉桥原理：在线上绑上一个圆环。两个端点在不同的高度，求圆环最终停留的位置。



曲线L是圆环可能停留的位置，p是圆环最终的位置。我们实际要做的就是求曲线的最小值。因为，物理上，重力会使物体停留在最低点，这是势能最低的点，所以要求的就是函数的最小值。关键是如何求得L函数。

我们用一个特殊的方法可以得到这条曲线：曲线上的所有点，都是同个同一条线产生，所以线的左右两端与曲线L上任意点连线的长度相同（限制条件：线的长度是相同的）。

为了得到这个限制条件，也就是描述出线的长度，接下来我会画一些辅助线：



所以曲线L：

$$\boxed{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}=L}$$

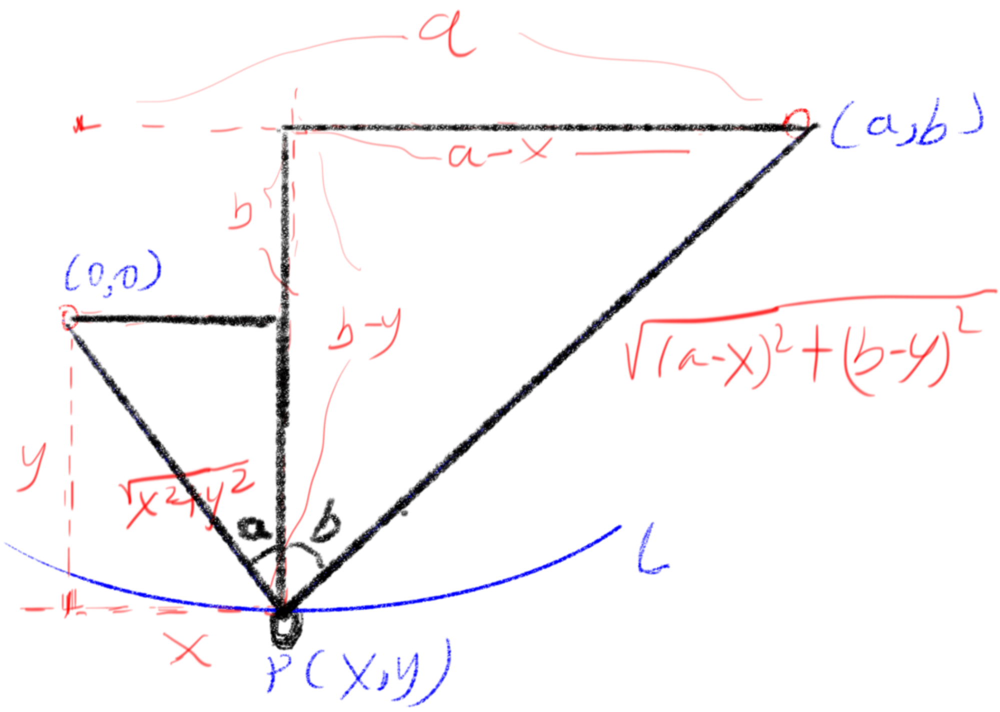
我们要做的是在这个约束方程中用隐函数微分：

$$\boxed{\frac{2}{2}\cdot\frac{x+yy'}{(x^2+y^2)^{1/2}}-\frac{(a-x)+(b-y)y'}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}=0}$$

曲线的最低点是个驻点，也即y'=0的点。所以上面的隐函数微分表达式可以简化为：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}-\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}=0\\ \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}=\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}\end{aligned}}$$

我们再来看一下图形：



$$\boxed{\begin{aligned}\sin a &= \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\\ \sin b &= \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}\end{aligned}}$$

再根据隐函数微分方程，我们可以知道，p点的最终停留位置，∠a和∠b的角度是相同的。同理，我们知道无论怎么倾斜，两条线与水平面的夹角是一样的。现在，我们得出了对称性。

如果你画出张力图，会发现两边的张力是一样的。意味着构造这样的悬挂模型时，线上的张力是最小的，否则悬挂的东西很重，一条线上承受另一条两倍的张力，断掉的可能性就是两倍。而这里，它们的张力一样，承重的方法更加平衡，这即使最小值问题，也是分配重量的好方法。