叉积，也叫外积，适用于三维空间中的两个向量。

点积的结果是数字，而叉积的结果是向量。

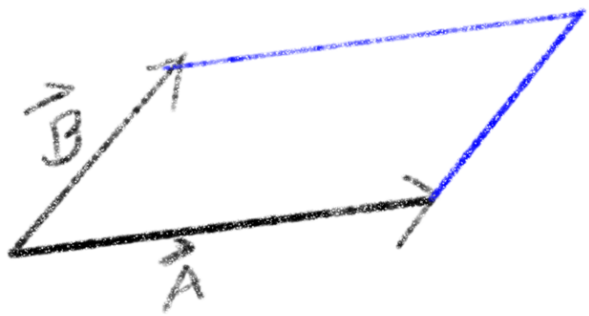
$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

> $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$为单位向量

从几何上解释叉积。

1. 叉积的模长等于向量A与向量B在空间内构成的平行四边形的面积：

$$|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = \text{area of parallelogram}$$

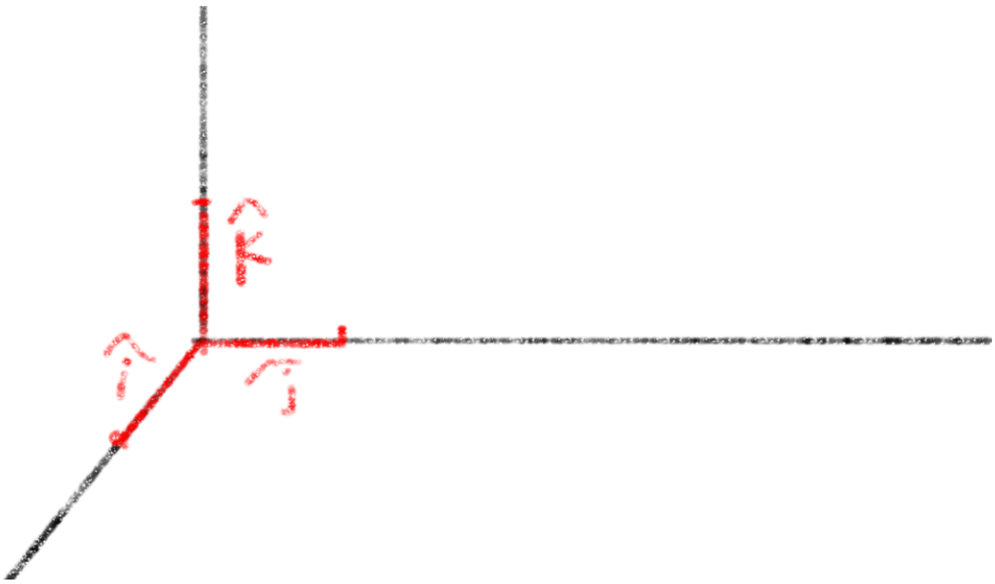


2. 叉积形成的向量垂直于平行四边形所在的平面

$$dir(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \perp \text{ to plane of the parallelogram}$$

> 垂直的方向遵循的是右手法则：伸出右手，让手指指向向量A的方向，然后弯曲手指让它们指向向量B的方向，最后，伸直拇指。拇指的方向即是叉积形成的向量的方向。
> $$\boxed{\begin{array}{l} \text{right hands points } //\overrightarrow{A} \\ \text{fingers point}//\overrightarrow{B} \\ \text{thumb points}//\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \end{array}}$$

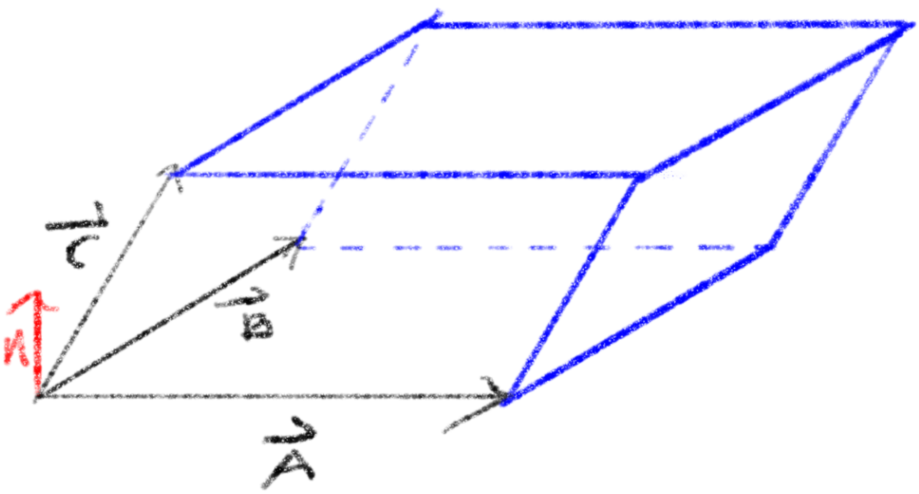
习题1：$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$



我们用叉积证明一下：$\hat{i}=(1,0,0);\hat{j}=(0,1,0)$

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0\hat{i}-0\hat{j}+1\hat{k}=\hat{k}$$

习题2：求立方体的面积



> 思路：立体体的面积公式：底面积×高。
> 向量A与向量B的叉积的模长为底面积。向量n为向量A与向量B的叉积。叉积除以模长得到了纵轴上的单位长度
> 向量C与向量n做点乘可以得到向量C在纵轴上的高度。

$$\text{cube area} = |\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| \times \overrightarrow{C} \cdot \hat{n} = |\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| \times \overrightarrow{C} \cdot \frac{\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}|} = \overrightarrow{C} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B})1$$

行列式等价于：

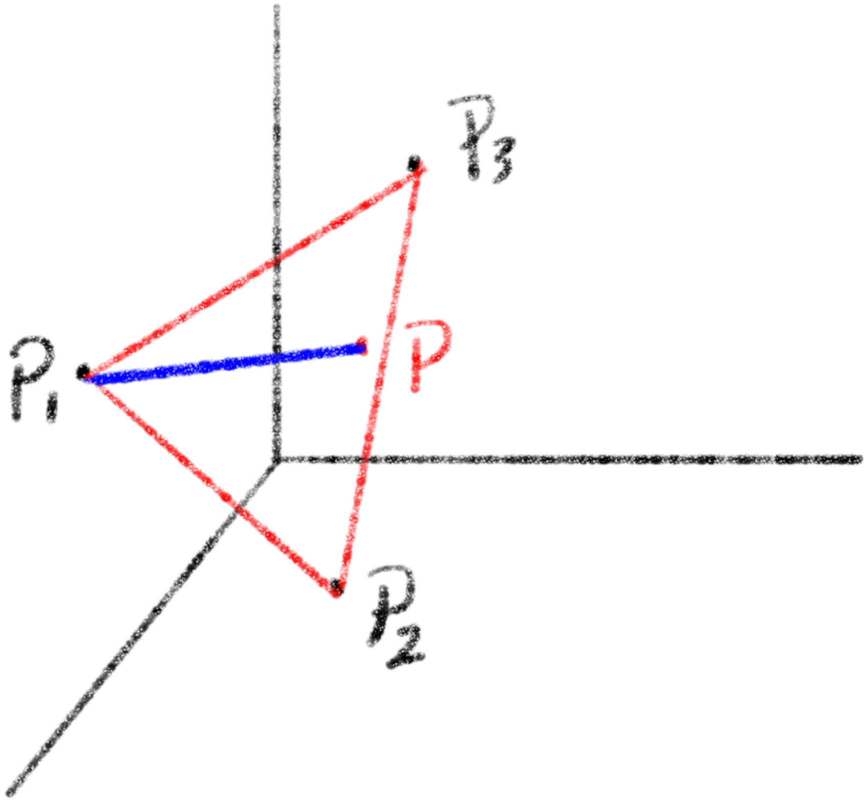
$$\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) \qquad \#\text{等价式右侧为混合积}$$

叉积的一些性质：

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{A} = 0$$

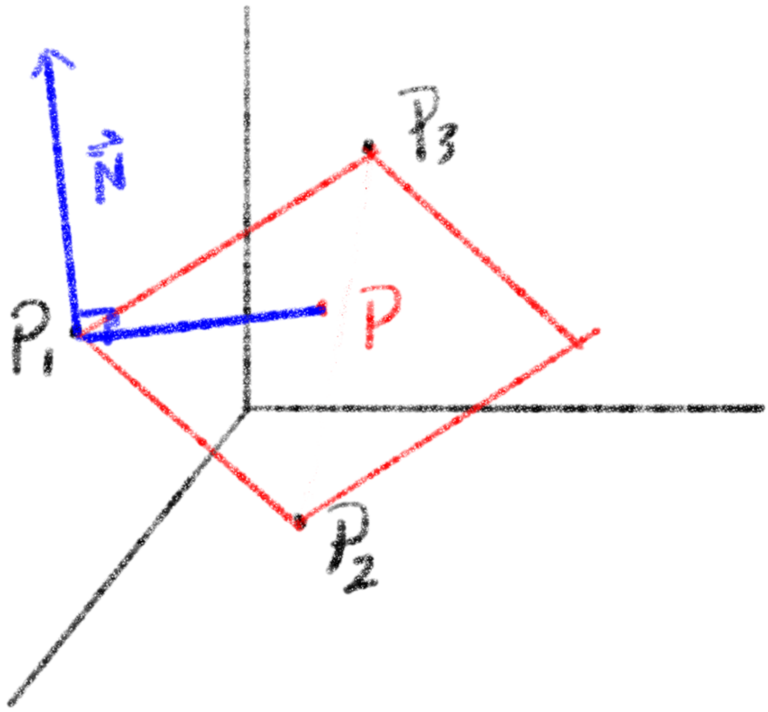
习题：找到空间内三个点决定的平面的方程，也就是找到任意一点P。

解法1：用行列式求P_1, P_2, P_3以及P构成的立方体的面积，当面积为0时，也就是P在P_1, P_2, P_3构成的平面内



$$\det(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$

解法2：当$\overrightarrow{P_1P}$垂直于P_1, P_2, P_3构成的平面的法线时，P就在这个平面上。



$\overrightarrow{P_1P} \perp \overrightarrow{N}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} \cdot \overrightarrow{N} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3})$