1. 指数（exponential）

指数是幂运算a^n(a≠0)中的一个参数，a为底数，n为指数，指数位于底数的右上角。

指数有以下的性质：

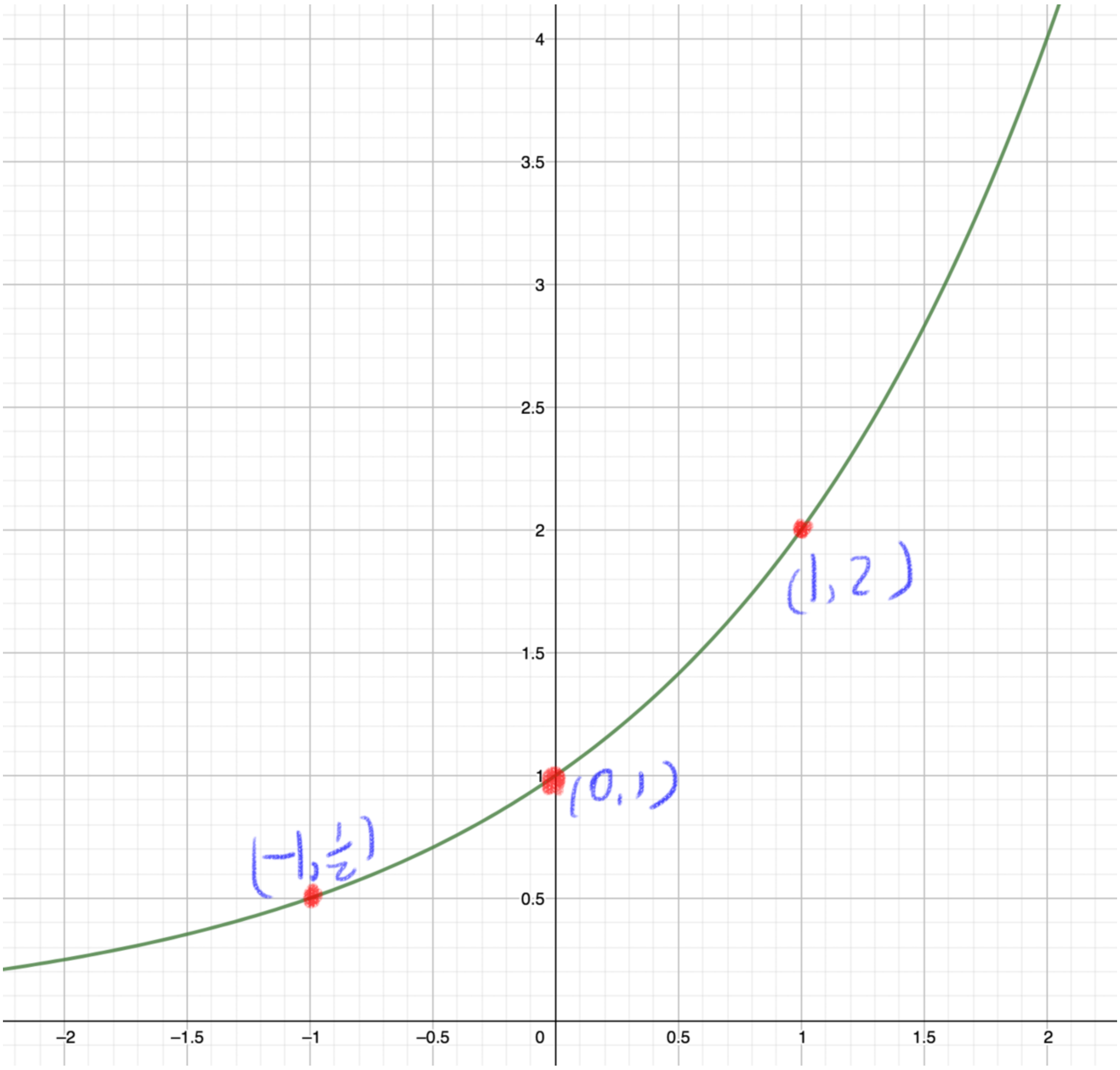
$$\boxed{\begin{array}{l} a>0, a^0=1;\ a^1=a;\ a^2=a\cdot a \\ a<0, a^{-1}=\frac{1}{a} \\ a^{x1+x2}=a^{x1}a^{x2} \\ (a^{x1})^{x2}=a^{x1x2} \\ a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \end{array}}$$

对于任意x, a^x可以通过插值（filling in）实现。

> a^x is defined for all x by "filling in" by continuity

> 插值法就是一个从已知点近似计算未知点的近似计算方法,即构造一个多项式函数,使其通过所有已知点,然后用求得的函数预测位置

如:$y=2^x$。当我们知道(-1,1\2),(0,1),(1,2)这三个点后，通过插值就可以绘制它的函数形状：



今天，我们的目标是求：$\boxed{\frac{d}{dx}a^x}$

也就是求：

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} \qquad \text{\#化简} \\ &\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \end{aligned}$$

这里，我们需要理解一个概念：大家习惯将x看做是一个变量，但对于极限的情况， 变化的是另一个变量Δx,此时x是固定不变，变化的是Δx，此时可以将上式中的a^x看做一个常量，可以提取到极限操作之外。目前，求导结果为：

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}$$

所以，先看看它包含了什么信息。式子表明，a^x的导数是a^x乘以某个未知的式子。姑且将这个未知的式子记作“谜之数M(a)”。M(a)记作：

$$\boxed{M(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}$$

这个谜一样的数字还有几何解释。这时，求导结果为：

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = a^x M(a)}$$

插入$x=0$时的结果为：

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x|_{x=0} = M(a)a^0 = M(a)}$$

M(a)是指函数在$x=0$处的斜率。

那么，M(a)久经是什么呢？我们可以定义一个假设：定义一个独特的数字e，使M(e)=1。把e带进去可以得到一个有用的公式：

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x}$$

代入$x=0$得到：

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x|_{x=0} = 1}$$

> 为什么e必定存在?
>
> $$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = 2^x, f'(0) = M(2). \\ stretch\ by\ k. \\ f(kx) = 2^{kx} = (2^k)^x = b^x \\ b = 2^k \qquad\qquad \#\text{转化为了以}2^k\text{为底（base）的函数} \end{array}}$$
>
> 扩展后的新函数$f(kx)$相当于压缩x轴，随着k的增加，斜率也会越来越陡。下面用数学语言来描述：
>
> $$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dx}b^x = \frac{d}{dx}f(kx) = kf'(kx) \qquad\qquad \#kf'(kx)\text{根据链式法则获得} \\ \frac{d}{dx}b^x|_{x=0} = kf'(0) = kM(2) \\ b = e\ when\ k = \frac{1}{M(2)} \end{array}}$$

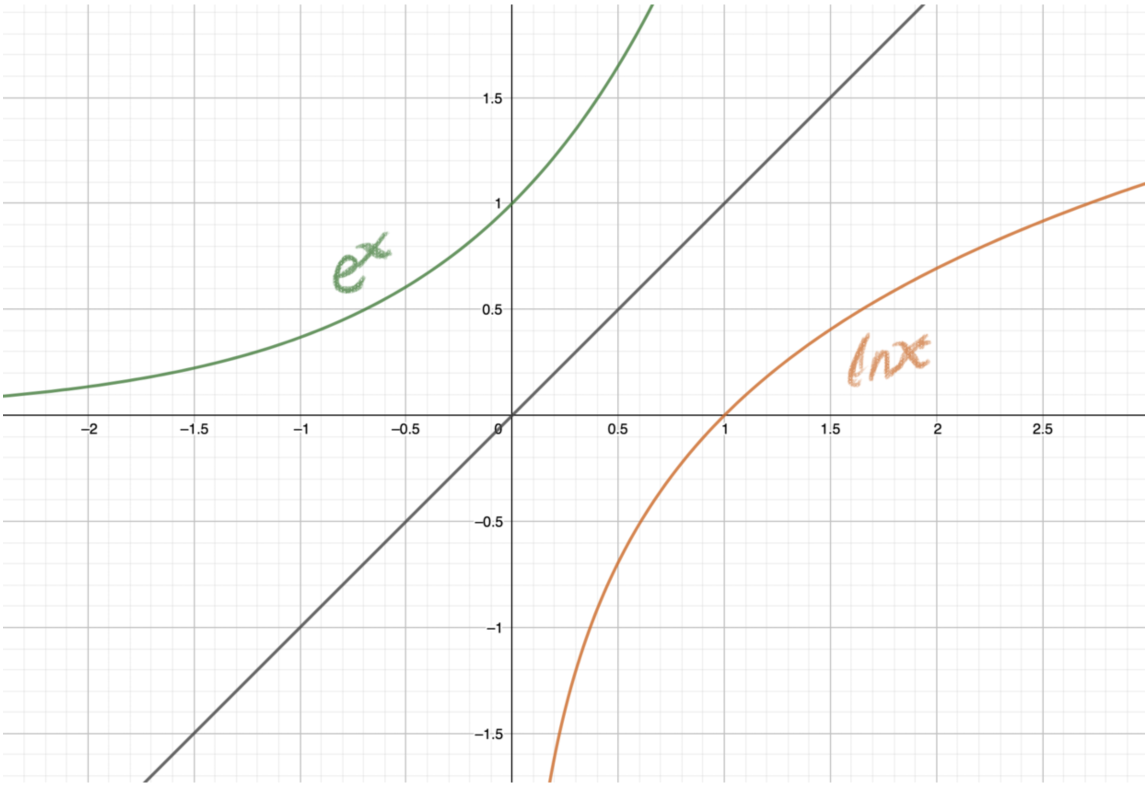
最后，需要引入自然对数。自然对数（natural log）记作：

$$\boxed{\begin{array}{l} w = \ln x \\ y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x \qquad\qquad \#\text{对数是对求幂的逆运算} \end{array}}$$

自然对数有以下的性质：

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(x_1x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2) \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \end{array}}$$

对数与指数互为逆运算，如图所示：



求对数函数的导数需要用到隐函数微分法，这是求逆函数导数的一般方法。求对数函数的$\frac{d}{dx}\ln x$的推导过程：

$$\begin{aligned}
&w=\ln x \Rightarrow e^w = x \qquad \text{\#两边同时以e为底}\\
&\frac{d}{dx}e^w = \frac{d}{dx}x = 1\\
&(\frac{d}{dw}e^w\frac{dw}{dx}) = 1\\
&e^w\frac{dw}{dx} = 1\\
&\frac{dw}{dx} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{x}\\
&\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}w = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

求导任意指数函数有两种方法。 第一种：用e作底数，也就是转化到以e为底数。$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a^x &= \frac{d}{dx}e^{x\ln a}\\
&= (\ln a)e^{x\ln a} \qquad \text{\#}\ln a\text{是个固定的数字，不会变动，是一个常数，它只是改变了变化率的倍数，这就是链式法则所描述的}\\
&= (\ln a)a^x
\end{aligned}$$

我们可以知道，迷之数字M(a)为$\ln a$

第二种方法叫对数微分法（logarithmic differentiation）。它有什么用呢？有时求导函数时会遇到问题，但求导其对数会相对容易。我们需要找到函数求导与其对数函数求导之间的关系：

$$\frac{d}{dx}\ln u = (\frac{d\ln u}{du})(\frac{du}{dx}) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

也就是说：

$$\boxed{(\ln u)' = u'/u}$$

开始求$\frac{d}{dx}a^x$：

$$\begin{aligned}
&\text{let } u = a^x \\
&\ln u = x\ln a \\
&(\ln u)' = \ln a \\
&\frac{u'}{u} = (\ln u)' = \ln a \\
&\Rightarrow u' = u\ln a \\
&\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)a^x
\end{aligned}$$

下面，通过两个例子来解释对数微分法：

例1： 求$\frac{d}{dx}x^x$

$$\begin{aligned}
&v = x^x \\
&\ln v = x\ln x \qquad \#\text{两边取}\ln \\
&(\ln v)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} \\
&\Rightarrow v'/v = 1 + \ln x \\
&v' = v(1+\ln x) \\
&\therefore \frac{d}{dx}x^x = x^x(1+\ln x)
\end{aligned}$$

> 记住：换底法和对数微分法始终适用于变动的指数

例2：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

这个虽然是求极限，却能通过对数法求出结果，因为指数是变动的。指数n是变动的对数法无疑是个不错的选择。

要求极限，首先用ln，求出对数的极限，这等价于对数的极限。

$$\begin{aligned}
&\ln((1+\frac{1}{n})^n) = n\ln(1+\frac{1}{n}) \\
&assume\ \Delta x = \frac{1}{n}; n\to\infty, so\ \Delta x\to 0 \\
&n\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{\Delta x}\ln(1+\Delta x) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\Delta x}(\ln(1+\Delta x) - \ln 1) \qquad \#\text{-}\ln 1\text{ 实际就是减去0}
\end{aligned}$$

上面的形式就是求导对数函数需要用到的式子。当$\Delta x\to 0$:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x|_{x=1} = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1}$$

代回到原来的式子，就可以得到原来要求极限的结果：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e^{(\lim\limits_{n\to\infty}\ln((1+\frac{1}{n})^n))} = e^1 = e}$$

补充：一些特定形式的指数

例1：$\boxed{a_k = (1+\frac{1}{k})^k}$

我们知道：

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} a_k = e}$$

证明过程如下： 先来看一下前面是如何处理的：与其直接求指数函数的极限，不如先两边取ln，这是处理指数函数的一个典型方法。

$$when\ k \to \infty, \ln a_k = 1$$

这里，我们研究下一个步骤：

$$e^{\ln a_k} \to e^1 = e$$
$$e^{\ln a} = a \qquad \#\text{因为ln函数是指数函数的反函数}$$

例2： $\dfrac{d}{dx}x^r = rx^{r-1} \quad ; \quad all\ r$

以前，我们研究的r都是有理数，现在我们讨论实数的情况

第一种方法：e底法（base e）

$$x^r = (e^{\ln x})^r = e^{r\ln x}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^r &= (e^{r\ln x})' \\ &= e^{r\ln x}(r\ln x)' && \#\text{链式法则} \\ &= x^r \cdot r(\ln x)' && \#\text{r是常数} \\ &= x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} \\ &= rx^{r-1}\end{aligned}$$

第二种方法：对数微分法（logarithmic differentiation）

$$u = x^r, \ln u = r\ln x$$
$$\frac{u'}{u} = (\ln u)' = \frac{r}{x}$$
$$\text{化简后: } u' = u \cdot \frac{r}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

例3： 以经济学为例，说明自然对数是自然的。 省略（有点不太懂）。只知道所有与比率有关就涉及到对数。

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{27.9}{6432} \approx .43\%$$
$$\frac{p'}{p} = (\ln p)'$$