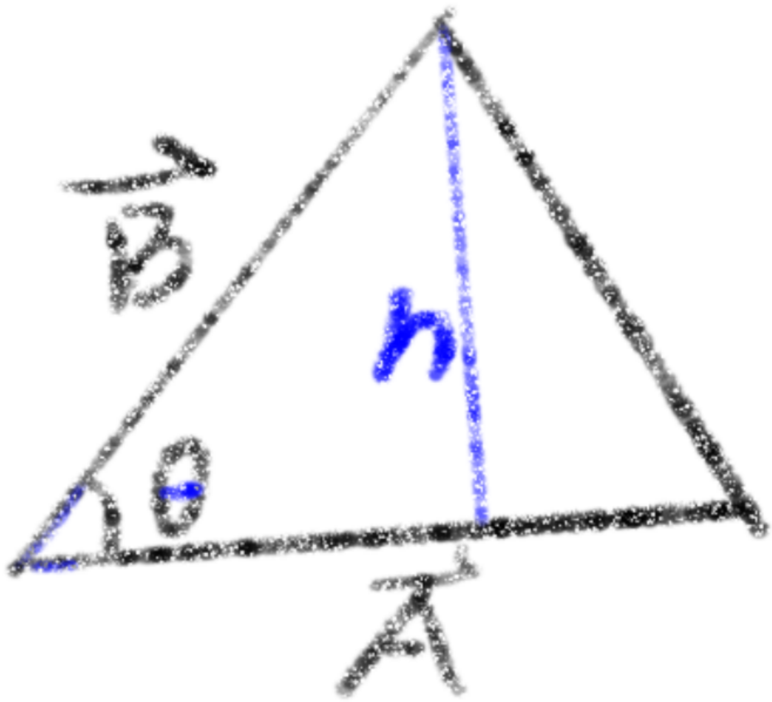
问题的提出：



如上图，知道两个向量A、B，怎么求三角形的面积。我们知道：

$$h = \sin\theta|\overrightarrow{B}|$$
$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

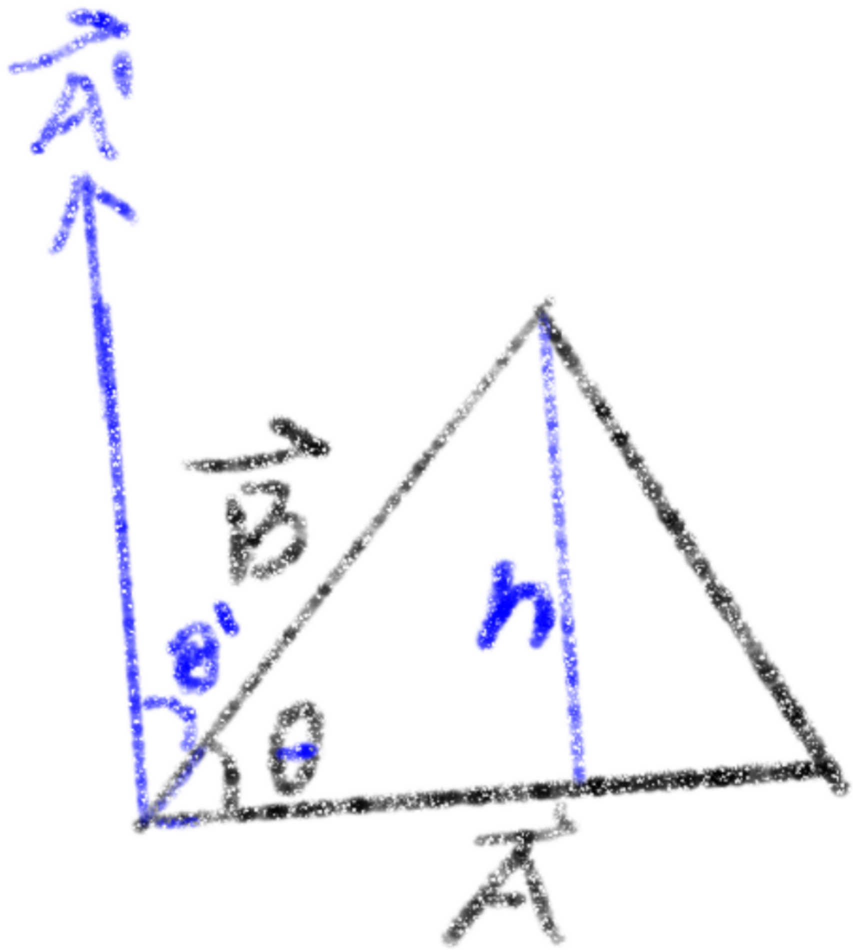
先求$\cos\theta$,再求出$\sin\theta$，从而知道h，那么面积也就求出来了：

$$\text{area} = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{A}|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{A}|\cdot|\overrightarrow{B}|\sin\theta$$

上面的算法显得复杂，用行列式可以快速解决。

要解释行列式，需要用到初等几何和点乘。

我们先让$\overrightarrow{A}$旋转90°，则图形如下：

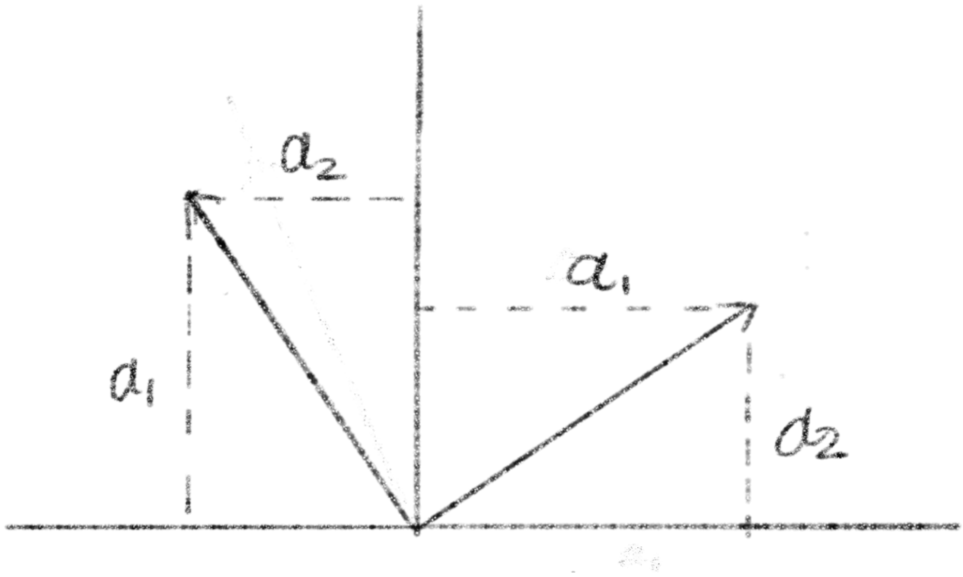


$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\cos\theta' = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \cdot$$

$$|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}| \sin\theta$$
$$= |\overrightarrow{A'}| \cdot |\overrightarrow{B}| \cos\theta'$$
$$= \overrightarrow{A'} \cdot \overrightarrow{B}$$

现在的关键是如何求A'.

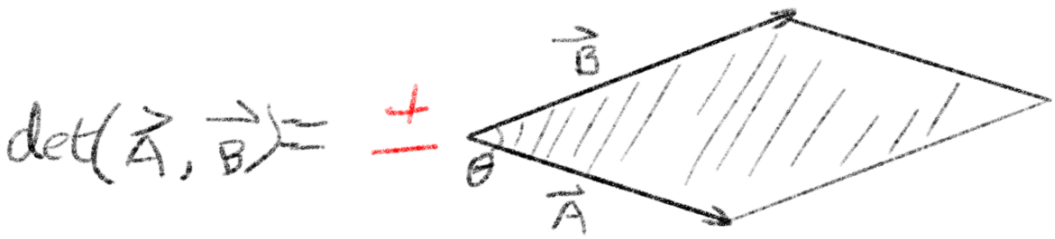


根据上图我们知道A'为$< -a_2, a_1 >$

所以：

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A'} \cdot \overrightarrow{B} &=< -a_2, a_1 > \cdot < b_1, b_2 > \\
&= a_1 b_2 - a_2 b1 \\
&= \det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

二阶行列式结果是四边形的面积：



> 当Θ小于90°时，为正的面积，大于90°时为负的面积。

$$\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}| \sin\theta$$

所以，要求平行四边形的面积时只需要求行列式的绝对值

这个案例中的三角形面积就是行列式的绝对值除以2。

---

determinant in space

前面研究的是平面中的行列式，空间中也有行列式的概念，

$$\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

3D空间中行列式的几何意义就是：它的绝对值是平行立方体（parallelepiped）的面积，即：

$$\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \pm \text{ volume of the parallelepiped}$$