例1：$(\frac{d}{dx}+x)y=0$

> $\frac{d}{dx}+x$:叫做湮没算符（annihilation operator），这是量子力学中的术语。如果把这里的负号换成正号就成了创生算符。

解题步骤：

1. 把不含微分的项移到方程右边：$\boxed{\frac{dy}{dx}=-xy}$。这里的变化率与xy都有关，针对这种方程有一个很有用的方法：需要乘法运算，用到微分的思想。
2. 方程两边同除y同乘dx：$\boxed{\frac{dy}{y}=-xdx}$。现在，我们把方程“分离”了，左边只含有y，右边只含有x。我们将方程改写成微分的形式，而不是微分的比（变化率）的形式。
3. 分别对方程两边取不定积分：\

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\frac{dy}{y}=-\int xdx\\&\ln y=\frac{-x^2}{2}+c\qquad(y>0)\end{aligned}}$$

> $\ln y=\frac{-x^2}{2}+c$，也可以写成：$\ln y+c1=\frac{-x^2}{2}+c2$，即$\ln y=\frac{-x^2}{2}+c2-c1$，我们可以用一个常数c来代替$c1-c2$,所以，没有必要写两个，总可以表示成一个。

4. 取幂，把y写成x的显函数：
$$\boxed{\begin{aligned}&e^{\ln y}=e^{\frac{-x^2}{2}+c}\\&y=A(e^{\frac{-x^2}{2}})\qquad(A=e^c)\end{aligned}}$$

所以：

$$\boxed{y=a\cdot e^{-x^2/2},\quad for\ any\ a, a\ is\ any\ constant}$$

> 这个方程就是正态分布，它和很多随机事件的概率吻合的很好，也是量子力学的概率解释，在某种程度上说明了粒子的位置。

我们反过来验证下：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= a\cdot e^{-x^2/2}\\ &= a(-x)e^{-x^2/2}\\ &= -xy\end{aligned}}$$

上面考虑的是y>0，实际上它已经包含了y<0。因为当y<0时：

$$\boxed{\begin{array}{l}\ln|y| = \dfrac{-x^2}{2}+c\\ |y| = Ae^{\frac{-x^2}{2}+c}\\ y = \pm Ae^{\frac{-x^2}{2}+c}\\ \because A\ is\ any\ constant, \therefore \pm A = A\\ hence, y = Ae^{\frac{-x^2}{2}+c}\end{array}}$$

最后，需要考虑的是y=0，这里是一个没有意义的解。

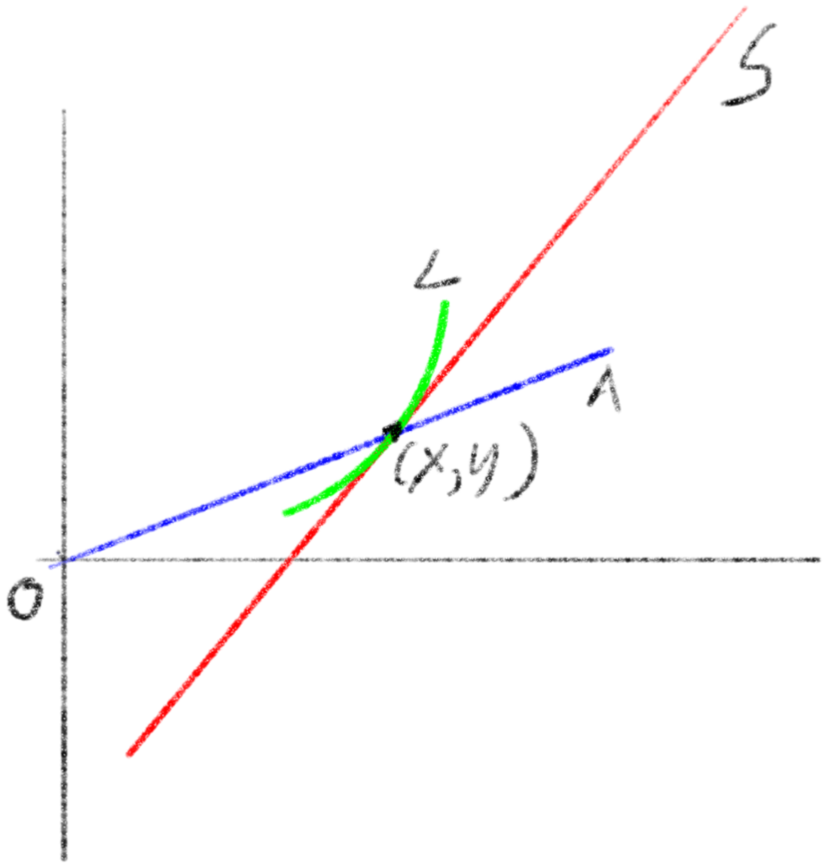
总结起来，上面用的方法叫分离变量法。它使用于以下形式：

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)\\ \dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx\\ H(y) = \displaystyle\int\frac{dy}{g(y)}; F(x) = \int f(x)dx\\ H(y) = F(x)+c \qquad \text{这里是隐式方程}\\ y = H^{-1}(F(x)+c) \qquad \text{取逆，转换为显示方程}\end{array}}$$

例2：求证：$y=\int f(x)dx$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=f(x)\\&dy=f(x)dx\\&\int dy=\int f(x)dx\\&y=\int f(x)dx\end{aligned}}$$

例3： 曲线L上一点，使得该点的斜率是过该点的射线OA的斜率的2倍。



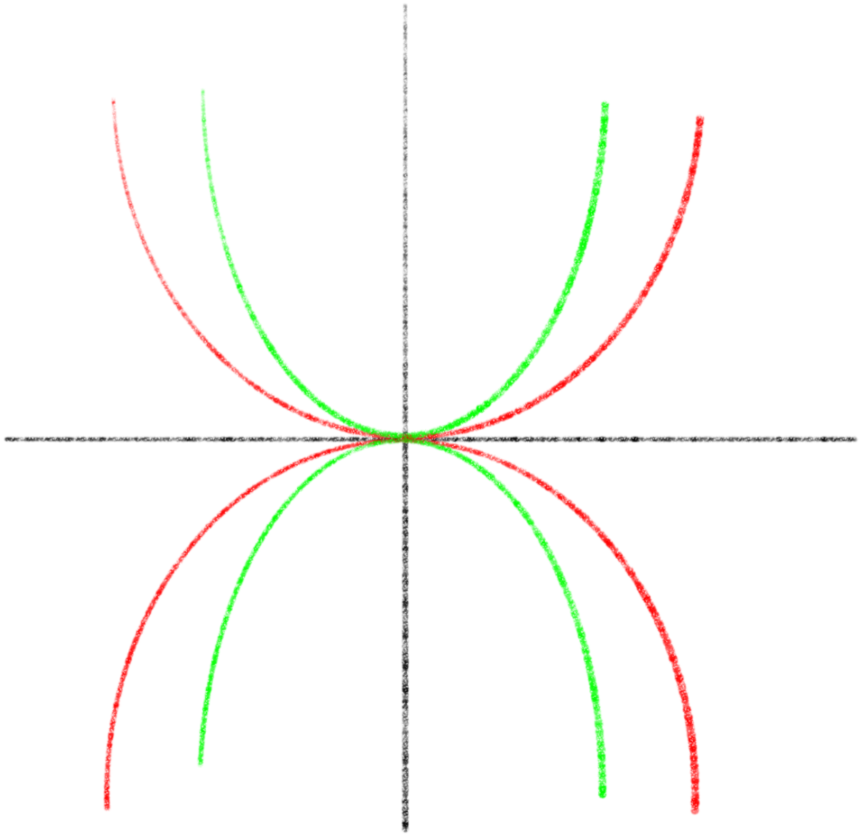
上面的描述的方程如下：

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=2\frac{y}{x}}$$

使用变量分离法解：

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \\
&\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \\
&\ln y = 2\ln x + c \\
&e^{\ln y} = e^{2\ln x + c} \\
&y = e^{(\ln x)^2} = Ax^2, (A = e^c)
\end{aligned}
$$

所以，曲线L的形状如下：



最后，进行双重验证：

$$
\begin{aligned}
&y = ax^2 \\
&\frac{dy}{dx} = 2ax = \frac{2ax^2}{x} = \frac{2y}{x} \\
&works\ for\ a > 0, a = 0, a < 0
\end{aligned}
$$

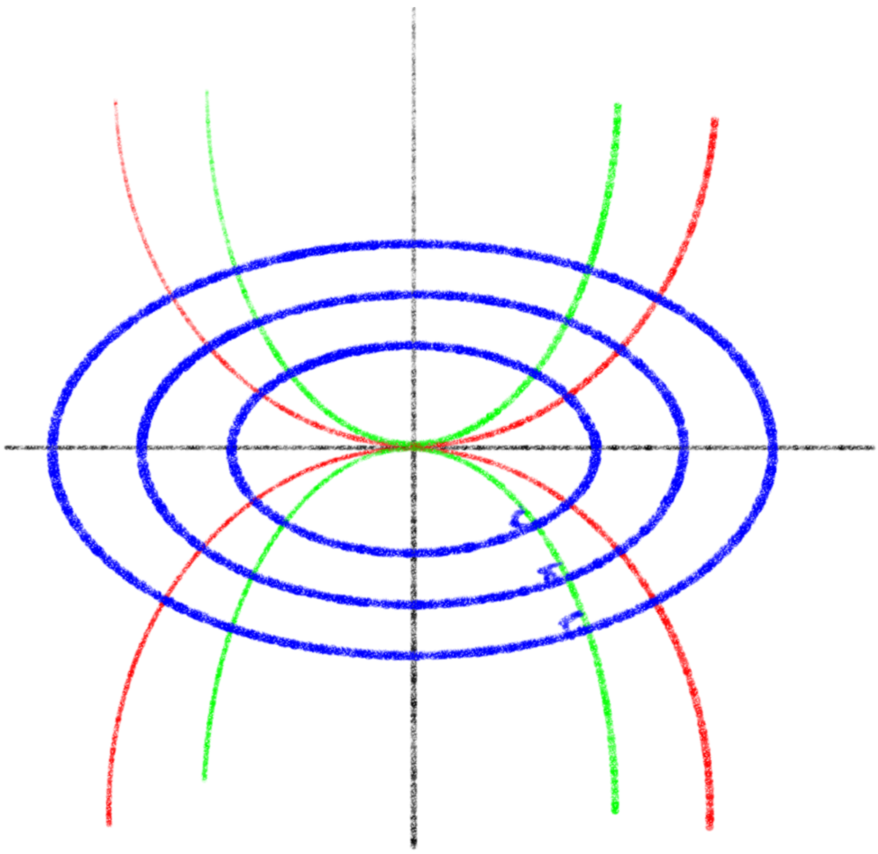
例4： 找出与原点出发的抛物线垂直的曲线

抛物线的斜率为$2y/x$。则所求曲线的斜率为：$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y/x} = \frac{-x}{2y}}$

解题步骤：

$$\boxed{\begin{aligned}&2ydy = -xdx\\&\int 2ydy = \int -xdx\\&y^2 = -\frac{x^2}{2} + c\\&solution: y^2 + \frac{x^2}{2} = c, (c = a^2)\end{aligned}}$$

该函数的形状：



从隐式方程的形式上看，函数的形状是一个个椭圆。但是如果我们表现为显示函数，

它有两个解：

$$\boxed{\begin{array}{l} y = +\sqrt{a^2 - x^2/2} \\ y = -\sqrt{a^2 - x^2/2} \end{array}}$$

所以，椭圆可以看做是方程的两个解构成的形状。而且当y=0时，会出现问题（抛物线在这里的的斜率是0，所求曲线的斜率则为负无穷。而椭圆在这里的切线是垂直的）。所以，这两个解是不包含y=0的。也就是在y=0处，两个解构成的并不是完整的椭圆。