矩阵乘法

在生活中，常常可以找到变量之间的线性关系（linear relations）。

例如：

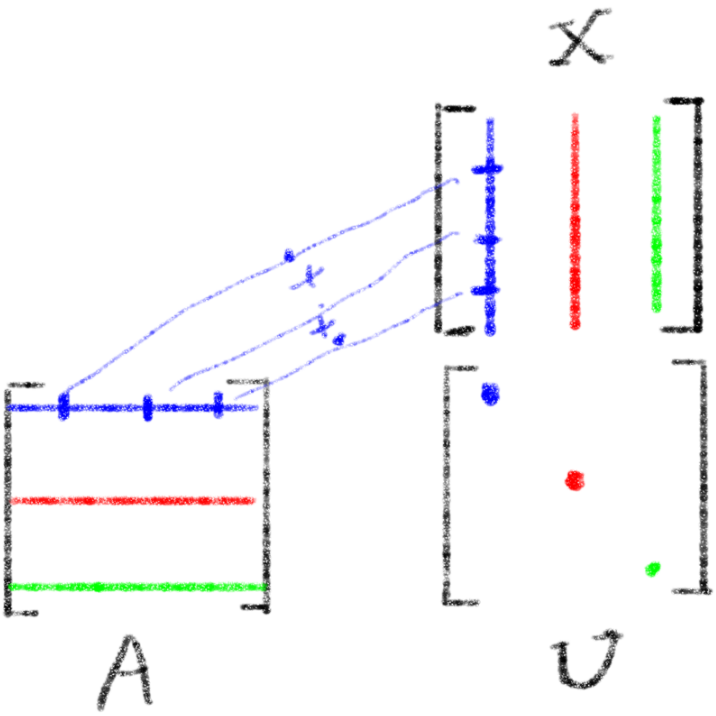
$$\begin{cases} u_1 &= 2x + 3y + 4z \\ u_2 &= 2x + 4y + 5z \\ u_3 &= \quad x + \quad y + 2z \end{cases}$$

可以用矩阵表示为：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{U}$$

方程组可以用矩阵表示为：AX=U。

矩阵的乘法是通过A的行与X的列做点乘得到的



矩阵乘法一些性质

- 结合律

  $$(AB)X = A(BX)$$

- 不符合交换律

  $$AB \neq BA$$

单位矩阵（Identity matric）

单位矩阵I：

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵是一个“可有可无”的矩阵，任何矩阵乘以它都恒等(identity)于它自身：

$$AI = A$$

例如：

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

矩阵变换

在二维空间中，线性变换可以用 2×2 的变换矩阵表示。

例如：逆时针旋转90°

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{变换矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{二维向量}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{变换矩阵}}$$

矩阵的逆

$AA^{-1}=I$

逆矩阵可以用来解方程组。已知A与B求X。也就是解$AX=B$:

$X=A^{-1}B$

原理：

$$\begin{aligned} AX &= B \\ &\Downarrow \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ &\Downarrow \\ IX &= A^{-1}B \\ &\Downarrow \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

在解小矩阵时，常用的公式：

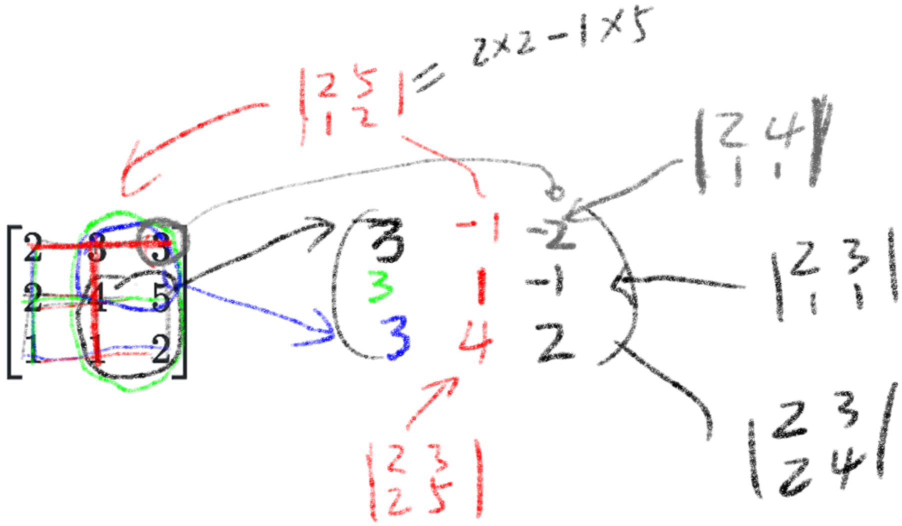
$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\ adj(A)$$

> adj(A)为伴随（adjoint）矩阵

例如：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 先找余子式（minors）



(2) 找代数余子式（cofactors）

根据下面的棋盘格翻转符号：

$$
\begin{matrix}
+ & - & + \\
- & + & - \\
+ & - & +
\end{matrix}
$$

> 加号表示什么都不做；符号表示对应的元素翻转符号

$$
\begin{bmatrix}
3 & 1 & -2 \\
-3 & 1 & 1 \\
3 & -4 & 2
\end{bmatrix}
$$

(3) 转置

$$
\begin{bmatrix}
3 & -3 & 3 \\
1 & 1 & -4 \\
-2 & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

这个矩阵就是伴随矩阵

(4) 用行列式除以这个伴随矩阵

首先求行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

最后：

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$