

链式法则是一个合成 (composition) 规则。用于解复合函数。例1:

$$y = (\sin t)^{10} = \sin^{10}(t)$$

解题方法：使用换元法 (use new variable names) 。将解题步骤分为两步：

1. 计算 $\sin t$ ，并将结果写入 x ，也就是引入了新变量 x 。 $x = \sin(t)$ 。
2. 将 x 代入，即： $y = x^{10}$

解题前，我们先看下链式法则：

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

链式法则使求导摆脱束缚

解题时，先对外部函数求导，再对内部函数求导。以例1为例，其外部函数为 $y = x^{10}$ ；内部函数为 $x = \sin(t)$ 。根据链式法则：

$$\frac{d}{dx}(x^{10}) \cdot \frac{d}{dt}(\sin(t)) = 10x^9 \cdot \cos(t)$$

3. 我们还需要将 x 还原为 $\sin(t)$ 。也就是：

$$10(\sin^9(t)) \cos(t)$$

例2: $\frac{d}{dt} \sin(10t)$

$inner : x = 10t, outter : y = \sin(x)$

$$\frac{d}{dt} \sin(10t) = \frac{d}{dx} \sin(x) \cdot \frac{d}{dt} 10t = \cos(x) \cdot 10 = 10\cos(10t)$$

(补充)-----

链式法则本质理解

假设有一个函数，比如 $y = 10x + b$ ，显然， y 的改变速度是 x 的10倍，所以有：

$$\frac{dy}{dx} = 10$$

再假设x是t的函数，如 $x = 5t + a$ ，又是均匀变化的，于是 $\frac{dx}{dt} = 5$

链式法则告诉我们，如果y的改变是x的10倍，并且x的改变量是t的5倍，那么y的改变量是t的50倍。从代数上看，这意味着如果通过代入法使两式合并得到：

$$y = 10(5t + a) + b = 50t + 10a + b$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = 10 \cdot 5 = 50$$

链式法则体现了：y与t之间变化量的比率（变化率）等于y与x之间变化量的比率乘上x与t之间变化率。

链式法则推导除法

$$\begin{aligned} (1/v)' &= (v^{-1})' = \frac{d}{dv} v^{-1} \frac{dv}{dx} = -v^{-2} \cdot v' \\ (u/v)' &= (uv^{-1})' = u'v^{-1} + u(-v^{-2}v') \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$