先引入微分符号：

```
y = f(x)
y的微分：dy = f'(x)dx
```

> 因为y等于f，有时又称它为f的微分。

它与下面的记法实际上是一样的：

$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$ 这就是莱布尼茨导数表示法。莱布尼茨将导数看做是两个无穷小量的比。

接下来，我们讲一下微分在线性代数中的应用。例如：$(64.1)^{\frac{1}{3}} \approx ?$

我们用新的记法来实现：

$$\boxed{y = x^{1/3}, dy = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx}$$

现在，代入x的值：

$$\boxed{at\ x = 64, \qquad y = 64^{1/3} = 4, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16}dx = \frac{1}{48}dx}$$

最后，我们来计算64.1的3分之1次方：

$$\boxed{\begin{array}{l} \because x = 64, x + dx = 64.1 \\ \therefore dx = \dfrac{1}{10} \\ (64.1)^{1/3} \approx y + dy = 64 + \dfrac{1}{48} \cdot \dfrac{1}{10} = 64 + \dfrac{1}{480} \approx 4.002 \end{array}}$$

现在，我们跟以前的记法比较一下：

$$
\begin{aligned}
&f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)\\
&a=64, f(x)=x^{1/3}\\
&f(a)=f(64)=4\\
&f'(a)=\frac{1}{3}a^{-2/3}=\frac{1}{48}\\
&x^{1/3}\approx 4+\frac{1}{48}\cdot(x-64)\\
\\
&\therefore (64.1)^{1/3}\approx 4+\frac{1}{48}\cdot(64.1-64)\approx 4.002
\end{aligned}
$$

微分形式用在反导数上

$$\boxed{G(x)=\int g(x)dx}$$

> 思想：用一个函数g(x)，创造出了新函数G(x),这个新函数叫做g的反导数，即积分。

g的反导数又叫做g的不定积分（indifinite integral）。

让我们来看一些例子（well,so let's carry out some examples.）

例1：$\int \sin x dx$

这就是所求的函数的导数是sinx,这个函数是什么呢？sinx的反导数为-cosx。所以：

$\boxed{\int \sin(x)dx=-\cos x}$ 它满足如下性质：

$$
\boxed{\begin{aligned}
&G(x)=-\cos x\\
&G'(x)=\sin x
\end{aligned}}
$$

$\boxed{G(x)=\int g(x)dx}$ 之所以叫做不定积分，是因为可以在它的解后面加上任意一个常数，它还满足上面的性质。如：

$$\boxed{\int \sin(x)dx = -\cos x + c}$$

也就是：

$$\boxed{\begin{aligned} &G(x) = -\cos x + c \\ &G'(x) = \sin x \end{aligned}}$$

G(x)是不定的，因为我们并没有给出一个确定的函数。当你对一个函数求反导数时，它的不确定性是由于这个任意常数。

例2：$\int x^a dx$

$$\boxed{\begin{aligned} &d(x^{a+1}) = (a+1)x^a dx \\ &\int x^a dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + c \end{aligned}}$$

例3: $\int \frac{dx}{x}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = (\ln |x|) + c}$$

我们需要考虑x为负的情况。当x为正时，$\ln x + c$是正确的。我们需要证明x为负时：

$$\boxed{when\ x < 0, \frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}}$$

例4：$\int \sec x^2 x dx$

$$\boxed{\int \sec x^2 x dx = \tan x + c}$$

例5：$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c}$$

例6：$\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}x + c}$

在继续之前，需要强调一下积分的唯一性（uniqueness of antiderivatives up to a constant）。定理如下：

$\boxed{if\ F' = G', then\ F(x) = G(x) + c}$ 这意味着，所有与求得积分相差一常数的函数也都是积分。

证明如下：

$$\boxed{\begin{array}{l} If\ F' = G' \\ then\ (F-G)' = F' - G' = 0 \\ hence\ F(x) - G(x) = c, constant \\ so\ F(x) = G(x) + c \end{array}}$$

接下来，我们看一些更有技巧性的题目。

例7：$\int x^3(x^4+2)^5dx$

当积分比较复杂时，可以使用的一个技巧：变量代换，也叫换元法（the method of substitution），是为微分符号量身定做（tailor-made）的。具体做法如下：

1. 定义一个新函数u：$\boxed{u = x^4 + 2}$
2. 对u求微分：$\boxed{du = 4x^3dx}$
3. 有了这两个式子，接下来就用它们替换积分中的元素，这样可以大大简化式子：
$$\boxed{\begin{gathered} \int x^3(x^4+2)^5dx = \int (u)^5x^3dx = \int (u)^5\frac{1}{4}du = \int \frac{u^5du}{4} \\ = \frac{1}{6}u^6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}u^6 + c \end{gathered}}$$
4. 最后，将u还原为x：
$$\boxed{\int x^3(x^4+2)^5dx = \frac{1}{24}(x^4+2)^6 + c}$$

例7：$\boxed{\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} subst: u = 1+x^2; du = 2xdx \\ \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = u^{-1/2} \cdot \frac{du}{2} = u^{1/2} = (1+x^2)^{1/2} + c \end{array}}$$

当我们有足够的经验时，可以使用提前猜测法（advanced guessing）

$\boxed{\frac{d}{dx}(1+x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$ 所以，微分就是：$\boxed{\sqrt{1+x^2}+c}$

例8：$\int e^{6x}dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} guess: e^{6x} \\ \frac{d}{dx}e^{6x} = 6e^{6x} \\ \int e^{6x}dx = \frac{1}{6}e^{6x} + c \end{array}}$$

例9：$\int xe^{-x^2}dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dx}e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x) \\ \int xe^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + c \end{array}}$$

例10：

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x \cos x \\ \int \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin^2 x \end{array}}$$

另一个答案是：$\boxed{\frac{-1}{2}cos^2 x + c}$

例11：$\int \frac{dx}{x\ln x}$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x; du=\dfrac{dx}{x} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}=\frac{1}{u}du=\ln|u|+c \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|+c \end{array}}$$