1. 简单极限（easy limits）

$$\boxed{\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{x^2+1}=\frac{4+3}{4^2+1}=\frac{7}{17}\qquad\qquad \#\text{只需要代入4即可}}$$

2. Derivatives are always harder

大多数情况下：

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(\Delta x)}{x-x_0}}$$

这时，如果代入$x=x_0$，结果是分母为0。所以，不能简单代入，必须先进行一些对消（cancellation）运算。

2.1 极限

当函数在x_0处是不连续（如分段函数）的时候，我们需要引入左极限与右极限。
左极限表示如下：

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-}}$$

含义是：x从左侧趋向于x_0,也就是$x<x_0$
右极限表示如下：

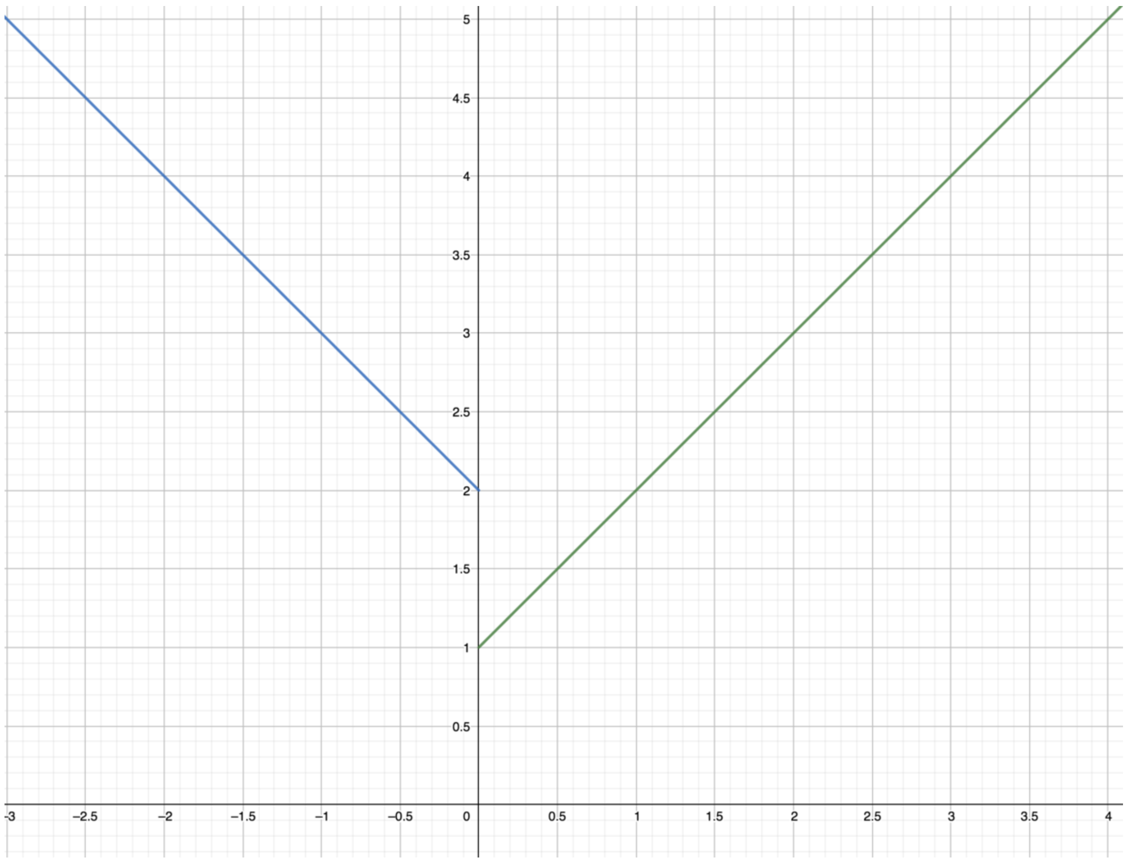
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+}}$$

含义是：x从右侧趋向于x_0,也就是$x>x_0$

例如，下面的分段函数：

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ -x+2, & x<0\end{cases}}$$

函数图形如下：



函数右极限：$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x + 1 = 1}$

函数左极限：$\boxed{\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0}(-x + 2) = 2}$

> 求极限并不需要知道x=0的函数值

2.2 连续函数

在x_0点时，函数是连续的，则极限的定义如下：$\boxed{\lim_{x \to x_0} = f(x_0)}$

在x_0点连续，指的是：

- 极限存在。也就是左极限与右极限相等
- $f(x_0)$ is defined
- they are equal

不连续的函数有以下类型：

- 跳跃间断（jump discontinuity）： 左右极限不相等。如2.1节的分段函数。

- 可去间断（removeable discontinuity）：左右极限存在且相等，而x_0无定义或是定义在函数曲线外的某点。

  例1: $g(x)=\frac{\sin x}{x}$
  $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$
  例2：$h(x)=\frac{1-\cos x}{x}$
  $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0}$$

- 无穷间断（infinite discontinuity）：极限值为:$\pm\infty$。例如$f(x)=\frac{1}{x}$
  $$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\end{array}}$$

- 另类（丑陋）间断（other（ugly）discontinuity）：没有左右极限。例如$y=\sin\frac{1}{x}$,在趋近于0时，来回震荡。

2.3. 与导数有关的一个定理

可导必连续（differentialble implies continouse）定理具体描述如下：\

如果函数f在x_0处存在导数（derivative），则f在x_0处连续。（If f isdifferentialble at x_0, then f is continuous at x_0）

证明：
首先，写成便于书写的格式：
$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0}$$
证明过程很简单，只需要同时乘除$x-x_0$:
$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\\ =f'(x_0)(x-x_0)\\ =f'(x_0)\cdot 0\\ =0\end{array}}$$