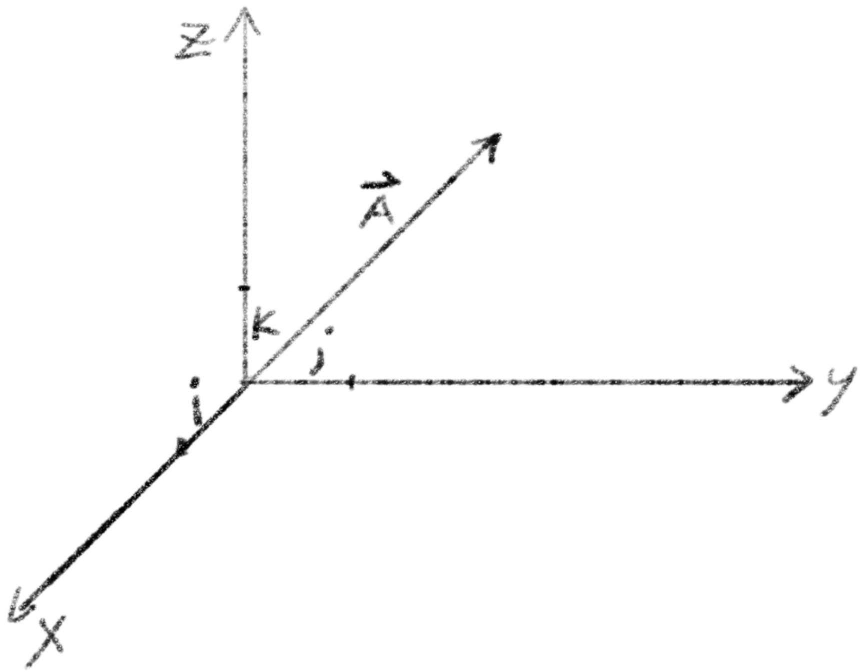
向量

向量是一个既有方向又有大小的量（vector is a quantity that has both a direction and a magnitude of length）



> i,j,k 分别为x轴、y轴、z轴的单位向量
>
> $\vec{A}$ 表示它是一个向量。

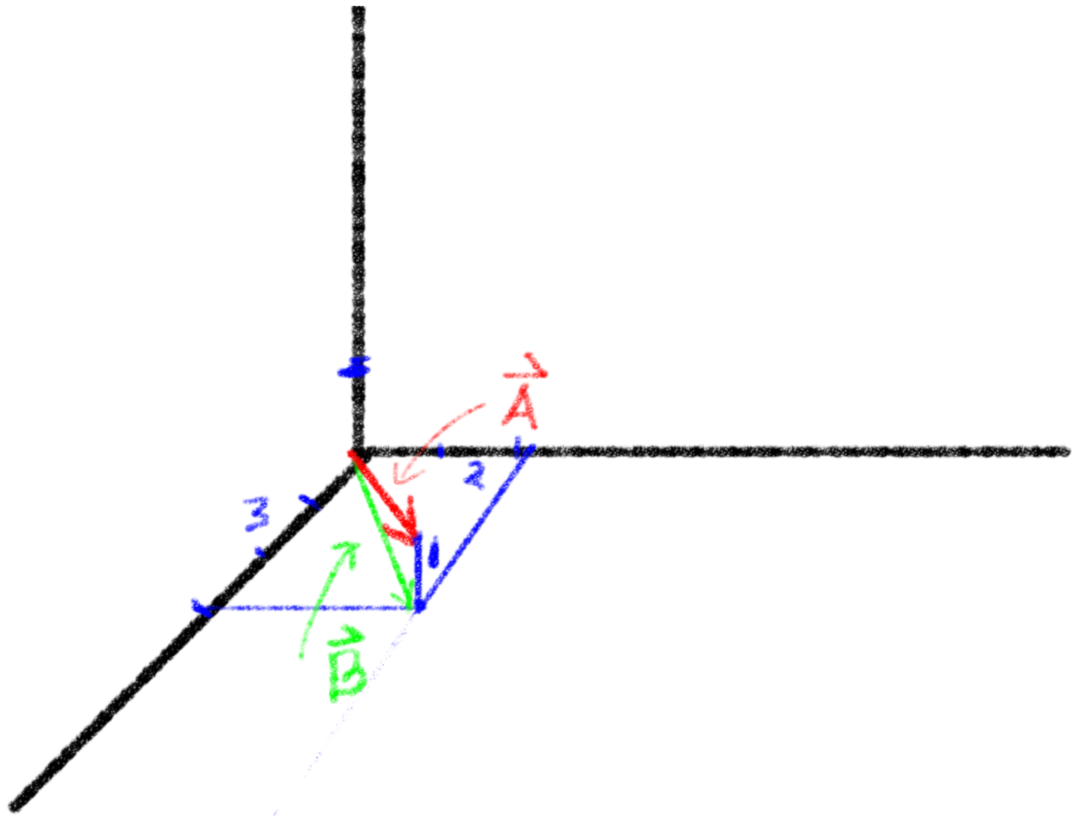
可以将向量分解为沿各坐标轴方向的单位向量：

$$\vec{A} = a_1i + a_2j + a_3k =< a_1, a_2, a_3 >$$

向量的长度表示为：$|\vec{A}|$。它是一个标量
向量的方向表示为：$dir(\vec{A})$。只要把向量压缩（scale down）到单位向量的长度就可以得到其方向，例如，向量除以长度
从P点到Q点记作：$\overrightarrow{PQ}$

求向量长度

$\vec{A} =< 3, 2, 1 >$。它在坐标内的位置如下：



先求出向量$\overrightarrow{B}$的长度：

$$|\overrightarrow{B}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

那么，向量$\overrightarrow{A}$的长度为：

$$|\overrightarrow{A}| = \sqrt{|\overrightarrow{B}|^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

从中，我们发现求向量长度的公式：

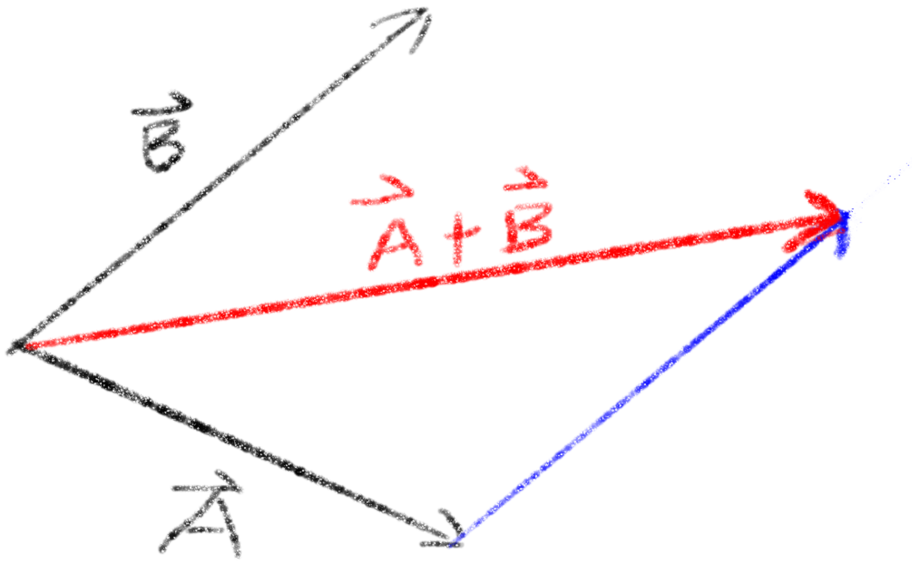
$$|\overrightarrow{A}| = \sqrt{(a_1)^2 + a_2^2 + a_3^2 + ...a_n^2}$$

向量加法

向量既有形又有数。

(1)

我们先从几何角度看向量加法。



我们将向量B的起点平移到向量A的终点，这样就形成了一个四边形，它的对角线就是两个向量相加。

(2)

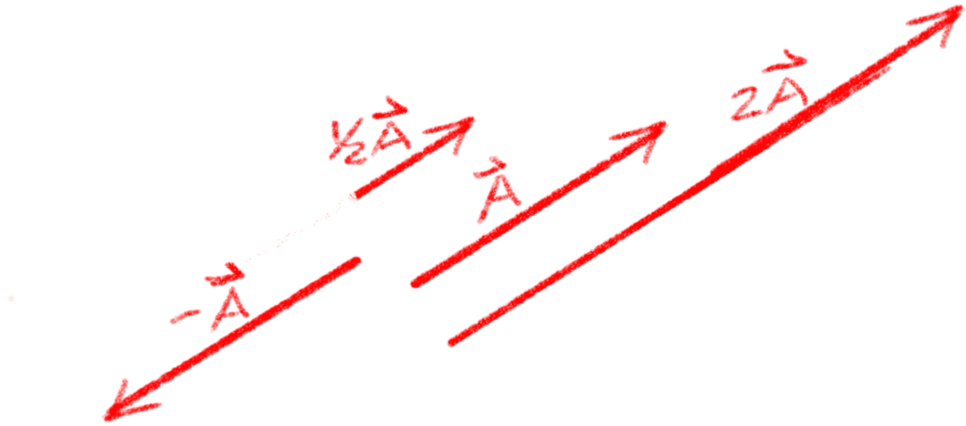
从数的角度看

$$\vec{A}+\vec{B}=< a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 >$$

向量乘法

(1)向量乘标量（scalar）

向量和标量相乘，向量的方向不变，只改变向量的大小。



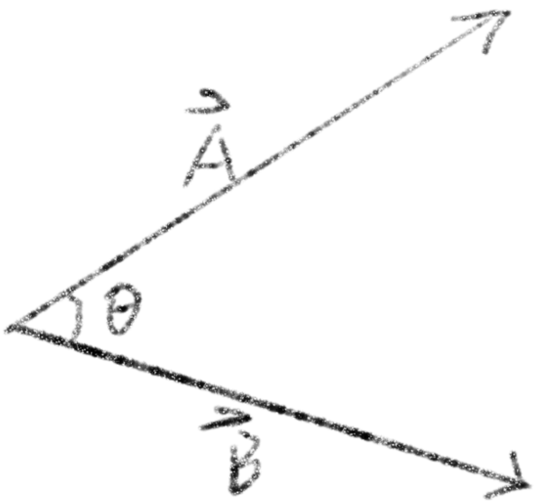
(2) 点积（dot Product）

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

点积常用来做几何。向量A与B的点积等于向量A与B的长度的积再乘以夹角的余弦

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}| \cos(\theta)$$

如下图：

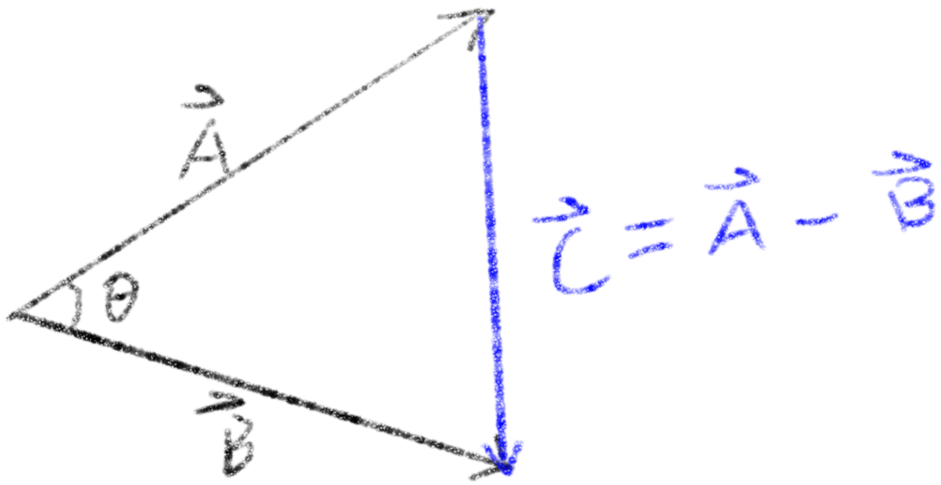


证明过程如下：

1). 向量A与自身相乘

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\overrightarrow{A}|^2=|\overrightarrow{A}|^2\cos(0)$$

2). 向量A乘以向量B



首先，根据余弦定理：

$$|\overrightarrow{C}|^2=|\overrightarrow{A}|^2+|\overrightarrow{B}|^2-2|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta$$

根据点乘：

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{C}|^2&=\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{C}=(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}-\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}-\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}\\&=|\overrightarrow{A}|^2+|\overrightarrow{B}|^2-2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\end{aligned}$$

将上面两个公式中有区别的地方提取出来，即：

$$2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=2|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta$$

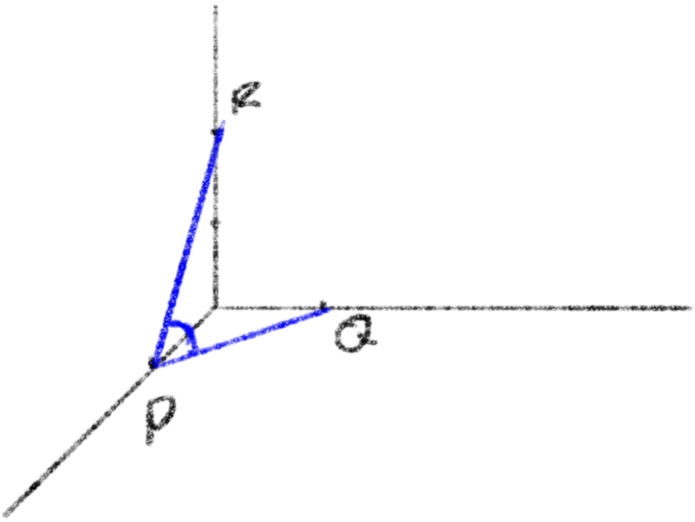
从而证明：

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta$$

点积的应用

1. 计算长度和角度。特别是角度

例如，在一个三维空间里，有点P(1,0,0)、点Q(0,1,0)、点R(0,0,2)。现在我要求的是$\angle RPQ$的角度：



根据点积与余弦之间的关系：

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = |\overrightarrow{PQ}|\ |\overrightarrow{PR}| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|\ |\overrightarrow{PR}|}$$

```
从点P到点Q，沿着x向里走一个单位，沿着y轴向右再走一个单位，z轴不变，所以PQ向量为<-1,1,0>

从点P到点Q，沿着x向里走一个单位，沿着z轴向上走两个个单位，y轴不变，所以PQ向量为<-1,0,2>
```

所以：

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{<-1,1,0><-1,0,2>}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}}\\ &= \frac{-1\times -1+1\times 0+0\times 2}{\sqrt{2}\sqrt{5}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{10}}) \approx 71.5^\circ$$

点积与余弦之间的公式隐藏着点积与角度之间的关系如下：

$$\begin{aligned}&\text{If}\quad \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}>0,\quad \text{then}\quad \theta<90^\circ\\ &\text{If}\quad \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=0,\quad \text{then}\quad \theta=90^\circ\\ &\text{If}\quad \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}<0,\quad \text{then}\quad \theta>90^\circ\end{aligned}$$

> 负的点积表示它们朝着不同方向走。

2. 检测正交性

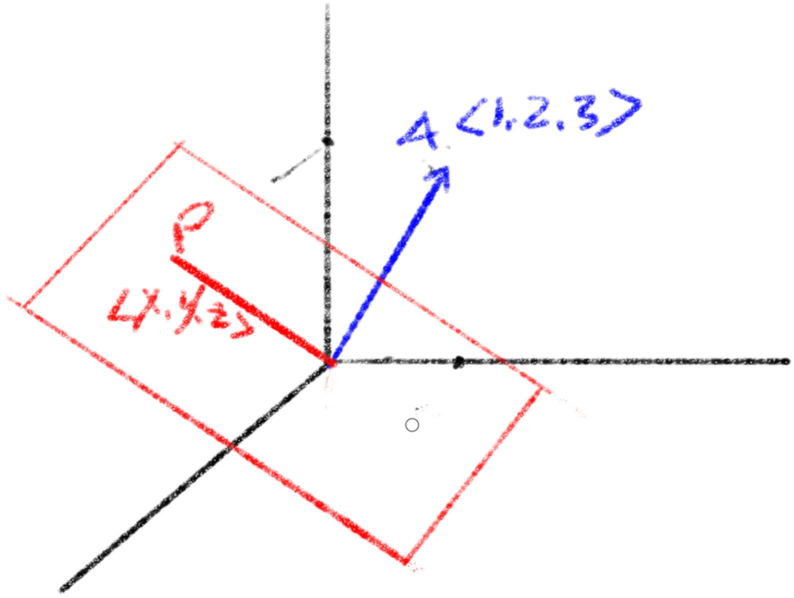
用于判断两样东西到底是不是互相垂直。

例如：$x+2y+3z=0$的解集是什么样的?

可以将解集看做是向量，任取一点P,其值为<x,y,z>,上面的公式可以看做是向量P与向量A(1,2,3)的点积，即：

$$<x,y,z>\cdot<1,2,3>=0$$

那么，这两个向量的夹角为90°。所以，解集是与A垂直的所有向量的集合，也就是一个过原点并且与A垂直的平面。如下图：


A <1,2,3>
P
<x,y,z>