微分（differentiation）

1. 导数是什么（what is a derivative）

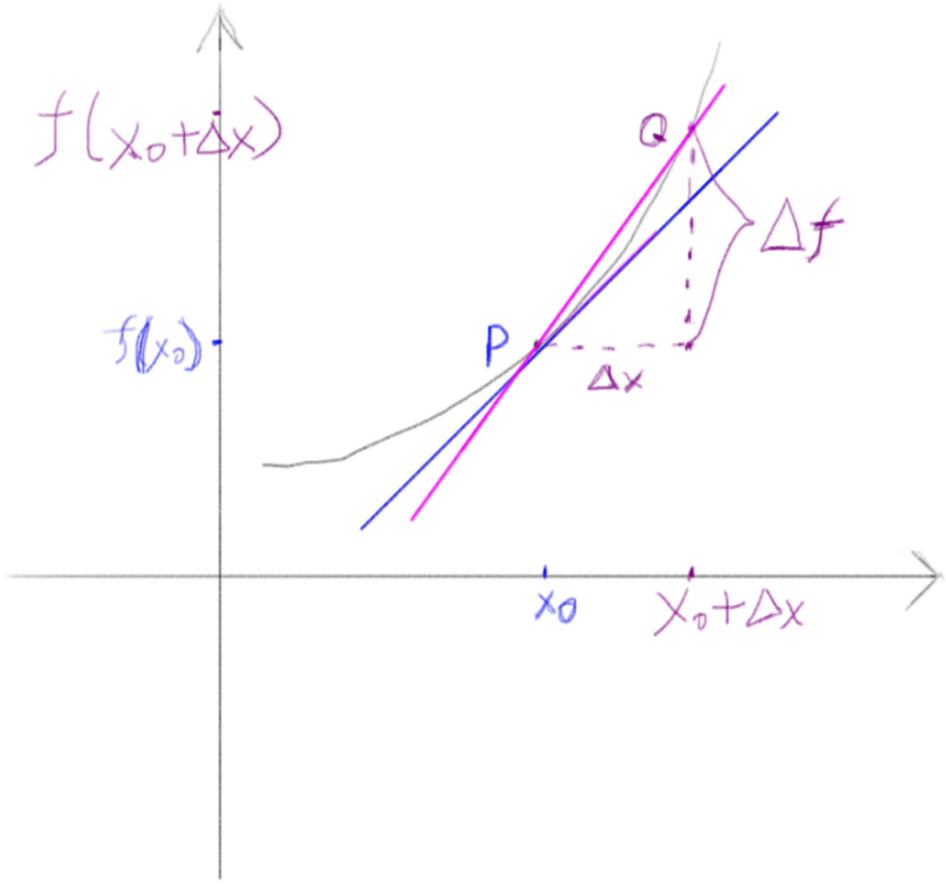
我们从不同的视角（point of view）进行解释

- 几何角度解释（geometric interpretation）：
- 物理角度解释（physical interpretation）：
- importance to all measurements（sci[science],eng[engine],econ[economy],polit sci[political science]）

1.1 geom interp（几何解释）

如何求函数图像某点处的切线（finding the tangent line to some graph of some function at some point）

例如：求y=f(x)在$P(x_0,y_0)$点的切线：



> 符号解释：
> Δx： x的增量（改变量）。也就是P点到Q点之间的横向长度
> Δf： y的增量（改变量）。也就是P点到Q点之间的纵向长度
> $P(x^0,y^0)$:等价于：$P(x^0,f(x^0))$。Q的的坐标：$P(x^0+\Delta x,f(x^0+\Delta x))$

> 斜率(slope)公式：$\frac{\Delta f}{\Delta x}$

求切线的思路：首先求斜率：在曲线上找到另一点Q，这样P和Q构成了粉色的直线。当Q无限接近于P时，粉色直

线就会与蓝色的切线重合。所以求切线变成了极限问题。导数就是Δx无限接近于0时，求PQ直线的斜率。求导（求斜率）的公式如下：

$$\boxed{f'(x^0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

例子1：$f(x) = \frac{1}{x}$。其导数为：
我们先求斜率：

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot (\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot (\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)x_0}) \qquad\qquad \#\text{通分} \\ &= \frac{-1}{(x_0)^2 + \Delta x \cdot x_0} \end{aligned}}$$

之后求导数，也就是$\Delta x \to 0$时斜率的极限值：

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x_0)^2 + \Delta x \cdot x_0} \\ &= \frac{-1}{(x_0)^2} \end{aligned}}$$

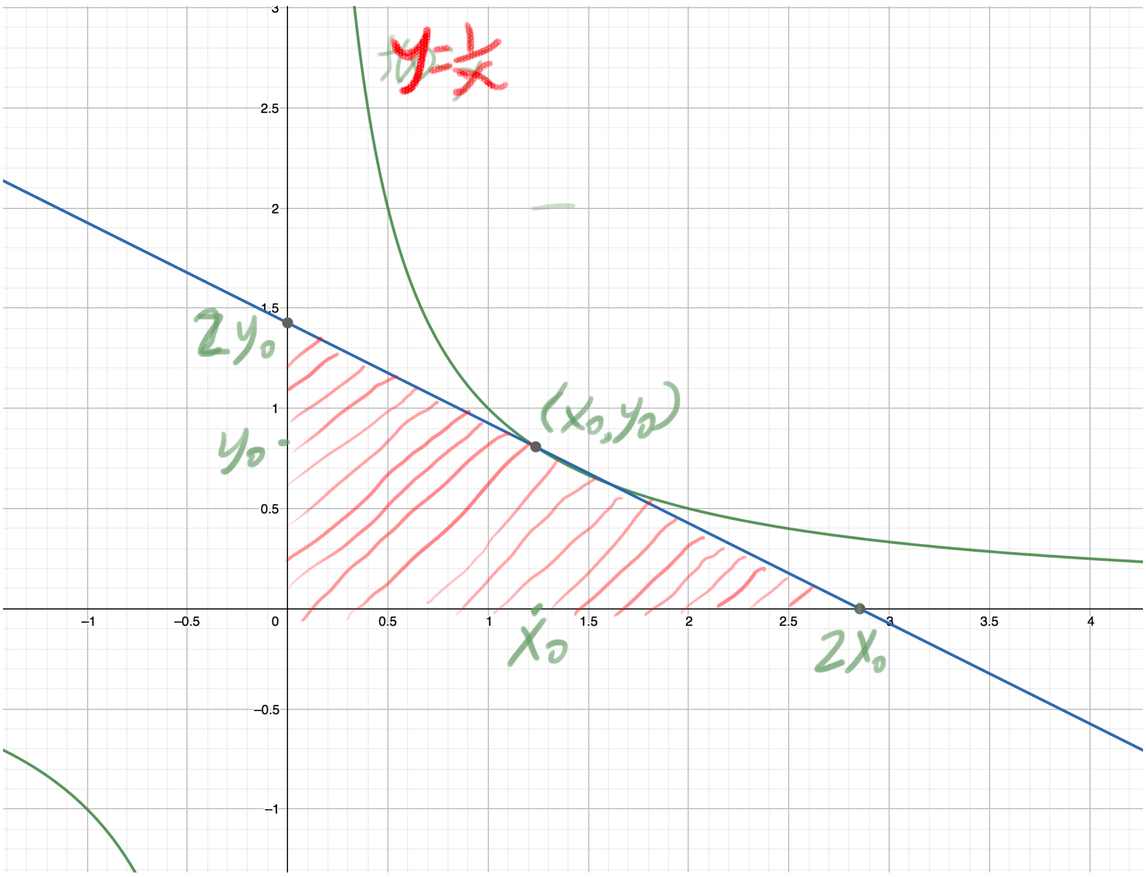
该斜率表明：

- 斜率永远是负的(可以指明切线方向)
- $x_0 \to \infty$时，斜率越接近于0，也就是越来越平滑。

我们知道斜率公式可以表示为：$y - y_0 = m(x - x_0)$。通过求导获得了斜率m，当y = 0时，就会求得切线在x轴上的x点的坐标；当x=0 时就可以获得切线y轴上的y点的坐标。

> 微分的意义就在于表示出在某一点时的变化趋势

微积分复杂性的根源在于，微积分问题往往会涉及到其它知识，涉及到很多相关的东西，也许只有一小部分是微积分，独立出来将是很简单的问题，但其它内容却可能涉及到从小学到中学学到的所有数学知识。下面我们来看一个这样的复杂问题。
例2：求由$y = \frac{1}{x}$切线和坐标值围合而成的三角形区域面积



标清楚图像就是成功的一半。x, y代表变量，x_0, y_0则代表固定点。

为了求出三角形的面积，则需要找到x轴截距（切线与x轴的交点）与y轴截距（切线与y轴的交点）

首先，根据例1求得斜度：$\boxed{\dfrac{-1}{(x_0)^2}(x-x_0)}$

之后，求x轴截距：

切线与x轴相交时，y的值为0，根据斜度公式

$$0-y_0=\frac{-1}{(x_0)^2}(x-x_0)$$

$$0-\frac{1}{x}=\frac{-1}{(x_0)^2}(x-x_0) \qquad \#代入$$

$$0-\frac{1}{x}=\frac{-x}{x_0^2}+\frac{1}{x_0} \qquad \#化简$$

$$\frac{x}{x_0^2}=\frac{2}{x_0} \qquad \#方程两边同时乘以x_0^2$$

$$x=2x_0$$

然后，求y轴的截距。可以用上面的方式求，也可以采用对称来求。

方程的镜像对称，即可以对调(x, y)和(y, x)

$$y=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow xy=1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$$

所以，可知y轴截距为：$2y_0$

最后求得面积：

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot(2x_0)(2y_0)\\&=2x_0y_0\\&=2x_0\frac{1}{x_0}\\&=2\end{aligned}}$$

很奇妙！不论x_0, y_0是什么，面积都是2。这是$\frac{1}{x}$的性质决定的

1.2.导数及其记号

导数即切线的斜率。

$$\boxed{f'=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f=\frac{d}{dx}y}$$

1.3 多项式求导

例子：$f(x)=x^n, \quad n=1,2,3,\ldots$

首先,求斜率：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x}&=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x} && \#\text{这里的x指的就是固定点}x_0\\&=\frac{(x^n+nx^{n-1}\Delta x+\mathbf{O}((\Delta x)^2))-x^n}{\Delta x} && \#\text{二项式定理展开；}\ \mathbf{O}((\Delta x)^2)\text{是垃圾项。}\mathbf{O}\text{表示这些项中}\Delta x\text{有更高项}\\&=\frac{1}{\Delta x}(nx^{n-1}\Delta x+\mathbf{O}((\Delta x)^2))\\&=nx^{n-1}+\mathbf{O}((\Delta x)))\\&\text{当}\Delta x\to 0\text{时：}\qquad nx^{n-1}\end{aligned}}$$

最后可知导数：

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}}$$

在求多项式（polynomials）的导数时，上面的推论将及其有用。例如求：x^3+5x^{10}。

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^3+5x^{10})=3x^2+5\cdot 10x^9=3x^2+50x^9}$$

1.4 物理学角度解释

导数就是变化率（rate of change），这个变化率指的是瞬时变化率（instantaneous rate）

例：从80米高楼上扔下物体。

因为：$\boxed{h=80-5t^2}$

可知：4秒后，物体落到地上。

物体的平均速度——平均变化率（average of change）为：

$$\boxed{\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{80-0}{0-4}=|-20m/s|=20m/s}$$

那么，落地哪一刻的速度是多少呢？这就是求导数：

$$\boxed{\begin{array}{l}\because \dfrac{d}{dt}80 = 0, \dfrac{d}{dt}t^2 = 2t \\ \therefore \dfrac{d}{dt}h = 0 - 10t\end{array}}$$

> 常量的导数是0。从变化的角度看，常量是没有变化率的；我们也可以将常量看做是1次幂的数，根据：$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$,80可以看做是$80t^0$,也就是$80 \times 0 \times n^{-1}$,即0。

将具体时间代入导数中。落地时，也就是第4秒的速度为:$|-40m/s|$