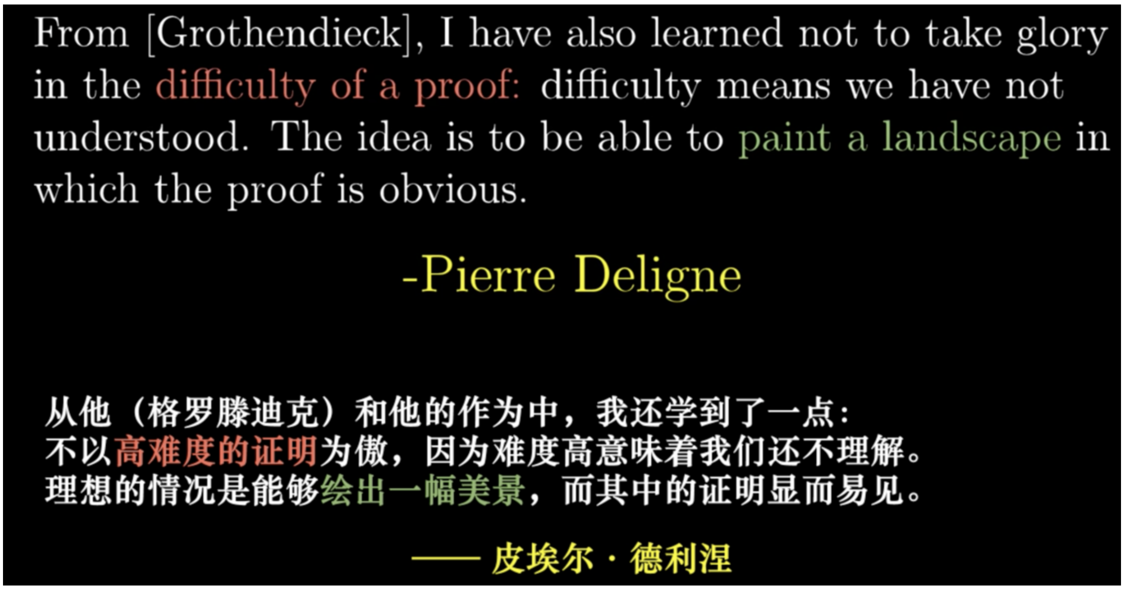
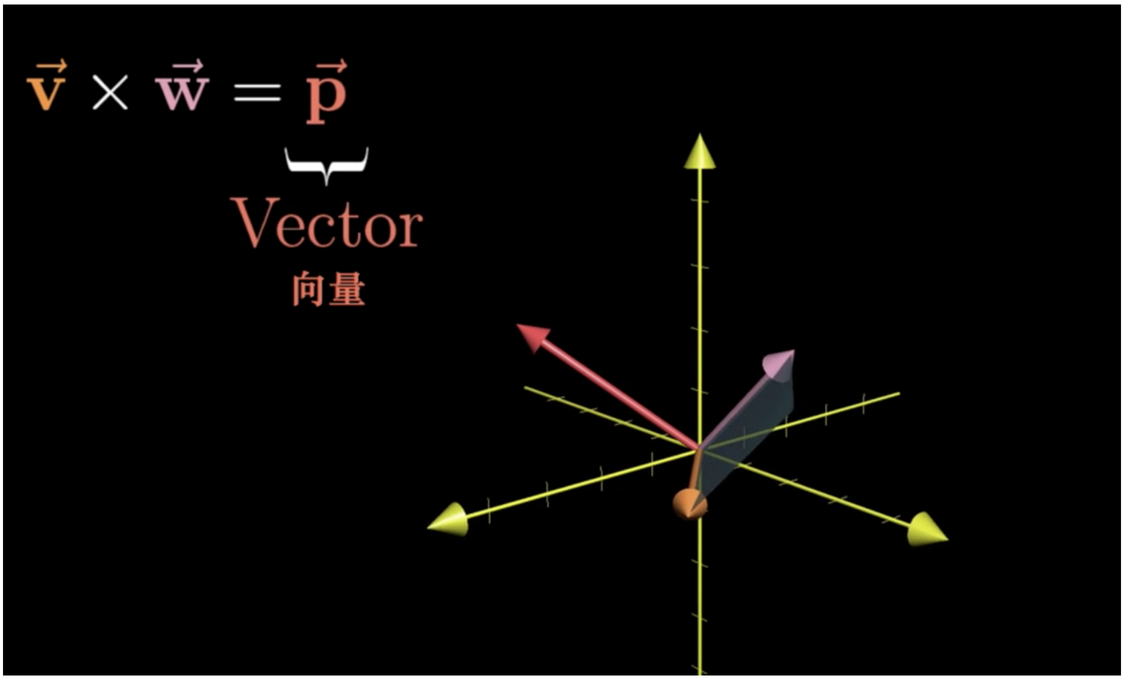
10.叉积



10.1. 叉积计算



计算过程如下：

$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}=\det\left(\begin{bmatrix}\hat{\imath} & v_1 & w_1\\ \hat{\jmath} & v_2 & w_2\\ \hat{k} & v_3 & w_3\end{bmatrix}\right)$$

结果：

$$\hat{\imath}(v_2w_3-v_3w_2)+\hat{\jmath}(v_3w_1-v_1w_3)+\hat{k}(v_1w_2-v_2w_1)$$

运算结果可以解读为向量的坐标。最终得到的向量有以下的性质：

- 长度等于v和w所确定的平行四边形的面积
- 方向垂直于v和w
- 满足右手法则。右手食指指向v，中指指向w，拇指指向叉积的结果p

2. 叉积的几何意义

我们再来看下对偶： 每当看到一个多维空间到数轴的线性变换时，它都与那个空间中的唯一一个向量对应，也就是说：应用线性变换和与这个向量做点乘等价。

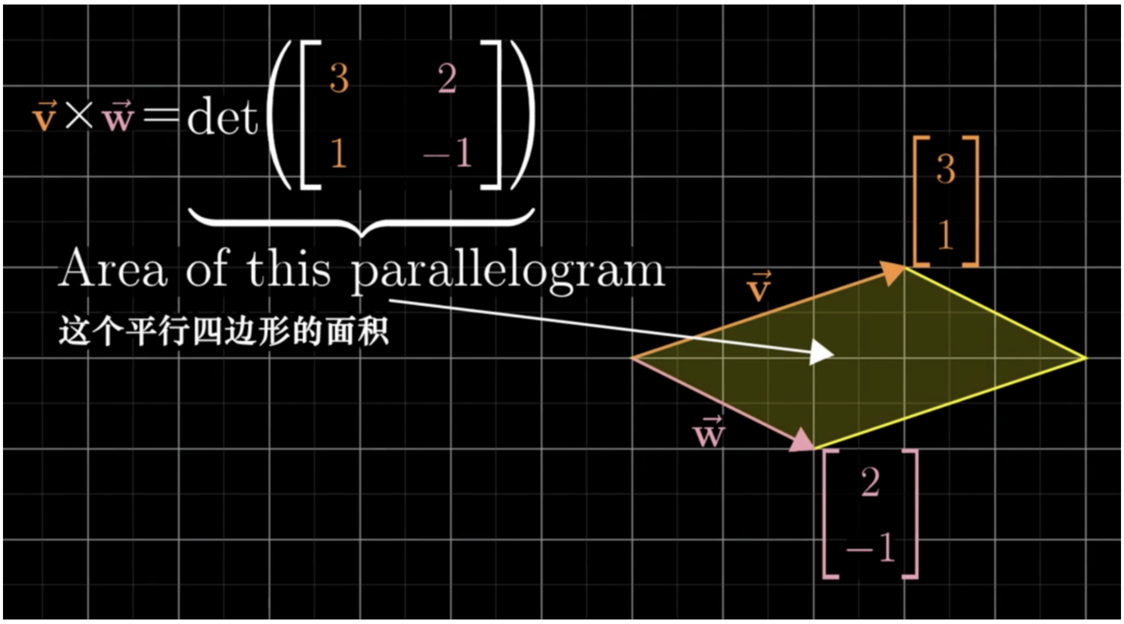
$$\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\cdot\overbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}^{\vec{\mathbf{v}}}}_{\substack{\text{Dot product}\\ \text{点积}}}=\overbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}}^{\substack{\text{变换}\\ \text{Transform}}}\overbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}^{\vec{\mathbf{v}}}$$

这里的收获在于：每当看到一个空间到数轴的线性变换，都能找到一个向量，被称为这个变换的对偶向量（dual vector），使得应用线性变换和与对偶向量点乘等价。

叉积运算是对偶的一个实例。

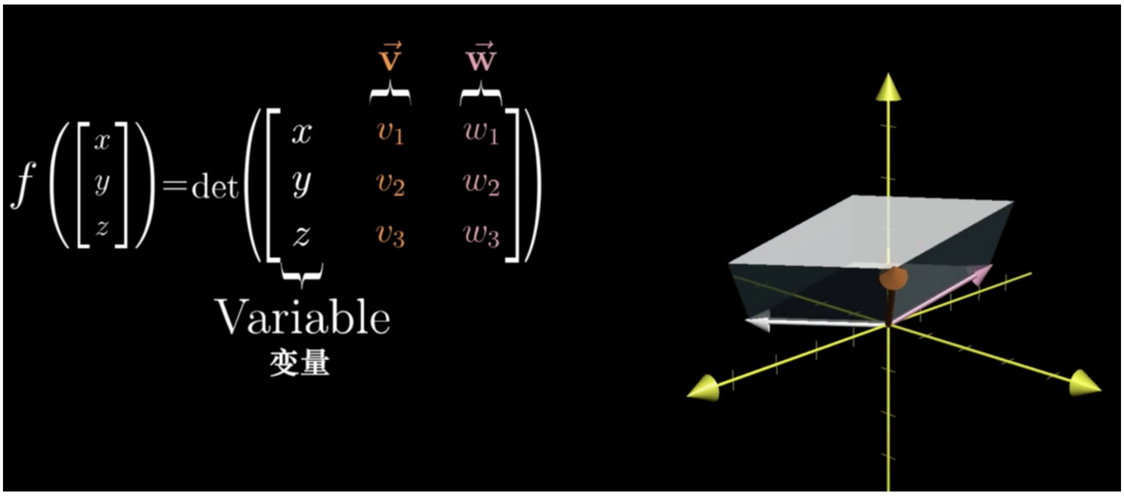
1. 总体计划：根据向量v和w定义一个三维到一维的线性变换
2. 扎到它的对偶向量
3. 证明这个对偶向量就是v和w的叉积

我们先回顾一下二维向量的叉积：



二维向量的叉积，从几何上说，它给出了两个向量张成的平行四边形的面积。 但是，三维向量的叉积接收两个向量输出的是一个向量，并不是接收三个向量，输出一个数。

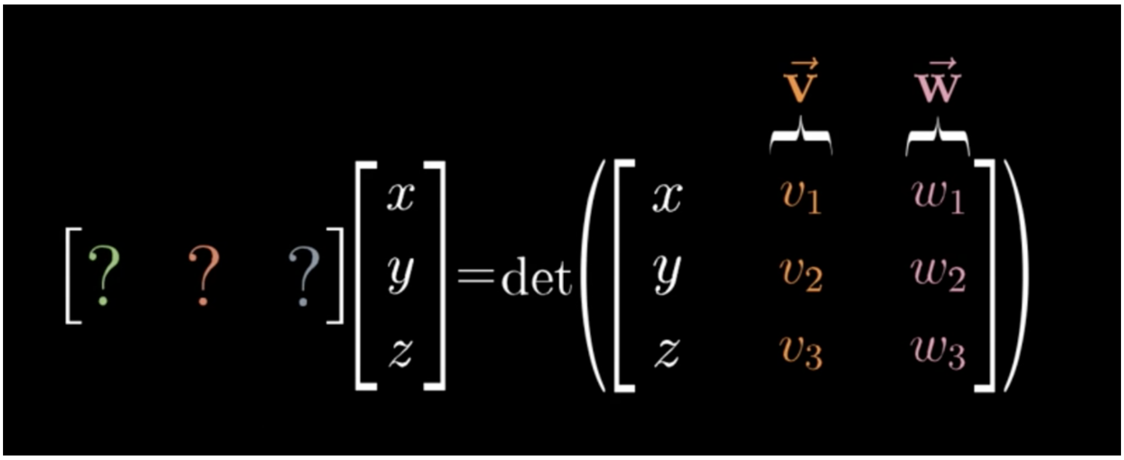
叉积将第一列当作一个可变向量，而v和w保持不变，那么我们就有一个三维空间到数轴的函数了



这个函数的几何意义是：对于任意输入的向量（x,y,z）,都可以确定它和v以及w形成的平行六方体的面积。

我们知道这个函数是线性的，就可以引入对偶了

我们可以通过矩阵乘法来描述这个函数：



对偶性的思路就是：从多维空间到一维空间的变换的特别之处在于，可以将整个变换矩阵立起来看做这个特定向量的点积：

$$\begin{bmatrix}?\\ ?\\ ?\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\det\left(\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & \vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{w}}\end{array}\\ \begin{bmatrix}x & v_1 & w_1\\ y & v_2 & w_2\\ z & v_3 & w_3\end{bmatrix}\end{array}\right)$$

我们要找的就是这个特殊向量p，使得p与其他任何一向量（x,y,z）的点积等于一个3×3的矩阵的行列式。

$$\overbrace{\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}}^{\vec{\mathbf{p}}}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\det\left(\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & \vec{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{w}}\end{array}\\ \begin{bmatrix}x & v_1 & w_1\\ y & v_2 & w_2\\ z & v_3 & w_3\end{bmatrix}\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}p_1\cdot x+p_2\cdot y+p_3\cdot z=\ & x(v_2\cdot w_3-v_3\cdot w_2)+\\ & y(v_3\cdot w_1-v_1\cdot w_3)+\\ & z(v_1\cdot w_2-v_2\cdot w_1)\end{aligned}$$

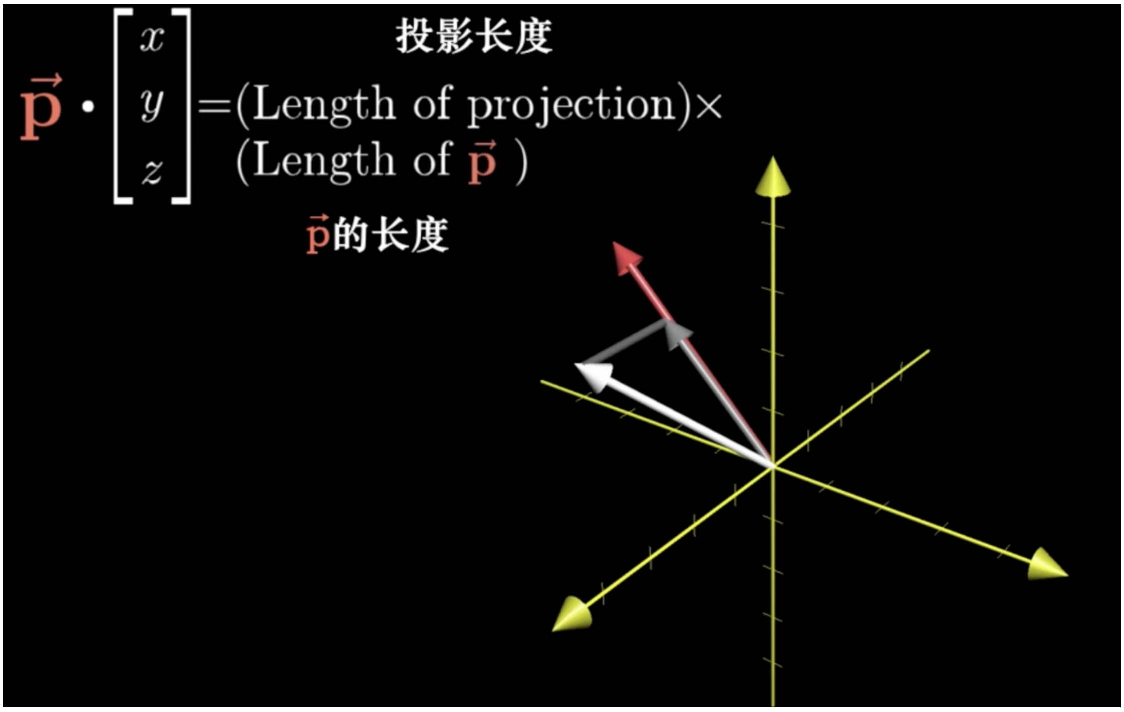
即：

$$p_1 = v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2$$

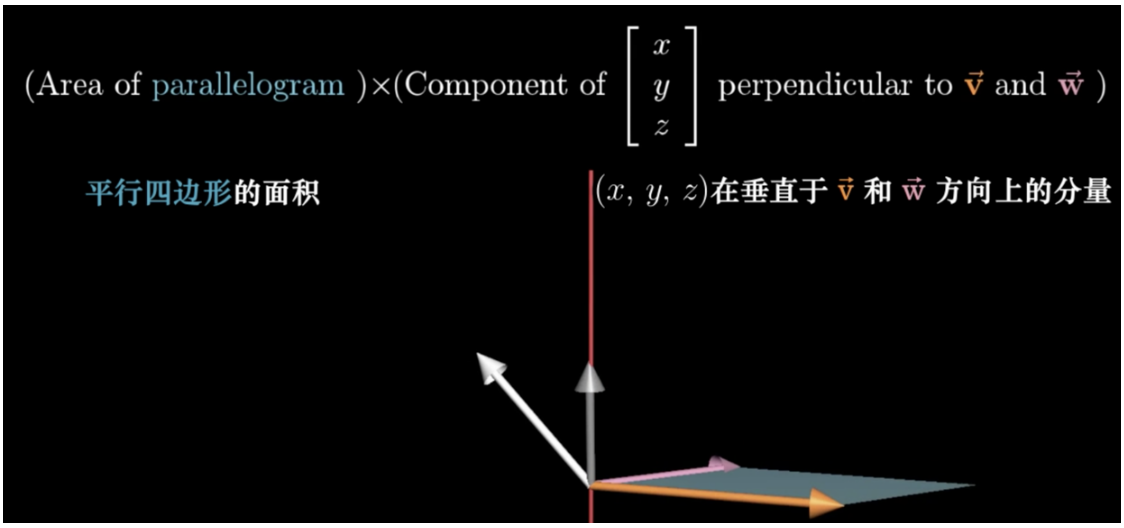
$$p_2 = v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3$$

$$p_3 = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1$$

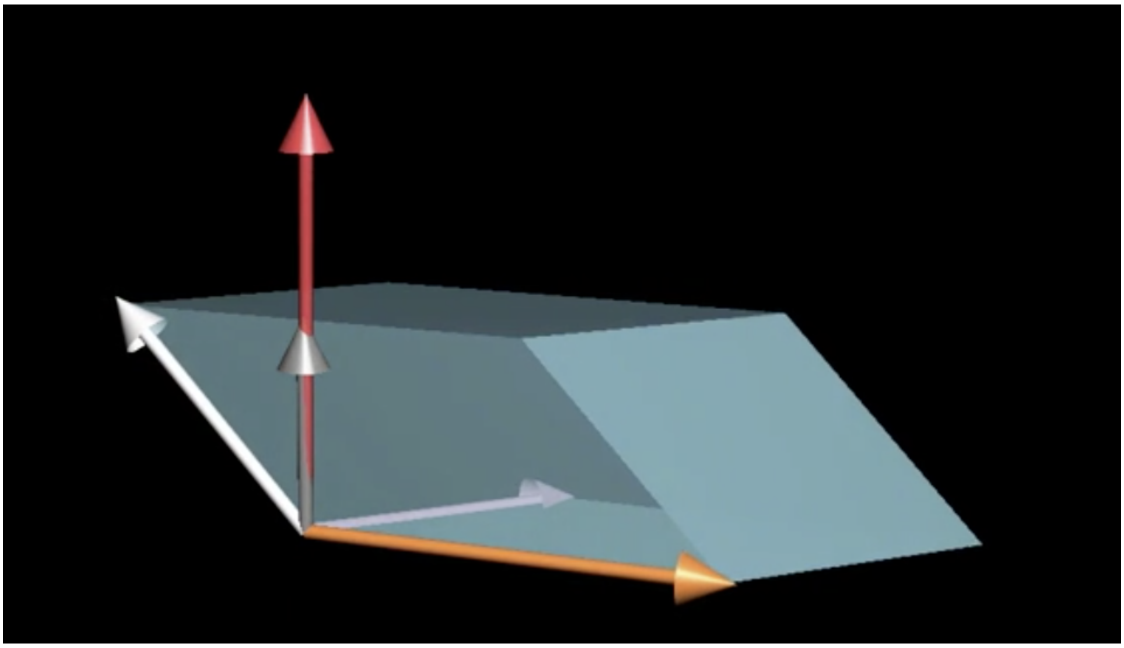
当你将向量p和某个向量(x,y,z)点乘时，所得结果等于一个由（x,y,z）和v与w所确定的平行六面体的有向体积，那么什么样的向量p满足这个性质呢？ 向量p与其他向量的点积的几何解释是：其他向量投影到p上，然后将投影长度与p长度相乘：



考虑到这一点，我们来研究如何求平行六面体的体积：



v和w确定的平行四边形的面积乘以向量（x,y,z）在垂直于平行四边形上的分量即平行六面体的体积。换句话说，找到一个线性函数可以将这个向量投影到垂直于v和w的直线上，让后将投影长度与v和w张成的平行四边形的面积相乘。但是，这和垂直于v和w且长度为平行四边形面积的向量与（x,y,z）点积是一回事



这意味着我们找到了一个向量p，使得p和某个向量（x,y,z）点乘时，所得结果等于3×3矩阵的行列式。我们通过计算获得的向量就是我们要找的向量：

$$p_1 = v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2$$

$$p_2 = v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3$$

$$p_3 = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1$$