曲线绘图的目标：利用正负f',f''画f的图像

> goal: Draw graph of f using f',f'' positive/negative

第一条原理（first principle）：

$$\boxed{\begin{aligned}&if\ f'>0,\ then\ f\ is\ increasing\\&if\ f'<0,\ then\ f\ is\ decreasing\end{aligned}}$$

第二条原理：

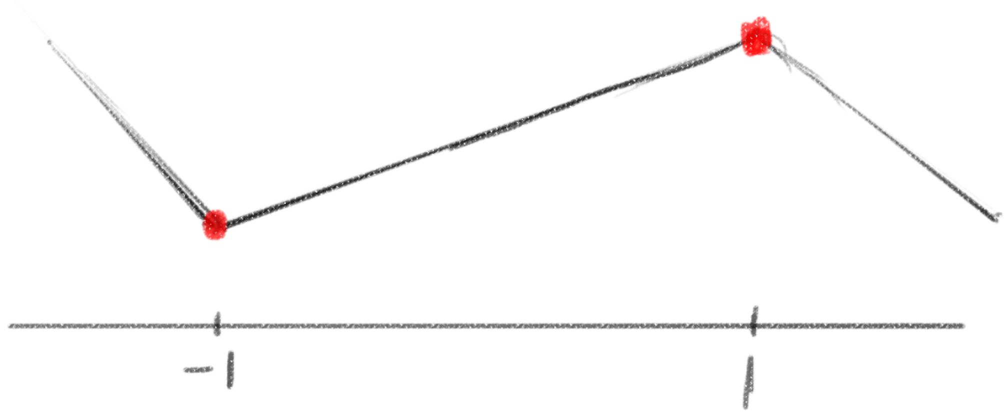
$$\boxed{\begin{aligned}&if\ f''>0,\ then\ f'\ is\ increasing\\&if\ f''<0,\ then\ f'\ is\ cancave\ down\end{aligned}}$$

例如：$f(x)=3x-x^3$

$f'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$

$$\boxed{\begin{aligned}&if\ \ -1<x<1,\ then\ f'(x)>0,\ \ f\ is\ increasing\\&if\ x>1,\ then\ f'(x)<0,\ \ f\ is\ decreasing\\&if\ -1>x,\ then\ f'(x)<0,\ \ f\ is\ decreasing\end{aligned}}$$

可以绘制如下曲线简图：



> 图像中的两个红点是这张简图的关键。它们是图像的极值点（turning point/extremum point）.它们本质上是导数符号改变的点，在极值点，导数的

> 值为0

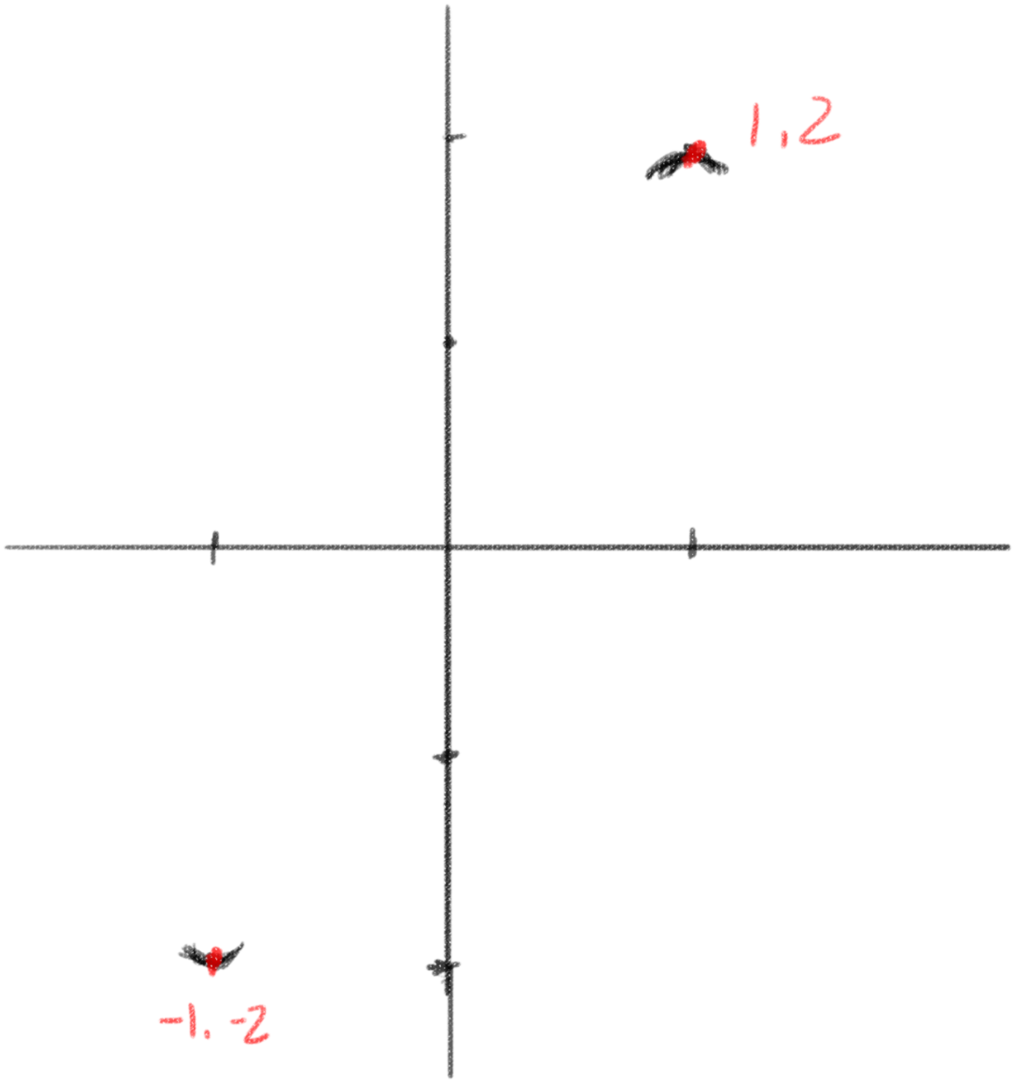
> 如果$f'(x_0)=0$,我们称x_0为驻点（critical point）； y_0,即$f(x_0)$的值称为驻点值。

> 驻点不一定是极值点，因为驻点左右两侧有可能符号是一样的。但是，极值点一定是驻点

驻点很好找，即使$f'(x)=0$,在这里，也就是$(1-x)(1+x)=0$,驻点为：$x=\pm 1$。将驻点分别代入即可获取到驻点值：

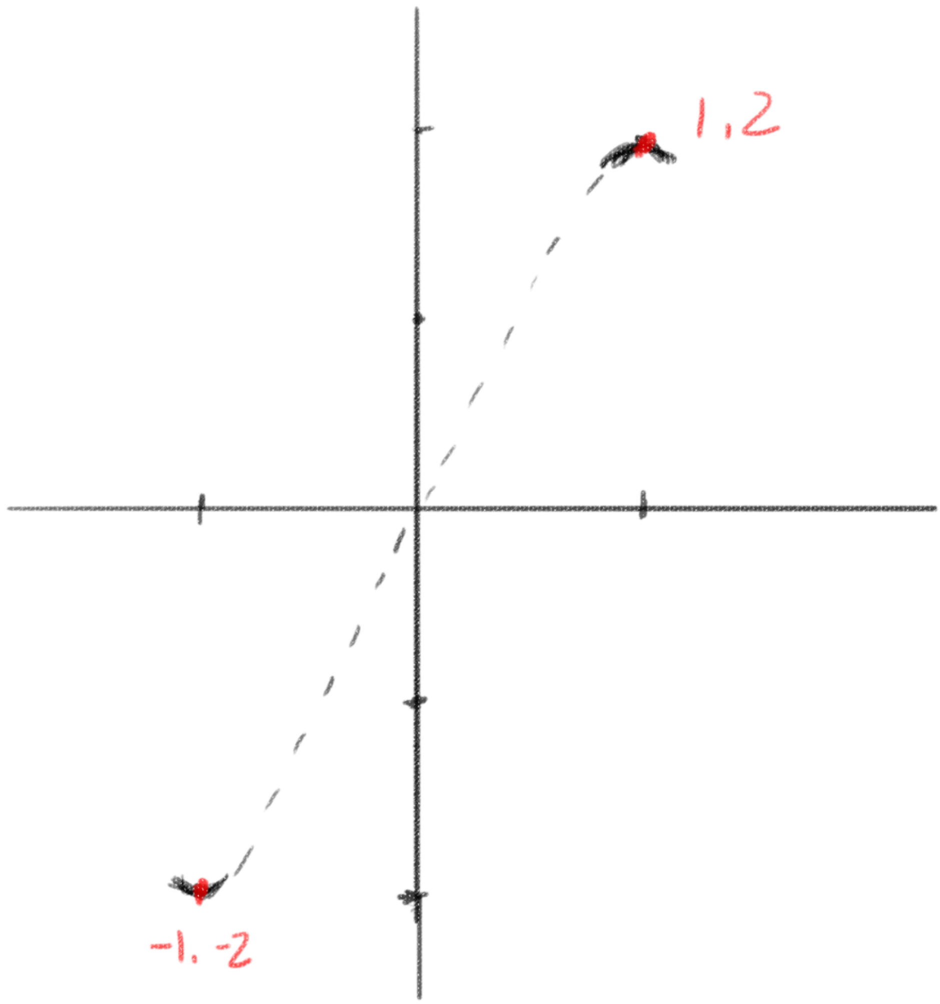
$$\boxed{\begin{array}{l} f(1)=3-1^3=2 \\ f(-1)=-3-(-1)^3=-2 \end{array}}$$

根据驻点及驻点值，可以获取如下曲线信息：



> 根据驻点可以获取该点附近的凹/凸信息

又因为f是奇函数，必定过原点，我们可以猜测其图像：



当x向左右无限延伸时，图像是怎么样呢？这是一个无限远端问题

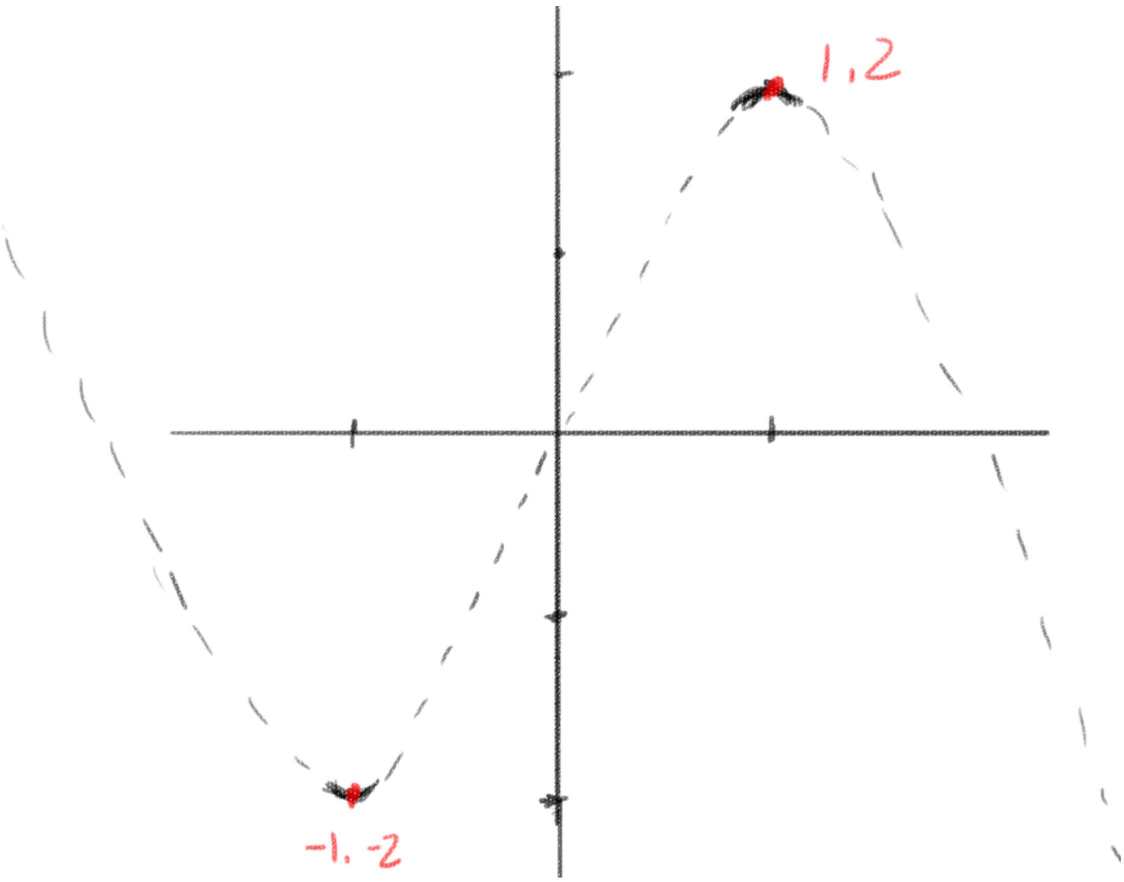
$f(x) = 3x - x^3$, 当x无限大时，一阶项就可以省略了，因此:

$f(x) \approx -x^3$

$when\ x \to +\infty, f(x) \to -\infty$

$when\ x \to -\infty, f(x) \to +\infty$

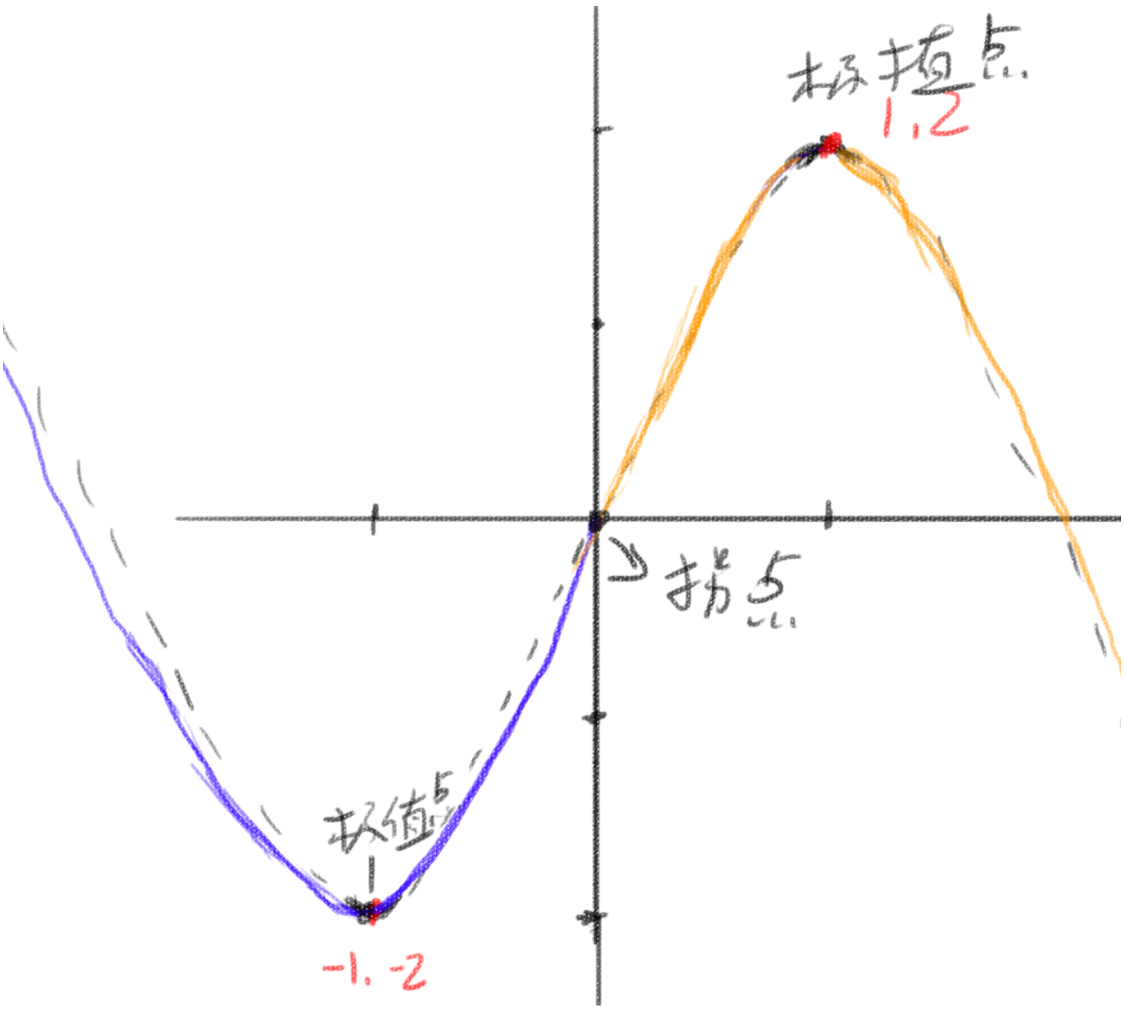
根据以上信息，绘制如下：



最后，我们可以用二阶导数来进行装饰。

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
f''(x) = (3 - 3x^2)' = -6x \\
if\ x > 0, then\ f''(x) < 0, concaved\ down \\
if\ x < 0, then\ f''(x) > 0, concaved\ up
\end{array}
}
$$

使$f''(x_0) = 0$的x_0称为拐点，这个例子中原点就是拐点，原点的左侧是凹图像，右侧是凸图像，所以绘制：



接下来，我们看一个双曲线的例子。

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{x+2} \\ f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} \neq 0 \end{aligned}}$$

该函数没有驻点。这时该怎么办呢？用初等数学中学到的描点（plot points），但现实是那个最重要的点没有定义，即x=-2那个点，这正是函数的不连续点。

计算x=-2处的值实际上是无法做到的，但可以计算它的左右极限。如果代入一个略大于-2的数：

$$\boxed{f(-2^{+}) = \frac{-2+1}{-2^{+}+2} = \frac{-1}{0^{+}} = -\infty}$$

代入一个略小于-2的数：

$$\boxed{f(-2^-) = \frac{-2+1}{-2^-+2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty}$$

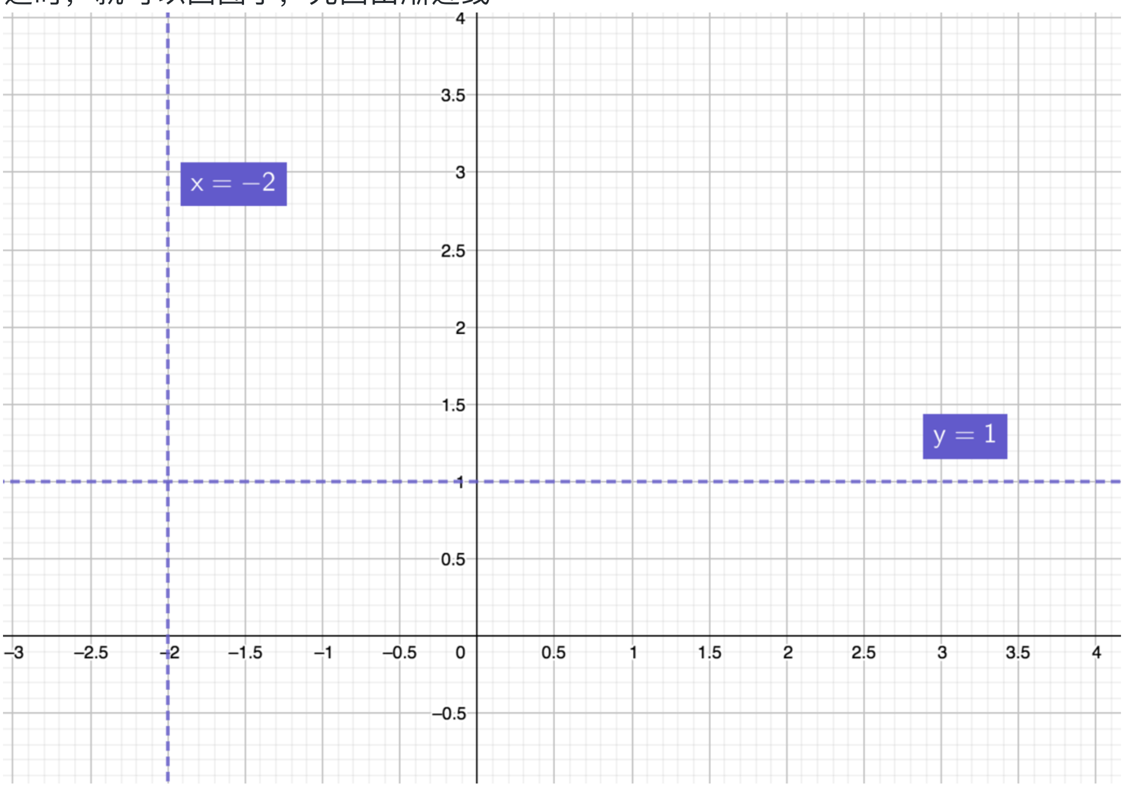
第二步，我们要关注的是无限远端的情况。

$$\boxed{\begin{aligned} & x \to \pm\infty \\ f(x) &= \frac{x+1}{x+2} \\ &= \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} \qquad \text{\#分子、分母同除以x} \\ &= 1 \end{aligned}}$$

不论正无穷还是负无穷，结果都是1，也可以简化为：

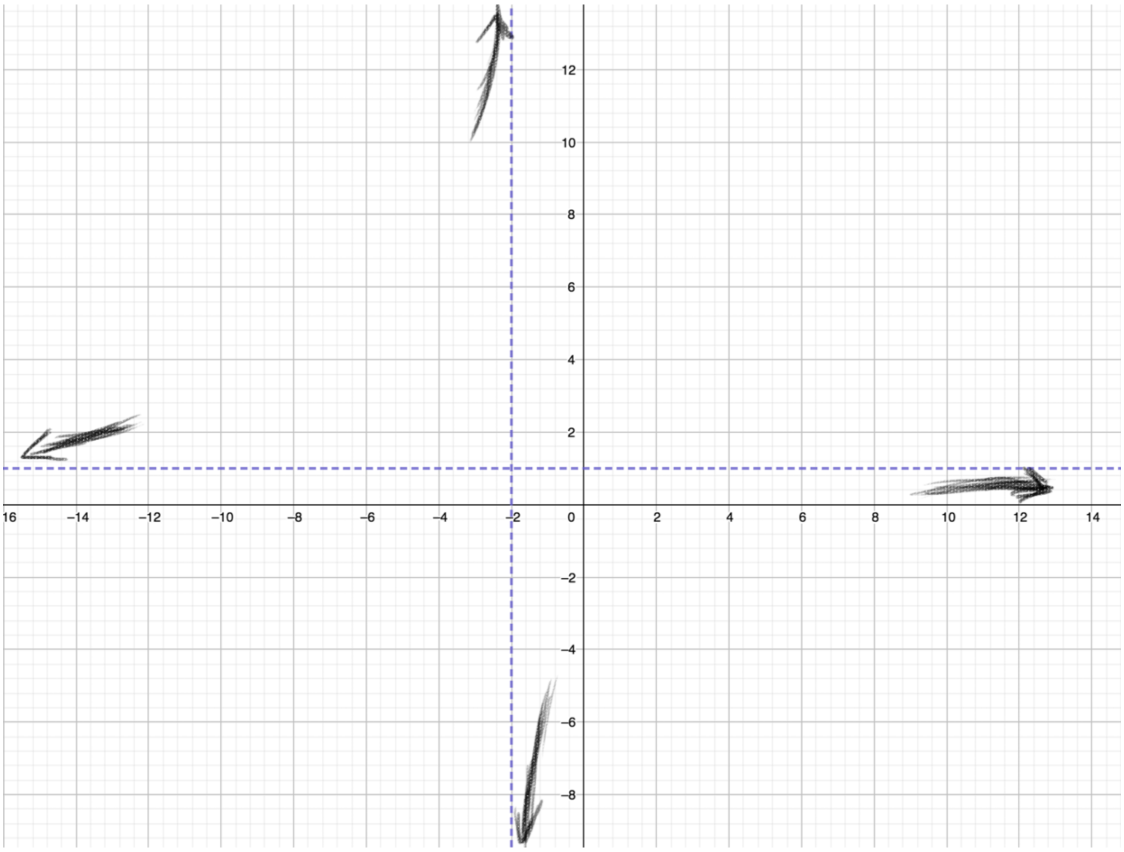
$$\boxed{f(\pm\infty) = 1}$$

这时，就可以画图了，先画出渐近线：

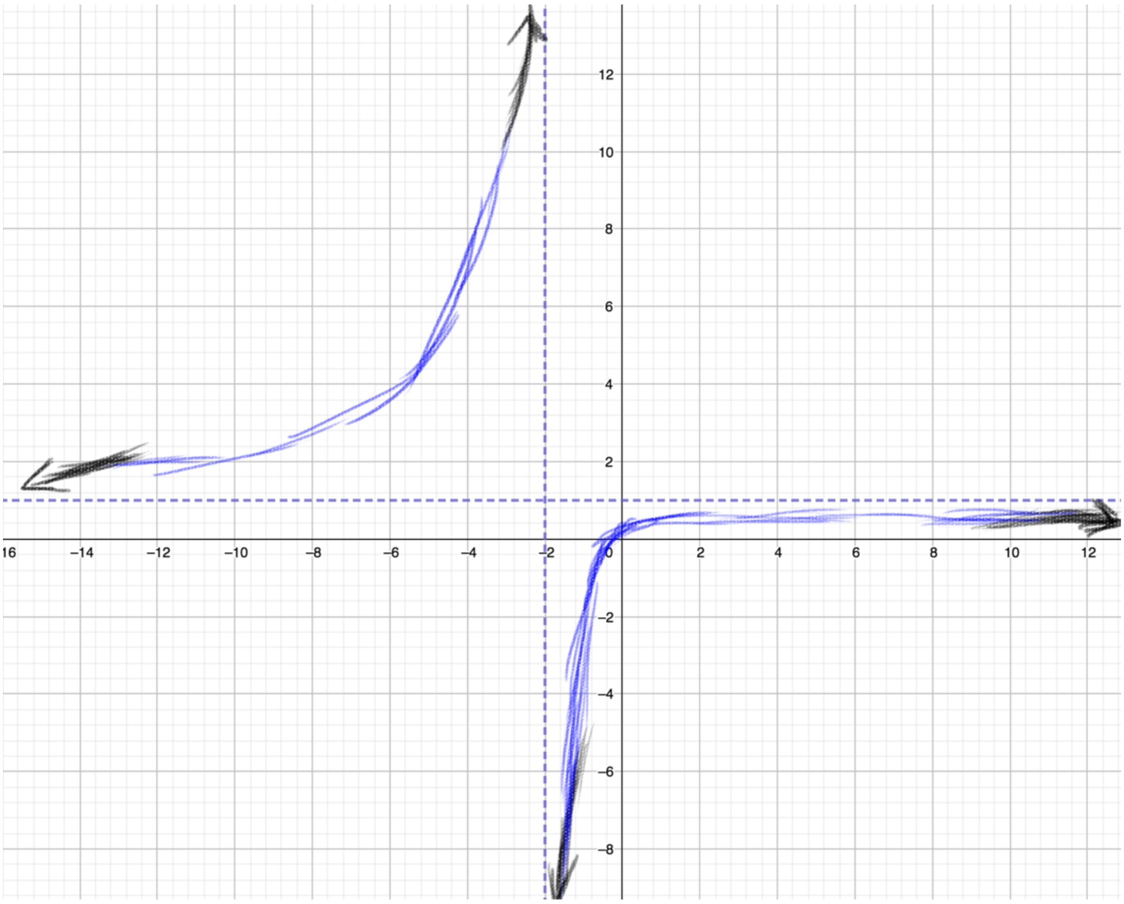


我们知道的信息是，当右边逼近-2时，函数值趋向于负无穷；而在渐近线的另一

边，函数值趋向于正无穷。 左边无限远处，函数值趋近于1；右边无限远处，函数值也趋近于1.



因为没有驻点，也就是没有切线是水平的点，所以图像是不可能折返的。绘制如下图像：



接下来检查一些细节问题：

$$\because \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$
$$\Rightarrow f\ increasing\ on:\ -\infty < x < -2, -2 < x < +\infty$$

如果图像还需要一些修饰的话，就需要用到二阶导数：

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3} \qquad (x \neq -2)$$
$$when\ -2 < x < +\infty, \quad f''(x) < 0, concave\ down$$
$$when\ -\infty < x < -2, \quad f''(x) > 0, concave\ up$$

二阶导数告诉我们，原函数是曲线形状，不可能是波浪形的。

通用的作图的策略（general strategy for sketching）：

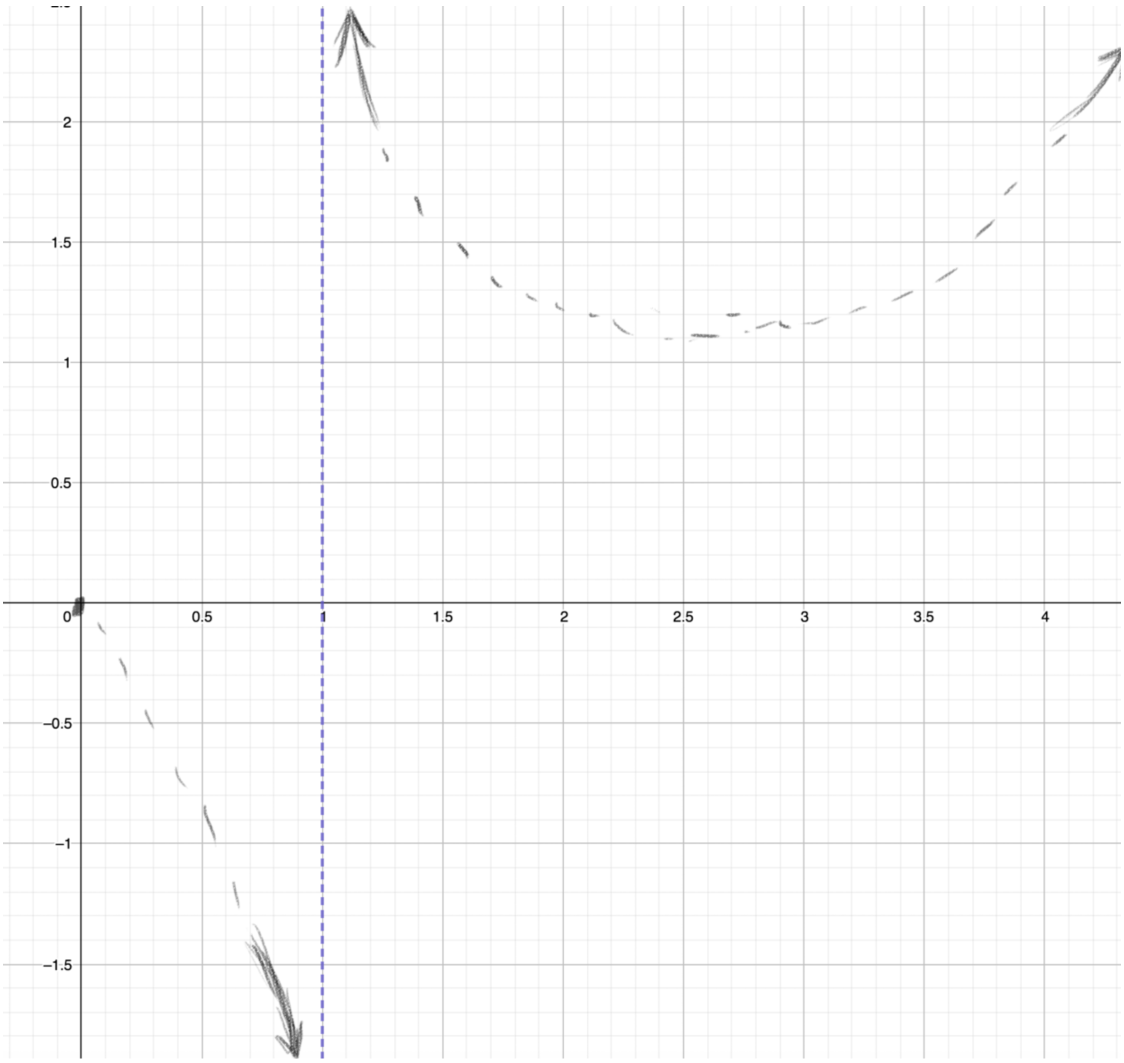
1. 描点（plot）
   i. 在对函数求导前，需要找出函数的不连续点，特别是函数值趋于无穷的点
   ii. 标出无限远端。即x趋于正负无穷的情况
   iii. 标出那些易求的点（可选）
2. 求导数
   i. 取得导数为0的点（$f'(x) = 0$）
   ii. 标出驻点和其值
3. 判断在每个驻点或不连续点为端点的区间内f'的正负性。
4. 观察f''的正负性，以便判断函数的凹凸。可以求出f''(x)=0点，也就是拐点（inflection point）
5. 最后，把所有信息组合起来。

例如：$f(x) = \frac{x}{\ln x}, x > 0$

1. 描点
   i. 求奇点（f为无穷的点）。即分母为0时的点：$\boxed{\begin{array}{l} f(1^+) = \dfrac{1}{\ln 1^+} = \dfrac{1}{\ln 1^+} = \dfrac{1}{0^+} = \infty; \\ f(1^-) = -\infty \end{array}}$
   ii. 求端点。因为$0 < x < \infty$,所以：$\boxed{f(0^+) = \dfrac{0^+}{\ln 0^+} = \dfrac{0^+}{-\infty} = 0}$。对于正无穷，我们代入一个比较大的数字：$\boxed{f(10^{10}) = \dfrac{10^{10}}{\ln 10^{10}} = \dfrac{10^{10}}{10 \ln 10} \approx \dfrac{10^{10}}{23} >> 1}$，也就是说f在无穷远端是无穷大的，$f(\infty) = \infty$

      > >>1 表示非常大的数字

现在，我们可以构造出函数的大致图像：

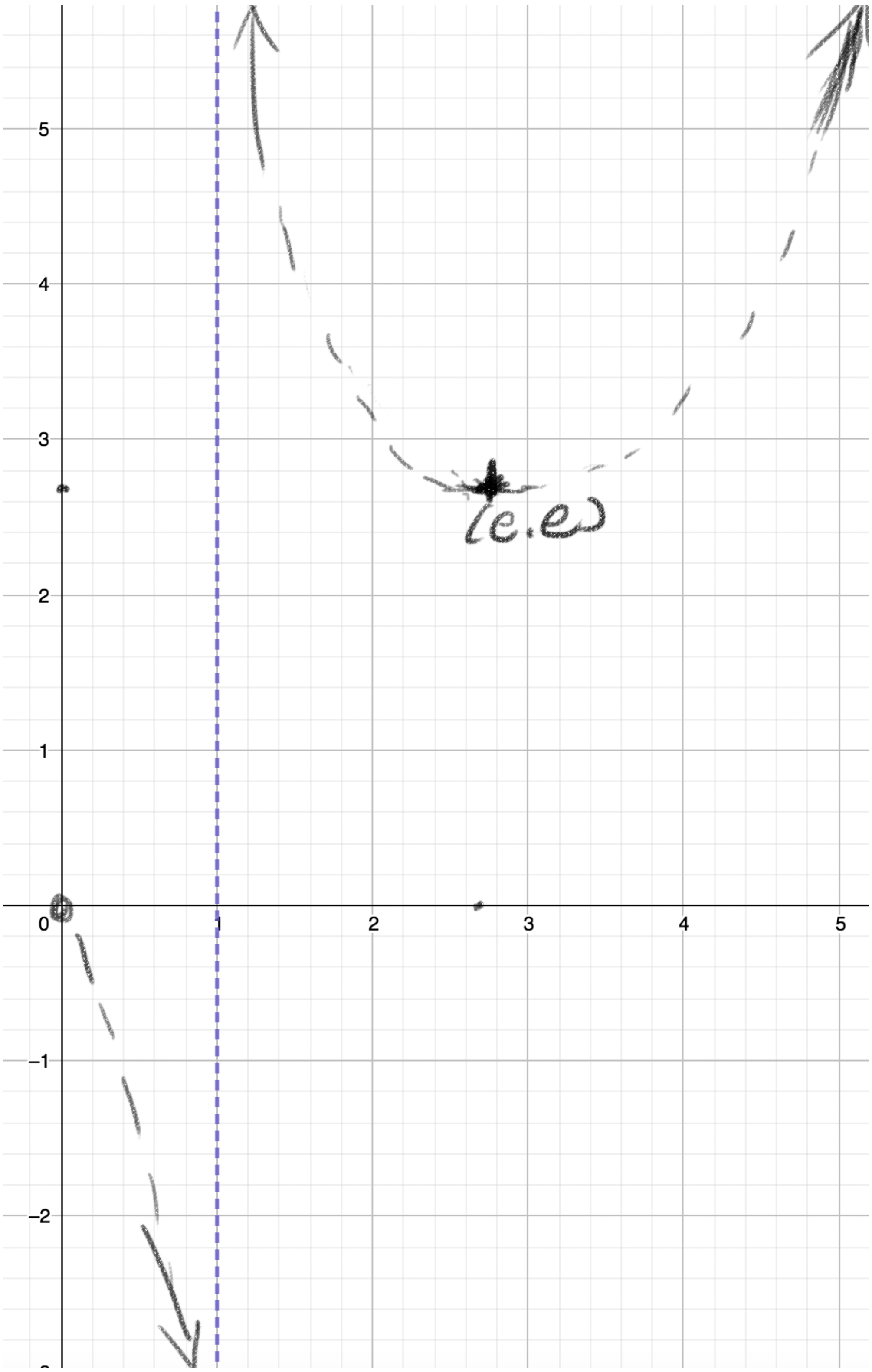


2. 研究驻点，看看函数的性质。先求导函数：

$$\boxed{f'(x)=\frac{\ln x-x(1/x)}{(\ln x)^2}=\frac{(\ln x)-1}{(\ln x)^2}}$$

   i. 求驻点，也就是令$f(x)=0$的点，这里是e。

   ii. 驻点的值：$\boxed{f(e)=\frac{e}{\ln e}=e}$既然只有一个驻点，那么图像就可以确定了。换句话说，因为只有一点导数为0，所以没有多余的水平切线和转向。所以：



3. 双重检查（double check）。检查区间呢的正负性

```
f is decreasing on 0<x<1
```

```
f is decreasing on 1<x<e
f is increasing on e<x<∞
```

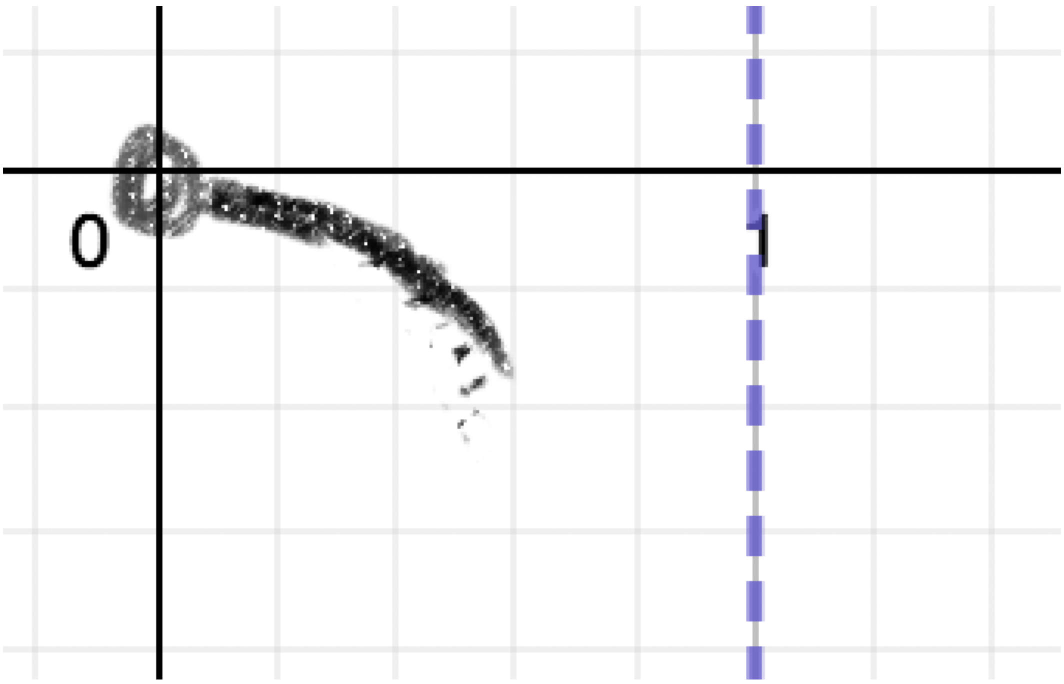
上面就是函数的性质。再用导数进行检测

$$\boxed{\begin{array}{l} when\ 0 < x < 1, f'(x) = \frac{-}{+} < 0 \\ when\ 1 < x < e, f'(x) = \frac{-}{+} < 0 \\ when\ e < x < \infty, f'(x) = \frac{+}{+} > 0 \end{array}}$$

所以，我们验证了我们已知的东西。

4. 确定确定凹凸性。也可以说是修饰图像

   首先对导数做代数变形，$\boxed{f'(x) = \frac{(\ln x) - 1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}}$。这让我们注意到之前忽略的一个性质，也就是所谓的图像修饰。$\boxed{f'(0^+) = \frac{1}{\ln 0^+} - \frac{1}{(\ln 0^+)^2} = \frac{1}{-\infty} - \frac{1}{(-\infty)2} = 0}$,这个告诉我们，图像开始的一小段是这样的：

   求二阶导数

$$
\boxed{\begin{aligned} f''(x) &= -(\ln x)^{-2}\frac{1}{x} + 2(\ln x)^{-3}\frac{1}{x} \\ &= \frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3} \end{aligned}}
$$

为了确定正负性，观察分子分母的符号变化。在分子中，当$\ln x$为2时，即x为e^2时，符号发生变化；在分母中，当$\ln x$为0时，也即x为1时，符号发生变化。现在，我们有了一些区域：

$$
\boxed{\begin{aligned} &0 < x < 1, f'' = \frac{+}{-} < 0, \quad \therefore concave\ down \\ &1 < x < e^2, f'' = \frac{+}{+} > 0, \quad \therefore concave\ up \\ &e^2 < x < \infty, f'' = \frac{-}{+} < 0, \quad \therefore concave\ down \end{aligned}}
$$

最终的图像如下：