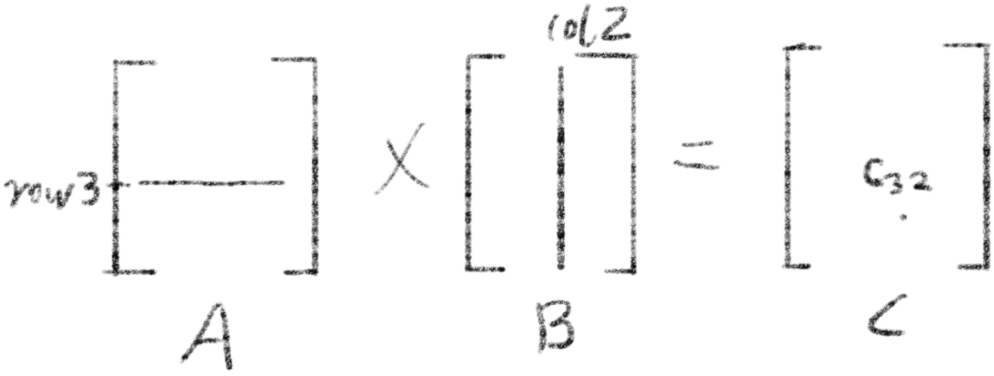
1.乘法

矩阵A、B相乘结果为矩阵C，求矩阵C中(3,2)的元素（entry）的值



矩阵C中(3,2)元素为矩阵A的第三行与矩阵B的第二列的点乘：

$$\boxed{\begin{aligned} C_{32} &= (row\ 3\ of\ A) \cdot (column\ 2\ of\ B) \\ &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + ... + a_{3n}b_{n2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k2} \end{aligned}}$$

我们可以从不同的角度来看矩阵乘法。

(1)常规方法：$m \times n$的矩阵A与$n \times p$的矩阵B相乘的结果为：$m \times p$的矩阵C

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 & 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 \\ 4 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 5 & 4 \times 2 + 5 \times 4 + 6 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

(2)列方法：我们可以将矩阵C中的每一列看做是A中列的线性组合，列系数为B中对应列的每一行相应值

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

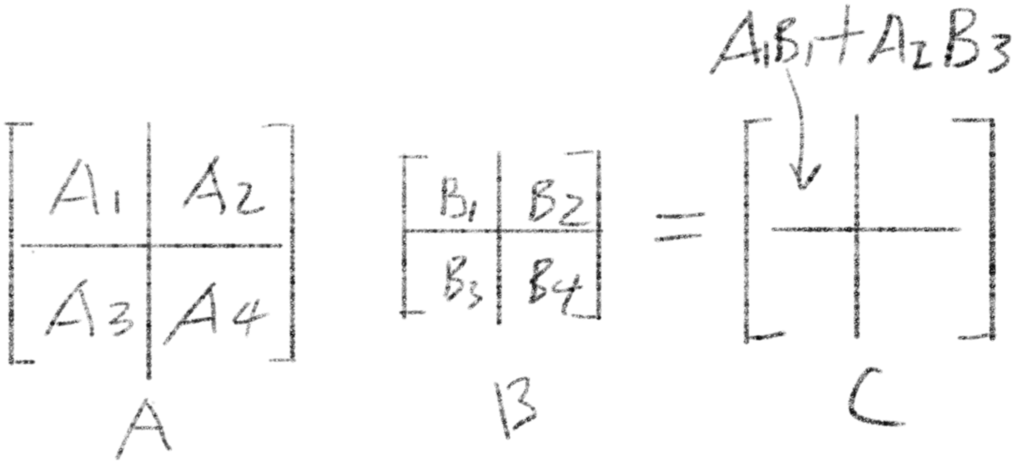
(3)行方法：我们可以将矩阵C中的每一行看做是B中各行的线性组合，行系数为A中对应行的每一列相应值

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \\ 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

(4) 列乘以行

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 28\\49 & 64\end{bmatrix}$$

(5) 分块



2. 矩阵的逆

2.1 逆矩阵

如果一个矩阵A有逆矩阵（记作A^{-1}）,那么矩阵与逆矩阵相乘结果是一个单位矩阵（记作I）

$A \cdot A^{-1} = I$

逆矩阵A^{-1}在矩阵A右边，叫做右逆，在左边，就叫左逆。

如果A是方阵，那么左逆与右逆相等：

$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

如果是非方阵，左逆和右逆是不相等的。

如果矩阵A有逆矩阵，则称A为可逆的（invertible）或非奇异的（no-singular）

2.2 奇异矩阵

奇异矩阵是没有逆的矩阵。

例如：

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}$$

> 直观理解：当矩阵A中两列共线时，所有的线性组合均在此直线上，而1 0 却不在这个线上，所以没有逆。

> 如果其中一列对线性组合毫无贡献，矩阵不可能有逆。

如何判断上面的矩阵是不可逆的呢？如果可以找到一个向量x，让矩阵A乘以这个向量x得到0，那么矩阵A就是不可逆的：

$$Ax = 0$$

> 矩阵的列能通过线性组合得到0，也就是通过非零向量x得到0。

例如：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}_{x} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

我们来推导下这个公式： 因为，如果A有逆矩阵,则$A^{-1}Ax = 0(A^{-1}0)$,由此得到$x = 0$,而$x \neq 0$,所以A不肯能有逆矩阵。

2.3 非奇异矩阵

首先，如何求矩阵的逆矩阵。例如：

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

> 求逆其实和解方程组是一回事。

A乘以其逆的第j列=单位矩阵的第j列。上面的例子可以分为两组：

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

上面的矩阵可以转换为两个方程组：

$a + 3c = 1$
$2a + 7c = 0$

$b + 3d = 0$
$2b + 7d = 1$

求得：a=7,b=-3,c=-2,d=1。也就是逆矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

我们还可以用高斯-若尔当消元法实现一次性求逆。

> 高斯-若尔当（Gauss-Jordan）思想： 同时处理两个方程组。

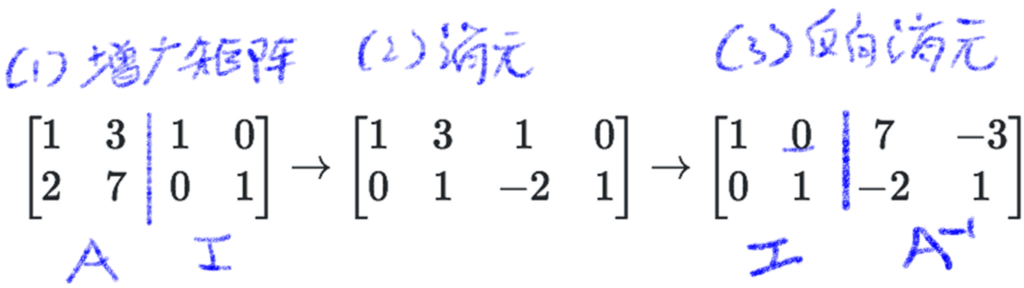
高斯-若尔当消元法求逆的步骤为：

(1) 将矩阵A用单位矩阵I扩展为增广矩阵(AI)

(2) 消元

(3) 反向消元，直到增广矩阵形式为IA^{-1}

如上面的案例解题步骤如下：



最终，求得逆矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

为什么高斯-若尔当消元法可以求逆呢？在矩阵消元中，消元矩阵E乘以矩阵A等于消元后的矩阵U

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}}_{E}\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & ? \end{bmatrix}}_{U}$$

因为$EA = I$,所以$E = A^{-1}$，则：

$EI = A^{-1}I = A^{-1}$

所以，U就是IA^{-1}。