什么是中值定理呢？首先看一下案例：

如果你从波士顿到洛杉矶（3000miles），用时6小时，那么一定有某一时刻你能达到一特定速度，也就是平均速度（500 mi/h）。

用数学符号来描述中值定理：

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\\ for\ some\ c, a<c<b\end{array}}$$

> 距离除以时间（平均速度）=某一中间时刻瞬时的速度

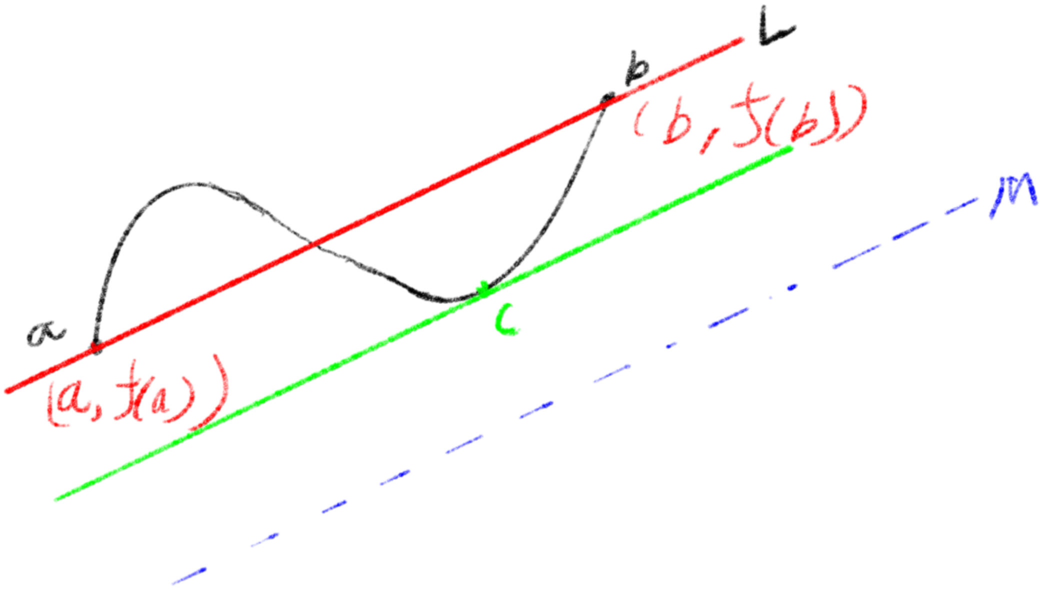
定理都需要一些假设条件。中值定理需要的前提：

```
f在区间(a,b)内可微，并且在[a,b]上联系。
```

也就是说，在任何一个中间点上，速度或者说f的变化率是可求的。

有了假设和结论，就是完整的定理了。现在来证明中值定理。只需要一幅图就能说明问题：

红色的割线L既是表达式左边项，它表示的是a与b之间的斜率。蓝色虚线M是与L平行的线，我们要做的是上移M使之与曲线上一点相切，这个相切的点就是我们要找的c,这条绿色线的斜率就是f'(c)。如下图：



中值定理的三个推论：

$$
\boxed{\begin{array}{l}
1.\ if\ f' > 0,\ then\ f\ is\ increasing \\
2.\ if\ f' < 0,\ then\ f\ is\ decreasing \\
3.\ if\ f' = 0,\ then\ f\ is\ constant
\end{array}}
$$

证明过程如下。 首先重写中值定理：

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \\
f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a) \\
f(b) = f(a) + f'(c)\cdot(b-a)
\end{array}}
$$

令a<b, 则(b-a)>0。所以：

$$
\boxed{\begin{array}{l}
1. f'(c) > 0, then\ \ f(a) > f(b), \text{也就是函数递增} \\
2. f'(c) < 0, then\ \ f(a) < f(b), \text{也就是函数递增} \\
3. f'(c) = 0, then\ \ f(a) = f(b), \text{也就是说函数是常数}
\end{array}}
$$

接下来，我们通过不定式来理解这三个推论。

不定式表示的是函数之间的关系。例如证明：$e^x > 1 + x; (x > 0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = e^x - (1 + x) \\ starts: f(0) = e^0 - (1 + 0) = 0; f'(x) = e^x - 1 > 0, (x > 0) \\ \therefore f(x) > f(0), for\ x > 0 \end{array}}$$

将值代入：$\boxed{\begin{array}{l} e^x - (1 + x) > 0 \\ e^x > 1 + x \end{array}}$

例2：$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}; (x > 0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = e^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2}) \\ g(0) = e^0 - (1 + 0 + \dfrac{0^2}{2}) = 0; g'(x) = e^x - (1 + x) > 0, (x > 0) \\ \Rightarrow g\ is\ increasing \\ g(x) > g(0), for\ x > 0 \\ \therefore e^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2}) > 0 \\ \therefore e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

中值定理的理解：$\boxed{\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(c), for\ some\ c}$

中值定理告诉我们的是：平均速度在最小速度与最大速度之间，也就是 $min \le average\ speed \le max$。它不是用来求平均速度的。