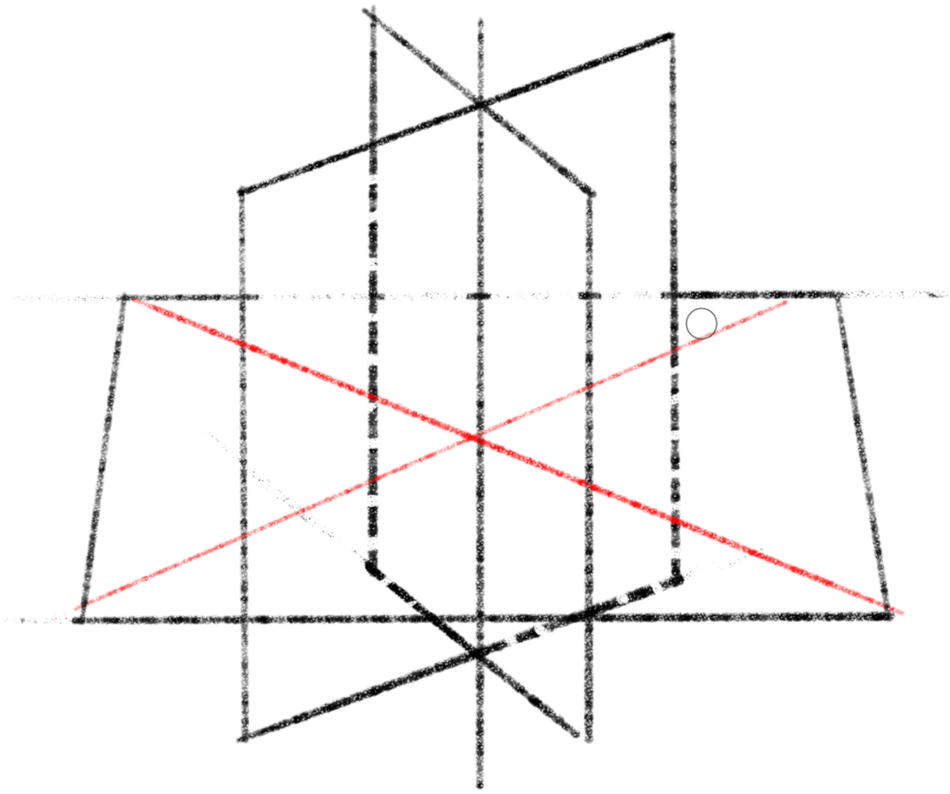
方程组的几何解释

方程组中每一个方程定义了一个平面，也就是说方程组是平面方程的集合。解方程组就是求平面的交点。

例如：

$$\begin{cases} x + \quad\quad z = 1 & (1) \\ x + \ y \quad\ \ = 2 & (2) \\ x + 2y + 3z = 3 & (3) \end{cases}$$

方程(1)表示要求的值在平面(1)上，方程(2)表示要求的面在平面(2)上。前两个方程的公共解就是这两个平面相交的直线。这条直线与第(3)个平面的交点就是方程的解。



可以用$X = A^{-1}B$求解:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

首先求伴随矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{余子式}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{代数余子式}} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{转置}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

之后，求行列式：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 2 & 3\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{求行列式}} 1\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = 1(1\times 3 - 0\times 2) - 0 + 1(1\times 2 - 1\times 1) = 4$$

则逆矩阵为：

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\-3 & 2 & 1\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

最后求解：

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\-3 & 2 & 1\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

则解为:x=1;y=1;z=0

当平面(3)与前面两个平面的交线相交于一个点时，使用上面的方法可以解方程。但是，当平面(3)与前面两个平面的交线平行时，则不适用。

- 当平面(1)与平面(2)的交线在平面（3）上时，有无限多个解。
- 当平面(1)与平面(2)的交线与平面（3）平行时，方程组无解

如何用矩阵方程来判断是否有解呢？ 我们知道逆矩阵是伴随矩阵除以行列式。所以当矩阵的行列式为0时，。

> 我们知道矩阵A中的项是方程的系数，而方程的系数恰好是平面的法向量。所以三个平面的法向量的行列式为零：$\det(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{N_3}) = 0$,也就是这三个法向量共面。