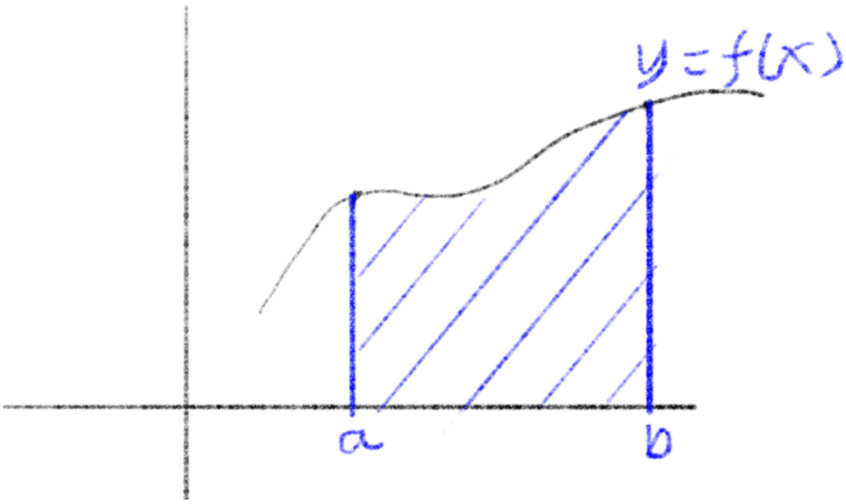
1.从几何方面解释积分

求曲线下的面积（find area under a curve）

> 其他观点：累积和（cumulative sum）

首先，我们先来画一幅图：



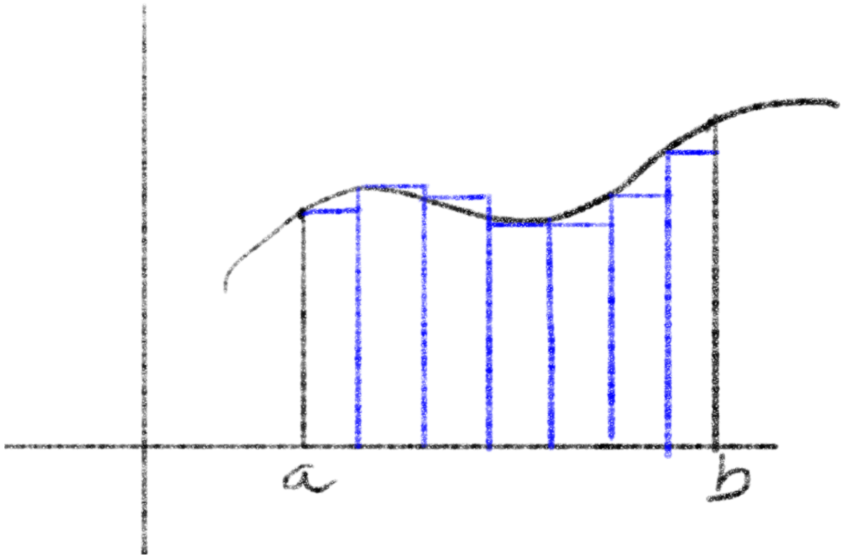
所要求的阴影区域的数学描述为：

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

这就是积分，与不定积分区别是：不定积分没有指定起点和终点。

为了求这块面积，我们需要：

1. 把它切割成一些“矩形”（divide into rectangles）

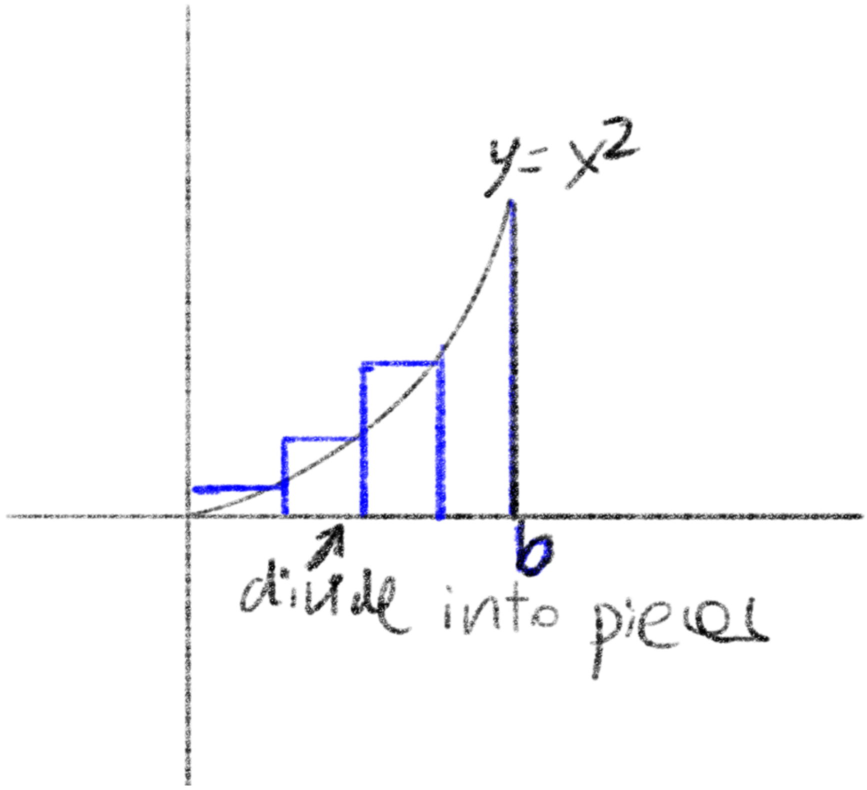


> 有些矩形在曲线上面，有些在曲线下面。超出曲线的矩形，面积是超出来的。反之，面积是不够的。

2. 把这些“矩形”加起来（add up the area）
3. 通过让“矩形”变的无限窄来取得极限值（take the limit as the rectangles get thin）

例1：$f(x) = x^2; a = 0, b \; is \; arbitary$

(1) 首先，画出图：



矩形的长度： $\boxed{base\ length : b/n \qquad (all\ equal\ intervals)}$

我们用制表法来求矩形高度。

x	f(x)
b/n	$(b/n)^2$
2b/n	$(2b/n)^2$
3b/n	$(3b/n)^2$

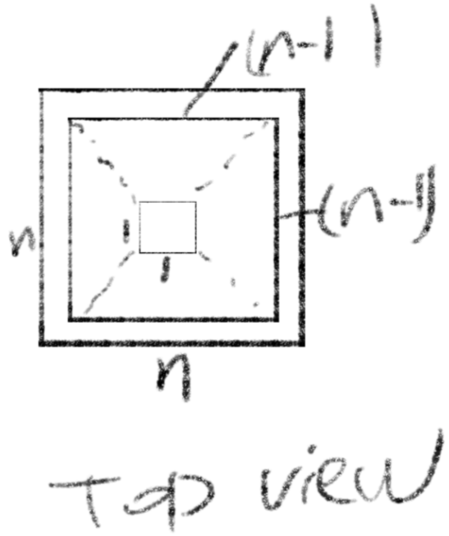
(2) 将面积加起来

矩形的面积和：

$$\boxed{\begin{aligned}&(b/n)(b/n)^2 + (b/n)(2b/n)^2 + \cdots + (b/n)(nb/n)^2 \\ &= (b/n)^3(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\end{aligned}}$$

(3) 通过极限修正矩形面积

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$等于什么呢？我们这里使用一些几何技巧。用一个"金字塔"来表示这些量。



我们知道椎体的体积是：$\frac{1}{3}\times(base\ area)\times height$。这里是：$\frac{1}{3}n^2n$。 再在外边画红色线的平行线如图：

这个绿色椎体的面积为：$\frac{1}{3}(n+1)^2(n+1)$。由此可知，金字塔的面积：

$$\boxed{\frac{1}{3}n^2n < 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 < \frac{1}{3}(n+1)^2(n+1)}$$

$\boxed{(b/n)^3(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$可以变化为如下形式：$b^3 \times \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

而金字塔的面积的公式中都乘以n^3，则：

$$\boxed{\frac{1}{3} < \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} < \frac{1}{3}(\frac{(n+1)^3}{n^3}) = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^3}$$

当$n \to \infty$时，$\boxed{\frac{1}{3} < \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} < \frac{1}{3}}$。

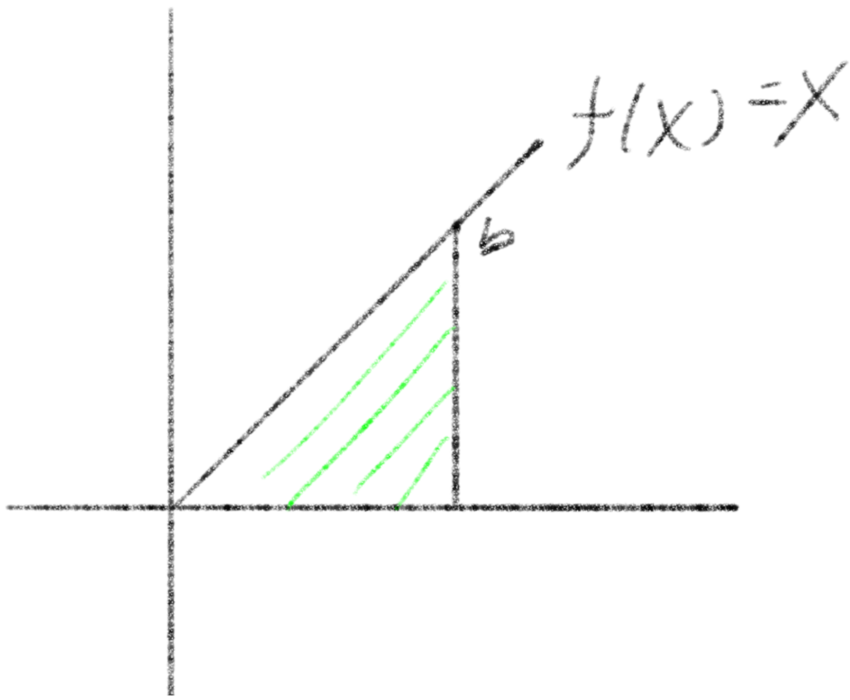
根据夹逼定理，金字塔的面积为：$\frac{b^3}{3}$。

最后，在x^2下，从a到b的总面积为：

$$\boxed{\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}b^3}$$

> 上面复杂的公式可以用求和符号来表示：
> $$\boxed{\begin{array}{l}(b/n)^3(1+2^2+3^2+\cdots+n^2) \\ \sum_{i=1}^{n}(b/n)^3i^2 = (\frac{b}{n})^3\sum_{i=1}^{n}i^2\end{array}}$$

例2：f(x) =x



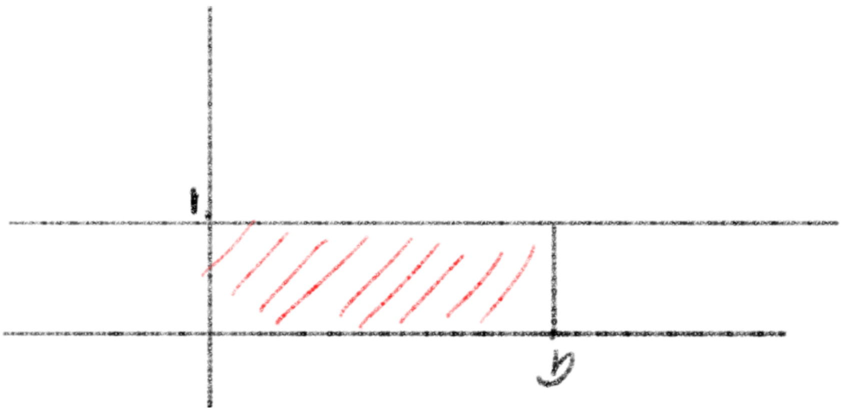
矩形总面积：

$$(b/n)(b/n)+(b/n)+(2b/n)+...+(b/n)(nb/n)$$
$$\Rightarrow (b/n)^2\sum_{i=1}^{n} i$$
$$(b/n)^2(\frac{(1+n)n}{2})=b^2(\frac{1+n}{2n})$$
$$=\frac{1}{2}b^2(\frac{1}{n}+1)$$
$$n\to\infty, \frac{1}{2}b^2$$

最后：

$$\int_a^b xdx=\frac{1}{2}b^2$$

例3： f(x)=1



$$\boxed{\int_a^b 1 \cdot dx = b}$$

根据例1、2、3可以得到如下样式：

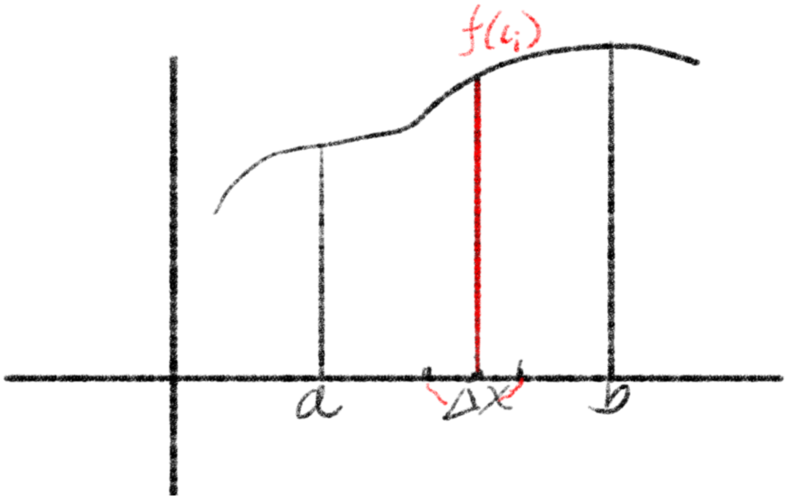
f(x)	$\int_a^b f(x)dx$
x^2	$b^3/3$
x	$b^2/2$
1	b

归纳起来：$\int_a^b x^n dx = b^{n+1}/(n+1)$

2.从累计和角度解释

首先，我们介绍黎曼和。

定积分处理过程如下：



(1) 将线段分成n块，增量的名称为Δx,则$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

(2)取区间内任意一点的f作为高。例如，取高$f(c_i)$。

黎曼和的公式则为：

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x}$$ 这个式子和莱布尼茨公式很相似

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \Rightarrow \int_a^b f(x)dx}$$

看一个例子：假如，每天都借钱，则1年内借的钱为：

$$\boxed{\sum_{i=1}^{365} f(\frac{i}{365})\Delta t}$$ 加上利息：

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{365} f(\frac{i}{365})\Delta t \cdot e^{r(1-1/365)}\\ &\Rightarrow \int_0^1 e^{r(1-t)} f(t)dt\end{aligned}}$$