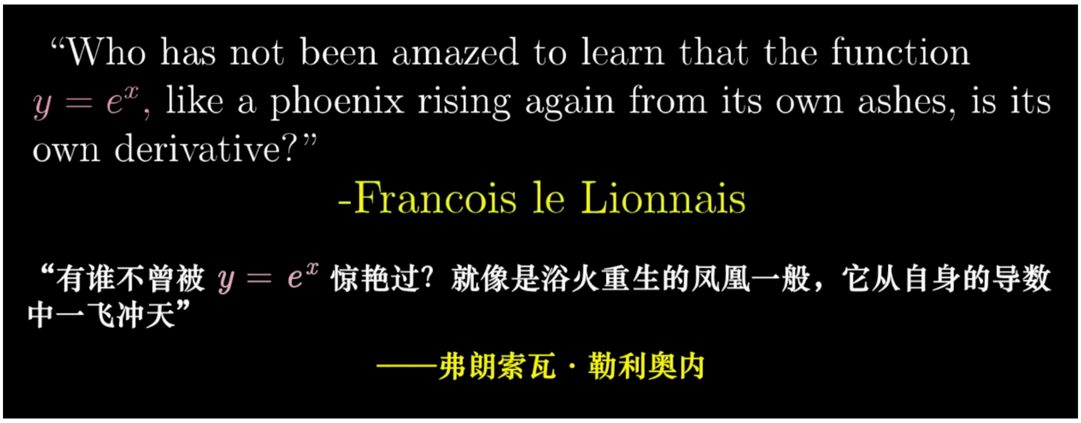
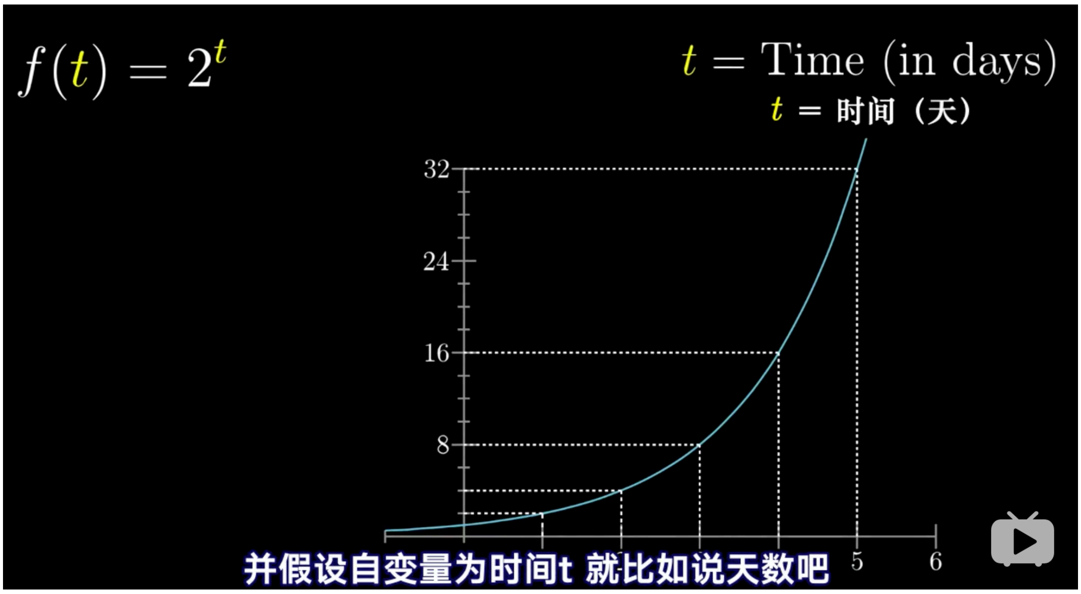
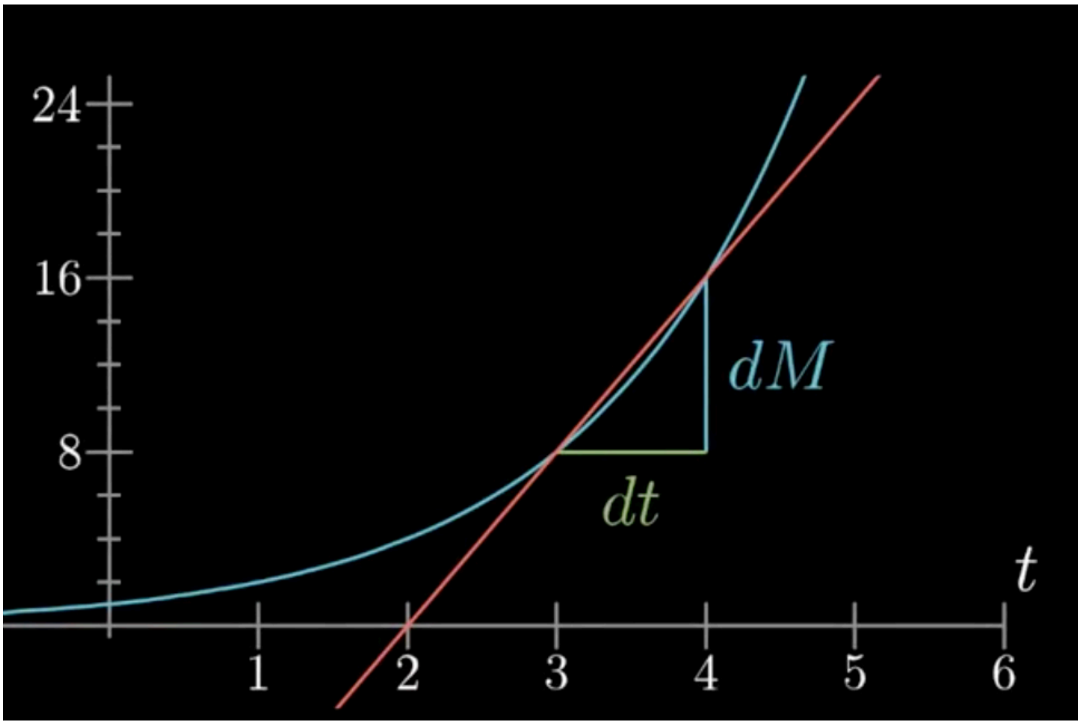


我们首先通过2^t函数来研究下指数函数的特性：



在第0天，总量为2^0也就是一个；第1天的时候，总量增加到2^1=2；第2天的时候2^2=4。总的来说，总量每天都翻一番。

现在，来说导数（for the derivative），我们要算总量的变化率dM/dt,即总量的微小变化除以时间的微小变化量。如果以整天（full day）作为变化量，就说从第三天到第四天，在此情况下，总量从8涨到了16。也就是说一天增加了8个。这一增长率等于当天开始时的数量



第四天到第五天时，总量从16涨到了32，一天增加了16个。总的来说（in general），每天的增长率就等于当天开始时的数量。你可能会猜想：2^t的导数就等于它本身。这是个正确的思路，但是不完全对。我们现在做的是一整天之内做比较，也就是考虑2^{t+1}和2^t之间的差别。但是，导数需要考虑的是变化率小之又小时的情况。在1/10天、1/100天，甚至十亿分之一天的过程中，增长又是怎么样的。

$$\underbrace{\frac{2^{t+dt} - 2^{t}}{dt} = ???}_{\substack{\text{Rate of change} \\ \text{in a small time}}}$$

短时间内的变化率

我们知道2^{t+dt}可以变成2^t × 2dt，所以：

$$\frac{dM}{dt}(t) = 2^{t}\left(\frac{2^{dt} - 1}{dt}\right)$$

我们将2t这个值本身与它的变化dt分离开了。我们可以为dt代入一个很小的值：

$$\frac{2^{0.001} - 1}{0.001} = 0.6933875\ldots$$

随着数值越来越小，这个值会向一个特定的值靠近，大约是0.6931

$$\frac{2^{0.00000001}-1}{0.00000001} = 0.6931472\ldots$$

这个数看起来很神秘（mysterious），但是，没关系，重点是，这是一个常数。所以2^t的导数是它自身乘上了某个常数。

这个性质，并不是2^t独有的，你可以换入其他数试试，看看能不能找到什么规律？例如，输入8，可以算出这个数为2.079，正好为底数为2的时候的比例系数的三倍：

$$\frac{d(2^t)}{dt} = 2^t(0.6931\ldots)$$

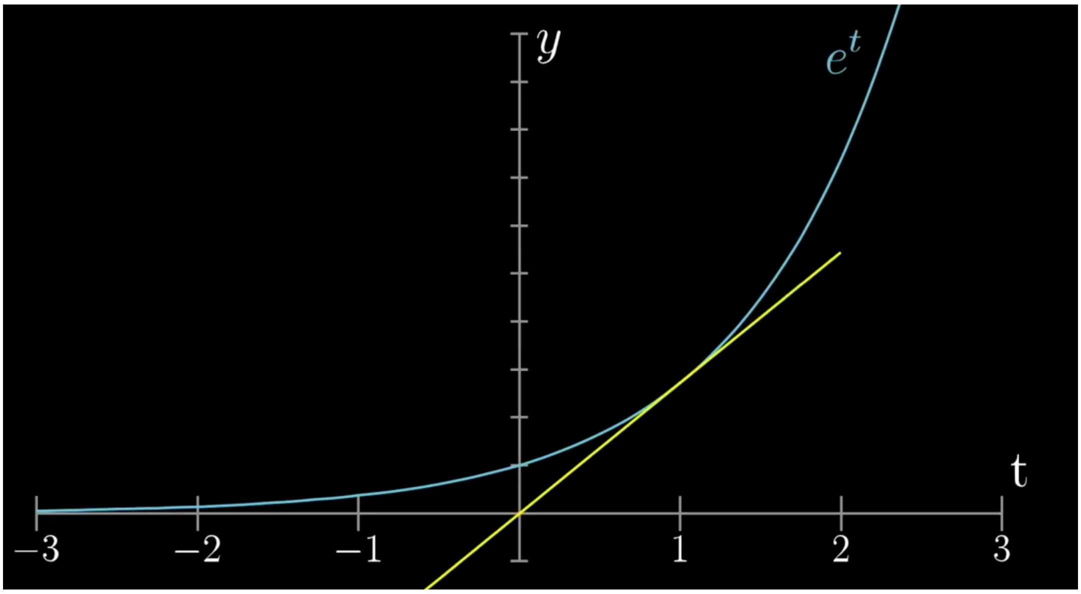
$$\Big\downarrow \times 3$$

$$\frac{d(8^t)}{dt} = 8^t(2.0794\ldots)$$

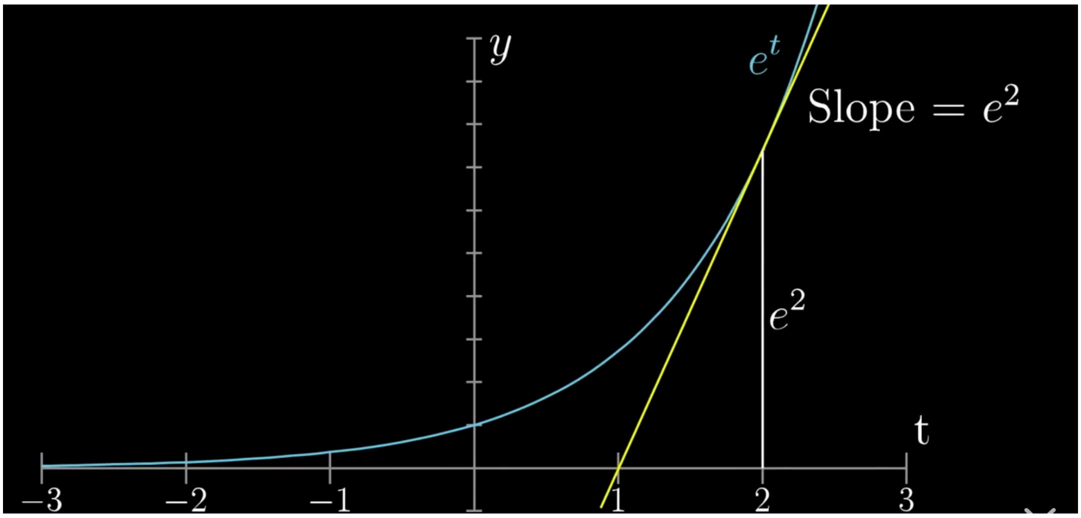
看起来这些数绝不是随机的，一定有迹可循。那么2与0.693，8与2.079有啥关系呢？那么，有没有那个底数可以使这个常数为1呢？也就是a^t的导数不仅仅和自己成比例，而是干脆等于自己呢？有的，它就是特殊的常数e,大约是2.71828：

$$\frac{d(e^t)}{dt}(t) = e^t(1.0000000\ldots)$$

观察一下e^t的图像



此图像上任意一点切线的斜率都等于这一点到横轴的距离：



借助自然常数，我们就可以考虑和自己的导数成比例的函数了。关键是利用链式法则：

$$\frac{d(e^{ct})}{dt} = ce^{ct}$$

到了这一步，关于谜之常数的问题就变成了一个代数运算：

根据对数，2可以写作 e^{ln2},因此：

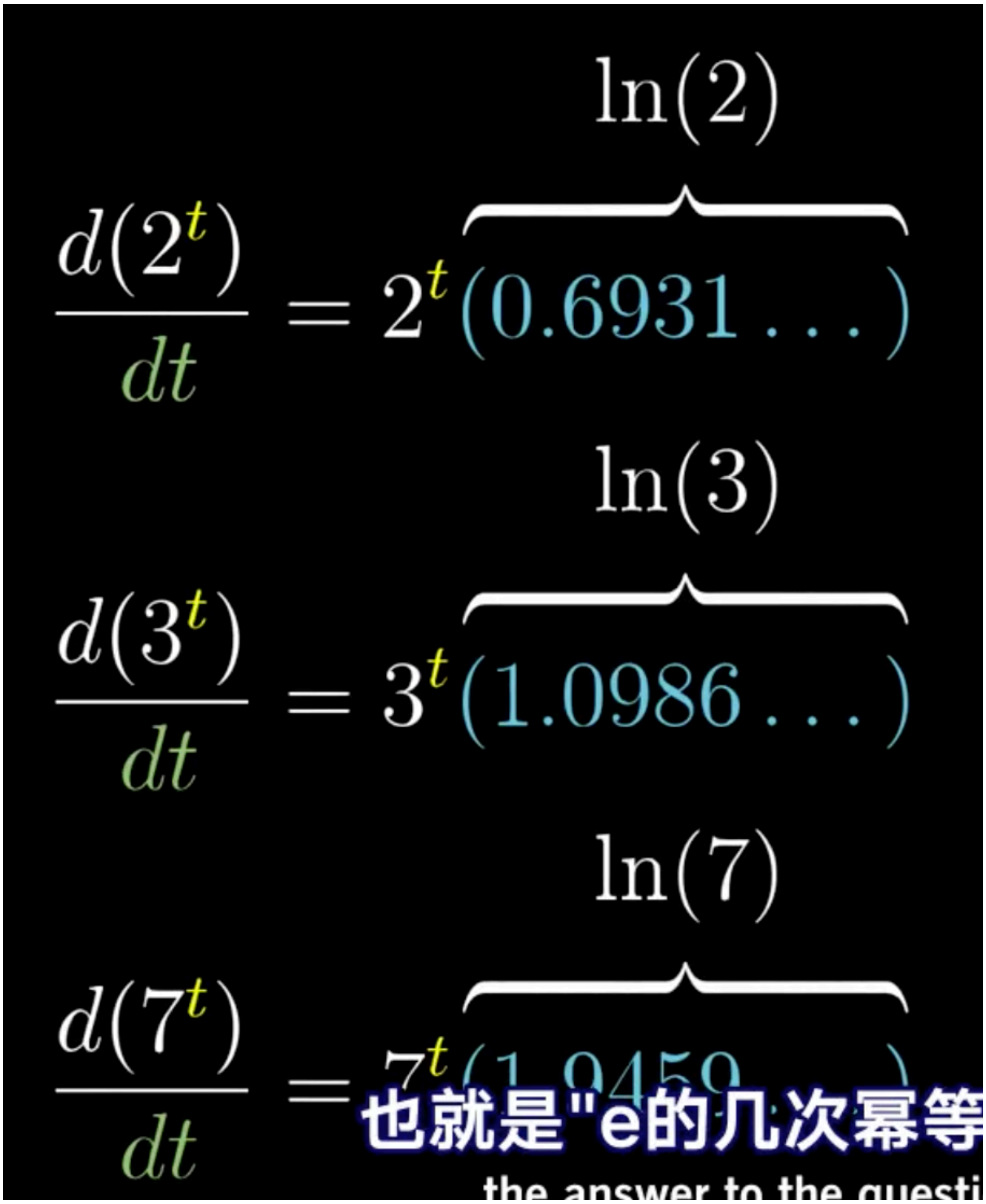
$$2^t = e^{\ln(2)t}$$

结合上面的求e^{ct}的导数，可以求得2^t的导数为：

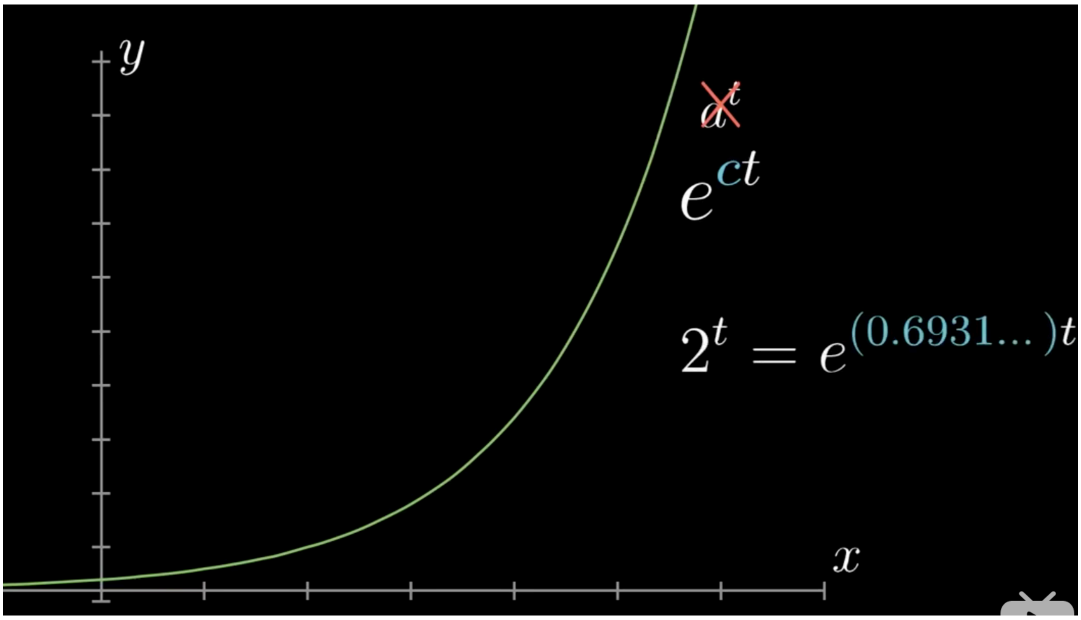
$$\frac{d(e^{ct})}{dt} = ce^{ct}$$

$$\begin{array}{c} 2^t = e^{\ln(2)t} \\ \Big\downarrow \text{导数 Derivative} \\ \ln(2)2^t = \ln(2)e^{\ln(2)t} \end{array}$$

我们知道这个迷之常数为ln(2)。我们求导时冒出来的迷之常数（比例系数），也就是成了“e的几次幂等于那个底数”这个问题的解：



事实上，纵览微积分的应用，基本上看不到写成某底的t次幂这种形式的指数函数，指数函数通常是以e^{某常数*t}的形式出现的。



任何函数都可以写成e的常数乘以t次幂。