方程组是有n个未知数，n个方程的组合。

举例：两个未知数、两个方程的方程组

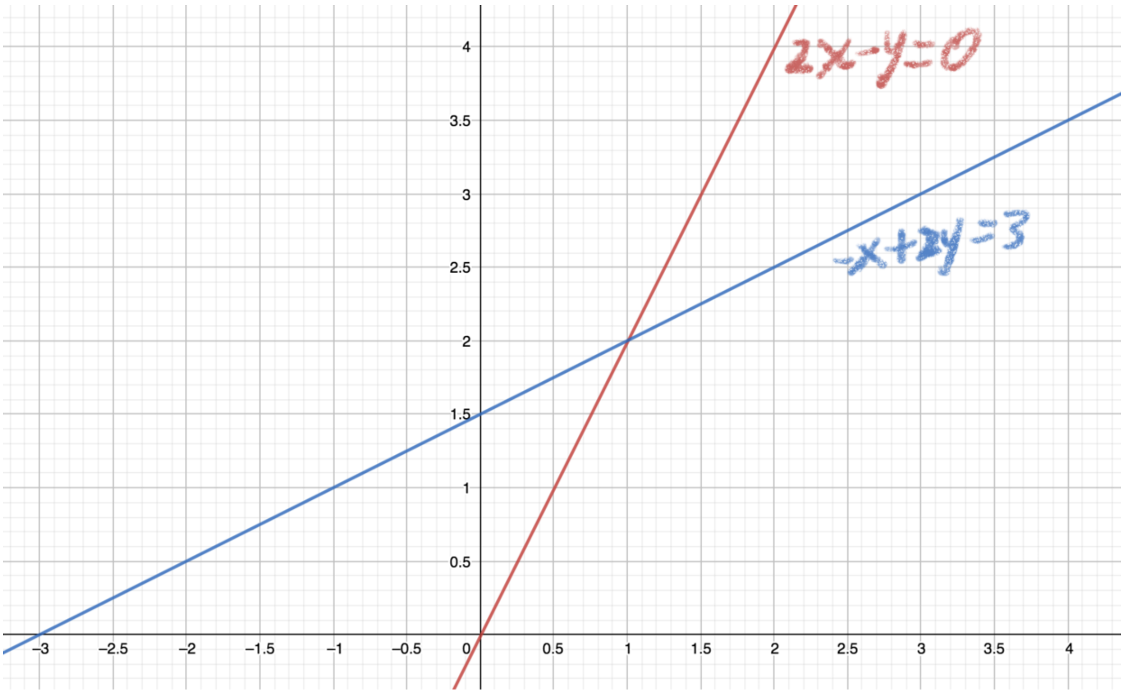
$$\boxed{\begin{aligned} &2x-y=0 \\ &-x+2y=3 \end{aligned}}$$

（1）首先，我们写出该方程的矩阵形式。 该方程组的系数矩阵如下：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

可以表示为：AX=b

（2）该方程的行图像（row picture）：



这两条直线的交点就是方程组的解。

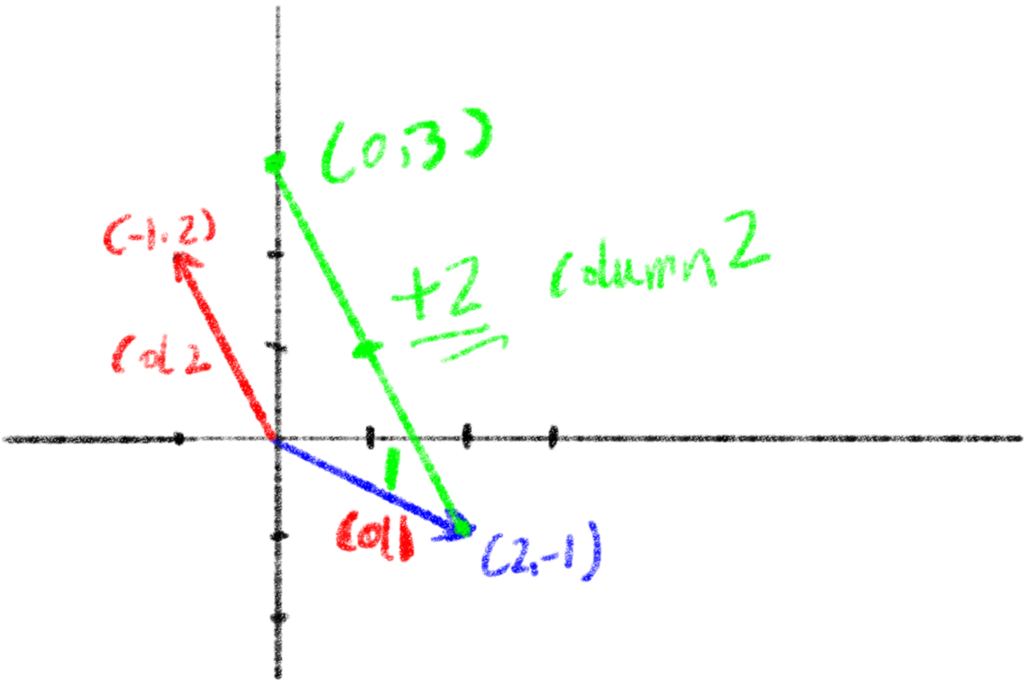
（3） 该方程的列图像（column picture）

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

根据（2），我们知道，x是1，y是2。也就是说：

$$1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

这就是说一个向量(2,-1)加上2个向量（-1,2）。画出的列图像如下：



从列图像中，我们发现，这两个列的线性组合构成了b（也就是(0,3)）。

> 所有的列的线性组合构成了所有可能的右侧的向量。这种思想是本课的基础。

下面，我们再看一个3×3的案例。

$$\begin{aligned} 2x - y \quad\quad &= 0 \\ -x + 2y - z &= -1 \\ -3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

(1) 它的矩阵如下：

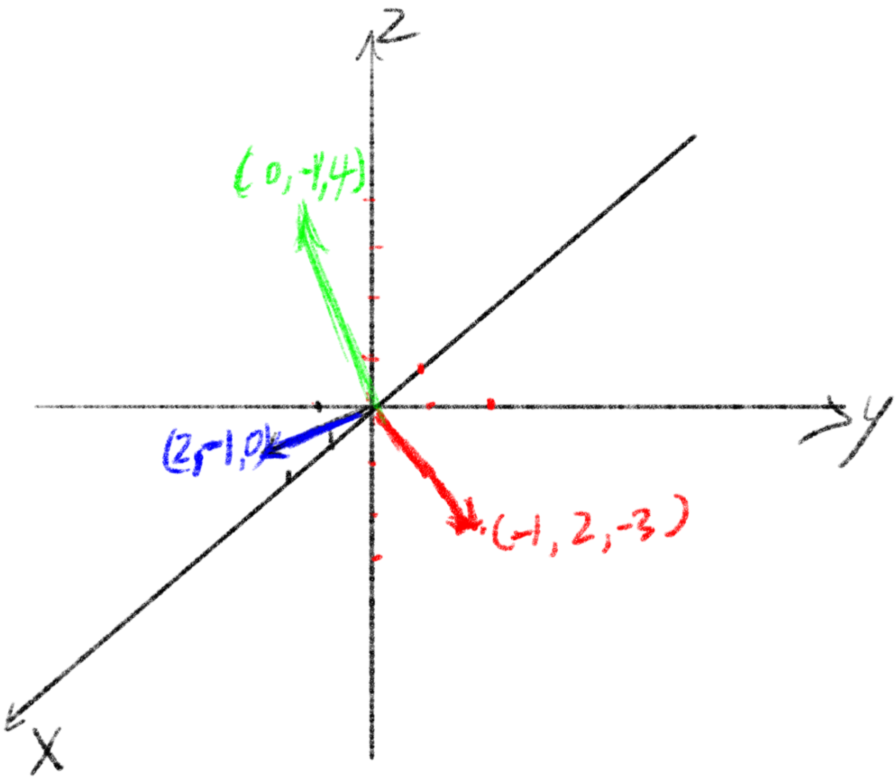
$$\boxed{A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -3 & 4\end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}}$$

(2) 行图像

三个未知数构成的是一个平面，三个方程构成三个平面。三个平面的交点就是该方程组的解。

(3) 列图像

$$\boxed{x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}}$$



可知： x=0,y=0,z=1

从上面的案例，我们知道列的线性组合构成了右侧向量b。那么对于任意的b，是不是都有解？这实际上就是指：列的所有的线性组合能否填充整个三维空间。答案是有，也就是说列组合可以填充整个空间。

当列在同一个平面上，比如列3是列1和列2的和的时候，列（向量）的线性组合都是位于一个平面上的，所以当b在平面上时，方程组有解，但大部分不再平面上的b是无解的。这种情形称为奇异，矩阵并非可逆。

> 假如向量有9个分量（我们不能将其具象化），这是9个方程的方程组，有9个未知数，9列。当其中有一列与其他某一列在一个平面上时，列的线性组合只

> 能覆盖8维平面。当b在第9维平面上时，无解。

最后，方程组的矩阵形式如下： $Ax = b$

> A矩阵乘以向量x等于b向量

矩阵与向量乘法计算有两种方式。首先，我们构造矩阵：

$$\begin{bmatrix}2 & 5 \\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix}$$

方式一： 一次一列

$$\begin{bmatrix}2 & 5 \\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2 \\ 1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}5 \\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 \\ 7\end{bmatrix}$$

方式二： 一次取一行。每一行点乘向量x再相加

$$\begin{bmatrix}2 & 5 \\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \times 1 + 5 \times 2 \\ 1 \times 1 + 3 \times 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 \\ 7\end{bmatrix}$$