

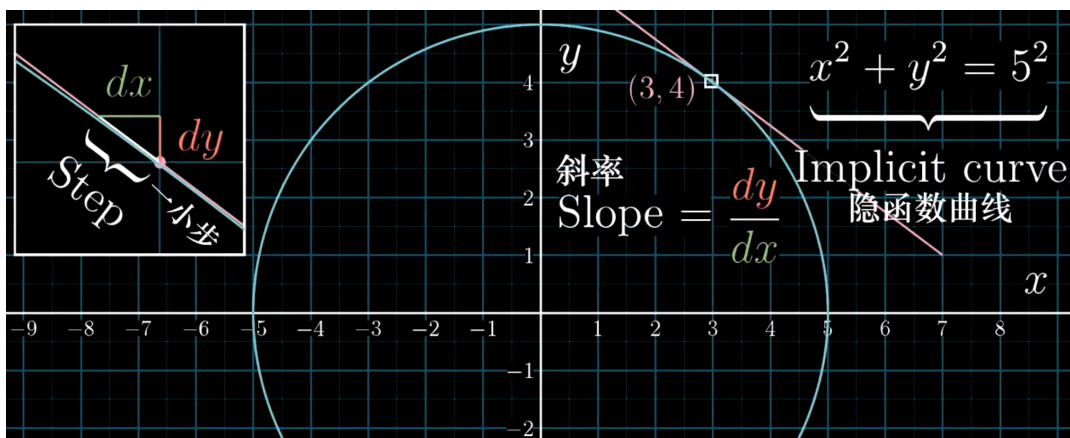
“Do not ask whether a statement is true until you know what it means.”

-Errett Bishop

“明白一句话的意义之前，不要去问它是否正确。”

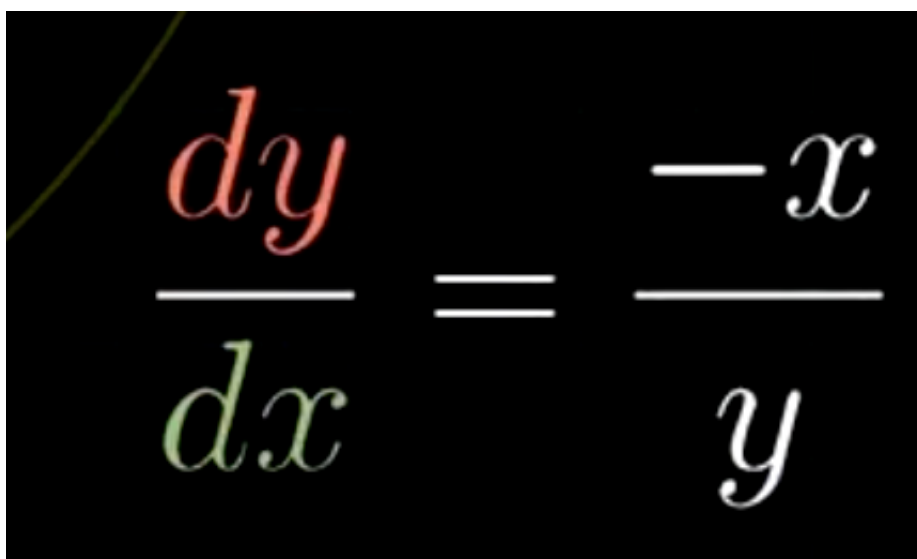
——埃雷特·毕肖普（美国实分析数学家）

例如，一个方程 $x^2 + y^2 = 5$ ，如何求圆上某一点的导数？



我们要对表达式的两边同时求导，然后这两个导数乘上各自的微小变化量再相加的结果为0。

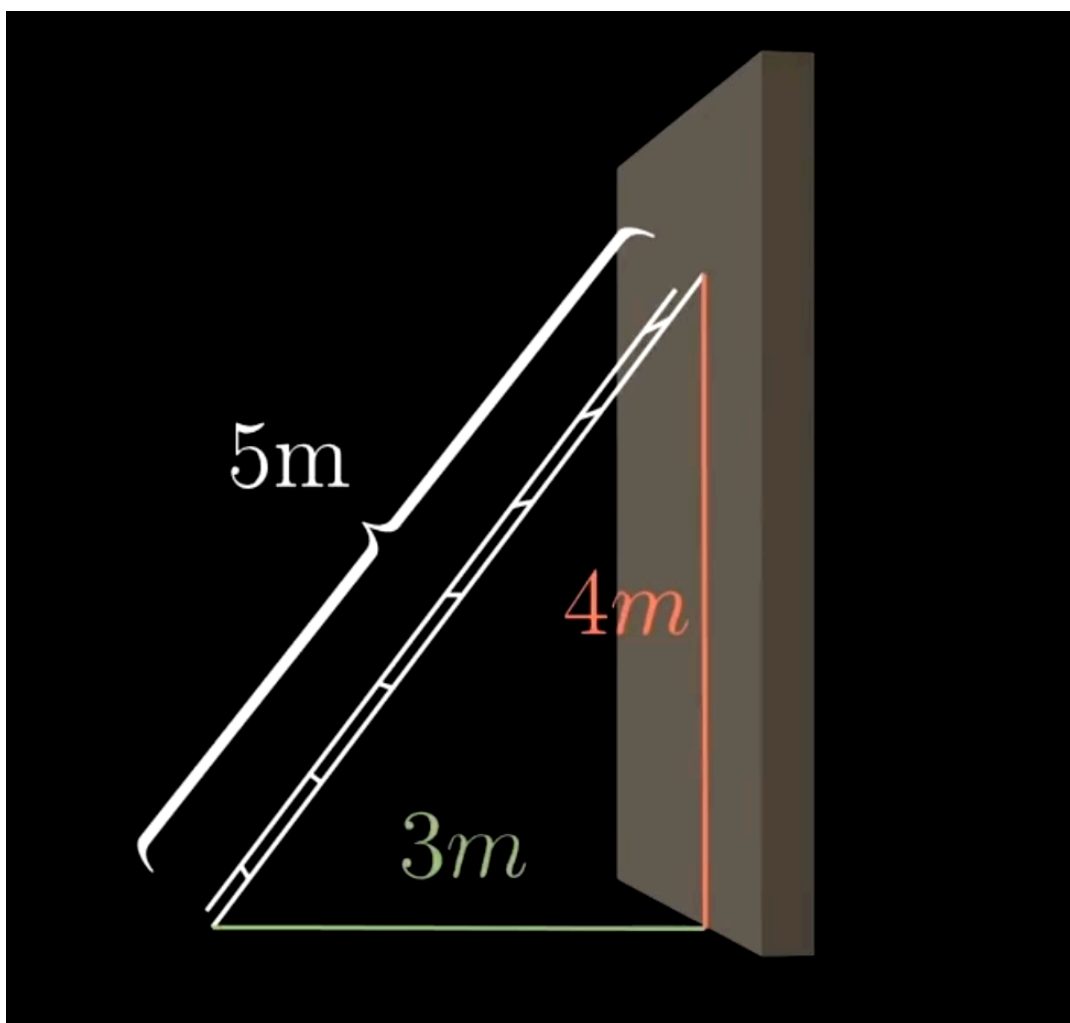
$$x^2 + y^2 = 5^2$$
$$2x \, dx + 2y \, dy = 0$$


$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

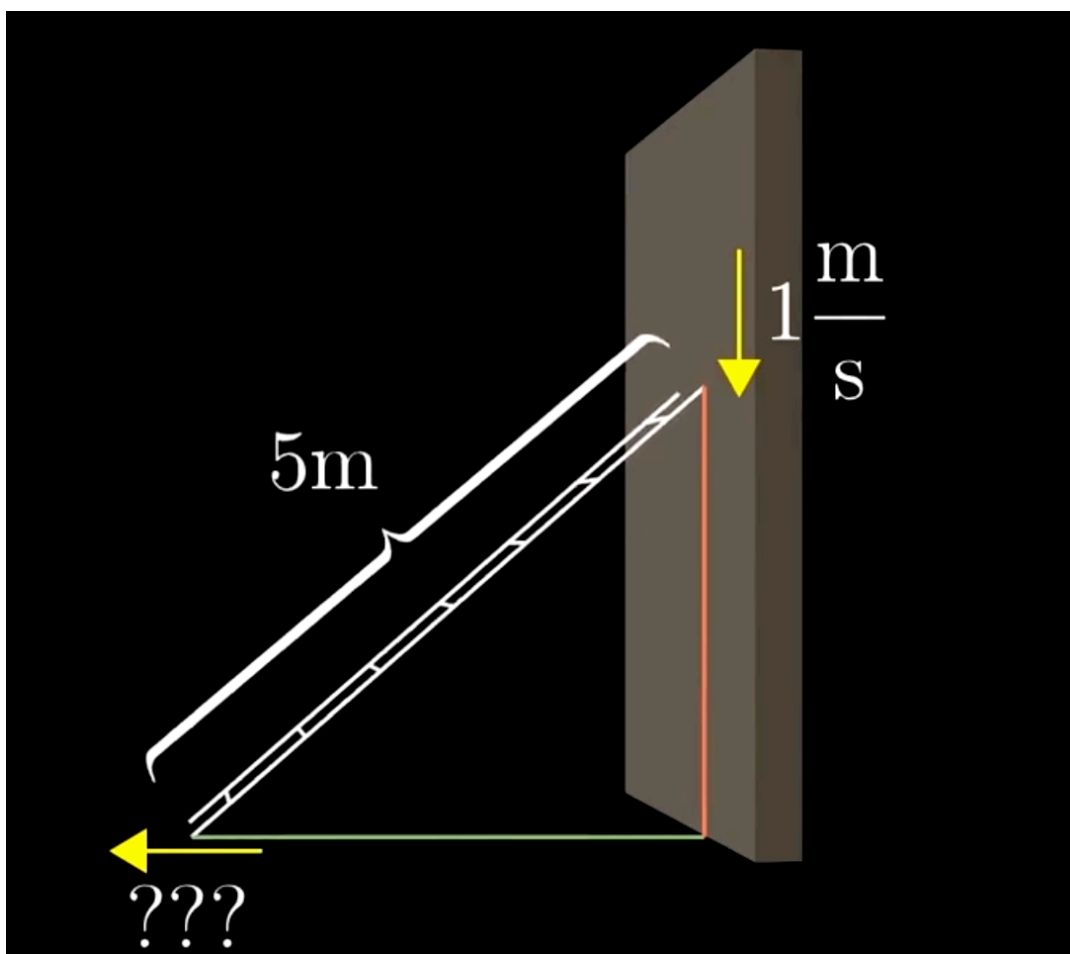
在(3,4)点的斜率就是-3/4，这个过程就叫隐函数求导/隐微分

对这个带多个变量的表达式求导，究竟是什么意思？这里涉及到相关变化率（related rates）。

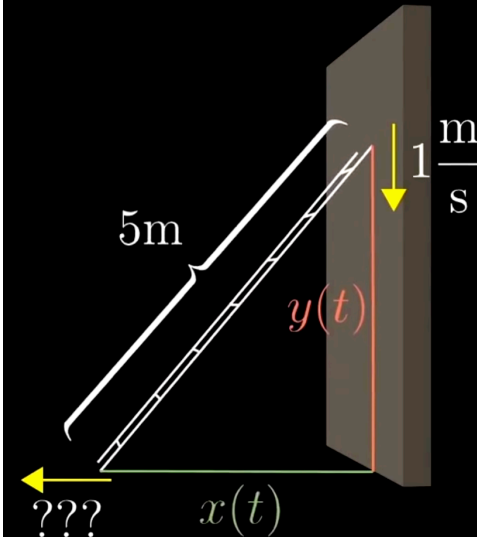
例如，墙上放着一个梯子：



现在，梯子顶端开始以1米每秒的速度下滑，那么开始时，梯子底端离开墙角的
速度是多少？



我们可以定义两个函数，根据这两个函数最终我们能求得 dx/dt



Related rates
相关变化率

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2$$

$$x(t) = (5^2 - y(t)^2)^{1/2}$$

Find $\frac{dx}{dt}$

The diagram on the left shows the ladder with its horizontal distance labeled $x(t)$ and its vertical distance labeled $y(t)$. The wall's downward velocity is still $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. The horizontal distance is again labeled '???' with a yellow arrow pointing left.

但是，我们这里换一个不同角度的方法。

$$\underbrace{x(t)^2 + y(t)^2}_{\text{Function of time}} = 5^2$$

Function of time
that happens to
be constant
关于时间的函数
正好为常数

我们对等式左边求导，就其实在问：经过一小段时间 dt ， y 会减少少许， x 会增加少许，那么整个的变化量是多少，很明显就是常数0：

$$\frac{d(x(t)^2 + y(t)^2)}{dt} = 0$$

常数就是不随时间变化的，保持恒定的数。

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2$$

$$\frac{d(x(t)^2 + y(t)^2)}{dt} = 0$$

$$2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt} = 0$$

左边的表达式求导，实际上就是要求 x^2+y^2 的值不随着梯子滑动而改变。

求开始时梯子底端离开墙角的距离：

$$2(3)\frac{dx}{dt} + 2(4)(-1) = 0$$

所以开始时，梯子底端离开墙角的速率为： $dx/dt=4/3$ 米/秒

这个梯子与圆形问题中都有一个等式： $x^2+y^2=5$ 。解决两个问题，都需要对等式两边同时求导。与梯子不同的是，对两边求导的含义是，两个变量的微小变化如何才能保持在曲线上。

最后，我们通过隐函数来求 $\ln(x)$ 的导数：

$$y = \ln(x)$$

$$e^y = x$$

↓ 分别求导

~~$$e^y \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$~~

$$e^y \cdot dy = dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

$$= \frac{1}{x}$$

顺便说一下，这里的内容其实就是多远微积分的入门，多远微积分就是分析多个变量的函数，分析它们如何随多个取值的变化而变化。这些变量是如何联系在一起变化的。

