1.消元解方程组

方程组如下：

$$\boxed{\begin{aligned} x+2y+z&=2\\ 3x+8y+z&=12\\ 4y+z&=2 \end{aligned}}$$

该方程组的矩阵表示为Ax=b:

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}}$$

> 其中，第一行第一个非零值称为主元（1st pivot），第一行为主元行（pivot row）。

解题步骤：

1.消元（elimination）

首先，消除第一个未知数

(1)第一行不变，它为主元行。

(2) 用第二行减去乘上了乘数的主元行。例如上面的案例中，也就是第二行减去主元行乘3

$$\boxed{\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\end{bmatrix}}$$

> 消元时候的乘数等于待消项的系数除以主元

(3) 依次类推，使第一列第二行起都为0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

之后，以第二行第一个非零值为主元（2st pivot）

(4) 这时第一行、第二行都不变。按照(2)-(3)消除第二个未知数：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

最后，按照同样的步骤找第其它主元，并按照(2)-(3)的步骤，把该主元行下的所有行消元。在这个案例中，我们找到了三个主元：

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

> 消元法失效：行交换可以解决主元为0的“暂时性失效”，但当底下的行中该主元对应的列中再没有非0元素时，消元就会失效。

找到所有主元后，在系数矩阵的右边添上一列,这一列是线性方程组的等号右边的值。这个矩阵称为 增广矩阵(augmented matrix)：

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 2 \end{bmatrix}$$

之后，用消元中的乘数来计算最后一列：

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -10 \end{bmatrix}$$

最后，增广矩阵中消元部分为U，最后一列为c。

2.回代（back substitution）

回代，也就是通过Ux=c求得x。我们将U代入方程式左边，c代入方程式右侧：

$$\boxed{\begin{aligned} x+2y+z&=2 \\ 2y-2z&=6 \\ 5z&=-10 \end{aligned}}$$

求得：

$$\boxed{\begin{aligned} &z=-2 \\ &y=1 \\ &x=2 \end{aligned}}$$

2. 消元矩阵（elimination matrices）

刚才，我们讨论了如何进行矩阵消元，现在，让我们换一种思考方式，用矩阵相乘来描述消元的过程。

(1)预备知识

之前我们曾讨论过矩阵乘向量的问题，我们的结论是：矩阵乘向量的结果实际是矩阵列的线性组合。

但是，矩阵消元用到的都是矩阵的行，那么，矩阵的行之间是否也有相似的性质呢？事实上，当一个向量乘一个矩阵时，得到的结果就是该矩阵行的线性组合。例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

结果相当于1×row1+2×row2，即：

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix}$$

> 这里加上一些略微超前的概念：在一个矩阵A的左边乘一个矩阵（简称左乘），就是对A进行行变换，而在A右边乘一个矩阵（简称右乘），就是对A进行列变换。

（2）矩阵消元。

我们仍然用上面的案例。

1.求E_{21}矩阵

> E是初等矩阵（elementary ot elimination）。索引2 1表示位置2 1上的变换，也就是用它来达到位置2 1变为0的目的。

$$\begin{bmatrix} \\ \cdots ? \cdots \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$$

什么样的矩阵能实现从第二行中减去3倍的行一：

首先，第一行和第三行不需要改变，也就是：$\begin{bmatrix}1&0&0\\ \\0&0&1\end{bmatrix}$。

> A的第一行不变，因此我们需要拿出A的1个第一行，0个第二行，0个第三行（进行线性组合），于是1 0 0组成了E_{21}的第一行;第三行不变，因此需要0个第一行，0个第二行，1个第三行，所以E_{21}的第三行是0 0 1

我们想要从第二行中减去3倍的行一，也就是拿出-3倍的第一行，然后将它和第二行进行线性组合（相加）也就是说：E_{21}第二行为：$\begin{bmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\-3&1&0\\\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}$。

最后，E_{21}为：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

> $$\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$$
>
> 如何进行验证呢？例如，我们要验证第2行第三列的元素-2。我们只需要拿E_{21}中第二行与A矩阵中的第3列进行矩阵运算即可：

> $$\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}$$

2.求E_{32}矩阵

什么样的矩阵能实现从第三行中减去2倍的行二，也就是：

$$\begin{bmatrix} & & \\ \cdots ? \cdots & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 2 & -2\\0 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

根据求**E_{21}**矩阵**的步骤：

$$E_{32}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

结合起来：

$$\boxed{E_{32}(E_{21}A)=U}$$

(3). 矩阵一些性质

(1)矩阵结合律

矩阵结合律（associate），例如，

$$\boxed{E_{32}(E_{21}A)=U \Leftrightarrow (E_{32}E_{21})A=U}$$

> $E_{32}E_{21}=E$ E称为消元矩阵

(2)矩阵置换

如何将下面矩阵的第一行和第二行进行互换，这叫置换：

$$\begin{bmatrix} & \\ \cdots ? \cdots & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & d\\a & b\end{bmatrix}$$

通过以下置换矩阵（permutation）即可：

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

> 对单位矩阵进行行变换得到的就是置换矩阵

如何交换列呢，以下面为例：

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}?=\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix}$$

结果：

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix}$$

(3)矩阵交换律

矩阵乘法一般不满足交换律。也就是说$AB\neq BA$

(3)逆矩阵

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{I}$$