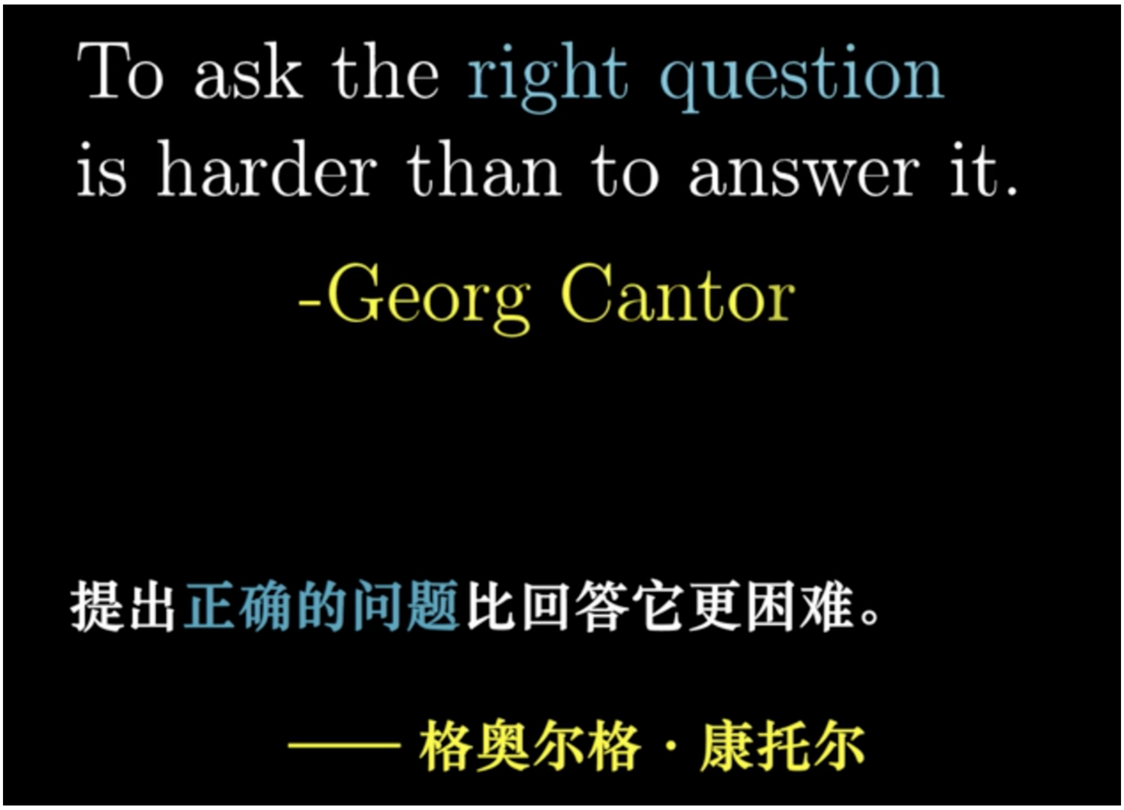
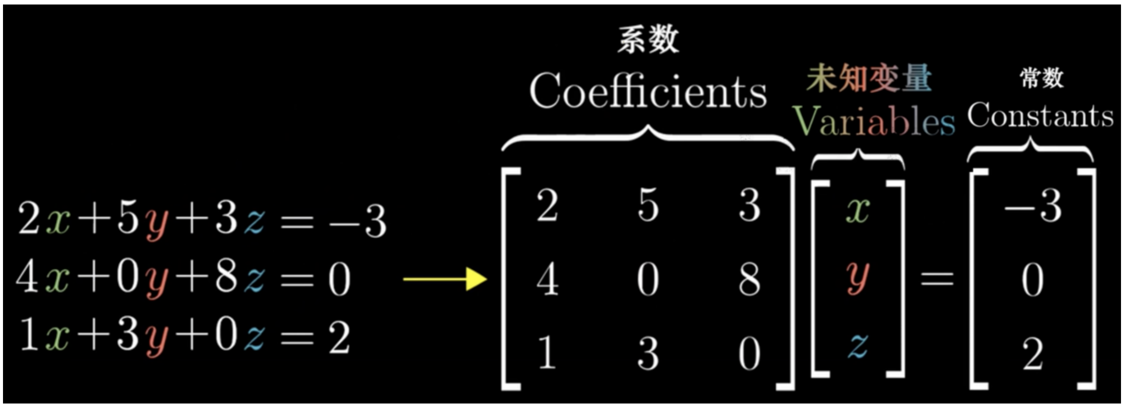
7.逆矩阵、列空间与零空间



7.1.线性方程组与矩阵的关系



表示为：$A\vec{x} = \vec{v}$

A为一个线性变换，所以求向量x就是寻找一个向量使得它在变换后与v重合。

矩阵A可以分为两种情况：

- 行列式为零
- 行列式不为零

先考虑行列式不为零的情况，此时空间未被挤压为零面积的区域。在这种情况下，有且仅有一个向量与v重合。并且可以通过逆向变换找到这个变量。

7.2. 逆矩阵

首先应用矩阵A代表的变换，再应用A逆代表的变换，会回到原始状态。

两个变换相继作用体现为矩阵乘法，所以逆的一个重要性质就是：A乘以A逆等于什么都不做的矩阵。这个什么都不做的变换被称为“恒等变换（identity transformation）”

$$AA^{-1} = I$$

所以：

$$A\vec{x} = \vec{v}$$
$$AA^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{v}$$
$$\Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{v}$$

当行列式为零时，这个方程组相关的变换将空间压缩到更低的维度上。此时，没有逆矩阵。但是，如果向量v正好在这个压缩的维度上，解是存在的；但是，如果向量v不在压缩的维度上，无解。

7.3.秩（rank）

当变换的结果为一条直线时，也就是说结果为一维的。我们称这个变换的秩为1；当变换后的向量落在二维平面上时，我们称这个变换的秩为2.所以说：秩代表变换后空间的维数。

7.4. 列空间(column space)

不管是一条直线、一个平面还是三维空间等，所有可能的变换结果的集合被称为矩

阵的列空间

> 变换后的基向量张成的空间就是所有可能的变换结果。列张成的空间（span of columns）就是列空间。

秩的精确定义： 列空间的维数。

7.5. 零空间

变换后，空间压缩到更低的维度时，会有某条线(在三维上或许是某个面)都压缩到原点上。变换后落在原点的向量的集合被称为矩阵的零空间（null space）或核（kernel）。

对线性方程组来说，当向量v恰好为零向量时，零空间就是这个方程组所有可能的解。

7.6 总结

当逆矩阵存在时，就能用这个逆变换求解方程组；否则，列空间的概念让我们清楚什么时候存在解（向量v在矩阵的列空间内，有解）；零空间概念有助于理解所有可能的解的集合是什么样的。