Темпы роста мультиопераций

Мотошкин Артем Александрович

ИРКУТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и
информационных технологий

22 апреля 2025 г.

Актуальность

Изучение темпов роста помогает понять, как быстро можно вывести все возможные комбинации элементов в структуре.

- Темпы роста напрямую влияют на сложность решения задач удовлетворения ограничений (CSP) и их подкванторных аналогов (QCSP).
- Также используются на практике: при выводе типов в компиляторах и оптимизации распределения регистров.

Что такое мультиоперация?

Основные определения

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.
Для целого положительного n отображение

$$f : E_k^n \to 2^{E_k}$$

называется n-местной мультиоперацией ранга k.

Что такое темп роста?

Основные определения

Рассмотрим декартову степень A^n, $n \in \mathbb{N}$, конечного множества A с заданным на нём множеством операций M. Элементы A^n будем называть наборами. Применяя операции из M к уже имеющимся наборам покоординатно можно получать новые наборы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_1^m \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(a_1^1, \dots, a_1^m) \\ \vdots \\ f(a_n^1, \dots, a_n^m) \end{pmatrix}, \quad f \in M.$$

- Генерирующее множество: минимальный набор элементов, позволяющий получить все элементы A^n через операции из M
- Темп роста: функция $d_{(A,M)}(n)$, определяющая минимальный размер генерирующего множества

Что такое темп роста?

Основные определения

Темпом роста называется число элементов в минимальном генерирующем множестве, из которого можно вывести все элементы декартовой степени с помощью операций из M.

$$d_{(A,M)}(n) = \min\left\{|X| \mid X \subseteq A^n,\ \langle X\rangle_M = A^n\right\}$$

Обзор существующих результатов

Комков С.А. (2022)

- Получил точные/асимптотические темпы роста для всех клонов решётки Поста: от $\log n$ до 2^n.
- Описал классы с минимальным логарифмическим темпом роста.
- Доказал, что при конечном числе существенных предикатов темп роста не превышает $O(\log n)$.

Как вычислять новые наборы?

В контексте мультиопераций новые наборы находятся также путем покоординатного применения операций из M, но координаты это подмножества E_k.

$$F(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \bigcup_{\substack{a_1 \in A_1 \\ a_2 \in A_2 \\ \vdots \\ a_k \in A_k}} \{F(a_1, a_2, \ldots, a_k)\}$$

Как найти темп роста?

Требуется найти минимальное генерирующее множество, которое позволит получить все наборы.
Но надо учитывать, что теперь мощность множества всех наборов не k^n, а 2^{kn}.

Важно, что генерирующее множество может состоять только из наборов из элементов E_k.

Полученные результаты

	k	n	arity	quantity_of_operations	count	percent
0	2	1	1	1	2	0.125000
1	2	1	2	1	110	0.429688
2	2	1	3	1	52670	0.803680
3	2	2	1	1	0	0.000000
4	2	2	2	1	24	0.000366
5	2	2	3	1	40824	0.000010
6	2	3	1	1	0	0.000000
7	2	3	2	1	24	0.000001
8	3	2	1	1	0	0.000000
9	2	1	2	2	26280	0.805147
10	2	2	2	2	16226	0.000008
11	3	1	1	2	8460	0.064671
12	2	1	1	3	396	0.707143
13	2	2	1	3	24	0.000009

Рис. 1: Вычисленные структуры

Полученные результаты

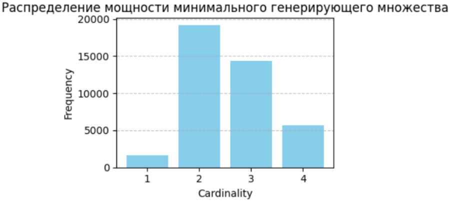

Рис. 2: Распределение для k=2, n=2, арность мультиопераций=3

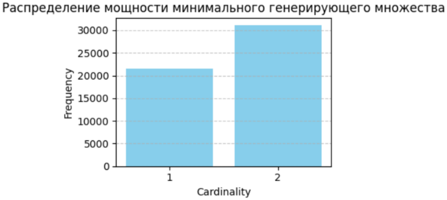

Рис. 3: Распределение для k=2, n=1, арность мультиопераций=3

Полученные результаты

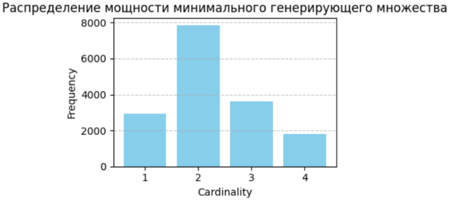

Рис. 4: Распределение для пар мультиопераций, k=2, n=2, арность=2

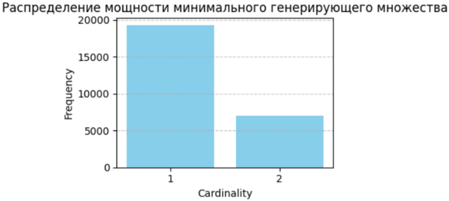

Рис. 5: Распределение для пар мультиопераций, k=2, n=1, арность=2

Полученные результаты

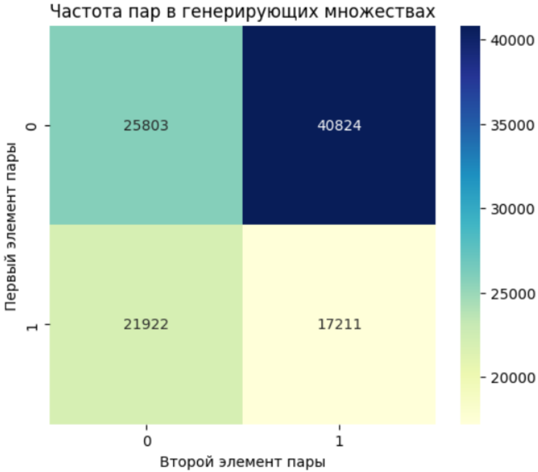

Рис. 6: Тепловая карта для k=2, n=2, арность мультиопераций=3

Выводы

- Получены численные оценки темпов роста для различных структур.
- Найдены распределения мощностей минимальных генерирующих множеств различных структур.

Перспективы

- Исследование темпов роста для более сложных структур.
- Автоматизация поиска минимальных генерирующих множеств с помощью ML-методов.

Список источников

1. Комков С. А. Темпы роста произвольных конечных структур : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 : защищена 27.04.2022 / С. А. Комков ; науч. рук. А. А. Часовских ; МГУ имени М.В. Ломоносова – Москва, 2022. – 111 с.