Versuch 241 Wechselstromeigenschaften von RLC-Gliedern

Leonardo Karl Reiter

March 21, 2024

Contents

1 Ziel des Versuchs

Im ersten Teil des Versuchs werden wir charakteristische Größen von RC Filtern bzw. RLC-Schwingkreisen wie Zeitkonstante, Frequenz- und Phasengng, Dämpfung, Resonanzüberhöhung und Schaltungen die als Bandsperre, Differentiator oder Integrator fungieren, untersuchen. Im zweiten Teil werden als Anwendung Signalformung und Mittelwellenradiuo betrachtet.

2 Grundlagen

Schaltungen aus Widerständen R und Condensatoren C und Spulen L bilden in verschiedenen Kombinationen extrem wichtige Bauteile. Wir wollen verschiedene Schaltungen im Wechselstrombetrieb betrachten. Grundlage für die Rechnungen sind die Kirchhofssche Maschenregel:

$$\sum U_i = 0 \tag{1}$$

und die Knotenregel:

$$\sum I_i = 0 \tag{2}$$

Außerdem gelten für Widerstände, Kondensatoren und Spulen, folgende Gesetze:

$$U = R \cdot I \tag{3}$$
$$U = \frac{Q}{C} \tag{4}$$
$$U = L \cdot \dot{I} \tag{5}$$

wobei U die Spannung, I der Strom, R der Widerstand Q die Ladung, C die Kapazität und L die Spuleninduktivität sind.

2.1 RC-Glied

Beim RC-Glied ist ein Widerstand und ein Kondensator, mit einem Schalter in Reihe geschaltet. Mithilfe der Maschenregel und $I = \dot{Q}$ erhalten wir die DGL

$$U_E = U_C + \tau \cdot \dot{U}_C \tag{6}$$

mit der Eingangspannung U_E und der Zeitkonstante:

$$\tau = R \cdot C \tag{7}$$

Die Lösung für schließen des Schalters bei $t_0 = 0$ liefert:

$$U_C(t) = U_E \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \tag{8}$$
$$U_R(t) = U_E \cdot e^{-t/\tau} \tag{9}$$
$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau},\ I_0 = \frac{U_E}{R} \tag{10}$$

U_c zeigt also einen mit τ exponentiel abnehmenden Verlauf. Die Zeitkonstante bestimmt, wie schnell die Sättigungsspannung erreicht wird. Für die Halbwertszeit $T_{1/2}$ gilt

$$T_{1/2} = \frac{\tau}{ln(2)} \tag{11}$$

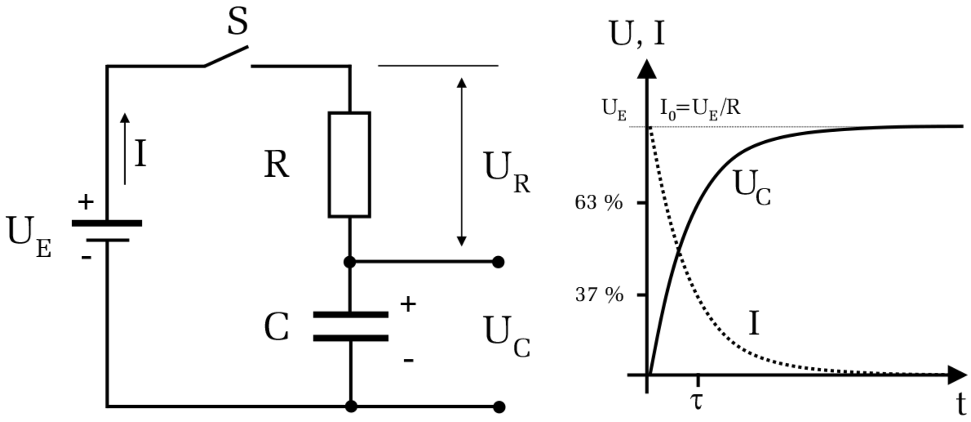


Figure 1: Links: Schaltbild. Rechts: Spannungs- und Stromverlauf beim Laden eines Kondensators. $I_0 = U_E/R$ entspricht dem Ladestrom direkt nach dem Schließen des Schalters und U_E ist die Spannung des aufgeladenen Kondensators, die gerade der Eingangsspannung entspricht. Die Zeitkonstante τ entspricht der Zeit, bei der die Kondensatorspannung auf 63%$((e-1)/e)$ des Endwerts U_E angestiegen, bzw. der Ladestrom auf 37%$(1/e)$ des Endwerts abgefallen ist.

2.2 Impedanzen

Um das Verhalten im Wechselstrom zu betrachten führen wir den Wechselstromwiderstand, die songenannte Impedanz $Z = U/I$ ein. Wir erhalten dann

$$Z_R = R \tag{12}$$
$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \tag{13}$$
$$Z_L = i\omega L \tag{14}$$

mit der Frequenz omega. Die Impedanzen sind also Frequenzabhängig, was zu den speziellen Eigenschaften führt. Außerdem tritt eine Phasenverschiebung ϕ auf (bei C eilt I, U um $\pi/2$ vorraus und bei L um $\pi/2$ hinterher).

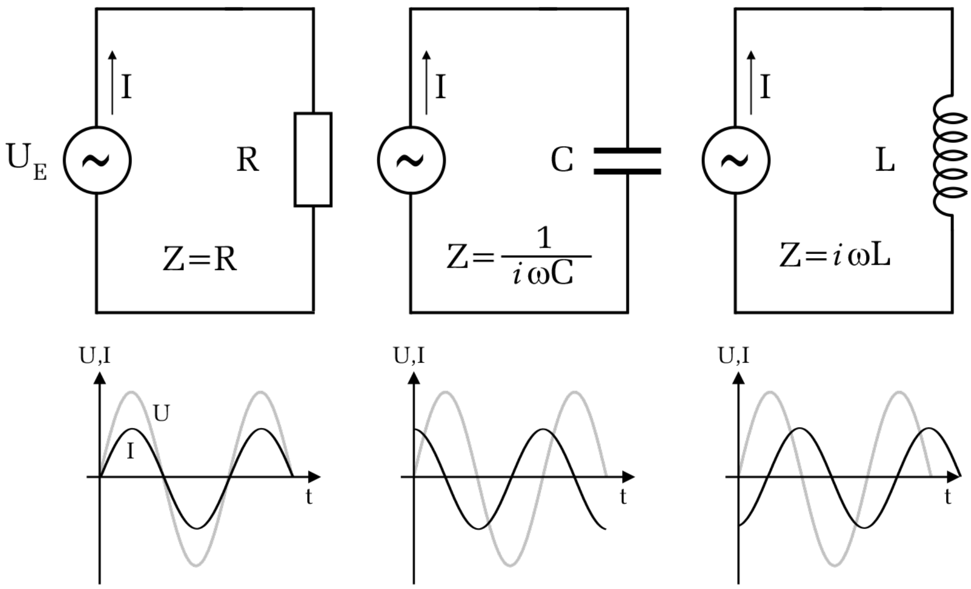


Figure 2: Impedanz von Widerstand, Kondensator und Spule.

2.3 Filter

Nun schließen wir unser RC-Glied an eine Wechselstromquelle an. Ersetzen wir die Wiederstände durch Impedanzen und betreiben wir die Schaltung mit einer sinusförmigen Spannung, so verhält sich die Schaltung wie ein Filter.
Greift man die Spannung über dem Kondensator ab, so erhält man wegen

$$U_C = \frac{1/i\omega C}{R - 1/i\omega C} \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t} \tag{15}$$

$$|U_C| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + (wRC)^2}} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \tan(\phi) = -\omega RC \tag{17}$$

einen Tiefpassfilter, der hohe Frequenzen sperrt ($U_C \to 0$ für $\omega \to \infty$).

Greift man stattdessen die Spannung am Widerstand ab so erhält man wegen:

$$|U_R| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + (wRC)^2}} \tag{18}$$

$$\Rightarrow \tan(\phi) = \frac{1}{(\omega RC)} \tag{19}$$

einen Hochpassfilter, der niedrige Frequenzen sperrt ($U_C \to 0$ für $\omega \to 0$).

Die Bandbreite wird über die Grenzfrequenz ω_g definiert:

$$\omega_g = \frac{1}{\tau} \tag{20}$$

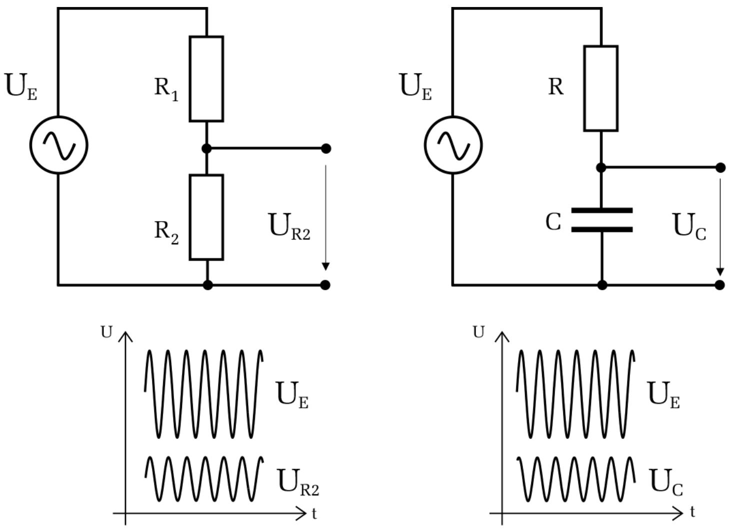


Figure 3: Links: Ein- und Ausgangsspannung bei einem rein ohmschen Spannungsteiler. Beide Spannungen sind phasengleich. Die Amplitude der Ausgangsspannung hängt nur von den beiden Widerstanswerten ab. Rechts: Bei einem kapazitiven Widerstand (Kondensator) kommt es zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung zu einer Phasenverschiebung. Zudem hängt die Amplitude der Ausgangsspannung von der Frequenz ab.

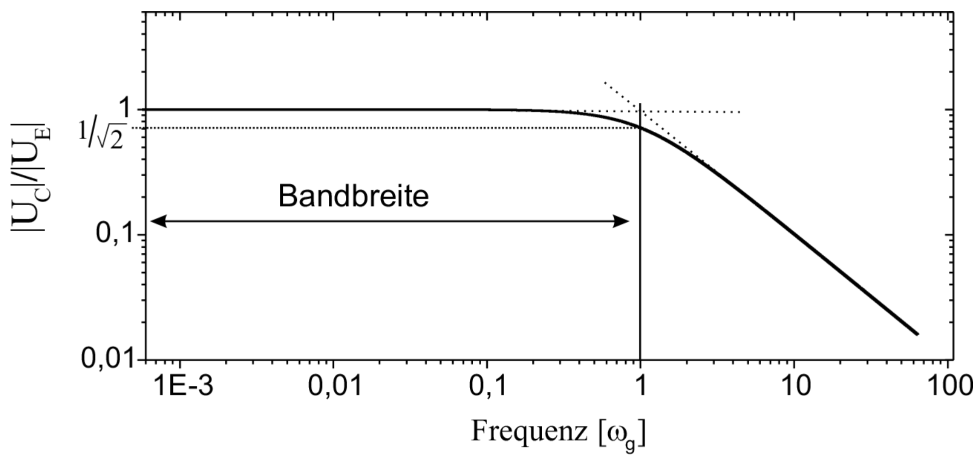


Figure 4: Frequenzgang eines Tiefpassfilters. Aufgetragen ist das Verh¨altnis der Amplitude am Kondensator zur Amplitude der Eingangsspannung ¨uber die Frequenz in Einheiten der Grenzfrequenz g. Die Grenzfrequenz ergibt sich in dieser logarithmischen Auftragung aus dem Schnittpunkt der Verlängerung (gepunktete Geraden) der linearen Bereiche bei kleinen und großen Frequenzen.

2.4 Differentiator und Integrator

Wählt man R und C geschickt, so entspricht das Ausgangsignal dem Integral oder Differential des Eingangssignals. Das Integral erhält man wenn man für $\tau \gg T$ und Abgreifen am Kondensator. Das Differential erhältman wenn für $\tau \ll T$ und Abgreifen am Widerstand. Wir erhalten:

$$U_A \approx \frac{1}{RC} \int U_E \, dt \tag{21}$$

bzw.

$$U_A \approx RC \frac{\partial}{\partial t} U_E \tag{22}$$

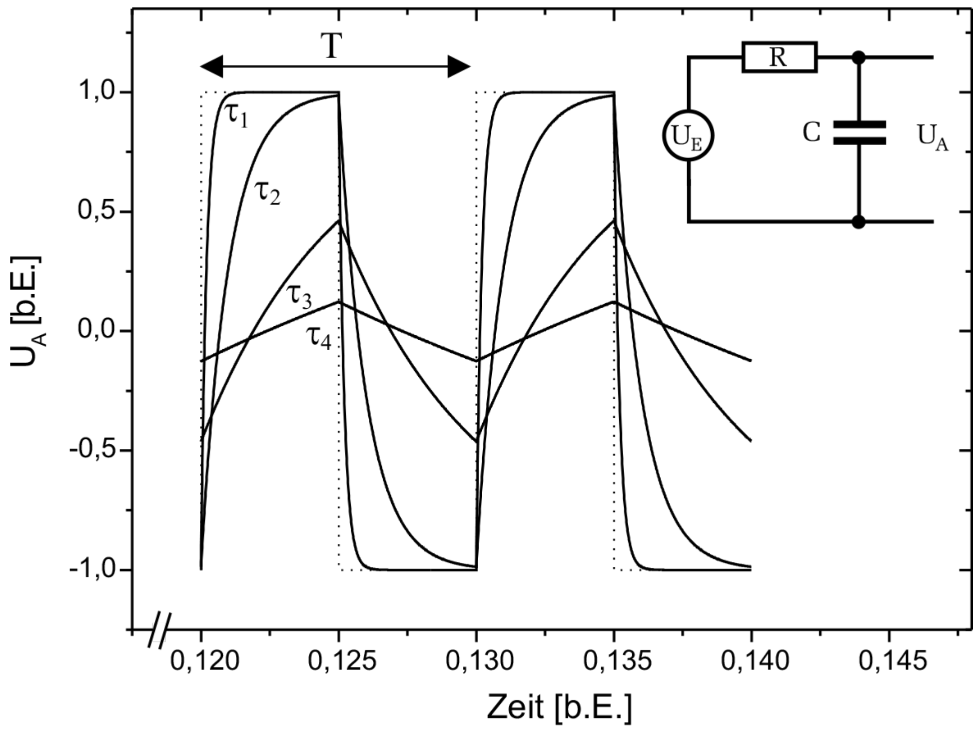


Figure 5: Spannungsverlauf U_A eines Integrators (Tiefpass) bei einer rechteckförmigen Eingangsspannung (gestrichene Kurve) für verschiedene Zeitkonstanten τ. Für $\tau \ll T$ entspricht U_A dem Integral der Eingangsspannung: Die Integration eines Rechtecksignals ergibt ein Dreiecksignal. $\tau_1 = 0.02T$, $\tau_2 = 0.5T$, $\tau_3 = 1T$, $\tau_4 = 2T$.

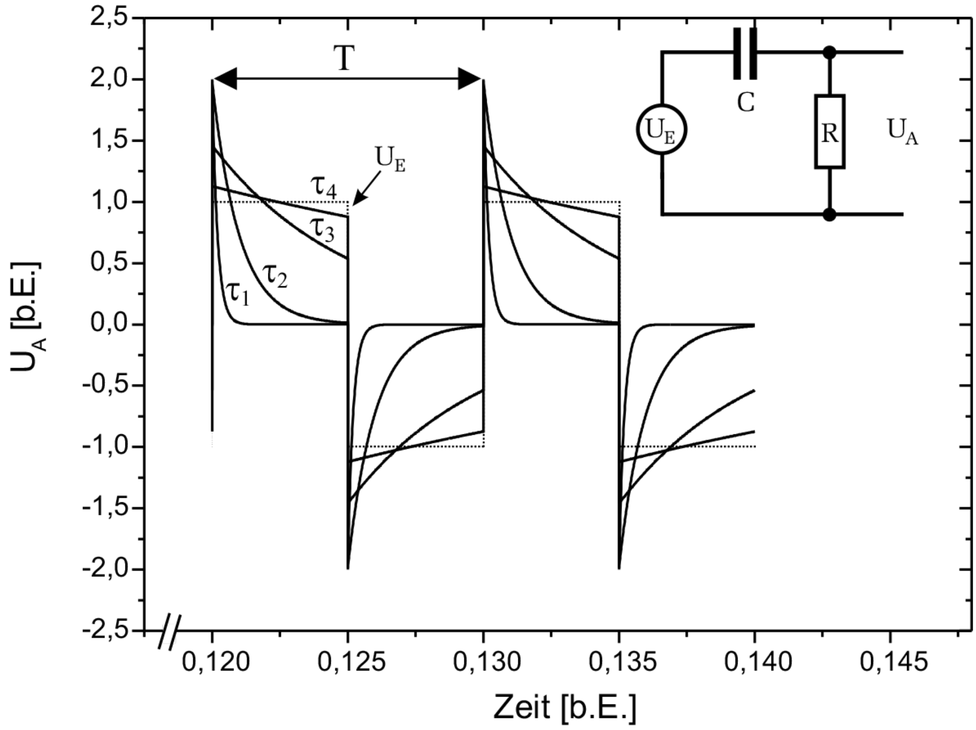


Figure 6: Spannungsverlauf U_A eines Differentiators (Hochpass) bei einer rechteckförmigen Eingangsspannung (gestrichene Kurve) für verschiedene Zeitkonstanten τ. Für $\tau \ll T$ entspricht U_A der Differentiation der Eingangsspannung: Die Differentiation eines Rechtecksignals ergibt ein Dreiecksignal. $\tau_1 = 0.02T$, $\tau_2 = 0.1T$, $\tau_3 = 0.5T$, $\tau_4 = 2T$.

2.5 Schwingkreis (RLC-Glied)

Ein Serienschwingkreis (realer Schwingkreis) besteht aus in Reihe geschaltetem Widerstand, Kondensator und Spulenelement. Der Kondensator wird zunächst aufgeladen und der Kreis dann geschlossen. Der Kondensator beginnt sich zu entladen, wodurch in der Spule ein Strom fließt, der ein Magnetfeld induziert. Ist der Kondensator volständig entladen (B-Feld maximal), so wirkt die die Lenzsche Regel einer Abnahme des Stroms entgegen und der Strom fließt weiter, bis der Kondensator umgekehrt aufgeladen ist. Der Widerstand sorgt für eine Dämpfung da er dem System stets Energie inform von Wärme entzieht. Es entsteht eine harmonische Schwingung zwischen der Energie im Kondensator und der in der Spule. Mit der Maschenregel folgen:

$$L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C} = 0 \tag{23}$$

Und für den Fall das $R = 0$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ erhalten wir als Lösung

$$I = I_0 e^{i(\omega_0 t\ +\ \phi)} \tag{24}$$

wobei

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

die Eigenfrequenz des Schwingkreises darstellt. Im schwach gedämpften Fall (harmonischer Oszillator) ergibt sich

$$I = I_0 e^{\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot e^{i(\omega_f t\ +\ \phi)} \tag{25}$$

mit

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{26}$$

Die Amplitude ist Proportional zu $e^{-\delta t}$ mit der Dämofungskonstante δ

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\tau_r} \tag{27}$$

mit τ_r Relaxionszeit.
Die Dämpfungskonstante wir mithilfe des logarithmischen Dekrements Λ (logarithmiertes Amplitudenverhältnis zweier benachbarter Schwingungsdurchgänge) bestimmt:

$$\Lambda = \delta T \tag{28}$$

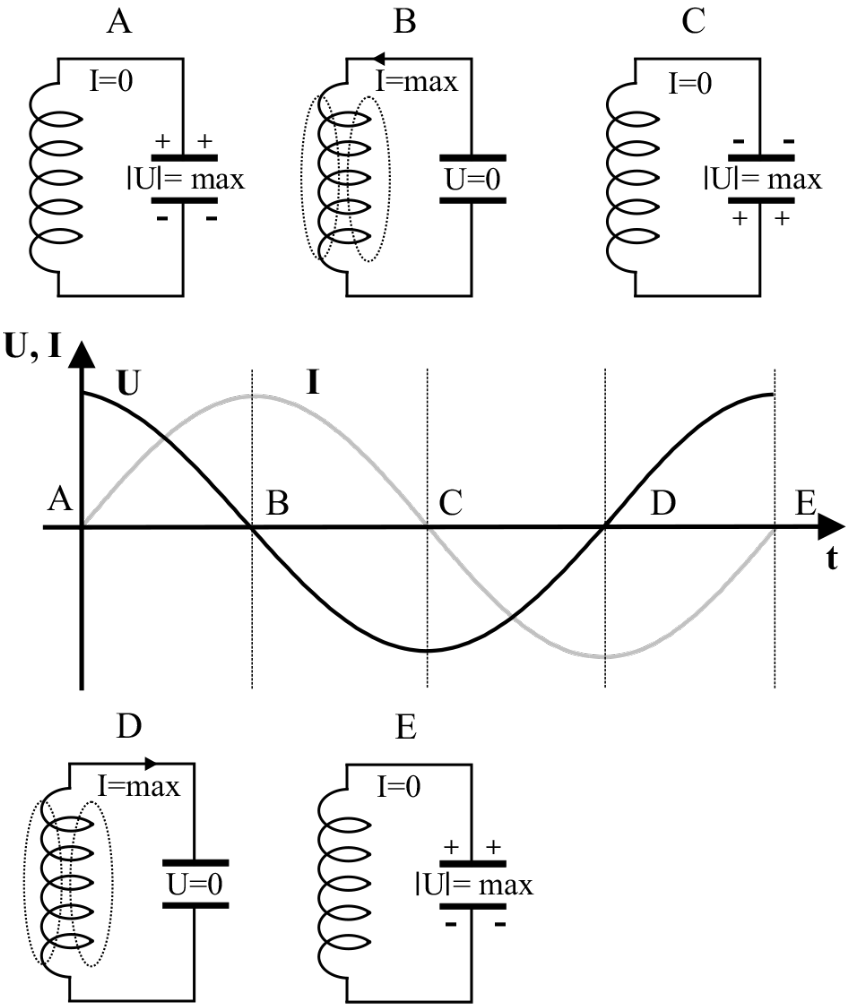


Figure 7: Vorgänge in einem Schwingkreis. Elektrische und magnetische Energie werden fortlaufend ineinander umgewandelt. Dies bedingt einen sinusförmigen Spannungs- und Stromverlauf.

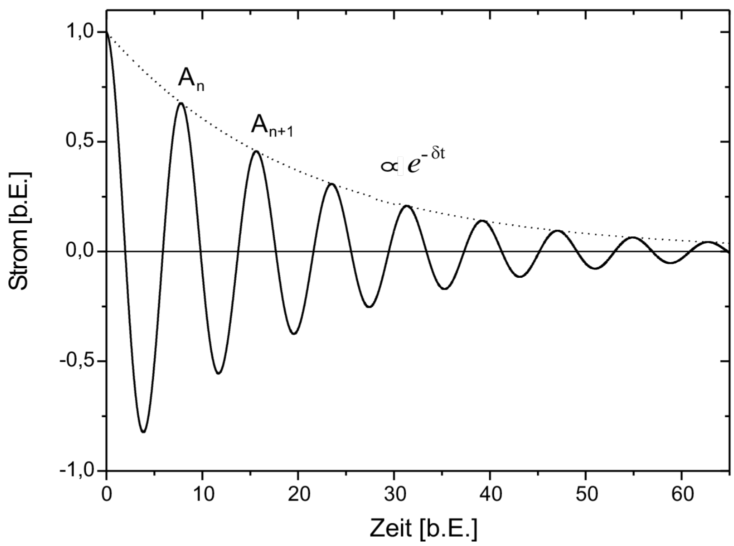


Figure 8: Stromverlauf eines LCR- Serienschwingkreises. Die Amplitude ist proportional zu $e\delta t$.

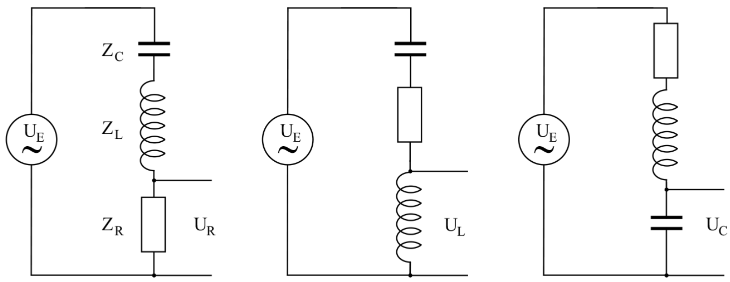


Figure 9: Schaltung eines von außen angeregten Serienschwingkreises bei Abgriff über verschiedene Bauelemente.

2.6 Resonanz Serienschwingkreis

Der Schwingkreis schwingt mit der selben Frequenz wie die Eingangsspannung. Im Resonanzfall, d.h. bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{29}$$

wird die Stromamplitude maximal, d.h.

$$I_0(\omega_R) = \frac{U_0}{R} \tag{30}$$

Eine in Seriegeschaltete Kapazität und Induktivität steellt im Resonanzfall einen Kurzschluss dar. Strom und Spannung sind in Phase und die gesamte Spannung fällt über den Widerstand ab.
Die Ausgangsspannung am Widerstand hat für $\omega \to \omega_R$ also etwa dieselbe Amplitude wie U_E, für größere oder kleinere Frequenzen wird sie gedämpft. Man erhält also einen Bandpassfilter mit der Bandbreite:

$$\Delta\omega = 2\delta \tag{31}$$

Die Resonanzfrequenzen für $|U_C|$ und $|U_E|$ sind

$$\omega_C = \sqrt{\omega_R^2 \ - \ 2\delta^2} \tag{32}$$

$$\omega_L = \sqrt{\omega_R^2 \ + \ 2\delta^2} \tag{33}$$

Hier sind die Ausgangsspannungen höher als U_E. Man nennt dies Resonanzerhöhung Für $R \to 0$ und $\omega = \omega_R$ gilt $|U_C|$,$|U_L| \to \infty$. Dies heißt Resonanzkatastrophe. Allerdings sind dann U_C und U_L um π phasenverschoben.
Eine Bandsperre is ein parallel geschaltener Kondensator und Spule. Die Impedanz wird zu

$$Z_P = \left| \frac{1}{(\omega L - 1/\omega C)} \right| \tag{34}$$

Hier werden Frequenzen im Bereich um $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ gesperrt.

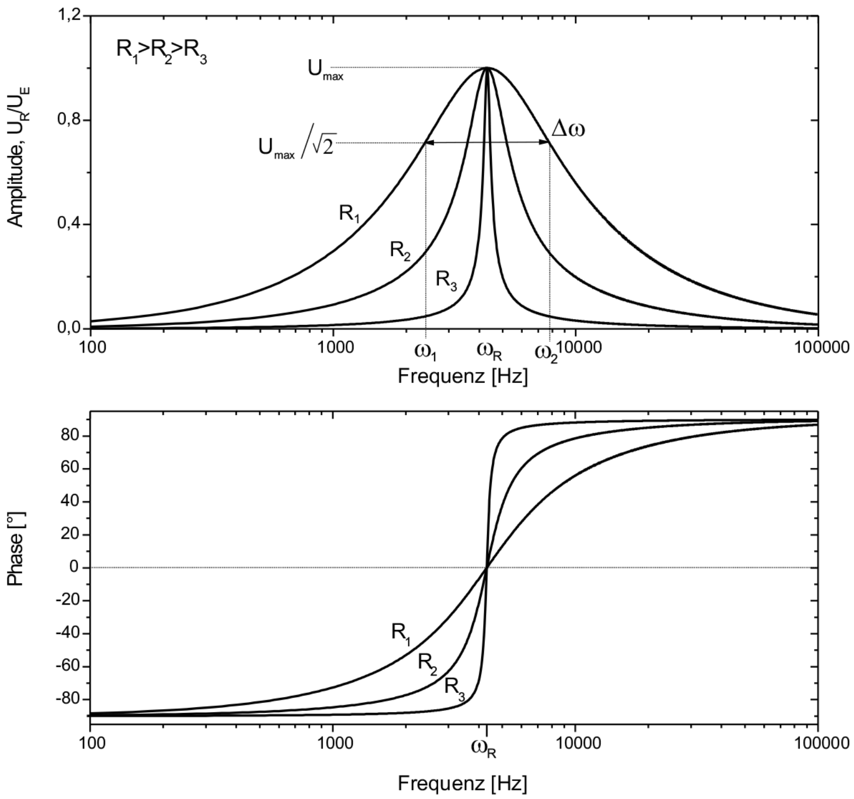


Figure 10: Amplituden- und Phasengang eines Serienschwingkreises bei Abgriff über dem Widerstand. Es sind jeweils drei Berechnungen mit unterschiedlichen Widerstandswerten dargestellt.

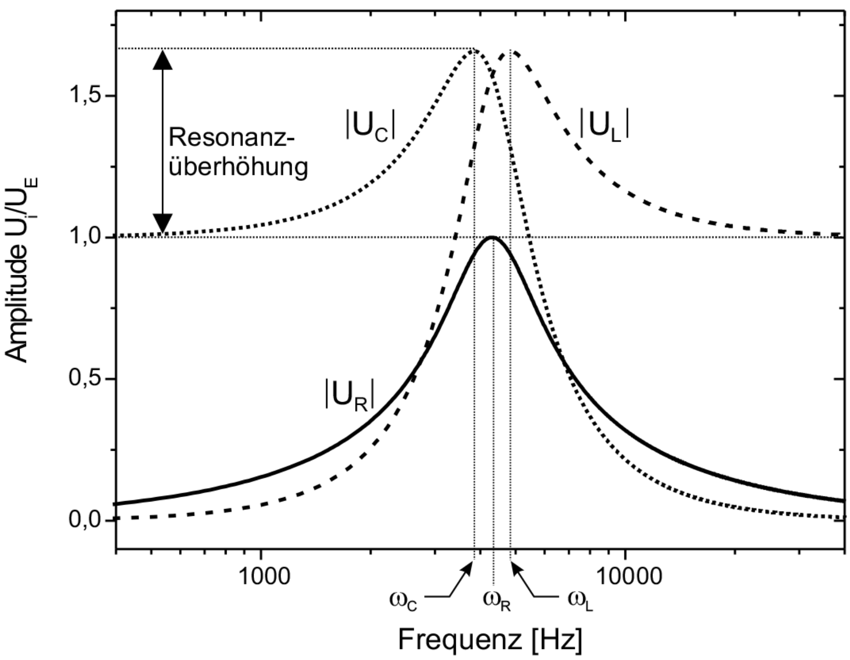


Figure 11: Resonanzkurven eines Serienschwingkreises bei Abgriff über dem Widerstand, Kondensator und Spule. Beachten Sie die unterschiedliche Lage der einzelnen Resonanzfrequenzen und die Spannungsüberhöhung am Kondensator und an der Spule.

2.7 Resonanz eines Parallelschwingkreises

Die Impedanz des LC-Parallelkreises ist sowohl fur sehr kleine als auch für sehr große Frequenzen niedrig. Im Resonanzfall verschwindet dagegen die Spannung über dem Widerstand. Daraus folgt

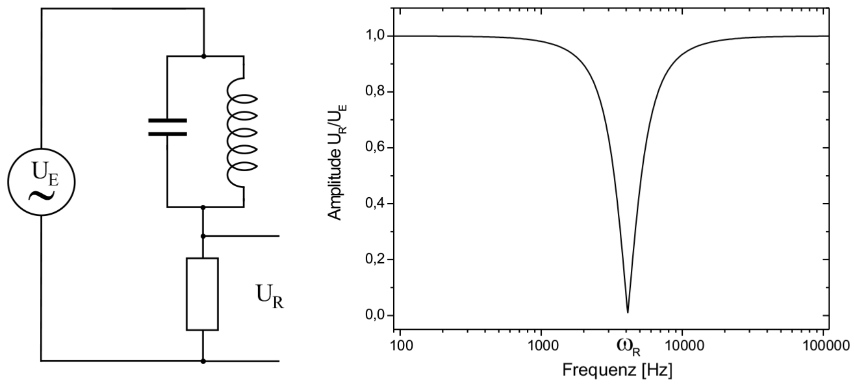


Figure 12: Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einem Parallelschwingkreis.

dass die Impedanz am Parallelschwingkreis unendlich hoch sein muss. Dies lässt sich leicht zeigen anhand von:

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \tag{35}$$

$$\Rightarrow Z_P = \left| \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \right| \tag{36}$$

mit der Resonanzfrequenz ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{37}$$

verschwindet der Nenner und $Z_P \rightarrow \infty$ und der LC-Parallelkreis verhält sich wie ein Isolator.

2.8 Anwendung: Radioempfänger

Ein Amplitudenmoduliertes Radiosignal (AM) besteht aus einem hochfrequenten Trägersignal (HF) und einem niederfrquentem Signal (NF), welches die Informationen trägt.

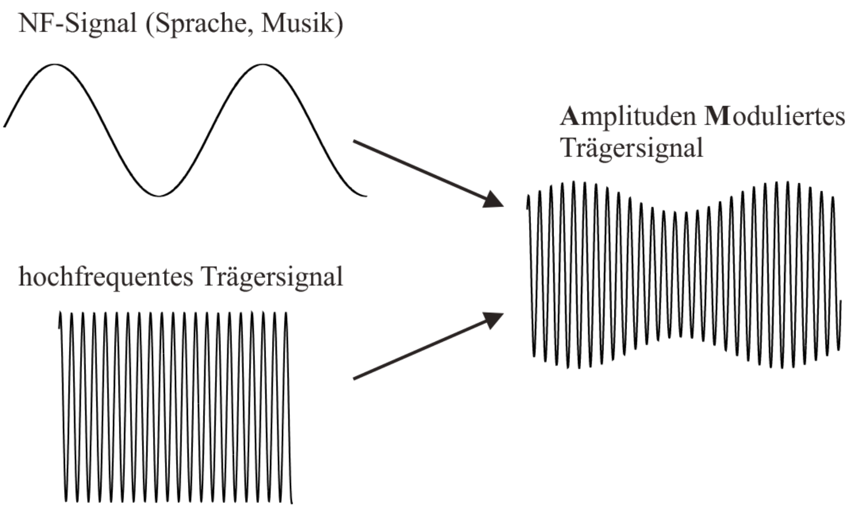


Figure 13: Prinzip der Amplitudenmodulation.

Zum Empfang des Signals wird eine Antenne benötigt. Das Empfangene Signal ist jedoch wertlos, da das AM-Signal symmetrisch zur Nullinie ist und somit der Mittelwert verschwindet. Zur demodulation benötigen wir daher eine Diode, die nur den positiven oder negativen Signaleil durchlässt. Zusätzlich benötigt man einen Bandpassfilter, welcher nur die gewünschte Trägerfrequenz zulässt (Abbildung 15)

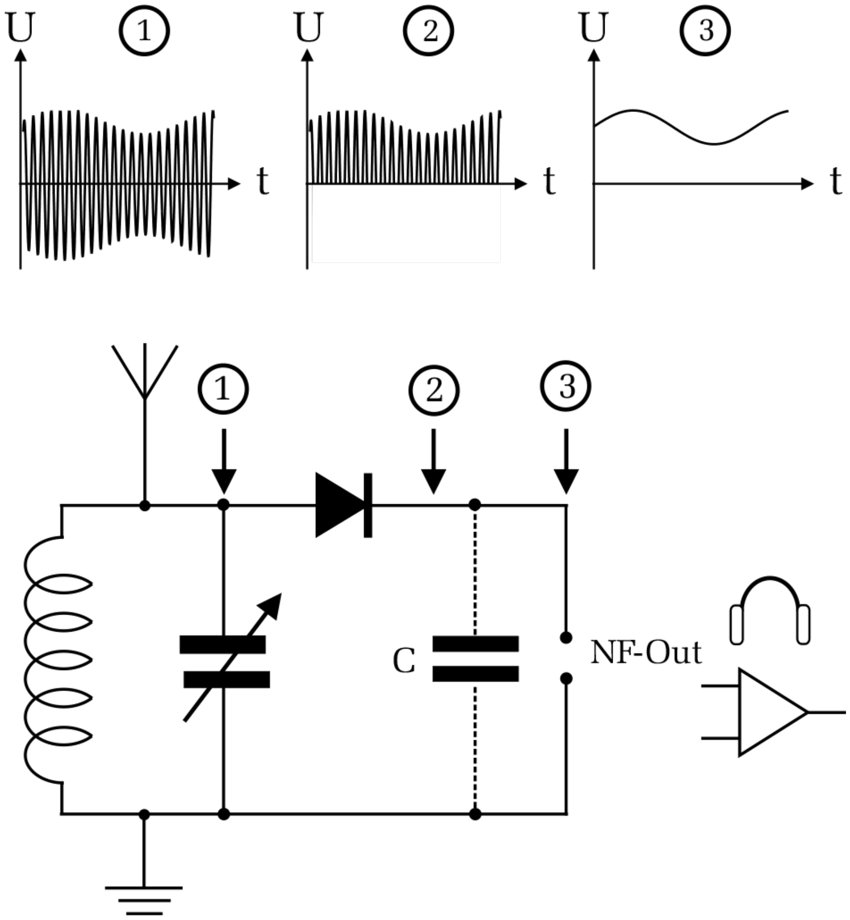


Figure 14: Einfacher AM-Empfänger. Die Signalverläufe an den jeweiligen Messpunkten sind im Bild oben skizziert. Wird hinter die Diode noch ein Kondensator eingebaut, so erhält man am Ausgang das urspr¨ungliche NF-Signal. An dem Ausgang (NF-Out) kann direkt ein hochohmiger Lautsprecher oder zur Weiterverarbeitung des Empfangssignals, ein Verstärker angeschlossen werden.

Da jedes Radiosignal auf einer unterschiedlichen Trägerfrequenz ausgestrahlt wird, kann man so gezielt Radiostationen einzeln empfangen.

3 Durchführung

Für den Aufbau der verschiedenen Schaltungen die wir im Laufe dieses Versuchs untersuchen wollen. Werden wir ein Steckbrettverwenden auf dem wir die einzelnen Komponenten einfach miteinander verschalten können, dies ermöglicht es uns schnell einfache Schaltungen zu erstellen ohne den überblick zu verlieren.

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante τ eines RC-Glieds

Für diesen Versuchsteil werden wir folgende Schaltung verwenden:

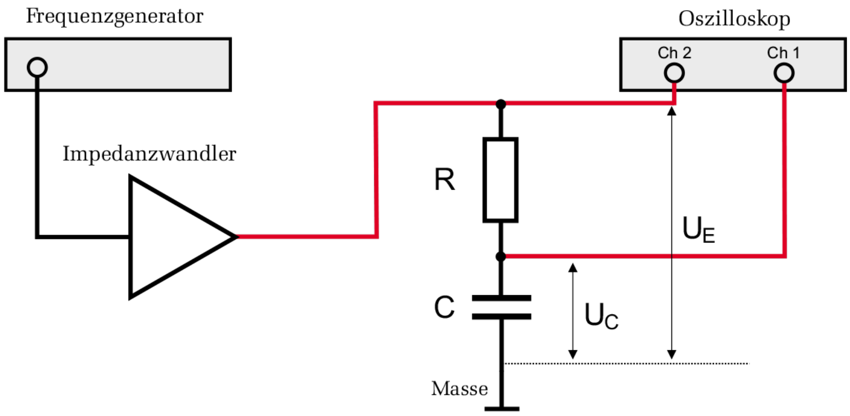


Figure 15: Schaltung zur Bestimmung der Halbwertszeiten.

Es sollen die Halbwertszeiten der Eingangsspannung U_E mit verschiedenen Kombinationen aus Wiederständen und Kondensatoren, gemessen werden:

$$C_1 = 470\text{nF},\ R_1 = 1\text{k}\Omega$$
$$C_2 = 4.7\text{nF},\ R_2 = 10\text{k}\Omega$$
$$C_3 = 47\text{nF},\ R_3 = 1\text{k}\Omega$$

3.2 RC-Glied als Integrator und Differentiator

Es wird qualitativ das Ausgangsignal für einen Integrator und einen Differentiator für vereschiedene Eingangsignale betrachtet. Dabei soll darauf geachtt werden ob di Funktionen sinnvoll als Intgral bzw. Differential voneinander betrachtet werden können.

3.3 Frequenz und Phasengang eines RC-Glieds

Der Frequenzgang wird für einmal für einen Hochpass- und Tiefpassfilter aufgenommen. Der Phasengang wird bei beiden über die Zeitdifferenz Δt bestimmt.

3.4 Frequenzgang eines Serienschwingkreises

Der Frequenzgang wird für drei unterschiedliche Widerstände gemessen:

$$R_1 = 1\text{k}\Omega$$
$$R_2 = 220\Omega$$
$$R_3 = 47\Omega$$

3.5 Dämpfungskonstante eines freien gedämpften Schwingkreises

Es wird die Anregungsfrequenz des Schwingkreises so eingestellt, dass der gesamte Schwingungsvorgang (bis $A = 0$) zu sehen is. Diese Frequenz ist zu notieren. Anschließend sollen fünf benachbarte Amplituden, sowie die Schwingungsdauer gemessen werden und es soll eine qualitative Beobachtung der Schwingung in Abhängikeit der Dämpfung gemacht werden.

3.6 Resonanzüberhöhung

Der Frequnzgang eines RLC-Gliedes soll über der Spule, dem Widerstand und dem Kondensator gemessen werden. Daraus soll die Resonanzfrequenz bestimmt werden.

3.7 Parralelschwingkreis und Bandsperre

Der Frequenzgang soll bei einem Parallelschwingkreis über dem Widerstand, der Spule und dem Kondensator gemessen werden und jeweils, die Resonanzfrequenz ermittelt werden.

3.8 Signalforumg

Mitverschiedenen Methoden werden Störanteile aus einem Signal herausgefiltert.

3.9 Aufbau eines einfachen AM-Empfängers

Es soll ein AM-Empfänger gebaut und anhand eines bereitgestellten Senders getestet werden wie klar das Empfangene Signal hörbar gemacht werden kann.

4 Messprotokoll

4.1 Tag 1: Aufgaben 1-4

1) $V_{pp} = 5$ (statt 1)

C [nF]	R [kΩ]	$T_{1/2}$ [µs]	ΔT
470	1	270	20
4,7	10	38,0	0,5
47	1	33,4	0,5
		27,1	0,5

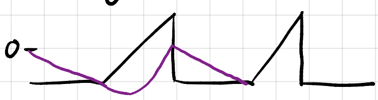
Selbes mit Messung von U_R

2)

Integrator:

Rechteckspannung: Erhöhung von R führt zu "Dreieckspannung"

Sägezahnspannung:



Differenziator

Dreieck ↦ Rechteck ↦ Puls

3)

$f_g = (3{,}25 \pm 0{,}2)$ kHz bei Hoch- und Tiefpass

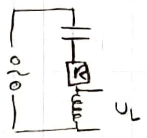
4.2 Tag 2: Aufgaben 5-9

Aufgabe 5

Eingestellte Frequenz : 100 Hz (Anreger) T = 0,25

#	Amplitude U_L [V]
1	3,00 ± 0,03
2	1,88 ± 0,03
3	1,13 ± 0,03
4	0,69 ± 0,03
5	0,41 ± 0,03

Serienschwingkreis



$C = 47\,nF$
$R = 47\,\Omega$
$L = L_1$

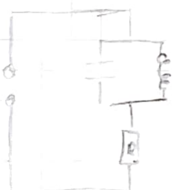
Aufgabe 6

		Resonanzfrequenz f_R [kHz]
Blau	U_C	3,93 ± 0,05
Rot	U_L	4,10 ± 0,05
Schwarz	U_R	4,06 ± 0,05

Serienschwingkreis

$C = 47\,nF$
$R = 220\,\Omega$
$L = L_1$

Aufgabe 7 Parallelschwingkreis (Abb 18)



$L = L_1$
$C = 47\,nF$
$R = 47\,\Omega$

$f_R = 4,11 \pm 0,04$ kHz

Aufgabe 8 (Fehler nicht notwendig) $C = 47\,nF$, $L = L_1$

#	Frequenz [Hz]	Amplitude U_R [dBV]	: mit Hochpass 14Ω
1	104 ± 5	-3,06 ± 0,50	: -31,2
2	3640 ± 30	-7,75 ± 0,50	: -10,6
3	8010 ± 60	-11,5 ± 0,50	: -12,4

° mit Bandpass 47Ω	* mit Bandpass 14Ω	, mit LC-Tiefpass 14Ω
° -2,8	* -2,8	; -3,1
° 6,0	* -9,3	; 6,0
° -20,9	* -23,4	; -21,8

5 Auswertung

[1]:
```
#Benötigte Pakete
%matplotlib inline
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
matplotlib.rcParams.update({'font.size': 20})
plt.rcParams["figure.figsize"] = 16, 9
```

5.1 Teil 1: Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Glieds

Die Zeitkonstante eines RC-Glieds ergibt sich aus den Kenngrößen der Bauteile gemäß (7):

$$\tau_{theo} = R \cdot C$$
$$\Rightarrow \Delta\tau_{theo} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 - \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2}$$

Bestimmt man die Halbwertszeit der Spannung, folgt der experimentell bestimmte Wert gemäß (11):

$$\tau_{exp} = \frac{T_{12}}{\ln 2}$$
$$\Rightarrow \Delta\tau_{exp} = \frac{\Delta T_{12}}{\ln 2}$$

Für die Widerstände R und Capazitäten C, haben wir die relativen Fehler:

$$\Delta R = 0.05R$$
$$\Delta C = 0.10R$$

[2]:
```
#Bestimmung der Halbwertszeit bei der Spannungsmessung

#erste Messreihe
C1=470e-9 #Farad
C1_err=0.1*C1

R1=1e3 #Ohm
R1_err=0.05*R1

#es wurde zur Erhöhung der Genauigkeit die Zeit für 3x T_hw gemessen.
T_hw1=270e-6 #s
T_hw1_err=20e-6 #s

#zweite Messreihe
C2=4.7e-9
C2_err=0.1*C2

R2=10e3
R2_err=0.05*R2

T_hw2=38.0e-6
```

```
T_hw2_err=0.5e-6

#dritte Messreihe
C3=47e-9
C3_err=0.1*C3

R3=R1
R3_err=R1_err

T_hw3=33.4e-6
T_hw3_err=T_hw2_err

#Halbwertszeit beim Stromverlauf
C4=47e-9
C4_err=0.1*C4

R4=R1
R4_err=R1_err

T_hw4=27.1e-6
T_hw4_err=T_hw2_err
```

[3]:
```
#Theoretische Werte für Tau=R*C

tau_theo1= R1*C1
#Fehler aus Fehlerfortpflanzung
tau_theo1_err=np.sqrt((C1*R1_err)**2+(R1*C1_err)**2)

tau_theo2= R2*C2
tau_theo2_err=np.sqrt((C2*R2_err)**2+(R2*C2_err)**2)

tau_theo3= R3*C3
tau_theo3_err=np.sqrt((C3*R3_err)**2+(R3*C3_err)**2)

print('Für die theoretischen Werte wurde ermittelt:')
print('tau_theo1 = ' + str(tau_theo1) + ' ± ' + str(tau_theo1_err))
print('tau_theo2 = ' + str(tau_theo2) + ' ± ' + str(tau_theo2_err))
print('tau_theo3 = ' + str(tau_theo3) + ' ± ' + str(tau_theo3_err))
```

```
Für die theoretischen Werte wurde ermittelt:
tau_theo1 = 0.00047 ± 5.254759747124506e-05
tau_theo2 = 4.7e-05 ± 5.254759747124505e-06
tau_theo3 = 4.7e-05 ± 5.254759747124505e-06
```

[4]:
```
#Experimentelle Werte für Tau=T_hw/ln(2)

tau_exp1=T_hw1/np.log(2)
#Fehler aus Fehlerfortpflanzung
tau_exp1_err=T_hw1_err/np.log(2)

tau_exp2=T_hw2/np.log(2)
tau_exp2_err=T_hw2_err/np.log(2)

tau_exp3=T_hw3/np.log(2)
tau_exp3_err=T_hw3_err/np.log(2)

print('Für die experimentellen Werte wurde ermittelt:')
print('tau_exp1 = ' + str(tau_exp1) + ' ± ' + str(tau_exp1_err))
```

```python
print('tau_exp2 = ' + str(tau_exp2) + ' ± ' + str(tau_exp2_err))
print('tau_exp3 = ' + str(tau_exp3) + ' ± ' + str(tau_exp3_err))
print()

#Zum Vergleich: Werte aus der Strommessung
tau_theo4=R4*C4
tau_theo4_err=np.sqrt((C4*R4_err)**2+(R4*C4_err)**2)

tau_exp4=T_hw4/np.log(2)
tau_exp4_err=T_hw4_err/np.log(2)

print('Aus der Strommessung ergeben sich die folgenden Werte:')
print('tau_theo_I = ' + str(tau_theo4) + ' ± ' + str(tau_theo4_err))
print('tau_exp_I = ' + str(tau_exp4) + ' ± ' + str(tau_exp4_err))
print()

diff_tau4=np.abs(tau_theo4-tau_exp4)
diff_tau4_err=np.sqrt((tau_theo4_err)**2+(tau_exp4_err)**2)

print('Für die Differenz Theorie-Experiment bei der Strommessung folgt somit:')
print('(tau4) = ' + str(diff_tau4) + ' ± ' + str(diff_tau4_err)+' => Sigma=␣
↪'+str(diff_tau4/diff_tau4_err))
```

```
Für die experimentellen Werte wurde ermittelt:
tau_exp1 = 0.0003895276610400201 ± 2.885390081777927e-05
tau_exp2 = 5.4822411553780616e-05 ± 7.213475204444817e-07
tau_exp3 = 4.818601436569138e-05 ± 7.213475204444817e-07

Aus der Strommessung ergeben sich die folgenden Werte:
tau_theo_I = 4.7e-05 ± 5.254759747124505e-06
tau_exp_I = 3.9097035608090914e-05 ± 7.213475204444817e-07

Für die Differenz Theorie-Experiment bei der Strommessung folgt somit:
(tau4) = 7.902964391909084e-06 ± 5.304040181338316e-06 => Sigma=
1.4899895403724122
```

C [Hz]	R [kΩ]	f [Hz]	τ_{theo} [μs]	τ_{exp} [μs]
470 ± 47	1.00 ± 0.05	500	470 ± 53	390 ± 29
4.7 ± 0.47	10.0 ± 0.5	500	47.0 ± 5.3	54.9 ± 0.7
47 ± 4.7	1.00 ± 0.05	500	47.0 ± 5.3	48.2 ± 0.7
47 ± 4.7	1.00 ± 0.05	500	47.0 ± 5.3	39.1 ± 0.7

[5]:
```python
#Vergleich der experimentellen und theoretischen Werte
diff_tau1=np.abs(tau_theo1-tau_exp1)
diff_tau1_err=np.sqrt((tau_theo1_err)**2+(tau_exp1_err)**2)

diff_tau2=np.abs(tau_theo2-tau_exp2)
diff_tau2_err=np.sqrt((tau_theo2_err)**2+(tau_exp2_err)**2)

diff_tau3=np.abs(tau_theo3-tau_exp3)
diff_tau3_err=np.sqrt((tau_theo3_err)**2+(tau_exp3_err)**2)

print('Der Vergleich der theoretischen und experimentellen Werte liefert:')
print('(tau1) = ' + str(diff_tau1) + ' ± ' + str(diff_tau1_err)+' \n=> Sigma=␣
↪'+str(diff_tau1/diff_tau1_err))
```

```
print('(tau2) = ' + str(diff_tau2) + ' ± ' + str(diff_tau2_err)+' \n=> Sigma=␣
↪'+str(diff_tau2/diff_tau2_err))
print('(tau3) = ' + str(diff_tau3) + ' ± ' + str(diff_tau3_err)+' \n=> Sigma=␣
↪'+str(diff_tau3/diff_tau3_err))
print()

diff_tau4=np.abs(tau_theo4-tau_exp4)
diff_tau4_err=np.sqrt((tau_theo4_err)**2+(tau_exp4_err)**2)

print('Für die Differenz Theorie-Experiment bei der Strommessung folgt somit:')
print('(tau4) = ' + str(diff_tau4) + ' ± ' + str(diff_tau4_err)+' \n=> Sigma=␣
↪'+str(diff_tau4/diff_tau4_err))
```

```
Der Vergleich der theoretischen und experimentellen Werte liefert:
(tau1) = 8.047233895997987e-05 ± 5.9948290988169496e-05
=> Sigma= 1.3423625199901144
(tau2) = 7.822411553780619e-06 ± 5.304040181338316e-06
=> Sigma= 1.4748024687488068
(tau3) = 1.186014365691381e-06 ± 5.304040181338316e-06
=> Sigma= 0.22360584104627307

Für die Differenz Theorie-Experiment bei der Strommessung folgt somit:
(tau4) = 7.902964391909084e-06 ± 5.304040181338316e-06
=> Sigma= 1.4899895403724122
```

τ_{theo} [μs]	τ_{exp} [μs]	σ-Abweichung
470 ± 53	390 ± 29	1.34
47.0 ± 5.3	54.9 ± 0.7	1.48
47.0 ± 5.3	48.2 ± 0.7	0.22
47.0 ± 5.3	39.1 ± 0.7	1.49

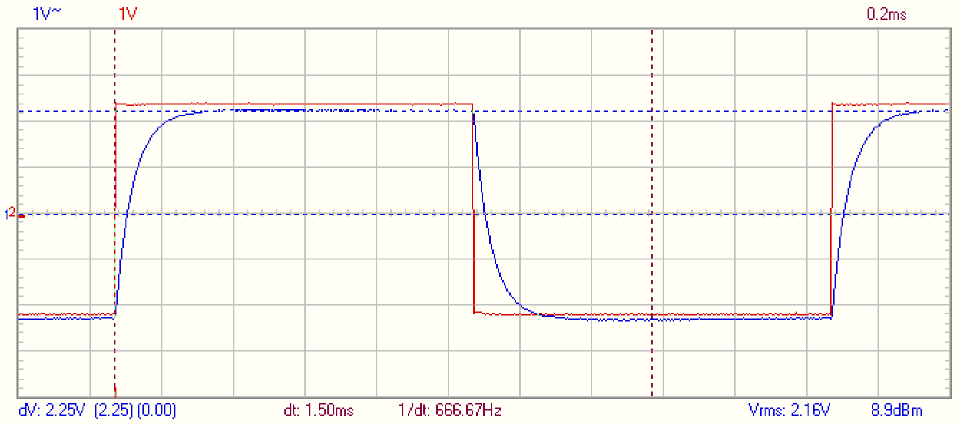


Figure 16: Eingangs(rot)- und Ausgangsspannung(blau) eines RC-Glieds (C = 47 nF, R = 1 kΩ), Spannungsabgriff über Kondensator.

Figure 17: Eingangs(rot)- und Ausgangsspannung(blau) eines RC-Glieds (C = 47 nF, R = 1 kΩ), Spannungsabgriff über Widerstand.

5.2 Teil 2: RC-Glied als Integrator und Differentiator

Unsere Beobachtungen zeigen, dass für großes R also $\tau \ll T$, die Ausgangsspannung U_A des Tiefpasses bei einem Sinussignal die Form eines Cosinus aufnimmt. Zudem wird ein Eingangssignal in Sägezahnform zu einem Ausgangssignal in Wellenform (Abbildung18). Dies bestätigt, dass für $\tau \ll T$ der Tiefpass als Integrator ffunktioniert, da der Verlauf der Eingagsspannung die Änderung der Ausgangsspannung vorgibt. Darüber hinaus zeigen unsere Beobachtungen, dass für kleines R, also $\tau \gg T$, eine Eingangspannung in Dreiecksform, das Ausgangssignal eines Hochpasses in Form einer Rechteckspannung erzeugt (Abbildung 19. Eine Rechteckspannung erzeugt bei diesen Vorraussetzungen einzelne Peaks and den Spannungsänderungen. Die Steigung einer Eingangspannung bestimmt also den Verlauf der Eingangsspannung. Der Hochpass arbeitet also demnach bei $\tau \gg T$ als Differentiator:

Figure 18: Integrator mit einer Eingagsspannung in Sägezahnform, das Ausgangssignal (blau) ist das Integral des Eingags (blau).

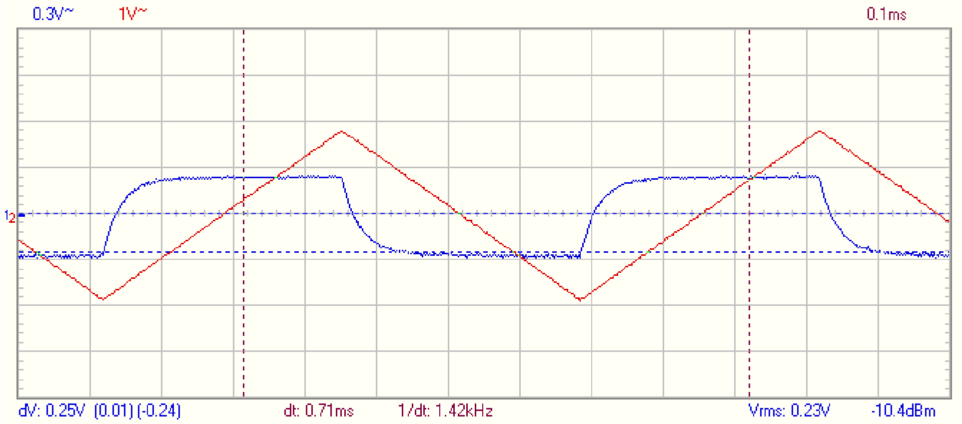


Figure 19: Differentiator mit einer Eingagsspannung (rot) in Dreiecksform, das Ausgangssignal ist die Ableitung des Eingags.

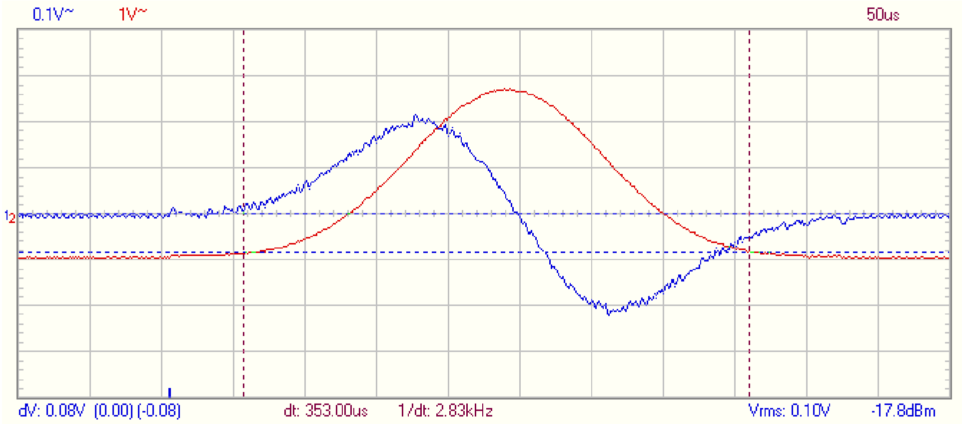


Figure 20: Differentiator mit Eingangssignal (rot) in Form einer Gaußfunktion, und Ausgangsignal (blau) als dessen Ableitung.

5.3 Teil 3: Frequenz- und Phasengang eines RC-Glieds

[6]:
```
#Bestimmung der Grenzfrequenzen am Circuit Analyzer

#Tiefpass
freq_grenz_tp=3.25*1e3 #Hz
freq_grenz_tp_err=0.20*1e3

#Hochpass
freq_grenz_hp=3.25*1e3
freq_grenz_hp_err=freq_grenz_tp_err
```

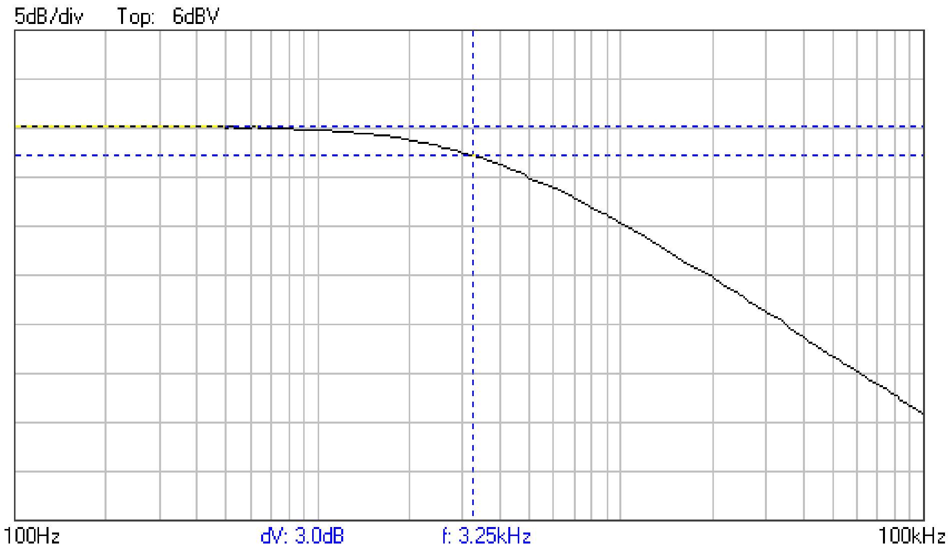


Figure 21: Frequenzgang des Tiefpassfilters and dem die Grenzfrequenz, mittels Oszilloskop bestimmt wurde

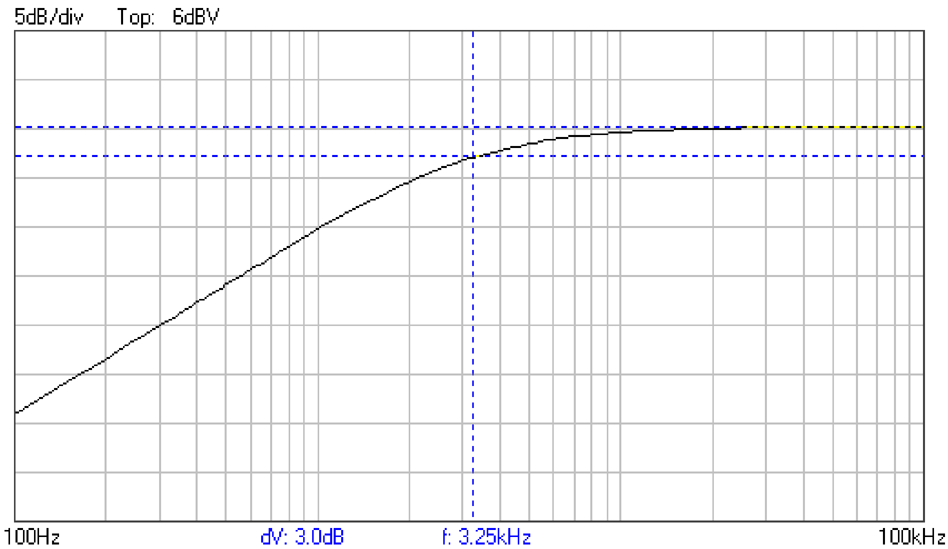
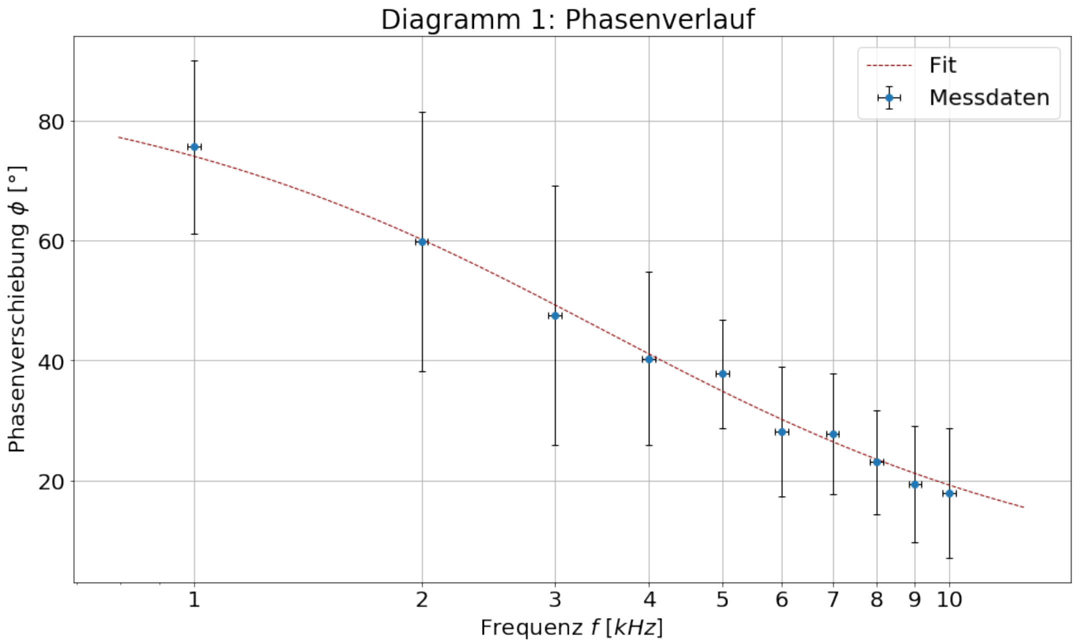


Figure 22: Frequenzgang des Hochpassfilters and dem die Grenzfrequenz, mittels Oszilloskop bestimmt wurde.

5.3.1 Phasengang am Hochpassfilter

[8]:
```
f = np.array([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])*1e3
fehler_f = f*2e-2

t = np.array([210.00,83.00,44.00,28.00,21.00,13.00,11.00,8.00,6.00,5.00])*1e-6
fehler_t = np.array([40.0,30.0,20.0,10.0,5.0,5.0,4.0,3.0,3.0,3.0])*1e-6

phi = t*f*360
fehler_phi = np.sqrt((fehler_t/t)**2+(fehler_f/f**2))*phi

#Fitfunktion
from scipy import odr

def fit_func(p, x):
    (rc) = p
    return np.arctan(1/(x*rc))*180/np.pi

model = odr.Model(fit_func)

#darzustellende Daten
x = f
y = phi
delta_x = fehler_f
delta_y = fehler_phi

#Startparameter
para0 = [1.0]

data = odr.RealData(x, y, sx=delta_x, sy=delta_y)
odr = odr.ODR(data, model, beta0=para0 )
out = odr.run()

#1-Sigma
popt = out.beta
perr = out.sd_beta

#Sigma-Umgebung
nstd = 16 # um n-Sigma-Umgebung zu zeichnen
popt_top = popt+nstd*perr
popt_bot = popt-nstd*perr

#Plot-Umgebung
x_fit = np.logspace(np.log10(min(x))-0.1, np.log10(max(x))+0.1, 1000)
fit = fit_func(popt, x_fit)
fit_top = fit_func(popt_top, x_fit)
fit_bot = fit_func(popt_bot, x_fit)

#Plot
fig, ax = plt.subplots(1)
plt.errorbar(x, y, yerr=delta_y, xerr=delta_x, lw=1, ecolor='k', fmt='o',␣
 ↪capsize=3, label='Messdaten')
plt.title('Diagramm 1: Phasenverlauf ')
plt.grid(True)
plt.xscale('log')
plt.xticks( [1000,2000,3000,4000,5000,6000,7000,8000,9000,10000],
            [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])
plt.xlabel('Frequenz '+r'${f}$'+' '+r'${[kHz]}$')
```

```python
plt.ylabel('Phasenverschiebung '+r'${\phi}$' + ' '+r'${[°]}$')
plt.plot(x_fit, fit, c='darkred',ls='--', lw=1, label='Fit')
plt.legend(loc='best')
plt.show()

#Chi-Quadrat orthogonal
from scipy.stats import chi2

dof = x.size-popt.size
chisquare = np.sum(((fit_func(popt, x)-y)**2)/(delta_y**2+((fit_func(popt,␣
 ↪x+delta_x)-
                                                             fit_func(popt,␣
 ↪x-delta_x))/2)**2))
chisquare_red = chisquare/dof
prob = round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100

#Grenzfrequenz
def fit_func_rev(x, p):
    (rc) = p
    return 1/(np.tan(x*np.pi/180)*rc)

phi_g = 45
f_g = fit_func_rev(phi_g, popt)
fehler_f_g = abs(fit_func_rev(phi_g, popt+perr)-fit_func_rev(phi_g, popt-perr))/2


print('tau =', popt[0]*1e6, ' ± ', perr[0]*1e6 , ' [µs]')
print()
print('f_g =', f_g[0]*1e-3, ' ± ', fehler_f_g[0]*1e-3 , ' [kHz]')
print()
print('Chi-Quadrat =', chisquare)
print('Freiheitsgrade =', dof)
print('Chi-Quadrat reduziert =', chisquare_red)
print('Wahrscheinlichkeit ein größeres oder gleiches Chi-Quadrat zu erhalten =',␣
 ↪prob, '%')
```



```
tau = 286.8054421242183  ±  7.208922438113834  [µs]

f_g = 3.4866841876971435  ±  0.0876940328237622  [kHz]

Chi-Quadrat = 0.22676348225393841
Freiheitsgrade = 9
Chi-Quadrat reduziert = 0.025195942472659823
Wahrscheinlichkeit ein größeres oder gleiches Chi-Quadrat zu erhalten = 100.0 %
```

[9]:

```
#Vergleich der gemessenen Grenzfrequenz mit dem optimalen Fit-Parameter
print('Aus dem Fit ergibt sich die folgende Grenzfrequenz:')
print('f_g =', f_g[0]*1e-3, ' ± ', fehler_f_g[0]*1e-3 , ' [kHz]')
print()

diff_freq_g=np.abs(f_g[0]-freq_grenz_hp)
diff_freq_g_err=np.sqrt((fehler_f_g[0])**2+(freq_grenz_hp_err)**2)

print('Für die Differenz Fit-Experiment folgt somit:')
print('(freq_g) = '+str(diff_freq_g)+' ± '+str(diff_freq_g_err)+' \n=> Sigma=␣
↪'+str(diff_freq_g/diff_freq_g_err))
```

```
Aus dem Fit ergibt sich die folgende Grenzfrequenz:
f_g = 3.4866841876971435  ±  0.0876940328237622  [kHz]

Für die Differenz Fit-Experiment folgt somit:
(freq_g) = 236.68418769714344 ± 218.3809593185612
=> Sigma= 1.0838132978062551
```

$$
\begin{aligned}
f_{gr}^{mes} &= 3.25 \pm 0.02 \text{ [kHz]} \\
f_{gr}^{fit} &= 3.49 \pm 0.09 \text{ [kHz]} \\
&\Rightarrow 1.08\sigma
\end{aligned}
$$

[10]:

```
#Vergleich der gemessen Grenzfrequenzen mit den Theoriewerten
freq_g_theo=1/(2*np.pi*R1*C3)
freq_g_theo_err=freq_g_theo*((R1_err/R1)**2+(C3_err/C3)**2)**0.5

diff_freq_g_hp=np.abs(freq_g_theo-freq_grenz_hp)
diff_freq_g_hp_err=np.sqrt((freq_g_theo_err)**2+(freq_grenz_hp_err)**2)

diff_freq_g_tp=np.abs(freq_g_theo-freq_grenz_tp)
diff_freq_g_tp_err=np.sqrt((freq_g_theo_err)**2+(freq_grenz_tp_err)**2)

print('Aus R und C folgt die f_g_theo mit:')
print('f_g_theo =', freq_g_theo*1e-3 , ' ± ', freq_g_theo_err*1e-3, ' [kHz]')
print()

print('Für die Differenz Theorie-Experiment folgt somit für den Hoch- und Tiefpass:
↪')
print('Sigma= '+str(diff_freq_g_hp/diff_freq_g_hp_err))
```

```
Aus R und C folgt die f_g_theo mit:
f_g_theo = 3.3862753849339438  ±  0.37859709756232834  [kHz]

Für die Differenz Theorie-Experiment folgt somit für den Hoch- und Tiefpass:
Sigma= 0.3182686215248944
```

$$f_{gr}^{theo} = 3.39 \pm 0.38 \text{ [kHz]}$$
$$f_{gr}^{mes} = 3.25 \pm 0.02 \text{ [kHz]}$$
$$\Rightarrow 0.32\sigma$$

5.4 Teil 4: Frequenzgang eines Serienschwingkreises

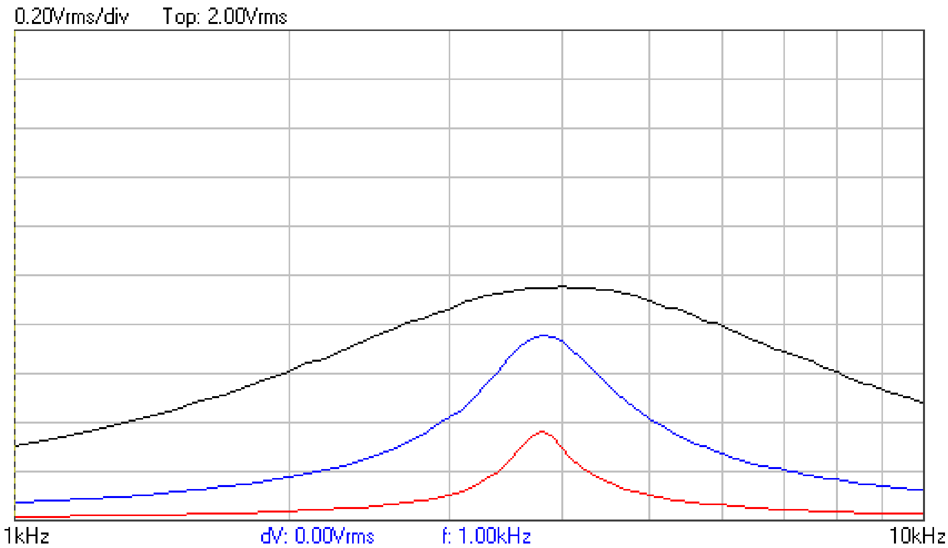


Figure 23: Frequenzgang eines Serienschwingkreises bei Spannungsabgriff über dem Widerstand R mit verschiedenen Widerständen R_1 = 1kΩ (schwarz), R_2 = 220Ω (blau), R_3 (rot)= 47 Ω.

5.4.1 Bestimmung der Induktivität L_1

[11]:
```
omega_res=2*np.pi*np.array([3.82e3,3.84e3,4.00e3])
omega_res_err=2*np.pi*np.array([0.1e3,0.1e3,0.1e3])

omega_res_mean=np.mean(omega_res)
omega_res_mean_err=1/3*np.sum(omega_res_err**2)**0.5
omega_res_mean_std=np.std(omega_res)/np.sqrt(len(omega_res))

print('Die Grenzfrequenz wurde bestimmt auf:')
print(str(omega_res_mean*1e-3) + ' ± ' +␣
↪str((omega_res_mean_err+omega_res_mean_std)*1e-3) + ' [kHz]')
```

```
Die Grenzfrequenz wurde bestimmt auf:
24.420646893904657 ± 0.6549761542457588 [kHz]
```

Wir wissen:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 2\pi f_R$$
$$\Rightarrow L = \frac{1}{C}\frac{1}{(2\pi f_R)^2}$$
$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi^2 f_R^2 C^2}\Delta C\right)^2 + \left(\frac{2}{4\pi^2 C f_R^3}\Delta f_R\right)^2}$$

```
[12]: L1=1/(omega_res_mean**2*C3)
L1_err=L1*np.sqrt((2*omega_res_mean_err/omega_res_mean)**2+(C3_err/C3)**2)
L1_std=L1*np.sqrt((2*omega_res_mean_std/omega_res_mean)**2)

print('Aus der ermittelten Grenzfrequenz folgt für die Induktivität:')
print('L1 = ' + str(L1*1e3) + ' ± ' + str((L1_err+L1_std)*1e3) + ' mH')
```

```
Aus der ermittelten Grenzfrequenz folgt für die Induktivität:
L1 = 35.67695773946664 ± 4.575634095470602 mH
```

Somit folgt für die Induktivität L_1:

$$L_1 = 35.7 \pm 4.6 \text{ [mH]} \tag{38}$$

5.4.2 Bestimmung des Verlustwiederstandes R_V

In einem realen Schwingkreis treten zusätzlich Verluste auf. Der Gesamtwiederstand setzt sich aus diesen Verlustwiederstand R_V und eben den der drei Standartbauteile R zusammen. $R_{ges} = R + R_V$. Für die Peakbreite gilt:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 2\pi\Delta f_R = \frac{R_{ges}}{L} \\ \Rightarrow R_{ges} &= 2\pi\Delta f_R \cdot L \\ \Delta R_{ges} &= \sqrt{(2\pi\Delta(\Delta f_R)L)^2 + (2\pi\Delta f_R \Delta L)^2} \end{aligned}$$

```
[43]: # delta_omega=2*np.pi*np.array([5.35e3,1.37e3,0.64e3]) Altprotokoll
# delta_omega=2*np.pi*np.array([4.8e3,0.65e3,0.60e3]) Messprotokoll Aaron Leo
delta_omega=2*np.pi*np.array([5e3,1.295e3,0.669e3]) # [Hz] Selber nochmal␣
 ↪nachgemessen anhand der Bilder.
delta_omega_err=2*np.pi*np.array([0.1e3,0.1e3,0.1e3]) #[Hz]
R=np.array([1000,220,47])
R_err=0.05*R

R_v=delta_omega*L1-R
R_v_err=np.sqrt((delta_omega_err*L1)**2+(delta_omega*L1_std)**2+(R_err)**2)

R_ges=R+R_v
R_ges_err=np.sqrt(R_err**2+R_v_err**2)

print('Für den Gesamtwiderstand ergibt sich R + Rv:')#Daraus folgt für den jew.␣
 ↪Gesamtwiderstand R + Rv:
for i in range(0,3):
    print('R_ges_%d = '%(R[i]) + str(R_ges[i]) + ' ± ' + str(R_ges_err[i]) + '␣
 ↪[Ohm]')
print()
print('Daraus folgt für den jew. Verlustwiderstand Rv:')
for i in range(0,3):
    print('Rv_%d = '%(R[i]) + str(R_v[i]) + ' ± ' + str(R_v_err[i]) + ' [Ohm]')
```

```
Für den Gesamtwiderstand ergibt sich R + Rv:
R_ges_1000 = 1120.824683367419 ± 78.87964013298345 [Ohm]
R_ges_220 = 290.2935929921615 ± 28.15606263553695 [Ohm]
R_ges_47 = 149.96634263456065 ± 22.943952710368308 [Ohm]

Daraus folgt für den jew. Verlustwiderstand Rv:
```

```
Rv_1000 = 120.82468336741908 ± 61.008176726640286 [Ohm]
Rv_220 = 70.2935929921615 ± 25.918407804806993 [Ohm]
Rv_47 = 102.96634263456065 ± 22.82328779943015 [Ohm]
```

Verlustwiderstand R_V aus Bandbreite $\Delta\omega$ der Resonanzkurven:

R [Ω]	R_{ges} [Ω]	R_V [Ω]
1000	1120 ± 76	120 ± 57
220	290 ± 17	70 ± 13
47	149 ± 5	103 ± 5

5.4.3 Zusatzaufgabe für Physiker: Verlustwiderstand aus Spannungsmessung

Es soll nun der Verlustwiderstand R_V aus der Spannungsmessung bestimmt werden.

$$U_A = \frac{R}{R + Rv} U_E \tag{39}$$

$$\Rightarrow R_V = \left(\frac{U_E}{U_A} - 1 \right) R \tag{40}$$

[44]:
```
U_E=np.ones(3)
U_E_err=0.02*np.ones(3)

U_A=np.array([0.96,0.76,0.37])
U_A_err=0.03*np.ones(3)

R_v2=R*(U_E/U_A-1)
R_v2_err=np.sqrt((R_err*(U_E/U_A-1))**2+(R*U_E_err/U_A)**2+(R*U_E*U_A_err/
 ↪U_A**2)**2)

R_ges2=R+R_v2
R_ges2_err=np.sqrt(R_err**2+R_v2_err**2)


print('Für den Gesamtwiderstand folgt somit:')
for i in range(0,3):
    print('R_ges_%d = '%(R[i]) + str(R_ges2[i]) + ' ± ' + str(R_ges2_err[i]) + '␣
 ↪[Ohm]')

print()
print('Aus der Spannungsmessung folgt für den Verlustwiderstand: ')
for i in range(0,3):
    print('R_v_%d = '%(R[i]) + str(R_v2[i]) + ' ± ' + str(R_v2_err[i]) + ' [Ohm]')
```

```
Für den Gesamtwiderstand folgt somit:
R_ges_1000 = 1041.6666666666667 ± 63.229788746253405 [Ohm]
R_ges_220 = 289.47368421052636 ± 17.238083144624685 [Ohm]
R_ges_47 = 127.02702702702702 ± 11.578735937078926 [Ohm]

Aus der Spannungsmessung folgt für den Verlustwiderstand:
R_v_1000 = 41.66666666666674 ± 38.70408486059105 [Ohm]
R_v_220 = 69.47368421052633 ± 13.272208199881197 [Ohm]
R_v_47 = 80.02702702702702 ± 11.33775224198355 [Ohm]
```

Verlustwiderstand R_V aus Maximalspannung U_A^{max} der Resonanzkurven:

R [Ω]	R_{ges} [Ω]	R_V [Ω]
1000	1041 ± 63	41 ± 39
220	290 ± 17	70 ± 13
47	127 ± 12	80 ± 11

5.5 Teil 5: Dämpfungskonstanten eines freien gedämpften Schwingkreises

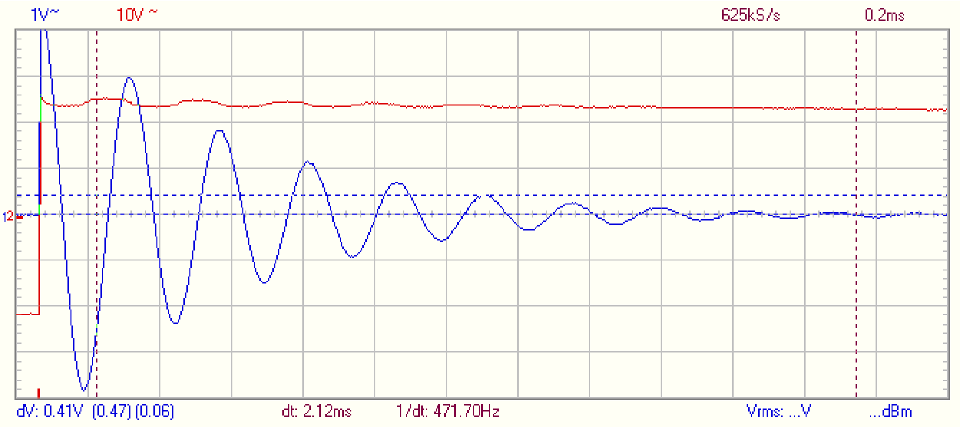
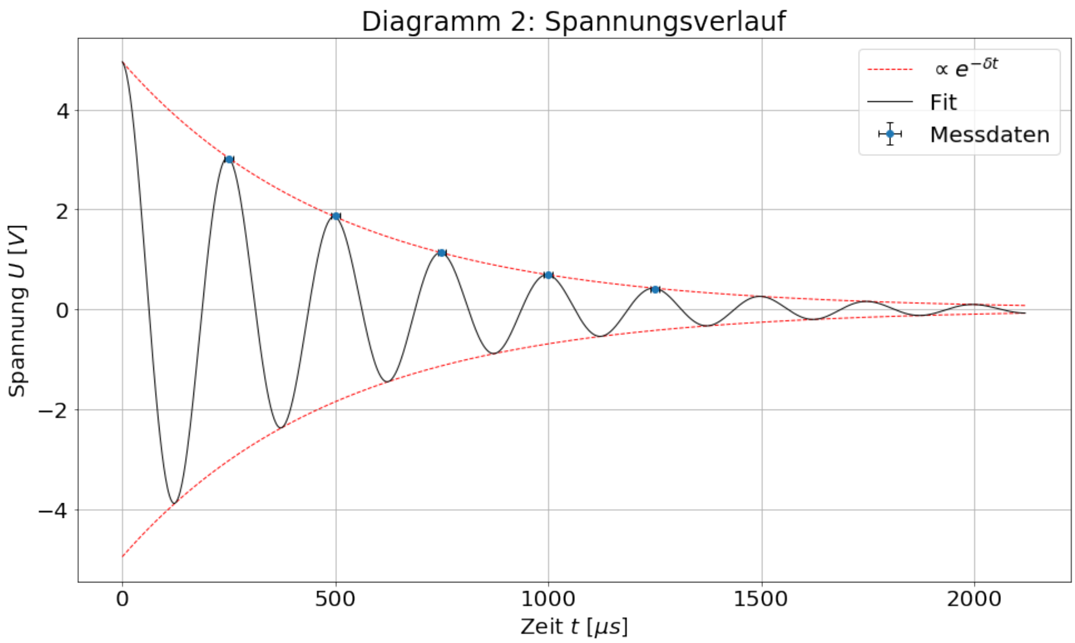


Figure 24: Spannungsverlauf eines Sereinschwingkreises mit einer einer Rechteckigen Eingangsspannung und Eingangsfrequnez f_E = 100 Hz. Man erkennt den gesammten Verlauf. Diagramm 2: zeigt visuell noch einmal die Fitgüte.

[82]:
```
T = 0.25e3
t = np.array([1,2,3,4,5])*T
fehler_t = np.array([0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01])*1e3

U_max = np.array([3.00,1.88,1.13,0.69,0.41])
fehler_U_max = np.array([0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03])

#Fitfunktion
from scipy import odr

def fit_func(p, x):
    (A, d) = p
    return A*np.exp(-d*x)

model = odr.Model(fit_func)

#darzustellende Daten
x = t
y = U_max
delta_x = fehler_t
delta_y = fehler_U_max

#Startparameter
para0 = [10.0, 0.0]

data = odr.RealData(x, y, sx=delta_x, sy=delta_y)
odr = odr.ODR(data, model, beta0=para0 )
out = odr.run()

#1-Sigma
popt = out.beta
```

```python
perr = out.sd_beta

#Sigma-Umgebung
nstd = 2 # um n-Sigma-Umgebung zu zeichnen
popt_top = popt+nstd*perr
popt_bot = popt-nstd*perr

#Wechselspannung
def AC(p, x):
    (A, d) = p
    return A*np.exp(-d*x)*np.cos((x/T)*2*np.pi)

#Plot-Umgebung
x_fit = np.linspace(0, 2120, 1000)
fit = fit_func(popt, x_fit)
fit_AC = AC(popt, x_fit)
fit_top = AC(popt_top, x_fit)
fit_bot = AC(popt_bot, x_fit)

#Plot
fig, ax = plt.subplots(1)
plt.errorbar(x, y, yerr=delta_y, xerr=delta_x, lw=1,ecolor='black', fmt='o', capsize=3, label='Messdaten')
plt.title('Diagramm 2: Spannungsverlauf')
plt.grid(True)
plt.xlabel('Zeit '+r'${t}$'+' '+r'${[s]}$')
plt.ylabel('Spannung '+r'${U}$' + ' '+r'${[V]}$')
plt.plot(x_fit, fit, color='red' , ls='--', lw=1, label=r'${{\propto}e^{-{\delta}t}}$')
plt.plot(x_fit, -fit, color='red', ls='--', lw=1)
plt.plot(x_fit, fit_AC, color='black', lw=1, label='Fit')
plt.legend(loc='best')
plt.show()

#Chi-Quadrat orthogonal
from scipy.stats import chi2

dof = x.size-popt.size
chisquare = np.sum(((fit_func(popt, x)-y)**2)/(delta_y**2+((fit_func(popt, x+delta_x)-fit_func(popt, x-delta_x))/2)**2))
chisquare_red = chisquare/dof
prob = round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100

print('U_0 =', popt[0], ' ± ', perr[0], ' [V]')
print('delta =', popt[1]*1e3, ' ± ', perr[1]*1e3, ' [kHz]')
print('\n')
print('Chi-Quadrat =', chisquare)
print('Freiheitsgrade =', dof)
print('Chi-Quadrat reduziert =', chisquare_red)
print('Wahrscheinlichkeit ein größeres oder gleiches Chi-Quadrat zu erhalten = {value:.0f}'.format(value=prob), '%')
```




```
U_0 = 4.95337117387895  ±  0.0716261314444937  [V]
delta = 1.9697507451971719  ±  0.02475301315273899  [kHz]


Chi-Quadrat = 0.7256646257433017
Freiheitsgrade = 3
Chi-Quadrat reduziert = 0.24188820858110058
Wahrscheinlichkeit ein größeres oder gleiches Chi-Quadrat zu erhalten = 87 %
```

Daraus folgt für die Dämpfungskonstante δ:

$$\delta = 1.97 \pm 0.02 \text{ [kHz]} \tag{41}$$

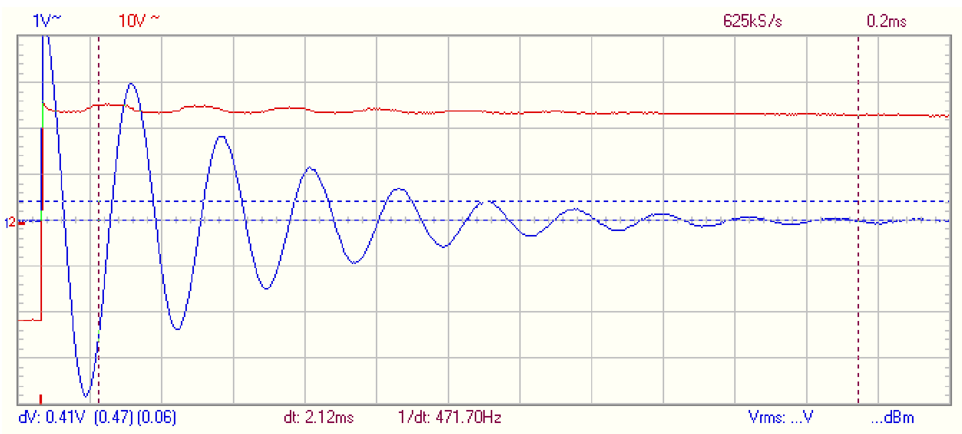


Figure 25: Spannungsverlauf eines Sereinschwingkreises mit einer einer Rechteckigen Eingangsspannung und Eingangsfrequnez f_E = 100 Hz. Man erkennt den gesammten Verlauf. Diagramm 2: zeigt visuell noch einmal die Fitgüte.

Außerdem sollte noch einmal die qualitative Betrachtung der Proportionalität zwischen Widerstand und Dämpfungskonstannte gemacht werden. Dabei gilt weiter Gleichung 27:

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

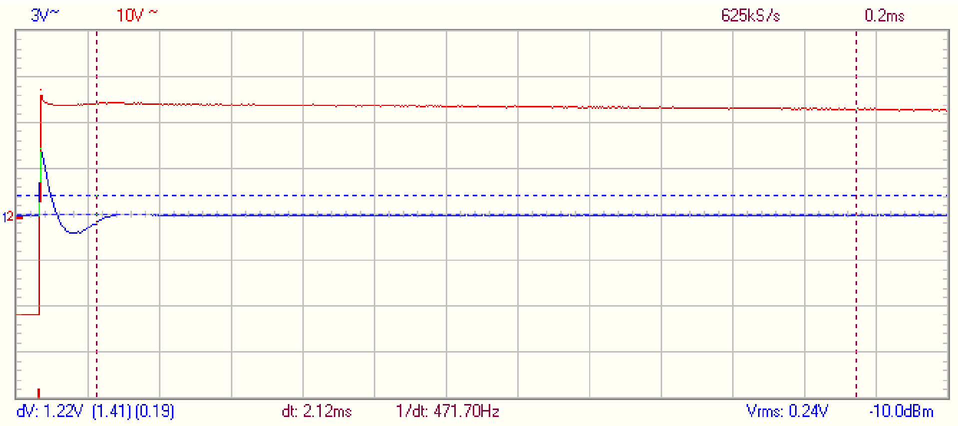


Figure 26: R_0

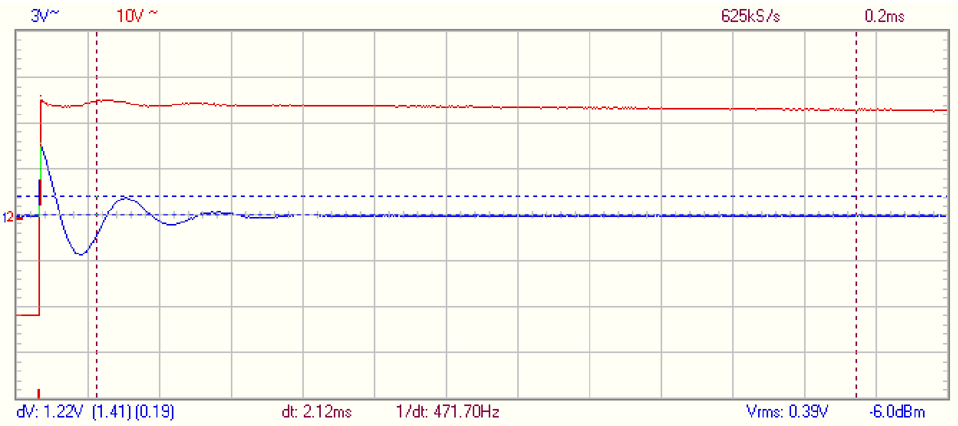


Figure 27: R_1

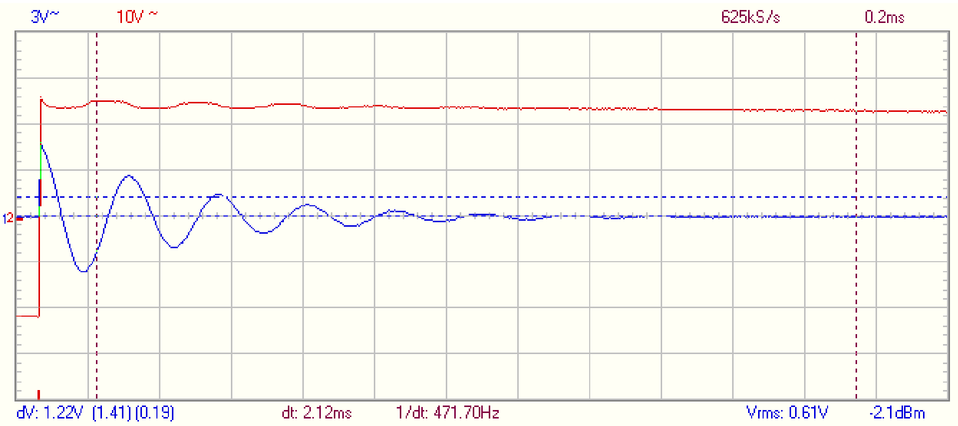


Figure 28: R_2

Figure 29: Vershiedene Spannungsverläufe bei verschiedenen Widerständen R mit $R_0 > R_1 > R_2$ beim 5kΩ-Potentiometer. Wir der Widerstand zu Groß $R = R_0$ so ist keine mehr Schwingung möglich (Abbildung 26)

5.5.1 Bestimmung der Induktivität der Spule

Für einen freien Schwingkreis kann man die Induktivität L auch, aus der Resonanzfrequenz ω_f berechnen:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{42}$$
$$\Rightarrow L_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-(CR\omega)^2}}{2C\omega^2} \tag{43}$$

Hierbei liefert nur L_+ eine physikalische Lösung, die im folgenden betrachten werden. Für den Fehler von L_+ gilt:

$$\Delta L_+ = \sqrt{\left(\frac{d}{dC}L_+\Delta C\right)^2 + \left(\frac{d}{dR}L_+\Delta R\right)^2 + \left(\frac{d}{d\omega}L_+\Delta\omega\right)^2} \tag{44}$$
$$\tag{45}$$
$$\frac{d}{dC}L_+ = -\frac{R^2}{2\cdot\sqrt{1-(CR\omega)^2}} - \frac{1+\sqrt{1-(CR\omega)^2}}{2C^2\omega^2} \tag{46}$$
$$\frac{d}{dR}L_+ = -\frac{CR^2}{2\cdot\sqrt{1-(CR\omega)^2}} \tag{47}$$
$$\frac{d}{d\omega}L_+ = -\frac{CR^2}{2\omega\cdot\sqrt{1-(CR\omega)^2}} - \frac{1+\sqrt{1-(CR\omega)^2}}{C\omega^3} \tag{48}$$

Für den Aufbau hatten wir dabei C = (47.0 ± 4.7) nF und R = (47.0 ± 2.4) Ω. Für ω gilt dabei:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$
$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T^2}\Delta T$$

somit erhalten wir:

$$L_1 = (34 \pm 4)mH$$

Für einen freien Schwingkreis kann man die Induktivität L auch, aus der Resonanzfrequenz ω_f berechnen:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{49}$$
$$\Rightarrow L_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-(CR\omega)^2}}{2C\omega^2} \tag{50}$$

Hierbei liefert nur L_+ eine physikalische Lösung, die im folgenden betrachten werden. Für den Fehler von L_+ gilt:

$$\Delta L_+ = \sqrt{\left(\frac{d}{dC}L_+\Delta C\right)^2 + \left(\frac{d}{dR}L_+\Delta R\right)^2 + \left(\frac{d}{d\omega}L_+\Delta\omega\right)^2} \tag{51}$$

$$\tag{52}$$

$$\frac{d}{dC}L_+ = -\frac{R^2}{2\cdot\sqrt{1-(CR\omega)^2}} - \frac{1+\sqrt{1-(CR\omega)^2}}{2C^2\omega^2} \tag{53}$$

$$\frac{d}{dR}L_+ = -\frac{CR^2}{2\cdot\sqrt{1-(CR\omega)^2}} \tag{54}$$

$$\frac{d}{d\omega}L_+ = -\frac{CR^2}{2\omega\cdot\sqrt{1-(CR\omega)^2}} - \frac{1+\sqrt{1-(CR\omega)^2}}{C\omega^3} \tag{55}$$

Für den Aufbau hatten wir dabei $C = (47.0 \pm 4.7)$ nF und $R = (47.0 \pm 2.4)\ \Omega$. Für ω gilt dabei:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{56}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T^2}\Delta T \tag{57}$$

[60]:
```
#Resonanzfrequenz aus Aufgabe 4
L1_2=1/(omega_res[2]**2*C3)
L1_2_err=L1_2*np.sqrt((2*omega_res_err[2]/omega_res[2])**2+(C3_err/C3)**2)

print('Aus der in Aufgabenteil 4 ermittelten Resonanzfrequenz folgt:')
print('L1 = ' + str(L1_2) + ' ± ' + str(L1_2_err) + ' H')
```

```
Aus der in Aufgabenteil 4 ermittelten Resonanzfrequenz folgt:
L1 = 0.03368390413641549 ± 0.0037659749698305696 H
```

$$L_1 = 34 \pm 4\ [\text{mH}]$$

5.5.2 Logarithmisches Dekrement

Aus der Abnahme der Schwingungsamplituden kann man zudem das logarithmische Dektrement Λ und daraus den Gesamtwiderstand $R + R_V$ berechnen. Das logarithmische Dektrement Λ ist definiert als

$$\Lambda = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} \tag{58}$$

$$\Delta\Lambda = \sqrt{\left(\frac{\Delta A_n}{A_n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A_{n+1}}{A_{n+1}}\right)^2} \tag{59}$$

[16]:
```
A=np.array([3.00,1.88,1.13,0.69,0.41]) #Volt
A_err=0.03*np.ones(5)

Lambda=[]
Lambda_err=[]
for i in range(4):
    a = np.log(A[i]/A[i+1])
    b = np.sqrt((A_err[0]/A[i])**2+(A_err[0]/A[i+1])**2)
    Lambda.append(a)
```

```
    Lambda_err.append(b)
    print('Lambda_%d,%d = '%(i+1,i+2) + str(round(a,3))
          + ' ± ' + str(round(b,3)))

Lambda_err=np.array(Lambda_err)
Lambda_mean=np.mean(Lambda)
Lambda_mean_err=1/3*np.sum(Lambda_err**2)**0.5
Lambda_mean_std=np.std(Lambda)/np.sqrt(len(Lambda))
print('\n')
print('Das logarithmische Dekrement berechnet sich zu:')
print('Lambda = ' + str(Lambda_mean) + ' ± ' + str(Lambda_mean_err+Lambda_mean_std))
```

```
Lambda_1,2 = 0.467 ± 0.019
Lambda_2,3 = 0.509 ± 0.031
Lambda_3,4 = 0.493 ± 0.051
Lambda_4,5 = 0.521 ± 0.085


Das logarithmische Dekrement berechnet sich zu:
Lambda = 0.49755260198797335 ± 0.04517685550437725
```

Mit den fünf Messwerten erhält man die folgenden Dekremente Λ:

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= 0.467 \pm 0.019 \\ \Lambda_{23} &= 0.509 \pm 0.031 \\ \Lambda_{34} &= 0.493 \pm 0.051 \\ \Lambda_{45} &= 0.521 \pm 0.085 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Lambda = 0.498 \pm 0.045$$

5.5.3 Gesamtwiderstand

Für den Gesamtwiderstand R_{ges} wissen wir:

$$R_{ges} = R + R_V = \frac{\Lambda \cdot 2L}{T} \tag{60}$$

$$\Delta R_{ges} = \sqrt{\left(\frac{2L}{T}\Delta\Lambda\right)^2 + \left(\frac{2\Lambda}{T}\Delta L\right)^2 + \left(\frac{\Lambda \cdot 2L}{T^2}\Delta T\right)^2} \tag{61}$$

[49]:
```
T=0.25e-3
T_err=0.01e-3
R_ges3=2*L1_2*Lambda_mean/T
R_ges3_err=R_ges3*np.sqrt((L1_2_err/L1_2)**2+(Lambda_mean_err/
 ↪Lambda_mean)**2+(T_err/T)**2)
R_ges3_std=R_ges3*np.sqrt((Lambda_mean_std/Lambda_mean)**2)

print('Der damit ermittelte Gesamtwiderstand berechnet sich zu:')
print('R_ges = ' + str(round(R_ges3,3)) + ' ± ' +␣
 ↪str(round(R_ges3_err+R_ges3_std,3)))
```

```
Der damit ermittelte Gesamtwiderstand berechnet sich zu:
R_ges = 134.076 ± 21.22
```

$$R_{ges} = 134.076 \pm 21.220\ \Omega$$

5.5.4 Vergleich mit den Ergebnissen aus Aufgabe 4

[50]:
```
diff_R_ges1=np.abs(R_ges[2]-R_ges3)
diff_R_ges1_err=np.sqrt((R_ges_err[2])**2+(R_ges3_err)**2)

diff_R_ges2=np.abs(R_ges2[2]-R_ges3)
diff_R_ges2_err=np.sqrt((R_ges2_err[2])**2+(R_ges3_err)**2)

#Den Vergleich bezüglich des statistischen Fehlers halte ich nicht für sinnvoll, da␣
↪der stat. Fehler so gering ist.

print('Für die Differenz zu den beiden Werten aus Aufgabe 4 folgt somit:')
print('diff(R_ges1) = '+str(diff_R_ges1)+' ± '+str(diff_R_ges1_err)+
      ' \n=> Sigma= '+str(diff_R_ges1/diff_R_ges1_err))
print('diff(R_ges2) = '+str(diff_R_ges2)+' ± '+str(diff_R_ges2_err)+
      ' \n=> Sigma= '+str(diff_R_ges2/diff_R_ges2_err))
```

```
Für die Differenz zu den beiden Werten aus Aufgabe 4 folgt somit:
diff(R_ges1) = 15.890229449064748 ± 29.49378004182303
=> Sigma= 0.5387654422909489
diff(R_ges2) = 7.0490861584688815 ± 21.852350470382454
=> Sigma= 0.322577938150079
```

$$R_{ges}^{\Lambda} = 134 \pm 21\,\Omega \tag{62}$$

$$R_{ges}^{\Delta\omega} = 149 \pm 5\,\Omega \tag{63}$$

$$\Rightarrow 0.54\sigma \tag{64}$$

$$R_{ges}^{U_A} = 127 \pm 12\,\Omega \tag{65}$$

$$\Rightarrow 0.32\sigma \tag{66}$$

5.6 Teil 6: Resonanzüberhöhung

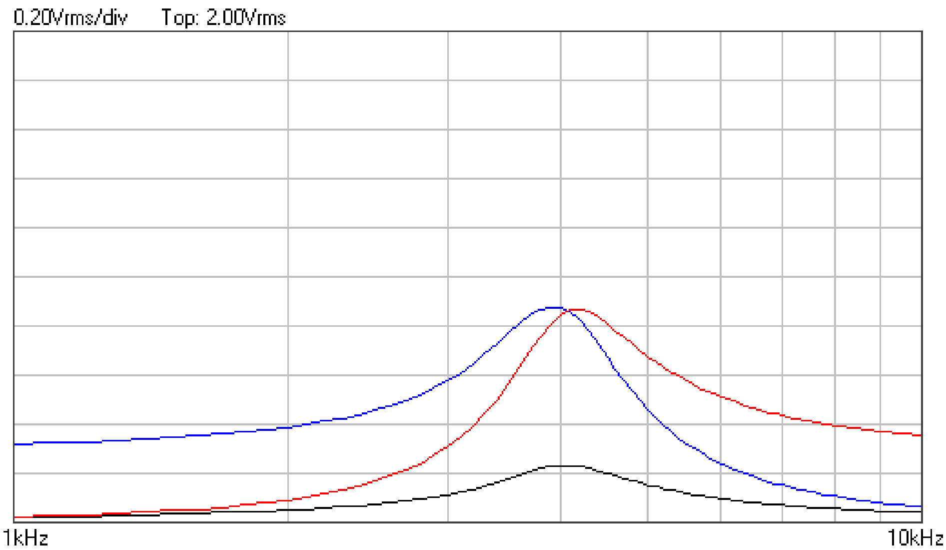


Figure 30: Frequenzgang des Serienschwingkreises bei verschiedenen Spannungsabgriffen ($R = 220 \pm 10$ [kΩ] (schwarz), $C = 47.0 \pm 4.7$ [nF] (blau), $L = 34 \pm 4$ [mH] (rot)

Aus den Kenngrößen C, R und L lässt sich die Resonanzfrequenz $\omega_R = 2\pi f_R$ des Schwingkreises bestimmen.

$$f_R = \frac{\omega_R}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{67}$$

$$\Delta f_R = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{CL^3}}\Delta L\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{C^3L}}\Delta C\right)^2} \tag{68}$$

Außerdem gilt für die Resonanzfrequenz von Kondensator f_C und Spule f_L:

$$f_C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(\omega_R)^2 - (2\delta)^2} \tag{69}$$

$$f_L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(\omega_R)^2 + (2\delta)^2} \tag{70}$$

setzt man 37 ein so folgt:

$$f_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2}} \tag{71}$$

$$\Delta f_C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\left(\frac{R^2}{L^3} - \frac{1}{CL^2}\right)\Delta L}{2\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{2C^2L\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}}}\right)^2 + \left(\frac{R \cdot \Delta R}{2L^2\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{C^2}{2L^2}}}\right)^2} \tag{72}$$

$$f_L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{2L^2}} \tag{73}$$

$$\Delta f_L = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{1}{C^2}\right)\Delta L}{2\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{2C^2L\sqrt{\frac{1}{CL} + \frac{R^2}{2L^2}}}\right)^2 + \left(\frac{R \cdot \Delta R}{2L^2\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{l^2}{2L^2}}}\right)^2} \tag{74}$$

5.6.1 Resonanzfrequenzen am Serienschwingkreis

Mit den gegebenen Kenngrößen unseres Aufbaus:

$$C = 47.0 \pm 4.7 \text{ [nF]}$$
$$R = 290 \pm 17 \text{ [}\Omega\text{]] (aus Teil 4)}$$
$$L = 34 \pm 4 \text{ [mH] (aus Teil 5)}$$

[83]:
```
#Theoretischer Wert
omega_res_R_theo=1/np.sqrt(L1*C3)
omega_res_R_theo_err=omega_res_R_theo*np.sqrt((0.5*C3_err/C3)**2+(0.5*L1_err/L1)**2)
omega_res_R_theo_std=omega_res_R_theo*np.sqrt((0.5*L1_std/L1)**2)

print('Die theoretische Resonanzfrequenz omega_R ergibt sich aus dem Aufbau zu: ')
print('f_res_R_theo = ' + str(omega_res_R_theo/(2*np.pi)) + ' ± ' +␣
 ↪str(omega_res_R_theo_err/(2*np.pi) + omega_res_R_theo_std/(2*np.pi)) + ' s^-1')
print()
omega_res_C_theo=np.sqrt(omega_res_R_theo**2-0.5*(R_ges[1]/L1)**2)
omega_res_C_theo_err=0.5/omega_res_C_theo*np.
 ↪sqrt((2*omega_res_R_theo*omega_res_R_theo_err)**2+
                                                  (R_ges[1]*R_ges_err[1]/
 ↪L1**2)**2+(R_ges[1]**2*L1_err/L1**3)**2)
```

```
omega_res_C_theo_std=0.5/omega_res_C_theo*np.
 ↪sqrt((2*omega_res_R_theo*omega_res_R_theo_std)**2+
                                                    (R_ges[1]**2*L1_std/L1**3)**2)

print('Die theoretische Resonanzfrequenz omega_C ergibt sich aus dem Aufbau zu: ')
print('f_res_C_theo = ' + str(omega_res_C_theo/(2*np.pi)) + ' ± ' +␣
 ↪str(omega_res_C_theo_err/(2*np.pi) + omega_res_C_theo_std/(2*np.pi)) + ' s^-1')
print()

omega_res_L_theo=np.sqrt(omega_res_R_theo**2+0.5*(R_ges[1]/L1)**2)
omega_res_L_theo_err=0.5/omega_res_L_theo*np.
 ↪sqrt((2*omega_res_R_theo*omega_res_R_theo_err)**2+
                                                    (R_ges[1]*R_ges_err[1]/
 ↪L1**2)**2+(R_ges[1]**2*L1_err/L1**3)**2)
omega_res_L_theo_std=0.5/omega_res_L_theo*np.
 ↪sqrt((2*omega_res_R_theo*omega_res_R_theo_std)**2+
                                                    (R_ges[1]**2*L1_std/L1**3)**2)

print('Die theoretische Resonanzfrequenz omega_L ergibt sich aus dem Aufbau zu: ')
print('omega_res_L_theo = ' + str(omega_res_L_theo/(2*np.pi)) + ' ± ' +␣
 ↪str(omega_res_L_theo_err/(2*np.pi) + omega_res_L_theo_std/(2*np.pi)) + ' s^-1')
```

```
Die theoretische Resonanzfrequenz omega_R ergibt sich aus dem Aufbau zu:
f_res_R_theo = 3886.666666666667 ± 327.335410388085 s^-1

Die theoretische Resonanzfrequenz omega_C ergibt sich aus dem Aufbau zu:
f_res_C_theo = 3777.2563161344747 ± 338.83583302861956 s^-1

Die theoretische Resonanzfrequenz omega_L ergibt sich aus dem Aufbau zu:
omega_res_L_theo = 3993.0802994402434 ± 320.52192654864814 s^-1
```

[84]:
```
#Resonanzfrequenz aus Abgriff an Widerstand, Kondensator und Spule
omega_res_R=2*np.pi*4.06e3
omega_res_C=2*np.pi*3.93e3
omega_res_L=2*np.pi*4.19e3

omega_res2_err=2*np.pi*0.05e3
```

5.6.2 Vergleich der Werte

[87]:
```
diff_omega_R=np.abs(omega_res_R_theo-omega_res_R)
diff_omega_C=np.abs(omega_res_C_theo-omega_res_C)
diff_omega_L=np.abs(omega_res_L_theo-omega_res_L)

diff_omega_R_err=np.sqrt(omega_res_R_theo_err**2+omega_res2_err**2)
diff_omega_C_err=np.sqrt(omega_res_C_theo_err**2+omega_res2_err**2)
diff_omega_L_err=np.sqrt(omega_res_L_theo_err**2+omega_res2_err**2)

print('Der Vergleich aus Messwert und Theorie liefert:')
print()
print('omega_R = ' + str(diff_omega_R) + ' ± ' + str(diff_omega_R_err) + ' ± ' +␣
 ↪str(diff_omega_R_std) +
      '\n=> Sigma = '+str(diff_omega_R/diff_omega_R_err))
print()
print('omega_C = ' + str(diff_omega_C) + ' ± ' + str(diff_omega_C_err) + ' ± ' +␣
 ↪str(diff_omega_C_std) +
      '\n=> Sigma = '+str(diff_omega_C/diff_omega_C_err))
```

```
print()
print('omega_L = ' + str(diff_omega_L) + ' ± ' + str(diff_omega_L_err) + ' ± ' +␣
↪str(diff_omega_L_std) +
      '\n=> Sigma = '+str(diff_omega_L/diff_omega_L_err))
```

```
Der Vergleich aus Messwert und Theorie liefert:

omega_R = 1089.085453244461 ± 1792.2418204423836 ± 292.2162813989154
=> Sigma = 0.607666577591432

omega_C = 959.7168702283525 ± 1853.2623824197237 ± 302.52768690933766
=> Sigma = 0.5178526685332554

omega_L = 1237.2829692512678 ± 1756.052641790869 ± 286.17621747903183
=> Sigma = 0.7045819355332388
```

Kenngröße	f_R^{theo} [kHz]	f_R^{mes} [kHz]	σ-Abweich
$R_{ges} = 290 \pm 17\,\Omega$	3.89 ± 0.33	4.06 ± 0.05	0.61
$C = 47.0 \pm 4.7$ [nF]	3.78 ± 0.34	3.93 ± 0.05	0.52
$L_1 = 34 \pm 4$ [mH]	3.99 ± 0.32	4.19 ± 0.05	0.70

5.7 Teil 7: Bandpassfilter

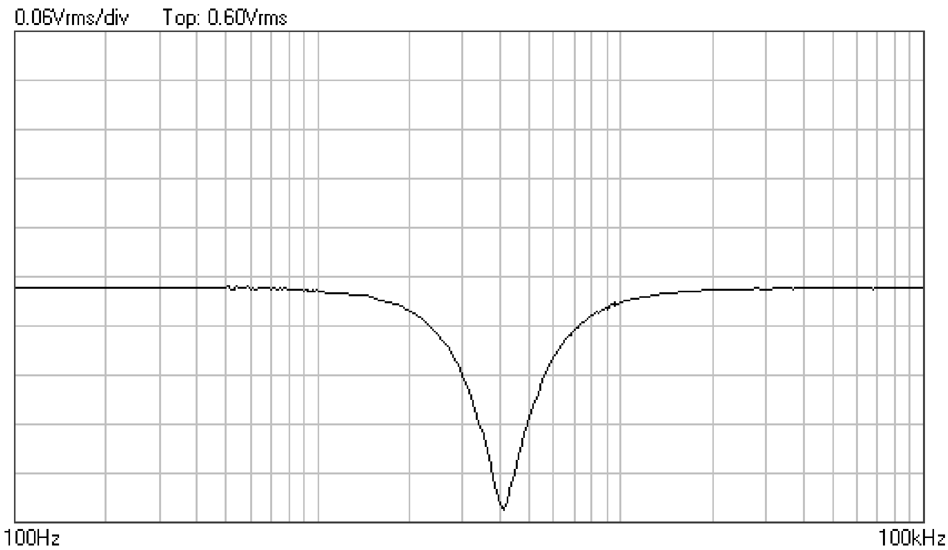


Figure 31: Frequenzgang des Parralelschwingkreises bei Spannungsabgriff über R ($R = 220 \pm 10$ [kΩ] (schwarz), $C = 47.0 \pm 4.7$ [nF] (blau), $L = 34 \pm 4$ [mH] (rot)

[107]:
```
omega_res_bs_theo=omega_res[0]
omega_res_bs_theo_err=omega_res_err[0]
#omega_res_bs_theo=omega_res_R_theo
#omega_res_bs_theo_err=omega_res_R_theo_err


#Messwert
omega_res_bs=2*np.pi*4.11e3
omega_res_bs_err=0.04e3

print(omega_res_bs_theo/(2*np.pi), omega_res_bs_theo_err/(2*np.pi))
```

```
3820.0 100.0
```

5.7.1 Vergleich der Werte

[105]:
```
diff_omega_bs=np.abs(omega_res_bs_theo-omega_res_bs)
diff_omega_bs_err=np.sqrt(omega_res_bs_err**2+omega_res_bs_theo_err**2)

print('Der Vergleich aus Messwert und Theorie liefert:')
print('omega_bs = ' + str(diff_omega_bs) + ' ± ' + str(diff_omega_bs_err) + ' s^-1'+
      ' \n=> Sigma= '+str(diff_omega_bs/diff_omega_bs_err))
```

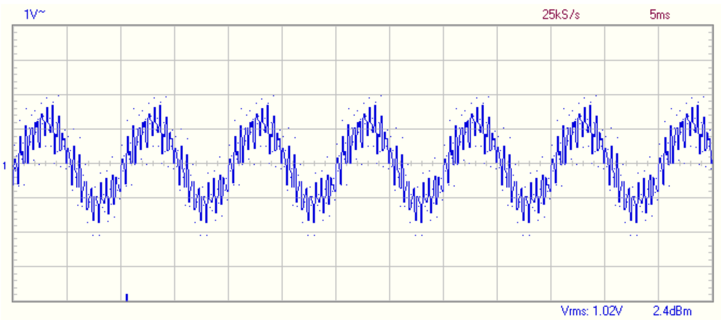
```
Der Vergleich aus Messwert und Theorie liefert:
omega_bs = 1822.1237390820788 ± 629.5904828089242 s^-1
=> Sigma= 2.8941411740416654
```

Bandpassfilter:

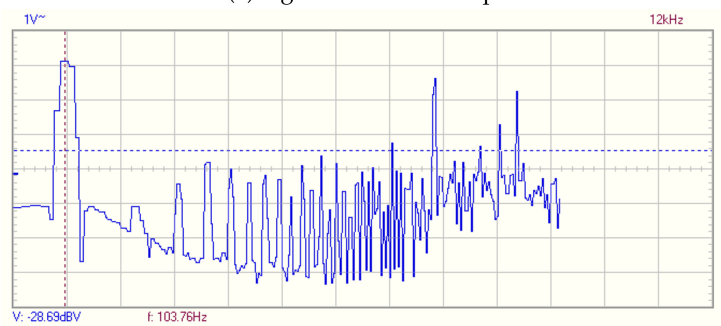
$$f_R^{Bandpass} = f_R^{Serienschwingkreis} \text{ (theoretisch)} \tag{75}$$
$$\Rightarrow f_R^{theo} = 3.82 \pm 0.10 \text{ [kHz]} \tag{76}$$
$$f_R^{mes} = 4.11 \pm 0.04 \text{ [kHz]} \tag{77}$$
$$\Rightarrow 2.89\sigma \tag{78}$$

5.8 Teil 8: Signalumformung

In diesem Teil wurd ein Dignal angelegt, dass drei unterschiedliche Frequenzen deutlich zeigt. Dieses lässt sich in (Abbildung 32) gut erkennen. Dort ist das Spektrum des anliegenden Rohsignals (Dämpfung) aufgezeichnet worden.



(a) Signal am Oszilloskop

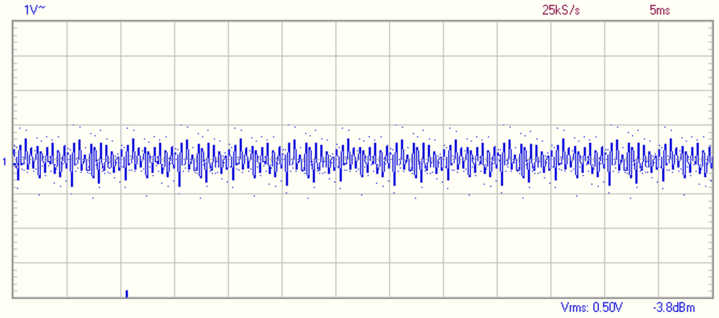


(b) Signal im spectrum analyzer

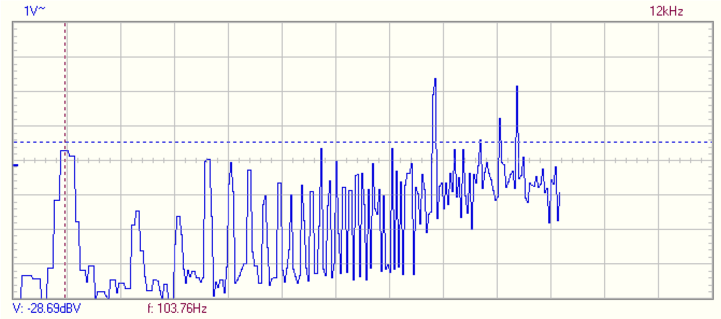
Figure 32: Ungefiltertes Rohsignal

Es sind die drei Peaks des Signal gut zu sehen. Das Ziel ist es nun die verschiedenen Pässe und Filter zu beobachten und ihre Wirkungsweise zu erkennen. Als erstes wurde dann ein Hochpass dazugeschaltet (Abbildung 33).

Es ist zu sehen, wie das erste Signal gedämpft wird da der Peak kleiner geworden ist. Das erste Peak war der mit der niedrigster Frequenz, es war also zu erwarten, dass dieser vom Hochpass rausgefiltert



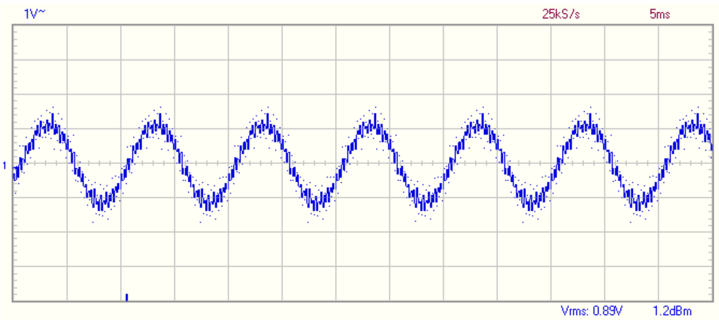
(a) Signal am Oszilloskop



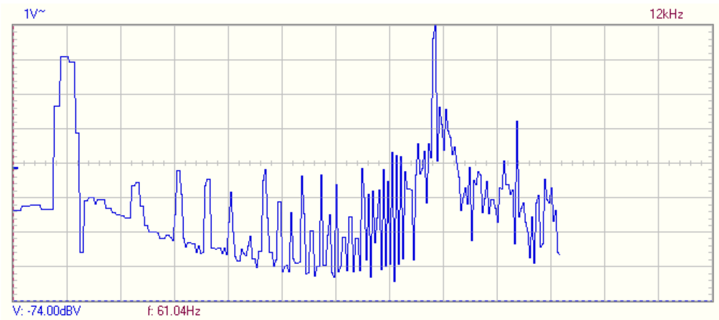
(b) Signal im spectrum analyzer

Figure 33: Gefiltertes Signal am Hochpass

wird. Auch die anderen beiden Signale haben eine kleine Dämpfung erhalten, dies ist unbeabsichtigt und ließ sich leider nicht vermeiden. Als nächstes wurde der Tiefpass verwendet. Dort ist sehr deutlich erkannbar, dass das Dritte Signal, also das mit der höchsten Frequenz, am stärksten gedämpft wurde (Abbildung 34)



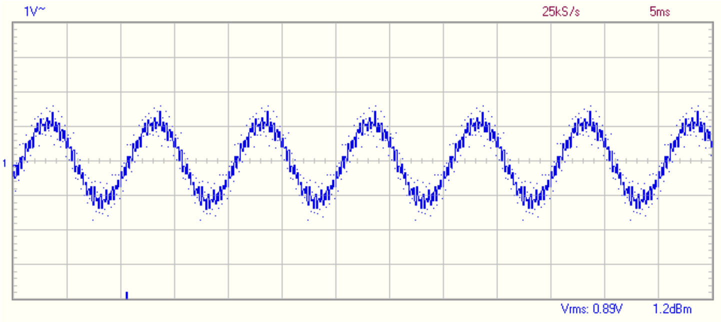
(a) Signal am Oszilloskop



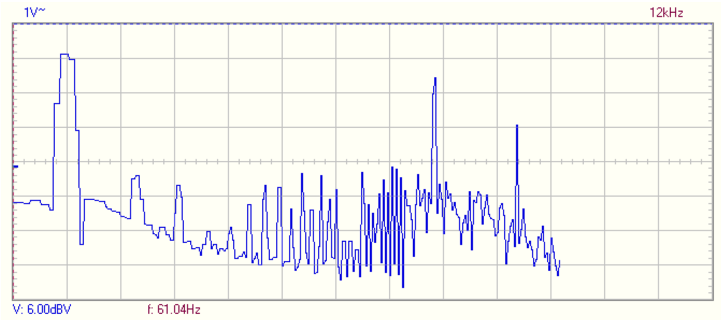
(b) Signal im spectrum analyzer

Figure 34: Gefiltertes Signal am LC-Tiefpass

Auch hier ist eine leichtet Dämpfung der anderen beiden Signale bemerkbar, aber die ist im Vergleich zur Abschwächung des höchsten Signals nicht relevant. Als nächstes wurde mit einem hohen Widerstand $R = 1000\Omega$ benutzt (Abbildung 35).

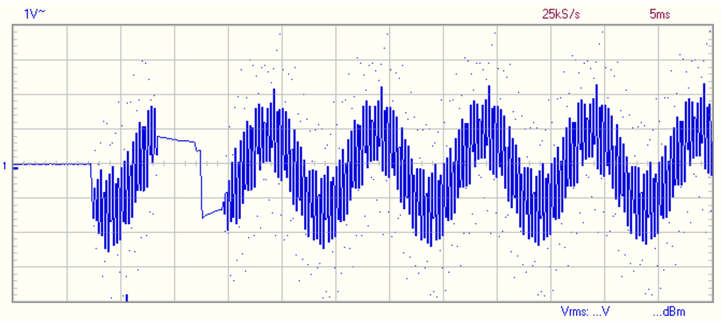


(a) Signal am Oszilloskop

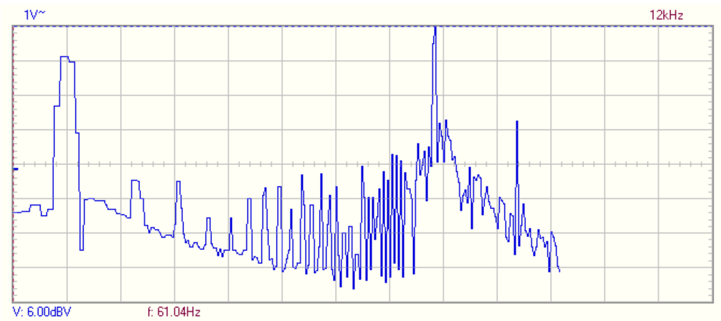


(b) Signal im spectrum analyzer

Figure 35: Gefiltertes Signal am $1k\Omega$ - Bandpassfilter



(a) Signal am Oszilloskop



(b) Signal im spectrum analyzer

Figure 36: Gefiltertes Signal am 47Ω - Bandpassfilter

Die Abschwächung ist dort allerdings kaum zu erkennen. Man kann sie ungefähr erahnen, aber erst richtig deutlich wird die Funktionsweise des Bandpassfilters, wenn der kleine Widerstand $R = 47\Omega$ verwendet wird. Hier sind nun sowohl das tiefe als auch das Hohe Signal deutlich abgeschwächt und das mittlere Signal, welches isoliert werden sollte, sticht deutlich heraus (Abbildung 36)

Für die quantitative Betrachtung wurden die Amplituden A beim Hoch- und Tiefpass, mit dem Marker in dBV. Aus der Anleitung wissen wir:

$$L_P = 10 \cdot \log \frac{P_A}{P_E} \tag{79}$$

mit der Aus- bzw. Eingangsamplitude P_A bzw. P_E unter der Bedingung $R_E = R_A$ folgt:

$$L_U = 20 \log \frac{U_A}{U_E} \tag{80}$$

$$\Rightarrow U_A = U_E \cdot 10^{\frac{L_U}{20}} \tag{81}$$

also:

$$\frac{U_{A_1}}{U_{A_2}} = 10^{\frac{L_{U_1} - L_{U_2}}{20}} \tag{82}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{A_1}}{P_{A_2}} = 10^{\frac{L_{P_1} - L_{P_2}}{10}} \tag{83}$$

$$\tag{84}$$

Aus den generierten Ausdrucken wird die Schaltung mit der besten Filterung des 4 kHz-Signals ausgewählt.

$\rightarrow$ Am besten ist die Filterung für den Bandpassfilter mit $R = 47\ \Omega$.

5.8.1 Vergleich der Dämpfung des $4\ kHz$ - Signals

[108]:
```
#Umrechnung von dBV in absolute Größen gemäß Formel 68 des Skripts:
#U[V]=1V_rms*10**(L_U[dBV]/20)

#Effektivwerte der Spannungen der drei Frequenzen für die fünf Schaltungen (s1:␣
↪reines Signal, s2: Hochpassfilter,
#s3: Tiefpassfilter (LC), s4: Bandpassfilter (R=1e3 Ohm), s5: Bandpassfilter (R=47␣
↪Ohm))
#f1=100.71 Hz, f2=3.6e3 Hz, f3=8e3 Hz

s1=10**(1/20*np.array([-3.06,-7.75,-11.5]))
s2=10**(1/20*np.array([-31.2,-10.6,-12.4]))
s3=10**(1/20*np.array([-3.1,6.0,-21.8]))
s4=10**(1/20*np.array([-2.8,-9.3,-23.4]))
s5=10**(1/20*np.array([-2.8,6.0,-20.9]))

#Die Verhältnisse zum reinen Signal
v1=s2/s1
v2=s3/s1
v3=s4/s1
v4=s5/s1

print("Verhältnisse zum reinen Signal:")
print(v1)
print(v2)
print(v3)
```

```
print(v4)
print()

#Zum Vergleich der Schaltungen werden alle Verhältnisse so "normiert", dass das␣
↪4kHz-Signal ungedämpft erscheint
v1_n=v1/v1[1]
v2_n=v2/v2[1]
v3_n=v3/v3[1]
v4_n=v4/v4[1]

print('"Normierte" Verhältnisse zum reinen Signal:')
print(v1_n)
print(v2_n)
print(v3_n)
print(v4_n)
```

```
Verhältnisse zum reinen Signal:
[0.03917419 0.72027775 0.90157114]
[0.99540542 4.86967525 0.30549211]
[1.03038612 0.8365656  0.25409727]
[1.03038612 4.86967525 0.33884416]

"Normierte" Verhältnisse zum reinen Signal:
[0.05438761 1.         1.25169927]
[0.20440899 1.         0.06273357]
[1.23168599 1.         0.30373861]
[0.21159237 1.         0.0695825 ]
```

5.8.2 Vergleich des 100 Hz-Signals beim Hochpass mit Aufgabenteil 3

[109]:
```
print("Durch den Hochpass wird das 100Hz-Signal auf "+str(round(100*v1[0],2))+"%␣
↪gedämpft.")

#Die in Aufgabe 3 gemessene Dämpfung wird aus Diagramm 6 abgelesen (-28.5dB)
v_auf3=10**(-28.5/20)
print("In Aufgabe 3 ergab sich eine Dämpfung von ca. "+str(round(100*v_auf3,2))+"%.
↪")
print()

#Vergleich der beiden Werte
#In Aufgabe 8 war keine Fehlerabschätzung notwendig, die Ablesung aus Diagramm 6
#hat einen geschätzten Fehler von 1dB.
print("Mit einem Ablesefehler aus dem Diagramm von 1dB folgt:")
#Damit ergibt sich als 1 Sigma Intervall:
v_auf3_1=10**(-29.5/20)
v_auf3_2=10**(-27.5/20)
print("Das 1 Sigma Intervall geht von "+str(round(100*v_auf3_1,2))+"% bis␣
↪"+str(round(100*v_auf3_2,2))+"%.")
print("Folglich stimmen die Werte im 1 Sigma Intervall überein, da␣
↪"+str(round(100*v1[0],2))+
      "% Element des Intervalls ist.")
```

```
Durch den Hochpass wird das 100Hz-Signal auf 3.92% gedämpft.
In Aufgabe 3 ergab sich eine Dämpfung von ca. 3.76%.
Mit einem Ablesefehler aus dem Diagramm von 1dB folgt:
Das 1 Sigma Intervall geht von 3.35% bis 4.22%.
Folglich stimmen die Werte im 1 Sigma Intervall überein, da 3.92% Element des
Intervalls ist.
```

6 Diskussion

Der Versuch diente der näheren Betrachtung von RLC-Gliedern, welche in der experimentellen Physik und Messtechnik im Allgemeinen eine wesentliche Rolle erfüllen.

6.1 Zeitkosntante τ

Im ersten Teil wurde die Zeitkonstante τ verschiedener RC-Glieder bestimmt. Die Werte sind in Tabelle **??** zusammengetragen, es treten keine signifikanten Abweichungen auf:

τ_{theo} [μs]	τ_{exp} [μs]	σ-Abweichung
470 ± 53	390 ± 29	1.34
47.0 ± 5.3	54.9 ± 0.7	1.48
47.0 ± 5.3	48.2 ± 0.7	0.22
47.0 ± 5.3	39.1 ± 0.7	1.49

6.2 Integrator und Differentiator

Im folgenden Versuchsteil wurde das RC-Glied als Integrator und Differentiator untersucht. Man konnte sich leicht erschließen, dass die Abgebildeten Graphen die Ableitung bzw. Integration und viceversa, voneinander waren. Dabei war es besonders interessant wie "simpel" man auch komplexere Funktionen darstellen und integrieren und differentieren konnte. Dies verdeutlicht noch einmal die wichtigkeit solch analoger Technologien.

6.3 Frequenzgang RC-GLied

Hier wurde nun der Frequenzagang eines Hoch- und Tiefpasses aufgenommen (Abbildung 22 und 21). Es wurden daraufhin am Oszilloskop die Grenzfrequenzen bestimmt und mit den numerisch bestimmten, sowie den erwarteten theoretischen Werten untereinander verglichen.

$$
\begin{aligned}
f_{gr}^{mes} &= 3.25 \pm 0.02 \text{ [kHz]} \\
f_{gr}^{fit} &= 3.49 \pm 0.09 \text{ [kHz]} \\
&\Rightarrow 1.08\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{gr}^{theo} &= 3.39 \pm 0.38 \text{ [kHz]} \\
f_{gr}^{mes} &= 3.25 \pm 0.02 \text{ [kHz]} \\
&\Rightarrow 0.32\sigma
\end{aligned}
$$

Auch hier sind die Abweichungen unter dem 1σ-Bereich und sommit nicht relevant.

6.4 RLC-Sereinschwingkreis

Hier wurden zwei Ziele verfolgt, zum einem wurde sollte die Induktivität der Spule L_1 bestimmt werden. und zum anderen auch die Verlustwiderstände im Schwingkreis genauer untersucht werden. Diese werden durch z.B. von Kondensator und Spule hervorgerufen, aber auch Kabel und das Oszilloskop, und andere Messgeräte tragen nicht unisignifikant dazu bei das Verluste im Schwingkreis auftreten. Die Ergebnisse sind hier noch einmal aufgeführt:

$$L_1 = 35.7 \pm 4.6 \text{ [mH]}$$

R [Ω]	R_{ges} [Ω]	R_V [Ω]
1000	1120 ± 76	120 ± 57
220	290 ± 17	70 ± 13
47	149 ± 5	103 ± 5

R [Ω]	R_{ges} [Ω]	R_V [Ω]
1000	1041 ± 63	41 ± 39
220	290 ± 17	70 ± 13
47	127 ± 12	80 ± 11

Man kann an dieser Messung gut erkennen das der Verlustwiderstand R_V von dem Ohmschen Widerstand R Abhängt. Auch hier sind die Messwerte allesamt sinnvoll und innerhalb ihrer relativ großen Messfehler miteinander zu vereinen. An dieser Stelle sollte noch einmal auf fehlerhafte Protokollierung am Versuchstag eingegangen werden. Es wurden falsche Werte für die Bandbreite der Peaks $\Delta\omega$ im Frequenzgang des RLC-Sereinschwingkreises, aufgenommen. (Aufgabe 3 im Messprotokoll) die Werte sind wahrscheinlich falsch abgelesen worden. Dies ist uns erst im Nachhinein aufgefallen als wir negative Verlustwiderstände erhielten. Die nun verwendeten Bandbreiten $\Delta\omega$ wurden den gespeicherten Bildern des Oszilloscops (Abbildung 23) entnommen und mittels des Bildbearbeitungsprogramms ADOBE Photoshop CC die Breite der Peaks pixelweise aufgenommen und den mittels eines einfachen Dreisatzes in [kHz] angegeben. Diese Messung entspricht keinem wissenschaftlichen Standard, erfüllt aber ihren Zweck, wenn man genügend "Liebe zum Detail" beiträgt. Die erhaltenen Werte sind am Ende doch den Erwartungen entsprechend und resultierten nicht in signifikante Abweichungen.

6.5 Dämpfungskonstante eines RLC-Schwingkreises

Hier wurde, auch wenn nicht explizit danach gefragt wurde, die Dämpfungskonstante δ bestimmt. Dabei wurde eine harmonosche gedämpfte Schwingung als Fitfunktion verwendet und somit die folgende Dämpfungskonstante δ gefunden:

$$\delta = 1.97 \pm 0.02 \text{ [kHz]}$$

Eigentlich gefragt waren lediglich noch einmal die Induktivität L_1 der verwendeten Spule zu bestimmen, sowie noch einmal den Gesamtwiderstand $R_{ges} = R + R_V$ im 47Ω-Schwingkreis noch einmal über das Logarythmische Dekrement Λ zu ermitteln.

$$\Lambda = 0.498 \pm 0.045$$
$$R_{ges} = R + R_V = 134.08 \pm 21.22\ \Omega$$

und die Induktivität aus Teil 5.5.1 verglichen aus mit der aus dem vorherigen Teil 5.4.1

$$L_1 \text{ (Teil 4)} = (35.7 \pm 4.6)\ mH$$
$$L_1 \text{ (Teil 4)} = (34 \pm 4)\ mH$$
$$\Rightarrow 0.043\sigma$$

Auch hier liegen die Werte wieder sehr nah an einander. Gleiches kann man auch für die Werte für den Gesamtwiderstand behaupten.

$$
\begin{aligned}
R_{ges}^{\Lambda} &= 134 \pm 21\ \Omega \\
R_{ges}^{\Delta\omega} &= 149 \pm 5\ \Omega \\
&\Rightarrow 0.54\sigma \\
R_{ges}^{U_A} &= 127 \pm 12\ \Omega \\
&\Rightarrow 0.32\sigma
\end{aligned}
$$

6.6 Resonanzüberhöhung

Hier wurden die Resonanzfrequenzen der Einzelnen Bauelemente, separat aus ihrem jeweiligem Frequenzgang bestimmt. Wir erhalten folgende Werte:

Kenngröße	f_R^{theo} [kHz]	f_R^{mes} [kHz]	σ-Abweich
R_{ges} = 290 ± 17 Ω	3.89 ± 0.33	4.06 ± 0.05	0.61
C = 47.0 ± 4.7 [nF]	3.78 ± 0.34	3.93 ± 0.05	0.52
L_1 = 34 ± 4 [mH]	3.99 ± 0.32	4.19 ± 0.05	0.70

Auch hier kann man wieder keine signikante Abweichung von den theoretisch vorhergesagten Werten ablesen.

6.7 Bandpassfilter

Hier ist unser Ergebniss für die Resonanzfrequenz des Bandpassfilters. Der Theorie nach sollte sie der des Serienschwingkreises entsprechen, sofern R, C und L unverändert bleiben natürlich.

$$
\begin{aligned}
f_R^{Bandpass} &= f_R^{Serienschwingkreis} \text{ (theoretisch)} \\
\Rightarrow f_R^{theo} &= 3.82 \pm 0.10 \text{ [kHz]} \\
f_R^{mes} &= 4.11 \pm 0.04 \text{ [kHz]} \\
&\Rightarrow 2.89\sigma
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis unserer Messung weicht relativ stark, wenn auch nicht signifikant (3σ), vom Erwartungswert ab. Dies ist zwar ungewöhnlich besonders in Anbetracht unserer sonst so geringen Abweichungen der anderen Werte untereinander. Evtl. lässt sich das durch ungenaues ablesen gegen Ende des Versuchstages erklären, ein weiterer Grund könnte damit zusammenhängen dass ein Folgefehler, unserem "theoretischen" Wert, zugrundeliegt, der ja nicht errechnet wurde, aus dem theoretischem Ideal des Schwingkreises, sondern lediglich der Wert aus einer vorherigen Messung in Teil 5.4.1 ist.

6.8 Signalumformung

In diesem Teil wurden die Auswirkungen verschiedener Filterschaltungen auf ein Rohsignal untersucht. Interessant dabei war es den Effekt der Filterschaltungen direkt am Frequenzspektrum des Signals, sehen zu können. Am Ende sind wir zu dem Schluss gekommen das der niederohmige Bandpassfilter das Signal am besten verarbeiten konnte. Sicherlich ist es aber noch möglich das Signal noch besser zu filtern mit einer Kombination verschiedener Filterschaltungen.

6.9 AM-Empfänger

Am Ende des Versuchs ist es vorgesehen das erlernte Wissen in der Anwendung zu sehen, dazu wird ein "einfacher" AM-Empfänger gebaut. Eigentlich sollte man dann mit diesem dann nach Verschiedenen Sendern suchen können, dies ist aber im "Digitalen Zeitalter" nichtmehr möglich da kaum noch AM-Radio-Sender betrieben werden. Die Uni stellt allerdings einen eigenen Sender zur Verfügung auf dem von einem MP3-Player Musik abgespielt wird, diese kann man dann über eine Antenne empfangen und mit der richtigen Empfänger schaltung auch klar und deutlich hören.

6.10 Fazit

Der Versuch ist sehr lang und deswegen auf zwei Tage aufgeteilt worden, die Tatsache das man am Ende dann eine Anwendung für das erlernte Wissen erproben kann ist ermutigend sich durch die Vorbereitenden Teile schnell durchzuarbeiten. Die Anwendung ist beeindrucken, sowohl in ihrer Einfachheit der technischen Umsetzung, als auch in ihrer Funktionen und das was solche Technologien letzendlich ermöglichen, Die drahtlose Kommunikation mit annährend Lichtgeschwindigkeit. Leider hat man nicht viel Zeit selber weiter zu experimentieren ob man am Ende nicht doch noch ein Signal Empfangen kann. Unsere messwerte und die daraus bestimmten Größen sind allesamt sehr präzise ausgefallen, was auf saubere Messarbeit hindeutet, sowie auch hervorragende Instrumente die einem zur Verfügung gestellt werden. Alles in einem kann man den Versuch durchaus als Erfolg betrachten.