Exercício 08: Equação de Onda

Francisco Cerdeira*

Aproximação das derivadas parciais da equação de onda pelo método das diferenças finitas e posterior análise de como a velocidade influencia não só a propagação da onda como também a estabilidade do método

Resolução da equação de onda

- A equação de onda é uma equação hiperbólica diferencial às derivadas parciais (PDE) que para uma dimensão toma a forma descrita em 1.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

Podemos distinguir 2 tipos de problemas: aos valores iniciais (Cauchy) ou aos valores de fronteira (Dirichlet ou Neumann consoante se são conhecidos os valores da função na fronteira estabelecida ou das suas derivadas, respetivamente). Neste caso são conhecidos os valores iniciais descritos em 4 e 5. O método das diferenças finitas é dado pela equação 2

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi(x_{n+1}) + \phi(x_{n-1}) - \phi(x_n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \tag{2}$$

onde

- $O(\Delta x^2)$, é o erro associado ao método
- n, é a iteração atual
- Δx, é o incremento usado

Aproximando as derivadas parciais de 1 com diferenças finitas, dadas por 2, resulta a equação 3

$$\begin{aligned} u(x, t+\Delta t) = 2(1-b)u(x,t) + b[u(x+\Delta x, t) \\ + u(x-\Delta x, t)] - u(x, t-\Delta t) \end{aligned} \tag{3}$$

onde

- $b = (v\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$
- Δx e Δt, são os incrementos no espaço e no tempo, respetivamente

para a qual é necessário definir as condições iniciais

$$u(x,0) = e^{-(-x-10)^2} \tag{4}$$

$$u(x,-\Delta t) = e^{-(-x-v\Delta t-10)^2} \tag{5}$$

sendo que o erro associado a este método escala com

$$\Delta x \approx v\Delta t \tag{6}$$

* francisco.cerdeira@gmail.com

de onde rapidamente se conclui que fixando o tamanho da iteração no espaço, Δx, e no tempo, Δt, podemos testar a estabilidade do nosso método apenas em função de v.

- Na implementação do código teve-se o cuidado de definir as condições iniciais apresentadas em 4 e 5 em que $-\Delta t$ corresponde ao primeiro elemento do *array* temporal assim como as condições fronteira periódicas que implica que o elemento seguinte ao ultimo seja o primeiro e que o anterior ao primeiro seja o ultimo. Optou-se por um passo de iteração com igual tamanho, $\Delta x = \Delta t = 0.1$ com um domínio espacial $x \in [0, 30]m$ e temporal $t \in [0, 15]s$ o que resulta num tamanho de matriz 300×150. Através de um ciclo *for*, é feito variar o valor de $b = \{0.5, 1, 1.5\}$, que tendo em conta a sua formula conclui-se que os valores usados para a velocidade de propagação é aproximadamente $v = \{0.707, 1, 1.225\}ms^{-1}$.

- Em baixo encontram-se as figuras para cada um dos b usados onde se verifica que para um $b = 1.5$ a solução não converge e o método falha (na figura 3 temos que para um t que se aproxima de 15 s o valor de $u(x,t)$ aproxima-se de infinito. Isto está de acordo com as características do método que pressupõem que para valores de $v\Delta t >> 1$ resultem erros de convergência. No caso contrário, em que $v\Delta t << 1$, pode ser necessário interpolar os valores obtidos algo que não se verificou. Nos 2 primeiros casos, para $b = 0.5$ e $b = 1$ o método apresenta uma solução estável, cuja a onda para $b = 0.5$ aproxima-se da extremidade do sistema no fim da simulação onde começa a ser refletida, algo mais fácil de observar na figura 2 cuja onda apresenta uma maior velocidade e deste modo uma maior porção desta já foi refletida no fim da simulação.

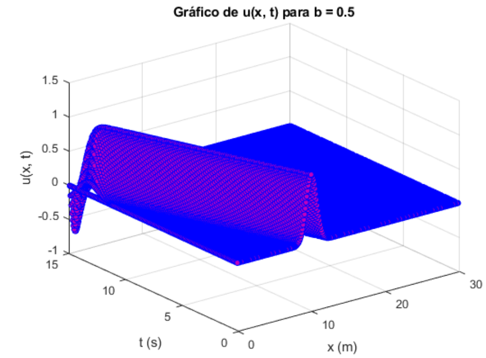

Figura 1. Nesta figura temos uma onda com $v \approx 0.707 ms^{-1}$. A solução é estável.

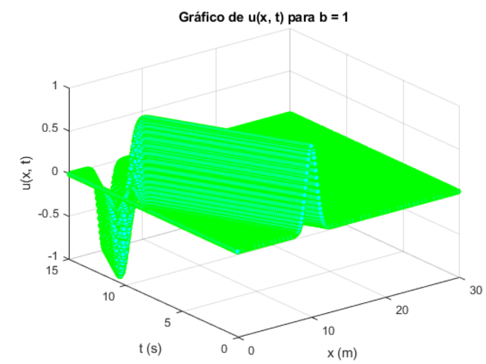

Figura 2. Nesta figura fez-se aumentar a velocidade de propagação da onda em relação a 1 e pode-se observar que parte da onda já foi refletida. Aqui $b = v = 1$ e a solução também é estável

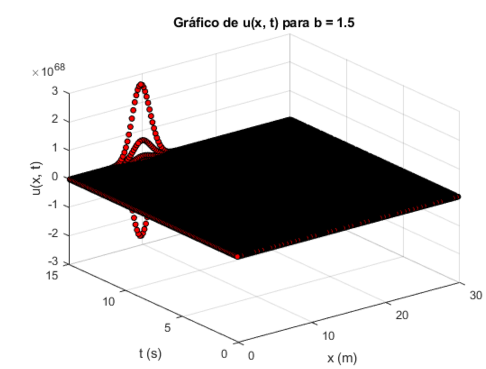

Figura 3. Aqui é representado $u(x,t)$ para $b = 1.5$, valor este que produz uma instabilidade no método ($u(x,t)$ toma valores muito grandes quando $t \approx 15$ e a onda não é formada). Os valores para $u(x,t)$ apresentados não representam a verdadeira solução do sistema