Exercício 02: Percolação

Francisco Cerdeira*

O objetivo passa por gerar diferentes configurações de percolação, numa rede $N = L \times L$ com probabilidade de ocupação p. Usando o método da queima, efetua-se um estudo estatístico que relaciona N e p com a probabilidade de existir um agregado percolativo e o seu eventual tamanho.

Gerar configurações canónicas de percolação

- Nesta primeira secção foi necessário gerar e visualizar as diferentes configurações de percolação obtidas fazendo variar os parâmetros N e p introduzidos em baixo. Para tal foi necessário recorrer a um gerador de números aleatórios , tendo-se optado pelo *drand48()*, assim como a 2 códigos fornecidos, *latticeview.h* (visualização) e *main.cpp* (exemplo de utilização).
- As configurações são obtidas correndo a rede quadrada de um lado ao outro, gerando-se em cada posição um numero aleatório no intervalo $[0; 1]$ (daí ter-se optado pela função *drand48()* em detrimento da função *rand()*) e atribuindo-se uma probabilidade p de ocupar ou não esta posição. Por outras palavras, se $drand48() < p$ então a posição (x, y) é ocupada, caso contrario, permanece livre. Na figura 1 observa-se o resultado para uma configuração com $L = 15$ e $p = 0.5$

Figura 1. Exemplo de uma configuração de percolação. Os parâmetros usados foram $L = 15$ e $p = 0.5$

Método da Queima

- Ao modificar a probabilidade p e o numero de quadrados de lado da rede L a probabilidade de observar um agregado de percolação, ou seja, a probabilidade de existir um caminho da base ao topo constituído por células ocupadas, altera-se.
- De modo a verificar as configurações recorreu-se ao método da queima descrito em baixo, sendo apresentado o resultado de uma das configurações na figura 2.

1. Considerando a secção 3 são iniciados 2 ciclos *for* responsáveis por correr os 2 *arrays* com os valores possíveis para N e p, assim como outro ciclo para o numero de configurações geradas com os diferentes parâmetros.
   - $L = 25; 50; 75; 100$
   - p =0.44; 0.46; 0.48; 0.50; 0.52; 0.54; 0.56; 0.58; 0.60; 0.62; 0.64; 0.66; 0.68; 0.70; 0.72; 0.74
   - Número de pontos = 1000
2. É criado um ciclo *for* responsável pela mudança de estado de 1 para 2 de todas as células da base (1ª linha).
3. Um ciclo *while* corre enquanto existem células, na atual iteração, a queimar. Neste ciclo são efetuadas as seguintes operações:
   (a) Ciclos *for* garantem que:
      i. toda a vizinhança de uma célula em 2 passe 4;
      ii. as células são atualizadas a cada iteração: as que estão em 2 passam a 3 e aquelas que estão em 4 passam a 2 à medida que atualizam o número de células a 2
   (b) Conta-se o número de ciclos para efeitos estatísticos:
      i. Tempo de queima: número de *loops while*
      ii. Número de passos até um agregado percolativo ser obtido (caminho mais curto): número de *loops while* até uma célula no topo da rede arder. Na eventualidade do seu valor ser 0 considera-se não existir agregado.

Estado	Descrição
0	Célula livre
1	Célula ocupada
2	Célula a queimar
3	Célula queimada
4	Célula a queimar na próxima iteração

Tabela I. Os vários estados, assim como a sua descrição, que uma determinada célula pode tomar no método da queima

* francisco.cerdeira@gmail.com

Figura 2. Exemplo da aplicação do método da queima para a configuração obtida e apresentada na figura 1

Estatística

- Nesta secção serão apresentados os resultados do código descrito na secção 2. Incluem-se nesta lista de resultados a fração de amostras que têm agregado percolativo, o tempo de queima, o caminho curto médio e a probabilidade crítica, p_c

- Como foi introduzido na secção 2, podemos obter o tempo de queima contando o numero de iterações do *loop while* mas o uso de varias amostras para o mesmo N e p leva a que seja necessário garantir que, no caso do do caminho curto médio, a média não seja feita considerando todas as amostras obtidas, à semelhança do que é feito para o tempo de queima, mas sim em relação ao numero de amostras em que se obtém um agregado percolativo. Da divisão entre o numero de amostras com agregado e o número de amostras obtém-se a fração de amostras com agregado. A probabilidade crítica, p_c, define-se como a probabilidade, p, a partir da qual passa a existir um agregado percolativo para um determinado N.

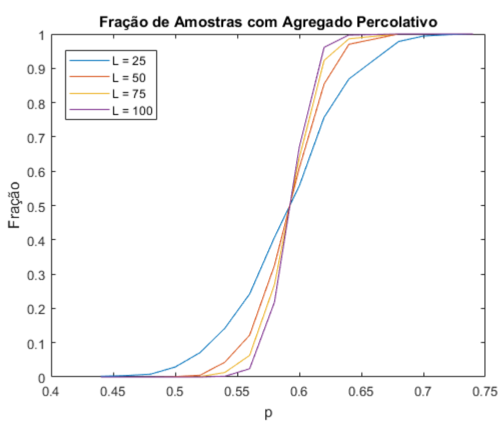

Figura 3. Gráfico da fração de amostras com agregado percolativo. Daqui pode retirar-se que p_c se encontra no intervalo $[0.5; 0.55]$ e que este valor é independente de N

- As figuras 3, 4, 5 apresentam os resultados do código.

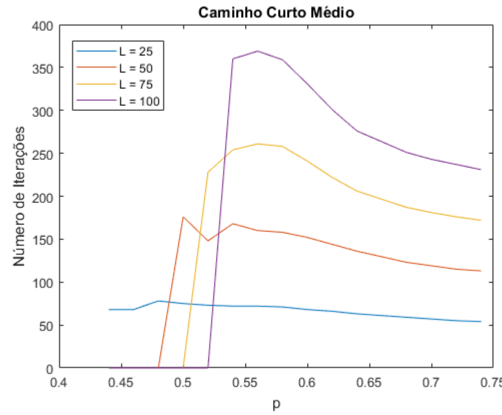

Figura 4. Caminho curto médio. Numero de iterações executadas até à obtenção de um agregado de percolação. É inversamente proporcional a p. Chama-se a atenção ara o facto dos valores iniciais para $L = 50$, $L = 75$ e $L = 100$ não estão bem representados pois o 0 não representa um caminho curto mas sim a inexistência de agregado percolativo. O seu calculo é descrito na secção 2.

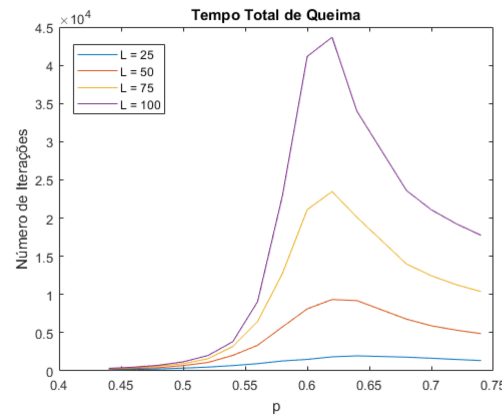

Figura 5. Tempo médio de queima. Numero de iterações executadas até os fogos estarem extintos. Aumenta com N. O seu calculo é descrito na secção 2.

- Pela figura 3 e considerando que a probabilidade critica é encontrada na intersecção das curvas, conclui-se que $p_c \approx 0.592$.

  Quanto ao tempo de queima e ao caminho curto médio observa-se o esperado: o tempo de queima aumenta com N e p e o caminho curto médio diminui com p. Isto explica-se com o facto de serem geradas mais células ocupadas para queimar e que mais células ocupadas levam a que o número de passos para ir da base ao topo seja menor, respetivamente.