Exercício 06: Lançamento oblíquo

Francisco Cerdeira*

Aplicação dos métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) ao lançamento oblíquo sem e com resistencia do ar, determinando o erro associado ao calculo do alcance máximo e o ângulo a que coreesponde o alcance máximo em função de γ, respetivamente.

Métodos e Algoritmo

- O método de Euler é um método explicito usado na resolução de ODEs quando conhecidos os valores iniciais que resulta da truncagem da serie de Taylor nos termos de ordem superior a 1. Pela eq. 1 o método tem Ordem Local (OL) 2 e Global (OG) 1.

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \dot{y}(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \tag{1}$$

- O método RK4 segue a formula apresentada em 2

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \left(\frac{k_1^y}{6} + \frac{k_2^y}{3} + \frac{k_3^y}{3} + \frac{k_4^y}{6}\right)\Delta t + O(\Delta t^5) \tag{2}$$

  onde

  - $k_1^y = f(y,t)$, $k_2^y = f(y + \frac{\Delta t k_1^y}{2}, t + \frac{\Delta t}{2})$, $k_3^y = f(y + \frac{\Delta t k_2^y}{2}, t + \frac{\Delta t}{2})$, $k_4^y = f(y + \Delta t k_3^y, t + \Delta t)$
  - $O(\Delta t^5)$, é o erro associado (OL 5 e OG 4)
  - Δt, é o incremento temporal

- O alcance máximo é calculado através da eq. 3 e tem em conta os 2 últimos valores para a posição calculado pelo algoritmo em baixo

$$\Delta x^{max} = -\frac{y_{final} - \left(\frac{y_{final+1} - y_{final}}{x_{final+1} - x_{final}}\right) x_{final}}{\frac{y_{final+1} - y_{final}}{x_{final+1} - x_{final}}} \tag{3}$$

- Da aplicação destes métodos resultam algoritmos semelhantes, com apenas pequenas variações. O algoritmo em baixo tem por base o método de Euler.

  - Partindo do ponto inicial:
    1. Calculo de $\dot{v}^y$ e $\dot{v}^x$

       $$\dot{v}_n^x = 0, \quad \dot{v}_n^y = -g$$

    2. Avançar linearmente

       $$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_n^x \Delta t \\ y_{n+1} &= y_n + v_n^y \Delta t \\ v_{n+1}^x &= v_n^x + \dot{v}_n^x \Delta t \\ v_{n+1}^y &= v_n^y + \dot{v}_n^y \Delta t \end{aligned}$$

       onde
       * n, representa a iteração atual
       * g, valor da aceleração gravítica
       * no caso do método RK4 os valores que se encontram a multiplicar por Δt são substituídos pelos parâmetros k calculados previamente.
    3. Repetir 1 e 2 até $y_{n+1} \leq 0$

- Consoante o problema apresentado (sem ou com resistência do ar), o algoritmo ou será repetido para vários valores de Δt, sendo guardados os valores de Δx^{max}, calculados através da eq. 3 ou será usado o mesmo valor de Δt e será feito variar o valor de θ e γ apresentados mais à frente de modo a calcular o valor de θ para um dado γ para qual é máximo o alcance, respetivamente.

Lançamento sem resistência do ar

- Nesta secção irá ser estudado como o erro com que o alcance máximo (Δx^{max}) é calculado depende do método (Euler ou RK4) e do passo de integração usado. Para as condições iniciais temos que $(x,y) = (0,0)m$, $(v_0 = 10ms^{-1})$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ de onde resulta $v_0^x = v_0 cos(\theta)$ e $v_0^y = v_0 sin(\theta)$, sendo depois calculado o desvio, Δ, de Δx_{Euler}^{max} e Δx_{RK4}^{max}, calculados através da equação 3, à solução analítica, $\Delta x_{Teorico}^{max} = 10.197m$, calculada com $g = 9.80665$, valor este usado ao longo do exercício. Para ambos os métodos temos $\Delta t \in [0.001, 0.5]$ com incrementos de 0.001. Em baixo é apresentada a formula para o desvio, os parâmetros k que serão calculados no método RK4 e os 2 gráficos resultantes.

$$\Delta = \frac{|\Delta x_{Teorico}^{max} - \Delta x^{max}|}{\Delta x_{Teorico}^{max}} \tag{4}$$

  - $k_{1_n}^x = k_{2_n}^x = k_{3_n}^x = k_{4_n}^x = v_n^x$
  - $k_{1_n}^y = v_n^y$; $k_{2_n}^y = v_n^y + \frac{1}{2}k_{1_n}^{v^y}\Delta t$; $k_{3_n}^y = v_n^y + \frac{1}{2}k_{2_n}^{v^y}\Delta t$; $k_{4_n}^y = v_n^y + k_{3_n}^{v^y}\Delta t$

* francisco.cerdeira@gmail.com

- $k_{1_n}^{v^x} = k_{2_n}^{v^x} = k_{3_n}^{v^x} = k_{4_n}^{v^x} = 0$
- $k_{1_n}^{v^y} = k_{2_n}^{v^y} = k_{3_n}^{v^y} = k_{4_n}^{v^y} = -g$

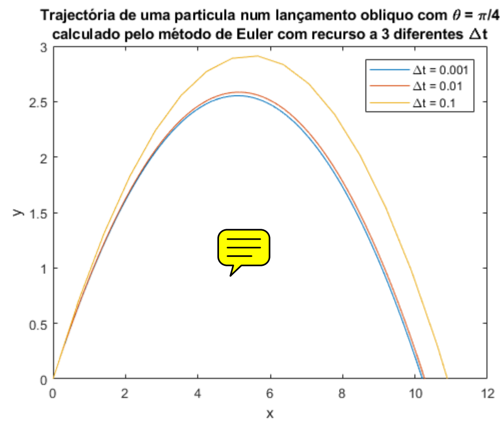

Figura 1. Exemplo de como o uso de diferentes Δt afeta a trajetória calculada pelo método de Euler. A partir de $\Delta t = 0.01$ a diferença passa a ser praticamente desprezável

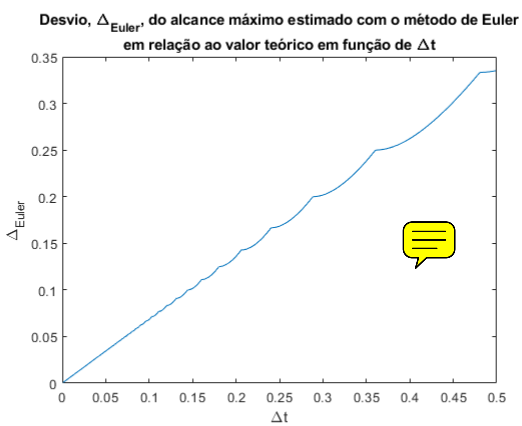

Figura 2. Desvio do valor para o alcance máximo calculado pelo método de Euler ao valor analítico. Conclui-se que o erro escala linearmente com o tamanho do passo de iteração Δt como era expectável tendo em conta a OG. As pequenas flutuações estão relacionadas com o método usado para calcular Δx_{Euler}^{max} (eq. 3)

Lançamento com resistência do ar

- Nesta secção optou-se pelo uso do RK4 sendo que ao contrário do que foi feito anteriormente aqui o objetivo será, tendo em conta a equação 5, fazer variar θ para vários valores de γ mantendo-se a posição e velocidade inicial da secção anterior. Os parâmetros k são apresentados em baixo, tendo sido usado $\gamma \in]0,1[$ e $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ com incrementos de 0.001.

$$\ddot{r} = g - \gamma v^2 \hat{v} \tag{5}$$

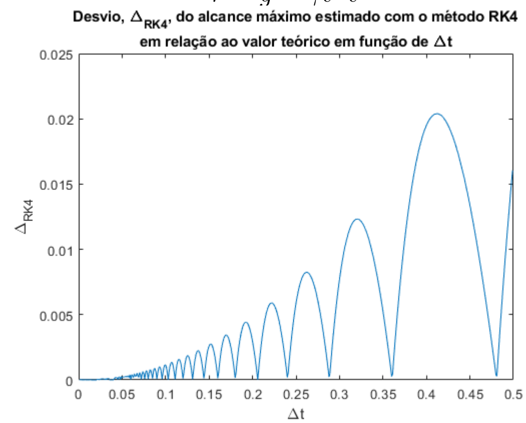

Figura 3. Desvio do valor para o alcance máximo calculado pelo método RK4 ao valor analítico. Neste caso as flutuações são muito mais percetíveis, resultado de um erro que escala com uma ordem superior ao método de Euler como assim indica a OG e deste modo, o erro inerente à eq. 3 desempenha um papel muito maior que o inerente ao próprio método.

- $k_{1_n}^{x} = v_n^x$; $k_{2_n}^{x} = k_{1_n}^{x} + \frac{1}{2} k_{1_n}^{v^x} \Delta t$; $k_{3_n}^{x} = k_{2_n}^{x} + \frac{1}{2} k_{2_n}^{v^x} \Delta t$; $k_{4_n}^{x} = k_{3_n}^{x} + k_{3_n}^{v^x} \Delta t$
- $k_{1_n}^{y} = v_n^y$; $k_{2_n}^{y} = k_{1_n}^{y} + \frac{1}{2} k_{1_n}^{v^y} \Delta t$; $k_{3_n}^{y} = k_{2_n}^{y} + \frac{1}{2} k_{2_n}^{v^y} \Delta t$; $k_{4_n}^{y} = k_{3_n}^{y} + k_{3_n}^{v^y} \Delta t$
- $k_{1_n}^{v^x} = -\gamma k_{1_n}^{x} v_1$; $k_{2_n}^{v^x} = -\gamma k_{2_n}^{x} v_2$; $k_{3_n}^{v^x} = -\gamma k_{3_n}^{x} v_3$; $k_{4_n}^{v^x} = -\gamma k_{4_n}^{x} v_4$
- $k_{1_n}^{v^y} = g - \gamma k_{1_n}^{y} v_1$; $k_{2_n}^{v^y} = g - \gamma k_{2_n}^{y} v_2$; $k_{3_n}^{v^y} = g - \gamma k_{3_n}^{y} v_3$; $k_{4_n}^{v^y} = g - \gamma k_{4_n}^{y} v_4$
- $v_i = \sqrt{(k_i^x)^2 + (k_i^y)^2}$

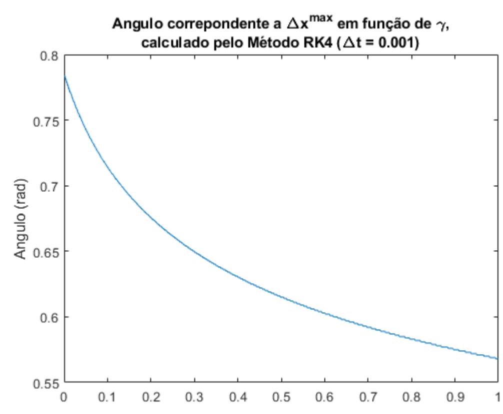

Figura 4. Nesta figura é apresentado como o ângulo para o qual o alcance é máximo depende de γ. Para maiores valores de γ, o ângulo θ diminui, aumentando v^x em detrimento de v^y.